

CHUYÊN ĐỀ 23	PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN
---------------------	--

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI	2
Dạng 1. Xác định VTCP	2
Dạng 2. Xác định phương trình đường thẳng	4
Dạng 2.1 Xác định phương trình đường thẳng cơ bản	4
Dạng 2.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc	6
Dạng 2.3 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song	10
Dạng 2.4 Xác định một số phương trình đường thẳng đặc biệt (phân giác, trung tuyến...)	11
Dạng 3. Một số bài toán liên quan giữa điểm với đường thẳng	14
Dạng 3.1 Bài toán liên quan điểm (hình chiếu) thuộc đường, khoảng cách	14
Dạng 3.2 Bài toán cực trị	17
Dạng 4. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng với mặt phẳng	19
Dạng 4.1 Bài toán liên quan khoảng cách, góc	19
Dạng 4.2 Bài toán phương trình mặt phẳng, giao tuyến 2 mặt phẳng	20
Dạng 4.3 Bài toán giao điểm (hình chiếu, đối xứng) của đường thẳng với mặt phẳng	22
Dạng 4.4 Bài toán cực trị	25
Dạng 5. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng thẳng với đường thẳng	30
Dạng 6. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng với mặt cầu	32
Dạng 7. Một số bài toán liên quan giữa điểm – mặt – đường – cầu	32
Dạng 7.1 Bài toán tìm điểm	32
Dạng 7.2 Bài toán tìm mặt phẳng	34
Dạng 7.3 Bài toán tìm đường thẳng	34
Dạng 7.4 Bài toán tìm mặt cầu	35
Dạng 7.5 Bài toán cực trị	37
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO	40
Dạng 1. Xác định VTCP	40
Dạng 2. Xác định phương trình đường thẳng	41
Dạng 2.1 Xác định phương trình đường thẳng cơ bản	41
Dạng 2.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc	43
Dạng 2.3 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song	48
Dạng 2.4 Xác định một số phương trình đường thẳng đặc biệt (phân giác, trung tuyến...)	50
Dạng 3. Một số bài toán liên quan giữa điểm với đường thẳng	58
Dạng 3.1 Bài toán liên quan điểm (hình chiếu) thuộc đường, khoảng cách	58
Dạng 3.2 Bài toán cực trị	61

Dạng 4. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng với mặt phẳng.....	65
Dạng 4.1 Bài toán liên quan khoảng cách, góc	65
Dạng 4.2 Bài toán phương trình mặt phẳng, giao tuyến 2 mặt phẳng.....	67
Dạng 4.3 Bài toán giao điểm (hình chiếu, đối xứng) của đường thẳng với mặt phẳng.....	69
Dạng 4.4 Bài toán cực trị.....	78
Dạng 5. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng thẳng với đường thẳng	95
Dạng 6. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng với mặt cầu	97
Dạng 7. Một số bài toán liên quan giữa điểm – mặt – đường – cầu	99
Dạng 7.1 Bài toán tìm điểm.....	99
Dạng 7.2 Bài toán tìm mặt phẳng	102
Dạng 7.3 Bài toán tìm đường thẳng.....	104
Dạng 7.4 Bài toán tìm mặt cầu.....	106
Dạng 7.5 Bài toán cực trị.....	112

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Xác định VTCP

- Câu 1.** (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là:
- A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$ B. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$ C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$ D. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$
- Câu 2.** (Mã 102 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vector nào dưới đây là vector chỉ phương của đường thẳng d
- A. $\vec{u} = (1; 3; -2)$. B. $\vec{u} = (2; 5; 3)$. C. $\vec{u} = (2; -5; 3)$. D. $\vec{u} = (1; 3; 2)$.
- Câu 3.** (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(0; 1; 2)$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng AB .
- A. $\vec{d} = (-1; 1; 2)$ B. $\vec{a} = (-1; 0; -2)$ C. $\vec{b} = (-1; 0; 2)$ D. $\vec{c} = (1; 2; 2)$
- Câu 4.** (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một vector chỉ phương là
- A. $\vec{u}_1 = (3; -1; 5)$ B. $\vec{u}_4 = (1; -1; 2)$ C. $\vec{u}_2 = (-3; 1; 5)$ D. $\vec{u}_3 = (1; -1; -2)$
- Câu 5.** (Mã 103 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{2}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?
- A. $\vec{u}_4 = (1; 3; 2)$. B. $\vec{u}_3 = (-2; 1; 3)$. C. $\vec{u}_1 = (-2; 1; 2)$. D. $\vec{u}_2 = (1; -3; 2)$.

- Câu 6. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vector chỉ phương là
- A. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$ B. $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$ C. $\vec{u}_3 = (2; 1; 1)$ D. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 1)$
- Câu 7. (Mã đề 104 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{3}$. Vector nào sau đây là một vector chỉ phương của đường thẳng d ?
- A. $\vec{u}_2 = (1; -2; 3)$ B. $\vec{u}_3 = (2; 6; -4)$ C. $\vec{u}_4 = (-2; -4; 6)$ D. $\vec{u}_1 = (3; -1; 5)$
- Câu 8. (Mã đề 101 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?
- A. $\vec{u}_4 = (1; 2; -3)$ B. $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$ C. $\vec{u}_1 = (2; 1; -3)$ D. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$
- Câu 9. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?
- A. $Q(2; -1; 2)$ B. $M(-1; -2; -3)$ C. $P(1; 2; 3)$ D. $N(-2; 1; -2)$
- Câu 10. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy . Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?
- A. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$ B. $\vec{u}_1 = (0; 2; 0)$ C. $\vec{u}_2 = (1; 2; 0)$ D. $\vec{u}_3 = (1; 0; 0)$
- Câu 11. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vector sau, đâu không phải là vector chỉ phương của d ?
- A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$ B. $\vec{u}_2 = (3; -6; -9)$ C. $\vec{u}_3 = (1; -2; -3)$ D. $\vec{u}_4 = (-2; 4; 3)$
- Câu 12. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u} = (2; 1; 1)$ là một vector chỉ phương?
- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ B. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$
 C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$ D. $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$
- Câu 13. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ nhận véc tơ $\vec{u}(a; 2; b)$ làm véc tơ chỉ phương. Tính $a + b$.
- A. -8 B. 8 C. 4 D. -4
- Câu 14. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một vector chỉ phương của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - 6t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 9t \end{cases}$?

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{-1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. B. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. C. $(2; 1; 0)$. D. $(4; -6; 0)$.

Câu 15. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ có một vector chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (1; 2; 3)$ B. $\vec{u}_2 = (2; 1; 2)$ C. $\vec{u}_3 = (2; -1; 2)$ D. $\vec{u}_4 = (-1; -2; -3)$

Câu 16. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Vector nào sau đây là một vector chỉ phương của đường thẳng $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

A. $(-2; 1; -3)$. B. $(-3; 2; 1)$. C. $(3; -2; 1)$. D. $(2; 1; 3)$.

Câu 17. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-7}{1}$ nhận vector nào dưới đây là một vector chỉ phương?

A. $(-2; -4; 1)$. B. $(2; 4; 1)$. C. $(1; -4; 2)$. D. $(2; -4; 1)$.

Câu 18. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ véc tơ nào dưới đây là

một véc tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$,

A. $\vec{u} = (1; 4; 3)$. B. $\vec{u} = (1; 4; -2)$. C. $\vec{u} = (1; 0; -2)$. D. $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

Dạng 2. Xác định phương trình đường thẳng

Dạng 2.1 Xác định phương trình đường thẳng cơ bản

Câu 19. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là

phương trình chính tắc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$ C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$

Câu 20. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$. B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.
C. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$. D. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 21. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số trục Oz là

A. $z = 0$. B. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$ là

A. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Câu 23. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$ B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$

Câu 24. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, trục $y'Oy$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 26. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(1;1;-1)$ và $Q(2;3;2)$

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$

Câu 27. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(5;4;-1)$ là

A. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{2}$ B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-4}$
C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$ D. $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$

Câu 28. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = t \\ y = t (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 29. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian $Oxyz$ có đường thẳng có

phương trình tham số là $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$. Khi đó phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$ B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$
 C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$ D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$

Dạng 2.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 30. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 31. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Câu 32. (Mã 102 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2), B(1;2;1), C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$.

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Câu 33. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường

thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$
 C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$

Câu 34. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm

$A(1;2;0), B(2;0;2), C(2;-1;3), D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \end{array}$$

Câu 35. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -1; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(3; -2; 0)$, $D(1; 1; -3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \end{array}$$

Câu 36. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases} \end{array}$$

Câu 37. (Mã 103 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; 2; -1)$ và $D(2; 0; -2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \end{array}$$

Câu 38. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} & \text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1} & \text{C. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1} & \text{D. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \end{array}$$

Câu 39. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3})$. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2} & \text{B. } \frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2} \\ \text{C. } \frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2} & \text{D. } \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2} \end{array}$$

Câu 40. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases} \end{array}$$

Câu 41. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \end{array}$$

Câu 42. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \end{array}$$

Câu 43. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}, d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2} \text{ và mặt phẳng } (P): 2x + 2y - 3z = 0. \text{ Phương trình nào dưới đây}$$

là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } 2x - y + 2z + 13 = 0 & \text{B. } 2x + y + 2z - 22 = 0 \\ \text{C. } 2x - y + 2z - 13 = 0 & \text{D. } 2x - y + 2z + 22 = 0 \end{array}$$

Câu 44. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z = 1$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với (α) .

$$\begin{array}{llll} \text{A. } d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}. & \text{B. } d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}. & \text{C. } d_3: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}. & \text{D. } d_4: \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \end{array}$$

Câu 45. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình tham số là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Câu 46. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (P) .

$$\text{A. } \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{2}. \quad \text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}.$$

$$\text{C. } \frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}. \quad \text{D. } \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}.$$

Câu 47. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ

$$Oxyz \text{ cho } A(1; -1; 3) \text{ và hai đường thẳng } d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}, \quad d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Phương trình đường thẳng qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

$$\begin{aligned} \text{A. } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}. \quad & \text{B. } \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{4}. \\ \text{C. } \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}. \quad & \text{D. } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}. \end{aligned}$$

Câu 48. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$

và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d có phương trình là

$$\begin{aligned} \text{A. } \Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}. \quad & \text{B. } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}. \\ \text{C. } \Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}. \quad & \text{D. } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}. \end{aligned}$$

Câu 49. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm

$$M(1;0;1) \text{ và đường thẳng } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}. \text{ Đường thẳng đi qua } M, \text{ vuông góc với } d \text{ và cắt}$$

Oz có phương trình là

$$\begin{aligned} \text{A. } \begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases} \quad & \text{B. } \begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \quad & \text{C. } \begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \quad & \text{D. } \begin{cases} x=1+3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 50. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$$(P): 3x + y + z = 0 \text{ và đường thẳng } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{2}. \text{ Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng nằm trong } (P), \text{ cắt và}$$

vuông góc với d . Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ ?

$$\begin{aligned} \text{A. } \begin{cases} x=-2+4t \\ y=3-5t \\ z=3-7t \end{cases} \quad & \text{B. } \begin{cases} x=-3+4t \\ y=5-5t \\ z=4-7t \end{cases} \quad & \text{C. } \begin{cases} x=1+4t \\ y=1-5t \\ z=-4-7t \end{cases} \quad & \text{D. } \begin{cases} x=-3+4t \\ y=7-5t \\ z=2-7t \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}, \quad d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .

$$\begin{aligned} \text{A. } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}. \quad & \text{B. } \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}. \\ \text{C. } \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}. \quad & \text{D. } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}. \end{aligned}$$

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 6 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) cắt và vuông góc với d có phương trình là?

- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+5}{3}$. B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{3}$.
C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+1}{3}$. D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-1}{3}$.

Câu 53. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 7 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+2}{-4}$; $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng $d_1; d_2$ có phương trình là

- A. $\frac{x+7}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{3}$ B. $\frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$
C. $\frac{x+4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$ D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$

Dạng 2.3 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song

Câu 54. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

- A. $x - 2y + z = 0$. B. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$
C. $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 55. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$, $(Q): x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

- A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Câu 56. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$; $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d ?

- A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ B. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ D. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$

Câu 57. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ

$Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng (P)

: $2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P) .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+4}{2}$.

Câu 58. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): 2x - y + 2z + 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$. Xét các

điểm A, B lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho AB song song với mặt phẳng (P) . Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. Một đường thẳng có vector chỉ phương $\vec{u} = (-9; 8; -5)$

B. Một đường thẳng có vector chỉ phương $\vec{u} = (-5; 9; 8)$

C. Một đường thẳng có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -5)$

D. Một đường thẳng có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 5; -2)$

Câu 59. (THPT LƯƠNG VĂN CAN - LẦN 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; -4)$ và mặt phẳng

$(P): 3x - 2y - 3z - 7 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau đây là phương

trình đường thẳng Δ đi qua A , song song (P) và cắt đường thẳng d ?

A. $\begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 - 54t \\ z = -4 + 47t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + 54t \\ y = 2 + 11t \\ z = -4 - 47t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + 47t \\ y = 2 + 54t \\ z = -4 + 11t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 - 11t \\ y = 2 - 47t \\ z = -4 + 54t \end{cases}$

Dạng 2.4 Xác định một số phương trình đường thẳng đặc biệt (phân giác, trung tuyến...)

Câu 60. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là

đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3; 5)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(1; 2; -2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -3 + 5t \\ z = 5 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 \\ z = 5 + 7t \end{cases}$

Câu 61. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là

đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

A.
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

Câu 62. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là

đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (-2;1;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

A.
$$\begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$$

Câu 63. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$. Gọi Δ là

đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (0;-7;-1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A.
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 11t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Câu 64. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC .

A. $AM: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$

B. $AM: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{1}$

C. $AM: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{-1}$

D. $AM: \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+1}{3}$

Câu 65. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, đường thẳng d đi qua A cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

A.
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

Câu 66. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3})$. Đường phân giác trong của tam giác OAB có phương trình là

A.
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 14t \\ y = 2t \\ z = -5t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 14t \\ z = 13t \end{cases}$$

Câu 67. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường

$$\text{thẳng } d_1: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}; d_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-11}{4} = \frac{z-5}{2}. \text{ Đường thẳng } d \text{ đi qua } A(5; -3; 5) \text{ cắt } d_1; d_2 \text{ lần lượt}$$

ở B, C . Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

- A. 2. B. 3. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 68. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1; 2; 3)$, $A(2; 4; 4)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y - z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , cắt (P) , (Q) lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 69. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2; 1; 0)$, $B(3; 0; 2)$, $C(4; 3; -4)$. Viết phương trình đường phân giác trong góc

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

Câu 70. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và $A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN . Một vector chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u} = (4; 5; -13)$. B. $\vec{u} = (2; 3; 2)$. C. $\vec{u} = (1; -1; 2)$. D. $\vec{u} = (-3; 5; 1)$.

Câu 71. (THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1; 0; 1)$, $B(1; 0; -3)$ và điểm D có hoành độ âm. Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua gốc tọa độ O . Khi đó đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình

A. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$. B. $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$. C. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$. D. $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$.

Câu 72. (THPT NGHEN - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$ và $\Delta_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$ cắt nhau và cùng nằm trong mặt phẳng (P) . Lập phương trình đường phân giác d của góc nhọn tạo bởi Δ_1 , Δ_2 và nằm trong mặt phẳng (P) .

A. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. B. $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

$$C. d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 - t \end{cases}$$

$$D. d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 \end{cases}$$

Câu 73. (QUẢNG XƯƠNG - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; -1)$, $B(2; 3; -1)$, $C(-2; 1; 1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là:

$$A. \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{5} \quad B. \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{5}$$

$$C. \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2} \quad D. \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

Câu 74. (SGD&ĐT BẮC GIANG - LẦN 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2; 2; 1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A , B , C trên các cạnh BC , AC , AB . Đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$A. d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

$$B. d: \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}$$

$$C. d: \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{19}{9}}{2}$$

$$D. d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-6}{2}$$

Câu 75. (CHUYÊN VINH - LẦN 2 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; 3; 3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

$$A. \vec{u}_3 = (2; 1; -1)$$

$$B. \vec{u}_2 = (1; -1; 0)$$

$$C. \vec{u}_4 = (0; 1; -1)$$

$$D. \vec{u}_1 = (1; 2; 1)$$

Dạng 3. Một số bài toán liên quan giữa điểm với đường thẳng

Dạng 3.1 Bài toán liên quan điểm (hình chiếu) thuộc đường, khoảng cách

Câu 76. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ?$$

$$A. N(1; 5; 2)$$

$$B. Q(-1; 1; 3)$$

$$C. M(1; 1; 3)$$

$$D. P(1; 2; 5)$$

Câu 77. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng

$$d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$$

$$A. N(2; -1; 2)$$

$$B. Q(-2; 1; -2)$$

$$C. M(-2; -2; 1)$$

$$D. P(1; 1; 2)$$

- Câu 78. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?
 A. $M(2; -1; 0)$. B. $M(8; 9; 10)$. C. $M(5; 5; 5)$. D. $M(3; -4; 5)$.
- Câu 79. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?
 A. $Q(2; -1; 2)$ B. $M(-1; -2; -3)$ C. $P(1; 2; 3)$ D. $N(-2; 1; -2)$
- Câu 80. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?
 A. $M(1; 3; -1)$. B. $M(-3; 5; 3)$. C. $M(3; 5; 3)$. D. $M(1; 2; -3)$.
- Câu 81. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.
 A. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$
 C. $M(-1; 0; -3)$ D. $M(2; 3; 3)$
- Câu 82. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?
 A. $K(1; -1; 1)$. B. $E(1; 1; 2)$. C. $H(1; 2; 0)$. D. $F(0; 1; 2)$.
- Câu 83. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$?
 A. $Q(-2; 1; -3)$. B. $P(2; -1; 3)$. C. $M(-1; 1; -2)$. D. $N(1; -1; 2)$.
- Câu 84. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1; 0; 2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?
 A. $P(2; -1; 1)$. B. $Q(0; -1; 1)$. C. $N(0; -1; 2)$. D. $M(-1; -1; 1)$.

Câu 85. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ?$$

- A. $Q(-1; 1; 3)$ B. $P(1; 2; 5)$ C. $N(1; 5; 2)$ D. $M(1; 1; 3)$

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $Q(2; -1; -2)$. B. $M(1; -2; -3)$. C. $P(-1; 2; -3)$. D. $N(2; -1; -2)$.

Câu 87. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TÔ NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau:

- A. $C(-3; 4; 5)$. B. $D(3; -4; -5)$. C. $B(-1; 2; -3)$. D. $A(1; -2; 3)$.

Câu 88. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -2; 1)$. Đường thẳng nào sau đây đi qua A ?

- A. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ B. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$
C. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ D. $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

Câu 89. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ?$

- A. $Q(-1; 1; 3)$ B. $P(1; 2; 5)$ C. $N(1; 5; 2)$ D. $M(1; 1; 3)$

Câu 90. (CHUYÊN NGUYỄN TẮT THÀNH YÊN BÀI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d ?

- A. $P(7; 2; 1)$. B. $Q(-2; -4; 7)$. C. $N(4; 0; -1)$. D. $M(1; -2; 3)$.

Câu 91. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của $M(1; 0; 1)$ lên đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ là

- A. $(2; 4; 6)$. B. $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$. C. $(0; 0; 0)$. D. $\left(\frac{2}{7}; \frac{4}{7}; \frac{6}{7}\right)$.

Câu 92. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm

$M(-4; 0; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -2t \end{cases}$. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu của M lên Δ . Tính $a+b+c$.

- A. 5. B. -1. C. -3. D. 7.

Câu 93. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Trong không gian Oxyz, tìm tọa độ hình

$$\text{chiếu H của } A(1;1;1) \text{ lên đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

- A. $H(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3})$. B. $H(1;1;1)$. C. $H(0;0;-1)$. D. $H(1;1;0)$.

Câu 94. (THPT QUANG TRUNG ĐỒNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho

$$\text{điểm } A(1;1;1) \text{ và đường thẳng } (d): \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}. \text{ Tìm tọa độ hình chiếu } A' \text{ của } A \text{ trên } (d).$$

- A. $A'(2;3;1)$. B. $A'(-2;3;1)$. C. $A'(2;-3;1)$. D. $A'(2;-3;-1)$.

Câu 95. Trong không gian Oxyz, cho hình thang cân ABCD có đáy là AB và CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. -3. B. 1. C. 3. D. -1.

Câu 96. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \text{ và hai điểm } A(-1;3;1); B(0;2;-1). \text{ Gọi } C(m;n;p) \text{ là điểm thuộc đường thẳng}$$

d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m + n + p$ bằng

- A. -1 B. 2 C. 3 D. -5

Câu 97. (CHUYÊN HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$

và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

- A. $(-1;0;4)$. B. $(7;1;-1)$. C. $(2;1;-2)$. D. $(0;2;-5)$.

Câu 98. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian Oxyz, khoảng cách từ điểm

$$M(2;-4;-1) \text{ tới đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \text{ bằng}$$

- A. $\sqrt{14}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{14}$ D. $2\sqrt{6}$

Câu 99. (HỌC MÃ NĂM 2018-2019-LẦN 02) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, Gọi $M(a; b; c)$ thuộc

$$\text{đường thẳng } \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}. \text{ Biết điểm } M \text{ có tung độ âm và cách mặt phẳng } (Oyz) \text{ một khoảng}$$

bằng 2. Xác định giá trị $T = a + b + c$.

- A. $T = -1$. B. $T = 11$. C. $T = -13$. D. $T = 1$.

Dạng 3.2 Bài toán cực trị

Câu 100. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi,

song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $Q(0;5;-3)$. B. $P(-3;0;-3)$. C. $M(0;-3;-5)$. D. $N(0;3;-5)$.

- Câu 101. (Mã 103 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?
 A. $Q(0;2;-5)$. B. $M(0;4;-2)$. C. $P(-2;0;-2)$. D. $N(0;-2;-5)$.
- Câu 102. (Mã 102 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?
 A. $N(0;3;-5)$. B. $M(0;-3;-5)$. C. $P(-3;0;-3)$. D. $Q(0;11;-3)$.
- Câu 103. (Mã đề 104 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?
 A. $M(0;8;-5)$. B. $N(0;2;-5)$. C. $P(0;-2;-5)$. D. $Q(-2;0;-3)$.
- Câu 104. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ và ba điểm $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a + b + c$ bằng
 A. -3 . B. 4 . C. 1 . D. 2 .
- Câu 105. (LÊ QUÝ ĐÔN - QUẢNG TRỊ - LẦN 1 - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 A. $M(1;2;3)$. B. $M(2;0;5)$. C. $M(3;-2;7)$. D. $M(3;0;4)$.
- Câu 106. (THPT CHU VĂN AN - HÀ NỘI - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?
 A. $T_{\max} = \sqrt{57}$. B. $T_{\max} = 3$. C. $T_{\max} = 2\sqrt{6} - 3$. D. $T_{\max} = 3\sqrt{6}$.
- Câu 107. (THPT NGUYỄN HUỆ - TT HUẾ - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$.
 A. $P = 1$. B. $P = -3$. C. $P = 3$. D. $P = -1$.
- Câu 108. (TT DIỆU HIỀN - CẦN THƠ - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0 .
 A. $x_0 = 1$. B. $x_0 = 3$. C. $x_0 = 0$. D. $x_0 = 2$.

- Câu 109. (CHUYÊN HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA=MB$ và $MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$
- A. $P=4$. B. $P=0$. C. $P=2$. D. $P=5$.

Dạng 4. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng với mặt phẳng

Dạng 4.1 Bài toán liên quan khoảng cách, góc

- Câu 110. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+1=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P) .

- A. $d=2$ B. $d=\frac{5}{3}$ C. $d=\frac{2}{3}$ D. $d=\frac{1}{3}$

- Câu 111. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$ bằng:

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

- Câu 112. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách

giữa đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=5+4t \\ z=2+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0$ bằng

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

- Câu 113. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng

$d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- A. 60° B. 30° C. 120° D. 45°

- Câu 114. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): 4x=7y+z+25=0$ và đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi d_1' là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P) . Đường thẳng d_2 nằm trên (P) tạo với d_1, d_1' các góc bằng nhau, d_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2(a;b;c)$. Tính $\frac{a+2b}{c}$.

- A. $\frac{a+2b}{c} = \frac{2}{3}$. B. $\frac{a+2b}{c} = 0$. C. $\frac{a+2b}{c} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{a+2b}{c} = 1$.

- Câu 115. (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm

$A(3;1;7), B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{2}$. D. 4.

Câu 116. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$

, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$, $d_2: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc

45° và nhận vector $\vec{n} = (1; b; c)$ làm một vector pháp tuyến. Xác định tích bc .

- A. -4 hoặc 0 . B. 4 hoặc 0 . C. -4 . D. 4 .

Câu 117. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường

thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45° và nhận

vector $\vec{n}(1; b; c)$ làm một vector pháp tuyến. Xác định tích bc .

- A. -4 hoặc 0 B. 4 hoặc 0 C. -4 D. 4

Câu 118. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN LẦN 1 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường

thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 , tạo với d_2 một góc 45° và

nhận vector $\vec{n}(1; b; c)$ làm một vector pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

- A. -4 . B. 4 . C. 4 hoặc 0 . D. -4 hoặc 0 .

Dạng 4.2 Bài toán phương trình mặt phẳng, giao tuyến 2 mặt phẳng

Câu 119. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và vuông

góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$ có phương trình là

- A. $2x + y + 3z + 2 = 0$. B. $x + 2y + 3z + 1 = 0$.
C. $2x + y + 3z - 2 = 0$. D. $3x + 2y + z - 5 = 0$.

Câu 120. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3; -1; 1)$. Phương

trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?

- A. $3x + 2y + z - 8 = 0$ B. $3x - 2y + z + 12 = 0$
C. $3x - 2y + z - 12 = 0$ D. $x - 2y + 3z + 3 = 0$

Câu 121. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình:

$\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các

giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ .

- A. $m = 2$ B. $m = -52$ C. $m = 52$ D. $m = -2$

Câu 122. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt

phẳng đi qua $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} - \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$.

- A. $2x - y + 3z + 9 = 0$. B. $2x + y + 3z - 9 = 0$. C. $2x - y + 3z - 9 = 0$. D. $2x - y + 3z - 6$.

Câu 123. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Mặt phẳng (P) vuông góc với d có một vector pháp tuyến là:

- A. $\vec{n} = (1; 2; 3)$. B. $\vec{n} = (2; -1; 2)$. C. $\vec{n} = (1; 4; 1)$. D. $\vec{n} = (2; 1; 2)$.

Câu 124. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt

phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ là:

- A. $x + y + z + 1 = 0$. B. $x - y - z = 1$. C. $x + y + z = 1$. D. $x + y + z = 0$.

Câu 125. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua

điểm $A(0; 1; 0)$ và chứa đường thẳng $(\Delta): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là:

- A. $x - y + z + 1 = 0$. B. $3x - y + 2z + 1 = 0$. C. $x + y + z - 1 = 0$. D. $3x + y - 2z - 1 = 0$.

Câu 126. (CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{1}$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng d .

- A. $(T): x + y + 2z + 1 = 0$. B. $(P): x - 2y + z + 1 = 0$.
C. $(Q): x - 2y - z + 1 = 0$. D. $(R): x + y + z + 1 = 0$.

Câu 127. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + 3y - z + 1 = 0$, $(\beta): 2x - y + z - 7 = 0$.

- A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{-7}$ B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-7}$
C. $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-10}{7}$ D. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{7}$

Câu 128. Đường thẳng Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x + z - 5 = 0$ và $x - 2y - z + 3 = 0$ thì có phương trình là

- A. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$ B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$
C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$ D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$

Câu 129. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng

chứa đường thẳng $(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + y - 2z + 1 = 0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào?

- A. $(0; 1; 3)$. B. $(2; 3; 3)$. C. $(5; 6; 8)$ D. $(1; -2; 0)$

Câu 130. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Đường thẳng Δ là giao của hai mặt phẳng $x + z - 5 = 0$ và $x - 2y - z + 3 = 0$ thì có phương trình là

- A. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$. B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$.

$$\text{C. } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{D. } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Câu 131. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0; -3; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là:

d là:

$$\text{A. } 3x - 2y + z + 5 = 0. \quad \text{B. } 3x - 2y + z - 7 = 0.$$

$$\text{C. } 3x - 2y + z - 10 = 0. \quad \text{D. } 3x - 2y + z - 5 = 0.$$

Câu 132. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P): x - y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua O , song song với Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) là

$$\text{A. } x + 2y + z = 0. \quad \text{B. } x - 2y + z = 0. \quad \text{C. } x + 2y + z - 4 = 0. \quad \text{D. } x - 2y + z + 4 = 0.$$

Dạng 4.3 Bài toán giao điểm (hình chiếu, đối xứng) của đường thẳng với mặt phẳng

Câu 133. (ĐỀ THI THỬ VTEĐ 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$\text{A. } d \text{ cắt và không vuông góc với } (P). \quad \text{B. } d \text{ vuông góc với } (P).$$

$$\text{C. } d \text{ song song với } (P). \quad \text{D. } d \text{ nằm trong } (P).$$

Câu 134. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): 11x + my + nz - 16 = 0$. Biết $\Delta \subset (P)$, tính giá trị của $T = m + n$.

$$\text{A. } T = 2. \quad \text{B. } T = -2. \quad \text{C. } T = 14. \quad \text{D. } T = -14.$$

Câu 135. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 2 = 0$.

Tọa độ điểm M là

$$\text{A. } M(2; 0; -1). \quad \text{B. } M(5; -1; -3). \quad \text{C. } M(1; 0; 1). \quad \text{D. } M(-1; 1; 1).$$

Câu 136. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; -1)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z = 0$ là:

$$\text{A. } (-2; 1; 1). \quad \text{B. } \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right). \quad \text{C. } (1; 1; -2). \quad \text{D. } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

Câu 137. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(-1; 0; 3)$ theo phương vectơ $\vec{v} = (1; -2; 1)$ trên mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$ có tọa độ là

$$\text{A. } (2; -2; -2). \quad \text{B. } (-1; 0; 1). \quad \text{C. } (-2; 2; 2). \quad \text{D. } (1; 0; -1).$$

Câu 138. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.

Giá trị tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 5. D. -2.

Câu 139. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

$M(a; b; c)$ là tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC) . Tổng $S = a + b + c$ là:

- A. -7. B. 11. C. 5. D. 6.

Câu 140. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1; 3; 6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , tính OA' .

- A. $OA' = 5\sqrt{3}$ B. $OA' = \sqrt{46}$ C. $OA' = \sqrt{186}$ D. $OA' = 3\sqrt{26}$

Câu 141. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x + 3 = 0$?

- A. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

Câu 142. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có

phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{1}$
C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$ D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

Câu 143. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua

mặt phẳng (α) .

- A. $\frac{x}{11} = \frac{y+5}{-17} = \frac{z-4}{-2}$ B. $\frac{x}{11} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z+4}{-2}$
C. $\frac{x}{11} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-4}{-2}$ D. $\frac{x}{11} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-4}{2}$

Câu 144. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ điểm M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 3; 1)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + z = 0$.

- A. $M'\left(2; \frac{5}{2}; 3\right)$ B. $M'(1; 3; 5)$ C. $M'\left(\frac{5}{2}; 2; \frac{3}{2}\right)$ D. $M'(3; 1; 2)$

- Câu 145. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm M' đối xứng với điểm $M(1; 2; 4)$ qua mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z - 3 = 0$ có tọa độ là
- A. $(-3; 0; 0)$. B. $(-1; 1; 2)$. C. $(-1; -2; -4)$. D. $(2; 1; 2)$.
- Câu 146. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 1 = 0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d . Tọa độ điểm B là
- A. $(6; -7; 0)$ B. $(3; -2; -1)$ C. $(-3; 8; -3)$ D. $(0; 3; -2)$
- Câu 147. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là
- A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$ B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$
 C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{1}$
- Câu 148. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là giao điểm của d và (P) . Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d và cách M một khoảng $\sqrt{42}$. Phương trình đường thẳng Δ là
- A. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+4}{1}$ B. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{1}$
 C. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+5}{1}$ D. Đáp án khác.
- Câu 149. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -2)$ và đi qua điểm $M(1; -3; 2)$, $d_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Giá trị $a + 2b + 3c$ bằng
- A. -42 . B. -32 . C. 11 . D. 20 .
- Câu 150. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ và $x + y - 2z + 8 = 0$, điểm $A(2; -1; 3)$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN là:
- A. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-5}{2}$ B. $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$
 C. $\frac{x-5}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{2}$ D. $\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{2}$
- Câu 151. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Đường thẳng d' là hình

chiều của d theo phương Ox lên (P) , d' nhận $\vec{u} = (a; b; 2019)$ là một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $(a+b)$.

- A. 2019. B. -2019. C. 2018. D. -2020.

Câu 152. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d' . Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d' :

- A. $M(2; 5; -4)$. B. $P(1; 3; -1)$. C. $N(1; -1; 3)$. D. $Q(2; 7; -6)$.

Câu 153. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}$$

cắt mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ tại điểm I . Gọi Δ là đường thẳng nằm

trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta \perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a; b; c)$ (với $a + b > c$) của điểm I trên đường thẳng Δ .

- A. $M(2; 5; -4)$. B. $M(6; -3; 0)$. C. $M(5; 2; -4)$. D. $M(-3; 6; 0)$.

Câu 154. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 6 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$$

Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là

- A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{5}$. B. $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{5}$.
C. $\frac{x+5}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$. D. $\frac{x}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{5}$.

Câu 155. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$$(P): x + y - z - 1 = 0$$

và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) .

- A. $d': \frac{x+2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{2}$. B. $d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}$.
C. $d': \frac{x+2}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$. D. $d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{2}$.

Câu 156. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo

phương Ox lên (P) ; d' nhận $\vec{u}(a; b; 2019)$ làm một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $a + b$.

- A. 2019 B. -2019 C. 2018 D. -2020

Dạng 4.4 Bài toán cực trị

Câu 157. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 0; -2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P)

sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z + 3 = 0$?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{121}{54}$

C. 24

D. $\frac{91}{54}$

Câu 158. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A. $x - 2y + z = 0$.

B. $x + 22y + 10z = 0$.

C. $x - 2y - z = 0$.

D. $x + 10y - 22z = 0$.

Câu 159. (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10; -5; 8)$, $B(2; 1; -1)$,

$C(2; 3; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

A. 54.

B. 282.

C. 256.

D. 328.

Câu 160. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1; 1; 6)$, $B(-3; -2; -4)$, $C(1; 2; -1)$, $D(2; -2; 0)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a + b + c$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 161. (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1; 1; 6)$, $B(-3; -2; -4)$, $C(1; 2; -1)$, $D(2; -2; 0)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a + b + c$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 162. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và ba điểm $A(3; 1; 1)$, $B(7; 3; 9)$ và $C(2; 2; 2)$. Điểm $M(a; b; c)$ trên (P) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a - 10b + c$.

A. $\frac{62}{9}$.

B. $\frac{27}{9}$.

C. $\frac{46}{9}$.

D. $\frac{43}{9}$.

Câu 163. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2 < m < 6$.

B. $m > 6$.

C. $-2 < m < 2$.

D. $-6 < m < 2$.

Câu 164. (THPT QUANG TRUNG ĐỒNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 2 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất.

A. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

B. $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$.

D. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

- Câu 165. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + 34$. Cho biết $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Tính tích số $x_0 y_0 z_0$.
- A. 16. B. 18. C. 14. D. 12.

- Câu 166. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;0)$, $D(2;-2;-1)$. Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$

sao cho $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2.$$

- A. $P = 6$. B. $P = 2$. C. $P = 0$. D. $P = -2$.

- Câu 167. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TỎ NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{7\sqrt{11}}{11}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

- Câu 168. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$

- Câu 169. (CHUYÊN NGUYỄN TẮT THÀNH YÊN BÀI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Viết phương trình đường thẳng a đi qua $M(4; -2; 1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x - 4y + z - 12 = 0$ và cách $A(-2; 5; 0)$ một khoảng lớn nhất.

- A. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

- Câu 170. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng

$$(\alpha): x + y - z - 3 = 0 \text{ và tạo với đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \text{ một góc nhỏ nhất thì phương trình của } \Delta$$

là

$$A. \begin{cases} x = 1 \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = -3 - 4t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 3 - 2t' \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} x = 1 + 5t' \\ y = 1 - 4t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$$

Câu 171. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4; -2; 6)$, $B(2; 4; 2)$, $M \in (\alpha): x + 2y - 3z - 7 = 0$ sao cho $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

$$A. \left(\frac{29}{13}; \frac{58}{13}; \frac{5}{13} \right).$$

$$B. (4; 3; 1).$$

$$C. (1; 3; 4).$$

$$D. \left(\frac{37}{3}; \frac{-56}{3}; \frac{68}{3} \right).$$

Câu 172. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , song song với (P) và cách điểm $B(-1; 0; 2)$ một khoảng ngắn nhất. Hỏi Δ nhận vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương?

$$A. \vec{u} = (6; 3; -5).$$

$$B. \vec{u} = (6; -3; 5).$$

$$C. \vec{u} = (6; 3; 5).$$

$$D. \vec{u} = (6; -3; -5).$$

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $|3\overline{MA} - 2\overline{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = 9a + 3b + 6c$.

$$A. 4.$$

$$B. 3.$$

$$C. 2.$$

$$D. 1.$$

Câu 174. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

$$A. x - y - 6 = 0.$$

$$B. x + 3y + 2z + 10 = 0.$$

$$C. x - 2y - 3z - 1 = 0.$$

$$D. 3x + z + 2 = 0.$$

Câu 175. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) 2 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; -7; -8)$, $B(2; -5; -9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7; -1; -2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; 4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ là

$$A. -1.$$

$$B. 3.$$

$$C. 6.$$

$$D. 2.$$

Câu 176. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) 3 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

$$A. x + y - z - 2 = 0.$$

$$B. x + y - z = 0.$$

$$C. x + y - z + 1 = 0.$$

$$D. -x + 2y + z + 5 = 0.$$

Câu 177. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) 4 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

$$A. d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2} \quad B. d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$$

$$C. d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2} \quad D. d: \frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$$

Câu 178. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TỎ NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5), B(3;4;0), C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. 3. B. 2. C. -2. D. 1.

Câu 179. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3;4;1); B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c) (a > 2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T = a + b + c$ bằng:

A. $T = 6$. B. $T = 8$. C. $T = 4$. D. $T = 0$.

Câu 180. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{3}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 181. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d_{(B,(P))} = 2d_{(A,(P))}$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB . Tính $a + b + c$

A. 8 B. 6 C. 12 D. 4

Câu 182. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0), B(1;-1;3), C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$. Xét $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3. B. 7. C. 2. D. -1.

Câu 183. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) .

A. $\vec{n} = (1;0;2)$. B. $\vec{n} = (1;0;-2)$. C. $\vec{n} = (1;1;1)$. D. $\vec{n} = (1;1;-1)$.

Câu 184. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 5 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1), B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$. B. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$.
C. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$. D. $d: \frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 185. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 4z = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;3;1)$ thuộc mặt phẳng (P) . Gọi

Δ là đường thẳng đi qua A , nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất.

Gọi $\vec{u} = (a; b; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tính $a + 2b$.

- A. $a + 2b = -3$. B. $a + 2b = 0$. C. $a + 2b = 4$. D. $a + 2b = 7$.

Câu 186. (SGD&ĐT BẮC GIANG - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m + 1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a + b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

- A. $a + b = -\frac{1}{2}$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = 0$. D. $a + b = \frac{3}{2}$.

Câu 187. (PTNK CƠ SỞ 2 - TP HCM - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 2 = 0$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất là:

- A. $M(1; 0; 1)$. B. $M(0; 0; 2)$. C. $M(1; 2; -3)$. D. $M(-1; 2; -1)$.

Câu 188. (TRẦN PHÚ - HÀ TĨNH - LẦN 2 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + 5c$.

- A. 11. B. 9. C. 15. D. 14.

Câu 189. (LÊ QUÝ ĐÔN - QUẢNG TRỊ - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 1; 4)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $N\left(-\frac{4}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$. B. $N(-2; 0; 1)$. C. $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$. D. $N(-1; 2; 1)$.

Dạng 5. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng thẳng với đường thẳng

Câu 190. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$

và $d': \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' , đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

- A. $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$ B. $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{-2}$
C. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}$ D. $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$

Câu 191. (CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA - TP HCM - HK2 - 2018) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 :

$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{12}{5}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. 3.

Câu 192. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường

thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$, $d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

- A. Chéo nhau B. Trùng nhau C. Song song D. Cắt nhau

Câu 193. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}, \quad \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

- A. Δ_1 song song với Δ_2 . B. Δ_1 chéo với Δ_2 . C. Δ_1 cắt Δ_2 . D. Δ_1 trùng với Δ_2 .

Câu 194. (HOC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1} \text{ và } \Delta_2: \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}.$$

Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(0; -2; -5)$. B. $N(1; -1; -4)$. C. $P(2; 0; 1)$. D. $Q(3; 1; -4)$.

Câu 195. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$; $d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = m \end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo

nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S .

- A. -11. B. 12. C. -12. D. 11.

Câu 196. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 0; -1)$. Gọi d_2 là đường

thẳng đi qua điểm A và có vector chỉ phương $\vec{v} = (a; 1; 2)$. Giá trị của a sao cho đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 là

- A. $a = -1$. B. $a = 2$. C. $a = 0$. D. $a = 1$.

Câu 197. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}, \quad \Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}, \quad \Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}.$$

Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vector chỉ phương $\vec{u}(h; k; 1)$. Giá trị $h-k$ bằng

- A. 0. B. 4. C. 6. D. -2.

Câu 198. (THPT NGHEN - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = 4-2t \end{cases} \text{ và } d': \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}.$$

Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

- A. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-2}$. B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{2}$.
C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$. D. $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

Câu 199. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}, (d_2): \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}, (d_3): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}, (d_4): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là:

- A. 0. B. 2. C. Vô số. D. 1.

Câu 200. (CỤM 5 TRƯỜNG CHUYÊN - ĐBSH - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường

$$\text{thẳng } d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}, d_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=m \end{cases}. \text{ Gọi } S \text{ là tập tất cả các số } m \text{ sao cho } d_1 \text{ và } d_2 \text{ chéo nhau và}$$

khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S .

- A. -11. B. 12. C. -12. D. 11.

Dạng 6. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng với mặt cầu

Câu 201. (CHUYÊN HÀ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}. \text{ Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2.$$

- A. $\frac{16}{17}\pi$ (đvdt). B. $\frac{4}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). C. $\frac{16}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). D. $\frac{4}{17}\pi$ (đvdt).

Câu 202. (THPT QUANG TRUNG ĐÔNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

$$\text{hai đường thẳng } d_1: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4 \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=3-t' \\ y=t' \\ z=0 \end{cases}. \text{ Viết phương trình mặt cầu } (S) \text{ có bán kính nhỏ nhất tiếp}$$

xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$. B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$.
C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$. D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Câu 203. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt

$$\text{cầu } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0 \text{ và đường thẳng } d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}. \text{ Điểm}$$

$M(a; b; c), (a > 0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB} = 60^\circ, \widehat{BMC} = 60^\circ, \widehat{CMA} = 120^\circ$. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

- A. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{173}{9}$. B. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$. C. $a^3 + b^3 + c^3 = -8$. D. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{23}{9}$.

Dạng 7. Một số bài toán liên quan giữa điểm – mặt – đường – cầu

Dạng 7.1 Bài toán tìm điểm

Câu 204. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng

$$(P): 2x - 2y - z - 4 = 0. \text{ Mặt cầu tâm } I \text{ tiếp xúc với } (P) \text{ tại điểm } H. \text{ Tìm tọa độ điểm } H.$$

- A. $H(1; -1; 0)$ B. $H(-3; 0; -2)$ C. $H(-1; 4; 4)$ D. $H(3; 0; 2)$

- Câu 205.** Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 9 = 0$ tại điểm $H(a; b; c)$. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng
- A. 2. B. -1. C. 1. D. -2.
- Câu 206.** (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B . Tính OA biết $AB = 4$.
- A. $OA = \sqrt{11}$. B. $OA = 5$. C. $OA = 3$. D. $OA = \sqrt{6}$.
- Câu 207.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng
- A. 30 B. 26 C. 20 D. 21
- Câu 208.** (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0; 0; 3), B(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?
- A. 2. B. 1. C. 0. D. Vô số.
- Câu 209.** (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng
- A. 30. B. 26. C. 20. D. 21.
- Câu 210.** (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .
- A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$. B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.
- Câu 211.** (TT THANH TUỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$. Gọi d', Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P) . Gọi $M(a; b; c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ' . Biểu thức $a + b.c$ bằng
- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Dạng 7.2 Bài toán tìm mặt phẳng

Câu 212.(Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

- A. $6x+8y+11=0$ B. $6x+8y-11=0$ C. $3x+4y-2=0$ D. $3x+4y+2=0$

Câu 213.(MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

- A. $y+z+3=0$ B. $x+z+1=0$ C. $x+y+1=0$ D. $x+z-1=0$

Câu 214.Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4; 3; 1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M, song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

- A. $2x-2y+5z-22=0$. B. $2x+y+2z-13=0$.
C. $2x+y-2z-1=0$. D. $2x-y+2z-7=0$.

Câu 215.(Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

- A. $6x+8y+11=0$ B. $6x+8y-11=0$ C. $3x+4y-2=0$ D. $3x+4y+2=0$

Câu 216.(MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

- A. $y+z+3=0$ B. $x+z+1=0$ C. $x+y+1=0$ D. $x+z-1=0$

Câu 217.(PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $3x-y+2z=0$. B. $-2x+2y-z+4=0$.
C. $x+y+z=0$ D. Đáp án khác.

Câu 218.(CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

- A. $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ x-y+2z+9=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ x+y+2z+9=0 \end{cases}$ C. $x+y+2z+9=0$ D. $x-y+2z+9=0$

Dạng 7.3 Bài toán tìm đường thẳng

Câu 219. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng

$(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Câu 220. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2)

có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1; -1; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d ?

A. $\vec{u}_1 = (1; 1; \sqrt{3})$ B. $\vec{u}_2 = (1; 1; \sqrt{6})$ C. $\vec{u}_3 = (1; 1; 0)$ D. $\vec{u}_4 = (1; 1; -\sqrt{3})$

Câu 221. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$ B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$ C. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$ D. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{8}$

Dạng 7.4 Bài toán tìm mặt cầu

Câu 222. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2)$ và $B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = \sqrt{3}$ B. $R = 2$ C. $R = 1$ D. $R = \sqrt{6}$

Câu 223. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz

và đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$ B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$ C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$ D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$

Câu 224. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ (m là tham số) và đường thẳng

$\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$. Giá trị của m là

A. $m = 5$.

B. $m = 12$.

C. $m = -12$.

D. $m = -10$.

Câu 225. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ và hai mặt phẳng } (P): x-2y+2z=0; (Q): x-2y+3z-5=0. \text{ Mặt cầu } (S)$$

có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 1$.

B. $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 6$.

C. $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}$.

D. $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 8$.

Câu 226. (SGD - BÌNH DƯƠNG - HK 2 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$$(P): 2x-2y-z+9=0 \text{ và mặt cầu } (S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100. \text{ Mặt phẳng } (P) \text{ cắt mặt cầu } (S) \text{ theo một đường tròn } (C). \text{ Tìm tọa độ tâm } K \text{ và bán kính } r \text{ của đường tròn } (C) \text{ là}$$

A. $K(3; -2; 1), r=10$.

B. $K(-1; 2; 3), r=8$.

C. $K(1; -2; 3), r=8$.

D. $K(1; 2; 3), r=6$.

Câu 227. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$,

$B(0; -2; 0), C(0; 0; -2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -4$

B. $S = -1$

C. $S = -2$

D. $S = -3$

Câu 228. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2)$ và

$B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = \sqrt{3}$

B. $R = 2$

C. $R = 1$

D. $R = \sqrt{6}$

Câu 229. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$,

$A(0; 0; 4), B(3; 1; 2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r . Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. Đáp án khác.

B. $r = \frac{2\sqrt[4]{244651}}{3}$.

C. $r = \frac{2\sqrt{244651}}{9}$.

D. $r = \frac{\sqrt{2024}}{3}$.

Câu 230. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

hình chóp $S.ABCD$ với $S(1; -1; 6), A(1; 2; 3), B(3; 1; 2), C(4; 2; 3), D(2; 3; 4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD) .

A. $d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $d = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $d = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 231. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm

$A(1; 1; 1), B(2; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z = 0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H . Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 232. (ĐỀ THI THỬ VTEĐ 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m \in (0; 1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 10 = 0$ và $(\beta): \frac{x}{m} + \frac{y}{1-m} + \frac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 B. 3 C. 9 D. 12

Câu 233. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -4$ B. $S = -1$ C. $S = -2$ D. $S = -3$

Dạng 7.5 Bài toán cực trị

Câu 234. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overline{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

A. $MN = 3$ B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$ C. $MN = 3\sqrt{2}$ D. $MN = 14$

Câu 235. (SGD&ĐT ĐỒNG THÁP - HKII - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ có tâm I và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất.

A. $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. B. $\left(-\frac{11}{9}; -\frac{8}{9}; -\frac{2}{9}\right)$ C. $(1; -2; 2)$. D. $(1; -2; -3)$.

Câu 236. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overline{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

A. $MN = 3$ B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$ C. $MN = 3\sqrt{2}$ D. $MN = 14$

Câu 237. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overline{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u} = (1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

A. $MN = 3$. B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $MN = 3\sqrt{2}$. D. $MN = 14$.

Câu 238. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S) , điểm N thay đổi trên (P) . Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 239. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm

$I(1; -2; 1)$; bán kính $R = 4$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

- A. $O(0; 0; 0)$. B. $A\left(1; \frac{3}{5}; -\frac{1}{4}\right)$. C. $B(-1; -2; -3)$. D. $C(2; 1; 0)$.

Câu 240. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$,

đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1; -3; 11)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0; 8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng

(P) sao cho $d(M, d) = 2$ và $NA = 2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

- A. $MN_{\min} = 1$. B. $MN_{\min} = \sqrt{2}$. C. $MN_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $MN_{\min} = \frac{2}{3}$.

Câu 241. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4; 3; 1)$, $B(3; 1; 3)$; M là điểm thay đổi trên (S) .

Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

- A. 64. B. 68. C. 60. D. 48.

Câu 242. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm

$A(8; 5; -11)$, $B(5; 3; -4)$, $C(1; 2; -6)$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi điểm

$M(a; b; c)$ là điểm trên (S) sao cho $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

- A. 6. B. 2. C. 4. D. 9.

Câu 243. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t, (t \in \mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S)

theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

- A. $y+z+1=0$. B. $x+3y+5z+2=0$.
C. $x-2y-3=0$. D. $3x-2y-4z-8=0$.

Câu 244. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm

$A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng

$(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a+b+c$.

- A. $T = 3$ B. $T = 5$ C. $T = 2$ D. $T = 4$

Câu 245. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 48$ Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0; 0; -4)$, $B(2; 0; 0)$ và

cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S) , đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{128\pi}{3}$

B. 39π

C. $\frac{88\pi}{3}$

D. $\frac{215\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có tâm cầu $I(1; -2; 3)$; $R = 4\sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu I lên mặt phẳng (α)

Vậy chiều cao của khối nón (N) là $h = d(I, P) = IH \leq IK$, trong đó K là hình chiếu vuông góc của I lên AB

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua I và vuông góc với AB ta có $(Q): x + 2z - 7 = 0$

Phương trình $AB: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -4 + 2t \end{cases}$ thế vào (Q) ta được $t - 8 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow t = 3$

Tọa độ $K(3; 0; 2) \Rightarrow IK = 3$

Bán kính của khối nón $r = \sqrt{48 - h^2}$

Vậy thể tích của khối nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi(48 - h^2) \cdot h = \frac{1}{3}\pi(48h - h^3) \quad \forall h \in [0; 3]$

Khảo sát V ta tìm được $V_{\max} = 39\pi$

Câu 246. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(3; 2; 0)$, $C(-1; 2; 4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA , MB , MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN .

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\sqrt{5}$.

Câu 247. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và hai điểm $A(1; 1; 3)$, $B(21; 9; -13)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a.b.c$ bằng

A. 3.

B. 8.

C. 6.

D. -18.

Câu 248. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 729$. Cho biết điểm $A(-2; -2; -7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 107 = 0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$.

B. 27.

C. $5\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{742}$.

Câu 249. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vector chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại điểm B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $J(-3; 2; 7)$. B. $K(3; 0; 15)$. C. $H(-2; -1; 3)$. D. $I(-1; -2; 3)$.

Câu 250. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 4 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng $(d): \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với (d) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Câu 251. (SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và có bán kính $r = 2$. Xét đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, m là tham số thực. Giả sử $(P), (Q)$ là mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M, N . Khi đó đoạn MN ngắn nhất hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1; 0; 4)$ đến đường thẳng d .

A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{237}}{21}$. D. $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

Dạng 1. Xác định VTCP

Câu 1. Chọn C

$d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$.

Câu 2. Chọn C

Dựa vào phương trình đường thẳng suy ra một vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; -5; 3)$

Câu 3. Chọn C

Ta có $\vec{AB} = (-1; 0; 2)$ suy ra đường thẳng AB có VTCP là $\vec{b} = (-1; 0; 2)$.

Câu 4. Chọn B

Đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_4 = (1; -1; 2)$.

Câu 5. Chọn D

Đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{2}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; -3; 2)$.

Câu 6. Chọn D

Câu 7. Chọn A

Ta thấy đường thẳng d có một vector chỉ phương có tọa độ $\vec{u}_2 = (1; -2; 3)$.

Câu 8. Chọn B

Một vector chỉ phương của d là: $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

Câu 9. Chọn C

Câu 10. Chọn A

M_1 là hình chiếu của M lên trục $Ox \Rightarrow M_1(1; 0; 0)$.

M_2 là hình chiếu của M lên trục $Oy \Rightarrow M_2(0; 2; 0)$.

Khi đó: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 2; 0)$ là một vector chỉ phương của M_1M_2 .

Câu 11. Ta có một vector chỉ phương của d là $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$.

$\vec{u}_2 = -3\vec{u}_1$, $\vec{u}_3 = -\vec{u}_1 \Rightarrow$ các vector $\vec{u}_2, \vec{u}_3$ cũng là vector chỉ phương của d .

Không tồn tại số k để $\vec{u}_4 = k\vec{u}_1$ nên $\vec{u}_4 = (-2; 4; 3)$ không phải là vector chỉ phương của d .

Câu 12. Chọn C

Xét đường thẳng được cho ở câu C, có một vector chỉ phương là $(-2; -1; -1) = -(2; 1; 1)$ (thỏa đề bài).

Câu 13. Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{v}(2; 1; 2)$.

$\vec{u}(a; 2; b)$ làm véc tơ chỉ phương của d suy ra $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương nên $\frac{a}{2} = \frac{2}{1} = \frac{b}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$

Câu 14. Cách 1: Từ phương trình Δ suy ra véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (4; -6; 9) = 12\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Câu 15. Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u}_3 = (2; -1; 2)$.

Câu 16. Vector chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u} = (3; -2; -1) = -1(-3; 2; 1)$ nên $\vec{u}_1 = (-3; 2; 1)$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng.

Câu 17. Từ phương trình chính tắc của đường thẳng d ta có vector chỉ phương là $\vec{u}_d = (2; -4; 1)$.

Câu 18. Từ phương trình tham số của đường thẳng d , ta suy ra một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1; 0; -2)$.

Dạng 2. Xác định phương trình đường thẳng

Dạng 2.1 Xác định phương trình đường thẳng cơ bản

Câu 19. Chọn D

Do đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ đi qua điểm $M(1; 0; -2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(2; 3; 1)$ nên có

phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

Câu 20. $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$ làm vector chỉ phương có phương trình

$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 21. Trục Oz đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và nhận vector đơn vị $\vec{k} = (0;0;1)$ làm vector chỉ phương nên có

$$\text{phương trình tham số} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

Câu 22. Theo lý thuyết về đường thẳng trong không gian $Oxyz$, ta có phương trình tham số của đường thẳng đi qua

$$\text{điểm } M(x_0; y_0; z_0) \text{ và có vectơ chỉ phương } \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \text{ là } \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Do đó, đáp án D đúng.

Câu 23. Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{EF} = (3; 1; -7)$. Đường thẳng EF đi qua điểm $E(-1; 0; 2)$ và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{EF} = (3; 1; -7)$ có phương trình: $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.

Câu 24. Chọn B

Trục $y'Oy$ là giao của mặt phẳng (Oxy) và (yOz) nên có phương trình là $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 25. $\vec{a} = (4; -6; 2) = 2(2; -3; 1)$

Do đó đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; -3; 1)$. Vậy phương trình tham số của Δ đi qua

$$M(2; 0; -1) \text{ và có một vector chỉ phương là } \vec{u} = (2; -3; 1) \text{ là: } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

Câu 26. Ta có $\overrightarrow{PQ} = (1; 2; 3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm P, Q

Khi đó d có một vector chỉ phương là $\vec{u}_d = \overrightarrow{PQ} = (1; 2; 3)$

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $P(1; 1; -1)$ là $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$.

Câu 27. Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2; -4)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{u}(-2; -1; 2)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(5; 4; -1)$ nhận $\vec{u}(-2; -1; 2)$ làm vector chỉ phương là:

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{2}, (1). \text{ Do đó loại A, C.}$$

Có tọa độ $C(-1; -2; -3)$ không thỏa mãn phương trình (1) nên phương án B.

Lại có tọa độ $D(3; 3; 1)$ thỏa mãn phương trình (1) nên phương trình đường thẳng AB cũng được viết

$$\text{là: } \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Câu 28. Đường thẳng Oy đi qua điểm $A(0; 2; 0)$ và nhận vector đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$ làm vector chỉ phương nên

$$\text{có phương trình tham số là } \begin{cases} x = 0 + 0.t \\ y = 2 + 1.t \\ z = 0 + 0.t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 29. Chọn A

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ nhận véc tơ $\vec{u} = (2; -1; 1)$ nên có phương trình dạng chính tắc là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

Dạng 2.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 30. Chọn B

Vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u} = (1; 3; -1)$ nên suy ra chỉ đáp án A hoặc B đúng. Thử tọa độ điểm $A(2; 3; 0)$ vào ta thấy đáp án B thỏa mãn

Câu 31. Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi $M = \Delta \cap Ox$. Suy ra $M(a; 0; 0)$.

$$\overrightarrow{AM} = (a-1; -2; -3).$$

d có VTCP: $\vec{u}_d = (2; 1; -2)$.

Vì $\Delta \perp d$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2a - 2 - 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Vậy Δ qua $M(-1; 0; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AM} = (-2; -2; -3) = -(2; 2; 3)$ nên Δ có phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Câu 32. Chọn C

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) nhận vector pháp tuyến của (BCD) là vectơ chỉ phương

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2; 0; -1)$, $\overrightarrow{BD} = (0; -1; 2)$

$$\Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_{BCD} = [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (-1; -4; -2)$$

Khi đó ta loại đáp án A và B

$$\text{Thay điểm } A(1; 0; 2) \text{ vào phương trình ở phương án C ta có } \begin{cases} 1 = 2 + t \\ 0 = 4 + 4t \\ 2 = 4 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Suy ra đường thẳng có phương trình tham số ở phương án C đi qua điểm A nên C là phương án đúng

Câu 33. Chọn D

$$\text{Phương trình } d_1 : \begin{cases} x = 3 - t_1 \\ y = 3 - 2t_1 \\ z = -2 + t_1 \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 5 - 3t_2 \\ y = -1 + 2t_2 \\ z = 2 + t_2 \end{cases}.$$

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ .

Giả sử đường thẳng Δ cắt đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại A, B.

Gọi $A(3 - t_1; 3 - 2t_1; -2 + t_1)$, $B(5 - 3t_2; -1 + 2t_2; 2 + t_2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 3t_2 + t_1; -4 + 2t_2 + 2t_1; 4 + t_2 - t_1).$$

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; 3)$.

$$\text{Do } \overrightarrow{AB} \text{ và } \vec{n} \text{ cùng phương nên } \frac{2 - 3t_2 + t_1}{1} = \frac{-4 + 2t_2 + 2t_1}{2} = \frac{4 + t_2 - t_1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-3t_2+t_1}{1} = \frac{-4+2t_2+2t_1}{2} \\ \frac{-4+2t_2+2t_1}{2} = \frac{4+t_2-t_1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases}. \text{ Do đó } A(1; -1; 0), B(2; -1; 3).$$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1; -1; 0)$ và có vector chỉ phương $\vec{n} = (1; 2; 3)$ là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$$

Câu 34. Chọn A

$$\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (0; -1; 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = (-4; -3; -1)$$

Đường thẳng qua $C(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Điểm $E(-2; -4; 2)$ thuộc đường thẳng trên, suy ra đường thẳng cần tìm trùng với đường thẳng có

$$\text{phương trình } \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Chọn đáp án đúng là đáp án C

Câu 35. Chọn C

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; 3; 1); \overrightarrow{AC} = (1; -1; 0); \vec{n}_{(ABC)} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; -2).$$

Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc tơ chỉ phương là $\vec{n}_{(ABC)} = (1; 1; -2)$,

$$\text{phương trình tham số là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}.$$

Câu 36. Chọn A

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ

$$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2} \text{ có VTCP } \vec{u} = (1; -2; 2).$$

$$\text{Gọi } M(0; m; 0) \in Oy, \text{ ta có } \overrightarrow{AM} = (-2; m-1; -3)$$

$$\text{Do } \Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2(m-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$$

$$\text{Ta có } \Delta \text{ có VTCP } \overrightarrow{AM} = (-2; -4; -3) \text{ nên có phương trình } \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Câu 37. Chọn B

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BC} = (-1; 1; -1); \overrightarrow{BD} = (0; -1; -2).$$

Mặt phẳng (BCD) có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(BCD)} = [\vec{BD}, \vec{BC}] = (3; 2; -1)$.

Gọi $\vec{u}_d$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng d .

Vì $d \perp (BCD)$ nên $\vec{u}_d = \vec{n}_{(BCD)} = (3; 2; -1)$.

Đáp A và C có VTCP $\vec{u}_d = (3; 2; -1)$ nên loại B và

D.

Ta thấy điểm $A(0; 0; 2)$ thuộc đáp án C nên loại A.

Câu 38.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 2)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d , nên nhận vec tơ chỉ phương của d là vecto pháp tuyến $(P): 1(x-1) + y + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 5 = 0$

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $d \Rightarrow B(1+t; t; -1+2t)$

Vì $B \in (P) \Leftrightarrow (1+t) + t + 2(-1+2t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow B(2; 1; 1)$

Ta có đường thẳng Δ đi qua A và nhận vecto $\vec{AB} = (1; 1; -1)$ là vec tơ chỉ phương có dạng

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Cách 2:

Gọi $d \cap \Delta = B \Rightarrow B(1+t; t; -1+2t)$

$\vec{AB} = (t; t; -3+2t)$, Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}_d = (1; 1; 2)$

Vì $d \perp \Delta$ nên $\vec{AB} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t + t + 2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $\vec{AB} = (1; 1; -1)$. Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(1; 0; 2)$ và nhận vec tơ $\vec{AB} = (1; 1; -1)$ là vec tơ

chỉ phương có dạng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 39. Chọn D

Ta có: $[\vec{OA}; \vec{OB}] = (4; -8; 8)$

Gọi d là đường thẳng thỏa mãn khi đó d có VTCP $\vec{u} = (1; -2; 2)$

Ta có $OA = 3, OB = 4, AB = 5$. Gọi $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Áp dụng hệ thức $OB \cdot \vec{IA} + OA \cdot \vec{IB} + AB \cdot \vec{IO} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4(\vec{OA} - \vec{OI}) + 3(\vec{OB} - \vec{OI}) + 5 \cdot \vec{IO} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{12}(4\vec{OA} + 3\vec{OB}) \Rightarrow I(0; 1; 1)$$

$$\text{Suy ra } d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ cho } t = -1 \Rightarrow d \text{ đi qua điểm } M(-1; 3; -1)$$

Do đó d đi qua $M(-1; 3; -1)$ có VTCP $\vec{u} = (1; -2; 2)$ nên đường thẳng có phương trình

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

Câu 40. Chọn C

$$d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d .

$$\vec{u}_{\Delta} = [\vec{u}_d; \vec{n}_P] = (-1; 4; 3)$$

Gọi A là giao điểm của d và (P) . Tọa độ A là nghiệm của phương trình:

$$(-1 + 2t) + (-t) - (-2 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A(3; -2; 2)$$

Phương trình Δ qua $A(3; -2; 2)$ có vtcp $\vec{u}_{\Delta} = (-1; 4; 3)$ có dạng:
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Câu 41. Chọn D

+) VTCP của Δ, Δ' lần lượt là $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (1; 3; -2)$; $[\vec{u}, \vec{v}] = (-7; 7; 7)$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d = (-1; 1; 1)$.

+) d đi qua $M(-1; 1; 3)$ nên $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Câu 42. Chọn D

Ta có $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Gọi $M = \Delta \cap (P) \Rightarrow M \in \Delta \Rightarrow M(t; 2t-1; t+1)$

$$M \in (P) \Rightarrow t - 2(2t-1) - (t+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 1; 2)$$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; -2; -1)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

$$\Rightarrow \text{Đường thẳng } d \text{ nhận } \frac{1}{2}[\vec{n}, \vec{u}] = (0; -1; 2) \text{ làm véc tơ chỉ phương và } M(1; 1; 2) \in d$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Câu 43. Chọn C

Tọa độ giao điểm của d_1 và (P) là $A(4; -1; 2)$

Mặt phẳng cần tìm đi qua A và nhận $\vec{u}_2(2; -1; 2)$ làm VTCP có phương trình $2x - y + 2z - 13 = 0$.

Câu 44. Chọn A

Gọi VTCP của đường thẳng cần tìm là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$.

$$\text{Đường thẳng vuông góc với } (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{n} \Leftrightarrow \frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{-1} = \frac{a_3}{2}$$

Chọn $a_1 = 1$ thì $a_2 = -1$ và $a_3 = 2$.

Câu 45.

. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) nên nhận $\vec{k} = (0; 0; 1)$ làm vector chỉ phương. Mặt khác d đi qua $A(1; 1; 1)$ nên:

$$\Rightarrow \text{Đường thẳng } d \text{ có phương trình là: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

Câu 46.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = (1; -3; 2)$.

Vì d vuông góc với (P) nên d nhận $\vec{n} = (1; -3; 2)$ là VTCP.

Đường thẳng d qua M và nhận $\vec{n} = (1; -3; 2)$ là VTCP có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

Câu 47. Gọi d là đường thẳng qua A và d cắt d_2 tại K . Khi đó $K(2+t; -1-t; 1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AK} = (1+t; -t; t-2)$.

Đường $AK \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \vec{u}_1 = 0$, với $\vec{u}_1 = (1; 4; -2)$ là một vector chỉ phương của d_1 .

Do đó $1+t-4t-2t+4=0 \Leftrightarrow t=1$, suy ra $\overrightarrow{AK} = (2; -1; -1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

Câu 48. Gọi giao điểm của Δ và d là $B(t+1; t; 2t-1)$. Khi đó $\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (t, t, 2t-3)$.

Vì đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d có $\vec{u}_d = (1, 1, 2)$ thì:

$$t+t+2(2t-3)=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (1, 1, -1).$$

Phương trình đường thẳng Δ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

Câu 49. Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 3)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , vuông góc với d và cắt Oz .

Gọi $N(0; 0; t) = \Delta \cap Oz \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1; 0; t-1)$.

$\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(-1; 0; \frac{1}{3}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}_1 = (-3; 0; 1)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; 0; 1)$ và có một vector chỉ phương $(-3; 0; 1)$ nên có phương

Câu 50. Chọn B

Do Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên Δ có vector chỉ phương là

$$\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d] = (4; -5; -7)$$

Gọi $A = \Delta \cap d$ thì $A = (P) \cap d \Rightarrow A(1; 0; -3)$

$$\text{Vậy phương trình tham số của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 0 - 5t \\ z = -3 - 7t \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 4 - 7t \end{cases}$$

Câu 51. Ta có: $\vec{u}_{d_1} = (1; 4; -2)$

$$d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \text{ nên phương trình tham số của } d_2: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = 1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Gọi đường thẳng d cắt đường thẳng d_2 tại $M(2+t; -1-t; 1+t)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (1+t; -t; t-2)$

Đường thẳng d đi qua $A; M$ nên vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1+t; -t; t-2)$

Theo đề bài d vuông góc $d_1 \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1} \Leftrightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (1+t) + 4(-t) - 2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$\Rightarrow \vec{u}_d = (2; -1; -1)$$

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; -1; 3)$ và có $\vec{u}_d = (2; -1; -1)$ có dạng:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$$

Câu 52. $\vec{n}_p = (1; -1; 2)$, $\vec{u}_d = (2; 1; -3)$, Gọi $I = d \cap (P)$, $I \in d \Rightarrow I(2t; 3+t; 2-3t)$

$$I \in (P) \Rightarrow 2t - (3+t) + 2(2-3t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-2; 2; 5)$$

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_p \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_p, \vec{u}_d] = (1; 7; 3)$$

$$\text{Và đường thẳng } \Delta \text{ đi qua điểm } I. \text{ Vậy } \Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{3}.$$

Câu 53. Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

$$\Delta \cap d_1 = M \text{ nên } M(-3+2t; -2-t; -2-4t)$$

$$\Delta \cap d_2 = N \text{ nên } N(-1+3u; -1+2u; 2+3u)$$

$$\overrightarrow{MN} = (2+3u-2t; 1+2u+t; 4+3u+4t)$$

Ta có $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{n}_{(P)}$

$$\text{Nên } \frac{2+3u-2t}{1} = \frac{1+2u+t}{2} = \frac{4+3u+4t}{3} \text{ ta giải hệ phương trình tìm được } \begin{cases} u = -2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } M(-5; -1; 2) \text{ và VTCP } \overrightarrow{MN} = (-2; -4; -6) = -2(1; 2; 3)$$

$$\text{Phương trình tham số } \Delta \text{ là } \frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

Dạng 2.3 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song

Câu 54. Chọn C

Đường thẳng Δ đi qua A và song song BC nhận $\overrightarrow{BC} = (-2; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương

$$\Rightarrow \text{Phương trình chính tắc của đường thẳng } \Delta: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

Chú ý: Đáp án A không nhận được, vì đó là phương trình tham số của đường thẳng cần tìm, chứ không phải phương trình chính tắc.

Câu 55. Chọn A

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} = (1; 1; 1) \\ \vec{n}_{(Q)} = (1; -1; 1) \end{cases}$ và $[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (2; 0; -2)$. Vì đường thẳng d song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) , nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -1)$.

Đường thẳng d đi qua $A(1; -2; 3)$ nên có phương trình:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Câu 56. Chọn B

Trung điểm của AB là $I(0; 1; -1)$

$d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ có VTCP là $\vec{u}(1; -1; 2)$ nên đường thẳng Δ cần tìm cũng có VTCP $\vec{u}(1; -1; 2)$

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 57. Ta có $\vec{u}_d = (3; -5; -1)$ là vectơ chỉ phương của d .

$\vec{n}_{(P)} = (2; 0; 1)$ là vectơ pháp tuyến của (P) .

$[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (-5; -5; 10)$.

Do Δ vuông góc với d và song song với (P) nên $\vec{u} = (1; 1; -2)$ là vectơ chỉ phương của Δ .

Khi đó, phương trình của Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

Câu 58. Chọn A

$A \in d_1 \Rightarrow A(3a; 1-a; -1+a)$; $B \in d_2 \Rightarrow B(2+b; 1-2b; -3+b)$.

$\overrightarrow{AB} = (2+b-3a; -2b+a; b-2-a)$; $\vec{n}_p = (2; -1; 2)$.

Do $AB \parallel (P)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}b$.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

$I\left(\frac{3a+2+b}{2}; \frac{2-2b-a}{2}; \frac{-4+a+b}{2}\right)$ hay $I\left(1+\frac{3}{2}b; 1-\frac{8}{6}b; -2+\frac{5}{6}b\right)$

Suy ra tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-9; 8; -5)$.

Câu 59. Gọi $\vec{n}_{(P)} = (3; -2; -3)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2; -4; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (3; -2; 2)$.

Giả sử $\Delta \cap d = M$ nên $M(2+3t; -4-2t; 1+2t)$ khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là

$\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{AM} = (3t-1; -2t-6; 2t+5)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}_{(P)} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0$ nên $3(3t-1) - 2(-2t-6) - 3(2t+5) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{7}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{11}{7}; -\frac{54}{7}; \frac{47}{7}\right)$

cần tìm là $\begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 - 54t \\ z = -4 + 47t \end{cases}$.

Câu 60. Chọn B

Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v}(-3; 0; -4)$. Ta xét:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{1}{3}(1; 2; -2) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right);$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5}(-3; 0; -4) = \left(-\frac{3}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

Nhận thấy $\vec{u_1} \cdot \vec{v_1} > 0$, nên góc tạo bởi hai vectơ $\vec{u_1}, \vec{v_1}$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ .

Ta có $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \left(-\frac{4}{15}; \frac{10}{15}; -\frac{22}{15}\right) = -\frac{15}{2}(2; -5; 11)$ là vector chỉ phương của đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ hay đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có vector chỉ phương là

$$\overrightarrow{w_1} = (2; -5; 11). \text{ Do đó có phương trình: } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}.$$

Phương trình Δ :
$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = 1 + 2t' \end{cases}$$

Nguyễn Bảo Vương: <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Gọi $M(1+t'; 1-2t'; 1+2t') \in \Delta$ sao cho $AM = AI$.

$$\text{Khi đó } 3|t'| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{5}{3} \\ t' = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } t' = \frac{5}{3} \Rightarrow M\left(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{13}{3}\right) \Rightarrow \overline{AM} = \left(\frac{5}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right) \Rightarrow AM = \frac{15}{3}.$$

Khi đó $\cos \widehat{IAM} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{IAM} > 90^\circ \Rightarrow$ trong trường hợp này $(d; \Delta) > 90^\circ$ (loại)

$$\text{Với } t' = -\frac{5}{3} \Rightarrow N\left(-\frac{2}{3}; \frac{13}{3}; -\frac{7}{3}\right) \Rightarrow \overline{AN} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{10}{3}\right) \Rightarrow AN = \frac{15}{3}.$$

Khi đó $\cos \widehat{IAN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{IAN} < 90^\circ \Rightarrow$ trong trường hợp này $(d; \Delta) < 90^\circ$ (thỏa mãn)

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm của } NI \Rightarrow H\left(\frac{5}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overline{AH} = \frac{1}{3}(2; 11; -5).$$

Khi đó đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ đi qua $H\left(\frac{5}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ hoặc $A(1; 1; 1)$

$$\text{và nhận làm } \vec{u} = (2; 11; -5) \text{ VTCP} \Rightarrow \text{phương trình phân giác là } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$$

Câu 62. Chọn B

$$A = d \cap \Delta$$

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 1t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Chọn điểm $B(-1; 2; 3) \in \Delta, AB = 3$.

$$\text{Gọi } C \in d \text{ thỏa mãn } AC = AB \Rightarrow C\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}; 1\right) \text{ hoặc } C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$$

Kiểm tra được điểm $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$ thỏa mãn BAC là góc nhọn.

Trung điểm của BC là $I\left(-\frac{9}{10}; \frac{3}{10}; 2\right)$. Đường phân giác cần tìm là AI có vector chỉ phương là

$$\vec{u} = (19; 7; -10) \text{ có phương trình là } \begin{cases} x = 1 + 19t \\ y = 1 + 7t \\ z = 1 - 10t \end{cases}. \text{ Tọa độ điểm của đáp án B thuộc } AI.$$

Câu 63. Chọn C

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ và có VTCP $\vec{a} = (1; 1; 0)$.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{u} = 1.0 + 1.(-7) + 0.(-1) = -7 < 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{u}) > 90^\circ$.

Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có VTCP: $\vec{b} = -\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(5; 12; 1) // (5; 12; 1)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng cần tìm là } \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Câu 64. Chọn A

Gọi $M(x; y; z)$ là trung điểm BC . Khi đó $M(1; -1; 3)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = vtcp\vec{u} = (2; -4; 1)$

$$\text{PTĐT } AM: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$$

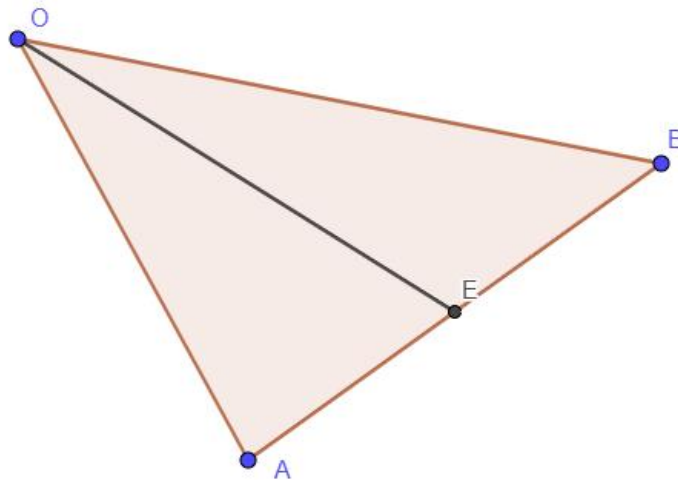
Câu 65. Gọi $B(0; b; 0)$ là giao điểm của d với trục Oy . (Điều kiện $b < 0$)

Ta có $OA = 2$ và tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 1 \Rightarrow OB = 1$

Suy ra $B(0; -1; 0)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 0)$ là một vec tơ chỉ phương của d .

$$\text{Và đường thẳng } d \text{ đi qua điểm } A(2; 0; 0) \text{ nên } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 66. Chọn A



Ta có:

$$\overrightarrow{EA} = -\frac{OA}{OB} \cdot \overrightarrow{EB} = -\frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{\frac{64}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{9}}} \cdot \overrightarrow{EB} = -\frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{EB} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{BE}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = \frac{3}{4} \left(x + \frac{8}{3} \right) \\ 2-y = \frac{3}{4} \left(y - \frac{4}{3} \right) \\ 1-z = \frac{3}{4} \left(z - \frac{8}{3} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{12}{7} \\ z = \frac{12}{7} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OE} = \left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right) \Rightarrow \vec{u} = (0; 1; 1)$$

$$\Delta: \begin{cases} \text{qua O} \\ \text{VTCP } \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Câu 67. $B \in d_1 \Rightarrow B(4+t; -4-t; 6+2t)$. PT tham số của d_2 :
$$\begin{cases} x = 5+2s \\ y = 11+4s \\ z = 5+2s \end{cases}$$

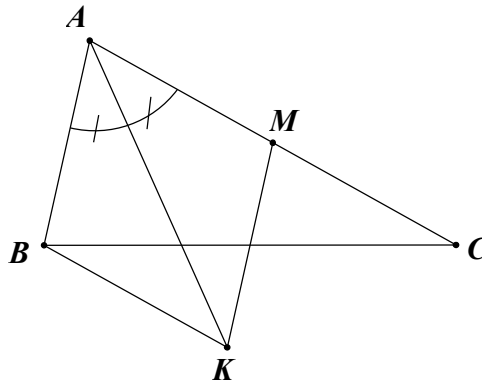
$C \in d_2 \Rightarrow C(5+2s; 11+4s; 5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (1-t; -1-t; 2t+1)$; $\overrightarrow{AC} = (2s; 4s+14; 2s)$.

Do A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 2ks \\ -t-1 = 4ks+14k \\ 2t+1 = 2ks \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ s = -3 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ Do đó: } \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Câu 68. Điểm B thuộc mặt (P) nên $B(2c-b-1; b; c)$ vì $M(1; 2; 3)$ là trung điểm BC nên $C(3-2c+b; 4-b; 6-c)$. Do C thuộc mặt (Q) nên $3c-c-7=0 \Leftrightarrow c=3b-7$. Khi đó $B(5b-15; b; 3b-7)$, $C(-5b+17; 4-b; 13-3b)$. $\overrightarrow{BC} = (-10b+32; -2b+4; -6b+20)$. ABC cân tại A nên $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 20b-60=0 \Leftrightarrow b=3 \Rightarrow B(0; 3; 2)$. Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 2; 3)$ và $B(0; 3; 2)$ có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 69. Chọn C

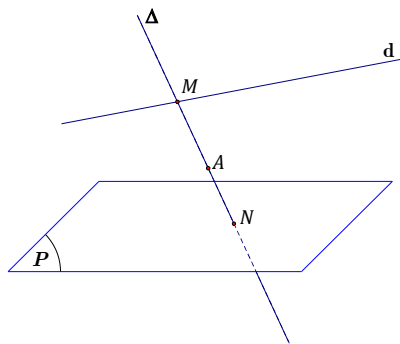


Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; 2; -4)$.

Gọi M là trung điểm AC , ta có $M(3; 2; -2)$, $\overrightarrow{AM} = (1; 1; -2)$.

Do đó $\triangle ABM$ cân tại A . Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = (2; 0; 0)$. Khi đó AK là tia phân giác trong góc $\widehat{BAC}$.

Vậy phương trình đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ là
$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$



Câu 70.

Ta có $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Do đó $M \in d \Rightarrow M(-1 + 2t; t; 2 + t)$.

Vì $A(1; -1; 2)$ là trung điểm $MN \Rightarrow N(3 - 2t; -2 - t; 2 - t)$.

Mặt khác $N \in (P) \Rightarrow 3 - 2t - 2 - t - 2(2 - t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(3; 2; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; 3; 2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ .

Câu 71. Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 0; -4) = -4(0; 0; 1)$. Hay AB có véc-tơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng $(ABCD)$ có một véc-tơ pháp tuyến: $[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}] = (0; 4; 0) = 4(0; 1; 0)$, hay $\vec{j} = (0; 1; 0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \subset (ABCD) \end{cases}$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{AD} \perp \vec{k} \\ \overrightarrow{AD} \perp \vec{j} \end{cases}$. Đường thẳng AD có véc-tơ chỉ phương là $[\vec{j}; \vec{k}] = (1; 0; 0)$.

Phương trình đường thẳng AD là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

Do đó $D(1 + t; 0; 1)$.

Mặt khác $AD = AB \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 0^2 + (1 - 1)^2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -4 \end{cases}$.

Vì điểm D có hoành độ âm nên $D(-3; 0; 1)$.

Vì tâm I của hình vuông $ABCD$ là trung điểm BD , nên $I = (-1; 0; -1)$.

Đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{j} = (0; 1; 0)$, nên

phương trình đường thẳng d là: $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$.

Câu 72. Nhận thấy $A(-1; 2; -1)$ là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 .

Δ_1 có VTCP là $\vec{u}_1 = (1; 2; 3)$

Δ_2 có VTCP là $\vec{u}_2 = (1; 2; -3)$.

$[\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-12; 6; 0) = -6(2; -1; 0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) : $2x - y + 4 = 0$.

Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là VTCP của d cần tìm.

Ta có d nằm trong mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow \vec{u} \perp [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

$$\Rightarrow 2a - b = 0 \Rightarrow b = 2a$$

Lại có d là phân giác của Δ_1, Δ_2

$$\Rightarrow \cos(d, \Delta_1) = \cos(d, \Delta_2) \Rightarrow \frac{|a + 2b + 3c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{|a + 2b - 3c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = a + 2b - 3c \\ a + 2b + 3c = -a - 2b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 & (1) \\ a + 2b = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Xét (1), } c = 0, b = 2a \Rightarrow \vec{u} = (a, 2a, 0) = (1; 2; 0) \Rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\cos(\Delta_1; d) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{70}}{14} \Rightarrow (\Delta_1; d) \approx 53^\circ 18'.$$

$$\text{Xét (2): } \begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = 2a \end{cases} \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow \vec{u} = (0; 0; c) = c(0; 0; 1) \Rightarrow d: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(\Delta_1, d) = \frac{|-3|}{\sqrt{14} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow (\Delta_1, d) \approx 36^\circ 42'.$$

Do d là đường phân giác của góc nhọn nên $(\Delta_1, d) < 45^\circ$.

$$\text{Vậy đường thẳng } d \text{ cần tìm là } d: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Có thể làm đơn giản hơn bằng cách: ta thấy $\vec{u}_1 = (1; 2; 3); \vec{u}_2 = (1; 2; -3)$ là hai véc tơ có độ dài bằng nhau và $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 < 0 \Rightarrow (\vec{u}_1, \vec{u}_2) > 90^\circ$. Vậy $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ chính là véc tơ chỉ phương của d .

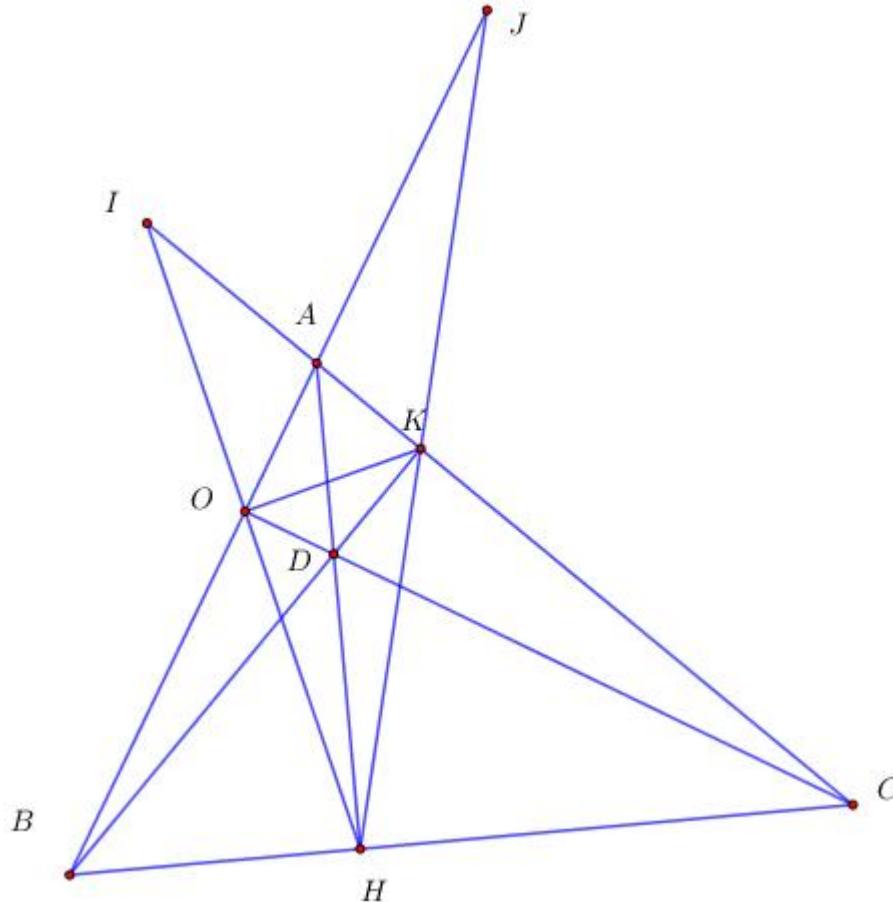
Câu 73. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 0); \overrightarrow{BC} = (-4; -2; 2), \overrightarrow{AC} = (-3; 1; 2)$

$$\Rightarrow AB^2 = 10, BC^2 = 24, AC^2 = 14 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; 2; 0)$.

Đường thẳng d cần tìm đi qua $I(0; 2; 0)$ và nhận vector $\vec{u} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -1; 5)$ làm véc tơ chỉ

phương. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\frac{x-0}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-0}{5}$.

**Câu 74.**

Ta có tứ giác $BOKC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (vì có hai góc vuông K, O cùng nhìn BC dưới một góc vuông) suy ra $\widehat{OKB} = \widehat{OCB}$ (1)

Ta có tứ giác $KDHC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (vì có hai góc vuông K, H cùng nhìn DC dưới một góc vuông) suy ra $\widehat{DKH} = \widehat{OCB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DKH} = \widehat{OKB}$ do đó BK là đường phân giác trong của góc $\widehat{OKH}$ và AC là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{OKH}$.

Tương tự ta chứng minh được OC là đường phân giác trong của góc $\widehat{KOH}$ và AB là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{KOH}$.

Ta có $OK = 4; OH = 3; KH = 5$.

Gọi I, J lần lượt là chân đường phân giác ngoài của góc $\widehat{OKH}$ và $\widehat{KOH}$.

Ta có $I = AC \cap HO$ ta có $\frac{IO}{IH} = \frac{KO}{KH} = \frac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{IO} = \frac{4}{5} \overrightarrow{IH} \Rightarrow I(-8; -8; -4)$.

Ta có $J = AB \cap KH$ ta có $\frac{JK}{JH} = \frac{OK}{OH} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{JK} = \frac{4}{3} \overrightarrow{JH} \Rightarrow J(16; 4; -4)$.

Đường thẳng IK qua I nhận $\overrightarrow{IK} = \left(\frac{16}{3}; \frac{28}{3}; \frac{20}{3} \right) = \frac{4}{3}(4; 7; 5)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình

$$(IK): \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = -8 + 7t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$$

Đường thẳng OJ qua O nhận $\overrightarrow{OJ} = (16; 4; -4) = 4(4; 1; -1)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình

$$(OJ): \begin{cases} x = 4t' \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$$

Khi đó $A = IK \cap OJ$, giải hệ ta tìm được $A(-4; -1; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (4; 7; 5)$ và $\overrightarrow{IJ} = (24; 12; 0)$, ta tính $[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IJ}] = (-60; 120; -120) = -60(1; -2; 2)$.

Khi đó đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$

nên có phương trình $\frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

Nhận xét:

□ Mẫu chốt của bài toán trên là chứng minh trực tâm D của tam giác ABC là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK . Khi đó, ta tìm tọa độ điểm D dựa vào tính chất quen thuộc sau: “Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ”. Sau khi tìm được D , ta tìm được A với chú ý rằng $A \in DH$ và $OA \perp DA$.

□ Ta cũng có thể tìm ngay tọa độ điểm A bằng cách chứng minh A là tâm đường tròn bàng tiếp góc H của tam giác OHK . Khi đó, ta tìm tọa độ điểm D dựa vào tính chất quen thuộc sau: “Cho tam giác ABC với J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , ta có $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$, với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ”.

Câu 75. Phương trình tham số của đường phân giác trong góc C là $CD: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Gọi $C = (2 + 2t; 4 - t; 2 - t)$, suy ra tọa độ trung điểm M của AC là $M = \left(2 + t; \frac{7-t}{2}; \frac{5-t}{2}\right)$. Vì

$M \in BM$ nên:

$$\frac{(2+t)-3}{-1} = \frac{\left(\frac{7-t}{2}\right)-3}{2} = \frac{\left(\frac{5-t}{2}\right)-2}{-1} \Leftrightarrow \frac{t-1}{-1} = \frac{1-t}{4} = \frac{1-t}{-2} \Rightarrow t = 1.$$

Do đó $C = (4; 3; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc CD là

$$2.(x-2) - 1.(y-3) - 1.(z-3) = 0 \text{ hay } 2x - y - z + 2 = 0.$$

Tọa độ giao điểm H của (P) và CD là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 2 - t \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 2 - t \\ 2(2 + 2t) - (4 - t) - (2 - t) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 2 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2; 4; 2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác CD , suy ra H là trung điểm AA' , bởi vậy:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2.2 - 2 = 2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2.4 - 3 = 5 \Rightarrow A'(2; 5; 1) \\ x_{A'} = 2z_H - z_A = 2.2 - 3 = 1 \end{cases}$$

Do $A' \in BC$ nên đường thẳng BC có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'} = (-2; 2; 0) = 2(-1; 1; 0)$, nên phương

$$\text{trình đường thẳng } BC \text{ là } \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Vì $B = BM \cap BC$ nên tọa độ B là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 1) \equiv A'.$$

Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0; 2; -2) = 2(0; 1; -1)$; hay $\vec{u}_4 = (0; 1; -1)$ là một véc-tơ chỉ của phương đường thẳng AB .

Dạng 3. Một số bài toán liên quan giữa điểm với đường thẳng

Dạng 3.1 Bài toán liên quan điểm (hình chiếu) thuộc đường, khoảng cách

Câu 76. Chọn A

Cách 1. Dựa vào lý thuyết: Nếu d qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ thì phương trình

$$\text{đường thẳng } d \text{ là: } \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \text{ ta chọn đáp án}$$

B.

Cách 2. Thay tọa độ các điểm M vào phương trình đường thẳng d , ta có:

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 2 = 5 + t \\ 5 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -3 \text{ (Vô lý).} \\ t = 1 \end{cases} \text{ Loại đáp án A.}$$

Thay tọa độ các điểm N vào phương trình đường thẳng d , ta có:

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 5 = 5 + t \\ 2 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = 0. \text{ Nhận đáp án B.}$$

Câu 77. Chọn B

Đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ đi qua điểm $(-2; 1; -2)$.

Câu 78. Chọn A

Ta thấy với $t = 0$ ta được $M(2; -1; 0) \in d$

Câu 79. Chọn C.

$$\text{Câu 80. Với } t = -2, \text{ ta có } \begin{cases} x = 1 + 2(-2) = -3 \\ y = 3 - (-2) = 5 \\ z = 1 - (-2) = 3 \end{cases}.$$

Vậy $M(-3; 5; 3) \in d$.

Câu 81. Chọn A

Ta có: $M \in d$ nên $\exists t \in \mathbb{R}: M(1+t; 2+t; 1+2t)$. Đk: $1+2t < 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2} (*)$

$$MA^2 + MB^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow (-t)^2 + (-3-t)^2 + (1-2t)^2 + (-2-t)^2 + (-t)^2 + (2-2t)^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 2t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(L) \\ t = -\frac{5}{6}(T/m) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -\frac{5}{6}, \text{ ta có } M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right).$$

Câu 82. Thay tọa độ của $K(1; -1; 1)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1 = t \\ -1 = 1 - t \\ 1 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$: không tồn tại t .

Do đó, $K \notin d$.

Thay tọa độ của $E(1; 1; 2)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1 = t \\ 1 = 1 - t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$: không tồn tại t .

Do đó, $E \notin d$.

Thay tọa độ của $H(1; 2; 0)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1 = t \\ 2 = 1 - t \\ 0 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$: không tồn tại t .

Do đó, $H \notin d$.

Thay tọa độ của $F(0; 1; 2)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 0 = t \\ 1 = 1 - t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$.

Câu 83. Xét điểm $N(1; -1; 2)$ ta có $\frac{1-1}{2} = \frac{-1+1}{-1} = \frac{2-2}{3}$ nên điểm $N(1; -1; -2)$ thuộc đường thẳng đã cho.

Câu 84. Phương trình tham số đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 5 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, với vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -2)$.

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng d_1 tại B . Khi đó $B(1+t; t; 5-2t)$.

$$\overrightarrow{AB} = (t; t; 3-2t)$$

Vì đường thẳng d vuông góc với đường thẳng d_1 nên $AB \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Leftrightarrow t + t + (3-2t)(-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Khi đó $B(2; 1; 3)$.

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; 0; 2)$ và có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$ là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Nhận thấy $Q(0; -1; 1) \in d$.

Câu 85. Chọn C

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \Rightarrow N(1; 5; 2) \in d. \\ z = 2 \end{cases}$$

Câu 86. Đáp án A nhằm vector chỉ phương.

Đáp án B nhằm dấu tọa độ điểm.

Đáp án D nhằm vector chỉ phương.

Câu 87. Chọn D

$$\text{Đường thẳng } d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5} \text{ đi qua điểm } A(1; -2; 3).$$

Câu 88. Xét đáp án A. Thay tọa độ điểm $A(3; -2; 1)$ vào phương trình đường thẳng ta được

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} \text{ đúng. Suy ra đường thẳng } \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2} \text{ đi qua điểm } A(3; -2; 1).$$

Câu 89. Chọn C

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \Rightarrow N(1; 5; 2) \in d. \\ z = 2 \end{cases}$$

Câu 90. Thay tọa độ điểm $P(7; 2; 1)$ vào phương trình đường thẳng d ta có $\frac{7-1}{3} = \frac{2+2}{2} \neq \frac{1-3}{-4}$ nên điểm $P(7; 2; 1) \notin d$.

Câu 91. Đường thẳng Δ có vtcp $\vec{u} = (1; 2; 3)$ và có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi $N(t; 2t; 3t) \in \Delta$ là hình chiếu vuông góc của M lên Δ , khi đó:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (t-1) + (2t-0) \cdot 2 + (3t-1) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow 14t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{7} \Rightarrow N\left(\frac{2}{7}; \frac{4}{7}; \frac{6}{7}\right).$$

Câu 92. Chọn B

Gọi H là hình chiếu của M lên Δ nên tọa độ của H có dạng $H(1-t; -2+3t; -2t)$ và $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}_\Delta$

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 14t - 11 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{14} \Rightarrow H\left(\frac{3}{14}; \frac{5}{14}; -\frac{22}{14}\right) \Rightarrow a + b + c = -1$$

Câu 93. Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Do $H \in d \Rightarrow H(1+t; 1+t; t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (t; t; t-1)$. Do H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d nên suy ra

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 1\right).$$

Câu 94. Ta có $A' \in (d)$ nên gọi $A'(6-4t; -2-t; -1+2t)$; $\overrightarrow{AA'} = (5-4t; -3-t; -2+2t)$;

đường thẳng (d) có vector chỉ phương $\vec{u} = (-4; -1; 2)$.

$$AA' \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (5-4t) \cdot (-4) + (-3-t) \cdot (-1) + (-2+2t) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\Rightarrow A'(2; -3; 1).$$

Vậy $A'(2; -3; 1)$.

Câu 95. Phương trình đường thẳng d qua $C(-6; 3; 6)$ và song song với đường thẳng AB là

$$\frac{x+6}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$$

Điểm D thuộc đường thẳng d nên gọi tọa độ D là $D(-6-2t; 3+t; 6+2t)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân nên ta có:

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow t^2 + 8t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -6 \end{cases}$$

Với $t = -2 \Rightarrow D_1(-2; 1; 2)$, tứ giác là hình bình hành nên loại.

Với $t = -6 \Rightarrow D_2(6; -3; -6)$ thỏa mãn, nên $6-3-6 = -3$.

Câu 96. Chọn C

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

$$\text{Vì } C \in d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow C(-1 + 2t; t)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; -1; -2); \overrightarrow{AC} = (-1 + 2t; t; 2 - t) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3t - 7; -3t - 1; 3t - 3)$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{27t^2 - 54t + 59}$$

$$S_{ABC} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{27t^2 - 54t + 59} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow C(1; 1; 1) \Rightarrow m + n + p = 3$$

Câu 97. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d . Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0.$$

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d , khi đó $H = d \cap (P)$

$$\text{Suy ra } H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t), \text{ mặt khác } H \in (P) \Rightarrow -1+t-6+4t-4+4t-7=0 \\ \Rightarrow t=2. \text{ Vậy } H(1; 1; 2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d , khi đó H là trung điểm của AA' suy ra $A'(-1; 0; 4)$

Câu 98. Chọn C

Đường thẳng Δ đi qua $N(0; 2; 3)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$

$$\overrightarrow{MN} = (-2; 6; 4); [\overrightarrow{MN}, \vec{u}] = (16; 8; -4).$$

$$d(M, \Delta) = \frac{|[\overrightarrow{MN}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{14}.$$

Câu 99. $M \in \Delta \Rightarrow M(t; 1+2t; -2+3t)$.

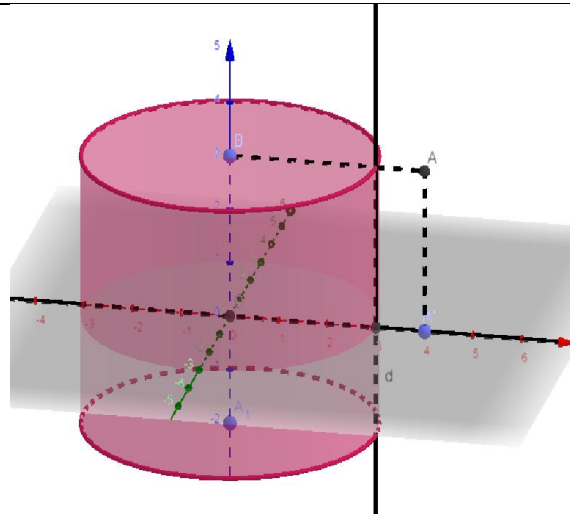
$$\text{Ta có } d(M; (Oyz)) = |t| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow 1+2t = 5 \\ t = -2 \Rightarrow 1+2t = -2 \end{cases}$$

Suy ra $t = -2$. Do đó $M(-2; -3; -8)$.

$$\text{Vậy } a = -2; b = -3; c = -8 \Rightarrow T = a + b + c = -13.$$

Dạng 3.2 Bài toán cực trị

Câu 100. Chọn D



Đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.

Gọi I là hình chiếu của A lên Oy , khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất khi d đi qua giao điểm của Oy với mặt trụ là điểm $I(0;3;0)$ nên d đi qua điểm $N(0;3;-5)$.

Câu 101. Chọn A

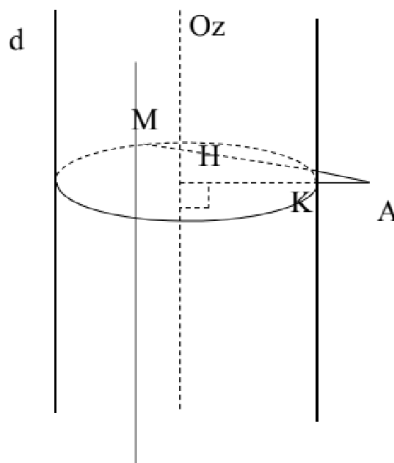
Vì d song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên d thuộc mặt trụ trục Oz và bán kính bằng 2.

Có $H(0;0;-2)$ là hình chiếu vuông góc của $A(0;3;-2)$ trên Oz .

Có $\overrightarrow{HA}(0;3;0) \Rightarrow HA = 3$ nên A nằm ngoài mặt trụ.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Oz . M là hình chiếu vuông góc của A trên d

Gọi K là giao điểm của AH và mặt trụ (K nằm giữa A và H).



Dễ thấy $d(A;d) = AM \geq AK$; $AK = AH - d(A;d) = 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv K$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{HK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HA} \Rightarrow K(0;2;-2) \Rightarrow d: \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Với $t = -3$ ta thấy d đi qua điểm Q .

Câu 102. Chọn B

Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d là đường sinh của hình trụ có trục là Oz và có bán kính đáy $r = 3$.

Gọi A' là hình chiếu của A lên trục $Oz \Rightarrow A'(0;0;-3)$ và $AA' = 4$.

Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu của A lên d .

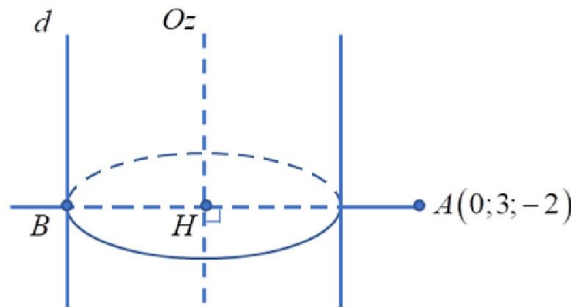
AH lớn nhất khi A, A', H thẳng hàng và $AH = AA' + A'H = AA' + r = 4 + 3 = 7$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AH} = \frac{7}{4} \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow (x; y-4; z+3) = \frac{7}{4}(0; -4; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow H(0; -3; -3).$$

Vậy d qua $H(0; -3; -3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=-3+t \end{cases}$ suy ra d

đi qua điểm $M(0; -3; -5)$.

Câu 103. Chọn C



Do đường thẳng $d // Oz$ nên d nằm trên mặt trụ có trục là Oz và bán kính trụ là $R = 2$.

Gọi H là hình chiếu của A trên trục Oz , suy ra tọa độ $H(0; 0; -2)$.

Do đó $d_{(A, Oz)} = AH = 3$.

Gọi B là điểm thuộc đường thẳng AH sao cho $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow B(0; -2; -2).$$

Vậy $d(A, d)_{\max} = 5 \Leftrightarrow d$ là đường thẳng đi qua B và song song với Oz .

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=-2+t \end{cases}.$$

Kết luận: d đi qua điểm $P(0; -2; -5)$.

Câu 104. Vì $M \in d$ nên giả sử $M(1-t; 2+t; -t)$.

$$\text{Ta có: } MA^2 = 3t^2 + 14t + 29; MB^2 = 3t^2 - 4t + 2; MC^2 = 3t^2 + 10t + 21$$

$$\Rightarrow P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 18t^2 + 36t + 96 = 18(t+1)^2 + 78 \geq 78$$

Do đó $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -1$, khi đó:

$$M(2; 1; 1) \Rightarrow a+b+c=4.$$

Câu 105. Gọi I là trung điểm của AB , ta có $I(2; -1; 4)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = MI^2 + 6. \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d .

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d là

$$1.(x-2) - 2.(y+1) + 2.(y-4) = 0 \text{ hay } (P): x - 2y + 2z - 12 = 0.$$

Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \\ x - 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 5 \\ t = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } M(2; 0; 5).$$

Câu 106. Do M thuộc Δ nên $M(t; 1+t; t)$.

Khi đó $MA = \sqrt{3t^2 - 6t + 27} = \sqrt{3(1-t)^2 + 24}$, $MB = \sqrt{3t^2 + 6}$.

Do đó $|MA - MB| = \left| \sqrt{3(1-t)^2 + 24} - \sqrt{3t^2 + 6} \right|$.

Xét hai véc tơ $\vec{u} = (\sqrt{3}(1-t); \sqrt{24})$ và $\vec{v} = (\sqrt{3}t; -\sqrt{6})$.

Ta có $|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} + \vec{v}| = 3$ nên $T_{\max} = 3$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u} = (\sqrt{3}(1-t); \sqrt{24})$ và $\vec{v} = (\sqrt{3}t; -\sqrt{6})$ ngược hướng hay $t = 1$.

Câu 107. $M \in d \Rightarrow M(-1+2t; 1-t; 2t)$.

Chu vi tam giác MAB là: $AM + BM + AB$. Vì $AB = \text{const}$ nên chu vi nhỏ nhất khi $(AM + BM)$ nhỏ nhất.

$\overrightarrow{AM}(2t-2; -t-4; 2t)$, $\overrightarrow{BM}(2t-4; -t-2; 2t-6)$.

$AM + BM = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(6-3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}$

Đặt $\vec{u} = (3t; 2\sqrt{5})$, $\vec{v} = (6-3t; 2\sqrt{5}) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5})$.

Áp dụng bất đẳng thức vector: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$. Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.

Ta có: $AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{29}$. Do đó $(AM + BM)$ nhỏ nhất khi

tồn tại số k dương sao cho $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = k(6-3t) \\ 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ k = 1 \end{cases}$. Khi đó $M(1; 0; 2)$.

Vậy $P = a + b + c = 1 + 0 + 2 = 3$.

Câu 108. Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} MA^4 + MB^4 &= (MA^2 + MB^2)^2 - 2MA^2 \cdot MB^2 = \left(2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \right)^2 - 2 \left(MI^2 - \frac{AB^2}{4} \right)^2 \\ &= 4MI^4 + 2MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} - 2MI^4 + MI^2 AB^2 - \frac{AB^4}{8} \\ &= 2MI^4 + 3MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} = 2 \left(MI^2 + \frac{3AB^2}{4} \right)^2 - \frac{7}{10} AB^4 \end{aligned}$$

Do đó, $MA^4 + MB^4$ đạt GTNN khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên d .

Điểm $I(2; -1; 0)$. Lấy $M(2+t; -1+2t; 3t) \in d$. $\overrightarrow{IM} = (t; 2t; 3t)$

$$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra $M \equiv I$.

Vậy $x_0 = 2$

Câu 109. Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $I(1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB : $(\alpha): 2x + y - 3 = 0$.

Vì $(2.3 + 1.2 - 3) \cdot (2.5 + 1.3 - 3) = 50 > 0$ nên B, C nằm về một phía so với (α) , suy ra A, C nằm về hai phía so với (α) .

Điểm M thỏa mãn $MA = MB$ khi $M \in (\alpha)$. Khi đó $MB + MC = MA + MC \geq AC$.

$MB + MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M = AC \cap (\alpha)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } AC: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \text{ do đó tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}. \text{ Do đó } M(1; 1; 3), a + b + c = 5.$$

Dạng 4. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng với mặt phẳng

Dạng 4.1 Bài toán liên quan khoảng cách, góc

Câu 110. Chọn A

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; -2; -1)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 1; 2)$ thỏa mãn $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ nên $\Delta // (P)$ hoặc $\Delta \subset (P)$.

$$\text{Do đó: lấy } A(1; -2; 1) \in \Delta \text{ ta có: } d(\Delta(P)) = d(A; (P)) = \frac{|2.1 - 2.(-2) - 1 + 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2.$$

Câu 111. Đường thẳng d qua $M(1; 0; 0)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 1; -2)$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 1.1 + 1.1 - 2.1 = 0 \\ M \notin (P) \end{cases} \Rightarrow d // (P).$$

$$d(d, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|1 + 0 + 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}.$$

Câu 112. Xét phương trình $2(2+t) - (5+4t) + 2(2+t) = 0 \Leftrightarrow 0t + 3 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm nên $\Delta // (P)$.

Chọn $M(2; 5; 2) \in \Delta$.

Khi đó:

$$d(\Delta, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|2.2 - 5 + 2.2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

Câu 113. Chọn A.

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 0)$ Gọi α là góc giữa Đường thẳng d và Mặt phẳng (P) . Khi đó ta có

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|} = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó $\alpha = 60^\circ$

Câu 114. Cách 1:

Gọi $(Q) = (d_1, d_1')$ khi đó (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_Q = [\vec{n}_P, \vec{u}_1] = (5; 5; 15)$.Đường thẳng d_1' có vector chỉ phương $\vec{u}_1' = [\vec{n}_P, \vec{u}_1] = (22; 11; -11)$ hay một vectơ chỉ phương khác $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

$$\text{Vì } \vec{n}_P \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow 4a - 7b + c = 0 \Rightarrow c = 7b - 4a \Rightarrow \vec{u}_2 = (a; b; 7b - 4a).$$

$$\text{Ta lại có } (d_1; d_2) = (d_1'; d_2) \Leftrightarrow |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = |\cos(\vec{u}_1', \vec{u}_2)|$$

$$\Leftrightarrow |a + 2b + 4a - 7b| = |2a + b + 4a - 7b| \Leftrightarrow |5a - 5b| = |6a - 6b| \Leftrightarrow |a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Chọn } a = 1 \Rightarrow b = 1, c = 3 \Rightarrow \frac{a + 2b}{c} = 1.$$

Cách 2:

Gọi $(Q) = (d_1, d_1')$ khi đó $(P) \perp (Q)$. Các đường thẳng nằm trong (P) mà vuông góc với (Q) thì vuông góc với tất cả các đường thẳng trong (Q) hay chúng cùng tạo với d_1, d_1' các góc 90° . Do đó, các đườngthẳng này thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chúng có vector chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_Q(1; 1; 3) \Rightarrow \frac{a + 2b}{c} = 1$.Câu 115. * Ta có: $\vec{AB} = (2; 4; -6) = 2(1; 2; -3)$ Gọi $I(4; 3; 4)$ là trung điểm của AB Phương trình mặt phẳng trung trực (Q) của AB là: $(x - 4) + 2(y - 3) - 3(z - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 3z + 2 = 0$$

Gọi $d = (P) \cap (Q)$. Đường thẳng d có 1 véc tơ là $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (1; 1; 1)$ và đi qua điểm $N(-2; 0; 0)$,

$$\text{có phương trình là } d: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

* Gọi $M \in (P)$: $MA = MB$. Khi đó $M \in d$ và $M(-2 + t; t; t)$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } MA = \sqrt{35} \Leftrightarrow \sqrt{(t - 5)^2 + (t - 1)^2 + (t - 7)^2} = \sqrt{35}$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 26t + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{20}{3} \\ t = 2 \Rightarrow M(0; 2; 2) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } OM = 2\sqrt{2}$$

Câu 116. Ta có vector chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (2; -2; -1)$ và $\vec{u}_2 = (1; 0; -1)$.

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ qua } d_1 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2b - c = 0. \quad (1)$$

$$\sin(d_2, (P)) = \frac{|\vec{u}_2 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_2| \cdot |\vec{n}|} = \sin 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|1-c|}{\sqrt{b^2+c^2+1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |1-c| = \sqrt{b^2+c^2+1} \Leftrightarrow b^2+2c=0. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=-2 \end{cases} \Rightarrow b \cdot c = -4.$$

Câu 117. Đường thẳng d_1 và d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (2; -2; -1)$ và $\vec{u}_2 = (1; 0; -1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; b; c)$.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} \vec{u}_1 \perp \vec{n} \\ \frac{|\vec{u}_2 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_2| \cdot |\vec{n}|} = \sin 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0 \\ \left| \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot b + (-1) \cdot c}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + b^2 + c^2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2b - c = 0 \\ |1 - c| = \sqrt{1 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = 2 \\ (1 - c)^2 = 1 + b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = 2 \\ b^2 + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy $b \cdot c = -4$.

Câu 118. $\vec{u}_1 = (2; -2; -1)$, $\vec{u}_2 = (1; 0; -1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1 , d_2 . Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \left| \cos(\vec{n}, \vec{u}_2) \right| = \sin(d_2, (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 + (-2)b + (-1)c = 0 \\ \left| \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot b + (-1)c}{\sqrt{1 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - 2b \\ (c - 1)^2 = 1 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Dạng 4.2 Bài toán phương trình mặt phẳng, giao tuyến 2 mặt phẳng

Câu 119. Chọn A

Mặt phẳng qua $A(1; 2; -2)$ và nhận $\vec{u}_\Delta = (2; 1; 3)$ làm VTPT

Vậy phương trình của mặt phẳng là: $2(x-1) + (y-2) + 3(z+2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 3z + 2 = 0.$$

Câu 120. Chọn C

Mặt phẳng cần tìm đi qua $M(3; -1; 1)$ và nhận VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta = (3; -2; 1)$ làm VTPT nên có phương trình: $3x - 2y + z - 12 = 0$.

Câu 121. Chọn A

Đường thẳng $\Delta: \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; 1; 1)$

Mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (10; 2; m)$

Để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ phải cùng phương với $\vec{n}$

$$\Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 122. Mặt phẳng (P) vuông góc với Δ nên (P) nhận vtcp của Δ là $\vec{u}_\Delta = (2; -1; 3)$ làm vtpt

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-1) - 1(y+1) + 3(z-2) = 0$ hay $2x - y + 3z - 9 = 0$.

Câu 123. Ta có: Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_d = (2; -1; 2)$

Vì $(P) \perp d$ nên vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = \vec{a}_d = (2; -1; 2)$

Câu 124. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ nên nhận véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến, suy ra phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x + y + z + D = 0$, mặt khác (P) đi qua gốc tọa độ nên $D = 0$.

Vậy phương trình (P) là: $x + y + z = 0$.

Câu 125. Ta lấy điểm $M(2; 1; 3) \in (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (2; 0; 3) \\ \text{vtcp } \vec{u}_{(\Delta)} = (1; -1; 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_{(\Delta)}] = (3; 1; -2)$

Mặt phẳng cần tìm qua $A(0; 1; 0)$ và nhận $\vec{n} = (3; 1; -2)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là:

$$3.(x-0) + 1.(y-1) - 2.(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 2z - 1 = 0.$$

Câu 126. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nếu vector chỉ phương của đường thẳng cùng phương với vector pháp tuyến của mặt phẳng.

Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

Mặt phẳng (T) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_T = (1; 1; 2)$. Do $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{2}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{n}_T$. Do đó d không vuông góc với (T) .

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; -2; 1)$. Do $\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{1}{1}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}_P$. Do đó d vuông góc với (P) .

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q = (1; -2; -1)$. Do $\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{1}{-1}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{n}_Q$. Do đó (d) không vuông góc với (Q) .

Mặt phẳng (R) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_R = (1; 1; 1)$. Do $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{1}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{n}_R$. Do đó (d) không vuông góc với (R) .

Câu 127. Chọn D

Tọa độ các điểm thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 7 = 0 \end{cases}$.

$$\text{Với } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - z = -1 \\ 2x + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2; 0; 3) \in d$$

$$\text{Với } y = 3 \Rightarrow \begin{cases} x - z = -10 \\ 2x + z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow B(0; 3; 10) \in d.$$

Vậy đường thẳng d đi qua $A(2; 0; 3)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 7)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{7}$.

Câu 128. Chọn C

$(P): x + z - 5 = 0$ có 1 vtpt $\vec{n}_1 = (1; 0; 1)$

$(Q): x - 2y - z + 3 = 0$ có 1 vtpt $\vec{n}_2 = (1; -2; -1)$

Gọi Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng thì Δ có 1 vtcp $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 2; -2)$.

Câu 129. $\vec{u}_d(1; 1; 2)$ là một VTCP của đường thẳng d

$\vec{n}_\beta(1;1;-2)$ là một VTPT của (β)

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_\beta] = (-4; 4; 0)$$

$$A(2;3;0) \in d \Rightarrow A \in (\alpha)$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (\alpha): -4(x-2) + 4(y-3) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0.$$

$$\text{Giả sử } M(x; y; z) \in (\alpha) \cap (\beta). \text{ Khi đó tọa độ M thỏa mãn hệ } \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}$$

Thay các đáp án vào hệ trên ta thấy $M(2;3;3)$ thỏa mãn. Chọn đáp án B

Câu 130. $(P): x+z-5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1;0;1)$.

$$(Q): x-2y-z+3=0 \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n}_2 = (1;-2;-1).$$

$$\text{Ta có: } [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2;2;-2).$$

Gọi $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ , thì $\vec{u} \perp \vec{n}_1$ và $\vec{u} \perp \vec{n}_2$.

Suy ra $\vec{u}$ cùng phương với $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$. Chọn $\vec{u} = (1;1;-1)$.

Lấy $M(2;1;3)$ thuộc mặt phẳng (P) và (Q) .

Đường thẳng Δ đi qua $M(2;1;3)$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-1)$.

$$\text{Vậy phương trình } \Delta \text{ là: } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

Câu 131. Chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là: $\vec{n} = \vec{u}_d = (3;-2;1)$. Mặt khác mặt phẳng này đi qua A nên có phương trình là:

$$3(x-0) - 2(y+3) + (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y + z - 7 = 0$$

Câu 132. Δ có VTCP $\vec{u} = (-1;2;-3)$ và (P) có VTPT là $\vec{n} = (1;-1;1)$.

$$(\alpha) \text{ qua } O \text{ và nhận } \vec{n}' = -[\vec{u}; \vec{n}] = (1;2;1)$$

$$\text{Suy ra } (\alpha): x + 2y + z = 0.$$

Dạng 4.3 Bài toán giao điểm (hình chiếu, đối xứng) của đường thẳng với mặt phẳng

Câu 133. Chọn A

Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}(1;-3;-1)$

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(3;-3;2)$

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3 + 9 - 2 = 10 \neq 0$ nên loại trường hợp $d // (P)$ và $d \subset (P)$.

Lại có $\vec{u}$ và $\vec{n}$ không cùng phương nên loại trường hợp $d \perp (P)$.

Vậy d cắt và không vuông góc với (P) .

Câu 134. Cách 1: Lấy $\begin{cases} A(0;2;-1) \in \Delta \\ B(-2;3;2) \in \Delta \end{cases}$

$$\text{Mà } \Delta \subset (P) \Rightarrow \begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n - 16 = 0 \\ 11 \cdot (-2) + 3m + 2n - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = m + n = 14.$$

Cách 2: Đường thẳng Δ đi qua $A(0;2;-1)$ có VTCP $\vec{u} = (-2;1;3)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (11; m; n)$.

$$\Delta \subset (P) \Rightarrow \begin{cases} A \in (P) \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n - 16 = 0 \\ -22 + m + 3n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = m + n = 14.$$

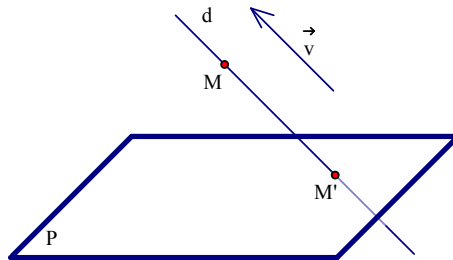
Câu 135. Tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} \\ \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \\ x+2y-3z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ 2y-z=1 \\ x+2y-3z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Vậy $M(-1; 1; 1)$.

Câu 136. Gọi H là hình chiếu của $A(3; 2; -1)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z = 0$. Khi đó: AH nhận $\vec{n}(1; 1; 1)$ là vector chỉ phương suy ra phương trình $AH: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$.

Do $H \in AH \Rightarrow H(3+t; 2+t; -1+t)$.

Do $H \in (\alpha) \Rightarrow 3+t+2+t-1+t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{4}{3} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.



Câu 137.

Đường thẳng d đi qua $M(-1; 0; 3)$, có vector chỉ phương $\vec{v} = (1; -2; 1)$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi M' là hình chiếu của điểm $M(-1; 0; 3)$ theo phương vector $\vec{v} = (1; -2; 1)$ trên mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$.

$\Rightarrow M' = d \cap (P) \Rightarrow$ tọa độ M' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + t \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + t \\ -1 + t + 2t + 3 + t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M'(-2; 2; 2).$$

Câu 138. $M \in \Delta \Rightarrow M(12+4t; 9+3t; 1+t)$.

$M \in (P) \Leftrightarrow 3(12+4t) + 5(9+3t) - (1+t) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -3$.

$M(0; 0; -2) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = -2$.

Câu 139. Mặt phẳng (ABC) qua các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ nằm trên các trục Ox , Oy , Oz có

phương trình là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Điểm $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Suy ra } \frac{-t}{1} + \frac{2+t}{2} + \frac{3+t}{3} = 1 \Leftrightarrow t = 6 \text{ suy ra } \begin{cases} a = -6 \\ b = 8 \\ c = 9 \end{cases}.$$

Vậy $S = -6 + 8 + 9 = 11$.

Câu 140. Chọn C

+ A' đối xứng với A qua (P) nên AA' vuông góc với (P)

$$\text{+Suy ra phương trình đường thẳng } AA': \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

+Gọi H là giao điểm của AA' và mặt phẳng $(P) \Rightarrow H(-1+6t; 3-2t; 6+t)$

+ Do H thuộc $(P) \Rightarrow 6(-1+6t) - 2(3-2t) + 1(6+t) - 35 = 0 \Leftrightarrow 41t - 41 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(5;1;7)$

+ A' đối xứng với A qua (P) nên H là trung điểm của AA'

$$\Rightarrow A'(11; -1; 8) \Rightarrow OA' = \sqrt{11^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{186}$$

Câu 141. Chọn B

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1; -5; 3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (2; -1; 4)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P): x + 3 = 0$.

Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1; -5; 3)$ và có VTPT là $[\vec{n}_P; \vec{u}_d] = (0; 4; 1)$

$$\Rightarrow (Q): 4y + z + 17 = 0.$$

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

$$\begin{cases} 4y + z + 17 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$$

Cách 2: Ta có $M \in d \Rightarrow M(1+2t; -5-t; 3+4t)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên $(P): x + 3 = 0$.

$$\text{Suy ra } M'(-3; -5-t; 3+4t). \text{ Suy ra } d': \begin{cases} x = -3 \\ y = -5-t \\ z = 3+4t \end{cases}$$

So sánh với các phương án, ta chọn D là đáp án đúng.

Câu 142. Chọn A

Gọi M là giao điểm của d với (P) .

$$\text{Tọa độ của } M \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1;1;1)$$

Lấy điểm $N(0; -1; 2) \in d$.

Một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và nhận $\vec{n} = (1; 1; 1)$ làm vec tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$

Gọi N' là giao điểm của Δ với (P) .

$$\text{Tọa độ của } N' \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=1 \\ x-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases} \quad N' \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{MN'} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{3} \right) = -\frac{1}{3} \vec{u}(1; 4; -5)$$

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và nhận $\vec{u} = (1; 4; -5)$ làm vec tơ chỉ phương nên có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

Câu 143. Mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 3 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}(2; 1; 1)$.

Gọi tọa độ giao điểm của d và (α) là I thì $I(-22; 39; 8)$.

Lấy $A(-4; 3; 2) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α) .

$$\text{Suy ra phương trình đường thẳng } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của A lên (α) thì $H = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow H(-2; 4; 3)$.

A' đối xứng với A qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(0; 5; 4)$.

Đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow d'$ đi qua điểm I , A' có vector chỉ phương $\overrightarrow{A'I} = (22; -34; -4) = 2(11; -17; -2)$ có phương trình là: $\frac{x}{11} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-4}{-2}$.

Câu 144. Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (α) .

$$\Rightarrow \text{Phương trình tham số của } \Delta \text{ là: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ Ta có } M' = \Delta \cap (\alpha).$$

Xét phương trình: $2 + t - 2(3 - 2t) + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } M' \left(\frac{5}{2}; 2; \frac{3}{2} \right).$$

Câu 145. Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; 2)$.

MM' vuông góc với mặt phẳng (α) nên đường thẳng MM' nhận $\vec{n} = (2; 1; 2)$ làm vector chỉ phương.

$$\text{Phương trình đường thẳng } MM' \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của đường thẳng MM' và mặt phẳng (α) .

$$H \in MM' \Leftrightarrow H(1+2t; 2+t; 4+2t).$$

$$H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2(1+2t) + 2 + t + 2(4+2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow H(-1; 1; 2).$$

M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (α) nên H là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-3; 0; 0)$.

Câu 146. Chọn D

Ta gọi AB cắt d tại điểm $M(1+2m; -1+m; 2-m) \in d$

$\overrightarrow{AM}(2m; m-3; 3-m)$, theo yêu cầu bài toán AB vuông góc d , ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2m + m - 3 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; -2; 2)$$

Đường thẳng AB đi qua A nhận $\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} = (1; -1; 1)$ là VTCP, ta có phương trình AB là

$$AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}. \text{ Gọi } B(1+t; 2-t; -1+t) \in AB$$

Lại có điểm $B \in (P) \Rightarrow 1+t+2-t+2(-1+t)+1=0 \Rightarrow t=-1$. Vậy $B(0; 3; -2)$.

Câu 147. Chọn C

Gọi M là giao điểm của d với (P) .

$$\text{Tọa độ của } M \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y=1 \\ x+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1; 1)$$

Lấy điểm $N(0; -1; 2) \in d$.

Một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và nhận $\vec{n} = (1; 1; 1)$ làm vec tơ chỉ phương.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Gọi N' là giao điểm của Δ với (P) .

$$\text{Tọa độ của } N' \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=1 \\ x-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=\frac{8}{3} \end{cases} N'\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{MN'} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3} \vec{u}(1; 4; -5)$$

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và nhận $\vec{u} = (1; 4; -5)$ làm vec tơ chỉ phương nên có phương

$$\text{trình } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}.$$

Câu 148. Chọn D

Gọi $M = d \cap (P)$. Suy ra $M \in d \Rightarrow M(3+2t; -2+t; -1-t); M \in (P) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(1; -3; 0)$

(P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; 1; 1)$. d có véc tơ chỉ phương $\vec{a}_d = (2; 1; -1)$. Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = [\vec{a}_d, \vec{n}_p] = (2; -3; 1)$. Gọi $N(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ , khi đó $MN = (x-1; y+3; z)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{MN} \perp \overline{a_\Delta} \\ N \in (P) \\ MN = \sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z - 11 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 42 \end{cases}.$$

Giải hệ ta tìm được $N(5; -2; -5)$ và $N(-3; -4; 5)$.

$$\text{Với } N(5; -2; -5), \text{ ta có } \Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1}.$$

$$\text{Với } N(-3; -4; 5), \text{ ta có } \Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1}.$$

Câu 149. Đường thẳng d_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (1; -2; 3)$ và đi qua điểm $N(-3; 1; -4)$

$$\text{Ta có: } [\vec{v}, \vec{u}] = (4; 5; 2) \neq \vec{0}; \overline{MN} = (-4; 4; -6); [\vec{v}, \vec{u}] \cdot \overline{MN} = -16 + 20 - 12 = -8 \neq 0$$

$\Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau.

Mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 nên (P) nhận $[\vec{v}, \vec{u}] = (4; 5; 2)$ làm một vectơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(-1; -1; -1)$ của đoạn MN

$$\text{Suy ra phương trình của } (P): 4(x+1) + 5(y+1) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y + 2z + 11 = 0$$

$$\Rightarrow a = 4; b = 5; c = 2 \Rightarrow a + 2b + 3c = 20.$$

Câu 150. Đường thẳng d có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Điểm M thuộc đường thẳng d nên $M(-1+2t; t; 2+t)$.

Điểm A là trung điểm của MN nên:

$$A(2; -1; 3)$$

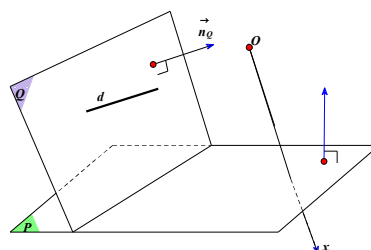
$$\begin{cases} x_N = 2x_A - x_M = 5 - 2t \\ y_N = 2y_A - y_M = -2 - t \Rightarrow N(5 - 2t; -2 - t; 4 - t) \\ z_N = 2z_A - z_M = 4 - t \end{cases}$$

Mặt khác điểm $N \in (P)$ nên: $5 - 2t - 2 - t - 8 + 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Suy ra: $M(5; 3; 5)$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\overline{AM}(3; 4; 2)$ và đi qua điểm $M(5; 3; 5)$ nên có phương trình:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{2}$$



Câu 151.

Chọn $A(1; 2; -1) \in d; \vec{u}_d = (2; 1; 3); [\vec{u}, \vec{i}] = (0; 3; -1)$.

Ta thấy $[\vec{u}_d; \vec{i}] \cdot \vec{OA} = 7 \neq 0 \Rightarrow d$ và Ox chéo nhau.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Ox .

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d; \vec{i}] = (0; 3; -1)$.

Hình chiếu d' của d trên mặt phẳng (P) là đường giao tuyến giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

d' có một vector chỉ phương là $[\vec{n}_Q; \vec{n}_P] = (-4; 1; 3) \Rightarrow \vec{u} = 673[\vec{n}_Q; \vec{n}_P] = (-2692; 673; 2019)$ cũng là một vector chỉ phương.

Vậy $a + b = -2019$.

Câu 152. Gọi $A = d \cap (P)$. Vì $A \in d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow A(t; -1 + 2t; 2 - t)$.

Mặt khác $A \in (P) \Rightarrow t - 1 + 2t + 2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $A(1; 1; 1)$.

Lấy $B(0; -1; 2) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc (P) .

Thì $\Delta: \begin{cases} x = t' \\ y = -1 + t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$. Gọi C là hình chiếu của B lên (P) .

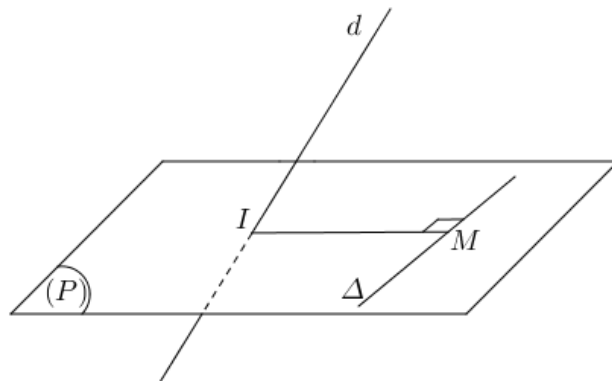
Suy ra $C \in \Delta \Rightarrow C(t'; -1 + t'; 2 + t')$.

Mặt khác $C \in (P) \Rightarrow t' - 1 + t' + 2 + t' - 3 = 0 \Leftrightarrow t' = \frac{2}{3}$. Vậy $C\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Lúc này d' qua $A(1; 1; 1)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{AC} = \left(\frac{-1}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Hay d' nhận

$\vec{u} = (1; 4; -5)$ làm một vector chỉ phương.

Suy ra $d': \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 4s \\ z = 1 - 5s \end{cases}$. Vậy điểm thuộc đường thẳng d' là $M(2; 5; -4)$.



Câu 153.

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và d có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -1)$. $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1; 1; 1)$.

Vì $\Delta \subset (P); \Delta \perp d \Rightarrow \Delta$ có vector chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}, \vec{u}] = (-3; 2; 1)$.

M là hình chiếu của I trên Δ nên M thuộc mặt phẳng (Q) đi qua I và vuông góc với Δ .

Mặt phẳng (Q) nhận $\vec{u}_\Delta = (-3; 2; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên ta có phương trình của

$$(Q): -3(x-1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z = 0.$$

Gọi $d_1 = (P) \cap (Q) \Rightarrow d_1$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}] = (1; 4; -5)$ và d_1 đi qua I , phương trình của

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

Mặt khác $M \in \Delta \Rightarrow M \in (P) \Rightarrow M \in d_1$.

$$\text{Giả sử } M(1+t; 1+4t; 1-5t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (t; 4t; -5t).$$

$$\text{Ta có: } IM = \sqrt{42} \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 16t^2 + 25t^2} = \sqrt{42} \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

$$+) \text{ Với } t = 1 \Rightarrow M(2; 5; -4).$$

$$+) \text{ Với } t = -1 \Rightarrow M(0; -3; 6).$$

Vì $M(a; b; c)$ (với $a + b > c$) nên $M(2; 5; -4)$.

Cách 2: Vì $M(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ .

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{IM} \perp \vec{u}_\Delta \\ IM = \sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c - 3 = 0 \\ -3(a-1) + 2(b-1) + (c-1) = 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c - 3 = 0 \\ -3a + 2b + c = 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 42 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 3 \\ a + b + c - 3 = 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a - 3 \\ c = -5a + 6 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 42 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \\ c = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $M(a; b; c)$ (với $a + b > c$) nên $M(2; 5; -4)$.

Câu 154. Mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; 1; -1)$.

$$\text{Đường thẳng } d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u}(2; 3; 5).$$

$$\text{Vì } \vec{n} \cdot \vec{u} = 1.2 + 1.3 + (-1).5 = 0 \text{ nên } d // (\alpha).$$

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(\alpha) \Rightarrow d' // d$.

Lấy $A(1; -4; 0) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α) .

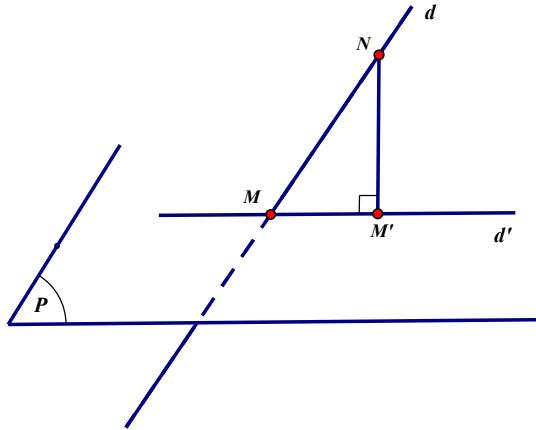
$$\text{Suy ra phương trình đường thẳng } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Gọi A' là hình chiếu của A lên (α) thì $A' = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow A'(0; -5; 1)$.

Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua $A'(0; -5; 1)$, có vector chỉ phương $\vec{u}(2; 3; 5)$ có phương trình là

$$\frac{x}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{5}.$$

Câu 155. Chọn B.



+) Phương trình tham số của $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Gọi $M = (-2 + 2t; 4 - 2t; -1 + t)$ là giao điểm của

d và $(P) \Rightarrow (-2 + 2t) + (4 - 2t) - (-1 + t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M = (2; 0; 1)$.

+) Mặt phẳng (P) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; 1; -1)$. Điểm $N = (0; 2; 0) \in d$.

Gọi Δ là đường thẳng qua $N(0; 2; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \Delta$ nhận vector $\vec{n}_p = (1; 1; -1)$ làm vector chỉ phương. Suy ra phương trình của Δ là:

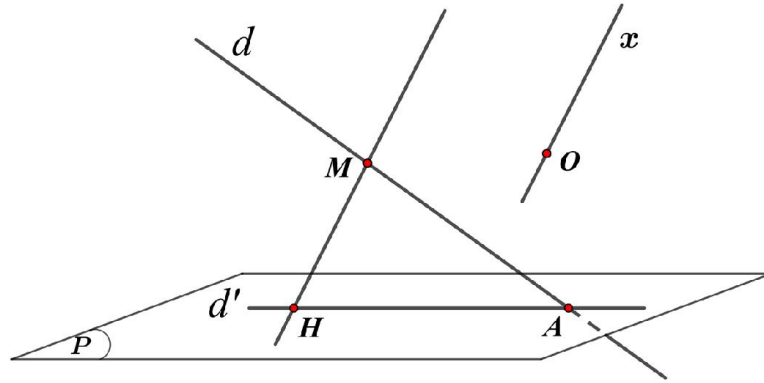
$(\Delta): \frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = c \\ y = 2 + c \\ z = -c \end{cases}, c \in \mathbb{R}$. Gọi $M' = (c; 2 + c; -c)$ là giao điểm của Δ với

mặt phẳng $(P) \Rightarrow c + (2 + c) - (-c) - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

+) $\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) nên d'

chính là đường thẳng MM' , suy ra d' đi qua $M(2; 0; 1)$ và nhận vector $\vec{u} = -3\overrightarrow{MM'} = (7; -5; 2)$ làm vector chỉ phương nên phương trình của d' là:

$$d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}.$$



Câu 156.

- Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; 1)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (2; 1; 3)$, đường thẳng chứa trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

- Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và song song (hoặc chứa) trục Ox .

Khi đó (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_d, \vec{i}] = (0; 3; -1)$.

- Đường thẳng d' chính là giao tuyến của (P) và (Q) .

$\Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u}_1 = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (-4; 1; 3)$.

Suy ra: $\vec{u}(-2692; 673; 2019)$ cũng là chỉ phương của d' .

Ta có: $a + b = -2692 + 673 = -2019$.

Dạng 4.4 Bài toán cực trị

Câu 157. Chọn D

Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$.

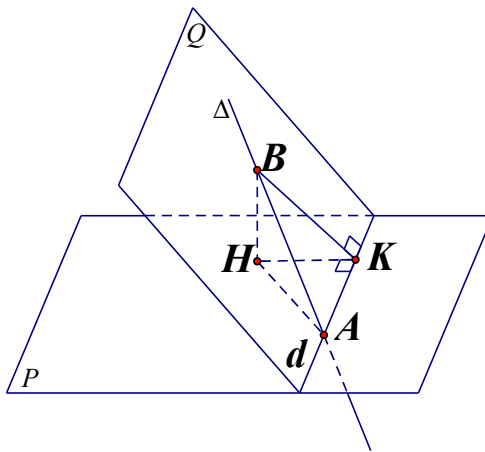
Ta có $\vec{IA}(1-a; 2-b; 3-c), \vec{IB}(-a; 1-b; 1-c), \vec{IC}(1-a; -b; -2-c)$

$$\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a-2a+3-3a=0 \\ 2-b+2-2b-3b=0 \\ 3-c+2-2c-6-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=4 \\ 6b=4 \\ 6c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=-\frac{1}{6} \end{cases} \quad I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right).$$

Ta chứng minh được $T = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$. Do đó T đạt GTNN khi MI đạt GTNN $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) .

$$\text{Ta có } MI: \begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = -\frac{1}{6} + t \end{cases}, M \in MI \Rightarrow M\left(t + \frac{2}{3}; t + \frac{2}{3}; t - \frac{1}{6}\right), M \in (P) \Rightarrow 3t + \frac{19}{6} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{19}{18}$$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{7}{18}; -\frac{7}{18}; -\frac{11}{9}\right) \Rightarrow d(M; (Q)) = \frac{\left|-\frac{7}{9} + \frac{7}{18} + \frac{22}{9} + 3\right|}{3} = \frac{91}{54}.$$



Câu 158.

Đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ được viết lại dưới dạng tham số $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Do đó Δ cắt (P) tại điểm $A(0;0;0) \equiv O$.

Lại có Δ và (P) không vuông góc nhau nên ta đi chứng minh góc nhỏ nhất giữa (P) và (Q) là góc giữa Δ và (P) . Thật vậy trên Δ lấy B khác A , kẻ BH vuông góc với (P) tại H và BK vuông góc d tại K (d là giao tuyến của (P) và (Q)) tại K . Khi đó góc giữa (Q) và (P) là góc $\widehat{BKH}$.

$$HA \geq HK \Rightarrow \tan \widehat{BKH} = \frac{BH}{HK} \geq \frac{BH}{HA} = \tan \widehat{BAH}$$

$$\begin{cases} \widehat{BKH}, \widehat{BAH} < 90^\circ \\ \tan \widehat{BKH} \geq \tan \widehat{BAH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BKH} \geq \widehat{BAH} = \left(\Delta, (P) \right) = \arcsin \frac{4}{9}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow K \equiv A \Leftrightarrow \Delta \perp d$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất khi và chỉ khi (Q) chứa Δ và cắt (P) theo một giao tuyến vuông góc Δ .

*)Viết phương trình của (Q)

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 2; 1)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2; -2)$ nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = [\vec{u}_1, \vec{n}_1] = (-6; 5; 2)$.

(Q) chứa Δ và d nên nhận $\vec{n}_2 = [\vec{u}_2, \vec{u}_1] = (1; 10; -22)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua $A(0;0;0)$ và nhận $\vec{n}_2 = (1; 10; -22)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $x + 10y - 22z = 0$.

Câu 159. Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\vec{IA} = (-10 - x; -5 - y; 8 - z)$, $\vec{IB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$, $\vec{IC} = (2 - x; 3 - y; -z)$.

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} (-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0 \\ (-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0 \\ (8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1).$$

Với điểm M thay đổi trên (P) , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 \quad (\text{Vì } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Ta lại có $IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = 185 + 2.8 + 3.9 = 228$.

Do đó, $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Khi đó, $MI = d(I, (P)) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ bằng

$$6MI^2 + 228 = 6.9 + 228 = 282.$$

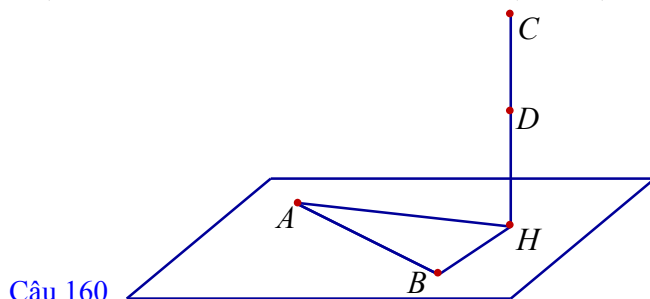
Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Phương trình của Δ :
$$\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=1-2t \end{cases}$$

Ta có $M = \Delta \cap (P)$. Xét phương trình

$$t + 2(1+2t) - 2(1-2t) - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1;3;-1).$$



Câu 160.

Gọi C_{ABM} là chu vi của tam giác ABM .

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10) \Rightarrow AB = \sqrt{113}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10), \overrightarrow{CD} = (1; -4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -2 + 12 - 10 = 0 \Rightarrow AB \perp CD.$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với đường thẳng CD .

H là giao điểm của (P) và đường thẳng CD .

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1;1;6)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD} = (1; -4; 1)$ là:

$$x - 4y + z - 1 = 0.$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } CD: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$H \in CD \Leftrightarrow H(1+t; 2-4t; -1+t).$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 1+t-4(2-4t)-1+t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Với } \forall M \in CD, \text{ ta có } \begin{cases} AM \geq AH \\ BM \geq BH \end{cases} \Rightarrow AM + BM \geq AH + BH.$$

$$C_{ABM} = AB + AM + BM \geq \sqrt{113} + AH + BH, \forall M \in CD.$$

$$\text{Suy ra } \min C_{ABM} = \sqrt{113} + AH + BH, \text{ đạt được } M \equiv H \Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } a+b+c=1.$$

Câu 161. Ta có $C_{\Delta ABM} = AM + BM + AB$ mà AB không đổi suy ra $C_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10), \overrightarrow{CD} = (1; -4; 1).$$

Xét $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow AB \perp CD$. Gọi (α) qua AB và vuông góc với CD .

(α) đi qua $A(-1; 1; 6)$ và nhận $\overrightarrow{CD} = (1; -4; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Suy ra (α) có phương trình là: $x - 4y + z - 1 = 0$.

Vì điểm M thuộc CD sao cho $AM + BM$ nhỏ nhất nên $M = CD \cap (\alpha)$.

$$(\alpha): x - 4y + z - 1 = 0, CD \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-4t \\ z = -1+t \end{cases}$$

$$M = CD \cap (\alpha) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a+b+c = \frac{3}{2} + 0 + \frac{-1}{2} = 1.$$

Câu 162. + Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (3-x; 1-y; 1-z) \\ \overrightarrow{IB} = (7-x; 3-y; 9-z) \\ \overrightarrow{IC} = (2-x; 2-y; 2-z) \end{cases}$$

$$+ \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 23-6x=0 \\ 13-6y=0 \\ 25-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{6} \\ y = \frac{13}{6} \\ z = \frac{25}{6} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{23}{6}; \frac{13}{6}; \frac{25}{6}\right).$$

$$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |6\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC})| = |6\overrightarrow{MI}| = 6MI.$$

$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

+ Gọi đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc (P) .

Ta có (d) đi qua $I\left(\frac{23}{6}; \frac{13}{6}; \frac{25}{6}\right)$ và nhận $\overrightarrow{n_p} = (1; 1; 1)$ làm véc tơ chỉ phương.

$$\text{Suy ra phương trình } (d): \begin{cases} x = \frac{23}{6} + t \\ y = \frac{13}{6} + t \\ z = \frac{25}{6} + t \end{cases}$$

$$M \in (d) \Leftrightarrow M\left(\frac{23}{6} + t; \frac{13}{6} + t; \frac{25}{6} + t\right)$$

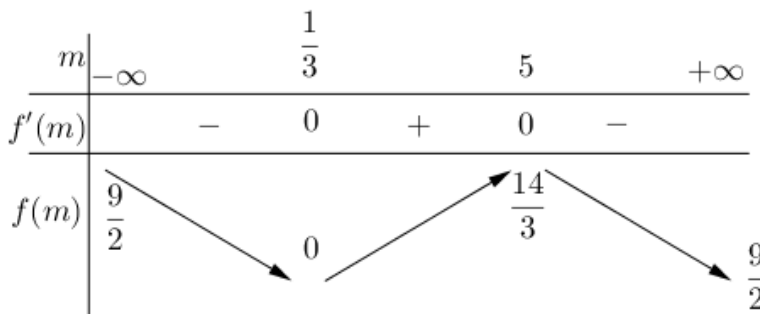
$$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{23}{6} + t + \frac{13}{6} + t + \frac{25}{6} + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-43}{18} \Leftrightarrow M\left(\frac{13}{9}; \frac{-2}{9}; \frac{16}{9}\right).$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} a = \frac{13}{9} \\ b = \frac{-2}{9} \\ c = \frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow 2a - 10b + c = \frac{62}{9}.$$

Câu 163. Cách 1:

$$\text{Ta có } d(A; (P)) = \frac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1 + m^2}} = \sqrt{\frac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)}}.$$

$$\text{Xét } f(m) = \frac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)} \Rightarrow f'(m) = \frac{(5-m)(3m-1)}{2(m^2-m+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = 5 \end{cases}.$$



$$\text{Vậy } \max d(A; (P)) = \sqrt{\frac{14}{3}} \text{ khi } m = 5 \in (2; 6).$$

Cách 2:

Ta đi tìm đối tượng cố định của mặt phẳng (P) :

$$(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+z)m - x + y - 1 = 0.$$

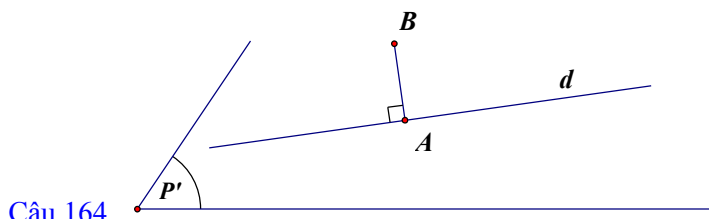
Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mặt phẳng (P) luôn đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $\begin{cases} x+z=0 \\ -x+y-1=0 \end{cases}$ tức luôn đi

$$\text{qua đường thẳng } (d): \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$$

Gọi $H(t; 1+t; -t) \in (d) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (t-1; t; -t-2)$. Để khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất thì

$AH \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{AH}$ cùng phương với VTPT của (P) là $\vec{n}_P = (m-1; 1; m)$, suy ra:

$$\frac{t-1}{m-1} = \frac{t}{1} = \frac{-t-2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} mt-t=t-1 \\ mt=-t-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ m=5 \in (2;6) \end{cases}.$$



Câu 164.

Gọi (P') chứa A và song song (P) suy ra $(P') : x + y + 2z - 4 = 0$.

Ta thấy $B \in (P')$ do đó $d(B, d)$ đạt giá trị lớn nhất là AB .

Khi đó d vuông góc với AB và d vuông góc với giá của $\vec{n}$ là VTPT của (P) .

Suy ra một VTCP của d là $\vec{u} = [\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = (2; 2; -2)$.

Kết hợp với điểm A thuộc d nên ta chọn đáp án **C**.

Câu 165. Gọi $M = (a; b; c)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 34 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 34 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 34$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{MA} = (-8-a; 1-b; 1-c), \overrightarrow{BC} = (4; 3; -3)$$

$$\text{Suy ra } 4(-8-a) + 3(1-b) - 3(1-c) = 34 \Leftrightarrow -4a - 3b + 3c - 66 = 0.$$

$$\text{Vậy } M \in (P) \text{ có phương trình } -4x - 3y + 3z - 66 = 0.$$

$$\text{Ký hiệu } f(M) = f(x; y; z) = -4x - 3y + 3z - 66, \text{ với } M(x; y; z)$$

$$\text{Ta có } f(A) \cdot f(B) = (-4(-8) - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 66)((-4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 66)) = (-34) \cdot (-68) = 2312 > 0$$

Suy ra điểm $A(-8; 1; 1)$ và điểm $B(2; 1; 3)$ nằm về cùng 1 phía so với mặt phẳng (P) .

Khi đó $|MA - MB| \leq AB$ (tính chất 3 cạnh của tam giác) suy ra $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi M, A, B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB hay M là giao điểm của đường thẳng AB với (P) .

Đường thẳng AB có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (10; 0; 2)$ và qua điểm $B(2; 1; 3)$ nên có phương trình

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } -4(2+5t) - 3 \cdot 1 + 3(3+t) - 66 = 0 \Leftrightarrow -17t = 68 \Leftrightarrow t = -4.$$

$$\text{Vậy } M(-18; 1; -1) \text{ hay } x_0 y_0 z_0 = 18.$$

Câu 166. Với mọi điểm I ta có

$$\begin{aligned} S &= 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 4NI^2 + 2\overrightarrow{NI}(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

$$\text{Chọn điểm } I \text{ sao cho } 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

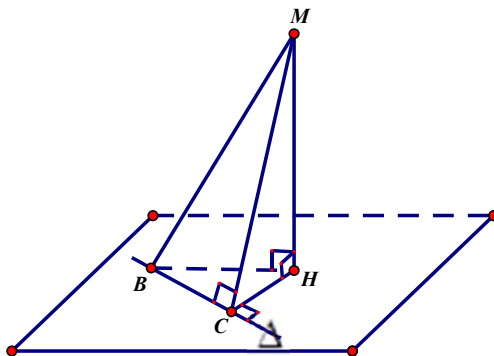
$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ Suy ra tọa độ điểm } I \text{ là } I(0; 1; 2).$$

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là
$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm $N(t; 1-t; 2+t) \in (P) \Rightarrow t-1+t+2+t+2=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow N(-1; 2; 1)$.

Câu 167. Chọn A



$d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$ có VTCP $\vec{u} = (1; -2; -1)$.

$(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (2; -1; -2)$.

Gọi α là góc tạo bởi d và (Q) , ta có $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Từ hình vẽ, ta có $(d, (P)) = \widehat{MBH}$ và $((P), (Q)) = \widehat{MCH}$.

Ta thấy $\sin \widehat{MCH} = \frac{MH}{MC} \geq \frac{MH}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy góc $((P), (Q)) = \widehat{MCH}$ nhỏ nhất khi $\sin \widehat{MCH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ hay $\cos \widehat{MCH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

*Viết phương trình mặt phẳng (P)

-CÁCH 1:

Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

Ta có
$$\begin{cases} \vec{n}_{(Q)} \cdot \vec{u} = 0 \\ \cos(\vec{n}, \vec{n}_{(Q)}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 2B - C = 0 \\ \frac{|2A - B - 2C|}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ |3B| = \sqrt{3(2B + C)^2 + B^2 + C^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ 6B^2 + 6C^2 + 12BC = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Nếu $B = 0$ suy ra $A = C = 0$ loại.

Nếu $B \neq 0$ từ (1) suy ra $\left(\frac{C}{B}\right)^2 + 2\frac{C}{B} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{C}{B} = -1 \Rightarrow C = -B$ suy ra $A = B$.

Mặt phẳng $(P): Bx + By - Bz + D = 0$ đi qua điểm $N(0; -1; 2) \in d$ suy ra $D = 3B$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$. Suy ra $d(A; (P)) = \sqrt{3}$.

-CÁCH 2

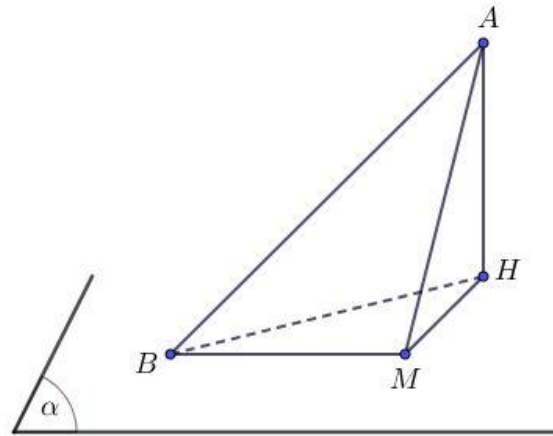
Gọi $\Delta = (P) \cap (Q)$ thì góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\Delta \perp d$. Do đó, mặt phẳng (P) thỏa đề bài là mặt phẳng chứa d và cắt (Q) theo giao tuyến Δ sao cho $\Delta \perp d$.

$$\begin{cases} \Delta \subset (Q) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \Delta \text{ nhận } \vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q] \text{ làm vec tơ chỉ phương.}$$

• (Q) chứa d và $\Delta \Rightarrow (P)$ qua $M(0; -1; 2) \in d$ và nhận $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (6; 6; -6)$ làm vector

pháp tuyến $\Rightarrow (P): x + y - z + 3 = 0$. Vậy $d(A; (P)) = \sqrt{3}$.

Câu 168. Chọn C



Ta có: $2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) - 1 + 9 = 0 \Rightarrow B \in (\alpha)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên (α) thì $AH \perp MB$, $AM \perp MB \Rightarrow MH \perp MB$

$\Rightarrow MB \leq BH$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv H$, lúc đó M là hình chiếu của A trên (α) .

Gọi $H(x; y; z)$, $\vec{AH} = (x-1; y-2; z+3)$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 9 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = -9 \\ x - y = -1 \\ x + 2z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(-3; -2; -1) \Rightarrow \vec{MB} = (1; 0; 2) \Rightarrow MB: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Câu 169. $\vec{AM} = (6; -7; 1)$, vector pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (3; -4; 1)$.

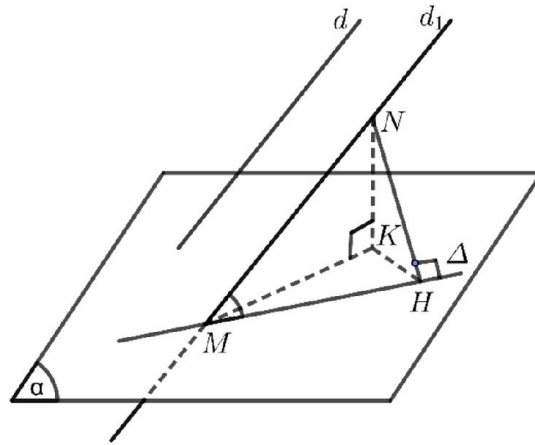
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên a .

$d(A; a) = AH \leq AM = \sqrt{86} \Rightarrow d(A; a)$ lớn nhất khi $H \equiv M$.

Khi đó a là đường thẳng đi qua M , song song với (α) và vuông góc với AM .

Gọi $\vec{u}$ là vector chỉ phương của $a \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ \vec{u} \perp \vec{AM} \end{cases}; [\vec{AM}, \vec{n}] = (-3; -3; -3) = -3(1; 1; 1)$.

Chọn $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Đáp án D thỏa mãn.



Câu 170.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; 3; -2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Vì $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 5 \neq 0$ nên d cắt (α) .

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua M và $d_1 \parallel d$, suy ra d_1 có phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Lấy $N(3; 4; -1) \in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ .

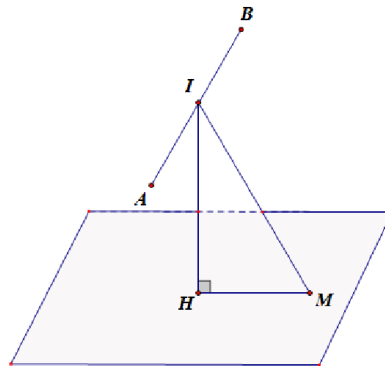
Ta có: $\widehat{(d, \Delta)} = \widehat{NMH}$ và $\sin \widehat{NMH} = \frac{NH}{MN} \geq \frac{NK}{MN}$.

Do vậy $\widehat{(d, \Delta)}$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK .

Đường thẳng NK có phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm K ứng với t là nghiệm của phương trình:

$$(3+t) + (4+t) - (-1-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{3}. \text{ Suy ra } K\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right).$$



Câu 171.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(3; 1; 4)$. Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α) .

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - IA^2 = MI^2 - IA^2$.

Do IA không đổi nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI = IH \Leftrightarrow M \equiv H$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) . Khi đó Δ nhận $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; 2; -3)$ làm

vector chỉ phương. Do đó Δ có phương trình
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

$$H \in \Delta \Leftrightarrow H(3+t; 1+2t; 4-3t).$$

$$H \in (\alpha) \Leftrightarrow (3+t) + 2(1+2t) - 3(4-3t) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow H(4; 3; 1).$$

Vậy $M(4; 3; 1)$.

Câu 172. Gọi (Q) chứa Δ và song song với (P) . Suy ra (Q) có phương trình:

$$x - 1 + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0.$$

Khi đó $d(B; \Delta)_{\min} = BH$ với H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (Q) .

Đường thẳng BH đi qua B , vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tọa độ giao điểm H của đường thẳng BH và mặt phẳng (Q) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}. \text{ Giải hệ trên ta được } H\left(-\frac{1}{5}; \frac{8}{5}; 2\right).$$

Do đó Δ là đường thẳng AH có $\vec{AH} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}; -1\right)$.

Suy ra $\vec{u} = (6; -3; -5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ .

Câu 173. Gọi $I(m; n; p)$ là điểm thỏa mãn: $3\vec{IA} - 2\vec{IB} = \vec{0}$.

Ta có $\vec{IA} = (1-m; -n; 2-p)$; $\vec{IB} = (3-m; 1-n; -1-p)$.

$$3\vec{IA} - 2\vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-m) - 2(3-m) = 0 \\ 3(-n) - 2(1-n) = 0 \\ 3(2-p) - 2(-1-p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -2 \\ p = 8 \end{cases} \Rightarrow I(-3; -2; 8).$$

$$\text{Ta có } |3\vec{MA} - 2\vec{MB}| = |3(\vec{MI} + \vec{IA}) - 2(\vec{MI} + \vec{IB})| = |\vec{MI}| = MI.$$

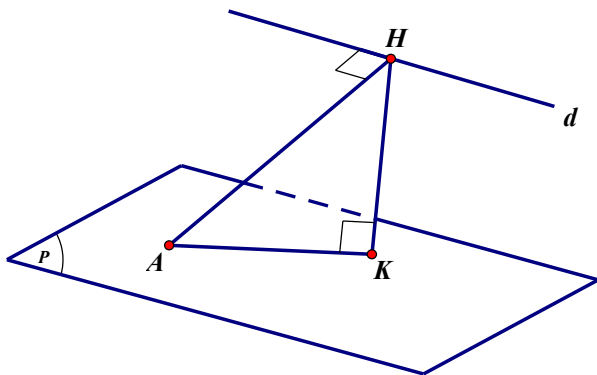
Khi đó, $|3\vec{MA} - 2\vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $M \in (P) \Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất, $M \in (P)$

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Khi đó Δ nhận vector pháp tuyến của (P) là

$$\vec{n} = (1; 1; 1) \text{ làm vectơ chỉ phương } \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$$

Tọa độ M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{11}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \\ z = \frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 9a + 3b + 6c = 3.$$



Câu 174.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d . Ta suy ra $H(1;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d . Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) . Do $d \parallel (P)$ nên ta có $d(d, (P)) = d(H, (P)) = HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \leq HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng HA . Và khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH} = (-1; 2; 3)$ làm vector pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2; -1; -2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

Do đó (P) vuông góc với mặt phẳng có phương trình: $3x + z + 2 = 0$.

Câu 175. Phương trình tham số của đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7 + 2t \\ z = -8 - t \end{cases}$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB .

Ta tìm được điểm $K(3; -3; -10)$. Ta luôn có bất đẳng thức $d(M, (P)) = MH \leq MK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$. Khi đó $\overrightarrow{MH} = (-4; -2; -8) = -2(2; 1; 4)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; 4)$. Vậy ta có $a + b = 3$.

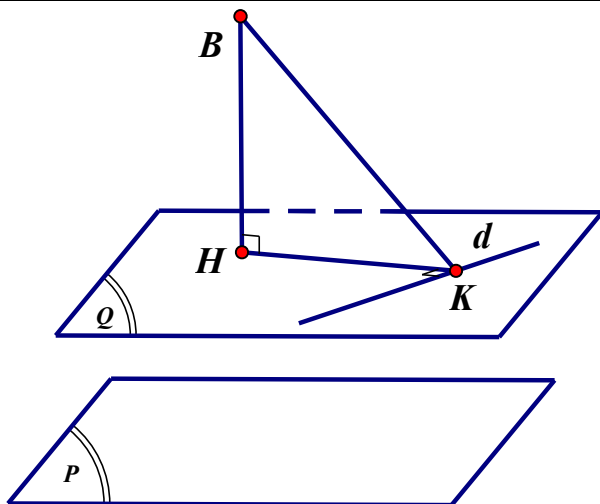
Câu 176. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và d . Khi đó ta có $AH \leq AK$.

Vì $H \in d$ nên $H(2-t; -1+2t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t; 2t; 1+t)$.

Do $AH \perp d$ nên ta có $-(-1-t) + 2.2t + 1+t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi và chỉ khi $AH = AK$. Do đó (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$. Vậy $(\alpha): 1(x-2) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

Vẫn là đánh giá bất đẳng thức $AH \leq AK$ nói trên, nhưng bài toán sau đây lại phát biểu hơi khác một chút.



Câu 177.

Ta thấy rằng d đi qua A và d song song với (P) nên d luôn nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và $(Q) \parallel (P)$. Như vậy bây giờ ta chuyển về xét trong mặt phẳng (Q) để thay thế cho (P) . Ta lập được phương trình mặt phẳng $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên (Q) và d . Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Ta luôn có được bất đẳng thức $d(B; d) = BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d bé nhất bằng BH .

Đường thẳng d bây giờ đi qua A, H nên có phương trình $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 178. Chọn A

Gọi điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Mà } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x; 4-y; 5-z) \\ \overrightarrow{IB} = (3-x; 4-y; -z) \\ \overrightarrow{IC} = (2-x; -1-y; -z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x; 4-y; 5-z) \\ \overrightarrow{IB} = (3-x; 4-y; -z) \\ 3\overrightarrow{IC} = (6-3x; -3-3y; -3z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = (10-5x; 5-5y; 5-5z)$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1; 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } MA^2 + MB^2 + 3MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 5MI^2 + 2MI \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC})}_{\vec{0}} + IA^2 + IB^2 + 3IC^2 \end{aligned}$$

Vì I, A, B, C cố định nên $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi

Do đó: $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Gọi $\{M\} = d \cap (\alpha)$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2} \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6=3y-3 \\ -2x+4=3z-3 \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right).$$

Vậy $a=\frac{7}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=0 \Rightarrow S=a+b+c=3$.

Câu 179. Chọn D

Ta có: $S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên AB .

Do AB không đổi nên S_{ABM} nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8; -4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow AB \parallel (P)$$

MH nhỏ nhất khi M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) ;

với (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với $mp(P)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8; -4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (3; 0; 3) \Rightarrow \text{phương trình mp } (Q) \text{ là } x+z-4=0.$$

M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) nên tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+z-4=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2-2t \\ z=4-t \end{cases} \Rightarrow M(t; 2-2t; 4-t) \text{ với } t > 2.$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t-3; -2-2t; 3-t); \overrightarrow{BM} = (t-7; 6-2t; 7-t)$.

Tam giác ABM vuông tại M nên

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t-7) + (-2-2t)(6-2t) + (3-t)(7-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t-7) + 2(t-3)(t+1) = 0 \Leftrightarrow (t-3)(3t-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \text{ (n)} \\ t=\frac{5}{3} \text{ (l)} \end{cases}$$

$$+ t=3 \Rightarrow M(3; -4; 1) \Rightarrow a+b+c=3-4+1=0.$$

Câu 180. Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là một vector pháp tuyến của (P) , với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Điểm $M(1; 0; 2) \in d \Rightarrow M \in (P)$.

Phương trình của (P) : $ax + by + cz - (a + 2c) = 0$.

Một vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; 1; 2) \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2a + b + 2c = 0$.

$$\Rightarrow b = -(2a + 2c) \Rightarrow d(A, (P)) = \frac{|a + 5b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{9|a + c|}{\sqrt{a^2 + c^2 + 4(a + c)^2}}.$$

$$\text{Ta có } (a + c)^2 \leq 2(a^2 + c^2) \Leftrightarrow \frac{(a + c)^2}{2} \leq a^2 + c^2 \text{ với } \forall a, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra: } a^2 + c^2 + 4(a+c)^2 \geq \frac{(a+c)^2}{2} + 4(a+c)^2 = \frac{9}{2}(a+c)^2.$$

$$\text{Do đó } d(A, (P)) = \frac{9|a+c|}{\sqrt{a^2 + c^2 + 4(a+c)^2}} \leq \frac{9|a+c|}{\sqrt{\frac{9}{2}(a+c)^2}} = \frac{9|a+c|\sqrt{2}}{3|a+c|} = 3\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \text{Max } d(A, (P)) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-4a \end{cases}. \text{ Chọn } a=c=1 \Rightarrow b=-4.$$

$$\text{Phương trình } (P): x-4y+z-3=0 \Rightarrow d(O, (P)) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 181. Do mặt phẳng (P) qua Ox nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $by + cz = 0$ ($b^2 + c^2 > 0$)

$$d_{(B, (P))} = 2d_{(A, (P))} \Leftrightarrow \frac{|-4b-c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 2 \cdot \frac{|2b+3c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b-c = 4b+6c \\ -4b-c = -4b-6c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b+7c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $8b+7c=0$ chọn $b=7; c=-8$ khi đó $(P): 7y-8z=0$

Xét $f(y, z) = 7y-8z$

Thay tọa độ A, B vào ta được $(7 \cdot 2 - 8 \cdot 3)(7 \cdot (-4) - 8 \cdot (-1)) > 0$ suy ra A, B nằm cùng phía so với (P) (loại)

Trường hợp 2: $c=0$ suy ra phương trình $(P): y=0$

Thay tọa độ A, B vào ta được $2 \cdot (-4) < 0$ suy ra A, B nằm khác phía so với (P) . Do đó đường thẳng AB cắt (P) tại I nằm giữa AB

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } AB: \begin{cases} x=1+4t \\ y=2-6t \\ z=3-4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Tọa độ điểm I là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=2-6t \\ z=3-4t \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ x=\frac{7}{3} \\ y=0 \\ z=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Vậy } a+b+c = \frac{7}{3} + 0 + \frac{5}{3} = 4$$

Câu 182. Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\vec{IA} + \vec{IC} - \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\vec{OA} - \vec{OI}) + (\vec{OC} - \vec{OI}) - (\vec{OB} - \vec{OI}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB}}{2} \Rightarrow I(1; 2; -2)$$

$$\text{Ta có } 2MA^2 = 2\vec{MA}^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 = 2\vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 + 4\vec{MI} \cdot \vec{IA}$$

$$MB^2 = \vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = \vec{MI}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB}$$

$$MC^2 = \overline{MC}^2 = (\overline{MI} + \overline{IC})^2 = \overline{MI}^2 + \overline{IC}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IC}$$

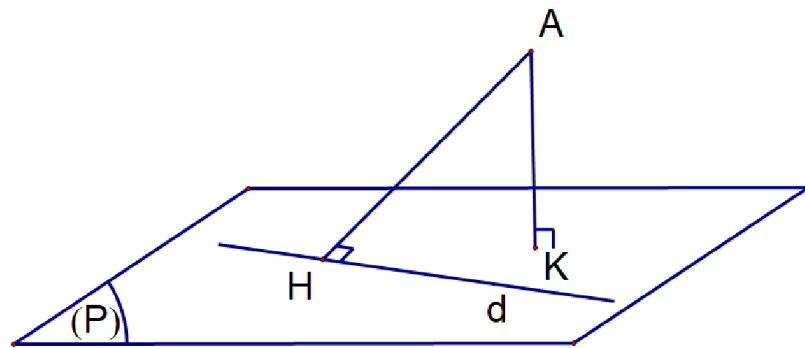
$$\text{Suy ra } 2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2 + 2\overline{MI}(\overline{2IA} + \overline{IC} - \overline{IB})$$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2$. Do I cố định nên $2IA^2 + IC^2 - IB^2$ không đổi. Vậy $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) .

• Đường thẳng Δ qua $I(1; 2; -2)$ và vuông góc với (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \\ 3x - 3y + 2z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(4; -1; 0)$$

Suy ra $a + b + c = 3$



Câu 183.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d , gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (P) . Do đó khoảng cách từ A đến (P) là: $d(A; (P)) = AK$.

Ta có $d: \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$. Vì $H \in d$ nên $H(-2t - 1; t; t + 1)$.

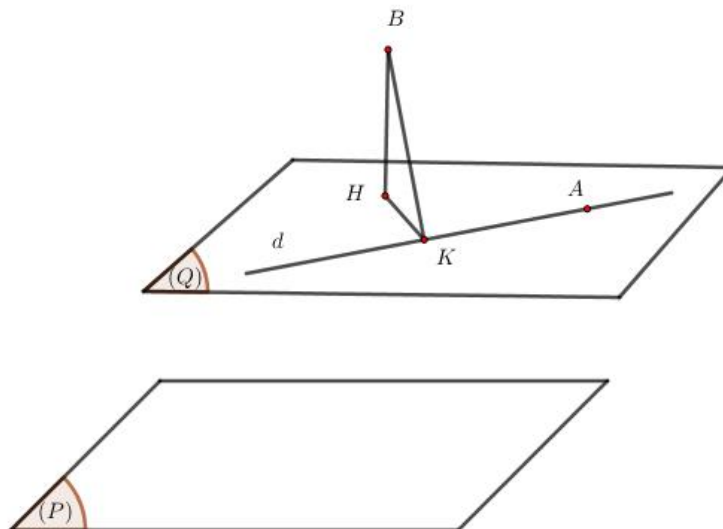
$\overline{AH}(-2t - 2; t - 2; t - 2)$, VTCP của đường thẳng d là $\overline{u_d}(-2; 1; 1)$.

$\overline{AH} \perp \overline{u_d} \Leftrightarrow \overline{AH} \cdot \overline{u_d} = 0 \Leftrightarrow -2(-2t - 2) + t - 2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Do đó $H(-1; 0; 1)$ và $\overline{AH}(-2; -2; -2) \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$ (không đổi).

Vì $AK \leq AH$ (đường vuông góc luôn ngắn hơn đường xiên) nên AK lớn nhất khi $AK = AH$ hay $K \equiv H$.

Ta có $\overline{AK} = \overline{AH} = (-2; -2; -2) = -2(1; 1; 1)$. Vậy, một vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.



Câu 184.

Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) . Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là $1(x+3) - 2(y-0) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q) , khi đó đường thẳng BH đi qua $B(1; -1; 3)$ và nhận

$$\vec{n}_{(Q)} = (1; -2; 2) \text{ làm vector chỉ phương có phương trình tham số là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

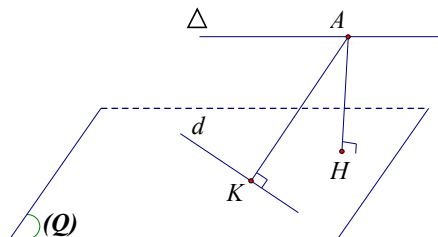
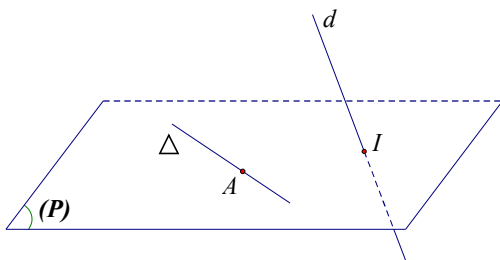
Vì $H = BH \cap (Q) \Rightarrow H \in BH \Rightarrow H(1+t; -1-2t; 3+2t)$ và $H \in (Q)$ nên ta có $(1+t) - 2(-1-2t) + 2(3+2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; \frac{-2}{9}\right) = \frac{1}{9}(26; 11; -2).$$

Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng d , khi đó

Ta có $d(B; d) = BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi $BK = BH$, do đó đường thẳng d

đi qua A và có vector chỉ phương $\vec{u} = (26; 11; -2)$ có phương trình chính tắc: $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.



Câu 185.

Đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$.

Nhận xét rằng, $A \notin d$ và $d \cap (P) = I(-7; 3; -1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Δ . Khi đó $d(\Delta, d) = d(\Delta, (Q)) = d(A, (Q))$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên (Q) và d . Ta có $AH \leq AK$.

Do đó, $d(\Delta, d)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(A, (Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow AH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv K$. Suy ra AH chính là đoạn vuông góc chung của d và Δ .

Mặt phẳng (R) chứa A và d có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(R)} = [\vec{AM}, \vec{u}_1] = (-2; 4; 8)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (R) nên có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(R)}, \vec{u}_1] = (12; 18; -6)$.

Đường thẳng Δ chứa trong mặt phẳng (P) và song song với mặt phẳng (Q) nên có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (66; -42; 6) = 6(11; -7; 1)$.

Suy ra, $a = 11; b = -7$. Vậy $a + 2b = -3$.

Câu 186. $x + my + (2m + 1)z - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m(y + 2z - 1) + x + z - 2 = 0 (*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm với $\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Suy ra (P) luôn đi qua đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$.

$K \in d \Rightarrow K(2 - t; 1 - 2t; t), \vec{AK}(-t; -2t; t - 3)$

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(-1; -2; 1)$

$\vec{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$

Ta có $AH \leq AK \Rightarrow AH_{\max} = AK \Leftrightarrow H \equiv K$.

Vậy $a + b = \frac{3}{2}$.

Câu 187. Vì $(1 + 2 \cdot 1 + 1 - 2)(-1 + 2 \cdot (-1) + 3 - 2) < 0$ nên A và B nằm về hai phía so với (P) . Do đó $MA + MB \geq AB$ nên $MA + MB$ nhỏ nhất bằng AB khi $M = AB \cap (P)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$, tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \\ x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \\ 1 - t + 2(1 - t) + 1 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ t = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } M(0; 0; 2).$$

Câu 188. Gọi E là điểm thỏa mãn $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = \vec{0} \Rightarrow E(3; 0; 1)$.

Ta có: $S = MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + 2\vec{MC}^2$
 $= (\vec{ME} + \vec{EA})^2 + (\vec{ME} + \vec{EB})^2 + 2(\vec{ME} + \vec{EC})^2 = 4ME^2 + EA^2 + EB^2 + 2EC^2$.

Vì $EA^2 + EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi ME nhỏ nhất.
 $\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của E lên (Q) .

Phương trình đường thẳng $ME: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ 3x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow M(0; -1; 2) \Rightarrow a = 0, b = -1, c = 2.$$

$$\Rightarrow a + b + 5c = 0 - 1 + 5 \cdot 2 = 9.$$

Câu 189. Với mọi điểm I ta có

$$\begin{aligned} S &= 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 4NI^2 + 2\overrightarrow{NI}(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ Suy ra tọa độ điểm } I \text{ là: } I(0; 1; 2).$$

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là:
$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm $N(t; 1-t; 2+t) \in (P) \Rightarrow t - 1 + t + 2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow N(-1; 2; 1)$.

Dạng 5. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng thẳng với đường thẳng

Câu 190. Chọn D

Ta thấy hai đường thẳng d và d' có cùng vectơ chỉ phương hay $d // d'$

Vậy đường thẳng cần tìm có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 1; -2)$ và đi qua trung điểm $I(3; -2; 2)$ của AB với $A(2; -3; 4) \in d$ và $B(4; -1; 0) \in d'$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

Câu 191. d_1 qua $M(0; 3; 2)$ có vtcp $\vec{u} = (1; 2; 1)$, d_2 qua $N(3; -1; 2)$ có vtcp $\vec{v} = (1; -2; 1)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (4; 0; -4), \overrightarrow{MN} = (3; -4; 0).$$

$$d(d_1, d_2) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{MN}|}{|[\vec{u}, \vec{v}]|} = \frac{12}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 192. Chọn C

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \vec{u}_1 = (2; 1; -2); d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{u}_2 = (-2; -1; 2)$$

$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 \Rightarrow d_1 // d_2 \vee d_1 \equiv d_2$$

Điểm $M(1; 0; -2) \in d_1$; $M \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$

Câu 193. Vì $\frac{2}{-1} \neq \frac{2}{-2}$ nên vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 2; 3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; -2; 1)$ của Δ_2 . Tức là Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2 .

Lấy $M(1; -1; 0) \in \Delta_1$, $N(3; 3; -2) \in \Delta_2$. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (2; 4; -2)$.

Khi đó: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. Suy ra $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2 .

Câu 194. Gọi $A(-1+2t; -2+t; 1+t)$ và $B(-2-4t'; 1+t'; -2-t')$ là hai điểm lần lượt thuộc Δ_1 và Δ_2 .

$$\overrightarrow{AB} = (-1-2t-4t'; 3-t+t'; -3-t-t'). \Delta_1 \text{ có VTCP } \vec{u} = (2; 1; 1); \Delta_2 \text{ có VTCP } \vec{u}' = (-4; 1; -1).$$

$$AB \text{ là đoạn vuông góc chung của } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1-2t-4t') + (3-t+t') + (-3-t-t') = 0 \\ -4(-1-2t-4t') + (3-t+t') - (-3-t-t') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t-8t' = 2 \\ 8t+18t' = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Suy ra $A(1; -1; 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ là: } \begin{cases} x = 1+t_1 \\ y = -1+t_1 \\ z = 2-3t_1 \end{cases}$$

Chỉ có điểm $Q(3; 1; -4)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình.

Câu 195. d_1 đi qua điểm $M(1; 0; 0)$, có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; 3)$.

d_2 đi qua điểm $N(1; 2; m)$, có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; 1; 0)$.

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-3; 3; 1); \overrightarrow{MN} = (0; 2; m).$$

d_1 và d_2 chéo nhau khi và chỉ khi $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -6$.

$$\text{Mặt khác } d(d_1, d_2) = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN}|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \frac{|m+6|}{\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -11 \end{cases}$$

Khi đó tổng các phần tử của m là -12 .

Câu 196. Phương trình tham số của đường thẳng d_1 là:
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 3+t \end{cases}$$

Phương trình tham số đường thẳng d_2 qua điểm A và có vector chỉ phương $\vec{v} = (a; 1; 2)$ là:

$$d_2 : \begin{cases} x = 1+at' \\ y = 0+t' \\ z = -1+2t' \end{cases}$$

d_1 nhận $\vec{u} = (1; -2; 1)$ làm vector chỉ phương và d_2 nhận $\vec{v} = (a; 1; 2)$ làm vector chỉ phương

$$\text{Đường thẳng } d_1 \text{ cắt đường thẳng } d_2 \text{ khi và chỉ khi hệ phương trình } \begin{cases} 1+t = 1+at' \\ 2-2t = 0+t' \\ 3+t = -1+2t' \end{cases} \text{ có đúng một nghiệm.}$$

Ta có:

$$\begin{cases} 1+t = 1+at' \\ 2-2t = 0+t' \\ 3+t = -1+2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-at' = 0 \\ -2t-t' = -2 \\ t-2t' = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 2 \\ 0-a \cdot 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 2 \\ a = 0 \end{cases}$$

Vậy $a = 0$.

Câu 197. Chọn A

$$H \in \Delta_1 \Leftrightarrow H(3+2t; t; 1+t).$$

$$K \in \Delta_2 \Leftrightarrow K(1+m; 2+2m; m).$$

Ta có $\overrightarrow{HK} = (m - 2t - 2; 2m - t + 2; m - t - 1)$.

Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (1; 1; -2)$.

$\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{HK} = 0 \Leftrightarrow m - t + 2 = 0 \Leftrightarrow m = t - 2 \Rightarrow \overrightarrow{HK} = (-t - 4; t - 2; -3)$.

Ta có $HK^2 = (-t - 4)^2 + (t - 2)^2 + (-3)^2 = 2(t + 1)^2 + 27 \geq 27, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \min HK = \sqrt{27}$, đạt được khi $t = -1$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HK} = (-3; -3; -3)$, suy ra $\overrightarrow{u}(1; 1; 1) \Rightarrow h = k = 1 \Rightarrow h - k = 0$.

Câu 198. d đi qua $A(2; 1; 4)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-1; 2; -2)$.

d' đi qua $B(4; -1; 0)$ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1; -2; 2)$.

Ta có $\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2}$ và $\frac{2-4}{1} \neq \frac{1+1}{-2} \neq \frac{4}{2}$ nên $d \nparallel d'$.

Đường thẳng Δ thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó khi và chỉ khi

$\begin{cases} \Delta \parallel d \parallel d' \\ d(\Delta, d) = d(\Delta, d') \end{cases}$ hay Δ qua trung điểm $I(3; 0; 2)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (1; -2; 2)$.

Khi đó phương trình của Δ : $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

Câu 199. Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1 = (3; -1; -1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1; -2; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2 = (0; 0; 1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (1; -2; 1)$.

Do $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}$ và $M_1 \notin d_1$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; 1; 2)$, $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}] = (-5; -5; -5) = -5(1; 1; 1)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2 khi đó (α) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (α) là $x + y + z - 1 = 0$.

Gọi $A = d_3 \cap (\alpha)$ thì $A(1; -1; 1)$. Gọi $B = d_4 \cap (\alpha)$ thì $B(-1; 2; 0)$.

Do $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; -1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_1} = (1; -2; 1)$ nên đường thẳng AB cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Câu 200. Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1 = (1; 0; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (2; 1; 3)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2 = (1; 2; m)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (1; 1; 0)$.

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2} = (0; 2; m)$; $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-3; 3; 1)$. Do đó $[u_1, u_2] \overrightarrow{M_1M_2} = m + 6$.

Điều kiện cần và đủ để d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{5}{\sqrt{19}}$ là

$$\frac{|m+6|}{\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow |m+6| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 = 5 \\ m+6 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -11 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-1; -11\}$. Do đó tổng các phần tử của S là $-1 + (-11) = -12$.

Dạng 6. Một số bài toán liên quan giữa đường thẳng với mặt cầu

Câu 201. Gọi $A; B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường.

Gọi M là trung điểm AB . Để có mặt cầu tâm M bán kính $R = \frac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A; B$ lần lượt là:

$$A(2t_1 - 1; t_1 - 1; 2t_1 - 1) \text{ và } B(2t_2 + 1; 2t_2 + 1; t_2 + 1) \Rightarrow \overline{AB}(2t_2 - 2t_1 + 2; 2t_2 - t_1 + 2; t_2 - 2t_1 + 2).$$

Có $\vec{u}_1(2; 1; 2)$ và $\vec{u}_2(2; 2; 1)$ lần lượt là 2 vector chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 nên $\begin{cases} \overline{AB} \perp \vec{u}_1 \\ \overline{AB} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t_2 - 2t_1 + 2).2 + (2t_2 - t_1 + 2).1 + (t_2 - 2t_1 + 2).2 = 0 \\ (2t_2 - 2t_1 + 2).2 + (2t_2 - t_1 + 2).2 + (t_2 - 2t_1 + 2).1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t_2 - 9t_1 + 10 = 0 \\ 9t_2 - 8t_1 + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{10}{17} \\ t_2 = \frac{-10}{17} \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{17}; \frac{-7}{17}; \frac{3}{17}); B(\frac{-3}{17}; \frac{-3}{17}; \frac{7}{17}) \quad \overline{AB}(\frac{-6}{17}; \frac{4}{17}; \frac{4}{17}).$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 4^2}}{17} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu cần tính là } S = 4\pi.R^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{17}^2} = \frac{4\pi}{17} (\text{đvdt}).$$

Câu 202. Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; 0)$.

Đường thẳng d_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 1; 0)$.

Để phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 khi và chỉ khi:

Tâm mặt cầu (S) nằm trên đoạn thẳng vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 , đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung.

Gọi điểm $M(2t; t; 4)$ thuộc d_1 ; gọi điểm $N(3 - t'; t'; 0)$ thuộc d_2 với MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 .

$$\text{Ta có } \overline{MN} = (3 - t' - 2t; t' - t; -4).$$

$$MN \text{ là đoạn thẳng vuông góc chung} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overline{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.(3 - t' - 2t) + t' - t = 0 \\ (-1).(3 - t' - 2t) + t' - t = 0 \end{cases}$$

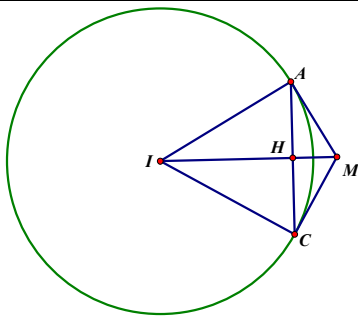
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' + 5t = 6 \\ 2t' + t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 1; 4) \\ N(2; 1; 0) \end{cases}$$

Gọi điểm I là tâm mặt cầu (S) , do đó điểm I là trung điểm MN .

$$\Rightarrow I(2; 1; 2) \Rightarrow R = IM = IN = 2.$$

$$\text{Suy ra mặt cầu } (S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

Câu 203. Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 13} = 3\sqrt{3}$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S) .

Đặt $MA = MB = MC = x$ khi đó $AB = x$; $BC = x\sqrt{2}$; $CA = x\sqrt{3}$ do đó tam giác ABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

Vì $\widehat{AMC} = 120^\circ$ nên tam giác AIC đều do đó $x\sqrt{3} = R \Leftrightarrow x = 3$ suy ra $IM = 2AM = 2x = 6$.

Lại có $M \in d$ nên $M(-1+t; -2+t; 1+t), (t > 1)$ mà $IM = 6$ nên $(t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Mà $a > 0$ nên $t = \frac{4}{3}$ suy ra $H\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ nên $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$.

Dạng 7. Một số bài toán liên quan giữa điểm – mặt – đường – cầu
Dạng 7.1 Bài toán tìm điểm

Câu 204. Chọn D

Tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm H là giao điểm của d và (P) , ta có:

$$2(1+2t) - 2(2-2t) - (3-t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $H(3; 0; 2)$.

Câu 205. $\vec{n_P} = (1; -2; 2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng $OH \Rightarrow OH : \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 2t \end{cases}$

$$\Rightarrow H(t; -2t; 2t)$$

$$H \in (P) \Rightarrow t - 2 \cdot (-2t) + 2 \cdot 2t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 2; -2) \Rightarrow a + b + c = -1$$

Câu 206. Chọn A

Khoảng cách từ điểm I đến mp(P) là: $d(I; (P)) = \frac{|5 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 6$.

AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B , do đó ta có:

$$IA = \sqrt{IB^2 + AB^2} = \sqrt{R^2 + AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4^2} = 6 = d(I; (P)) \Rightarrow A \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } (P)$$

Đường thẳng IA đi qua $I(5; -3; 5)$ có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -2; 2)$ có phương trình
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

Có $A = IA \cap (P) \Rightarrow 5 + t - 2(-3 - 2t) + 2(5 + 2t) - 3 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow A(3; 1; 1) \Rightarrow OA = \sqrt{11}$.

Câu 207. Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính R . Gọi $M(1 + t_0; 1 + 2t_0; 2 - 3t_0) \in d$.

Giả sử $T(x; y; z) \in (S)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến MT với mặt cầu (S) . Khi đó

$$OT^2 + MT^2 = OM^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + [x - (1 + t_0)]^2 + [y - (1 + 2t_0)]^2 + [z - (2 - 3t_0)]^2 = (1 + t_0)^2 + (1 + 2t_0)^2 + (2 - 3t_0)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + t_0)x + (1 + 2t_0)y + (2 - 3t_0)z - 9 = 0.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $(1 + t_0)x + (1 + 2t_0)y + (2 - 3t_0)z - 9 = 0$

Do $D(1; 1; 2) \in (ABC)$ nên $1 + t_0 + 1 + 2t_0 + 2(2 - 3t_0) - 9 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1 \Rightarrow M(0; -1; 5)$.

$$\text{Vậy } T = 0^2 + (-1)^2 + 5^2 = 26.$$

Câu 208. Gọi (P) mặt phẳng trung trực của AB , khi đó phương trình của (P) là: $x + z - 1 = 0$.

Ta có $\vec{n_p} = (1; 0; 1), \vec{n_\alpha} = (2; -1; 2)$ nên $[\vec{n_p}, \vec{n_\alpha}] = (1; 0; -1)$.

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (α) . Chọn $\vec{u_d} = (1; 0; -1)$

$$\text{và điểm } M(1; 10; 0) \in d \text{ nên phương trình tham số của } d \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 10 \\ z = -t \end{cases}$$

Do tam giác ABC đều nên $CA = CB$ hay C thuộc mặt phẳng trung trực của AB mà $C \in (\alpha)$ nên $C \in (P) \cap (\alpha) = d$ suy ra tọa độ C có dạng $C(1 + t; 10; -t)$.

Do $\triangle ABC$ đều nên $AC = AB$, thay tọa độ các điểm ta có:

$$\sqrt{(1 + t - 0)^2 + (10 - 0)^2 + (-t - 3)^2} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 3)^2} \Leftrightarrow t^2 + 4t + 51 = 0(*)$$

Do phương trình $(*)$ vô nghiệm nên không tồn tại điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 209. Mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R_1 = 3$.

$$M \in d \Leftrightarrow M(1 + a; 1 + 2a; 2 - 3a).$$

Do MA, MB, MC là những tiếp tuyến tại A, B, C với mặt cầu (S_1) .

$$\text{Suy ra } MA^2 = MB^2 = MC^2 = OM^2 - 9.$$

Khi đó $A, B, C \in (S_2)$ có tâm là M , bán kính $R_2 = \sqrt{OM^2 - 9}$.

$$\text{Ta có phương trình } (S_2): (x - (a + 1))^2 + (y - (2a + 1))^2 + (z - (2 - 3a))^2 = OM^2 - 9.$$

$$\Leftrightarrow (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2(a + 1)x - 2(2a + 1)y - 2(2 - 3a)z + 9 = 0.$$

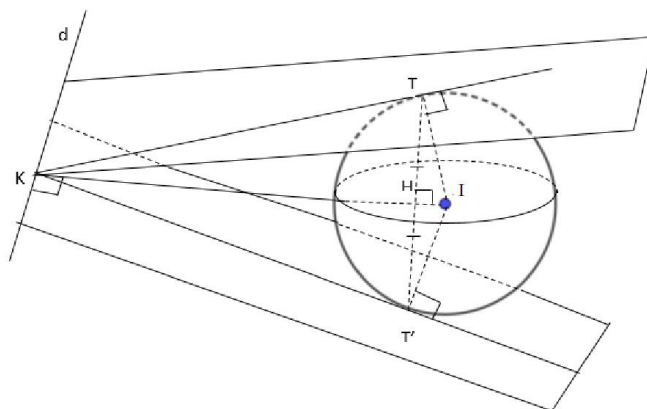
Mặt khác theo giả thiết A, B, C cùng thuộc mặt cầu (S_1) .

$$\text{Suy ra tọa độ } A, B, C \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2(a + 1)x - 2(2a + 1)y - 2(2 - 3a)z + 9 = 0 \end{cases}$$

Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $2(a + 1)x + 2(2a + 1)y + 2(2 - 3a)z - 18 = 0$.

$$D \in (ABC) \Leftrightarrow 2(a + 1) + 2(2a + 1) + 4(2 - 3a) - 18 = 0 \Leftrightarrow a = -1.$$

Với $a = -1$, ta có $M(0; -1; 5)$. Khi đó $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 26$.



Câu 210.

Mặt cầu (S) tâm $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d .

$K \in d$ nên ta có thể giả sử $K(t; 2+t; -t)$

$\overrightarrow{IK} = (t-1; 2+t; -t+1)$, $\overrightarrow{u_d} = (1; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

$IK \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow K(0; 2; 0)$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2 = IH \cdot IK$.

$\Leftrightarrow IH = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(IK = \sqrt{6} \right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x; y; z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{6} \cdot (-1) \\ y-0 = \frac{1}{6} \cdot 2 \\ z+1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{-5}{6} \end{cases} \text{ Vậy } H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{-5}{6}\right)$$

Câu 211. Do d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) khi đó d' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P) .

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}] = (-3; 2; -1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(-2; 0; 2)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (-3; 2; -1)$ là $3x - 2y + z + 4 = 0$.

Do Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (P) khi đó Δ' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (β) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) .

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\overrightarrow{n_{(\beta)}} = [\overrightarrow{u_{\Delta}}, \overrightarrow{n_P}] = (0; -2; -2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua $B(3; 1; 4)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\beta)}} = (0; -2; -2)$ là $y + z - 5 = 0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 3x - 2y + z + 4 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

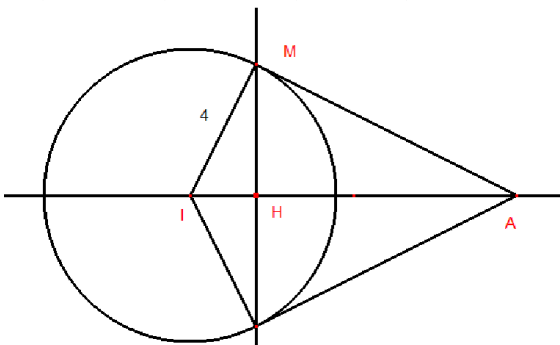
Vậy $M(-1; 2; 3) \Rightarrow a + b.c = -1 + 2.3 = 5$.

Dạng 7.2 Bài toán tìm mặt phẳng

Câu 212. Chọn C

(S) có tâm $I(2; 3; -1)$; bán kính $R = 4$

$A(-1; -1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-3; -4; 0)$, tính được $IA = 5$.



Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA} = (-3; -4; 0)$ làm vector pháp tuyến.

Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IM^2}{IA} = \frac{16}{5}$, từ đó tính được

$$\overrightarrow{IH} = \frac{16}{25} \overrightarrow{IA} \text{ tìm được } H\left(\frac{2}{25}; \frac{11}{25}; -1\right)$$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $-3\left(x - \frac{2}{25}\right) - 4\left(y - \frac{11}{25}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0$.

Câu 213. Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$; $R = \sqrt{2}$.

Véc tơ chỉ phương của $d: \vec{u}_d = (1; 2; -1)$. Véc tơ chỉ phương của $\Delta: \vec{u}_\Delta = (1; 1; -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (-1; 0; -1)$ nên chọn một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng: $x + z + D = 0$.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|-1 - 2 + D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |D - 3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 5 \\ D = 1 \end{cases}$$

Chọn (P): $x + z + 1 = 0$.

Câu 214. Cách 1:

Gọi $\vec{n} = (2a; b; c)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần lập, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (-3; 2; 2)$.

Mặt phẳng (P) song song với Δ nên ta có $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -6a + 2b + 2c = 0 \Leftrightarrow c = 3a - b$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và có vector pháp tuyến $\vec{n}$ nên phương trình có dạng:

$$2a(x - 4) + b(y - 3) + (3a - b)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2ax + by + (3a - b)z - 11a - 2b = 0 (*)$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 1$.

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{3|b|}{\sqrt{4a^2 + b^2 + (3a - b)^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3|b|}{\sqrt{13a^2 + 2b^2 - 6ab}} = 1 \Leftrightarrow 3|b| = \sqrt{13a^2 + 2b^2 - 6ab}.$$

$$\Leftrightarrow 9b^2 = 13a^2 + 2b^2 - 6ab \Leftrightarrow 13a^2 - 6ab - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(13a + 7b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 13a = -7b \end{cases}$$

Với $a = b$, chọn $a = 1, b = 1$, thay vào $(*)$ ta được pt $(P_1): 2x + y + 2z - 13 = 0$.

Ta có $N(6; 2; 2) \in \Delta$. Dễ thấy $N \notin (P_1)$, suy ra $(P_1): 2x + y + 2z - 13 = 0$ song song với Δ .

Với $13a = -7b$, chọn $a = 7, b = -13$, thay vào $(*)$ ta được pt $(P_2): 14x - 13y + 34z - 51 = 0$.

Ta có $N(6; 2; 2) \in \Delta$, dễ thấy $N \notin (P_2)$, suy ra $(P_2): 14x - 13y + 34z - 51 = 0$ song song với Δ .

Vậy chọn **B**.

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán và có vector pháp tuyến là $\vec{n}$.

Vì (P) đi qua $M(4; 3; 1)$ nên phương án A, C bị loại.

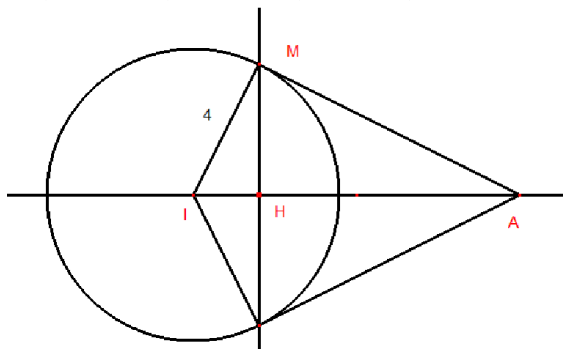
Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (-3; 2; 2)$. (P) song song với đường thẳng Δ nên $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Do đó phương án D bị loại.

Vậy phương án B là phương án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 215. Chọn C

(S) có tâm $I(2; 3; -1)$; bán kính $R = 4$

$A(-1; -1; -1) \Rightarrow \vec{IA} = (-3; -4; 0)$, tính được $IA = 5$.



Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\vec{IA} = (-3; -4; 0)$ làm vector pháp tuyến.

Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IM^2}{IA} = \frac{16}{5}$, từ đó tính được

$$\vec{IH} = \frac{16}{25} \vec{IA} \text{ tìm được } H\left(\frac{2}{25}; \frac{11}{25}; -1\right)$$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $-3\left(x - \frac{2}{25}\right) - 4\left(y - \frac{11}{25}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0$.

Câu 216. Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$; $R = \sqrt{2}$.

Véc tơ chỉ phương của $d: \vec{u}_d = (1; 2; -1)$. Véc tơ chỉ phương của $\Delta: \vec{u}_\Delta = (1; 1; -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (-1; 0; -1)$ nên chọn một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng: $x + z + D = 0$.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|-1 - 2 + D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |D - 3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 5 \\ D = 1 \end{cases}.$$

Chọn (P) : $x + z + 1 = 0$.

Câu 217. Chọn D

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (3; 1; -4)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -3; 1)$ và bán kính $R = 3$.

Vì (P) chứa d nên $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ và (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I; (P)) = 3$.

Ta chỉ xét phương trình $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Lấy hai điểm nằm trên đường thẳng d là $M(4; 0; -4)$ và $N(1; -1; 0)$.

Ta nhận thấy: $M(4; 0; -4)$ và $N(1; -1; 0)$ không thỏa mãn đáp án $A; B; C$.

Vậy, đáp án là D .

Câu 218. Chọn B

Đường thẳng d_1 có vtcp $\vec{u}_1(3; -1; -1)$, đường thẳng d_2 có vtcp $\vec{u}_2(1; 1; -1)$. Gọi $\vec{n}$ là vtcp của mặt phẳng (α) cần tìm. Do (α) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên $\vec{n} \perp \vec{u}_1$ và $\vec{n} \perp \vec{u}_2$, từ đó ta chọn $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 2; 4)$. Suy ra $(\alpha): x + y + 2z + c = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

$$(\alpha) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I; (\alpha)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|c - 3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} c - 3 = 6 \\ c - 3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Dạng 7.3 Bài toán tìm đường thẳng

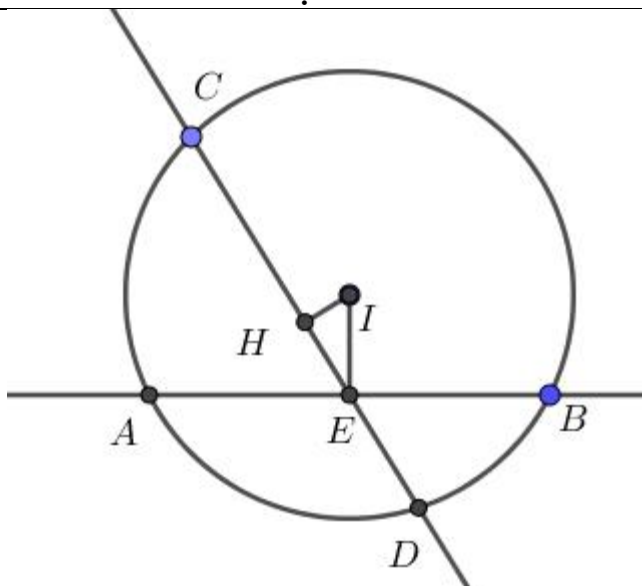
Câu 219. Chọn C

Ta có tâm và bán kính mặt cầu (S) là $I(3; 2; 5); R = 6$

$$IE = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} < R$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua E

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ



Dây cung càng nhỏ khi khoảng cách từ tâm tới đường thẳng Δ càng lớn

Ta có $d(I, \Delta) = IH \leq IE$

Vậy dây cung nhỏ nhất khi đường thẳng Δ vuông góc với $\overrightarrow{IE} = (-1; -1; -2)$

Dựa vào các đáp án ta thấy trong các vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (9; 9; 8)$ $\overrightarrow{u_3} = (-5; 3; 0)$ $\overrightarrow{u_3} = (1; -1; 0)$

$\overrightarrow{u_4} = (4; 3; -3)$

Thì chỉ có $\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{IE} = 0$

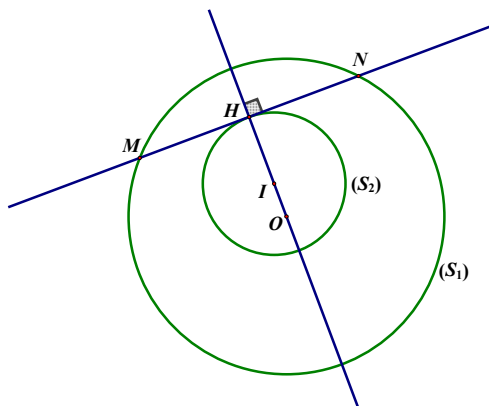
Nhận xét: ta hoàn toàn có thể viết được pt đường thẳng Δ bằng cách viết pt mặt phẳng (Q) đi qua E

nhận $\overrightarrow{IE} = (-1; -1; -2)$ làm một vectơ pháp tuyến, khi đó $\Delta = (P) \cap (Q)$

Câu 220. Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R_1 = 5$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R_2 = 2$.

Có $OI = 1 < R_1 - R_2$ nên (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1) .



Giả sử d tiếp xúc với (S_2) tại H và cắt mặt cầu (S_1) tại M, N . Gọi K là trung điểm MN .

Khi đó $IH = R_2 = 2$ và $OH \geq OK$.

Theo giả thiết $MN = 8 \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow OK = \sqrt{R_1^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Có $OI = 1, IH = 2 \Rightarrow OK = OI + IH \geq OH \geq OK$. Do đó $OH = OK$, suy ra $H \equiv K$, tức d vuông góc với đường thẳng OI .

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1; -1; 0)$ và vuông góc với $\vec{OI} = (0; 0; 1)$ nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = [\vec{OI}, \vec{u}] = (1; 1; 0)$.

Câu 221. Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; 5)$, bán kính $R = 10$.

$$d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 5 + 15|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 6 < R \Rightarrow (\alpha) \cap (S) = C(H; r), H \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } (\alpha).$$

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\vec{u}_{\Delta_1} = (2; -2; 1)$.

$$\Rightarrow \text{PTTS } \Delta_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases} \text{ . Tọa độ } H \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \\ 2x - 2y + z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(-2; 7; 3).$$

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3; 3; -3)$ và có VTCP $\vec{MH} = (1; 4; 6)$.

$$\text{Suy ra phương trình } \Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

Dạng 7.4 Bài toán tìm mặt cầu

Câu 222. Chọn D

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; 2; 1)$

$$d(I; (P)) = \frac{|3 + 2 + 1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(3; 2; 1)$ và bán kính $R' = \frac{AB}{2} = 3\sqrt{2}$

Ta có $H \in (S)$. Mặt khác $H \in (P)$ nên $H \in (C) = (S) \cap (P)$

$$\text{Bán kính của đường tròn } (C) \text{ là } R = \sqrt{(R')^2 - d^2(I; (P))} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 223. Chọn B

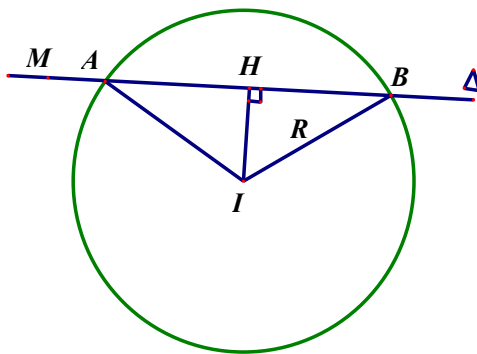
$$(P) \cap Oz = A(0; 0; 3)$$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 6y + z - 3 = 0 \\ \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y + z - 3 = 0 \\ 2x - y - 10 = 0 \\ y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow B(4; -2; 7). \text{ Gọi } I \text{ là trung điểm của}$$

$$AB \Rightarrow I(2; -1; 5) \Rightarrow IA = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

$$\text{Phương trình mặt cầu đường kính } AB \text{ là: } (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9.$$



Câu 224.

Gọi H là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow IH \perp AB$, $HA = 4$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$, bán kính $R = \sqrt{13 - m}$, $(m < 13)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(4; 3; 3)$ và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IM} = (6; 0; 3) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] = (-3; -6; 6) \Rightarrow IH = d(I, \Delta) = \frac{[\overrightarrow{IM}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 3.$$

$$\text{Ta có: } R^2 = IH^2 + HA^2 \Leftrightarrow 13 - m = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow m = -12.$$

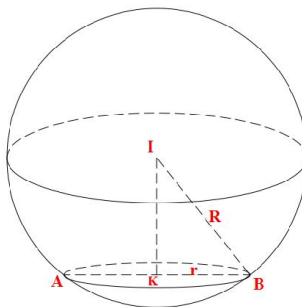
Câu 225. Chọn C

$$\text{Ta có: } I \in (d) \Rightarrow I(2t; 3+t; 2+t).$$

$$I \in (P) \Rightarrow (P): 2t - 2(3+t) + 2(2+t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2; 4; 3)$$

$$(Q) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên } R = d(I, (Q)) = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

$$\text{Vậy } (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}.$$



Câu 226.

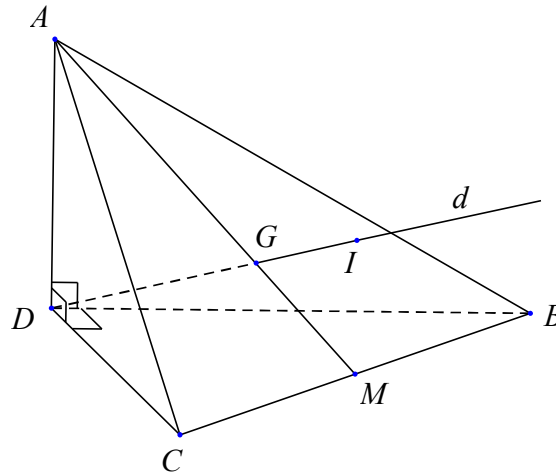
- Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$; $R = 10$.

$$\text{Khoảng cách từ } I \text{ đến } (P) \text{ là } IK = d(I, (P)) = \frac{|6 + 4 - 1 + 9|}{3} = 6.$$

- Đường thẳng qua $I(3; -2; 1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ khi đó Tọa độ}$$

$$\text{tâm } K \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-1; 2; 3).$$

- Câu 227. Chọn B



Do ΔABC đều nên d đi qua trọng tâm $G\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 1; 1)$, suy ra $d : \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{2}{3} + t \\ z = -\frac{2}{3} + t \end{cases}$

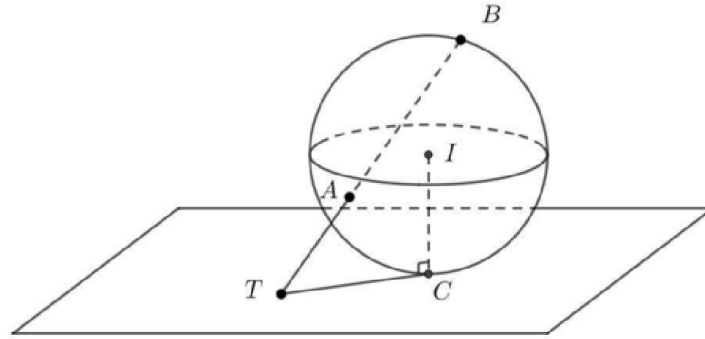
$$IA = ID \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow S = -1.$$

Câu 228. Chọn D

Ta có $H \in (S)$. Mặt khác $H \in (P)$ nên $H \in (C) = (S) \cap (P)$

$$\text{Bán kính của đường tròn } (C) \text{ là } R = \sqrt{(R')^2 - d^2(I; (P))} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 229. Cách 1:



Ta có $\overrightarrow{AB}(3;1;-2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } AB \text{ là } \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 4 - 2t \end{cases}.$$

Giả sử AB cắt (P) tại $T(3t; t; 4 - 2t)$. Do $T \in (P): 2x + y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-7}{3}$.

Khi đó

$$T\left(-7; \frac{-7}{3}; \frac{26}{3}\right); \overrightarrow{TA}\left(7; \frac{7}{3}; \frac{-14}{3}\right) \Rightarrow TA = \frac{7\sqrt{14}}{3}; \overrightarrow{TB}\left(10; \frac{10}{3}; \frac{-20}{3}\right) \Rightarrow TB = \frac{10\sqrt{14}}{3}.$$

$$\text{Ta có } TC^2 = TA \cdot TB = \frac{980}{9} \Rightarrow TC = \frac{14\sqrt{5}}{3}.$$

Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và cách điểm T cố định một khoảng $\frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Cách 2:

$$\text{Ta có } \frac{TA}{TB} = \frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{7}{10}; AB = \sqrt{14}.$$

Giả sử AB cắt (P) tại T . Suy ra A nằm giữa B và T (vì A, B cùng phía so với (P)).

Khi đó ta có

$$\begin{cases} TB - TA = \sqrt{14} \\ TA = \frac{7}{10}TB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TA = \frac{7\sqrt{14}}{3} \\ TB = \frac{10\sqrt{14}}{3} \end{cases} \Rightarrow TC^2 = TA \cdot TB = \frac{980}{9} \Rightarrow TC = \frac{14\sqrt{5}}{3}$$

Câu 230. Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -1; -1)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 1; 1)$ và $\overrightarrow{DC} = (2; -1; -1)$.

Ta thấy: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Gọi M là trung điểm của AC . Ta có: $M\left(\frac{5}{2}; 2; 3\right)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (0; -3; 3)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\vec{u} = (0; -1; 1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{SA} = (0; 3; -3)$. Ta thấy $\overrightarrow{SA}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên suy ra $SA \perp (ABCD)$.

Gọi N là trung điểm của SA , ta có: $N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Do $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nên $\begin{cases} I \in d \\ NI \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I\left(\frac{5}{2}; 2-t; 3+t\right) \\ \overrightarrow{NI} \perp \vec{u} \end{cases}$.

Mà: $\overrightarrow{NI} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} - t; -\frac{3}{2} + t\right)$. Suy ra: $\overrightarrow{NI} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t - \frac{3}{2} + t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Ta có: $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AD}] = (6; -3; -3)$.

Một vectơ pháp tuyến của (SAD) là: $\vec{n} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AD}] = (2; -1; -1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (SAD) là:

$$2(x-1) - (y-2) - (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z + 3 = 0.$$

$$\text{Vậy } d(I, (SAD)) = \frac{\left|2 \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 3\right|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 231. Có $A(1; 1; 1), B(2; 2; 1) \Rightarrow$ Phương trình AB :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Gọi K là giao điểm của AB và $(P) \Rightarrow K(-1; -1; 1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H .

$\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow KH^2 = \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$ không đổi

$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

Câu 232. Chọn C

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $R = d(I, (\alpha)) = d(I, (\beta))$.

$$\text{Mà } d(I, (\beta)) = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{1-m} + c - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(1-m)^2} + 1}}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(1-m)^2} + 1} &= \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{1-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-m} + 1} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{m(1-m)}\right]^2 - 2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-m} + 1} = \frac{1}{m(1-m)} - 1 \quad (\text{do } m \in (0;1)) \end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left| \frac{a(1-m) + bm + cm(1-m) - m(1-m)}{m(1-m)} \right|}{\frac{1}{m(1-m)} - 1} \\ &\Leftrightarrow R = \frac{|a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2|}{m^2 - m + 1} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R - Rm + Rm^2 = a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2 \\ -R + Rm - Rm^2 = a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2(R + c - 1) + m(a - b - c - R + 1) + R - a = 0(1) \\ m^2(R + c - 1) + m(b + c - a - R - 1) + R + a = 0(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét (1) do mặt cầu tiếp xúc với tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ với mọi $m \in (0;1)$ nên pt (1) nghiệm đúng với mọi $m \in (0;1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R + c - 1 = 0 \\ a - b - c - R + 1 = 0 \\ R - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = R \\ b = R \\ c = 1 - R \end{cases} \Rightarrow I(R; R; 1 - R).$$

$$\text{Mà } R = d(I, (\alpha)) \Leftrightarrow R = \frac{|2R - R + 2(1 - R) + 10|}{3} \Leftrightarrow 3R = |12 - R| \Leftrightarrow \begin{cases} R = 3 \\ R = -6(l) \end{cases}$$

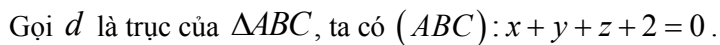
Xét (2) tương tự ta được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R + c - 1 = 0 \\ b + c - a - R - 1 = 0 \\ R + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -R \\ b = -R \\ c = R + 1 \end{cases} \Rightarrow I(-R; -R; R + 1)$$

$$\text{Mà } R = d(I, (\alpha)) \Leftrightarrow R = \frac{|-2R + R + 2(1 + R) + 10|}{3} \Leftrightarrow 3R = |12 + R| \Leftrightarrow \begin{cases} R = 6 \\ R = -3(l) \end{cases}$$

Vậy $R_1 + R_2 = 9$.

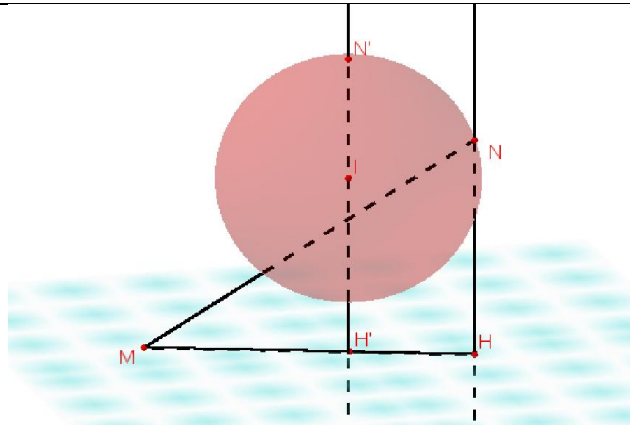
Câu 233. Chọn B



Ta thấy $\Delta DAB = \Delta DBC = \Delta DCA$, suy ra $DA = DB = DC \Rightarrow D \in d$ nên giả sử $D \left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t \right)$.

$$IA = ID \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow S = -1.$$

112



Mặt phẳng (P) có vpt $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $r = 1$. Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45° . Vì $d(I; (P)) = 2 > 1 = r$ nên (P) không cắt (S) .

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\widehat{NMH} = 45^\circ$ và $MN = \frac{NH}{\sin 45^\circ} = NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N \equiv N'$ và $H \equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I , vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P) .

Lúc đó $NH_{\max} = N'H' = r + d(I; (P)) = 3$ và $MN_{\max} = \frac{NH_{\max}}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}$.

Câu 235. Ta có tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính $R = 2$.

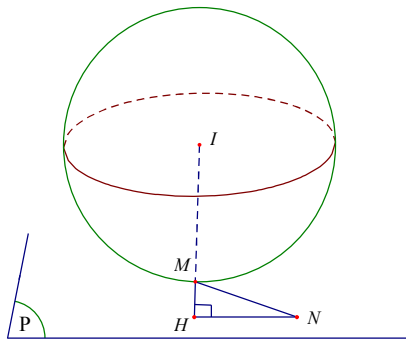
Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) ngắn nhất khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \end{cases}$$
 Khi đó

tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \\ 2(1 + 2t) - (-2 - t) + 2(2t) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = -\frac{4}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Câu 236. Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 3$; $d(I; (P)) = 4 > R \Rightarrow$ mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Dựng $IH \perp (P), (H \in (P))$. Ta có: MN nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn IH với (S) và $N \equiv H$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } IH: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{Điểm } M(1 + 2t; -2 - t; -1 + 2t) \in (S) \text{ nên } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9 \\ \Leftrightarrow (2t)^2 + (-t)^2 + (2t)^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1. \text{ Khi đó } M_1(3; -3; 1), M_2(-1; -1; -3).$$

$$\text{Thử lại: } d(M_1; (P)) = 1; d(M_2; (P)) = 7 > IH = 4 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Vậy } MN_{\min} = MH = 1 \text{ khi } M(3; -3; 1); N\left(\frac{11}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

Câu 239. Gọi $H(2t; 1 - 2t; -1 - t)$ là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow 2(2t - 1) - 2(3 - 2t) - (-2 - t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

Vì $IH = \sqrt{10} < 4 = R \Rightarrow d$ cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

Mặt phẳng (Q) bất kì chứa d luôn cắt (S) theo một đường tròn bán kính r .

$$\text{Khi đó } r^2 = R^2 - d^2(I, (Q)) \geq R^2 - d^2(I, d) = 16 - 10 = 6.$$

Do vậy mặt phẳng (P) chứa d cắt mặt cầu theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$d(I, (P)) = d(I, d) \text{ hay mặt phẳng } (P) \text{ đi qua } H \text{ nhận } \overrightarrow{IH} = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{8}{3}\right) \text{ làm vector pháp tuyến, do đó}$$

$$(P) \text{ có phương trình } x + 5y - 8z - 13 = 0.$$

Khi đó điểm $O(0; 0; 0)$ có khoảng cách đến (P) lớn nhất.

Câu 240. Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1; 2 - t; 1)$

$$I \in (P) \Rightarrow 2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 1; 1)$$

$$\text{Ta có } d \perp (P) \Rightarrow M \text{ thuộc đường tròn tâm } I(1; 1; 1), R_1 = 2.$$

$$N(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{NA}(-1-x; -3-y; 11-z); \overrightarrow{NB}\left(\frac{1}{2}-x; -y; 8-z\right)$$

$$NA = 2NB \Leftrightarrow (1+x)^2 + (3+y)^2 + (11-z)^2 = 4\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + y^2 + (8-z)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y - 42z + 126 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14z + 42 = 0$$

$$\text{Vậy } N \in S(J(1; 1; 7); R_2 = 3) \text{ và } J \in (P): y = 1$$

$$\text{Nên } N \text{ thuộc đường tròn tâm } J(1; 1; 7); R_2 = 3$$

$$\text{Ta có } IJ = 6 > R_1 + R_2 \Rightarrow MN_{\min} = IJ - R_1 - R_2 = 1$$

Câu 241. Xét điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Giả sử $I(x; y; z)$, ta có:

$$\overrightarrow{IA}(4-x; 3-y; 1-z), \overrightarrow{IB}(3-x; 1-y; 3-z).$$

$$\text{Do đó: } 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-x) = 3-x \\ 2(3-y) = 1-y \\ 2(1-z) = 3-z \end{cases} \Leftrightarrow I(5; 5; -1).$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= 2MA^2 - MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) \\ &= MI^2 + 2IA^2 - IB^2. \end{aligned}$$

Do I cố định nên IA^2, IB^2 không đổi. Vậy P lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow MI^2$ lớn nhất (nhỏ nhất). $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IK (với $K(1; 2; -1)$ là tâm của mặt cầu (S)) với mặt cầu (S) .

Ta có: MI đi qua $I(5; 5; -1)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{KI}(4; 3; 0)$.

$$\text{Phương trình của } MI \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1. \end{cases}$$

Tọa độ điểm M cần tìm ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình:

$$(1+4t-1)^2 + (2+3t-2)^2 + (-1+1)^2 = 9 \Leftrightarrow 25t^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{3}{5} \Rightarrow M_1\left(\frac{17}{5}; \frac{19}{5}; -1\right) \Rightarrow M_1I = 2 \text{ (min).}$$

$$\text{Với } t = -\frac{3}{5} \Rightarrow M_2\left(-\frac{7}{5}; \frac{1}{5}; -1\right) \Rightarrow M_2I = 8 \text{ (max). Vậy } \begin{cases} m = P_{\max} = 48 \\ n = P_{\min} = -12 \end{cases} \Rightarrow m - n = 60.$$

Câu 242. Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \vec{0}$, suy ra $N(-2; 0; 1)$.

Khi đó:

$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}) - (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) - (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC})| = |(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}) - \overrightarrow{MN}| = MN.$$

Suy ra $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 4; -1)$, suy ra:

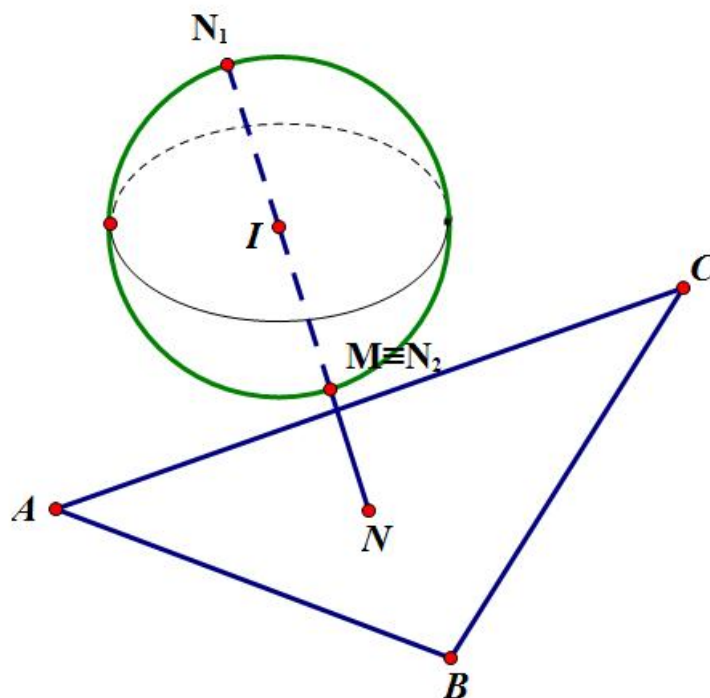
$$\overrightarrow{NI} = (4; 4; -2) = (2; 2; -1). \text{ Phương trình } NI = \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}. \text{ Thay phương trình NI vào phương trình}$$

$$(S) \text{ ta được: } (2t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3; 6; -2), N_2(0; 2; 0)$.

Vì $NN_1 > NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N_2$. Vậy $M(0; 2; 0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a + b = 2$.



Câu 243. Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 1; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi H là hình chiếu của I trên d .

$$H \in d \Leftrightarrow H(1 + 2t; -1 + t; -t); \overrightarrow{IH} = (-2 + 2t; -2 + t; -t).$$

Véc tơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -1)$.

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2(-2 + 2t) + 1(-2 + t) + t = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Suy ra } H(3; 0; -1) \Rightarrow IH = \sqrt{2}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính r . Ta có

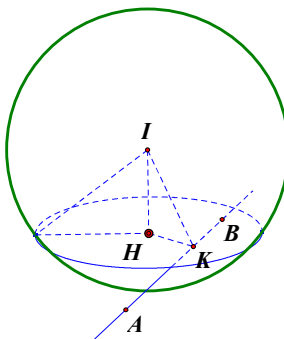
$$r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{4 - [d(I, (P))]^2}.$$

$$\text{Mà } d(I, (P)) \leq IH = \sqrt{2} \text{ nên } r = \sqrt{4 - [d(I, (P))]^2} \geq \sqrt{4 - IH^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}.$$

Suy ra $\min r = \sqrt{2}$, đạt được khi $IH \perp (P)$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $H(3; 0; -1)$ nhận $\overrightarrow{IH} = (0; -1; -1)$ làm một véc tơ pháp tuyến.

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (P) \text{ là: } 0(x - 3) - 1(y - 0) - 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow y + z + 1 = 0.$$



Câu 244.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (a;b;c)$

Theo giả thiết $B(0;1;0) \in (P): b-2=0 \Leftrightarrow b=2$.

Ta có: $\vec{AB} = (-3;3;-6)$ cùng phương với $\vec{u} = (1;-1;2)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB , H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t;1-t;2t) \Rightarrow \vec{IK} = (t-1; -t-1; 2t-3)$

$IK \perp AB \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{IK} = 0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \vec{IK} = (0; -2; -1)$.

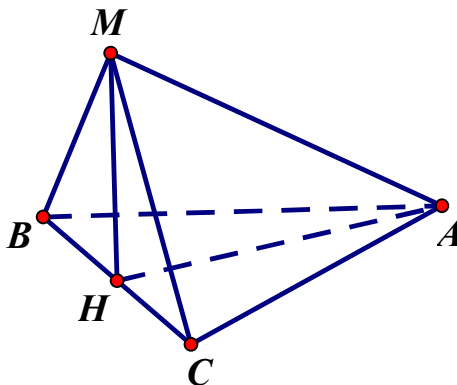
$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - IH^2}.$$

Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$.

Mà $IH \leq IK \Rightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow \vec{n}_p$ và $\vec{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_p = k \cdot \vec{IK} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2k \\ c=-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ k=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow t = a+b+c = 0+2+1=3.$$

Câu 245. Chọn C



Ta có: $\vec{AB} = (2;2;0)$, $\vec{AC} = (-2;2;4) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow \Delta ABC$ suy ra ΔABC vuông tại A .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (ABC) . Ta có:

$$(\overrightarrow{MA}, (\overrightarrow{ABC})) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{MAH}$$

$$(\overrightarrow{MB}, (\overrightarrow{ABC})) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{HB}) = \widehat{MBH}$$

$$(\overrightarrow{MC}, (\overrightarrow{ABC})) = (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{HC}) = \widehat{MCH}$$

Theo giả thiết $\widehat{MAH} = \widehat{MBH} = \widehat{MCH} \Rightarrow \Delta MAH = \Delta MBH = \Delta MCH$ (g.c.g)

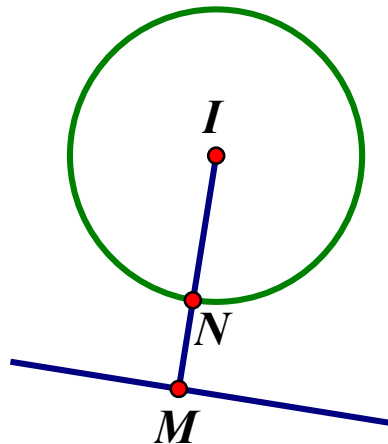
Do đó: $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Suy ra: H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(1; 2; 2)$.

Ta có: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (8; -8; 8)$, Chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng MH là $\overrightarrow{u_{MH}} = (1; -1; 1)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } MH \text{ có dạng: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 3)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Gọi $K(1+t; 2-t; 2+t)$ là hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng MH .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IK} = (t-2; -t; t-1), \overrightarrow{u_{MH}} = (1; -1; 1)$$

Do $IK \perp MH$ nên $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{u_{MH}} = 0$, ta được: $t = 1$. Khi đó: $K(2; 1; 3)$ và $IK = \sqrt{2}$

Do $IK > R$ nên đường thẳng MH không cắt mặt cầu.

$$\text{Ta có: } MN \geq d(I, MH) - IN = IK - IN = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

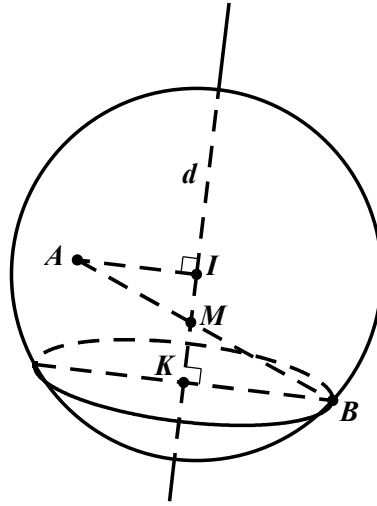
Câu 247. Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(6; 3; -1)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } 3MA^2 + MB^2 &= 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\ &= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2. \end{aligned}$$

Do $3IA^2 + IB^2$ không đổi vì ba điểm $A; B; I$ cố định nên $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S) , $(J(2; 1; 3))$ là tâm của mặt cầu (S)).

Ta có phương trình đường thẳng IJ là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow IJ \cap (S) = \begin{bmatrix} M_1(4; 2; 1) \\ M_2(0; 0; 5) \end{bmatrix}$.

Kiểm tra $IM_1 < IM_2$ ($3 < 9$) nên $M_1(4; 2; 1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T = a.b.c = 8$.



Câu 248.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-3; -4; -5)$ và bán kính $R = 27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; 4) \Rightarrow d \perp (P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d . Vì $I \in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB \perp d$.

Ta có $\vec{IA} = (1; 2; -2) \Rightarrow IA = 3$ và $\vec{IA} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow IA \perp d$.

Ta tính được $IK = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-5) - 107|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = 5\sqrt{29}$ và $KB = \sqrt{R^2 - IK^2} = 2$.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M = AB \cap d$.

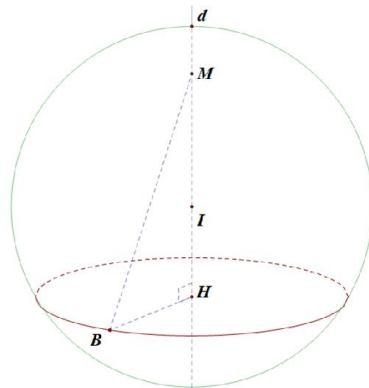
Khi đó, ta có $\frac{MI}{MK} = \frac{IA}{KB} = \frac{3}{2}$ và $MI + MK = IK = 5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI = 3\sqrt{29}$, $MK = 2\sqrt{29}$.

Ta có $AM = \sqrt{IA^2 + MI^2} = 3\sqrt{30} \Rightarrow BM = \frac{2}{3} AM = 2\sqrt{30}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ là $AM + BM = 3\sqrt{30} + 2\sqrt{30} = 5\sqrt{30}$.

Cách 2:



Ta có (S) có tâm $I(-3; -4; -5)$, bán kính $R = 27$.

Dễ thấy d đi qua $I(-3; -4; -5)$ và vuông góc với (P) .

(P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r = 2$.

$$M \in d \Leftrightarrow M(1+2t; 2+3t; 3+4t).$$

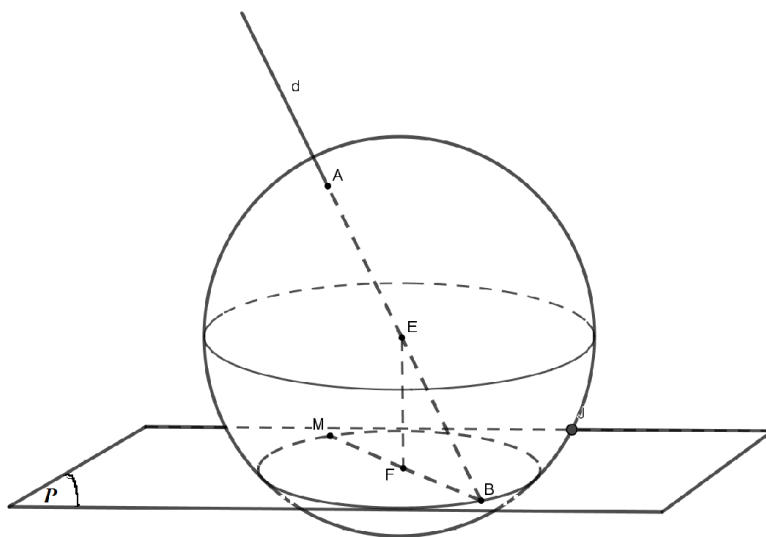
$$\text{Ta có } T = MA + MB = MA + \sqrt{MH^2 + r^2}.$$

$$\text{Lại có } MH = d(M; (P)) = \frac{|29t - 87|}{\sqrt{29}} = |\sqrt{29}t - 3\sqrt{29}|.$$

$$\text{Suy ra } T = \sqrt{29t^2 + 116t + 125} + \sqrt{29(t-3)^2 + 4} = \sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2 + \frac{9}{29}} + \sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2 + \frac{4}{29}}.$$

$$\text{Xét } \vec{u} = \left(t+2; \frac{3}{\sqrt{29}}\right), \vec{v} = \left(3-t; \frac{2}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(5; \frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

$$\text{Do đó } T = \sqrt{29}(|\vec{u}| + |\vec{v}|) \geq \sqrt{29}|\vec{u} + \vec{v}| = 5\sqrt{50}.$$



Câu 249.

- Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ có phương trình là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{-4} \Rightarrow \text{giao điểm của } d \text{ và } (P) \text{ là } B(-2; -2; 1).$$

- Do M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° nên M nằm trên mặt cầu (S) đường kính AB .

$$\text{Gọi } E \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow E = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right) \Rightarrow AE^2 = \frac{41}{4}$$

$$\Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 + x + 2z - 9 = 0.$$

- Lại do $M \in (P)$ nên M nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) , gọi là đường tròn (C) .

- Mặt khác B là điểm cố định trên đường tròn (C) nên độ dài MB lớn nhất khi MB là đường kính của đường tròn (C) .

- Gọi F là tâm của $(C) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của E trên (P) .

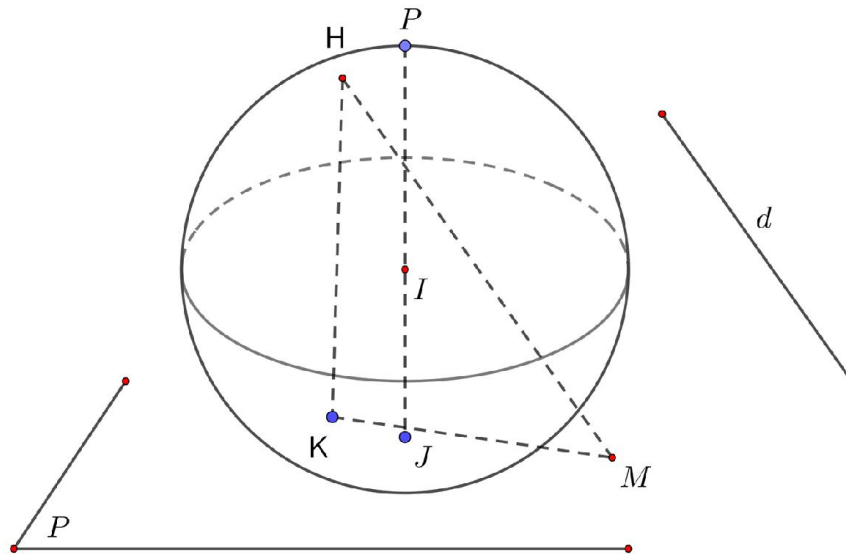
Đường thẳng EF nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; -1)$ của (P) làm vectơ pháp tuyến

$$\Rightarrow EF: \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow F = \left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right) \text{ (là giao điểm của } (P) \text{ và } EF).$$

- Vì MB là đường kính của (C) nên $M = (-3; -2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = (1; 0; 2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng $MB \Rightarrow$ phương trình đường thẳng MB là:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Trong các điểm đã cho ở các đáp án A, B, C, D chỉ có điểm $I(-1; -2; 3)$ (đáp án D) thuộc đường thẳng MB .



Câu 250.

Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 3; -2)$ và bán kính $R = 5$.

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH \perp AB$ và $IH = 3$ nên H thuộc mặt cầu (S') tâm I bán kính $R' = 3$.

Gọi M là trung điểm của $A'B'$ thì $AA' + BB' = 2HM$, M nằm trên mặt phẳng (P) .

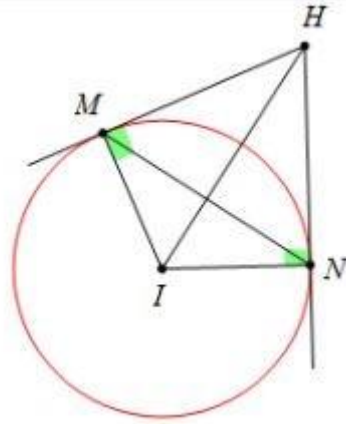
Mặt khác ta có $d(I; (P)) = \frac{4}{\sqrt{3}} < R$ nên (P) cắt mặt cầu (S) và $\sin(d; (P)) = \sin \alpha = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. Gọi K là

hình chiếu của H lên (P) thì $HK = HM \cdot \sin \alpha$.

Vậy để $AA' + BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất

$$\Leftrightarrow HK \text{ đi qua } I \text{ nên } HK_{\max} = R' + d(I; (P)) = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } AA' + BB' \text{ lớn nhất bằng } 2 \left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} = \frac{24 + 18\sqrt{3}}{5}.$$



Câu 251.

Mặt phẳng thiết diện đi qua tâm I, M, N cắt đường thẳng d tại $H \Rightarrow IH \perp d, d(I, d) = IH$.

Ta có $MN = 2MK = 2 \cdot \frac{MH \cdot MI}{IH} = 2 \cdot \frac{\sqrt{IH^2 - r^2} \cdot r}{IH} = \frac{4\sqrt{IH^2 - 4}}{IH} = \frac{4\sqrt{x^2 - 4}}{x} = f(x)$ với $x = IH > 2$

Ta có $f'(x) = \frac{4}{x^2\sqrt{x^2 - 4}} > 0, \forall x > 2$, suy ra hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Do đó $MN_{\min} \Leftrightarrow IH_{\min}$. Ta có $\vec{u}_d = (1; -m; m-1), A(1; 0; 0) \in d$, suy ra $d(I, d) = \frac{|\vec{u}_d, \vec{IA}|}{|\vec{u}_d|}$

$$\frac{\sqrt{25m^2 - 20m + 17}}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

Xét hàm số $f(m) = \frac{25m^2 - 20m + 17}{2m^2 - 2m + 2}$ có bảng biến thiên là

m	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	3	$+\infty$			
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	$\frac{25}{3}$	$\nearrow$	13	$\searrow$	$\frac{25}{2}$

Suy ra $IH_{\min}$ khi $m = \frac{1}{5}$. Đường thẳng d có phương trình là $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -\frac{1}{5}t \\ z = -\frac{4}{5}t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

$$\text{Khoảng cách } d(B, d) = \frac{|\vec{AB}, \vec{u}_d|}{|\vec{u}_d|} = \frac{\sqrt{416}}{\sqrt{42}} = \frac{4\sqrt{273}}{21}.$$