

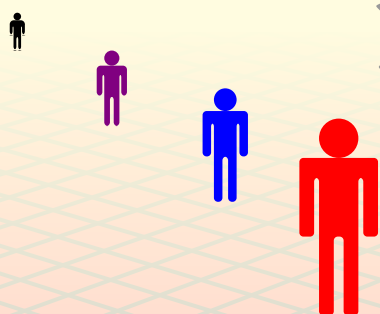
NGUYỄN BÌNH KHÔI – ĐT: 0909 461 641

TÀI LIỆU HỌC TẬP

TOÁN

LỚP 10

SÁCH CHÂN TRỜI SÁNG TẠO



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

PHẦN I ĐẠI SỐ

Chương 1. MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP	2
Bài 1. MỆNH ĐỀ	2
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	2
(B) Các dạng toán thường gặp.....	6
Dạng 1. Nhận diện, xét tính đúng sai của mệnh đề, mệnh đề chứa biến.....	6
Dạng 2. Phủ định của một mệnh đề.....	7
Dạng 3. Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương.....	8
Dạng 4. Mệnh đề với kí hiệu $\forall$ và $\exists$	9
(C) Bài tập rèn luyện.....	11
Bài 2. TẬP HỢP	21
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	21
(B) Một số dạng toán thường gặp.....	24
Dạng 1. Tập hợp và phần tử của tập hợp.....	24
Dạng 2. Tập con. Tập bằng nhau.....	25
Dạng 3. Thực hiện các phép toán trên tập hợp.....	28
Dạng 4. Dùng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$	29
Dạng 5. Xác định giao - hợp của hai tập hợp.....	30
Dạng 6. Xác định hiệu và phần bù của hai tập hợp.....	31
(C) Bài tập rèn luyện.....	33
Bài 3. ÔN TẬP CHƯƠNG 1	47
(A) Bài tập tự luận.....	47
(B) Bài tập trắc nghiệm.....	54
Chương 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH	62
Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	62
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	62
(B) Các dạng toán và bài tập.....	64
Dạng 1. Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	64
Dạng 2. Áp dụng vào bài toán thực tiễn.....	65
(C) Bài tập rèn luyện.....	67
Bài 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	87
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	87
(B) Các dạng toán và bài tập.....	88
Dạng 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	88
Dạng 2. Ứng dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn giải bài toán tối ưu.....	90
(C) Bài tập rèn luyện.....	93

Bài 3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2	105
(A) Bài tập.....	105
(B) Luyện tập.....	107
Chương 3. HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG	114
Bài 1. HÀM SỐ	114
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	114
(B) Các dạng toán và ví dụ.....	116
📁 Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số.....	116
📁 Dạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm.....	118
📁 Dạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số.....	119
📁 Dạng 4. Xét tính chẵn lẻ của hàm số.....	121
📁 Dạng 5. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất.....	122
📁 Dạng 6. Dùng đồ thị xét tính đơn điệu của hàm số.....	124
(C) Bài tập rèn luyện.....	127
Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI	145
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	145
(B) Các dạng toán và ví dụ.....	147
📁 Dạng 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$	147
📁 Dạng 2. Tìm tham số m để hàm số bậc 2 đơn điệu trên tập con của $\mathbb{R}$	148
📁 Dạng 3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trên $\mathbb{R}$ và tập con của $\mathbb{R}$	149
📁 Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.....	151
📁 Dạng 5. Các bài toán tương giao.....	152
📁 Dạng 6. Điểm đặc biệt của họ đồ thị hàm số bậc hai.....	155
(C) Bài tập rèn luyện.....	158
Bài 3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI	172
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	172
(B) Các dạng toán thường gặp.....	175
📁 Dạng 1. Nhận dạng tam thức và xét dấu biểu thức.....	175
📁 Dạng 2. Giải các bài toán liên quan đến bất phương trình.....	176
📁 Dạng 3. Các bài toán liên quan bất phương bậc hai chứa tham số m	177
📁 Dạng 4. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai thông qua đồ thị.....	178
📁 Dạng 5. Ứng dụng thực tế.....	179
(C) Bài tập rèn luyện.....	181
Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI	191
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	191
(B) Các dạng toán thường gặp.....	192
📁 Dạng 1. Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	192
📁 Dạng 2. Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$	192
📁 Dạng 3. Bài toán thực tế.....	193
(C) Bài tập rèn luyện.....	194

Bài 5. ÔN TẬP CHƯƠNG VI	210
(A) Trắc nghiệm.....	210
(B) Tự luận.....	225
Chương 4. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	234
Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°	234
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	234
(B) Các dạng toán thường gặp.....	234
▮ Dạng 1. Xét dấu của các giá trị lượng giác.....	234
▮ Dạng 2. Tính các giá trị lượng giác.....	235
(C) Bài tập rèn luyện.....	239
(D) Luyện tập.....	244
Bài 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	251
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	251
(B) Các dạng toán thường gặp.....	251
▮ Dạng 1. Tính các đại lượng trong tam giác.....	251
▮ Dạng 2. Chứng minh các hệ thức.....	253
▮ Dạng 3. Giải tam giác và ứng dụng thực tế.....	254
(C) Bài tập rèn luyện.....	258
Bài 3. ÔN TẬP CHƯƠNG 3	282
(A) Bài tập tự luận.....	282
(B) Bài tập trắc nghiệm.....	288
Chương 5. VÉC TƠ	296
Bài 1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU	296
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	296
(B) Các dạng toán thường gặp.....	297
▮ Dạng 1. Xác định một Véc-tơ.....	297
▮ Dạng 2. Sự cùng phương và hướng của hai véc-tơ.....	297
▮ Dạng 3. Hai véc-tơ bằng nhau, độ dài của véc-tơ.....	298
(C) Bài tập rèn luyện.....	300
Bài 2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VÉC TƠ	319
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	319
(B) Các dạng toán thường gặp.....	320
▮ Dạng 1. Tổng, hiệu của hai hay nhiều vectơ.....	320
▮ Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ.....	321
▮ Dạng 3. Xác định vị trí của một điểm nhờ đẳng thức vectơ.....	322
▮ Dạng 4. Tính độ dài của tổng, hiệu các vectơ.....	324
(C) Bài tập rèn luyện.....	326
Bài 3. TÍCH MỘT SỐ VỚI MỘT VÉC TƠ	346
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	346
(B) Các dạng toán.....	351
▮ Dạng 1. Xác định hai véc-tơ cùng hướng, ngược hướng.....	351
▮ Dạng 2. Tìm mô-đun (độ dài) véc-tơ.....	351
▮ Dạng 3. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.....	353

📁	Dạng 4. Biểu diễn véc-tơ qua hai véc-tơ không cùng phương.....	354
📁	Dạng 5. Chứng minh đẳng thức véc-tơ.....	355
📁	Dạng 6. Xác định điểm thoả mãn đẳng thức véc-tơ.....	358
📁	Dạng 7. Ứng dụng thực tế của véc-tơ.....	359
(C)	Bài tập luyện tập.....	361
(D)	Bài tập rèn luyện.....	364
Bài 4.	VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ	378
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	378
(B)	Các dạng toán thường gặp.....	382
📁	Dạng 1. Tọa độ của điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục.....	382
📁	Dạng 2. Tọa độ của điểm và của véc-tơ.....	383
📁	Dạng 3. Tọa độ của điểm và véc-tơ thoả mãn điều kiện cho trước.....	384
📁	Dạng 4. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương.....	386
📁	Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, véc-tơ cùng phương, hai đường thẳng song song.....	387
(C)	Bài tập rèn luyện.....	389
Bài 5.	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC - TƠ	402
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	402
(B)	Các dạng toán thường gặp.....	404
📁	Dạng 1. Xác định góc giữa hai véc-tơ.....	404
📁	Dạng 2. Tính tích vô hướng.....	405
📁	Dạng 3. Tính góc giữa hai véc-tơ.....	406
📁	Dạng 4. Ứng dụng của tích vô hướng.....	406
(C)	Bài tập rèn luyện.....	408
Bài 6.	ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG IV	418
(A)	Bài tập trắc nghiệm.....	418
(B)	Bài tập tự luận.....	425



PHẦN

ĐẠI SỐ

Chương

1

MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mệnh đề, mệnh đề chứa biến

Khái niệm 1.1.

- ✔ Mọi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.
- ✔ Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

⚠ Người ta sử dụng các chữ cái P, Q, R để biểu thị các mệnh đề

Ví dụ 1

Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề? câu nào không phải là mệnh đề?

- a) Phương trình $x^2 - 4$ có nghiệm nguyên dương;
- b) $3 + 1 = 6$;
- c) Có bao nhiêu người ghét bạn?
- d) Trời hôm nay đẹp quá!

⚠ Những mệnh đề liên quan đến toán học (Các mệnh đề câu a, câu b, trong ví dụ 1) được gọi là **mệnh đề toán học**.

Khái niệm 1.2.

- a) Xét câu “ n là số chẵn”. (với n là số nguyên)
Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu này. Tuy nhiên, với mỗi giá trị của n thuộc tập số nguyên, câu này cho ta một mệnh đề. Chẳng hạn,
 - ✔ Với $n = 1$ ta được mệnh đề “1 là số chẵn” (đây là mệnh đề sai).

✔ Với $n = 2$ ta được mệnh đề “2 là số chẵn” (đây là mệnh đề đúng).

Ta nói rằng câu “ n là số chẵn” là **một mệnh đề chứa biến**.

Ví dụ 2

Xét câu “ $x > 1$ ”. Hãy tìm hai giá trị thực của x đã cho, ta nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

2. Mệnh đề phủ định

Định nghĩa 1.1.

- ✔ Cho mệnh đề P . Mệnh đề “không phải P ” gọi là mệnh đề phủ định của P , ký hiệu là $\bar{P}$.
- ✔ Mệnh đề P đúng thì $\bar{P}$ sai. Mệnh đề P sai thì $\bar{P}$ đúng.

Ví dụ 3

Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

- a) 25 là số chính phương;
- b) Hình chữ nhật không phải là hình vuông.

3. Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo

Định nghĩa 1.2.

- ✔ Mệnh đề “Nếu P thì Q ” được gọi là mệnh đề kéo theo và ký hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- ✔ Các định lý toán học là các mệnh đề đúng và thường có dạng “Nếu P thì Q ”. Khi đó ta nói: P là giả thiết của định lý, Q là kết luận của định lý, hoặc “ P là điều kiện đủ để có Q ” hoặc “ Q là điều kiện cần để có P ”.
- ✔ Mệnh đề “Nếu P thì Q ” là sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.
- ✔ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P kéo theo Q ” hoặc “Từ P suy ra Q ”.

Ví dụ 4

Xét hai mệnh đề P : “ $8 : 4$ ” và Q : “ $8 : 2$ ”. Khi đó $P \Rightarrow Q$: “ $8 : 4 \Rightarrow 8 : 2$ ”.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề:

P : “Tam giác ABC có hai góc bằng 60° ”.

Q : “Tam giác ABC đều”.

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Định nghĩa 1.3.

- Mệnh đề “ $Q \Rightarrow P$ ” được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề:

P : “Tam giác ABC cân và có một góc bằng 60° ”.

Q : “Tam giác ABC đều”.

Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

4. Mệnh đề tương đương

Định nghĩa 1.4.

- Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” được gọi là một mệnh đề tương đương và kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ đúng. Khi đó ta nói “ P tương đương với Q ” hoặc “ P là điều kiện cần và đủ để có Q ” hoặc “ P khi và chỉ khi Q ”.

Ví dụ 7

Cho hai mệnh đề:

P : “tam giác ABC có hai cạnh bằng nhau”.



Q: “tam giác ABC cân”.

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề tương đương này.

5. Kí hiệu $\forall$ và $\exists$

Định nghĩa 1.5. Kí hiệu $\forall$ đọc là “với mọi”.

Ví dụ 8

$\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 > 0$ (đây là mệnh đề đúng).

Định nghĩa 1.6. Kí hiệu $\exists$ đọc là “có một” (tồn tại một) hay “có ít nhất một” (tồn tại ít nhất một).

Ví dụ 9

$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = x$ (đây là mệnh đề đúng) vì: với $x = 0$ thì $x^2 = x = 0$ hay với $x = 1$ thì $x^2 = x = 1$.

Định nghĩa 1.7. Mối quan hệ giữa $\exists$ và $\forall$.

Cho mệnh đề “ $P(x), x \in X$ ”.

Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

Ví dụ 10

$P: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ và $\overline{P}: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$.

Ví dụ 11

Cho mệnh đề $P: \forall x \in \mathbb{N}, x - 2 > 0$. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề P . Xét tính đúng sai của mệnh đề $\bar{P}$.

.....

.....

.....

.....

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP**Dạng 1 Nhận diện, xét tính đúng sai của mệnh đề, mệnh đề chứa biến**

- ✔ Mệnh đề phải là một câu khẳng định có tính đúng – sai rõ ràng. Có thể chưa biết nó đúng hay là sai, nhưng chắc chắn nó chỉ có thể đúng hay là sai.
- ✔ Có những mệnh đề mà tính đúng – sai của nó gắn với một thời gian, địa điểm cụ thể.
- ✔ Mệnh đề chứa biến là câu phụ thuộc vào biến x . Mệnh đề chứa biến chưa phải là mệnh đề.

Ví dụ 1

Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề?

- a) Phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có nghiệm nguyên.
 - b) $5 < 7 - 3$.
 - c) Có bao nhiêu dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng?
 - d) Đây là cách xử lí khôn ngoan!
-
-
-
-

Ví dụ 2

Cho mệnh đề chứa biến $P(x) = 3x + 5 \leq x^2$ với x là số thực. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau $P(3), P(1), P(4), P(5)$?

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3

Cho mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0$ ”, với a là số thực cho trước. Tìm a để mệnh đề đúng.

Ví dụ 4

Xét tính đúng sai của mệnh đề: “Phương trình $x^2 + 7x - 2 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu”.

Ví dụ 5

Câu nào sau đây là mệnh đề và cho biết tính đúng – sai của nó?

- a) Tổng các góc trong một tam giác bằng 180° .
- b) Tổng các góc trong một hình vuông có bằng 360° không?

Ví dụ 6

Câu nào sau đây là mệnh đề và cho biết tính đúng – sai của nó?

- a) $(3 + 4)(2 + 6) = 73$.
- b) Chiều nay trời mưa.

Dạng 2 Phủ định của một mệnh đề

Thêm (hoặc bớt) từ “không” (hoặc “không phải”) vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

Ví dụ 1

Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau

- a) P : “17 là số chính phương”.
 b) Q : “Hình hộp không phải là hình lăng trụ”.

Ví dụ 2

Phủ định các mệnh đề sau.

- a) A : “ $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm”.
 b) B : “Con thì thấp hơn cha”.
 c) C : “ $5 + 4 = 10$ ”.
 d) D : “10 chia hết cho 3”.
 e) E : “5 là số hữu tỉ”.
 f) F : “Pari là thủ đô nước Anh”.

Dạng 3**Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương**

- ✔ Mệnh đề “nếu P thì Q ” gọi là **mệnh đề kéo theo**. Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- ✔ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P **đúng** Q **sai**.
- ✔ Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là **mệnh đề đảo** của $P \Rightarrow Q$.
- ✔ Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” gọi là **mệnh đề tương đương**. Ký hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- ✔ Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng.

Ví dụ 1

Cho tứ giác $ABCD$, xét hai câu sau:

P : “Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° ”.

Q : “ $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn”.

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đó.

Ví dụ 2

Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề: “Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì tam giác ABC là tam giác cân” và xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

Ví dụ 3

Cho các mệnh đề P : “ a và b cùng chia hết cho c ”, Q : “ $a + b$ chia hết cho c ”.

- Hãy phát biểu định lý $P \Rightarrow Q$. Nêu giả thiết kết luận của định lý và phát biểu định lý này dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.
- Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ rồi xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

Ví dụ 4

Cho hai mệnh đề:

P : “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông”.

Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau”.

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề tương đương này.

Dạng 4 Mệnh đề với kí hiệu $\forall$ và $\exists$

- ✔ Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- ✔ Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

Ví dụ 1

Dùng kí hiệu “ $\forall$ ” hoặc “ $\exists$ ” để viết các mệnh đề sau:

- a) Bình phương mọi số thực đều dương.
- b) Có ít nhất một số tự nhiên bằng với nghịch đảo của nó.

Ví dụ 2

Phủ định các mệnh đề sau.

- a) Mọi động vật đều di chuyển.
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
- c) $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = x$.

**BÀI TẬP RÈN LUYỆN****1. Bài tập tự luận****Bài 1**

Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- a) Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới.
- b) Bạn học trường nào?
- c) Không được làm việc riêng trong giờ học.
- d) Tôi sẽ sút bóng trúng xà ngang.

Bài 2

Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

- a) $\pi < \frac{10}{3}$.
- b) Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm.
- c) Có ít nhất một số cộng với chính nó bằng 0.
- d) 2022 là hợp số.

Bài 3

Cho hai câu sau

P : “Tam giác ABC là tam giác vuông”.

Q : “Tam giác ABC có một góc bằng tổng hai góc còn lại”.

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề này.

**Bài 4**

Phát biểu mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của chúng.

P : “Nếu số tự nhiên n có chữ số tận cùng là 5 thì n chia hết cho 5”.

Q : “Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác có hai đường chéo bằng nhau”.

Bài 5

Với hai số thực a và b , xét các mệnh đề P : “ $a^2 < b^2$ ” và Q : “ $0 < a < b$ ”.

a) Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề ở câu a).

c) Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề của câu a) và b).

Bài 6

Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của nó.

Q : “ $\exists n \in \mathbb{N}$, n chia hết cho $n + 1$ ”.

Bài 7

Dùng kí hiệu $\forall, \exists$ để viết các mệnh đề sau

P : “Mọi số tự nhiên đều có bình phương lớn hơn hoặc bằng chính nó”.

Q : “Có một số thực cộng với chính nó bằng 0”.

**Bài 8**

Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

- a) Tích của hai số thực trái dấu là một số thực âm.
- b) Mọi số tự nhiên đều là số dương.
- c) Có sự sống ngoài Trái đất.
- d) Ngày 1 tháng 5 là ngày Quốc tế Lao động.

Bài 9

Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

- a) A : " $\frac{5}{1,2}$ là một phân số".
- b) B : "Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm".
- c) C : " $2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$ ".
- d) D : "Số 2025 chia hết cho 15".

Bài 10

Cho n là số tự nhiên. Xét các mệnh đề sau:

P : " n là số tự nhiên chia hết cho 16".

Q : " n là số tự nhiên chia hết cho 8".

- a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.
- b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Bài 11

Cho tam giác ABC . Xét các mệnh đề sau:

P : “Tam giác ABC cân.”

Q : “Tam giác ABC có hai đường cao bằng nhau”.

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng bốn cách.

Bài 12

Dùng kí hiệu $\forall, \exists$ để viết các mệnh đề sau

a) Có một số nguyên không chia hết cho chính nó.

b) Mọi số thực cộng với 0 đều bằng chính nó.

Bài 13

Phát biểu các mệnh đề sau

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} > x$.



Bài 14

Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định của đó

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2;$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2;$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1;$

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0.$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề?

☐ A Đề thi môn Toán khó quá!

☐ B Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

☐ C Bạn có đi học không?

☐ D Mùa thu Hà Nội đẹp quá!

Câu 2

Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định là mệnh đề?

☒ $2 + 4 = 7.$

☒ Học, học nữa, học mãi!

☒ Hình chữ nhật có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

☒ Tam giác có hai đường cao bằng nhau là tam giác cân.

☐ A 4.

☐ B 3.

☐ C 2.

☐ D 1.

**Câu 3**

Câu nào sau đây **không phải** là mệnh đề?

- ☐ A $x + 5 < 1$.
- ☐ B Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.
- ☐ C $5 < 1$.
- ☐ D $4 - 7 = 1$.

Câu 4

Với giá trị nào của x thì " $x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 = 0$ " là mệnh đề đúng?

- ☐ A $x = 1$.
- ☐ B $x = -1$.
- ☐ C $x = 0$.
- ☐ D $x = 1$ hoặc $x = -1$.

Câu 5

Câu nào sau đây **không phải** là mệnh đề?

- ☐ A $\pi^2 < 9,86$.
- ☐ B Mặt trời mọc ở hướng tây.
- ☐ C 3 là một số nguyên tố.
- ☐ D Bạn ơi, mấy giờ rồi?

Câu 6

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- ☐ A Hai tam giác có diện tích bằng nhau thì bằng nhau.
- ☐ B Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- ☐ C Tam giác có ba cạnh bằng nhau thì có ba góc bằng nhau.
- ☐ D Tam giác có ba góc bằng nhau thì có ba cạnh bằng nhau.



Câu 7

Cho mệnh đề $P(n)$: “ $n^2 + n + 1$ là số chia hết cho 3” ($n \in \mathbb{N}$). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ $P(1)$. Ⓑ $P(2)$. Ⓒ $P(3)$. Ⓓ $P(2)$.

Câu 8

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: “ $2x^2 - 1 < 0$ ”. Mệnh đề đúng là

- Ⓐ $P(-1)$. Ⓑ $P(0)$. Ⓒ $P(-2)$. Ⓓ $P(1)$.

Câu 9

Phát biểu nào sau đây là mệnh đề đúng?

- Ⓐ Tổng của hai số tự nhiên lẻ là một số lẻ.
 Ⓑ Tích của hai số tự nhiên lẻ là một số chẵn.
 Ⓒ Một tam giác có nhiều nhất một góc tù.
 Ⓓ Bình phương của một số thực luôn dương.

Câu 10

Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ” là

- Ⓐ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$. Ⓑ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. Ⓒ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$. Ⓓ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.

Câu 11

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- ☐ A Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có 3 góc vuông.
- ☐ B Tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow \widehat{A} = 60^\circ$.
- ☐ C Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.
- ☐ D Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $O \Rightarrow OA = OB = OC = OD$.

Câu 12

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- ☐ A $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2 \cdot 5$.
- ☐ B $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.
- ☐ C $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$.
- ☐ D $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$.

Câu 13

Cho " $P \Leftrightarrow Q$ " là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- ☐ A $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$ đúng.
- ☐ B $\bar{Q} \Leftrightarrow P$ sai.
- ☐ C $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$ sai.
- ☐ D $\bar{P} \Leftrightarrow Q$ sai.

Câu 14

Cho các mệnh đề P : "Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông", Q : " $ABCD$ là hình chữ nhật". Mệnh đề " $P \Rightarrow Q$ " được phát biểu là

- ☐ A Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì $ABCD$ là hình bình hành và có một góc vuông.
- ☐ B Nếu hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông thì $ABCD$ là hình chữ nhật.
- ☐ C Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông khi và chỉ khi $ABCD$ là hình chữ nhật.
- ☐ D Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông là điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình chữ nhật.



Câu 15

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

☐ A $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 \vdots x.$

☐ B $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq x.$

☐ C $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 < 2x.$

☐ D $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = x + 1.$

Câu 16

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

☐ A $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 = 0.$

☐ B $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0.$

☐ C $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 = n.$

☐ D $\forall n \in \mathbb{N}: n < 2n.$

Câu 17

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là sai?

☐ A $\forall n \in \mathbb{N}: n \leq 2n.$ ☐ B $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 = n.$ ☐ C $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0.$ ☐ D $\exists x \in \mathbb{R}: x < 1.$

Câu 18

Mệnh đề nào sau đây là sai?

☐ A $\exists x \in \mathbb{Q}, 9x^2 - 1 = 0.$

☐ B $\forall x \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{x}.$

☐ C $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 > 0.$

☐ D $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 - 3x + 2 = 0.$

Câu 19

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không chia hết cho 3.

Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, x < 4 \Leftrightarrow x^2 < 16.$

Ⓒ $\exists k \in \mathbb{Z}, k^2 + k + 1$ là một số chẵn.

Ⓓ $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}.$

§2. TẬP HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các khái niệm cơ bản về tập hợp

Khái niệm 2.1. Có thể mô tả một tập hợp bằng một trong hai cách sau

- ✔ **Cách 1:** Liệt kê các phần tử của tập hợp;
- ✔ **Cách 2:** Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.



- ✔ $a \in S$: phần tử a thuộc tập hợp S .
- ✔ $a \notin S$: phần tử a không thuộc tập hợp S .
- ✔ Số phần tử của tập hợp S được kí hiệu là $n(S)$.

Định nghĩa 2.1. Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu là $\emptyset$.

Ví dụ 1

- a) Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng;
- b) Tập hợp những người sống trên Mặt Trời là tập rỗng.

Định nghĩa 2.2. Nếu mọi phần tử của tập hợp T đều là phần tử của tập hợp S thì ta nói T là một tập hợp con (tập con) của S và viết là $T \subset S$ (đọc là T chứa trong S hoặc T là tập con của S).



- ✔ Thay cho $T \subset S$, ta còn viết $S \supset T$ (đọc là S chứa T).
- ✔ Kí hiệu $T \not\subset S$ để chỉ T không là tập con của S .
- ✔ Từ định nghĩa trên, T là tập con của S nếu mệnh đề $\forall x, x \in T \Rightarrow x \in S$ đúng
- ✔ Quy ước tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Định nghĩa 2.3. Hai tập hợp S và T được gọi là hai tập hợp bằng nhau nếu mỗi phần tử của T cũng là phần tử của tập hợp S và ngược lại. Kí hiệu là $S = T$.



Nếu $S \subset T$ và $T \subset S$ thì $S = T$.

2. Các tập hợp số

Định nghĩa 2.4.

- ✔ Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.



- ✔ Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm

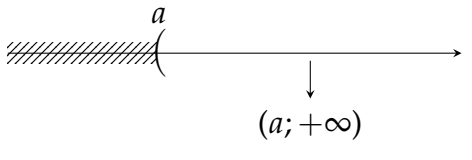
$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

- ✔ Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ gồm các số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Số hữu tỉ còn được biểu diễn dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.
- ✔ Tập hợp các số thực kí hiệu $\mathbb{R}$, gồm các số hữu tỷ và các số vô tỷ. Số vô tỷ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

⚠ Mọi quan hệ giữa các tập hợp số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3. Các tập con thường dùng của $\mathbb{R}$

Tên gọi	Kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (Phần không bị gạch chéo)
Tập số thực	$(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn	$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng	$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng	$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng	$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng	$(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng	$[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng	$(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	

Khoảng	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
--------	----------------	-----------------------------------	--

Kí hiệu $+\infty$: Đọc là dương vô cực (hoặc dương vô cùng).

Kí hiệu $-\infty$: Đọc là âm vô cực (hoặc âm vô cùng).

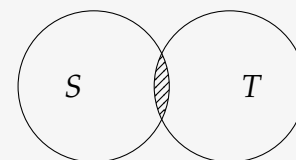
a, b gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.

4. Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa 2.5.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp S và T gọi là **giao của hai tập hợp** S và T , kí hiệu là $S \cap T$.

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \in T\}.$$

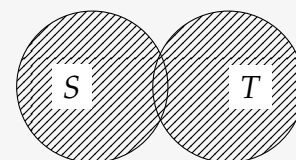


$S \cap T$

Định nghĩa 2.6.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp S hoặc thuộc tập hợp T gọi là **hợp của hai tập hợp** S và T , kí hiệu là $S \cup T$.

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ hoặc } x \in T\}.$$

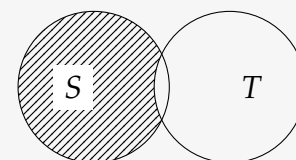


$S \cup T$

Định nghĩa 2.7.

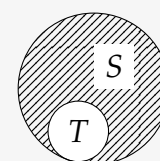
Hiệu của hai tập hợp S và T là tập hợp gồm các phần tử thuộc S nhưng không thuộc T , kí hiệu là $S \setminus T$.

$$S \setminus T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \notin T\}.$$



$S \setminus T$

Nếu $T \subset S$ thì $S \setminus T$ được gọi là **phần bù của T trong S** , kí hiệu là $C_S T$.



$C_S T$

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tập hợp và phần tử của tập hợp

- ✔ Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
- ✔ Nêu đặc trưng của tập hợp.

Ví dụ 1

Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê.

- a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5)\} = 0$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < n^2 < 40\}$.
- c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}$.
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$.

Ví dụ 2

Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau

- a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.
- b) B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$.

Ví dụ 3

Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau

- a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - 3x + 1)(x + 5) = 0\}$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$.

Dạng 2 Tập con. Tập bằng nhau

- ✔ Tập hợp A là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều có trong B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- ✔ $\emptyset \subset A$, với mọi tập hợp A .

- ✔ $A \subset A$, với mọi tập hợp A .

- ✔ Có tập A gồm có n phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Khi đó, tập A có 2^n tập con.

- ✔ $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A. \end{cases}$

Ví dụ 1

Tìm tất cả các tập con của tập $A = \{a; 1; 2\}$.

Ví dụ 2

Tìm tất cả các tập con có 2 phần tử của tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Ví dụ 3

Xác định tập hợp X biết $\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 5\}$.

Ví dụ 4

Xác định tập hợp X biết $\{a; 1\} \subset X \subset \{a; b; 1; 2\}$.

**Ví dụ 5**

Cho ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{x; 5\}$ và $C = \{x; y; 5\}$. Tìm các giá trị của x, y sao cho $A = B = C$.

Ví dụ 6

Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho 3 và 2}\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho 6}\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Ví dụ 7

Cho biết x là một phần tử của tập hợp A , xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) $x \in A$. b) $\{x\} \in A$. c) $x \subset A$. d) $\{x\} \subset A$.

Ví dụ 8

Xác định tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp

- a) $A = \{x; y\}$. b) $B = \{1; 2; 3\}$

Ví dụ 9

Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp A sao cho tổng các phần tử này là một số lẻ.

Ví dụ 10

Trong hai tập hợp A và B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

- a) A là tập hợp các hình chữ nhật
 B là tập hợp các hình bình hành.
- b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước chung của } 12 \text{ và } 18\}$
 $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 6\}$.

Ví dụ 11

Cho $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước của } 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X \subset B$.

Ví dụ 12

Cho $A = \{8k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $A \subset B$.



Dạng 3 Thực hiện các phép toán trên tập hợp

Dựa vào định nghĩa các phép toán trên tập hợp để tìm kết quả.

⚠️ Chú ý:

- ✓ Nếu $A \subset B$ thì $B \setminus A = C_B A$.
- ✓ Nếu $A = \emptyset$ thì $A \setminus B = \emptyset$ với mọi tập hợp B .

Ví dụ 1

Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước số của } 12\}$. Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Ví dụ 2

Chứng minh rằng

- a) Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$. b) Nếu $A \setminus B = \emptyset$ thì $A \subset B$.

Ví dụ 3

Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 4\}$ và $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq a\}$. Tìm số nguyên a để tập hợp $B \cap C = \emptyset$.

Ví dụ 4

Cho các tập hợp $A = \{4; 5\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho $A \setminus B = A$.

Ví dụ 5

Cho hai tập hợp A, B biết $A = \{a; b\}$, $B = \{a; b; c; d\}$. Tìm tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

Ví dụ 6

Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{1; 2\}$, $B \setminus A = \{3\}$ và $B = \{3; 4; 5\}$. Tìm tập hợp A .

Dạng 4 Dùng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$

☑ Phương pháp biểu đồ Ven

- Sử dụng các biểu đồ Ven để mô tả các đại lượng và mối quan hệ giữa chúng.
- Biểu đồ Ven cho ta cách nhìn trực quan về mối quan hệ giữa các đại lượng, từ đó tìm ra các yếu tố chưa biết.

☑ Công thức tính số phần tử $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Ví dụ 1

Trong năm vừa qua, trường THPT X có 25 bạn thi học sinh giỏi 2 môn Văn và Toán, trong đó có 14 bạn thi Toán và 16 bạn thi Văn. Hỏi trường có bao nhiêu bạn thi cả 2 môn Văn và Toán?

Ví dụ 2

Lớp 10A có 15 bạn thích môn Văn, 20 bạn thích môn Toán. Trong số các bạn thích văn hoặc toán có 8 bạn thích cả 2 môn. Trong lớp vẫn còn 10 bạn không thích môn nào trong 2 môn Văn và Toán. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn?



Ví dụ 3

Mỗi học sinh của lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh.

Dạng 5 Xác định giao - hợp của hai tập hợp.

a) Xác định giao của hai tập hợp ta làm như sau

- ✓ Biểu diễn các tập hợp lên trục số.
- ✓ Dùng định nghĩa giao để xác định các phần tử của tập hợp.

b) Cho hai tập con của tập số thực A và B . Tìm $A \cup B$ ta làm như sau

- ✓ Biểu diễn tập A trên trục số, gạch chéo phần không thuộc A .
- ✓ Làm tương tự đối với tập B .
- ✓ Phần không gạch chéo trên hình là $A \cup B$.

c) Đối với hai tập A và B khác rỗng để tìm $A \cup B$ ta nhớ rằng

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$$

Ví dụ 1

Xác định tập hợp $(0; 3) \cup (-3; 2)$ và biểu diễn trên trục số

Ví dụ 2

Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \cap B$.

**Ví dụ 3**

Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $(0; 3) \cap (2; 4)$.

b) $\mathbb{R} \cap (-1; 1)$.

Ví dụ 4

Cho $m > 5$. Xác định tập hợp $[-2; m) \cup [0; 4)$.

Ví dụ 5

Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 4| \geq 3\}$, $C = [-5; 3)$. Tìm các tập hợp

a) $A \cap B$.

b) $B \cup C$.

c) $A \cap B \cap C$.

d) $A \cup B$.

e) $A \cap B \cup C$.

f) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Dạng 6**Xác định hiệu và phần bù của hai tập hợp.**

✔ Biểu diễn các tập hợp lên trục số.

✔ Dùng định nghĩa các phép toán hiệu, phần bù để xác định các phần tử của tập hợp.

Ví dụ 1

Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.

Ví dụ 2

Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $(0;3) \setminus (2;4)$.

b) $\mathbb{R} \setminus (-1;1)$.

Ví dụ 3

Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $\mathbb{R} \setminus ((0;1) \cup (2;3))$.

b) $\mathbb{R} \setminus ((3;5) \cap (4;6))$.

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Gọi X là tập hợp các quốc gia tiếp giáp với Việt Nam. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp X và biểu diễn tập X bằng biểu đồ Ven.

Bài 2

Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Viết tất cả các tập con của tập hợp X .

Bài 3

Sắp xếp các tập hợp sau theo quan hệ " $\subset$ ": $[2; 5]$, $(2; 5)$, $[2; 5)$, $(1; 5]$.

Bài 4

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $[-3; 7] \cap (2; 5)$;

c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$;

b) $(-\infty; 0] \cap (-1; 2)$;

d) $(-3; 2) \setminus [1; 3)$.

Bài 5

Gọi A là tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$, B là tập nghiệm của phương trình $2x^2 + x - 6 = 0$. Tìm $C = A \cap B$.

Bài 6

Tìm $D = E \cap G$ biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau

a) $2x + 3 \geq 0$ và $-x + 5 \geq 0$;

b) $x + 2 > 0$ và $2x - 9 < 0$.

Bài 7

Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$. Viết tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ xác định.

Bài 8

Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

- Có bao nhiêu học sinh lớp 10B tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?
- Có bao nhiêu học sinh lớp 10B tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên.
- Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

Bài 9

Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

Bài 10

Kí hiệu E là tập hợp các quốc gia tại khu vực Đông Nam Á.

- Nêu ít nhất hai phần tử thuộc tập hợp E .
- Nêu ít nhất hai phần tử không thuộc tập hợp E .
- Liệt kê các phần tử thuộc tập hợp E . Tập hợp E có bao nhiêu phần tử?

Bài 11

Hãy viết tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp

$$A = \{0; 4; 8; 12; 16\}.$$

Bài 12

Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6 = 0\}; \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 6 = 0\}.$$

Bài 13

Cho $X = \{a; b\}$. Các cách viết sau đúng hay sai? Giải thích kết luận đưa ra.

a) $a \subset X$;

b) $\{a\} \subset X$;

c) $\emptyset \in X$

Bài 14

Cho $A = \{2; 5\}, B = \{5; x\}, C = \{2; y\}$. Tìm x và y để $A = B = C$.

Bài 15

Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 4\}; B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (5x - 3x^2)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$.

a) Liệt kê các phần tử của hai tập hợp A và B .

b) Hãy xác định các tập hợp $A \cap B, A \cup B$ và $A \setminus B$.



Bài 16

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $(-4; 1] \cap [0; 3);$

c) $(-2; 1) \cap (-\infty; 1];$

b) $(0; 2] \cup (-3; 1];$

d) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3].$

Bài 17

Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 35 người phiên dịch tiếng Anh, 30 người phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 16 người phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a) Ban tổ chức đã huy động bao nhiêu người phiên dịch cho hội nghị đó?

b) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Anh?

c) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Pháp?

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}.$

☐ B $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}.$

☐ C $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}.$

☐ D $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$



Câu 2

Cho hai tập hợp $A = \{a; b; c; 1; 2\}$ và $B = \{a; c; d; 1; 3; 5\}$. Khi đó tập hợp $A \cup B$ có bao nhiêu phần tử?

- Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 11.

Câu 3

Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 4x + 3 = 0\}$. Tập hợp B bằng

- Ⓐ $\{-3\}$. Ⓑ $\emptyset$. Ⓒ $\{-3; -1\}$. Ⓓ $\{-1\}$.

Câu 4

Tìm số phần tử của tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid (3x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2) = 0\}$.

- Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 5

Cho tập hợp $A = \{0; 2; 4; 6\}$. Có bao nhiêu tập con của tập hợp A có đúng hai phần tử?

- Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 8.

Câu 6

Trong các tập hợp sau, tập hợp nào rỗng?

- Ⓐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$. Ⓑ $\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x^2 - 5x + 2 = 0\}$.



Ⓒ $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 1 = 0\}$.

Ⓓ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 1 = 0\}$.

Câu 7

Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{1; 3; 5; 7\}$. Khi đó $A \cup B$, $A \cap B$ lần lượt là

Ⓐ $\{1; 3; 5\}, \{2; 4\}$.

Ⓑ $\{1; 2; 3; 4; 5; 7\}, \{1; 3; 5\}$.

Ⓒ $\{1; 3; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$.

Ⓓ $\{2; 4\}, \{1; 3; 5\}$.

Câu 8

Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

Ⓐ 10.

Ⓑ 11.

Ⓒ 9.

Ⓓ 8.

Câu 9

Số tập con của tập hợp $X = \{10; 11; 12; A; B; C\}$ là

Ⓐ 63.

Ⓑ 32.

Ⓒ 31.

Ⓓ 64.

Câu 10

Cho hai tập hợp $A = \{2; 4; 6; 8\}$ và B là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10. Phần bù của A trong B là

Ⓐ $\{0; 1; 3; 5; 7; 9\}$.

Ⓑ $[0; 10) \setminus \{2; 4; 6; 8\}$.

Ⓒ $\emptyset$.

Ⓓ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$.

Câu 11

Cho hai tập hợp $X = \{2; 4; 8; 10; 12\}$ và $Y = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Khi đó tập hợp $X \setminus Y$ có bao nhiêu phần tử?

- Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 12

Cho tập hợp $A = \{1; 2; 4; 6\}$. Có tất cả bao nhiêu tập hợp con của tập A có chứa phần tử 1?

- Ⓐ 9. Ⓑ 8. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

Câu 13

Có bao nhiêu tập A để $\{m; n\} \subset A \subset \{m; n; x; y\}$?

- Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Câu 14

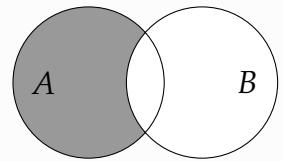
Cho X là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 9, Y là tập hợp các số nguyên dương chẵn nhỏ hơn 10, K là tập hợp các ước nguyên dương của 12. Tập hợp $X \cup (Y \cap K)$ được viết dưới dạng liệt kê phần tử là

- Ⓐ $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Ⓑ $\{2; 3; 4; 6\}$. Ⓒ $\{2; 3; 5; 7\}$. Ⓓ $\{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Câu 15

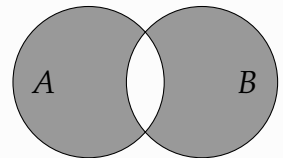
Cho hai tập hợp A và B được biểu diễn bằng sơ đồ Ven như hình vẽ bên. Phần tô đậm là biểu diễn của tập hợp nào dưới đây?

- ☐ A $B \setminus A$.
 ☐ B $A \cup B$.
 ☐ C $A \cap B$.
 ☐ D $A \setminus B$.

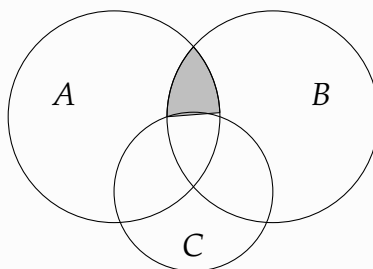

Câu 16

Cho hai tập hợp A và B được biểu diễn bằng sơ đồ Ven như hình vẽ bên. Phần tô đậm là biểu diễn của tập hợp nào dưới đây?

- ☐ A $A \cap B$.
 ☐ B $A \cup B$.
☐ C $A \setminus B$.
 ☐ D $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.


Câu 17

Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



- ☐ A $A \cap B \cap C$.
 ☐ B $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.
 ☐ C $(A \cup B) \setminus C$.
 ☐ D $(A \cap B) \setminus C$.



Câu 18

Một lớp học có 45 học sinh trong đó có 25 em biết chơi bóng chuyền, 15 em biết chơi bóng bàn, 5 em biết chơi cả bóng đá và bóng bàn. Hỏi có bao nhiêu em không biết chơi môn nào trong hai môn ở trên?

- Ⓐ 5. Ⓑ 10. Ⓒ 15. Ⓓ 20.

Câu 19

Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \geq 3\}$ bằng tập hợp nào dưới đây?

- Ⓐ $(2; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 2)$. Ⓒ $[2; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 2]$.

Câu 20

Tập hợp $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3x + \frac{3}{2} < -\frac{3}{2}\}$ bằng tập hợp nào dưới đây?

- Ⓐ $(1; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 1)$. Ⓒ $[1; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 1]$.

Câu 21

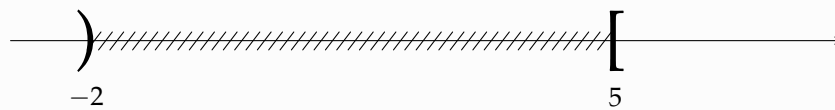
Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ bằng tập hợp nào sau đây?

- Ⓐ $[1; 2]$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $[1; 2)$. Ⓓ $(1; 2]$.



Câu 22

Hình vẽ dưới là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



A $(-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$.

B $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

C $(-\infty; -2] \cup (5; +\infty)$.

D $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.

Câu 23

Cho các tập hợp $A = (-5; 3)$ và $B = [-2; 7]$. Tìm $A \cup B$.

A $[-2; 3)$.

B $(-5; -2)$.

C $(-5; 7)$.

D $[3; 7)$.

Câu 24

Cho $A = (-\infty; 5]$ và $B = (0; +\infty)$. Tập hợp $A \cap B$ là

A $(0; 5]$.

B $[0; 5)$.

C $(0; 5)$.

D $(-\infty; +\infty)$.

Câu 25

Cho hai tập hợp $A = (-4; 3)$ và $B = [-1; 5]$. Tập hợp $A \cap B$ là

A $(-4; 5]$.

B $[-1; 3)$.

C $(-1; 3)$.

D $(-4; 5)$.



Câu 26

Cho hai tập $A = [-2; 1]$ và $B = (0; +\infty)$. Xác định tập hợp $A \cup B$.

- Ⓐ $[1; +\infty)$. Ⓑ $[-2; 0)$. Ⓒ $[-2; +\infty)$. Ⓓ $(0; 1]$.

Câu 27

Cho hai tập hợp $X = (-\infty; 3)$ và $Y = [1; +\infty)$. Tập hợp $X \setminus Y$ bằng

- Ⓐ $[-3; 4]$. Ⓑ $[0; 1)$. Ⓒ $(-\infty; 1)$. Ⓓ $[-3; 0]$.

Câu 28

Cho tập hợp $X = [3; +\infty)$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}} X$ bằng

- Ⓐ $(-\infty; 3)$. Ⓑ $[0; 1)$. Ⓒ $[-3; 0]$. Ⓓ $(-\infty; 1)$.

Câu 29

Cho tập hợp $A = (-\infty; 4]$ và $B = (1; +\infty)$. Tập hợp $B \setminus A$ là

- Ⓐ $(4; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 1)$. Ⓒ $[1; +\infty)$. Ⓓ $[4; +\infty)$.

Câu 30

Cho tập hợp $A = [-4; 1)$ và $B = (-2; 3]$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- Ⓐ $[-2; 3]$. Ⓑ $(-2; 3)$. Ⓒ $[-4; 1)$. Ⓓ $[-4; -2]$.

Câu 31

Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$. Tập hợp $A \cup B$ là

- ☐ (A) $[0; +\infty)$. ☐ (B) $[5; +\infty)$. ☐ (C) $[0; 6]$. ☐ (D) $[0; 5] \cup (6; +\infty)$.

Câu 32

Cho hai tập hợp $A = (\sqrt{2}; +\infty)$ và $B = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Tập hợp $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$ bằng tập hợp nào dưới đây?

- ☐ (A) $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right]$. ☐ (B) $(\sqrt{2}; +\infty)$. ☐ (C) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. ☐ (D) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 33

Tập hợp $S = C_{\mathbb{R}}(C_{\mathbb{R}}((-\infty; 5) \cup (0; 7)) \cup C_{\mathbb{R}}(-5; 8))$ chứa tập hợp nào dưới đây?

- ☐ (A) $[-5; 6]$. ☐ (B) $(-5; 7)$. ☐ (C) $(-6; 8)$. ☐ (D) $(7; 8)$.

Câu 34

Cho hai tập hợp $A = (m - 7; m)$ và $B = (-4; 3)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để $A \subset B$.

- ☐ (A) 0. ☐ (B) 1. ☐ (C) 2. ☐ (D) 5.



Câu 35

Cho các tập hợp $A = (-6; -3]$ và $B = [m; +\infty)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để $A \cap B = \emptyset$?

(A) 5.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 3.

Câu 36

Cho tập hợp $A = [m; m + 2]$, $B = [-1; 2]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để $A \subset B$ là

(A) 2.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 6.

Câu 37

Tìm m để $(0; 2] \cap [m; m + 1] = \emptyset$.

(A) $\begin{cases} m \leq -1 \\ m > 2 \end{cases}$.

(B) $m \in \emptyset$.

(C) $m > 2$.

(D) $m \leq -1$.

Câu 38

Có bao nhiêu số nguyên m để tập hợp $S = [0; 5) \cap (m - 2; m + 4) \neq \emptyset$?

(A) 8.

(B) 9.

(C) 10.

(D) 12.

§3. ÔN TẬP CHƯƠNG 1

A BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Biểu diễn các tập hợp sau bằng biểu đồ Ven.

a) $A = \{0; 1; 2; 3\};$

b) $B = \{\text{Lan}; \text{Huệ}; \text{Trang}\}$

Bài 2

Phần không bị gạch trên trục số dưới đây biểu diễn tập hợp số nào?



Bài 3

Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}; B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$. Xác định các tập hợp sau

$$A \cup B; A \cap B; A \setminus B.$$

Bài 4

Cho hai tập hợp $A = [-2; 3]$ và $B = (1; +\infty)$. Xác định các tập hợp sau

$$A \cap B; B \setminus A \text{ và } {}_{\mathbb{R}}C B.$$

**Bài 5**

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $(-\infty; 1) \cap (0; +\infty);$

b) $(4; 7] \cup (-1; 5);$

c) $(4; 7] \setminus (-3; 5]$

Bài 6

Một cuộc khảo sát về khách du lịch thăm vịnh Hạ Long cho thấy trong 1410 khách du lịch được phỏng vấn có 789 khách du lịch đến thăm động Thiên Cung, 690 khách du lịch đến đảo Titop. Toàn bộ khách được phỏng vấn đã đến ít nhất một trong hai địa điểm trên. Hỏi có bao nhiêu khách du lịch vừa đến thăm động Thiên Cung vừa đến thăm đảo Titop ở vịnh Hạ Long?

Bài 7

Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

b) Nếu $\widehat{AMB} = 90^\circ$ thì M nằm trên đường tròn đường kính AB .

c) Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Cộng hòa Xã Hội chủ nghĩa Việt Nam.

Bài 8

Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

- ✓ A: “Đồ thị hàm số $y = x$ là một đường thẳng”.
- ✓ B: “Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua điểm $A(3;6)$ ”.

Bài 9

Cho tứ giác $ABCD$. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó với:

- a) P : “Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật”, Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành”;
- b) P : “Tứ giác $ABCD$ là hình thoi”, Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông”.

Bài 10

Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

- | | |
|---|--|
| $A: “\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x”;$ | $B: “\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2”;$ |
| $C: “\exists x \in \mathbb{Z}, 2x^2 + 3x - 2 = 0”;$ | $D: “\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < x”.$ |

Bài 11

Giải bóng đá vô địch thế giới World Cup 2018 được tổ chức ở Liên bang Nga gồm 32 đội. Sau vòng thi đấu bảng, ban tổ chức chọn ra 16 đội chia làm 8 cặp đấu loại trực tiếp. Sau vòng đấu loại trực tiếp đó, ban tổ chức tiếp tục chọn ra 8 đội chia làm 4 cặp đấu loại trực tiếp ở vòng tứ

kết. Gọi A là tập hợp 32 đội tham gia World Cup 2018, B là tập hợp 16 đội sau vòng thi đấu bảng, C là tập hợp 8 đội thi đấu vòng tứ kết.

- Sắp xếp các tập hợp A, B, C theo quan hệ " $\subset$ ".
- So sánh hai tập hợp $A \cap C$ và $B \cap C$.
- Tập hợp $A \setminus B$ gồm những đội bóng bị loại sau vòng đấu nào?

Bài 12

Cho hai tập hợp $A = [0; 3]$, $B = (2; +\infty)$. Xác định $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus B$.

Bài 13

Gọi M là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$, N là tập nghiệm của phương trình $(x + 1)(2x - 3) = 0$. Tìm $P = M \cap N$.

Bài 14

Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

- $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
- $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
- $C = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$.

**Bài 15**

a) Trong các tập sau đây, tập nào là tập con của tập nào?

$$A = \{1; 2; 3\}, B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}, C = (0; +\infty), D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 7x + 3 = 0\}.$$

b) Tìm tất cả các tập X thoả mãn bao hàm thức

$$\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Bài 16

Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^4 - 16)(x^2 - 1) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 9 \leq 0\}$. Tìm tập hợp X sao cho $X \subset B \setminus A$.

Bài 17

Cho tập $A = \{-1; 1; 5; 8\}$, $B = \text{"Gồm các ước số nguyên dương của 16"}$.

a) Viết tập A dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử. Viết tập B dưới dạng liệt kê các phần tử.

b) Xác định các phép toán $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

Bài 18

Cho các tập hợp $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 7\}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 9)(x^2 - 5x - 6) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số nguyên tố nhỏ hơn } 6\}$.

- Chứng minh rằng $A \subset E$ và $B \subset E$.
- Tìm $C_E A; C_E B; C_E (A \cup B)$.
- Chứng minh rằng: $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.

Bài 19

Xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap B \cap C$ và biểu diễn trên trục số các tập hợp tìm được biết:

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$, $C = (-\infty; 1)$.
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$, $C = (-\infty; 0)$.

Bài 20

Cho tập $A = [-1; 2)$, $B = (-3; 1)$ và $C = (1; 4]$.

- Viết tập A , B , C dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử và biểu diễn chúng trên trục số.
- Xác định các tập hợp $A \cap B$, $B \cup C$, $A \setminus B$.

**Bài 21**

Cho hai tập hợp $A = [0; 4)$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$. Hãy xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

Bài 22

a) Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ hoặc } 1 < x \leq 6\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$. Tìm $A \cap B$, $A \cup C$, $B \setminus C$ và biểu diễn cách lấy kết quả trên trục số.

b) Cho $A = (-\infty; -2)$, $B = [2m + 1; +\infty)$. Tìm m để $A \cup B = \mathbb{R}$.

Bài 23

a) Tìm m để $(1; m] \cap (2; +\infty) = \emptyset$.

b) Viết tập A gồm các phần tử x thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x \leq 3 \\ x + 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ dưới dạng tập số.

Bài 24

Cho tập hợp $A = \left[m - 1; \frac{m + 1}{2} \right]$ và $B = (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$. Tìm m để

a) $A \subset B$.

b) $A \cap B = \emptyset$.

**Bài 25**

Cho hai tập khác rỗng $A = (m - 1; 4]$, $B = (-2; 2m + 2)$, với $m \in \mathbb{R}$. Xác định m để

a) $A \cap B \neq \emptyset$.

b) $A \subset B$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Câu 1**

Câu nào sau đây không là mệnh đề?

A Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

B $3 < 1$.

C $4 - 5 = 1$.

D Bạn học giỏi quá!

Câu 2

Cho định lí: “Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau”. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích của chúng bằng nhau.

B Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để chúng có diện tích bằng nhau.

C Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện đủ để chúng bằng nhau.

D Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để diện tích của chúng bằng nhau.

Câu 3

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

☐ A $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > -1$.

☐ B $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$.

☐ C $\forall x \in \mathbb{R}, x > -1 \Rightarrow x^2 > 1$.

☐ D $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$.

Câu 4

Cho tập hợp $A = \{a; b; c\}$. Tập A có bao nhiêu tập con?

☐ A 4.

☐ B 6.

☐ C 8.

☐ D 10.

Câu 5

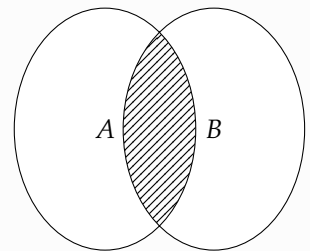
Cho các tập hợp A, B được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

☐ A $A \cap B$.

☐ B $A \setminus B$.

☐ C $A \cup B$.

☐ D $B \setminus A$.



Câu 6

Dùng kí hiệu khoảng, đoạn để viết lại tập hợp sau $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq 3 \right\}$.

☐ A $B = \left[-\frac{1}{2}; 3 \right)$.

☐ B $B = \left(-\frac{1}{2}; 3 \right]$.

☐ C $B = \left[-\frac{1}{2}; 3 \right]$.

☐ D $B = \left(-\frac{1}{2}; 3 \right)$.



Câu 7

Cho tập hợp $A = \{2; 5; 6; 7; 8\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Tập $A \setminus B$ có bao nhiêu phần tử?

- Ⓐ 8. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 12.

Câu 8

Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$. Tìm $A \setminus B$.

- Ⓐ $A \setminus B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$. Ⓑ $A \setminus B = [-1; 0)$.
Ⓒ $A \setminus B = (-1; 0)$. Ⓓ $A \setminus B = \{-1\}$.

Câu 9

Viết tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$ bằng cách liệt kê phần tử.

- Ⓐ $A = \left\{\frac{-1}{2}; 2; 3\right\}$. Ⓑ $A = \{2; 3\}$. Ⓒ $A = \{-1; 2\}$. Ⓓ $A = \{-1; 2; 3\}$.

Câu 10

Cho tập hợp $A = [-3; 5]$. Viết lại tập hợp A bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng.

- Ⓐ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$. Ⓑ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 5\}$.
Ⓒ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x \leq 5\}$. Ⓓ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$.



Câu 11

Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq n + 1$ ".

☐ A " $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n < n + 1$ ".

☐ B " $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n < n + 1$ ".

☐ C " $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n \leq n + 1$ ".

☐ D " $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \leq n + 1$ ".

Câu 12

Trong các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

1) Hải Phòng là một thành phố của Việt Nam.

2) Bạn có đi xem phim không?

3) $2^{10} - 1$ chia hết cho 11.

4) 2763 là hợp số.

5) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

☐ A 3.

☐ B 1.

☐ C 2.

☐ D 4.

Câu 13

Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3\}$ và $Y = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$. Tìm $C_Y X$.

☐ A $C_Y X = \{-1; 5\}$.

☐ B $C_Y X = \{0; 1; 2; 3\}$.

☐ C $C_Y X = \emptyset$.

☐ D $C_Y X = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$.

Câu 14

Cho tập hợp $A = (-\infty; 5]$, $B = [5; +\infty)$. Tìm $A \cup B$.

☐ A $A \cup B = (-\infty; 5)$.

☐ B $A \cup B = \{5\}$.

☐ C $A \cup B = [5; +\infty)$.

☐ D $A \cup B = \mathbb{R}$.

Câu 15

Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm số các tập con của A .

- Ⓐ 10. Ⓑ 12. Ⓒ 16. Ⓓ 8.

Câu 16

Trong các tập hợp dưới đây, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

- Ⓐ $N = \{m \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq m \leq 15\}$. Ⓑ $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 5\}$.
 Ⓒ $P = \{n \in \mathbb{N} \mid 3n + 9 = 6\}$. Ⓓ $Q = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 1\}$.

Câu 17

Trong mặt phẳng, cho A là tập hợp các tam giác đều, B là tập hợp các tam giác vuông, C là tập hợp các tam giác cân. Chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ $C \subset A$. Ⓑ $A \subset B$. Ⓒ $B \subset C$. Ⓓ $A \subset C$.

Câu 18

Tìm mệnh đề đúng.

- Ⓐ Điều kiện cần và đủ để một số tự nhiên chia hết cho 15 là số đó chia hết cho 5.
 Ⓑ Điều kiện cần để $a + b$ là một số hữu tỉ là a và b đều là số hữu tỉ.
 Ⓒ Điều kiện đủ để có ít nhất một trong hai số a, b là số dương là $a + b > 0$.
 Ⓓ Điều kiện cần và đủ để một tứ giác là hình chữ nhật là nó có hai đường chéo bằng nhau.



Câu 19

Cho tập $A = [m + 1; m + 2]$ và tập $B = [0; 1]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \cap B = \emptyset$.

☐ A $0 < m < 1$.

☐ B $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$.

☐ C $-2 < m < 0$.

☐ D $\begin{cases} m < -2 \\ m > 0 \end{cases}$.

Câu 20

Cho tập $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 < 0\}$. Tìm $A \cap B$.

☐ A $A \cap B = [-1; 3]$.

☐ B $A \cap B = [-1; 1)$.

☐ C $A \cap B = (-\infty; 1)$.

☐ D $A \cap B = (-1; 2)$.

Câu 21

Lớp 10 A có 45 học sinh. Trong đó có 12 học sinh có học lực giỏi, 30 học sinh có hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 học sinh vừa học lực giỏi vừa hạnh kiểm tốt. Học sinh được khen thưởng nếu được học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt. Tìm số học sinh không được khen thưởng.

☐ A 13.

☐ B 35.

☐ C 23.

☐ D 32.

Câu 22

Tìm mệnh đề sai.

☐ A $\forall n \in \mathbb{N}; n(n + 1)(n + 2)$ chia hết cho 6.

☐ B $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

☐ C $\exists n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ chia hết cho 3.

☐ D $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$.

Câu 23

Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 15k; k \in \mathbb{Z}\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5m; m \in \mathbb{Z}\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $B \subset A$.
 ☐ B $A \subset B$.
 ☐ C $A \not\subset B$.
 ☐ D $A = B$.

Câu 24

Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : "x^3 - 3x^2 + 2x = 0"$. Tìm tất cả các phần tử của x để $P(x)$ là một mệnh đề đúng?

- ☐ A $x = -1, x = -2$.
 ☐ B $x = -2, x = -3$.
☐ C $x = 0, x = 1, x = 2$.
 ☐ D $x = 4, x = -2, x = 3$.

Câu 25

Tìm mệnh đề **sai**.

- ☐ A $A \subset (A \cup B)$, với mọi tập A, B .
 ☐ B $A \setminus B \subset A$, với mọi tập A, B .
☐ C $(A \cap B) \subset B$, với mọi tập A, B .
 ☐ D $(A \cup B) \subset (A \cap B)$, với mọi tập A, B .

Câu 26

Tìm mệnh đề **sai**.

- ☐ A $A \setminus \emptyset = \emptyset$, với mọi tập A .
 ☐ B $A \cup \emptyset = A$, với mọi tập A .
☐ C $A \cap \emptyset = \emptyset$, với mọi tập A .
 ☐ D $A \cap A = A$, với mọi tập A .



.....



Chương

2

BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1.1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (ax + by \geq c, ax + by < c, ax + by > c) \quad (2.1)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho; a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

Ví dụ 1

Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $3x + 4y < 5$;

b) $3x^2 + 4y < 5$.

Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ✓ Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \leq c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \leq c$ đúng.
- ✓ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm.

Ví dụ 2

Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - 3y \leq 6$. Cặp số nào sau đây là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên?

a) $(x; y) = (1; -1)$;

b) $(x; y) = (2; -2)$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ

Định nghĩa 1.2.

- ✔ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.
- ✔ Người ta chứng minh được rằng đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$ chia mặt phẳng tọa độ Oxy thành hai nửa mặt phẳng bờ d .
 - Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) gồm các điểm có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn $ax + by > c$;
 - Nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ d) gồm các điểm có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn $ax + by < c$.
 - Bờ d gồm các điểm có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn $ax + by = c$.

Ví dụ 3

Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x - y \geq 3$ trên mặt phẳng tọa độ.

- ⚠
- ✔ Nếu $c \neq 0$, ta thường chọn M_0 chính là gốc tọa độ.
 - ✔ Nếu $c = 0$, ta thường chọn M_0 có tọa độ $(1; 0)$ hoặc $(0; 1)$.

Ví dụ 4

Nhân ngày Nhà giáo Việt Nam 20/11, Công viên nước Đầm Sen và Công đoàn ngành giáo dục Thành phố Hồ Chí Minh tổ chức hội thi đua thuyền rồng dành cho giáo viên của tất cả các trường THPT trên địa bàn và được tổ chức tại Đầm Sen. Vé vào cổng được bán ra cho giáo viên và học sinh có hai loại:

- ✔ Loại 1 (dành cho học sinh): 20 000 đồng/vé;
- ✔ Loại 2 (dành cho giáo viên): 30 000 đồng/vé.

Công ty công viên nước Đầm Sen tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được khi vào cổng này phải đạt tối thiểu 30 triệu đồng.

Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì công viên nước Đầm Sen phải bù lỗ?

Ví dụ 5

Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3y \leq 0$ trên mặt phẳng tọa độ.

⚠ Miền tam giác gồm các điểm bên trong và các điểm trên ba cạnh của tam giác.

- ⚠
- ✔ Nếu bán được 1000 vé loại 1 và 500 vé loại 2 thì công viên nước Đầm Sen có lãi.
 - ✔ Nếu bán được 750 vé loại 1 và 500 vé loại 2 thì công viên nước Đầm Sen hoà vốn.
 - ✔ Nếu bán được 500 vé loại 1 và 500 vé loại 2 thì công viên nước Đầm Sen phải bù lỗ.

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1 Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax + by \geq c$).

- ✔ **Bước 1.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.
- ✔ **Bước 2.** Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ .
- ✔ **Bước 3.** Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c .
- ✔ **Bước 4.** Kết luận
 - Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leq c$.
 - Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leq c$.

⚠ **Chú ý:** Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 < c$.

Ví dụ 1

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$.

**Ví dụ 2**

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 3$.

Ví dụ 3

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $-3x + y + 2 \leq 0$.

Ví dụ 4

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình

$$(1 + \sqrt{3})x - (1 - \sqrt{3})y \geq 2.$$

Dạng 2 Áp dụng vào bài toán thực tiễn

- ✔ Chọn các ẩn và đặt điều kiện cho các ẩn.
- ✔ Biểu thị các đại lượng chưa biết, cần tính toán theo các đại lượng đã biết.
- ✔ Thiết lập bất phương trình theo điều kiện ràng buộc của bài toán.
- ✔ Tìm miền nghiệm của bất phương trình nhận được.
- ✔ Từ miền nghiệm rút ra kết luận theo yêu cầu đề bài.

Ví dụ 1

Bác An trồng hai loại hoa gồm hoa hồng và hoa ly để bán vào dịp Tết Nguyên đán. Hoa hồng có giá 80 000 đồng/chậu, hoa ly có giá 120 000 đồng/chậu. Bác An tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền bán hoa thu được phải đạt tối thiểu 30 triệu đồng. Hỏi số lượng chậu hoa bán được trong những trường hợp nào thì bác An không phải bù lỗ?

.....

.....

.....

.....

.....



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y < 3$?

- a) $(0; -1)$. b) $(2; 1)$. c) $(3; 1)$.

Bài 2

Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau

- a) $x + 2y < 3$. c) $y \geq -2x + 4$.
b) $3x - 4y \geq -3$. d) $y < 1 - 2x$.

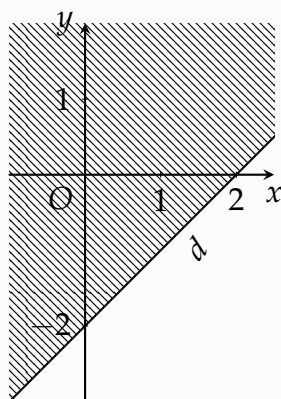
Bài 3

Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60 m^2 . Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5 \text{ m}^2$, một chiếc bàn là $1,2 \text{ m}^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

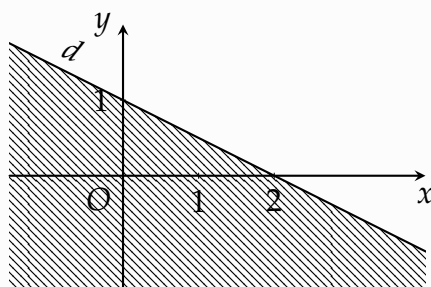
- a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 12 m^2 .
b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Bài 4

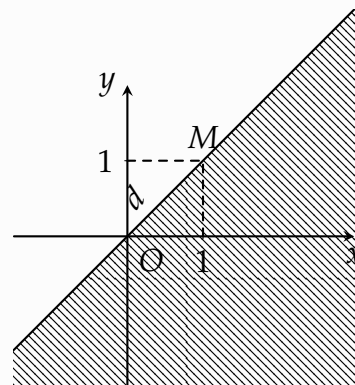
Phần không gạch (không kể d) ở mỗi Hình a , Hình b , Hình c là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình a



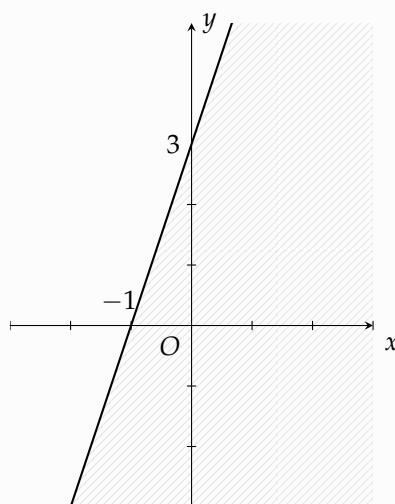
Hình b



Hình c

Bài 5

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , phần nửa mặt phẳng tô đậm (kể cả bờ) trong hình vẽ dưới đây là biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình nào?



a) $x - 3y \geq 3$.

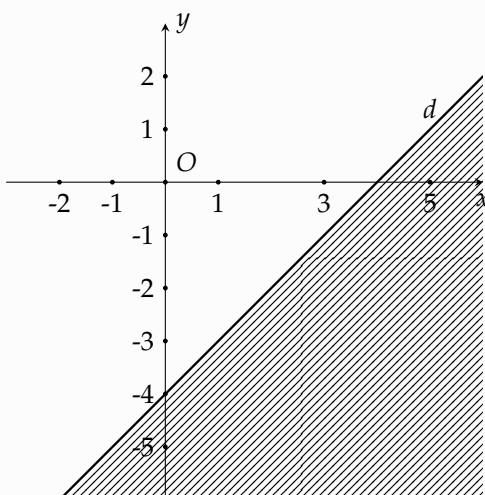
b) $3x - y \geq 3$.

c) $3x - y \geq -3$.

d) $3x - y \leq -3$.

Bài 6

Hãy chọn bất phương trình mà miền nghiệm của nó là nửa mặt phẳng không bị gạch, có bờ là đường thẳng d như hình dưới đây



a) $x - y \geq 4$.

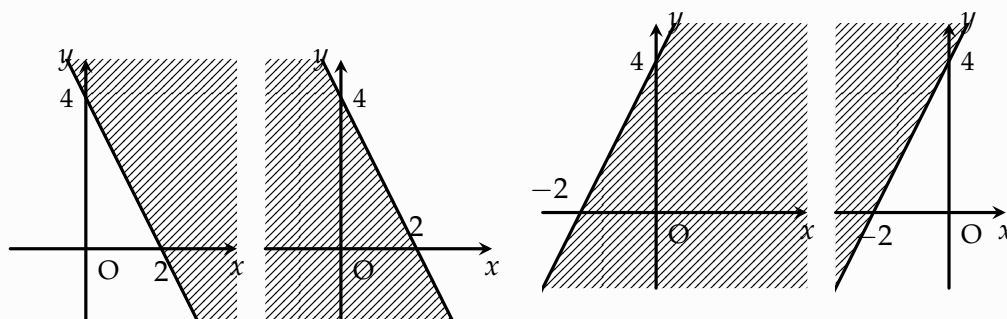
b) $x - y \leq 4$.

c) $x - y < 4$.

d) $x - y > 4$.

Bài 7

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $2x + y - 4 \geq 0$ là **miền gạch chéo (tính cả bờ)** nào sau đây?



Bài 8

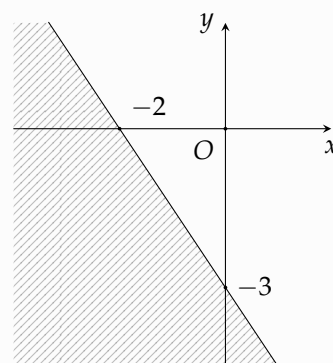
Miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây được biểu diễn bởi nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình vẽ? (kể cả bờ là đường thẳng)

a) $3x + 2y + 6 \geq 0$.

c) $2x + y + 6 \geq 0$.

b) $3x - 2y + 6 \leq 0$.

d) $3x + 2y + 6 \leq 0$.



Bài 9

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + \frac{3}{2}y \geq 1 - x + \frac{1}{2}y$.

Bài 10

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-2017x - 2018y \leq 2016y.$$

**Bài 11**

Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g prô-tê-in, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g prô-tê-in. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g prô-tê-in. (Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhnien.vn>) Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng prô-tê-in cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Bài 12

Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị prô-tê-in trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị prô-tê-in. Mỗi kg thịt heo chứa 500 đơn vị prô-tê-in. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt heo mà gia đình mua trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng prô-tê-in cần mua cho gia đình trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Bài 13

Một công ty trách nhiệm hữu hạn cần thuê xe chở 140 người. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó loại xe A có 10 chiếc, loại xe B có 10 chiếc. Biết xe A chở tối đa 20 người, xe B chở tối đa 10 người. Gọi x, y lần lượt là số xe hai loại A, B cần thuê. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn số xe cần thuê cho công ty và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Bài 14

Giá sách của Hoa có thể chứa được khối lượng sách tối đa là 4 kg. Hoa xếp cả hai loại sách (loại 1 và loại 2) vào giá. Sách loại 1 có khối lượng 100 gam mỗi cuốn và sách loại 2 có khối lượng 200 gam mỗi cuốn. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho khối lượng của x cuốn loại 1 và y cuốn loại 2 có thể được xếp lên giá sách.

Bài 15

Công ty viễn thông Mobifone tính phí 1 nghìn đồng mỗi phút gọi nội mạng, 2 nghìn đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Mỗi tháng Minh gọi điện thoại hết từ 200 đến 300 nghìn đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn mô tả cho số tiền điện thoại trả cho (x) phút gọi nội mạng và (y) phút gọi ngoại mạng trong một tháng.

Bài 16

Bạn An giải 10 bài Toán trong 20 phút thì đúng được 80% số bài Toán, giải 12 bài Lý trong 15 phút thì đúng được $\frac{3}{4}$ số bài Lý. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho thời gian giải x bài Toán đúng và y bài Lý đúng, biết thời gian giải ít hơn 150 phút.

Bài 17

Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 100 m^2 . Diện tích để kê một chiếc ghế là 1 m^2 , một chiếc bàn là 2 m^2 và diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 24 m^2 . Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê, hãy viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế và chỉ ra hai nghiệm của bất phương trình.

**Bài 18**

Một rạp chiếu phim 2D phục vụ khán giả một bộ phim mới với 2 loại vé khác nhau. Vé loại 1 (từ thứ 2 đến thứ 5) giá 80000 đồng/vé, vé loại 2 (từ thứ 6 đến chủ nhật và ngày lễ) giá 100000 đồng/vé. Để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 150 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

Bài 19

- a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} < 1$.
b) Tìm điểm A thuộc miền nghiệm của bất phương trình trên. Biết rằng điểm A là giao điểm của parabol (P) có dạng $y = x^2 - 5x + 4$ và trục hoành.

Bài 20

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - y > 1 - 3x$.

Bài 21

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x - y \leq 0$.

Bài 22

Cho bất phương trình $2x + y - 1 \leq 0$.

- Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Tìm tất cả giá trị tham số m để điểm $M(m, 1)$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình đã và biểu diễn tập hợp M tìm được trong cùng hệ trục tọa độ Oxy ở câu a).

Bài 23

- Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + y - 3 < 0$.
- Tìm điều kiện của m và n để mọi điểm thuộc đường thẳng (d') : $(m^2 - 2)x - y + m + n = 0$ đều là nghiệm của bất phương trình trên.

Bài 24

Cho bất phương trình $x - 2y + 4m > 0$.

- Tùy theo giá trị tham số m , hãy biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong hệ trục tọa độ Oxy .
- Gọi A, B lần lượt là giao của đường thẳng $x - 2y + 4m = 0$ với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa điểm $C(2; 1)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Bất phương trình $3x - 2(y - x + 1) > 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

- Ⓐ $x - 2y - 2 > 0$. Ⓑ $5x - 2y - 2 > 0$. Ⓒ $5x - 2y - 1 > 0$. Ⓓ $4x - 2y - 2 > 0$.

**Câu 2**

Cho bất phương trình $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- ☐ A Điểm $O(0; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- ☐ B Điểm $B(-2; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- ☐ C Điểm $C(-4; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- ☐ D Điểm $D(-5; 3)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

Câu 3

Cho bất phương trình $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

- ☐ A Điểm $A(-3; -4)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- ☐ B Điểm $B(-2; -5)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- ☐ C Điểm $C(-1; -6)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- ☐ D Điểm $O(0; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

Câu 4

Cặp số $(1; -1)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- ☐ A $x + y - 3 > 0$.
- ☐ B $-x - y < 0$.
- ☐ C $x + 3y + 1 < 0$.
- ☐ D $-x - 3y - 1 < 0$.

Câu 5

Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $-2(x - y) + y > 3$?

- Ⓐ (4; -4). Ⓑ (2; 1). Ⓒ (-1; -2). Ⓓ (-4; 4).

Câu 6

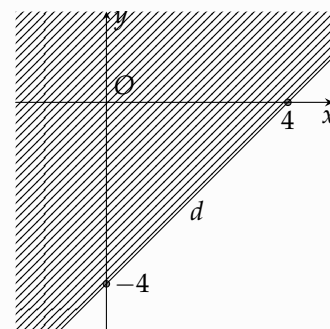
Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $5x - 2(y - 1) \leq 0$?

- Ⓐ (0; 1). Ⓑ (1; 3). Ⓒ (-1; 1). Ⓓ (-1; 0).

Câu 7

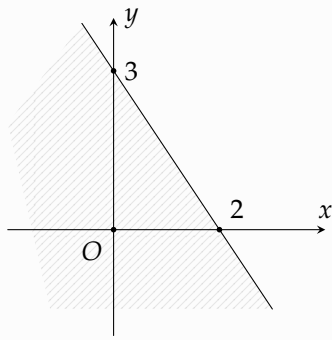
Hãy chọn bất phương trình mà miền nghiệm của nó là nửa mặt phẳng không bị gạch có bờ là đường thẳng d như hình bên.

- Ⓐ $x - y > 4$. Ⓑ $x - y < 4$.
Ⓒ $x - y \leq 4$. Ⓓ $x - y \geq 4$.

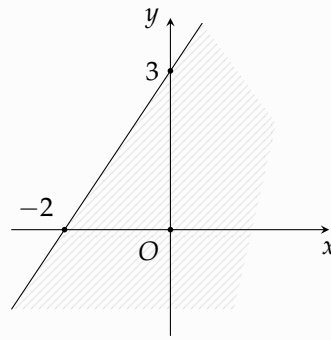


Câu 8

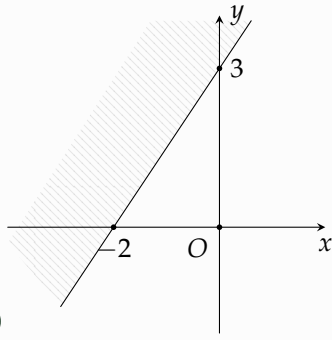
Miền nghiệm của bất phương trình $3x + 2y > 6$ là



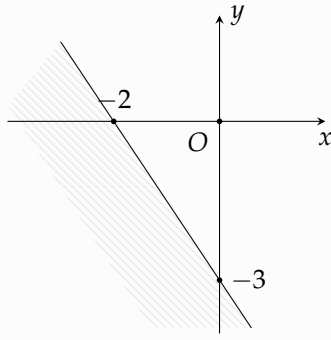
(A)



(B)



(C)



(D)

Câu 9

Trong các bất phương trình sau đây, đâu là bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- (A) $2x^2 - 3x \geq 1$. (B) $2x + y \leq 1$. (C) $3x + 1 \leq 0$. (D) $3x + y = 1$.

Câu 10

Cho bất phương trình $2x + 3y - 6 \leq 0$ (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A) Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.
 (B) Bất phương trình (1) vô nghiệm.
 (C) Bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.
 (D) Bất phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Câu 11

Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình $x - 4y + 1 \geq 0$?

- Ⓐ $(-1; 0)$. Ⓑ $(-2; -1)$. Ⓒ $(-1; 3)$. Ⓓ $(0; 0)$.

Câu 12

Miền nghiệm của bất phương trình $4(x - 1) + 5(y - 3) > 2x - 9$ là nửa mặt phẳng chứa điểm nào?

- Ⓐ $(0; 0)$. Ⓑ $(1; 1)$. Ⓒ $(-1; 1)$. Ⓓ $(2; 5)$.

Câu 13

Một bác nông dân cần trồng lúa và khoai trên diện tích đất 6 ha, với lượng phân bón dự trữ là 100 kg và sử dụng tối đa 120 ngày công. Để trồng 1 ha lúa cần sử dụng 20 kg phân bón, 10 ngày công với lợi nhuận là 30 triệu đồng; để trồng 1 ha khoai cần sử dụng 10 kg phân bón, 30 ngày công với lợi nhuận là 60 triệu đồng. Để đạt lợi nhuận cao nhất, bác nông dân đã trồng x (ha) lúa và y (ha) khoai. Giá trị của x là

- Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 14

Một người thợ mộc tốn 6 giờ để làm một cái bàn và 4 giờ để làm một cái ghế. Gọi x, y lần lượt là số bàn và số ghế mà người thợ mộc sản xuất trong một tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y biết trong một tuần người thợ mộc có thể làm tối đa 50 giờ.

- Ⓐ $3x + 2y \leq 25$. Ⓑ $3x + 2y > 25$. Ⓒ $3x + 2y \geq 25$. Ⓓ $3x + 2y < 25$.

**Câu 15**

Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60 m^2 . Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,6 \text{ m}^2$, một chiếc bàn là $1,3 \text{ m}^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 10 m^2 .

- Ⓐ $0,6x + 1,3y \geq 50$. Ⓑ $0,6x + 1,3y \leq 50$. Ⓒ $1,3x + 0,6y \leq 50$. Ⓓ $1,3x + 0,6y \geq 50$.

Câu 16

Bạn Nam đang sưu tầm các đồng tiền vàng và bạc để vào một các túi, trọng lượng tối đa mà túi chứa được là 20 gam. Mỗi đồng xu vàng nặng khoảng 14 gam, mỗi đồng xu bạc nặng khoảng 7 gam. Bất phương trình nào sau đây mô tả số đồng tiền vàng (x) và số đồng tiền bạc (y) có thể được chứa trong túi?

- Ⓐ $7x + 14y \leq 20$. Ⓑ $7x + 14y > 20$. Ⓒ $14x + 7y \leq 20$. Ⓓ $14x + 7y > 20$.

Câu 17

Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g protein và 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người đàn ông cần tối thiểu 52 g protein. Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người đàn ông nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người đàn ông trong một ngày.

- Ⓐ $26x + 20y \leq 52$. Ⓑ $26x + 20y < 52$. Ⓒ $13x + 10y \geq 26$. Ⓓ $13x + 10y > 26$.

Câu 18

Công ty viễn thông Viettel có gói cước Hi School tính phí là 1190 đồng mỗi phút gọi nội mạng và 1390 đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Một bạn học sinh đăng kí gói cước trên và sử dụng x phút gọi nội mạng, y phút gọi ngoại mạng trong một tháng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để mô tả số tiền bạn đó phải trả trong một tháng ít hơn 100 nghìn đồng.

☐ A $119x + 139y \geq 10000$.

☐ B $139x + 119y < 10000$.

☐ C $119x + 139y \leq 10000$.

☐ D $119x + 139y < 10000$.

Câu 19

Nhân ngày Quốc tế Thiếu nhi 1 – 6, một rạp chiếu phim phục vụ các khán giả một bộ phim hoạt hình. Vé được bán ra có hai loại: loại 1 dành cho trẻ từ 6 – 13 tuổi, giá vé là 50000 đồng/vé và loại 2 dành cho người trên 13 tuổi, giá vé là 80000 đồng/vé. Gọi x là số vé loại 1 và y là số vé loại 2 bán được. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn điều kiện sao cho số tiền bán vé thu được tối thiểu 10 triệu đồng.

☐ A $5x + 8y \geq 100$.

☐ B $5x + 8y > 1000$.

☐ C $8x + 5y \geq 1000$.

☐ D $5x + 8y \geq 1000$.

Câu 20

Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Gọi x, y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa trong mỗi tuần. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x và y sao cho Nam kiếm thêm tiền mỗi tuần được ít nhất là 900 nghìn đồng.

☐ A $3x + 2y \leq 180$.

☐ B $3x + 2y > 180$.

☐ C $3x + 2y \geq 180$.

☐ D $3x + 2y < 180$.

Câu 21

Anh A muốn thuê một chiếc ô tô (có người lái) trong một tuần. Giá thuê xe như sau: từ thứ hai đến thứ sáu phí cố định là 900 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 10 nghìn đồng/km còn thứ bảy và chủ nhật thì phí cố định là 1200 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 15 nghìn đồng/km. Gọi x, y lần lượt là số km mà anh A đi trong các ngày từ thứ hai đến thứ sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền anh A phải trả không quá 20 triệu đồng.

☐ A $10x + 15y \leq 20000$.

☐ B $2x + 3y \geq 2720$.

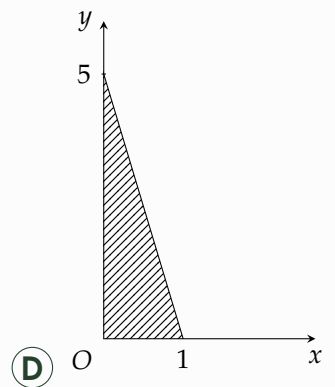
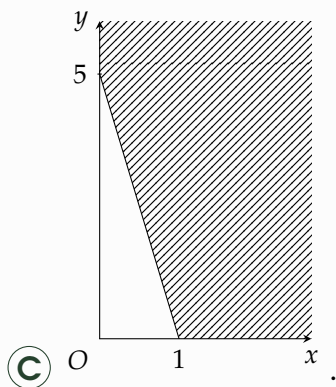
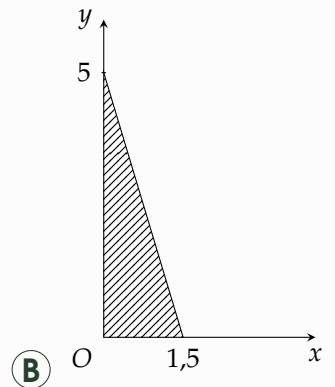
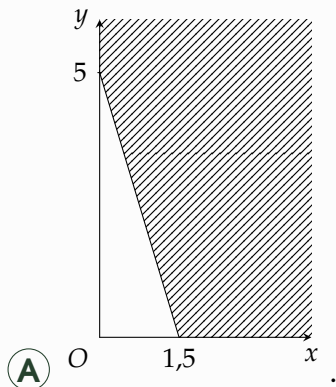
☐ C $10x + 15y \geq 20000$.

☐ D $2x + 3y \leq 2720$.



Câu 22

Một gia đình cần x kg thịt bò và y kg thịt lợn trong một ngày, giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 60 nghìn đồng. Biểu diễn đồ thị mô tả chi phí gia đình đó mua thịt bò và thịt lợn mỗi ngày để số tiền bỏ ra trong một ngày không quá 300 nghìn đồng.



Câu 23

Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 > 0$?

- (A) (2; 1). (B) (0; 0). (C) (1; 0). (D) (0; 1).



Câu 24

Điểm $A(-1; 3)$ thuộc miền của bất phương trình

☐ A $x + 3y < 0$.

☐ B $3x - y > 0$.

☐ C $-3x + 2y - 4 > 0$.

☐ D $2x - y + 4 > 0$.

Câu 25

Tìm tất cả các số thực a sao cho miền nghiệm của bất phương trình $x \leq a$ chứa điểm $M(-1; 0)$.

☐ A $a > -1$.

☐ B $a \geq -1$.

☐ C $a > 0$.

☐ D $a \geq 0$.

Câu 26

Cho đường thẳng $d: 7x - 9y + 2 = 0$ chia mặt phẳng tọa độ làm hai nửa mặt phẳng, trong đó miền nghiệm của bất phương trình $7x - 9y + 2 > 0$ là nửa mặt phẳng

☐ A có bờ là đường thẳng d và không chứa điểm $O(0; 0)$.

☐ B không có bờ d và chứa điểm $O(0; 0)$.

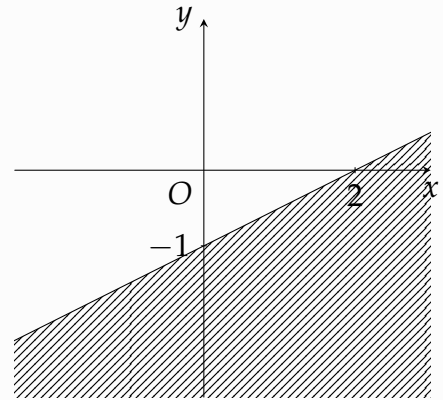
☐ C có bờ là đường thẳng d và chứa điểm $O(0; 0)$.

☐ D không chứa bờ d và không chứa điểm $O(0; 0)$.

Câu 27

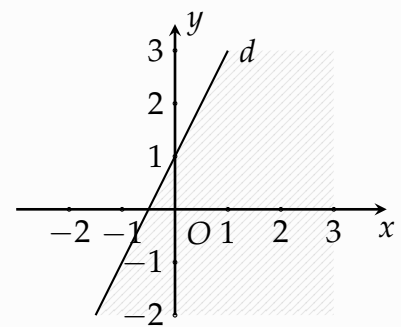
Phần gạch chéo trong hình vẽ dưới đây (không bao gồm đường thẳng d) là miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn nào sau đây?

- ☐ A $2x - y < 0$. ☐ B $x - 2y < 2$.
☐ C $2y - x < -2$. ☐ D $2x - y > 1$.

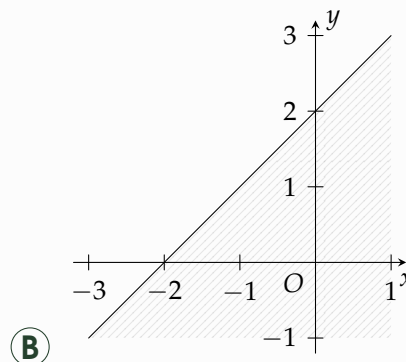
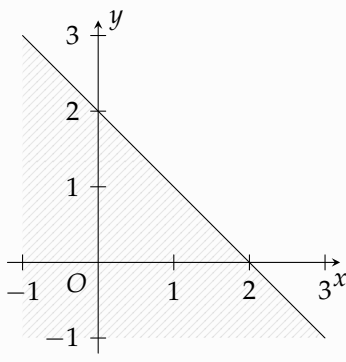

Câu 28

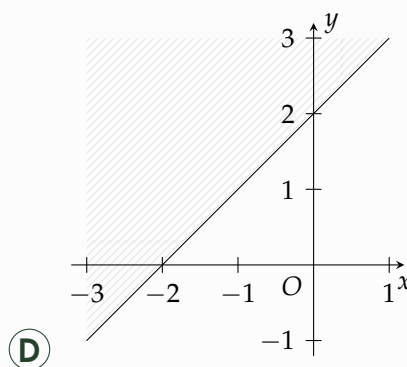
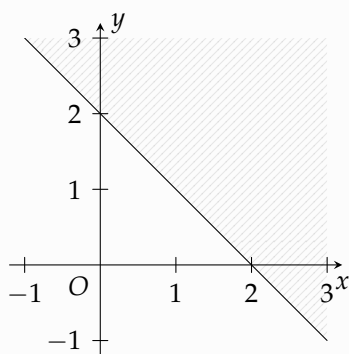
Bất phương trình nào sau đây có miền nghiệm (phần không gạch sọc) như hình vẽ bên?

- ☐ A $2x - y + 1 < 0$. ☐ B $x - y + 1 < 0$.
☐ C $2x - 3y + 1 < 0$. ☐ D $2x - y - 1 < 0$.


Câu 29

Miền nghiệm của bất phương trình $x + y \leq 2$ là phần không bị gạch sọc của hình vẽ nào trong các hình sau?





Câu 30

Cho bất phương trình $2x + 3y - 2 < 0$. Miền nghiệm của bất phương trình là

- ☐ A nửa mặt phẳng chứa điểm O có bờ là đường thẳng $2x + 3y - 2 = 0$ (không kể bờ).
- ☐ B nửa mặt phẳng chứa điểm O có bờ là đường thẳng $2x + 3y - 2 = 0$ (kể cả bờ).
- ☐ C nửa mặt phẳng không chứa điểm O có bờ là đường thẳng $2x + 3y - 2 = 0$ (không kể bờ).
- ☐ D nửa mặt phẳng không chứa điểm O có bờ là đường thẳng $2x + 3y - 2 = 0$ (kể cả bờ).

Câu 31

Miền nghiệm của bất phương trình $x - 2y + 5 < 0$ là

- ☐ A Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).
- ☐ B Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).
- ☐ C Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (bao gồm đường thẳng).
- ☐ D Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).



Câu 32

Cặp điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $3(x + \sqrt{2}y - \sqrt{3}) > 8(\sqrt{3}x + 2y - \sqrt{2})$?

- ☐ A $A(2; -2)$ và $B(2; 2)$.
 ☐ B $C(-\sqrt{3}; -\sqrt{2})$ và $D(\sqrt{2}; -1 - \sqrt{5})$.
 ☐ C $E(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ và $F(\sqrt{5}; 1)$.
 ☐ D $G(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{3})$ và $H(1; 4)$.

Câu 33

Giao miền nghiệm của ba bất phương trình $y \geq 0; 3x - 2y \geq -6; 3x + 4y \leq 12$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng

- ☐ A 18.
 ☐ B 9.
 ☐ C 6.
 ☐ D 12.

Câu 34

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $3x + my - 7 \geq 0$ có miền nghiệm chứa điểm $A(\sqrt{2}; 1)$.

- ☐ A $m \in [3\sqrt{2} - 7; +\infty)$.
 ☐ B $m \in (-\infty; 3\sqrt{2} - 7)$.
 ☐ C $m \in (-\infty; 7 - 3\sqrt{3})$.
 ☐ D $m \in [7 - 3\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 35

Cho bất phương trình $mx + \sqrt{2}y - 1 < 0$ với m là tham số thực. Điểm nào dưới đây luôn luôn **không** thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho?

- ☐ A $E(m; m^2)$.
 ☐ B $F(2m^2; m)$.
 ☐ C $G(0; 1 + m^2)$.
 ☐ D $H(0; -1 - m^2)$.

**Câu 36**

Với giá trị nào của m thì điểm $A(1 - m; m)$ **không thuộc** miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3(y - x) > 4$.

Ⓐ $0 \leq m \leq 1$.

Ⓑ $m < \frac{1}{8}$.

Ⓒ $\frac{1}{8} \leq m \leq 1$.

Ⓓ $m \geq \frac{1}{8}$.

§2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 2.1.

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

Ví dụ 1

Cho hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 4x + 5y + 20 > 0 \\ y \leq 0 \\ x - 3y - 18 < 0. \end{cases}$$

- Hệ trên có phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?
- Cặp số $(x; y) = (0; 0)$ có là một nghiệm của hệ bất phương trình trên không? Tìm thêm 3 nghiệm khác của hệ bất phương trình trên.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ

Biểu diễn miền nghiệm của hệ

- ✓ Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.
- ✓ Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.
- ✓ Cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ.
 - + Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
 - + Xác định miền không bị gạch bỏ - đó là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

$$\begin{cases} x - y + 1 < 0 & (1) \\ 2x - y + 4 > 0 & (2) \\ x + y - 4 < 0. & (3) \end{cases}$$

3. Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Ứng dụng bài toán tối ưu

Giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x; y) = ax + by$ với $(x; y)$ là tọa độ các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_n$ (tức là các điểm nằm bên trong hay nằm trên các cạnh của đa giác), đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác đó.

Ví dụ 3

Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1 Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- ✔ Viết các bất phương trình trong hệ dưới dạng phương trình đường thẳng (thay dấu lớn, bé bởi dấu bằng).
- ✔ Vẽ các đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ.
- ✔ Xác định một điểm M thỏa các bất phương trình trong hệ.
- ✔ Lần lượt tô đậm các nửa mặt phẳng không chứa M và có bờ là các đường thẳng đã vẽ. Ta



được miền nghiệm của hệ.

Ví dụ 1

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 2. \end{cases}$$

Ví dụ 2

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x - y > 1 \\ y > -1. \end{cases}$$

Ví dụ 3

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + 5y > 2 \\ x - 3y \geq 1 \\ x + y < 3. \end{cases}$$

Ví dụ 4

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \leq 3. \end{cases}$$

Ví dụ 5

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Dạng 2

Ứng dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn giải bài toán tối ưu

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x; y) = ax + by$ với $(x; y)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường thu được là một đa giác.

Bước 2. Tính giá trị T tương ứng với $(x; y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.

Bước 3. Kết luận:

- ✔ Giá trị lớn nhất của T là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
- ✔ Giá trị nhỏ nhất của T là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.



Ta thừa nhận kết quả: Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức

$T(x; y) = ax + by$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác.

Ví dụ 1

Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất?

Ví dụ 2

Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Ví dụ 3

Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ, 5 kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ông. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4 kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh ông cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15 kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ông nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi cần phải gói mấy cái bánh mỗi loại để được nhiều điểm thưởng nhất?

Ví dụ 4

Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và

400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất?

Ví dụ 5

Một công ty cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B , trong đó loại xe A có 10 chiếc và loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất?



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2x + 3y < 1 \end{cases}$

☞ a, d

Bài 2

Kiểm tra xem mỗi cặp số $(x; y)$ đã cho có phải là nghiệm của hệ bất phương trình tương ứng không.

☞ a/ $(0; 2)$, b/ $(-1; -3)$

a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq -6 \\ x + 4y > 4 \end{cases} \quad (0; 2), (1; 0);$

b) $\begin{cases} 4x + y \leq -3 \\ -3x + 5y \geq -12 \end{cases} \quad (-1; -3), (0; -3).$

Bài 3

Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ?

a) $\begin{cases} y - x < -1 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y > 5 \\ x - y < 0 \end{cases}$

Bài 4

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x + 2y < -4 \\ y \geq x + 5; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 4x - 2y > 8 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

Bài 5

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x - y \geq 3 \\ x \leq 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + y \leq 0 \\ |x| \leq 3 \end{cases} \end{array}$$

Bài 6

Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kilogram thịt bò và 1,1 kilogram thịt lợn; giá tiền 1 kilogram thịt bò là 250 nghìn đồng; 1 kilogram thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilogram thịt bò và y kilogram thịt lợn.

- Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.
- Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilogram thịt bò và y kilogram thịt lợn. Hãy biểu diễn F theo x và y .
- Tìm số kilogram thịt mỗi loại mà gia đình cần mua để chi phí là ít nhất.

 b) $F = 250x + 160y$ (nghìn đồng), c) 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn

Bài 7

Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ nhất thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng và một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

📌 $x = 0, y = 240$.

Bài 8

Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1300 mg. Trong 1 lạng đậu nành có 165 mg canxi, 1 lạng thịt có 15 mg canxi.

(Nguồn: <https://hongngochospital.vn>)

Gọi x, y lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày.

- Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.
- Chỉ ra một nghiệm $(x_0; y_0)$ với $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ của bất phương trình đó.

📌 a) $165x + 15y \geq 1300$, b) $C(5; 50)$

Bài 9

Người trưởng thành trung bình cần tối thiểu 0,8 g protein cho mỗi kg trọng lượng cơ thể mỗi ngày (lời khuyên từ WHO). Trong 100 g cá ngừ có 26 g protein, 100 g tôm có 18 g protein.

(Nguồn: <https://ifitness.vn>)

Gọi x, y lần lượt là số lạng cá ngừ và số lạng tôm mà một người trưởng thành nặng 75 kg ăn trong một ngày. Biết rằng người này chỉ mua nhiều nhất 1,5 kg cá ngừ và 4,5 kg tôm. Giá tiền một kg cá ngừ là 250 nghìn đồng, một kg tôm là 180 nghìn đồng.

- Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày của người đó.
- Người đó mua bao nhiêu gam cá ngừ và tôm để số tiền phải trả ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein cần thiết?

 b) 1,5 lạng cá ngừ và $\approx 1,16$ lạng tôm

Bài 10

Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00.

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20000 đồng
14h00 – 22h00	22000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 – 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 – 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 – 22h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 – 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

 8nv ca I, 24nv ca 2.

Bài 11

Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là 300 ca-lo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 ca-lo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 ca-lo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

- Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.
- Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và



thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

Bài 12

Một xưởng mộc có hai thợ là Chiến và Thắng. Xưởng chuyên sản xuất bàn và ghế. Mỗi bàn bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi ghế bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một bàn thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Thắng phải làm việc trong 2 giờ. Để sản xuất được một ghế thì Chiến phải làm việc trong 1 giờ, Bình phải làm việc trong 4 giờ. Một người không thể làm được đồng thời bàn và ghế. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 120 giờ và Bình không thể làm việc quá 200 giờ. Tính số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng.

📌 23200000 đồng

Bài 13

Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

📌 phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút

Bài 14

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + 10y \leq 20 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

Bài 15

Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30000 đồng. Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Hỏi xưởng nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

 20 kg sản phẩm loại I và 40 kg sản phẩm loại II

Bài 16

Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0.6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1.5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

 5 chiếc MITSUBISHI và 4 chiếc FORD

Bài 17

Một công ty, trong một tháng cần sản xuất ít nhất 12 viên kim cương to và 9 viên kim cương nhỏ. Từ 1 tấn Cacbon loại 1 (giá 100 triệu đồng) có thể chiết xuất được 6 viên kim cương to và 3 viên kim cương nhỏ, từ 1 tấn Cacbon loại 2 (giá 40 triệu đồng) có thể chiết xuất được 2 viên kim cương to và 2 viên kim cương nhỏ. Mỗi viên kim cương to có giá 20 triệu đồng, mỗi viên kim cương nhỏ có giá 10 triệu đồng. Hỏi trong một tháng công ty này thu về được nhiều nhất là bao nhiêu tiền. Biết rằng mỗi tháng chỉ có thể sử dụng tối đa 4 tấn Cacbon mỗi loại.

🔍 nhiều nhất 280 triệu

Bài 18

Một cơ sở sản xuất dự định sản xuất ra hai loại sản phẩm A và B . Các sản phẩm này được chế tạo ra từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng đơn vị dự trữ của từng loại nguyên liệu và số lượng đơn vị từng loại nguyên liệu cần để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho tương ứng trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Nguyên liệu dự trữ mỗi tuần	Số đơn vị cần dùng cho một đơn vị sản phẩm	
		Sản phẩm A	Sản phẩm B
I	18	2	3
II	30	5	4
III	25	1	6

Mỗi đơn vị sản phẩm A lãi 300000 đồng, mỗi đơn vị sản phẩm B lãi 200000 đồng. Hãy cho biết với kế hoạch sản xuất như thế nào thì số tiền lãi thu được hàng tuần là lớn nhất.

🔍 33 sản phẩm A và 32 sản phẩm B

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 2 \geq 0 \\ 2x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

Ⓐ $M(0;1)$.

Ⓑ $N(-1;1)$.

Ⓒ $P(1;3)$.

Ⓓ $Q(-1;0)$.



Câu 2

Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

- (A) $O(0;0)$. (B) $M(1;0)$. (C) $N(0;-2)$. (D) $P(0;2)$.

Câu 3

Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} - \frac{3y}{2} \leq 2 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

- (A) $O(0;0)$. (B) $M(2;1)$. (C) $N(1;1)$. (D) $P(5;1)$.

Câu 4

Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

- (A) $O(0;0)$. (B) $M(1;2)$. (C) $N(2;1)$. (D) $P(8;4)$.

Câu 5

Điểm $M(0;-3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

- (A) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2x - y > 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$



Ⓒ $\begin{cases} 2x - y > -3 \\ 2x + 5y \geq 12x + 8 \end{cases}$

Ⓓ $\begin{cases} 2x - y \leq -3 \\ 2x + 5y \geq 12x + 8 \end{cases}$

Câu 6

Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

Ⓐ $O(0;0)$.

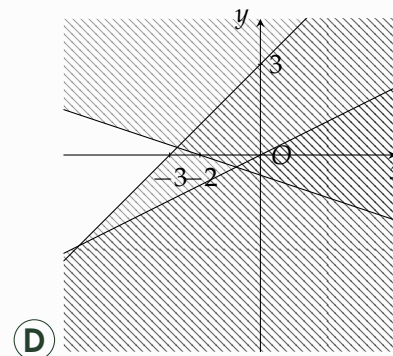
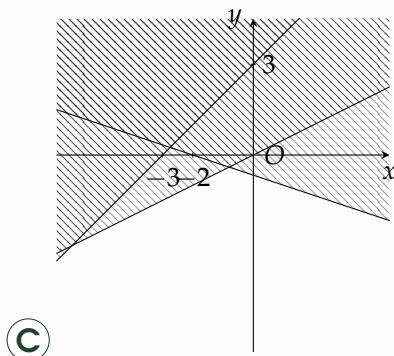
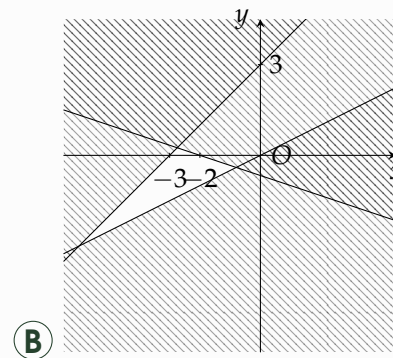
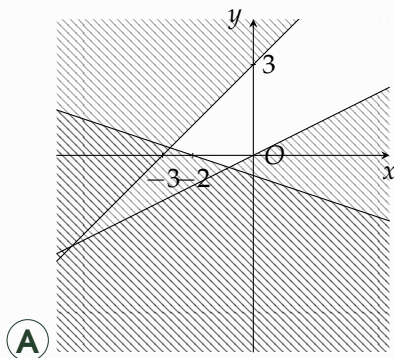
Ⓑ $M(1;1)$.

Ⓒ $N(-1;1)$.

Ⓓ $P(-1;-1)$.

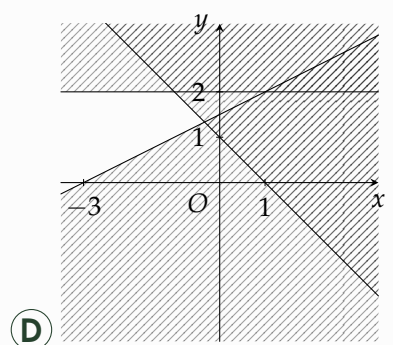
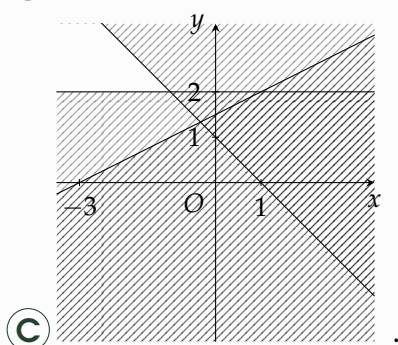
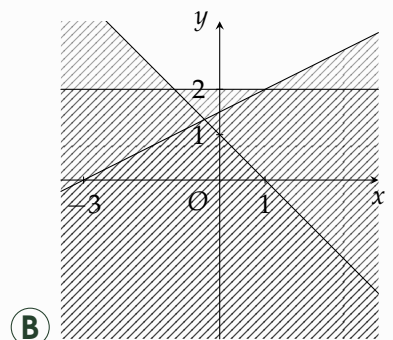
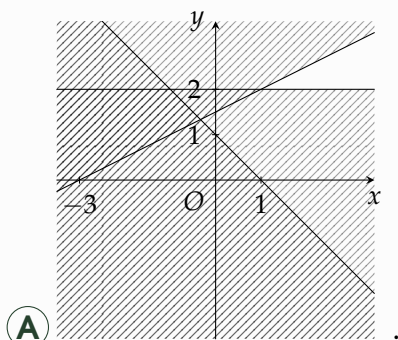
Câu 7

Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



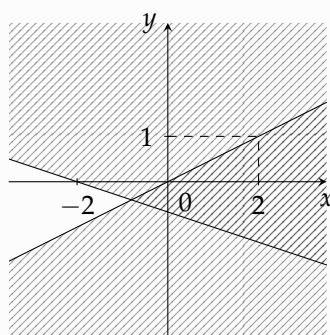
Câu 8

Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y \geq 2 \\ -x + 2y > 3 \end{cases}$$
 là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



Câu 9

Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây, biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?





Ⓐ $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \geq -2 \end{cases}$

Ⓑ $\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < -2 \end{cases}$

Ⓒ $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \leq -2 \end{cases}$

Ⓓ $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \end{cases}$

Câu 10

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là

Ⓐ $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

Ⓑ $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.

Ⓒ $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$.

Ⓓ $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

Câu 11

Giá trị nhỏ nhất của $F_{\max}$ của biểu thức $F(x; y) = 4x + 3y$ trên miền xác định bởi hệ

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$ là

Ⓐ $F_{\max} = 0$.

Ⓑ $F_{\max} = 18$.

Ⓒ $F_{\max} = 32$.

Ⓓ $F_{\max} = 28$.

Câu 12

Biểu thức $F(x; y) = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$ tại điểm M có tọa độ

là

Ⓐ $(4; 1)$.

Ⓑ $\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Ⓒ $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Ⓓ $(5; 0)$.

Câu 13

Cho x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x + 2y - 100 \leq 0 \\ 2x + y - 80 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P(x; y) = 40000x + 30000y$.

- Ⓐ $P_{\max} = 2000000$. Ⓑ $P_{\max} = 2400000$. Ⓒ $P_{\max} = 1800000$. Ⓓ $P_{\max} = 1600000$.

Câu 14

Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là

- Ⓐ $F_{\max} = 6$. Ⓑ $F_{\max} = 8$. Ⓒ $F_{\max} = 10$. Ⓓ $F_{\max} = 12$.

§3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

A BÀI TẬP

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y < 1 \\ 2x - y \geq 3 \end{cases}$ trên mặt phẳng tọa độ.

Bài 2

Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $\frac{x + y}{2} \geq \frac{2x - y + 1}{3}$ trên mặt phẳng tọa độ.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

☐ A $x + y > 3$.

☐ B $x^2 + y^2 \leq 4$.

☐ C $(x - y)(3x + y) \geq 1$.

☐ D $y^3 - 2 \leq 0$.

Câu 2

Cho bất phương trình $2x + y > 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A Bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

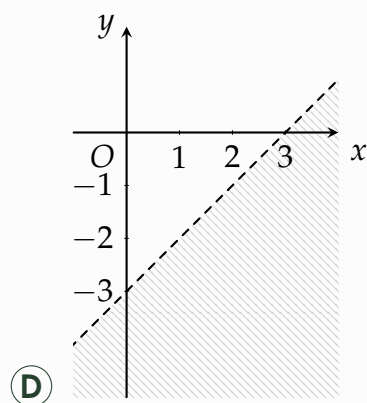
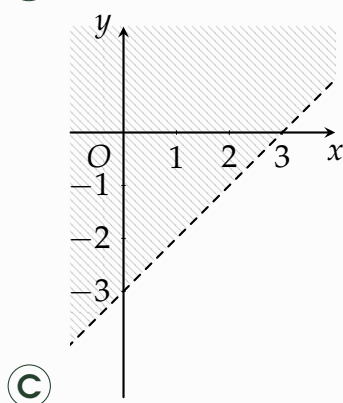
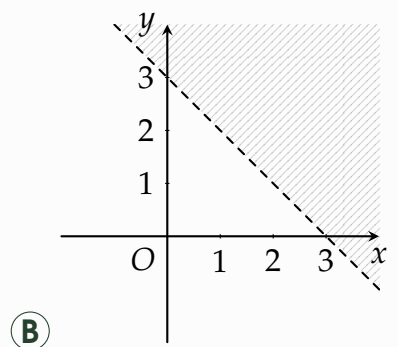
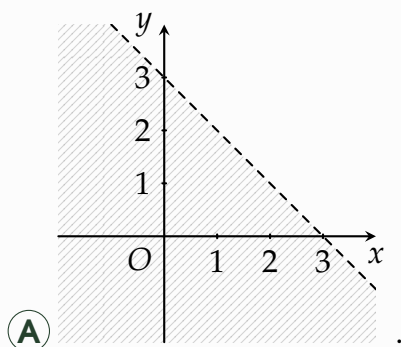
☐ B Bất phương trình đã cho vô nghiệm.



- ☐ C Bất phương trình đã cho có vô số nghiệm.
☐ D Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $[3; +\infty)$.

Câu 3

Hình nào sau đây biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x - y < 3$?



Câu 4

Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- ☐ A $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2y \geq 0 \end{cases}$
 ☐ B $\begin{cases} 3x + y^3 < 0 \\ x + y > 3 \end{cases}$
 ☐ C $\begin{cases} x + 2y < 0 \\ y^2 + 3 < 0 \end{cases}$
 ☐ D $\begin{cases} -x^3 + y < 4 \\ x + 2y < 1 \end{cases}$



Câu 5

Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y < -3 \\ 2y \geq -4 \end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ đã cho?

A (0;0).

B (-2;1).

C (3;-1).

D (-3;1).

B LUYỆN TẬP

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ y \leq 4 \\ x \leq 5 \\ x + y \geq -1 \end{cases}$ trên mặt phẳng tọa độ.

Từ đó tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x;y) = -x - y$ với $(x;y)$ thỏa mãn hệ trên.

GTLN bằng 1 và GTNN bằng -9

Bài 2

Bác An đầu tư 1,2 tỷ đồng vào ba loại trái phiếu: trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất ba lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Hỏi bác An nên đầu tư mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để lợi nhuận thu được sau một năm là lớn nhất?

750 triệu mua trái phiếu chính phủ, 250 triệu mua trái ngân hàng và 200 triệu đồng mua trái phiếu doanh nghiệp

Bài 3

Một công ty dự định chi tối đa 160 triệu đồng cho quảng cáo sản phẩm mới trong một tháng trên các đài phát thanh và truyền hình. Biết cùng một thời lượng quảng cáo, số người mới quan tâm đến sản phẩm trên truyền hình gấp 8 lần trên đài phát thanh, tức là quảng cáo trên truyền hình có hiệu quả gấp 8 lần trên đài phát thanh. Đài phát thanh chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 900 giây với chi phí là 80 nghìn đồng/giây. Đài truyền hình chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa 360 giây với chi phí là 400 nghìn đồng/giây. Công ty cần đặt thời gian quảng cáo trên các đài phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

 truyền thanh 200 giây, truyền hình là 360 giây

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Miền nghiệm của bất phương trình $|x + y| + |x - y| \leq 4$ là

- ☐ A một hình vuông (không kể biên).
- ☐ B một hình chữ nhật (không phải là hình vuông và không kể biên).
- ☐ C một hình chữ nhật (không phải là hình vuông và kể cả biên).
- ☐ D một hình vuông (kể cả biên).

Câu 2

Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} |x - 1| \leq 2 \\ |y + 1| \leq 3 \end{cases}$ và biểu thức $P(x; y) = 3x + 2y - 5$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Tìm giá trị lớn nhất của P .

- ☐ A 16.
- ☐ B -16.
- ☐ C 8.
- ☐ D -8.



Câu 3

Tìm các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình dưới đây sao cho nó làm cho biểu thức $S = 2x + y$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y \leq x \\ x + y \leq 5 \\ x \leq 4. \end{cases}$$

A $(x; y) = (4; 0).$

B $(x; y) = (4; 1).$

C $(x; y) = (3; 2).$

D $(x; y) = (2; 2).$

Câu 4

Tìm số thực a sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ ax - 3y \geq -12 \end{cases}$ là một tam giác có diện tích bằng 6.

A $a = -4.$

B $a = 4.$

C $a = 6.$

D $a = 12.$

Câu 5

Tính diện tích S của miền nghiệm hệ bất phương trình $\begin{cases} y + x \leq 3 \\ y - x \leq 3 \\ y \geq -1. \end{cases}$

A $S = 8.$

B $S = 25.$

C $S = 16.$

D $S = 12.$



Câu 6

Tính diện tích S của miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ y + x \leq 8 \\ y - x \geq -2. \end{cases}$$

- Ⓐ $S = 48$. Ⓑ $S = 64$. Ⓒ $S = 81$. Ⓓ $S = 49$.

Câu 7

Tính chu vi P của miền nghiệm hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \\ y \leq 5 \\ y \geq -6. \end{cases}$$

- Ⓐ $P = 38$. Ⓑ $P = 36$. Ⓒ $P = 42$. Ⓓ $P = 40$.

Câu 8

Tìm giá trị của số thực a sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \leq a \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$
 có diện tích bằng 6.

- Ⓐ $a = -3$. Ⓑ $a = 8$. Ⓒ $a = 3$. Ⓓ $a = -8$.

Câu 9

Tìm giá trị của số thực a sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - y \geq a \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 là một tam giác có diện tích bằng 2.



(A) $a = 2$.

(B) $a = -2$.

(C) $a = \sqrt{2}$.

(D) $a = -\sqrt{2}$.

Câu 10

Tìm giá trị của số thực m sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + my \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 là một tam giác có diện tích bằng 4.

(A) $m = 2$.

(B) $m = 4$.

(C) $m = \frac{1}{4}$.

(D) $m = \frac{1}{2}$.

Câu 11

Tìm giá trị của số thực m sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \\ y \leq -1 \\ y \geq m \end{cases}$$
 có chu vi bằng 8.

(A) $m = -3$.

(B) $m = 2$.

(C) $m = 3$.

(D) $m = -2$.

Câu 12

Tìm giá trị của số thực dương m sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ mx + y \geq 2 \end{cases}$$
 có diện tích bằng 6.

(A) $m = 2$.

(B) $m = 3$.

(C) $m = \frac{1}{3}$.

(D) $m = \frac{1}{2}$.

Câu 13

Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm ký hiệu là A và B . Một tấn sản phẩm loại A lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại B lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A phải dùng máy M_1 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày, máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

- ☐ A 6,8 triệu đồng. ☐ B 4 triệu đồng. ☐ C 6,4 triệu đồng. ☐ D 8 triệu đồng.

Câu 14

Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B . Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II .

- ☐ A 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II .
☐ B 10 tấn nguyên liệu loại I và 2 tấn nguyên liệu loại II .
☐ C 10 tấn nguyên liệu loại I và 9 tấn nguyên liệu loại II .
☐ D Cả ba đáp án đều sai.

Câu 15

Trong một cuộc thi về “bữa ăn dinh dưỡng”, ban tổ chức yêu cầu để đảm bảo lượng dinh dưỡng hàng ngày thì mỗi gia đình có 4 thành viên cần ít nhất 900 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị Lipít trong thức ăn hàng ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị prôtêin và 200 đơn vị Lipít, 1 kg thịt heo chứa 600 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị Lipit. Biết rằng người nội trợ chỉ được mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt heo. Biết rằng 1 kg thịt bò giá 100.000 đ, 1 kg thịt heo giá 70.000 đ. Tìm chi phí thấp nhất cho khẩu phần thức ăn đảm bảo chất dinh dưỡng?

☐ A 100.000 đ.☐ B 107.000 đ.☐ C 109.000 đ.☐ D 150.000 đ.**Câu 16**

Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước đường và nước táo. Để pha chế 1 lít nước đường cần 30 g đường và 1 lít nước; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước đường nhận được 20 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất?

☐ A 7 lít nước đường.☐ B 6 lít nước táo.☐ C 3 lít nước đường, 6 lít nước táo.☐ D 6 lít nước đường, 3 lít nước táo.**Câu 17**

Một máy cán thép có thể sản xuất hai sản phẩm thép tấm và thép cuộn (máy không thể sản xuất hai loại thép cùng lúc và có thể làm việc 40 giờ một tuần). Công suất sản xuất thép tấm là 250 tấn/giờ, công suất sản xuất thép cuộn là 150 tấn/giờ. Mỗi tấn thép tấm có giá 25 USD, mỗi tấn thép cuộn có giá 30 USD. Biết rằng mỗi tuần thị trường chỉ tiêu thụ tối đa 5000 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn. Hỏi cần sản xuất bao nhiêu tấn thép mỗi loại trong một tuần để lợi nhuận thu được là cao nhất?

☐ A 5000 tấn thép tấm và 3000 tấn thép cuộn.☐ B 4500 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn.☐ C 3500 tấn thép tấm và 2000 tấn thép cuộn.☐ D 5000 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn.

§1. HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hàm số

Định nghĩa 1.1. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số $\mathcal{D}$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

- Ta gọi x là **biến số** và y là **hàm số** của x .
- Tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là **tập xác định** của hàm số.
- Tập tất cả các giá trị y nhận được, gọi là **tập giá trị** của hàm số.

! Khi y là hàm số của x , ta có thể viết $y = f(x), y = g(x), \dots$

Ví dụ 1

Bảng sau cho biết điểm trung bình môn Toán kỳ thi tuyển sinh 10 của trường THPT A trên địa bàn TP. Hồ Chí Minh.

Thời điểm (năm)	2018	2019	2020	2021	2022
Điểm trung bình môn Toán	7,24	8,02	7,65	8,14	8,34

Trong bảng trên, nếu gọi x là năm tuyển sinh, y là điểm trung bình môn Toán của các năm thì x là biến số và y là hàm số của x . Đây là một hàm số được cho bằng bảng. Dựa vào bảng trên hãy xác định tập xác định và tập giá trị của hàm số?

Ví dụ 2

Viết hàm số mô tả sự phụ thuộc của quãng đường đi được vào thời gian của một vật chuyển động thẳng đều với vận tốc 3 m/s. Tìm tập xác định của hàm số đó. Tính quãng đường vật đi được sau 10 s, 20 s.



⚠ Khi cho hàm số bằng công thức $y = f(x)$ mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta quy ước tập xác định của hàm số là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 3

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $f(x) = \sqrt{2x+7}$;

b) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-3x+2}$.

⚠ Một hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng biểu đồ, bằng công thức hoặc bằng mô tả.

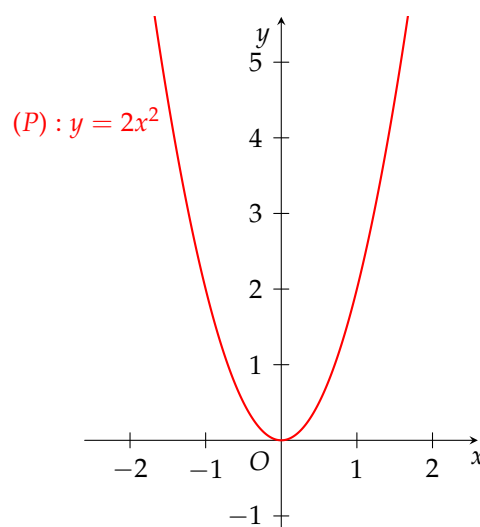
2. Đồ thị của hàm số

Định nghĩa 1.2. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi x thuộc $\mathcal{D}$.

Ví dụ 4

a)

Cho đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ như sau, dựa vào đồ thị hàm số, hãy tìm x khi $y = 8$?



b) Hãy vẽ đồ thị hàm số $y = 2x + 1$ và $y = 2x^2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.



3. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Định nghĩa 1.3.

- ✔ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến (tăng)** trên khoảng $(a; b)$, nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- ✔ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến (giảm)** trên khoảng $(a; b)$, nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$



- ✔ Đồ thị của một hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ là đường “đi lên” từ trái sang phải.

- ✔ Đồ thị của một hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ là đường “đi xuống” từ trái sang phải.

Ví dụ 5

Hãy cho biết hàm số $y = 2x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$?

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

Dạng 1 Tìm tập xác định của hàm số

Để tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta làm như sau

- ✔ Tìm điều kiện để $f(x)$ xác định.
✔ Tập hợp các giá trị x để $f(x)$ xác định là tập xác định của hàm số.

Một số trường hợp thường gặp

- ✔ $\sqrt{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$.
✔ $\frac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq 0$.
✔ $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

Ví dụ 1

Tìm tập xác định của hàm số $y = x^3 - \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$.

Ví dụ 2

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt[3]{2x - 10} + \sqrt{9 - x^2}$.

Ví dụ 3

Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2 + 5x - 6}$.

Ví dụ 4

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{16 - x^2}{x^2 - 4x + 4}}$.

Ví dụ 5

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 3}{4 - x^2}}$.



Dạng 2 Tính giá trị của hàm số tại một điểm

- ✔ Để tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ ta thay thế x bởi x_0 vào công thức $f(x)$ để tính $f(x_0)$.
- ✔ Đối với các hàm số được cho bởi hai hay nhiều công thức với các miền xác định đã cho, chẳng hạn:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_1 \\ f_2(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

- ✔ Khi tính giá trị hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$, tùy theo x_0 thuộc $\mathcal{D}_1$ hay $\mathcal{D}_2$ mà ta sử dụng công thức $f(x) = f_1(x)$ hay $f(x) = f_2(x)$ để tính $f(x_0)$.

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{với } x \geq 1 \\ 1 - 2x^2 & \text{với } x < 1. \end{cases}$
 Tính $f(1), f(2), f(0), f(-3)$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{với } x < 3 \\ \sqrt{x+5} & \text{với } x \geq 3. \end{cases}$
 Tính $f(-4), f(1), f(4)$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{với } x < -1 \\ 3 & \text{với } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{với } x \geq 1. \end{cases}$
 Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tính $f(a), f(a+2)$ (với a là một số thực).

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2$. Tìm giá trị của số thực a sao cho $f(a-1) = 2$.

Dạng 3 Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K (K là một khoảng hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng).

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 &\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0. \end{aligned}$$

- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 &\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 1

Dùng định nghĩa xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5; +\infty)$.

Ví dụ 2

Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{4}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$.

**Ví dụ 3**

Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ trên tập xác định.

Ví dụ 4

Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{1+x}{1-x}$ trên $(-\infty; 1)$.

Ví dụ 5

Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = |x-3|$ trên tập xác định.

Ví dụ 6

Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = \left| \sqrt{2-x} + 1 \right|$ trên tập xác định.

Ví dụ 7

Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ví dụ 8

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Ví dụ 9

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m+1}{x}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Dạng 4 Xét tính chẵn lẻ của hàm số

✔ Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số chẵn khi và chỉ khi

$$\forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D} \text{ và } f(-x) = f(x).$$

✔ Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số lẻ khi và chỉ khi

$$\forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D} \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

✔ Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy .

✔ Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^3}$.

**Ví dụ 2**

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{|x-2022| + |x+2022|}$.

Ví dụ 3

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4-1}$.

Ví dụ 4

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^3-1}$.

Ví dụ 5

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{3x + \sqrt{3+x^2}}{|x|+2}$.

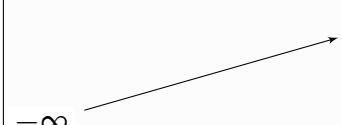
Dạng 5 Tính đơn điệu của hàm bậc nhất

1) Sự biến thiên của hàm số $y = ax + b, a \neq 0$ trên $\mathbb{R}$.



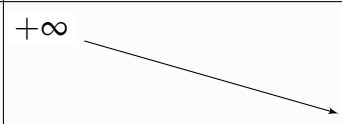
- ☑ Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$



- ☑ Khi $a < 0$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

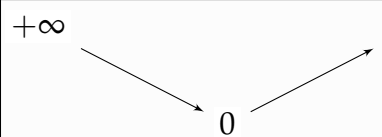
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$



2) Sự biến thiên của hàm số $y = |x|$ trên $\mathbb{R}$.

- ☑ Ta có $y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$
- ☑ Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
- ☑ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



Ví dụ 1

Xét sự biến thiên của hàm số $y = 2x - 3$.

Ví dụ 2

Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x|$.



Ví dụ 3

Xét sự biến thiên của hàm số $y = |x + 2| + |x - 2|$.

Ví dụ 4

Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2|x - 1|$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định.

Ví dụ 6

Xác định a để hàm số $y = (2a + 3)x + a - 1$ đồng biến trên tập xác định.

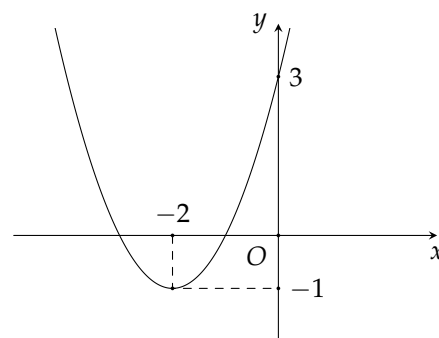
Dạng 6 Dùng đồ thị xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K (K là một khoảng hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng).

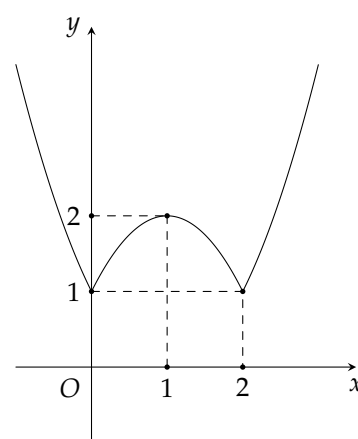
- ✔ Hàm số đồng biến trên K khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi lên” trên K .
- ✔ Hàm số nghịch biến trên K khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi xuống” trên K .
- ✔ Khi nói đồ thị “đi lên” hay “đi xuống”, ta luôn kể theo chiều tăng của biến số, nghĩa là kể từ trái qua phải.

**Ví dụ 1**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.

**Ví dụ 2**

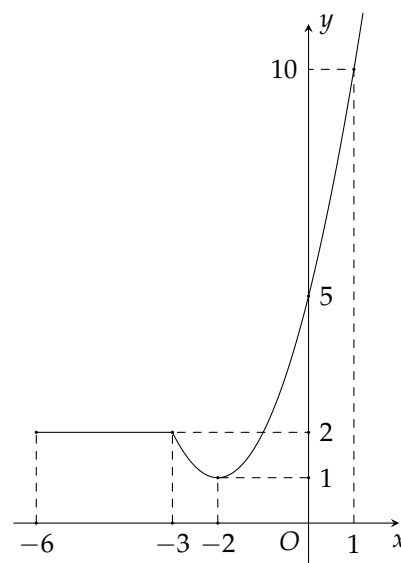
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.





Ví dụ 3

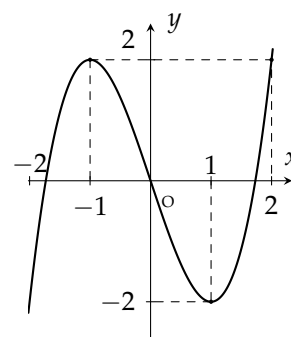
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-6; +\infty)$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.



Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

- Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$.



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luyện

Bài 1

Xét hai đại lượng x, y phụ thuộc vào nhau theo các hệ thức dưới đây. Những trường hợp nào thì y là hàm số của x ?

a) $x + y = 1$.

b) $y = x^2$.

c) $y^2 = x$.

d) $x^2 - y^2 = 0$.

Bài 2

Hãy cho một ví dụ về hàm số được cho bằng bảng hoặc biểu đồ. Hãy chỉ ra tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.

Bài 3

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = 2x^3 + 3x + 1$.

b) $y = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$.

c) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$.

Bài 4

Tìm tập xác định và tập giá trị của mỗi hàm số sau

a) $y = 2x + 3$.

b) $y = 2x^2$.



Bài 5

Vẽ đồ thị các hàm số sau và chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng.

a) $y = -2x + 1$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2$

Bài 6

Giá thuê xe ô tô tự lái là 1,2 triệu đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 900 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của số ngày x mà khách thuê xe.

a) Viết công thức của hàm số $T = T(x)$.

b) Tính $T(2)$, $T(3)$, $T(5)$ và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

Bài 7

Xét hai đại lượng x , y phụ thuộc vào nhau theo các hệ thức dưới đây. Những trường hợp nào thì y là hàm số của x ?

a) $y = \sqrt{(2x+1)(x-3)}$.

c) $y^2 = 3x - 7$.

b) $\frac{x^2 - 3}{2x + 4} - y = 1$.

d) $x^2 = (y - 1)^2$.

Bài 8

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \frac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}$

b) $y = \frac{x}{x - \sqrt{x} - 6}$

Bài 9

Vẽ đồ thị các hàm số sau và chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng.

a) $y = 3x + 1$

b) $y = x^2 - 2x + 3$

Bài 10

Bảng giá nước đối tượng sinh hoạt ở thành phố H năm 2021 được cho như bảng dưới đây

Mức sử dụng (m ³ /tháng/1 người)	Giá chưa thuế GTGT (VNĐ/ m ³)	Phí BVMT	Thuế GTGT
Từ 0 đến 4 m ³	5 300	530	265
Từ trên 4 m ³ đến 6 m ³	10 200	1 020	510
Trên 6 m ³	11 400	1 140	570

Hãy tính số tiền phải trả ứng với mỗi mức sử dụng nước ở bảng dưới đây.

Mức sử dụng (m ³)	3	5,5	7
Số tiền (nghìn đồng)			



Bài 11

Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau

a) $y = -x^2$.

c) $y = \frac{4}{x-1}$.

b) $y = \sqrt{2-x}$.

d) $y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Bài 12

Bảng 1 dưới đây cho biết chỉ số $PM_{2,5}$ (bụi mịn) ở Thành phố Hà Nội từ tháng 1 đến tháng 12 của năm 2019.

	TB2019	Tháng											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$PM_{2,5}$ $\mu g/m^3$	46,9	59,3	36,0	50,2	40,3	45,8	36,5	30,4	33,1	48,3	43,2	66,3	72,7

(Nguồn: Báo cáo chất lượng không khí thế giới 2019)

Bảng 1

a) Nêu chỉ số $PM_{2,5}$ trong tháng 2; tháng 5; tháng 10.

b) Chỉ số $PM_{2,5}$ có phải là hàm số của tháng không? Tại sao?

Bài 13

Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/01/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau



- a) Số tiền dịch vụ thư cơ bản phải trả y (đồng) có là hàm số của khối lượng thư cơ bản x (g) hay không? Nếu đúng hãy xác định những công thức tính y .

Khối lượng đến 250 g	Mã cước (đồng)
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

- b) Tính số tiền phải trả khi bạn Dương gửi thư có khối lượng 150 g, 200 g.

Bài 14

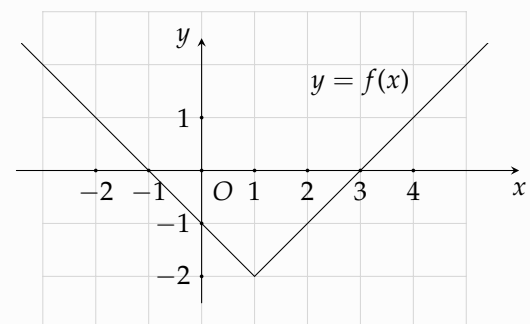
Cho hàm số $y = -2x^2$.

- a) Điểm nào trong các điểm có tọa độ $(-1; 2)$, $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(2; 0)$, $(1; 1)$ thuộc đồ thị hàm số trên?
- b) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt bằng 2; 3 và 10.
- c) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -18 .

Bài 15

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như Hình 8.

- a) Trong các điểm có tọa độ $(1; -2)$; $(0; 0)$; $(2; -1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?
- b) Xác định $f(0)$; $f(3)$.
- c) Tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 0.



Hình 8



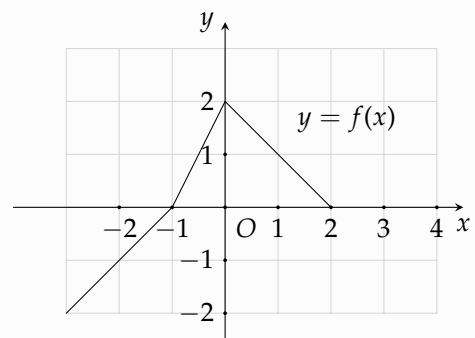
Bài 16

Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Chứng tỏ hàm số đã cho

- a) Nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Bài 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 9.
Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.



Hình 8

Bài 18

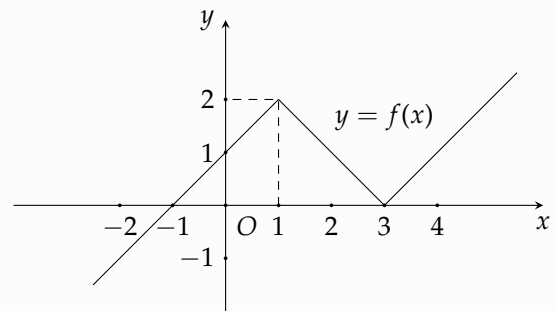
Một lớp muốn thuê một chiếc xe khách cho chuyến tham quan với tổng đoạn đường cần di chuyển trong khoảng từ 550 km đến 600 km, có hai công ty được tiếp cận để tham khảo giá. Công ty A có giá khởi đầu là 3,75 triệu đồng cộng thêm 5 000 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Công ty B có giá khởi đầu là 2,5 triệu đồng cộng thêm 7 500 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Lớp đó nên chọn công ty nào để chi phí là thấp nhất?

Bài 19

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Tính

- $f(-1)$.
- $f(3)$.
- $f(1)$.
- $f(0)$.
- Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số trên tập xác định.



Bài 20

Một lớp học thuê một hướng dẫn viên cho chuyến tham quan, có hai công ty được liên hệ để tham khảo giá.

- ✔ Công ty A có phí dịch vụ ban đầu là 400 nghìn đồng cộng thêm 3 000 đồng cho mỗi ki-lô-mét hướng dẫn.
 - ✔ Công ty B có phí dịch vụ ban đầu là 300 nghìn đồng cộng thêm 3 nghìn 500 đồng cho mỗi ki-lô-mét hướng dẫn.
- Lớp học nên chọn công ty nào để thuê hướng dẫn viên nếu biết rằng chuyến đi sẽ đến một địa điểm nào đó với tổng khoảng cách đi lại là 250 km.
 - Nếu đi khoảng cách là bao nhiêu thì chọn công ty A có lợi hơn.

Bài 21

Một lớp học muốn thuê một hướng dẫn viên cho chuyến tham quan, có hai công ty được liên hệ để lấy các thông tin về giá.

- ✔ Công ty A có phí dịch vụ ban đầu là 375 USD cộng thêm 0,5 USD cho mỗi ki-lô-mét

hướng dẫn.

- ✔ Công ty B có phí dịch vụ ban đầu là 250 USD cộng thêm 0,75 USD cho mỗi ki-lô-mét hướng dẫn.
- a) Lớp học nên chọn công ty nào để thuê hướng dẫn viên nếu biết rằng chuyến đi sẽ đến một địa điểm nào đó với tổng khoảng cách đi lại là 400 km, 600 km?
- b) Vậy nếu đi với khoảng cách là bao nhiêu thì chọn công ty A có lợi hơn.

Bài 22

Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{|x| + 1}$.

Bài 23

Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?

Bài 24

Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 3}$.

Bài 25

Tìm m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

Bài 26

Tìm m để hàm số $y = \frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Bài 27

Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-2m}$, với m là tham số. Tìm m để hàm số xác định trên $[0;1)$.

Bài 28

Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx}{x-1}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.



Bài 29

Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $y = \frac{ax}{x-2}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Bài 30

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{4}{x-2}$.

Bài 31

Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + x + m - 5}{x + 3}$ đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

Bài 32

Bản tin dự báo thời tiết cho biết tốc độ gió ở một số thời điểm tại Bắc Ninh ngày 10/08/2022 được ghi lại thành bảng

Giờ	11	14	17	20	23
Tốc độ gió (km/h)	8	14	17	11	13

Nếu coi x là thời điểm và y là tốc độ gió thì x là biến số và y là hàm số của x . Đó là hàm số cho bằng bảng.

- Hãy tìm tập xác định của hàm số đó. Tìm tập giá trị của hàm số đó.
- Tìm thời điểm mà tốc độ gió đạt 17 km/h.

Bài 33

Viết hàm số mô tả sự phụ thuộc của quãng đường đi được vào thời gian của một vật chuyển động thẳng đều với vận tốc 5 m/s. Tìm tập xác định của hàm số đó. Tính quãng đường vật đi được sau 8 s; 16 s.

Bài 34

Tìm tập xác định của hàm số

a) $y = \sqrt{3x - 9}$.

b) $y = \frac{x + 2}{4 - 2x}$.

Bài 35

Cho bảng tính tiền nước (theo <https://vinid.net/blog/gia-nuoc-sinh-hoat-cap-nhat-bieu-gia-nuoc-sach-moi-nhat-2020>) như sau

Mức nước sử dụng	Giá (m ³ /đồng)
Từ 0 đến 10 m ³	5 973
Từ trên 10 đến 20 m ³	7 052
Từ trên 20 đến 30 m ³	8 669
Từ trên 30 m ³	15 929

a) Gọi x là lượng nước sử dụng (đơn vị m³) và y là số tiền phải trả tương ứng (đơn vị nghìn đồng). Viết công thức hàm số tính số tiền sử dụng từ 0 đến 10 m³.

b) Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số, vẽ đồ thị của hàm số này?



Bài 36

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}.$

b) $y = \frac{\sqrt{3+x}}{2x-4}.$

Bài 37

a) Điểm nào trong các điểm sau $A\left(-1; \frac{1}{2}\right); B(-4; 4); C(2; 2); D\left(-3; \frac{9}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2.$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2.$

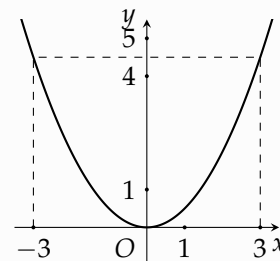
Bài 38

a) Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$, tìm x sao cho $y = \frac{1}{2}.$

b) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 4x - 4$ và $y = x^2$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Bài 39

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (như hình vẽ), cho biết hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(-\infty; 0)$.



Bài 40

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + 5$ và $y = \frac{x^2}{4}$.

Hãy cho biết

- Hàm số $y = x + 5$ đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?
- Hàm số $y = \frac{x^2}{4}$ đồng biến hay nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$?

Bài 41

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = -x - 2$ và $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Hãy cho biết

- Hàm số $y = -x - 2$ đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?
- Hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$?

Bài 42

Quan sát bảng giá nước sinh hoạt cho hộ gia đình năm 2022 tại Hà Nội

STT	Mức sử dụng nước sinh hoạt của dân cư (m^3 /tháng/gia đình)	Giá bán nước (VND)	Thuế GTGT (5%)	Phí bảo vệ môi trường (10%)	Giá thanh toán (VND)
1	10 m^3 đầu tiên	5 973	298,65	597,30	6 869
2	Từ trên 10 m^3 đến 20 m^3	7 052	352,50	705,20	8 110
3	Từ trên 20 m^3 đến 30 m^3	8 669	433,45	866,90	9 969
4	Trên 30 m^3	15 929	796,45	1 592,90	18 318

- Tính số tiền phải trả khi sử dụng 25 m^3 trong tháng 8 năm 2022.
- Lập công thức tính số tiền nước phải trả theo khối lượng nước tiêu thụ trong một tháng.
- Vẽ đồ thị và cho biết hàm số đồng biến trên khoảng nào, nghịch biến trên khoảng nào?

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x-2}, & \text{khi } x \geq 2 \\ 1 - 3x, & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Giá trị $f(1)$ bằng

- Ⓐ -2 . Ⓑ 0 . Ⓒ không xác định. Ⓓ 2 .

Câu 2

Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x} + \sqrt{3-x}$ là

- Ⓐ $(-\infty; 3]$. Ⓑ $[3; +\infty)$. Ⓒ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ⓓ $(-\infty; 3] \setminus \{0\}$.



Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và nhận giá trị trên tập số nguyên; đồng thời thỏa mãn $f(1) = 0$ và $f(m+n) = f(m) + f(n) + 3(4mn - 3)$ với mọi số nguyên m, n . Xác định $f(9)$.

Ⓐ 360.

Ⓑ 336.

Ⓒ 351.

Ⓓ 368.

Câu 4

Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{3x-6}{4x-12}$ là

Ⓐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.Ⓑ $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.Ⓒ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.Ⓓ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Câu 5

Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-x+3}$ là

Ⓐ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.Ⓑ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.Ⓒ $\mathcal{D} = \emptyset$.Ⓓ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 6

Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$.

Ⓐ $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.Ⓑ $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.Ⓒ $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.Ⓓ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.



Câu 7

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$.

- ☐ A $\mathcal{D} = (1; 2)$.
 ☐ B $\mathcal{D} = [1; 2]$.
 ☐ C $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
 ☐ D $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 8

Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x+1}}$

- ☐ A $\mathcal{D} = (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.
 ☐ B $\mathcal{D} = (-1; +\infty)$.
 ☐ C $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
 ☐ D $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 9

Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = \sqrt{m-2x}$ xác định trên khoảng $(-3; -1)$?

- ☐ A 2022.
 ☐ B 2025.
 ☐ C 2021.
 ☐ D 4042.

Câu 10

Tập hợp S là tập hợp chứa các số nguyên dương m để hàm số $y = \sqrt{m-x} + \sqrt{x-2m+5}$ có tập xác định là một đoạn có độ dài không nhỏ hơn 3. Tính tổng bình phương các phần tử của S ?

- ☐ A 5.
 ☐ B 10.
 ☐ C 14.
 ☐ D 13.



Câu 11

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-2x+m-2}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

☐ A $m \geq 3$.
 ☐ B $m > 3$.
 ☐ C $m < 3$.
 ☐ D $m \leq 3$.

Câu 12

Tập xác định của hàm số $y = \frac{2022}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-5}}$ là

☐ A $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 ☐ B $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
 ☐ C $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.
 ☐ D $\mathcal{D} = (-\sqrt{5}; 1) \cup (2; \sqrt{5})$.

Câu 13

Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề sau

- I. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- II. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- III. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Tìm tất cả các mệnh đề sai trong ba mệnh đề trên.

- ☐ A I và II.
 ☐ B I và III.
 ☐ C II và III.
 ☐ D I, II và III.

**Câu 14**

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = (m - 4)x + m^2 - m - 2$ đồng biến trên tập xác định của nó.

☐ (A) $m > 4$.

☐ (B) $m \geq 4$.

☐ (C) $m < 4$.

☐ (D) $m \leq 4$.

Câu 15

Nhiệt độ mặt đất đo được khoảng 30°C . Biết rằng cứ lên cao 1 km thì nhiệt độ giảm đi 5°C . Hãy viết hàm số t theo độ cao h và nhiệt độ t tính bằng $^\circ\text{C}$.

☐ (A) $t = 5h - 30$.

☐ (B) $t = 5h + 30$.

☐ (C) $t = -5h - 30$.

☐ (D) $t = 30 - 5h$.

§2. HÀM SỐ BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hàm số bậc hai

Khái niệm 2.1. Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (3.1)$$

trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$. Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1

Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc hai?

- a) $y = x^6 + 4x^3 + 2$; b) $y = \frac{1}{x^2}$; c) $y = -3x^2 + 1$;
d) $y = 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} - 1$; e) $y = 2x^2 - 3x$; f) $y = x^4$.

Ví dụ 2

Khi thả một viên đá xuống một chiếc giếng, quãng đường viên đá rơi được trong thời gian t (giây) sẽ được tính theo công thức $s = 4,9t^2(m)$.

- a) Tính quãng đường viên đá rơi được trong 1 giây, 2 giây, 3 giây.
b) Hãy tìm độ sâu của cái giếng biết viên đá sẽ chạm đáy giếng trong 5 giây.
c) Nếu cái giếng sâu $100m$, hãy tính thời gian từ lúc thả viên đá cho tới khi viên đá chạm đáy giếng.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

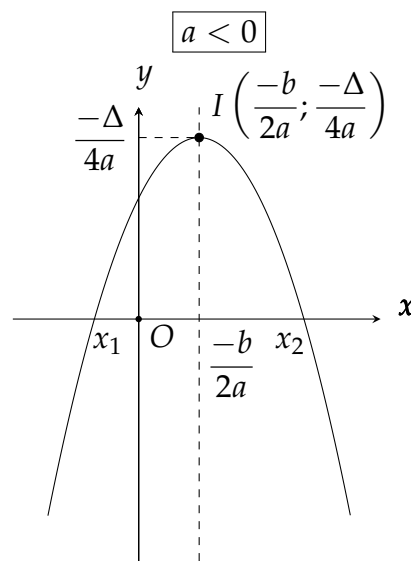
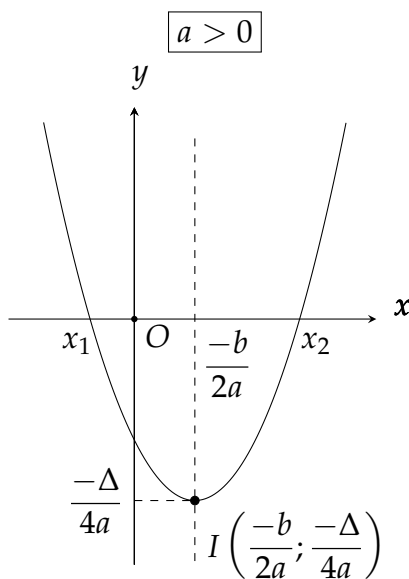
- ✔ Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

☑ Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau:

1. Xác định tọa độ đỉnh $I \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$;
2. Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;
3. Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;
4. Vẽ parabol.

☑ Tính chất của hàm số bậc hai:

- + Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- + Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị lớn nhất của hàm số.



Ví dụ 3

a) Vẽ đồ thị parabol $y = x^2 - 4x + 3$.

b) Xác định khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.



Ví dụ 4

Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43m$ so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất. Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn $10m$. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch.

.....

.....

.....

.....

.....

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

Dạng 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.

Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

- ✔ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ✔ Sự biến thiên:
 - + Bảng biến thiên.
 - + Kết luận sự đồng biến nghịch biến của hàm số.
- ✔ Bảng giá trị.
- ✔ Vẽ đồ thị.
- ✔ Nhận xét đồ thị: Trục đối xứng, đỉnh, giao với $Ox, Oy, \dots$

Ví dụ 1

Hãy xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2 - 2x$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Hãy xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

.....

.....

.....

.....

.....





Ví dụ 3

Hãy xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 3x - 3$.

Ví dụ 4

Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$.

Ví dụ 5

Hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số $y = x^2 - 3|x| + 2$.

Ví dụ 6

Hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$.

Dạng 2

Tìm tham số m để hàm số bậc 2 đơn điệu trên tập con của $\mathbb{R}$

Bước 1. Lập bảng biến thiên của hàm số bậc 2.

Bước 2. Dựa vào yêu cầu bài toán “ép” khoảng mà tính đơn điệu của hàm số không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

Ví dụ 1

Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + (2m - 3)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = x^2 - 2(m + 1)x + 3$ (với m là tham số). Hãy tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Ví dụ 3

Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m - 1)x + 2m - 1$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

Dạng 3 Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trên $\mathbb{R}$ và tập con của $\mathbb{R}$

Khi $a > 0$, giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ của hàm số là $-\frac{\Delta}{4a}$ đạt được khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ là điểm thấp nhất của đồ thị hàm số.

Khi $a < 0$, giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ của hàm số là $-\frac{\Delta}{4a}$ đạt được khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ là điểm cao nhất của đồ thị hàm số.

Ví dụ 1

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.



Ví dụ 2

Hãy tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$.

Ví dụ 3

Hãy tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn $[-2; 1]$ của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Ví dụ 4

Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .

Ví dụ 5

Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$ trên tập $\mathcal{D} = [-2; 0]$. Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng 2.

**Dạng 4 Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.**

Ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1: Giả sử parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Bước 2: Dựa vào giả thiết đề bài để xác định a, b, c .

Một số giả thiết thường gặp ở bước này và cách xử lí.

✔ Parabol đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Rightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

✔ Parabol có trục đối xứng $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$.

✔ Parabol có đỉnh $I(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$.

✔ Parabol có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) bằng $y_0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$

(hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$).

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 1

Hãy xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 11)$.

Ví dụ 2

Cho parabol $(P): y = -x^2 + bx + c$. Hãy xác định b, c biết (P) đi qua điểm $M(-2; 4)$ và có trục đối xứng $x = -2$.



Ví dụ 3

Cho parabol $(P) : y = ax^2 - 2x + c$. Hãy xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh $I(1; -3)$.

Ví dụ 4

Cho parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$. Xác định a, b, c biết (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 và đi qua hai điểm $M(1; -1), N(0; 4)$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = x^2 - mx + m + 1$ với $m \in \mathbb{R}$. Hãy xác định m để đồ thị hàm số là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x$ sao cho hoành độ đỉnh không âm.

Dạng 5 Các bài toán tương giao

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

Bước 2. Chuyển vế, đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3. Giải tìm nghiệm và kết luận số giao điểm

Ví dụ 1

Hãy tìm tọa độ giao điểm của parabol $(P) : y = x^2 - 3x + 5$ với trục Ox .

Ví dụ 2

Hãy tìm tọa độ giao điểm của parabol $y = x^2 + 5x - 6$ cắt trục tung.

**Ví dụ 3**

Hãy tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $(d): y = x + 1$ và parabol $(P): y = x^2 - 3x - 4$.

Ví dụ 4

Hãy tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 + 2x - 1$.

Ví dụ 5

Hãy tìm giá trị thực của m để đường thẳng $d : y = 4x - 2m$ tiếp xúc với parabol $(P) : y = (m - 2)x^2 + 2mx - 3m + 1$.

Ví dụ 6

Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d : y = 2x + 3$ cắt parabol $y = x^2 + (m + 2)x - m$ tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy .



Ví dụ 7

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P) : y = x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Ví dụ 8

Cho hai hàm số $y_1 = x^2 + (m - 1)x + m, y_2 = 2x + m + 1$. Chứng minh rằng đồ thị hai hàm số luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m .

Ví dụ 9

Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

Ví dụ 10

Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d : y = mx + 3$. Tìm giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

Ví dụ 11

Cho $(P) : y = x^2 + 2x$ và đường thẳng $(d) : y = -2x + m$.

- Xác định tất cả các giá trị của tham số m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB . Chứng minh I luôn chạy trên một đường thẳng cố định.



b) Tìm m sao cho (d) và (P) có điểm chung duy nhất, tìm tọa độ của điểm chung này.

Ví dụ 12

Cho hai hàm số $y = x^2 - 2(m - 1)x - 2m$ và $y = 2x + 3$. Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm A và B phân biệt sao cho $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất (trong đó O là gốc tọa độ).

Ví dụ 13

Cho Parabol $(P) : y = x^2 + 2mx + 3$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (P) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho tam giác IAB là tam giác đều (với I là đỉnh của (P)).

Dạng 6

Điểm đặc biệt của họ đồ thị hàm số bậc hai

Ví dụ 1

Hãy tìm quỹ tích đỉnh của parabol $(P) : y = x^2 + mx + 1$.

Ví dụ 2

Cho parabol: $y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$. Trong đó m là tham số. Tìm quỹ tích đỉnh của parabol khi m biến thiên.

**Ví dụ 3**

Cho hàm $y = x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Hãy tìm quỹ tích đỉnh I của Parabol.

Ví dụ 4

Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m - 2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Ví dụ 5

Hãy tìm điểm cố định của họ parabol $y = (m - 1)x^2 - m + 2$ luôn đi qua với mọi m .

Ví dụ 6

Chứng minh rằng parabol $y = 2x^2 - 4(2m - 1)x + 8m^2 - 3$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Ví dụ 7

Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2 \ (m \neq 0)$;



$$\text{b) } y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2 \left(m \neq \frac{1}{2} \right).$$

.....

.....

.....

.....

.....



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Vẽ các đường parabol sau

a) $y = x^2 - 3x + 2$

c) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $y = -2x^2 + 2x + 3$

d) $y = -x^2 + x - 1$

Bài 2

Từ các parabol đã vẽ ở Bài tập 6.7, hãy cho biết khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của mỗi hàm số bậc hai tương ứng.

Bài 3

Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 1$, trong mỗi trường hợp sau

- Đi qua hai điểm $A(1;0)$ và $B(2;4)$;
- Đi qua điểm $A(1;0)$ và có trục đối xứng $x = 1$;
- Có đỉnh $I(1;2)$;
- Đi qua điểm $A(-1;6)$ và có tung độ đỉnh $-0,25$.

Bài 4

Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó đi qua điểm $A(8;0)$ và có đỉnh là $I(6;-12)$.

Bài 5

Gọi (P) là đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt thức Δ , trong mỗi trường hợp sau

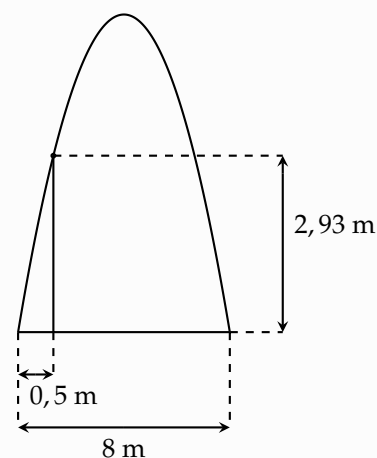
- (P) nằm hoàn toàn phía trên trục hoành;
- (P) nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành;
- (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía dưới trục hoành;
- (P) tiếp xúc với trục hoành và nằm phía trên trục hoành.

Bài 6

Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau. An nói: "Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng 0,5 m là 2,93 m. Từ đó tớ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12 m".

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: "Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác".

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé!





Bài 7

Bác Hùng dùng 40 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.

- Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (mét) của nó.
- Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.

Bài 8

Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \frac{-3}{1000} \cdot x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc Oy (mét) là độ cao của vật so với mặt đất.

- Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.
- Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O . Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.

Bài 9

Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số trên.
- Sử dụng đồ thị để biện luận theo tham số m số điểm chung của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số trên.
- Sử dụng đồ thị, hãy nêu các khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị dương.
- Sử dụng đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 5]$.

**Bài 10**

Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = |x^2 - x - 2|.$$

Bài 11

Xác định parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ biết:

a) (P) đi qua $A(2; 3)$ có đỉnh $I(1; 2)$.

b) $c = 2$ và (P) đi qua $B(3; -4)$ và có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$.

c) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$. d) (P) đi qua $M(4; 3)$ cắt Ox tại $N(3; 0)$ và P sao cho $\triangle INP$ có diện tích bằng 1 biết hoành độ điểm P nhỏ hơn 3.

Bài 12

Vẽ đồ thị của hàm số sau:

$$\text{a) } y = x^2 - 3|x| + 2.$$

$$\text{b) } y = |x^2 - 3|x| + 2|.$$



Bài 13

Cho phương trình $x^2 + 2(m + 3)x + m^2 - 3 = 0$, m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $P = 5(x_1 + x_2) - 2x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 14

Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 2$ có đồ thị là parabol (P) và đường thẳng (d) có phương trình $y = x + m$. Giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 15

Cho $(P) : y = x^2 - 2x - 3$. Dựa vào đồ thị, tìm m để phương trình

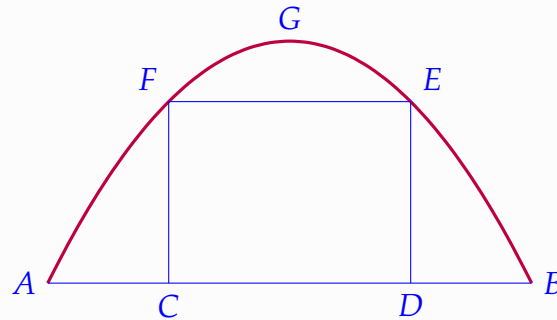
- Khảo sát và vẽ đồ thị.
- $2x^2 - 4x - 9 - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- $\frac{x^2}{2} + 3x = 4x + 3 - 2m$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 5.

Bài 16

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 1$ trên $[-1; 2]$.

Bài 17

Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là $4m$, kích thước cửa ở giữa là $3m \times 4m$. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B .



Bài 18

Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Bài 19

Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc hai?

a) $y = -2x^2 + 3x + 1$

b) $y = \sqrt{-2x^2 + 4x + 1}$

c) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

d) $y = (x^2 - 4x + 1)(x + 2)$



Bài 20

Xét hàm số bậc hai $y = -3x^2 + 2x - 4$. Thay dấu bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số.

x	0	2	4	6	8	10
y	?	?	?	?	?	?

Bài 21

Xét hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x - 3$. Thay dấu bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số.

x	-10	-8	-6	-4	-2	0
y	?	?	?	?	?	?

Bài 22

Cho hàm số $y = x(3 - 2x) - 5x + 3$

- Hàm số đã cho có phải là hàm số bậc hai không? Nếu có, hãy xác định các hệ số a, b, c của nó.
- Thay dấu “?” bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số đã cho.

x	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?

**Bài 23**

Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian, kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Quỹ đạo của quả bóng được xác định bởi công thức $h = -4,9t^2 + 14,7t + 49$.

- Hỏi sau bao lâu kể từ khi quả bóng đang ở độ cao 49m đến khi quả bóng chạm đất.
- Hãy tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số h .

Bài 24

Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $S(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $S(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét.

- Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi viên đạn được bắn lên thì viên đạn chạm đất?
- Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số $S(t)$.

Bài 25

- Vẽ parabol $y = -x^2 + 2x + 3$.
- Từ đồ thị, hãy tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.



Bài 26

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

b) Từ đồ thị, hãy tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

Bài 27

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x - 4$.

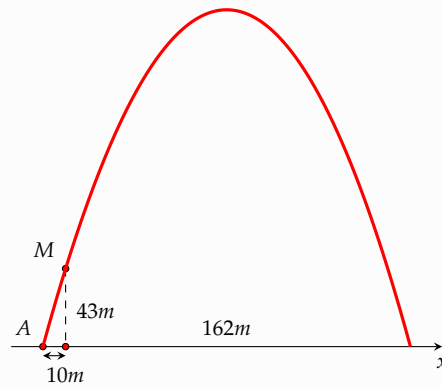
b) Từ đồ thị hãy tìm khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x - 4$.

Bài 28

Vẽ Parabol (P): $y = 2x^2 + 5x + 2$. Từ đó tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + 5x + 2$.

Bài 29

Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng đường parabol (hình vẽ)



Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162 m . Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43 m so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10 m . Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).

Bài 30

Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt được độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol. Giả thiết rằng bóng được đá từ độ cao 1 m . Sau đó 1 giây nó đạt độ cao $8,5\text{ m}$ và 2 giây sau khi đá nó đạt độ cao 6 m . Hỏi sau bao lâu quả bóng chạm đất (Tính chính xác đến hàng phần trăm).

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Hàm số $y = 2x^2 + 4x - 2023$

- ☐ A Đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- ☐ B Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- ☐ C Đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- ☐ D Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.



Câu 2

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

☐ A $y = \sqrt{2}x^2 + 1.$

☐ B $y = -\sqrt{2}x^2 + 1.$

☐ C $y = \sqrt{2}(x + 1)^2.$

☐ D $y = -\sqrt{2}(x + 1)^2.$

Câu 3

Biết rằng (P): $y = ax^2 - 4x + c$ có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua điểm $M(-2; 1)$. Tính tổng $S = a + c$.

☐ A $S = 5.$

☐ B $S = -5.$

☐ C $S = 4.$

☐ D $S = 1.$

Câu 4

Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. Đồ thị hàm số $y = f(x + 2)$ là đường parabol có đỉnh là

☐ A $I(1; -1).$

☐ B $I(1; -3).$

☐ C $I(-1; -3).$

☐ D $I(3; -3).$

Câu 5

Cho Parabol (P): $y = mx^2 + nx + 3$ (m, n là tham số). Xác định m, n để (P) nhận điểm $I(2; -1)$ làm đỉnh.

☐ A $m = 1, n = -4.$

☐ B $m = -1, n = 4.$

☐ C $m = 2, n = -8.$

☐ D $m = 1, n = 4.$

Câu 6

Cho parabol $(P): y = ax^2 + 2x + b$ biết parabol đó đi qua hai điểm $M(1; 7)$ và $N(-2; 10)$. Tính tổng $S = a + b$.

- Ⓐ $S = 4$. Ⓑ $S = 5$. Ⓒ $S = 2$. Ⓓ $S = 1$.

Câu 7

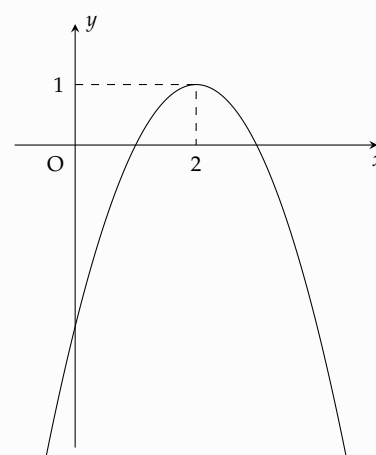
Xác định $(P): y = ax^2 - 6x + c$, biết (P) có trục đối xứng $x = -4$ và cắt Ox tại hai điểm có độ dài bằng 4.

- Ⓐ $(P): y = -\frac{3}{4}x^2 - 6x - 9$. Ⓑ $(P): y = \frac{3}{4}x^2 - 6x - 9$.
Ⓒ $(P): y = -\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$. Ⓓ $(P): y = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$.

Câu 8

Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?

- Ⓐ $y = -x^2 + 4x - 3$. Ⓑ $y = -x^2 - 4x - 3$.
Ⓒ $y = -2x^2 - x - 3$. Ⓓ $y = x^2 - 4x - 3$.





Câu 9

Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d: y = -x - 2$ là

- ☐ A $M(0; -2), N(2; -4)$.
 ☐ B $M(-1; -1), N(-2; 0)$.
 ☐ C $M(-3; 1), N(3; -5)$.
 ☐ D $M(1; -3), N(2; -4)$.

Câu 10

Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x - 5$ (1). Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 4x + m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7$ là

- ☐ A -10 .
 ☐ B 10 .
 ☐ C -6 .
 ☐ D 9 .

Câu 11

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1$?

- ☐ A 6 .
 ☐ B 9 .
 ☐ C 7 .
 ☐ D 8 .

Câu 12

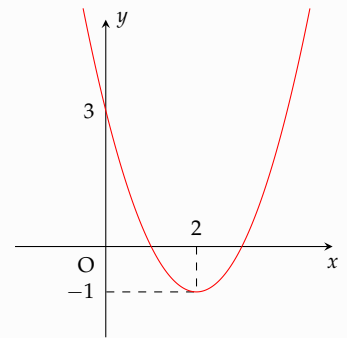
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 4x + 3 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $0 \leq x_1 < x_2 < 3$.

- ☐ A 0 .
 ☐ B 1 .
 ☐ C 2 .
 ☐ D 3 .

**Câu 13**

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Câu 14**

Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x + m^2 + 3m - 2$, trong đó m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu khi m thay đổi?

- (A) -16. (B) -8. (C) -4. (D) -2.

Câu 15

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm)?

- (A) 2,56 giây. (B) 2,57 giây. (C) 2,58 giây. (D) 2,59 giây.

§3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dấu của tam thức bậc hai

Định nghĩa 3.1. Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức có dạng $ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số thực cho trước (với $a \neq 0$), được gọi là các hệ số của tam thức bậc hai.

Người ta thường viết $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ví dụ 1

Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai

- a) $A = 3x + 2\sqrt{x} + 1$; c) $C = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 4$; e) $E = (1 - x)^2 + (2x + 1)$;
b) $B = -5x^4 + 3x^2 + 4$; d) $D = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\frac{1}{x} + 3$; f) $F = (1 - x)(2x + 1)$;

! Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$; $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ tương ứng được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai.

Định lý 3.1. (Định lý về dấu của tam thức bậc hai)

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- ✔ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- ✔ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$ và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- ✔ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi $x \in (x_1; x_2)$.

! Trong Định lý về dấu của tam thức bậc hai có thể thay Δ bởi Δ' .

Mối quan hệ giữa dấu của tam thức bậc hai với dấu của hệ số a trong từng trường hợp của Δ
Trường hợp $a > 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
----------	--------------	--------------	--------------



Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	Đồ thị nằm hoàn toàn phía trên trục Ox	Đồ thị nằm phía trên trục Ox và tiếp xúc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{2a}$	Đồ thị nằm phía trên trục Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. Đồ thị nằm phía dưới trục Ox khi $x_1 < x < x_2$

Trường hợp $a < 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	Đồ thị nằm hoàn toàn phía dưới trục Ox	Đồ thị nằm phía dưới trục Ox và tiếp xúc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{2a}$	Đồ thị nằm phía dưới trục Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. Đồ thị nằm phía trên trục Ox khi $x_1 < x < x_2$

Ví dụ 2

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $x^2 + x + 1$;

c) $2x^2 + 6x - 8$;

e) $-2x^2 + 7x - 3$;

b) $-\frac{3}{2}x^2 + 9x - \frac{27}{2}$;

d) $-3x^2 + x - \sqrt{2}$;

f) $x^2 + 8x + 16$.



2. Bất phương trình bậc hai

Định nghĩa 3.2. Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$) trong đó a, b, c là những số thực đã cho và $a \neq 0$.

Số thực x_0 gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$, nếu $ax_0^2 + bx_0 + c > 0$. Tập hợp gồm tất cả các nghiệm của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ gọi tập nghiệm của bất phương trình này.

Giải một bất phương trình bậc hai là tìm tập nghiệm của nó.

! Để giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$) ta cần xét dấu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$, từ đó suy ra tập nghiệm.

Ví dụ 3

Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2 + x + 5 \leq 0$;

b) $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 \geq 0$;

c) $-x^2 + 2x + 1 > 0$;

3. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình, ứng dụng tính lợi nhuận trong kinh doanh, tính toán điểm rơi trong pháo binh,...

Ví dụ 4

Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông. Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120cm^2 . Hỏi rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu cm?

Ví dụ 5

Bác Việt có một tấm lưới hình chữ nhật dài 20m. Bác muốn dùng tấm lưới này rào chắn ba mặt áp bên bờ tường của khu vườn nhà mình thành một mảnh đất hình chữ nhật để trồng rau. Hỏi hai cột góc hàng rào cần phải cách bờ tường bao xa để mảnh đất được rào chắn của bác có diện tích không nhỏ hơn 48m^2 ?

Ví dụ 6

Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng được mô tả bởi hàm số bậc hai $h(t) = -4,9t^2 + 20t + 1$, ở đó độ cao $h(t)$ tính bằng mét và thời gian tính bằng giây. Trong khoảng thời gian nào trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên 5m so với mặt đất?

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Nhận dạng tam thức và xét dấu biểu thức

Tam thức bậc hai có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Ví dụ 1

Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai

a) $A = 3x + 2\sqrt{x} + 1$

b) $B = -5x^4 + 3x^2 + 4$

c) $C = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 4$

d) $D = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\frac{1}{x} + 3$

Ví dụ 2

Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

a) $x^2 + x + 1$.

b) $-\frac{3}{2}x^2 + 9x - \frac{27}{2}$.

c) $2x^2 + 6x - 8$.



Ví dụ 3

Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1.$

b) $g(x) = 4x^2 + 4x + 1.$

Ví dụ 4

Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

a) $-3x^2 + x - \sqrt{2}.$

b) $x^2 + 8x + 16.$

c) $-2x^2 + 7x - 3.$

Dạng 2

Giải các bài toán liên quan đến bất phương trình

Phương pháp giải: Dựa vào bảng xét dấu hoặc hệ thức Δ để xét dấu và đưa ra tập nghiệm cho bất phương trình bậc hai một ẩn.

Ví dụ 1

Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2 + x + 5 \leq 0.$

b) $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 \geq 0.$

c) $-x^2 + 2x + 1 > 0.$

Ví dụ 2

Giải bất phương trình bậc hai sau

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0.$

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0.$

Dạng 3 Các bài toán liên quan bất phương bậc hai chứa tham số m

Phương pháp giải:

$$\checkmark \quad ax^2 + bx + c > 0, (a \neq 0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$\checkmark \quad ax^2 + bx + c \geq 0, (a \neq 0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

$$\checkmark \quad ax^2 + bx + c < 0, (a \neq 0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$\checkmark \quad ax^2 + bx + c \leq 0, (a \neq 0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai

$$3x^2 + 2(m - 1)x + m + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai

$$x^2 + (m - 1)x + 2m + 7 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai

$$-x^2 + 2(2m - 3)x - 4m + 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Ví dụ 4

Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai

$$-2x^2 + (m + 2)x + m - 4 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dạng 4

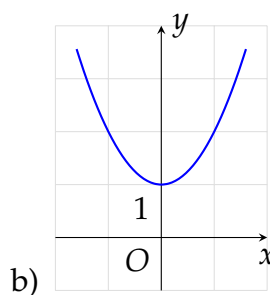
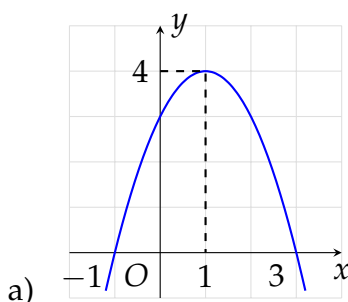
Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai thông qua đồ thị

Phương pháp giải:

- ✔ Nghiệm của tam thức bậc hai chính là giao điểm của Parabol với trục hoành.
- ✔ Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai ta dựa vào miền giá trị âm và dương của Parabol.

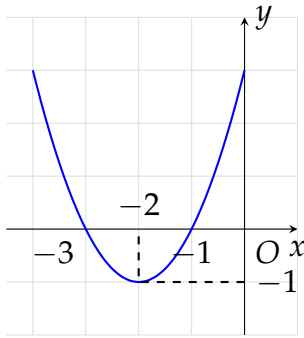
Ví dụ 1

Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị của hàm số được cho ở mỗi hình sau

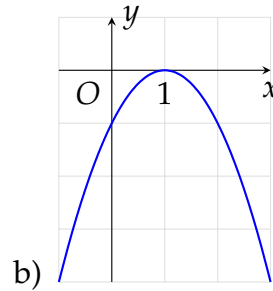


Ví dụ 2

Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị của hàm số được cho ở mỗi hình sau



a)



b)

Dạng 5 Ứng dụng thực tế

Phương pháp giải:

- ✔ Mô phỏng thực tế thành bài toán về bất đẳng thức.
- ✔ Sử dụng kiến thức về xét dấu để giải bất phương trình.
- ✔ Kết luận, trả lời cho câu hỏi đặt ra trong thực tế.

Ví dụ 1

Bác Nam có một tấm lưới hình chữ nhật dài $20(m)$. Bác muốn dùng tấm lưới này để rào chắn 3 mặt áp bên bờ tường của khu nhà mình đang ở thành một mảnh đất hình chữ nhật để trồng rau. Hỏi 2 cột của hàng rào phải cách bờ tường bao xa để diện tích mảnh đất được rào không nhỏ hơn $48(m^2)$.

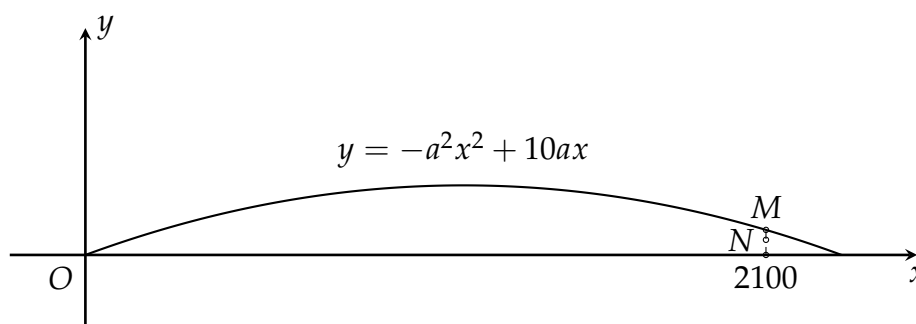
Ví dụ 2

Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng được mô tả bởi hàm số bậc hai $h(t) = -4,9t^2 + 20t + 1$, ở đó độ cao $h(t)$ tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Trong khoảng thời điểm nào trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên $5(m)$ so với mặt đất?



Ví dụ 3

Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100; 25)$ và $N(2100; 15)$ (Hình bên dưới). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Xét dấu tam thức bậc hai sau

a) $3x^2 - 4x + 1$.

c) $-x^2 + 3x - 2$.

b) $x^2 + 2x + 1$.

d) $-x^2 + x - 1$.

Bài 2

Giải các bất phương trình sau

a) $x^2 - 1 \geq 0$.

c) $-3x^2 + 12x + 1 \leq 0$.

b) $x^2 - 2x - 1 < 0$.

d) $5x^2 + x + 1 \geq 0$.

Bài 3

Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai $x^2 + (m + 1)x + 2m + 3$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

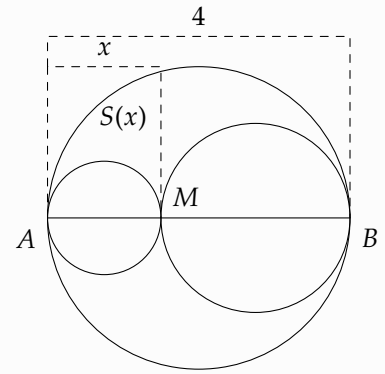
Bài 4

Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 320m với vận tốc ban đầu $v_0 = 20\text{m/s}$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 100m? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.



Bài 5

Xét đường tròn đường kính $AB = 4$ và một điểm M di chuyển trên đoạn AB , đặt $AM = x$. Xét hai đường tròn đường kính AM và BM . Kí hiệu $S(x)$ là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của x để diện tích $S(x)$ không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



Bài 6

Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn? Vì sao?

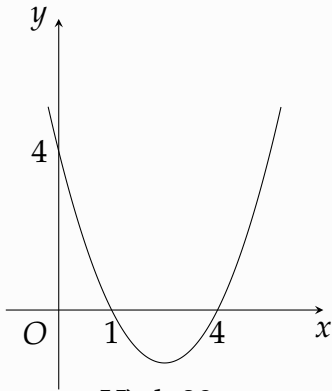
a) $-2x + 2 < 0$.

b) $\frac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}(y + 1) \leq 0$.

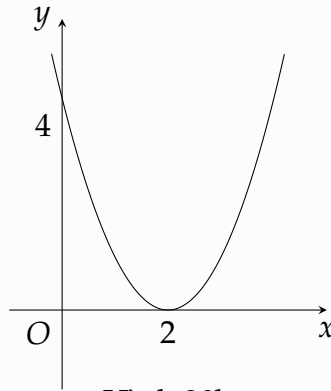
c) $y^2 + x^2 - 2x \geq 0$.

Bài 7

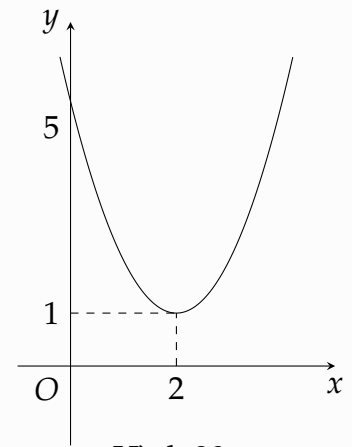
Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x)$ trong các hình dưới đây, hãy viết tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$.



Hình 30a



Hình 30b



Hình 30c

Bài 8

Giải các bất phương trình bậc hai sau

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$.

c) $4x^2 - 12x + 9 < 0$.

b) $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$.

d) $-3x^2 + 7x - 4 \geq 0$.

Bài 9

Tìm m để phương trình $2x^2 + (m + 1)x + m + 8 = 0$ có nghiệm.

Bài 10

Xét hệ tọa độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0; 0, 2)$ và chuyển



động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đó đạt độ cao 8,5 mét sau 1 giây và đạt độ cao 6 mét sau 2 giây.

- Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.
- Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

Bài 11

Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau: 10 khách đầu tiên có giá 800 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ có thêm một người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

- Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .
- Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700 000 đồng/người.

Bài 12

Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai.

- $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$
- $f(x) = 2x - 4$
- $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$
- $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

Bài 13

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

- $x^2 + 2x + 3$;
- $-x^2 - 4x - 4$;
- $2x^2 - 5x + 3$.

**Bài 14**

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $-5x^2 + 3x - 1;$

b) $x^2 + 12x + 36;$

c) $2x^2 + 7x - 15.$

Bài 15

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $-x^2 + 4x - 5;$

b) $x^2 - 6x + 9;$

c) $-x^2 + 2x + 1.$

Bài 16

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $4x^2 + 4x + 2;$

b) $-x^2 + 2x - 1;$

c) $x^2 + 3x - 4.$

Bài 17

Giải bất phương trình $-2x^2 + 5x - 3 \leq 0.$



Bài 18

Giải bất phương trình $x^2 - x + 10 > 0$.

Bài 19

Giải các bất phương trình sau

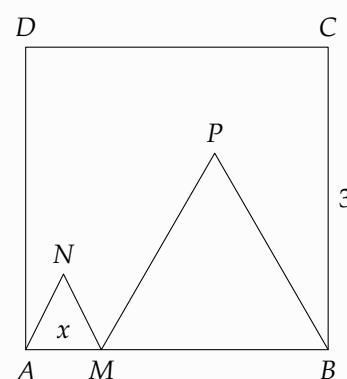
a) $2x^2 - 3x + 5 < 0$;

b) $2x^2 + 9x + 7 \geq 0$;

c) $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

Bài 20

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 và một điểm M di động trên cạnh AB sao cho $AM = x$. Dựng các tam giác đều AMN và MBP nằm bên trong hình vuông $ABCD$. Tìm các giá trị của x sao cho tổng diện tích của hai tam giác đều bé hơn một phần tư diện tích hình vuông $ABCD$.





2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là tam thức bậc 2?

Ⓐ $f(x) = x + 3.$

Ⓑ $f(x) = (m - 1)x^2 + 2x + 5.$

Ⓒ $f(x) = 2x^2 + x - 5.$

Ⓓ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}.$

Câu 2

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Điều kiện để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

Ⓐ $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$

Ⓑ $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}.$

Ⓒ $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$

Ⓓ $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}.$

Câu 3

Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = -x^2 - x + 6$?

Ⓐ

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

B

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0

C

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Câu 4

Cho biểu thức $f(x) = 2(x - 3)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

Ⓐ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3.$

Ⓑ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3.$

Ⓒ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6.$

Ⓓ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -6.$



Câu 5

Biểu thức $f(x)$ là tam thức bậc hai, có bảng xét dấu như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

- ☐ A $f(x) = (x - 2)^2$.
 ☐ B $f(x) = (x + 2)^2$.
 ☐ C $f(x) = -(x + 2)^2$.
 ☐ D $f(x) = -(x - 2)^2$.

Câu 6

Một nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x - 2 \leq 0$ là

- ☐ A $x = 2$.
 ☐ B $x = 3$.
 ☐ C $x = 4$.
 ☐ D $x = 5$.

Câu 7

Số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 + 2m \leq 0$ đúng với mọi x là

- ☐ A 9.
 ☐ B 10.
 ☐ C 11.
 ☐ D 8.

Câu 8

Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + (2m - 1)x + m < 0$ nghiệm đúng với mọi x .



A $m = \frac{1}{2}$.

B $m = -\frac{1}{2}$.

C $m \in \mathbb{R}$.

D Không tồn tại m .

Câu 9

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x^2 + 2(m - 2)x + m - 2 < 0$ có nghiệm.

A $m \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

B $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

C $m \in [2; 4]$.

D $m \in [0; 2]$.

Câu 10

Nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 2x^2 - 8x \leq 0. \end{cases}$

A $x \in (1; 4)$.

B $x \in [0; 4)$.

C $x \in [-4; 1]$.

D $x \in (1; 4]$.

Câu 11

Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

A $m = 0$.

B $m = 3$.

C $m = -3$.

D $m = 1$.



Câu 12

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức $f(x) = x^2 + 4x + m - 5$ luôn luôn dương.

- Ⓐ $m < 9$. Ⓑ $m \geq 9$. Ⓒ $m > 9$. Ⓓ $m \in \emptyset$.

Câu 13

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 4m + 8 < 0$ vô nghiệm.

- Ⓐ $m \in [-1; 7]$. Ⓑ $m \in (-1; 7)$.
Ⓒ $m \in (-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$. Ⓓ $m \in (-1; +\infty)$.

Câu 14

Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} -x^2 + 6x + m - 8 \leq 0 \\ x^2 + mx + 1 > 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- Ⓐ $-2 < m \leq -1$. Ⓑ $-2 \leq m \leq -1$. Ⓒ $m < -1$. Ⓓ $m \leq -1$.

Câu 15

Bạn An muốn trồng một vườn hoa trên mảnh vườn nhà mình. Bạn An chỉ đủ vật liệu để làm 32 m hàng rào. Hỏi diện tích lớn nhất của vườn hoa là bao nhiêu?

- Ⓐ 32 m^2 . Ⓑ 8 m^2 . Ⓒ 16 m^2 . Ⓓ 64 m^2 .



§4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Phương pháp 4.1. Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$, ta thực hiện như sau:

- ✔ Bình phương hai vế và giải phương trình nhận được;
- ✔ Thử lại các giá trị x tìm được ở trên có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 4x - 2} = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Phương pháp 4.2. Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$, ta thực hiện như sau:

- ✔ Bình phương hai vế và giải phương trình nhận được;
- ✔ Thử lại các giá trị x tìm được ở trên có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 5x - 9} = x - 1$.

⚠ Với $x = -2$ thì vế phải âm, vế trái không âm. Do đó, ta có thể kết luận $x = -2$ không là nghiệm của phương trình đã cho mà không cần thử lại.

Vận dụng

Bác Việt sống và làm việc tại trạm hải đăng cách bờ biển 4 km. Hằng tuần bác chèo thuyền vào vị trí gần nhất trên bờ biển là bến Bính để nhận hàng hoá do cơ quan cung cấp. Tuần này, do trục trặc về vận chuyển nên toàn bộ số hàng vẫn đang nằm ở thôn Hoàn, bên bờ biển cách bến Bính 9,25km và sẽ được anh Nam vận chuyển trên con đường dọc bờ biển tới bến Bính bằng xe kéo. Bác Việt đã gọi điện thống nhất với anh Nam là họ sẽ gặp nhau ở vị trí nào đó giữa bến Bính và thôn Hoàn để hai người có mặt tại đó cùng lúc, không mất thời gian chờ nhau. Tìm vị trí hai người dự định gặp nhau, biết rằng vận tốc kéo xe của anh Nam là 5 km/h và thuyền của bác Việt di chuyển với vận tốc 4 km/h. Ngoài ra giả thiết rằng đường bờ biển từ thôn Hoàn đến bến Bính là đường thẳng và

bác Việt cũng luôn chèo thuyền tới một điểm trên bờ biển theo một đường thẳng.

Lời giải.

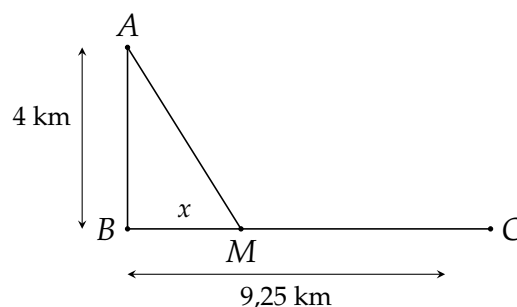
Ta mô hình hoá bài toán như hình bên: Trạm hải đăng ở vị trí A ; bến Bính ở B và thôn Hoàn ở C .

Giả sử bác Việt chèo thuyền cập bến ở vị trí M và ta đặt $BM = x$ ($x > 0$).

Để hai người không phải chờ nhau thì thời gian chèo thuyền bằng thời gian kéo xe nên ta có phương trình:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} = \frac{9,25 - x}{5}.$$

Giải phương trình này sẽ tìm được vị trí hai người dự định gặp nhau.



CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{x^2 - 3x}$.

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{2x + 6}$.

Dạng 2 Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3x - 1$.

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 2} = x + 1$.

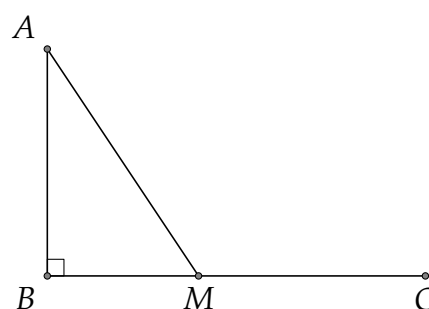
Dạng 3 Bài toán thực tế

Ví dụ 1

Từ một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng 120 cm và cạnh góc vuông còn lại bằng $\frac{\sqrt{3}}{5}$ cạnh của tấm gỗ hình vuông. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ hình tam giác bằng bao nhiêu?

Ví dụ 2

Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng bằng $BC = 7$ km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để thời gian người đó đi đến C là 2 giờ? (làm tròn đến hàng phần mười)





C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Giải các phương trình $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2

Giải phương trình $\sqrt{2x-4} = \sqrt{x^2-3x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3

Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4

Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2} = 2x^2+2x-2$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5

Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2x^2 + 2x - 10$.

Bài 6

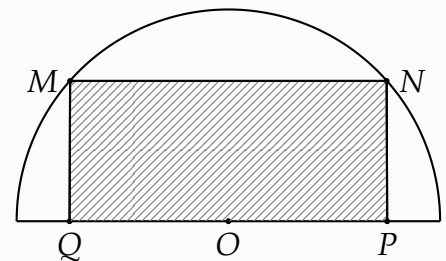
Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x-3} = x-3$.

b) $\sqrt{5x+10} = 8-x$.

Bài 7

Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Tính độ dài cạnh MQ , biết chu vi hình chữ nhật bằng 12.



Bài 8

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 3}$;

c) $\sqrt{2x^2 + 3x - 3} = \sqrt{-x^2 - x + 1}$;

b) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{-2x^2 + 5}$;

d) $\sqrt{-x^2 + 5x - 4} = \sqrt{-2x^2 + 4x + 2}$.



Bài 9

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{6x^2 + 13x + 13} = 2x + 4;$

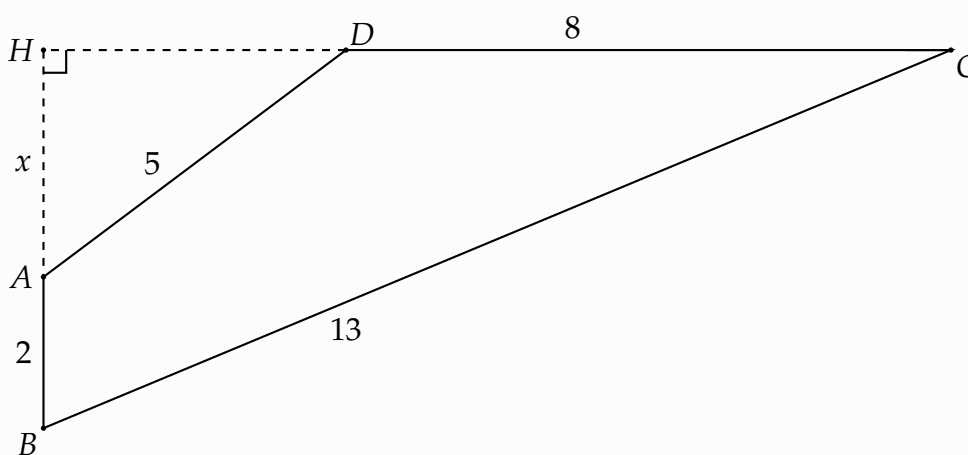
c) $\sqrt{3x^2 - 17x + 23} = x - 3;$

b) $\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = -3 - x;$

d) $\sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2.$

Bài 10

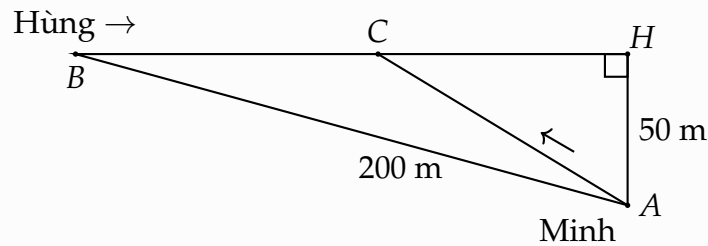
Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \perp CD$; $AB = 2$; $BC = 13$; $CD = 8$; $DA = 5$ (hình bên dưới). Gọi H là giao điểm của AB và CD và đặt $x = AH$. Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài x , từ đó tính diện tích tứ giác $ABCD$.



Bài 11

Hàng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50 m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B , cách mình một đoạn 200 m thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là 5 km/h, vận tốc xe đạp của Hùng là 15 km/h. Hãy xác định vị trí C

trên lề đường (hình bên dưới) để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài 12

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = \sqrt{2x + 3};$

c) $\sqrt{x + 9} = 2x - 3;$

b) $\sqrt{4x^2 - 6x - 6} = \sqrt{x^2 - 6};$

d) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = 2 - x.$

Bài 13

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2 - x} + 2x = 3;$

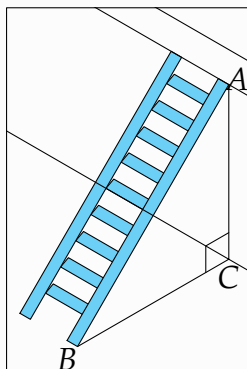
b) $\sqrt{-x^2 + 7x - 6} + x = 4.$

Bài 14

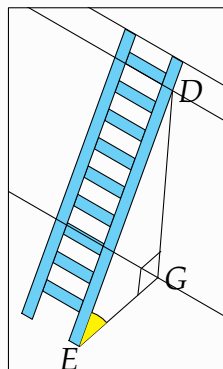
Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1 m. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm vào mép trên bức tường (Hình a). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm 0,5 m thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (Hình b). Bức tường cao bao nhiêu



mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



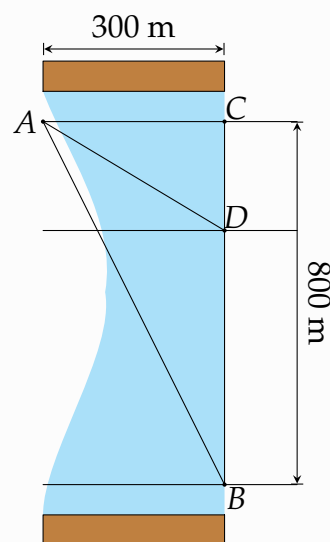
Hình a)



Hình b)

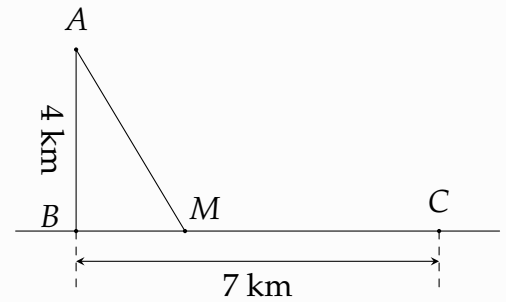
Bài 15

Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D , sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m như hình bên. Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D , biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút.



**Bài 16**

Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5 km/h như hình bên. Tính khoảng cách từ vị trí B đến M , biết thời gian người đó đi từ A đến C là 148 phút.

**Bài 17**

Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 8x - 4} = \sqrt{x^2 - 3x - 1}$.

Bài 18

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 5x - 3} = \sqrt{2x^2 - x - 3}$.

Bài 19

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = \sqrt{-3x^2 - x + 7}$.

b) $\sqrt{3x^2 - x - 6} = \sqrt{x - x^2}$.



Bài 20

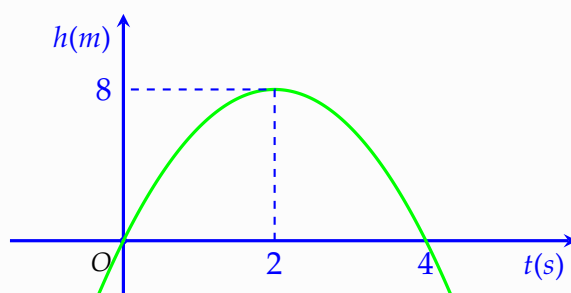
Cho hàm số sau $y = (x - 1)(x + 3)$.

- Hàm số đã cho có phải là hàm số bậc hai không? Nếu có, hãy xác định các hệ số a, b, c của nó.
- Thay dấu “?” bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số đã cho.

x	-3	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?	?

Bài 21

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình bên dưới minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2s, quả bóng đó lên đến vị trí cao nhất là 8m.



- Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.
- Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s.
- Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?



II. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $\sqrt{F(X)} = G(X)$

Bài 22

Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - x + 3} = x + 1$

Bài 23

Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + x + 1} = -x - 1$

Bài 24

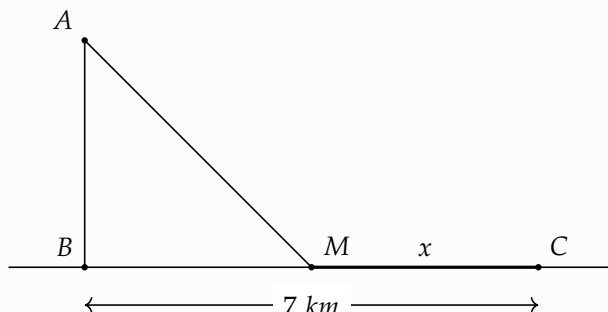
Giải phương trình $\sqrt{5x^2 - x + 3} = 1 - 2x$.

Bài 25

Giải phương trình $\sqrt{5x^2 - 13x + 17} = x - 4$.

Bài 26

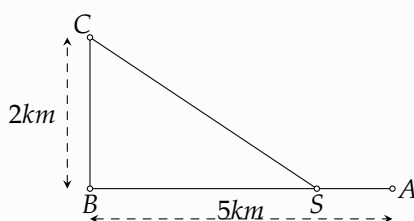
Người thứ nhất chèo thuyền với vận tốc 6 (km/h) vào bờ biển từ một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 4$ (km). Trên bờ biển, người thứ hai đi xe máy với vận tốc 10 (km/h) từ một nhà kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7$ (km) (hình vẽ bên dưới). Xác định vị trí hai người gặp nhau ở vị trí M đến C , biết hai người xuất phát cùng một lúc.



2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C . Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 2 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 17 triệu đồng. Tính số ki-lô-mét đường dây đã thiết kế. (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



- ☐ A 0,5 km.
 ☐ B 0,8 km.
 ☐ C 0,7 km.
 ☐ D 0,4 km.

Câu 2

Cho tứ giác $ABCD$ có $AD \perp BC$; $AD = 1$; $BC = 7$; $CD = 5\sqrt{5}$; $AB = 5$. Gọi H là giao điểm của AD và BC , đặt $HB = x$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.



Ⓐ 38.

Ⓑ 19.

Ⓒ 32.

Ⓓ 16.

Câu 3

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1 + x}$ làⒶ $\emptyset$.Ⓑ $\{-3\}$.Ⓒ $\{1; -3\}$.Ⓓ $\{1\}$.

Câu 4

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2 + 2} \leq x - 1$.Ⓐ $S = \emptyset$.Ⓑ $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.Ⓒ $[1; +\infty)$.Ⓓ $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 5

Bất phương trình $\sqrt{2x - 1} \leq 2x - 3$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc khoảng $(0; 7)$

Ⓐ 4.

Ⓑ 5.

Ⓒ 2.

Ⓓ 6.

Câu 6

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} \geq \sqrt{2x - 5}$ là $[a; b]$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằngⒶ $\frac{125}{4}$.Ⓑ $\frac{15}{4}$.Ⓒ $\frac{61}{4}$.Ⓓ $\frac{11}{4}$.



Câu 7

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+3} \leq 1-x$ là $(a;b)$. Khi đó $4a+2b$ bằng

- Ⓐ $-9 - \sqrt{17}$. Ⓑ $9 + \sqrt{17}$. Ⓒ $7 + \sqrt{17}$. Ⓓ $7 - \sqrt{17}$.

Câu 8

Phương trình $\sqrt{x^2+x+2} = 3x-1$ có nghiệm là

- Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = 0$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = 1$.

Câu 9

Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

- Ⓐ $x = 6$. Ⓑ $x = -6$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $x = 0$.

Câu 10

Phương trình $x - \sqrt{2x+3} = 0$ có nghiệm là

- Ⓐ $\begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $\begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$. Ⓓ $x = 3$.



Câu 11

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$ là

- (A) $S = \{-1, -2\}$. (B) $S = \{-1, 2\}$. (C) $S = \{1, -2\}$. (D) $S = \{1, 2\}$.

Câu 12

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 10x - 5} = 2(x - 1)$ là

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Câu 13

Phương trình $(x^2 + x - 6)\sqrt{2x^2 - x - 10} = 0$ có số nghiệm âm là

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Câu 14

Biết phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x + 16} = x + 4$ có 2 nghiệm là a, b khi đó trung bình cộng của 2 nghiệm trên là

- (A) $\frac{-9}{2}$. (B) $\frac{11}{2}$. (C) -5 . (D) 5.

Câu 15

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x - 1} = \sqrt{1 - x}$?

- (A) 0. (B) Vô số nghiệm. (C) 1. (D) 2.



Câu 16

Phương trình $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ có bao nhiêu nghiệm?

- Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ Vô số.

Câu 17

Phương trình $(x^2 - 6x) \sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 18

Một học sinh đã giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5} = 2 - x$ (1) như sau:

I) $(1) \Leftrightarrow x^2 - 5 = (2 - x)^2$.

II) $\Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$.

III) Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{9}{4}$.

Lý luận trên nếu **sai** thì sai từ giai đoạn nào?

- Ⓐ (I). Ⓑ (III).
Ⓒ (II). Ⓓ Sai cả ba giai đoạn.



Câu 19

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1 + x}$ là

- (A) 3. (B) -3. (C) -2. (D) 1.

Câu 20

Một học sinh tiến hành giải phương trình $\sqrt{5x + 6} = x - 6$ như sau:

✓ **Bước 1.** Điều kiện $5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{6}{5}$.

✓ **Bước 2.** Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{5x + 6} = x - 6 \Leftrightarrow 5x + 6 = (x - 6)^2 \Leftrightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 15. \end{cases}$$

✓ **Bước 3.** Đối chiếu điều kiện, thấy cả 2 nghiệm thỏa mãn nên phương trình có 2 nghiệm $x = 2, x = 15$.

Lời giải của học sinh trên

- (A) Sai từ bước 3. (B) Đúng. (C) Sai từ bước 1. (D) Sai từ bước 2.

Câu 21

Phương trình $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 5 - x$ có nghiệm là $x = \frac{a}{b}$. Khi đó $a + 2b$ bằng

- (A) 10. (B) 33. (C) 17. (D) 13.

Câu 22

Bất phương trình $\sqrt{x^2 + x - 2} \geq \sqrt{2x^2 - 3x - 5}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- (A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



Câu 23

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} > 1 - x$ là

A $\left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty).$

B $\left(-\infty; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup [2; +\infty).$

C $\left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup [2; +\infty).$

D $\left(-\infty; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty).$

Câu 24

Biết tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$ có dạng $[a; b)$. Tính $A = a + b$.

A 12.

B 19.

C 16.

D 18.

Câu 25

Đặt $\sqrt{(x+5)(3-x)} = t, (t \geq 0)$ thì bất phương trình $\sqrt{(x+5)(3-x)} \leq x^2 + 2x + 5$ trở thành

A $t^2 + t - 10 \leq 0.$

B $\sqrt{t} \leq t - 10.$

C $t^2 + t - 20 \leq 0.$

D $t^2 + t - 20 \geq 0.$

Câu 26

Tổng các nghiệm của phương trình $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x(x+3)}$ bằng

A 3.

B 4.

C -3.

D 2.



Câu 27

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{4x^2 + 12x + 13} = 3$ là

Ⓐ $T = \{1; 2\}$.

Ⓑ $T = \{-1; 3\}$.

Ⓒ $T = \phi$.

Ⓓ $T = \left\{-1; -\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 28

Số nghiệm của phương trình $3(x - 2)\sqrt{x^2 + 1} = x^2 + x - 6$ là

Ⓐ 0.

Ⓑ 1.

Ⓒ 2.

Ⓓ 3.

§5. ÔN TẬP CHƯƠNG VI

A TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ là

- Ⓐ $D = [2; +\infty)$. Ⓑ $D = (2; +\infty)$. Ⓒ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ⓓ $D = \mathbb{R}$.

Câu 2

Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có đỉnh là

- Ⓐ $I(-1; 0)$. Ⓑ $I(3; 0)$. Ⓒ $I(0; 3)$. Ⓓ $I(1; 4)$.

Câu 3

Hàm số $y = x^2 - 5x + 4$

- Ⓐ Đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Ⓑ Đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.
Ⓒ Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. Ⓓ Nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.

Câu 4

Bất phương trình $x^2 - 2mx + 4 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi

- Ⓐ $m = -1$. Ⓑ $m = -2$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m > 2$.

Câu 5

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 3} = x - 1$ là

- ☐ A $\{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\}.$ ☐ B $\{-1 - \sqrt{5}\}.$
☐ C $\{-1 + \sqrt{5}\}.$ ☐ D $\emptyset.$

Câu 6

Cho biết điểm nào sau đây không thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$?

- ☐ A $(0; 0).$ ☐ B $(2; 2).$ ☐ C $(-2; 2).$ ☐ D $(1; 2).$

Câu 7

Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$ là

- ☐ A $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$ ☐ B $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$
☐ C $(-2; 2).$ ☐ D $[-2; 2].$

Câu 8

Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(-1; 1).$

- ☐ A $y = x^2.$ ☐ B $y = |x|.$ ☐ C $y = x.$ ☐ D $y = \frac{1}{x}.$



Câu 9

Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = -2x^2 + (m + 1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ là

- (A) 6. (B) 3. (C) 1. (D) 15.

Câu 10

Biết rằng khi $m = m_0$ thì hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 - 1)x^2 + 2x + m - 1$ là hàm số lẻ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 3\right)$. (B) $m_0 \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$. (C) $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. (D) $m_0 \in [3; +\infty)$.

Câu 11

Bảng giá cước của một hãng taxi được cho như sau

Giá mở cửa	Giá km tiếp theo
11 000 đ/0,7 km	15 800 đ/1 km

* **Giá mở cửa:** Khi lên taxi mà quãng đường di chuyển không quá 0,7 km thì hãng taxi vẫn tính 11 000 đồng.

Gọi y (đồng) là số tiền phải trả sau khi đi x km. Hàm số của y theo x là

- (A) $y = \begin{cases} 11\,000 & \text{khi } x \leq 0,7 \\ 15\,800x - 100 & \text{khi } x > 0,7 \end{cases}$ (B) $y = \begin{cases} 11\,000 & \text{khi } x \leq 1 \\ 15\,800x - 150 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$
 (C) $y = \begin{cases} 11\,000 & \text{khi } x \leq 0,7 \\ 15\,800x - 60 & \text{khi } x > 0,7 \end{cases}$ (D) $y = \begin{cases} 11\,000 & \text{khi } x \leq 1 \\ 15\,800x - 70 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Câu 12

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai?

- (A) $y = -2x^2 + 1$. (B) $y = 4x - 3$. (C) $2x^3 - 2x^2 - 1$. (D) $y = 2$.

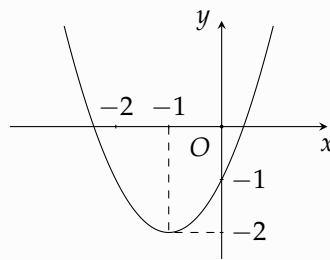
Câu 13

Biết parabol $(P): y = 2x^2 + bx + c$ đi qua điểm $M(0;4)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. Tính $S = b + c$.

- ☐ A $S = 0$.
 ☐ B $S = 1$.
 ☐ C $S = -1$.
 ☐ D $S = 5$.

Câu 14

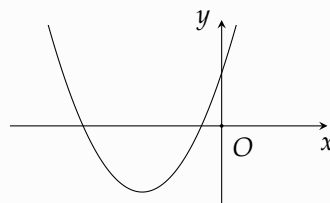
Parabol dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- ☐ A $y = x^2 + 2x - 2$.
 ☐ B $y = -x^2 - 2x + 1$.
 ☐ C $y = x^2 + 2x - 1$.
 ☐ D $y = x^2 - 2x - 1$.

Câu 15

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- ☐ A $a > 0, b < 0, c > 0$.
 ☐ B $a > 0, b > 0, c > 0$.
 ☐ C $a > 0, b = 0, c > 0$.
 ☐ D $a < 0, b > 0, c > 0$.

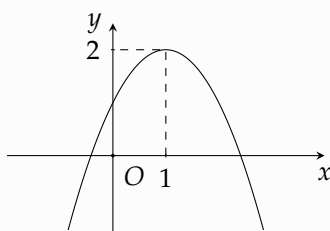
Câu 16

Cho Parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đỉnh $I(-1; 4)$ và đi qua $A(-2; 5)$. Tính $S = a + b + c$.

- (A) $S = 9$. (B) $S = 10$. (C) $S = 8$. (D) $S = 7$.

Câu 17

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.

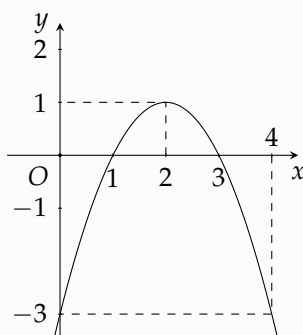


Tìm số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 3000]$ để phương trình $f(x) + m - 2022 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

- (A) 978. (B) 979. (C) 980. (D) 981.

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.





Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f^2(|x|) + mf(|x|) - 4 + 2m = 0$ có 8 nghiệm phân biệt?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.

Câu 19

Nghiệm của phương trình $|2x + 1| = |x - 7|$ là

(A) $x \in \{-3; 2\}$.

(B) $x \in \{2\}$.

(C) $x \in \{-8\}$.

(D) $x \in \{-8; 2\}$.

Câu 20

Tập nghiệm của phương trình $|2x - 3| = |x + 1|$ là tập hợp nào sau đây.

(A) $\left\{\frac{2}{3}; 4\right\}$.

(B) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

(C) $\left\{\frac{2}{3}; -4\right\}$.

(D) $\left\{-\frac{2}{3}; 4\right\}$.

Câu 21

Tập nghiệm của phương trình $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x-1}$ là

(A) $\left\{\frac{1}{4}; -3\right\}$.

(B) $\left\{\frac{1}{2}; -6\right\}$.

(C) $\left\{-\frac{1}{2}; 6\right\}$.

(D) $\left\{-\frac{1}{4}; 3\right\}$.

Câu 22

Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\frac{3}{x-2} + 2x - 1 = \frac{1-3x}{x}$. Số phần tử của tập S là

(A) 0.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 3.



Câu 23

Gọi S là tập nghiệm của phương trình $|2x - 3| = x^2 - x - 7$. Tích các phần tử của tập S bằng

- (A) -40 . (B) $2 + 2\sqrt{41}$. (C) 40 . (D) $-2 - 2\sqrt{41}$.

Câu 24

Biết phương trình $\frac{1}{|x-1|} = 2x + 3$ có một nghiệm x_0 lớn hơn 1, và $x_0 = \frac{a + \sqrt{b}}{4}$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = 32$. (B) $S = 16$. (C) $S = 34$. (D) $S = 17$.

Câu 25

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. (B) $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
(C) $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$. (D) $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Câu 26

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

- (A) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. (B) $[2; +\infty)$.



Ⓒ $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Ⓓ $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 27

Bảng xét dấu sau đây là của tam thức bậc 2 nào?

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Ⓐ $f(x) = -x^2 + 5x - 6$.

Ⓑ $f(x) = x^2 + 5x - 6$.

Ⓒ $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

Ⓓ $f(x) = -x^2 - 5x + 6$.

Câu 28

Cho bất phương trình $(2m^2 + m - 6)x^2 + (2m - 3)x - 1 > 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình vô nghiệm.

Ⓐ $-\frac{5}{6} < m \leq \frac{3}{2}$.

Ⓑ $-\frac{5}{6} < m < \frac{3}{2}$.

Ⓒ $-\frac{5}{6} \leq m < \frac{3}{2}$.

Ⓓ $-\frac{5}{6} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 29

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{(m-2)x^2 - 2(m-3)x + m-1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ⓐ $m > \frac{7}{3}$.

Ⓑ $m < \frac{7}{3}$.

Ⓒ $m \leq \frac{7}{3}$.

Ⓓ $m \geq \frac{7}{3}$.



Câu 30

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình $x^2 - mx - m^2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- Ⓐ 20. Ⓑ 21. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Câu 31

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-5; 5)$?

- Ⓐ 6. Ⓑ 7. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Câu 32

Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{6 - 5x} = 2 - x$.

- Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 33

Cho phương trình $\sqrt{2x + m} = x - 1$. (1)

Tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

- Ⓐ $(-3; 1)$. Ⓑ $(-2; 3)$. Ⓒ $(-3; 2)$. Ⓓ $(-2; 1)$.



Câu 34

Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

- ☐ A $S = \{6; 2\}$.
 ☐ B $S = \{2\}$.
 ☐ C $S = \{6\}$.
 ☐ D $S = \emptyset$.

Câu 35

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-4} = x-2$ là

- ☐ A 1.
 ☐ B 2.
 ☐ C 3.
 ☐ D 4.

Câu 36

Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{x^2-x-12} = 7-x$ là

- ☐ A $S = \emptyset$.
 ☐ B $S = \left\{-\frac{61}{13}\right\}$.
 ☐ C $S = \{7\}$.
 ☐ D $S = \left\{\frac{61}{13}\right\}$.

Câu 37

Số nghiệm của phương trình sau $x - \sqrt{2x^2-3x+1} = 1$ là

- ☐ A 0.
 ☐ B 1.
 ☐ C 2.
 ☐ D 3.

Câu 38

Phương trình $\sqrt{5x^2-5x-2} = 2x-1$ có một nghiệm $x = \frac{a-c\sqrt{13}}{b}$, với a, b, c là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $2a+b+c$ bằng

- (A) 0. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

Câu 39

Cho phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{2x^2 + 2mx + 2m^2 + m - 1}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm là

- (A) 6. (B) 5. (C) Vô số. (D) 8.

Câu 40

Bảng xét dấu nào sau đây là bảng xét dấu của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$?

(A)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

(C)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

(B)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

(D)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Câu 41

Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 - 6x + 8$ không dương?

- (A) $[2; 3]$. (B) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.
(C) $[2; 4]$. (D) $[1; 4]$.

Câu 42

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}} - 1$.

☐ A $\mathcal{D} = [4; +\infty)$.

☐ B $\mathcal{D} = (-5; -3] \cup (3; 4]$.

☐ C $\mathcal{D} = (-\infty; -5)$.

☐ D $\mathcal{D} = (-5; 3) \cup (3; 4]$.

Câu 43

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(x - x^2)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0$?

☐ A 4.

☐ B 2.

☐ C 0.

☐ D Vô số.

Câu 44

Hàm số nào có bảng xét dấu sau?

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

☐ A $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$.

☐ B $f(x) = 5x^2 - 2x - 3$.

☐ C $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$.

☐ D $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

Câu 45

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left| \frac{2-3|x|}{1+x} \right| \leq 1$ là

☐ A 1.

☐ B 2.

☐ C 0.

☐ D 3.



Câu 46

Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = \frac{2x - 3}{\sqrt{(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3}}$ xác định trên $\mathbb{R}$?

(A) 2022.

(B) 2025.

(C) 2021.

(D) 4042.

Câu 47

Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ là

(A) $[1; 2]$.

(B) $[-1; 2]$.

(C) $(1; 2)$.

(D) $[-2; 1]$.

Câu 48

Tìm m để $x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 3 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(A) $m \leq \frac{11}{4}$.

(B) $m < \frac{11}{4}$.

(C) $m > \frac{11}{4}$.

(D) $m \geq \frac{11}{4}$.

Câu 49

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2(m + 3)x - 2m + 1 < 0$ vô nghiệm.

(A) 5.

(B) 6.

(C) Vô số.

(D) 7.

Câu 50

Tìm a để bất phương trình $\sqrt{(x+5)(3-x)} \leq x^2 + 2x + a$ nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định.

- Ⓐ $a \geq 3$. Ⓑ $a \geq 5$. Ⓒ $a \geq 4$. Ⓓ $a \geq 6$.

Câu 51

Cho phương trình $\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 2x^2 + 6x - 11$. Nếu đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x - 5}$ thì phương trình cho trở thành phương trình nào trong các phương trình sau

- Ⓐ $2t^2 - t + 1 = 0$. Ⓑ $t^2 - t - 1 = 0$. Ⓒ $2t^2 - t - 1 = 0$. Ⓓ $2t^2 + t + 1 = 0$.

Câu 52

Phương trình $\frac{x^2 - 3x - 2}{x - 3} = -x$ có nghiệm là a khi đó a thuộc tập

- Ⓐ $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. Ⓑ $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. Ⓓ $\emptyset$.

Câu 53

Giải bất phương trình $\frac{3x - 2}{x - 1} < 2x$ được tập nghiệm là

- Ⓐ $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
Ⓒ $(-2; 1) \cup (2; +\infty)$. Ⓓ $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; 3)$.



Câu 54

Phương trình $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 3$ có số nghiệm thực bằng

- (A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Câu 55

Phương trình $x^2 + 2\sqrt{x+1} + 9 = 7x$ có tổng các nghiệm bằng

- (A) 2. (B) -2. (C) $\frac{11 - \sqrt{17}}{2}$. (D) $\frac{15 - \sqrt{17}}{2}$.

Câu 56

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$.

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
(C) $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. (D) $\mathcal{D} = (-4; 4)$.

Câu 57

Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (P) . Tọa độ đỉnh của (P) là

- (A) (0; 0). (B) (1; -1). (C) (-1; 3). (D) (2; 0).

**Câu 58**

Hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 59

Bất phương trình $-x^2 + 4mx - 4 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi

- Ⓐ $m = -1$. Ⓑ $m > 1$. Ⓒ $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. Ⓓ $-1 < m < 1$.

Câu 60

Biết phương trình $\sqrt{x^2 + 10x - 5} = 2(x - 1)$ có đúng một nghiệm có dạng $x = a + \sqrt{b}$. Tính $a + b$.

- Ⓐ 4. Ⓑ 7. Ⓒ 9. Ⓓ 12.

B TỰ LUẬN**Bài 1**

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{2x - 1} + \sqrt{5 - x}$;

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$.



Bài 2

Với mỗi hàm số dưới đây, hãy vẽ đồ thị, tìm tập giá trị, khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của nó.

a) $y = -x^2 + 6x - 9$;

c) $y = x^2 + 4x$;

b) $y = -x^2 - 4x + 1$;

d) $y = 2x^2 + 2x + 1$.

Bài 3

Xác định parabol (P) : $y = ax^2 + bx + 3$ trong mỗi trường hợp sau

a) (P) đi qua hai điểm $A(1; 1)$ và $B(-1; 0)$;

b) (P) đi qua điểm $M(1; 2)$ và nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng;

c) (P) có đỉnh là $N(1; 4)$.

Bài 4

Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 - 3x + 1 > 0$;

c) $-3x^2 + 12x - 12 \geq 0$;

b) $x^2 + 5x + 4 < 0$;

d) $2x^2 + 2x + 1 < 0$.

Bài 5

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 - 14} = x - 1$;

b) $\sqrt{-x^2 - 5x + 2} = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

Bài 6

Một công ty bắt đầu sản xuất và bán một loại máy tính xách tay từ năm 2018. Số lượng loại máy tính đó bán được trong hai năm liên tiếp 2018 và 2019 lần lượt là 3,2 nghìn và 4 nghìn chiếc. Theo nghiên cứu dự báo thị trường của công ty, trong khoảng 10 năm kể từ năm 2018, số lượng máy tính loại đó bán được mỗi năm có thể được xấp xỉ bởi một hàm số bậc hai.

Giả sử t là thời gian (theo đơn vị năm) tính từ năm 2018. Số lượng loại máy tính đó bán được trong năm 2018 và năm 2019 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $(0; 3,2)$ và $(1; 4)$. Giả sử điểm $(0; 3,2)$ là đỉnh đồ thị của hàm số bậc hai này.

- Lập công thức của hàm số mô tả số lượng máy tính xách tay bán được qua từng năm.
- Tính số lượng máy tính xách tay đó bán được trong năm 2024.
- Đến năm bao nhiêu thì số lượng máy tính xách tay đó bán được trong năm sẽ vượt mức 52 nghìn chiếc?

ÔN TẬP CHƯƠNG VI - PHẦN 2

Bài 7

Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x^2 - x}$;

b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

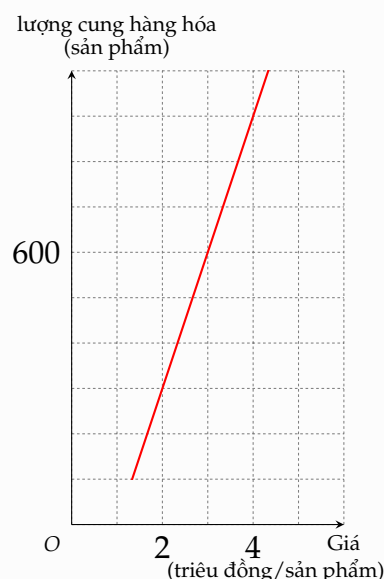
c) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$.



Bài 8

Đồ thị ở hình vẽ bên cho thấy sự phụ thuộc của lượng hàng hóa được sản xuất (cung) (đơn vị: sản phẩm) bởi giá bán (đơn vị: triệu đồng/sản phẩm) đối với một loại hàng hóa.

- Xác định lượng hàng hóa được sản xuất khi mức giá bán một sản phẩm là 2 triệu đồng; 4 triệu đồng.
- Biết nhu cầu thị trường đang cần là 600 sản phẩm. Hỏi với mức giá bán là bao nhiêu thì thị trường cân bằng (thị trường cân bằng khi sản lượng cung bằng sản lượng cầu)?



Bài 9

Một nhà cung cấp dịch vụ Internet đưa ra hai gói khuyến mại cho người dùng như sau:

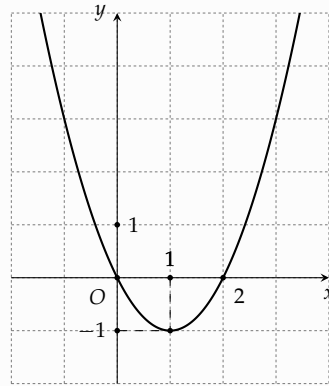
- ✔ Gói A: Giá cước 190.000 đồng/tháng.
Nếu trả tiền cước ngay 6 tháng thì sẽ được tặng thêm 1 tháng.
Nếu trả tiền cước ngay 12 tháng thì sẽ được tặng thêm 2 tháng.
- ✔ Gói B: Giá cước 189.000 đồng/tháng.
Nếu trả tiền cước ngay 7 tháng thì số tiền phải trả cho 7 tháng là 1.134.000 đồng.
Nếu trả tiền cước ngay 15 tháng thì số tiền phải trả cho 15 tháng đó là 2.268.000 đồng.

Giả sử số tháng sử dụng Internet là x (x nguyên dương).

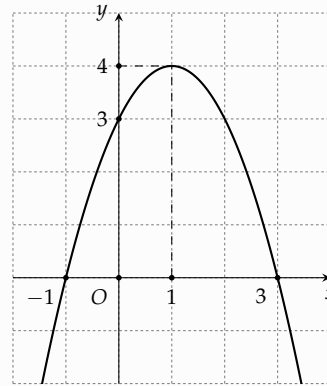
- Hãy lập các hàm số thể hiện số tiền phải trả ít nhất theo mỗi gói A, B nếu thời gian dùng không quá 15 tháng.
- Nếu gia đình bạn Minh dùng 15 tháng thì nên chọn gói nào?

Bài 10

Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ở hình bên dưới rồi nêu:



Hình a.



Hình b.

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) Dấu của hệ số a ; | b) Tọa độ đỉnh và trục đối xứng; |
| c) Khoảng đồng biến; | d) Khoảng nghịch biến; |
| e) Khoảng giá trị x mà $y > 0$; | f) Khoảng giá trị x mà $y \leq 0$. |

Bài 11

Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $y = x^2 - 3x - 4$; | b) $y = x^2 + 2x + 1$; | c) $y = -x^2 + 2x - 2$. |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|

Bài 12

Lập bảng xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$; | b) $f(x) = x^2 - x - 12$; | c) $f(x) = 16x^2 + 24x + 9$. |
|------------------------------|----------------------------|-------------------------------|



Bài 13

Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$;

b) $-3x^2 + x + 1 > 0$;

c) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$;

d) $-16x^2 + 8x - 1 < 0$;

e) $2x^2 + x + 3 < 0$;

f) $-3x^2 + 4x - 5 < 0$.

Bài 14

Giải các phương trình sau:

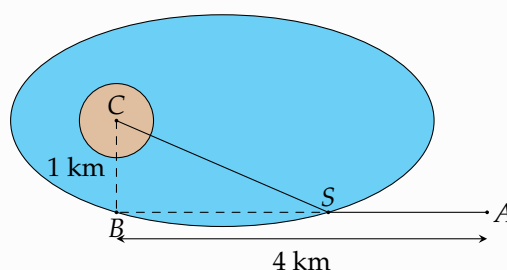
a) $\sqrt{x+2} = x$;

b) $\sqrt{2x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 + x + 6}$;

c) $\sqrt{2x^2 + 3x - 1} = x + 3$.

Bài 15

Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C trên cù lao như hình vẽ. Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 5 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 16 triệu đồng. Tính tổng số ki-lô-mét đường dây điện đã thiết kế.





B CÂU HỎI TỰ LUẬN

Bài 16

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = 3\sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$.

b) $y = 3\sqrt{2-x} - \sqrt{x+3}$.

Bài 17

Với mỗi hàm số dưới đây, hãy vẽ đồ thị, tìm tập giá trị, khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của nó.

a) $y = x^2 - 2x - 3$.

b) $y = x^2 - 2x$.

c) $y = -2x^2 + 4x$.

d) $y = -x^2 - 2x + 3$.

Bài 18

Xác định parabol (P): $y = ax^2 + bx - 2$ trong mỗi trường hợp sau

a) (P) đi qua hai điểm A(2;4) và B(-1;3).

b) Có đỉnh là I(-1;2).

c) Đi qua điểm A(1;4) và nhận $x = -2$ làm trục đối xứng.



Bài 19

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{2-x}$.

b) $y = \frac{-2}{\sqrt{x+1}}$.

Bài 20

Giải các bất phương trình sau

a) $-x^2 + x - 1 \leq 0$.

b) $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

c) $-2x^2 + 3x - 1 < 0$.

d) $x^2 - 5x - 3 \geq 0$.

Bài 21

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x+3} + 6 = 3x$.

b) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2-x}$.

Bài 22

Một công ty bắt đầu sản xuất và bán một loại xe máy từ năm 2018. Số lượng loại xe máy đó bán được trong hai năm liên tiếp 2018 và 2019 lần lượt là 4 nghìn và 4,5 nghìn chiếc. Theo nghiên cứu dự báo thị trường của công ty, trong khoảng 10 năm kể từ 2018, số lượng xe máy loại đó bán được mỗi năm có thể được xấp xỉ bởi một hàm số bậc hai. Giả sử t là thời gian (theo đơn vị năm) tính từ năm 2018. Số lượng loại xe máy đó bán được trong năm 2018 và năm 2019 lần



lượt được biểu diễn bởi các điểm $(0; 4)$ và $(1; 4,5)$. Giả sử điểm $(0; 4)$ là đỉnh đồ thị của hàm số bậc hai này.

- Lập công thức của hàm số mô tả số lượng xe máy bán được qua từng năm.
- Tính số lượng xe máy đó bán được trong năm 2025.
- Đến năm bao nhiêu thì số lượng xe máy đó bán được trong năm sẽ vượt mức 40 nghìn chiếc?

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Chương

4

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giá trị lượng giác của một góc

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , nửa đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành được gọi là **nửa đường tròn đơn vị**.
- Cho trước một góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Khi đó, ta có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\widehat{xOM} = \alpha$.

Định nghĩa 1.1. Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó

- ✔ **sin** của góc α là tung độ y_0 của điểm M , được kí hiệu là $\sin \alpha$.
- ✔ **côsin** của góc α là hoành độ x_0 của điểm M , được kí hiệu là $\cos \alpha$.
- ✔ Khi $\alpha \neq 90^\circ$ (hay là $x_0 \neq 0$), **tang** của α là $\frac{y_0}{x_0}$, được kí hiệu là $\tan \alpha$.
- ✔ Khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ (hay là $y_0 \neq 0$), **côtang** của α là $\frac{x_0}{y_0}$, được kí hiệu là $\cot \alpha$.

2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Hai góc bù nhau

- ✔ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.
- ✔ $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$).
- ✔ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.
- ✔ $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$).

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Xét dấu của các giá trị lượng giác

- ✔ $\sin \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- ✔ $\cos \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\cos \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- ✔ $\tan \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\tan \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- ✔ $\cot \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\cot \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.



Như vậy, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ luôn cùng dấu với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Ví dụ 1

Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$ bằng

- Ⓐ $\frac{9+2\sqrt{2}}{3}$. Ⓑ $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2

Cho biết $\sin \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

- Ⓐ $P = \frac{105}{25}$. Ⓑ $P = \frac{107}{25}$. Ⓒ $P = \frac{109}{25}$. Ⓓ $P = \frac{111}{25}$.

Ví dụ 3

Cho $\tan \alpha = 2$. Giá trị của $A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ là

- Ⓐ 5. Ⓑ $\frac{5}{3}$. Ⓒ 7. Ⓓ $\frac{7}{3}$.

Dạng 2 Tính các giá trị lượng giác

- ✔ Dựa vào định nghĩa các giá trị lượng giác.
- ✔ Sử dụng các công thức lượng giác (công thức lượng giác cơ bản, công thức cộng, công thức nhân đôi, ...).

Ví dụ 1

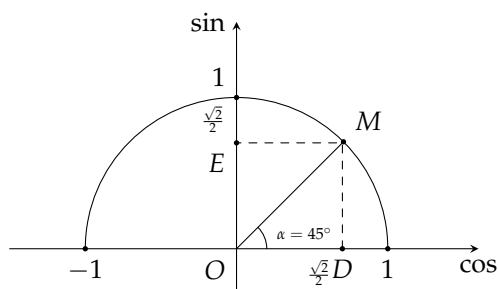
Tính các giá trị lượng giác của các góc: 0° , 90° , 180° .

Ví dụ 2

Tìm các giá trị lượng giác của góc 135° .

Ví dụ 3

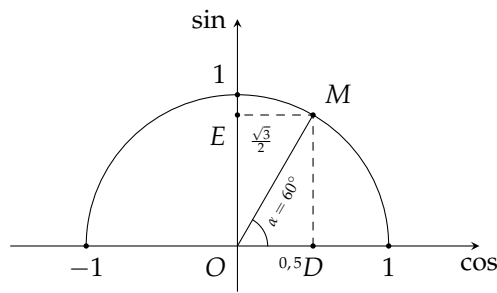
Trên nửa đường tròn đơn vị, cho góc α như hình vẽ. Hãy chỉ ra các giá trị lượng giác của góc α .



- Ⓐ $\sin \alpha = 1; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan \alpha = \sqrt{2}; \cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- Ⓑ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan \alpha = 1; \cot \alpha = 1.$
- Ⓒ $\sin \alpha = 0,5; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cot \alpha = \sqrt{2}.$
- Ⓓ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha = 1; \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cot \alpha = \sqrt{2}.$

Ví dụ 4

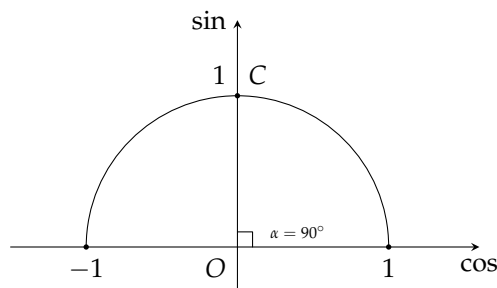
Trên nửa đường tròn đơn vị, cho góc α như hình vẽ. Hãy chỉ ra các giá trị lượng giác của góc α .



- A** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \alpha = 0,5; \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}; \cot \alpha = \sqrt{3}.$
B $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \alpha = 0,5; \tan \alpha = \sqrt{3}; \cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$
C $\sin \alpha = 0,5; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan \alpha = \sqrt{3}; \cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$
D $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \alpha = 1; \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Ví dụ 5

Trên nửa đường tròn đơn vị, cho góc α như hình vẽ. Hãy chỉ ra các giá trị lượng giác của góc α .



- A** $\sin \alpha = 1; \cos \alpha = 0; \tan \alpha$ không xác định; $\cot \alpha = 1.$
B $\sin \alpha = 0; \cos \alpha = 1; \tan \alpha = 1; \cot \alpha = 0.$
C $\sin \alpha = 1; \cos \alpha = 0; \tan \alpha$ không xác định; $\cot \alpha = 0.$
D $\sin \alpha = 1; \cos \alpha = 0; \tan \alpha = 0; \cot \alpha$ không xác định.

Ví dụ 6

Viết giá trị lượng giác của góc 120° .

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7

Cho $\alpha, 90^\circ < \alpha < 108^\circ$. Hãy tìm $\cos \alpha$, biết $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

.....

.....

.....

.....

.....



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Xác định dấu của các giá trị lượng giác của các góc lượng giác sau

a) -438° .

b) 500° .

Bài 2

Xác định dấu các biểu thức sau

a) $\sin 156^\circ \times \cos(-70^\circ)$.

b) $\sin 110^\circ \times \cos 110^\circ$.

Bài 3

Cho số thực x thuộc khoảng $(108^\circ; 270^\circ)$. Biết rằng $\tan x = \frac{2}{3}$. Tính giá trị các giá trị lượng giác còn lại.

Bài 4

Tính các giá trị lượng giác còn lại của α , biết

a) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

b) $\sin \alpha = 0,8$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

c) $\tan \alpha = \frac{15}{8}$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

d) $\cot \alpha = -3$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Bài 5

Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ và $\cot x$, biết

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

b) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

Bài 6

Tính $\tan \frac{\alpha}{2}$, biết

a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

b) $\tan \alpha = \frac{24}{7}$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

c) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ và $0^\circ < \alpha < 30^\circ$.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Giá trị lượng giác nào sau đây là số dương

☐ A $\sin 190$.

☐ B $\cos 2021$.

☐ C $\tan 35$.

☐ D $\cot 4$.



Câu 2

Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Tính $\cos \alpha$.

☐ A $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

☐ B $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

☐ C $\cos \alpha = \frac{5}{3}$.

☐ D $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Câu 3

Cho $x \in (5; 6)$. Phát biểu nào sau đây sai

☐ A $\tan x < 0$.

☐ B $\cot x < 0$.

☐ C $\sin x > 0$.

☐ D $\cos x > 0$.

Câu 4

Cho $x \in \left(\frac{7}{2}; 4\right)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☐ A $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$.

☐ B $\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sin x$.

☐ C $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \tan x$.

☐ D $\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} = \cos x$.

Câu 5

Cho $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☐ A $\sin x > 0$.

☐ B $\cos x > 0$.

☐ C $\tan x > 0$.

☐ D $\cot x > 0$.



Câu 6

Giá trị lượng giác nào sau đây là số dương?

☐ A $\tan 3$.

☐ B $\cos 2$.

☐ C $\sin 4$.

☐ D $\tan 1$.

Câu 7

Cho tam giác ABC và hai biểu thức

a) $P = \sin A + \sin B + \sin C$.

b) $Q = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

☐ A $P > 0, Q > 0$.

☐ B $P < 0, Q > 0$.

☐ C $P > 0, Q < 0$.

☐ D $P < 0, Q < 0$.

Câu 8

Cho $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$. Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau

☐ A $\sin x \times \cos x < 0$.

☐ B $\tan x > 0$.

☐ C $\sin 3x > 0$.

☐ D $\cos 2x < 0$.

Câu 9

Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$, với $\pi < \alpha < \frac{2\pi}{3}$. Khi đó, $\tan \alpha$ bằng

☐ A $\frac{\sqrt{21}}{5}$.

☐ B $-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

☐ C $-\frac{\sqrt{21}}{5}$.

☐ D $\frac{\sqrt{21}}{2}$.



Câu 10

Tính giá trị của $\cot \frac{89\pi}{6}$.

- Ⓐ $\cot \frac{89\pi}{6} = \sqrt{3}$. Ⓑ $\cot \frac{89\pi}{6} = -\sqrt{3}$. Ⓒ $\cot \frac{89\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\cot \frac{89\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11

Giá trị của $\cot 1458^\circ$ là

- Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ 0. Ⓓ $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Câu 12

Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\cos \alpha$ là

- Ⓐ $\frac{4}{5}$. Ⓑ $-\frac{4}{5}$. Ⓒ $\pm \frac{4}{5}$. Ⓓ $\frac{16}{25}$.

Câu 13

Cho $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khi đó

- Ⓐ $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$. Ⓑ $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.
 Ⓒ $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$. Ⓓ $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.



Câu 14

Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$). Khi đó $\tan \alpha$ bằng

Ⓐ $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Ⓑ $-\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Ⓒ $\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Ⓓ $-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 15

Trên nửa đường tròn đơn vị cho góc α sao cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ và $\cos \alpha < 0$. Tính $\tan \alpha$.

Ⓐ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ⓑ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ⓒ $-\frac{2}{5}$.

Ⓓ 1.

D LUYỆN TẬP

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Xác định dấu của $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ biết $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}\right)$.

☞ $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$

Bài 2

Biết rằng $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Xác định dấu của biểu thức

a) $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

b) $Q = \tan \alpha \times \sin \alpha$.

☞ $P > 0$, $Q < 0$



Bài 3

Cho x là số thực. Xét dấu của các biểu thức sau

a) $T_1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \times \sin 2x$ với $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

b) $T_2 = \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) \times \tan\left(x + \frac{6\pi}{5}\right)$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

$\Rightarrow T_1 > 0, T_2 > 0$

Bài 4

Tính giá trị lượng giác của các góc

a) $\cos 225^\circ; \sin 240^\circ; \tan 75^\circ; \cot(-15^\circ)$. b) $\sin \frac{7\pi}{12}; \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right); \tan\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$.

$\Rightarrow \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}, \cot(-15^\circ) = -(2 + \sqrt{3})$

Bài 5

Dùng máy tính bỏ túi, tìm các giá trị lượng giác sau: $\sin 10^\circ; \cos \frac{\pi}{9}; \tan \frac{10\pi}{9}; \cot(1,35)$ (chính xác đến hàng phần nghìn).

$\Rightarrow \sin 10^\circ \approx 0,174, \cos \frac{\pi}{9} \approx 0,940, \tan \frac{10\pi}{9} \approx 0,364, \cot(1,35) \approx 42,433$

Bài 6

Tính $\cos x$, $\tan x$ và $\cot x$, biết

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$;

b) $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $270^\circ < x < 360^\circ$.

 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot x = -\sqrt{3}$

Bài 7

Tính $\cot x$, $\sin x$ và $\cos x$, biết

a) $\tan x = \frac{3}{4}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

b) $\tan x = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

 $\cot x = \frac{4}{3}$, $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$

Bài 8

Tính $\tan x$, $\sin x$ và $\cos x$, biết

a) $\cot x = \frac{2}{3}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

b) $\cot x = -\sqrt{3}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

 $\tan x = \frac{3}{2}$, $\sin x = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{13}}{13}$



Bài 9

Tính giá trị lượng giác của các cung sau: 285° ; 105° ; $\frac{19\pi}{12}$.

$$\sin 285^\circ = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos 285^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \tan 285^\circ = -2 - \sqrt{3}, \cot 285^\circ = -2 + \sqrt{3}$$

Bài 10

Không dùng bảng các giá trị lượng giác, hãy tính $\sin 18^\circ$.

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- ☐ A $\tan \alpha < 0$.
 ☐ B $\cot \alpha > 0$.
 ☐ C $\sin \alpha > 0$.
 ☐ D $\cos \alpha > 0$.

Câu 2

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\sin(-438^\circ) > 0$.
 ☐ B $\cos 500^\circ > 0$.
 ☐ C $\tan \frac{25\pi}{6} < 0$.
 ☐ D $\cot(-20) < 0$.

Câu 3

Cho các phát biểu

- a) $\cot(-78^\circ) < 0$. b) $\sin 2020^\circ < 0$. c) $\cos(58^\circ) < 0$. d) $\tan 156^\circ < 0$.

Số phát biểu đúng là

- ☐ A 1. ☐ B 2. ☐ C 3. ☐ D 4.

Câu 4

Chọn phát biểu đúng.

- ☐ A $\sqrt{1 - \sin^2 5^\circ} = -\cos 5^\circ$. ☐ B $\sqrt{1 - \cos^2 5} = -\sin 5$.
☐ C $\sqrt{1 - \sin^2 96^\circ} = \cos 96^\circ$. ☐ D $\sqrt{1 - \cos^2 6} = \sin 6$.

Câu 5

Giá trị của $\tan 180^\circ$ bằng

- ☐ A 1. ☐ B 0. ☐ C -1 . ☐ D Không xác định.

Câu 6

Tính giá trị của $\sin 1410^\circ$.

- ☐ A $\sin 1410^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ B $\sin 1410^\circ = \frac{1}{2}$. ☐ C $\sin 1410^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ☐ D $\sin 1410^\circ = -\frac{1}{2}$.



Câu 7

Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$

- Ⓐ $\cot \alpha = 2$. Ⓑ $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. Ⓒ $\cot \alpha = \frac{1}{2}$. Ⓓ $\cot \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 8

Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$. Tính $\sin \alpha$.

- Ⓐ $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Ⓑ $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$. Ⓒ $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Ⓓ $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Câu 9

Cho $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Giá trị của $\tan 15^\circ$ bằng

- Ⓐ $\sqrt{3} - 2$. Ⓑ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Ⓒ $2 - \sqrt{3}$. Ⓓ $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10

Cho $\tan \alpha = \sqrt{5}$, với $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Khi đó $\cos \alpha$ bằng

- Ⓐ $-\frac{\sqrt{6}}{6}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Ⓓ $\frac{1}{6}$.

Câu 11

Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ và $0^\circ < x < 90^\circ$. Tính giá trị của $\sin x$

- Ⓐ $\sin x = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$. Ⓑ $\sin x = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}$. Ⓒ $\sin x = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$. Ⓓ $\sin x = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$.

.....

.....

.....

.....

.....

§2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý cosin

Định lý 2.1. Trong tam giác ABC , ta kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C . Khi đó:

$$\checkmark a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad \checkmark b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad \checkmark c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

⚠ Từ Định lý cosin, ta tính được $\cos A, \cos B, \cos C$ theo độ dài các cạnh a, b, c của tam giác ABC , cụ thể:

$$\checkmark \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \checkmark \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \checkmark \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lý sin

Định lý 2.2. Trong tam giác ABC , ta kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C . R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

3. Công thức tính diện tích tam giác

Trong tam giác ABC , ta kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C ; p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC . Khi đó

$$\begin{aligned} \checkmark S &= pr = \frac{(a+b+c)r}{2}; & \checkmark S &= \frac{abc}{4R}; \\ \checkmark S &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C; & \checkmark S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tính các đại lượng trong tam giác

Để tính các đại lượng trong tam giác, ta thường sử dụng các định lý cosin, định lý sin, định lý tổng 3 góc của một tam giác bằng 180° .

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = 4, AC = 7$. Tính độ dài cạnh BC .

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $a = 10, b = 11, c = 13$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

Ví dụ 3

Tính diện tích S của tam giác ABC có $c = 3, b = 5, \hat{A} = 120^\circ$.

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 100^\circ, \hat{C} = 35^\circ$ và $b = 10$. Tính a, c, R và số đo góc B .

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = 5, AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC .

Ví dụ 6

Tính diện tích S của tam giác ABC có $c = 4, b = 6, \hat{A} = 150^\circ$.

**Dạng 2 Chứng minh các hệ thức**

- ✔ Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi về này thành về kia, hai về cùng bằng một về hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- ✔ Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Bunhiacôpxki...).

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$;

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC , chứng minh rằng

a) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$;

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$;

b) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$.



Ví dụ 4

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Dạng 3 Giải tam giác và ứng dụng thực tế

Phương pháp:

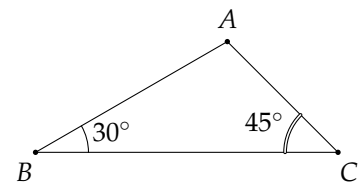
Việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó được gọi là giải tam giác.

Áp dụng các định lý côsin, sin và sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính (gần đúng) các cạnh và các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

- Biết hai cạnh và góc xen giữa;
- Biết ba cạnh;
- Biết một cạnh và hai góc.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $BC = 20$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính các cạnh AB , AC của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



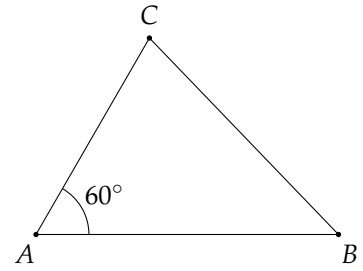
Ví dụ 2

Tam giác có độ dài ba cạnh là 4, 5, 8. Góc nhỏ nhất của tam giác có số đo bằng bao nhiêu?



Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có $AB = 20$, $AC = 15$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính cạnh BC và các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

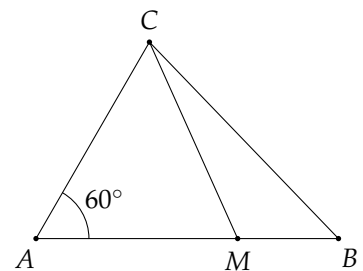


Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có $AB = 9$, $BC = 12$, $AC = 16$. Tính các góc A, B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Ví dụ 5

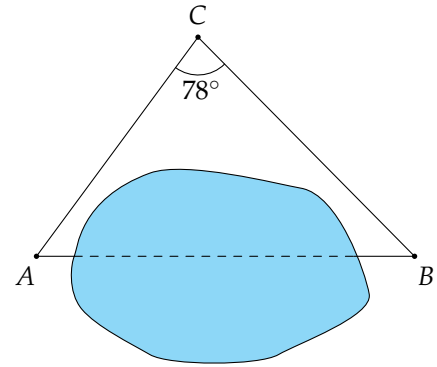
Cho tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 9$, $\widehat{A} = 60^\circ$. M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM = 2BM$. Tính cạnh CM và góc $\widehat{BCM}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).





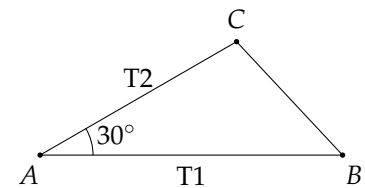
Ví dụ 6

Để đo khoảng cách từ A đến B ngang qua một cái hồ nước, người ta chọn điểm C , sau đó đo độ dài các cạnh AC , BC và góc C . Tính khoảng cách từ A đến B biết $AC = 120$ m, $BC = 160$ m, $\widehat{C} = 78^\circ$.



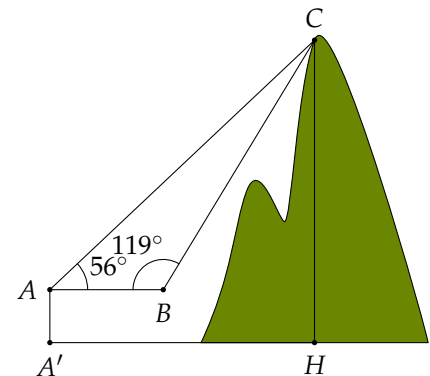
Ví dụ 7

Hai chiếc tàu thủy rời cảng ở cùng một thời điểm, theo hai hướng tạo với nhau góc 30° (hình vẽ). Tàu T1 chạy với vận tốc trung bình 30 hải lý/giờ, tàu T2 chạy với vận tốc trung bình 25 hải lý/giờ. Hỏi sau 90 phút, hai tàu cách nhau khoảng bao nhiêu hải lý?



Ví dụ 8

Để đo chiều cao CH của một ngọn núi, từ điểm A, B cách mặt đất 1,5 m, người ta đo được các góc $\widehat{CAB} = 56^\circ$, $\widehat{CBA} = 119^\circ$ (hình vẽ). Tính CH biết A và B cách nhau 50 m.





.....





BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Cho tam giác ABC có $a = 13, b = 14, c = 15$.

- Tính $\sin A$
- Tính diện tích S bằng hai cách khác nhau.

Bài 2

Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 5$ và $\widehat{A} = 120^\circ$.

- Tính $\cos A$.
- Tính độ dài cạnh BC .

Bài 3

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ, \widehat{B} = 45^\circ$ và $CA = 20$. Tính

- $\sin A$.
- Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Bài 4

Cho tam giác ABC , biết

a) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 45^\circ, b = 4$. Tính cạnh a và c .

b) $\hat{A} = 60^\circ, a = 6$. Tính R .

Bài 5

Cho tam giác ABC có $b = 8, c = 5$ và $\hat{B} = 80^\circ$. Tính số đo các góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài cạnh còn lại của tam giác.

Bài 6

Cho tam giác ABC có $AB = 7,5; AC = 15,5; \hat{A} = 75^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 7

Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ, AC = 10$. Tính a, R, S, r .



Bài 8

Cho tam giác ABC có $AB = 3,5$; $AC = 7,5$; $\widehat{A} = 135^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 9

Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$. Tính $\cos A$, $\sin A$ và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 10

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có

- a) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$.
- b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.
- c) $h_a = 2R \sin B \sin C$.
- d) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$.

Bài 11

Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh rằng

- a) Tam giác ABC nhọn.
- b) $2 \sin^2 A = \tan B \tan C$.



Bài 12

Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD . Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

Bài 13

Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

$$a) \frac{\cos A + \cos B}{a + b} = \frac{(b + c - a)(c + a - b)}{2abc}.$$

$$b) (c^2 + b^2 - a^2) \tan A = (c^2 + a^2 - b^2) \tan B.$$

Bài 14

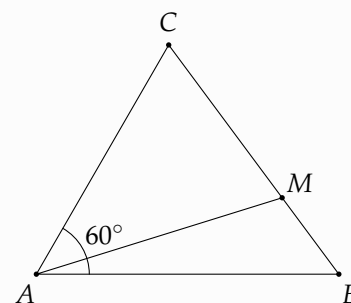
Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 9$. Tính các góc A , B , C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 15

Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 12$, $\widehat{A} = 120^\circ$. Tính cạnh BC và các góc B , C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

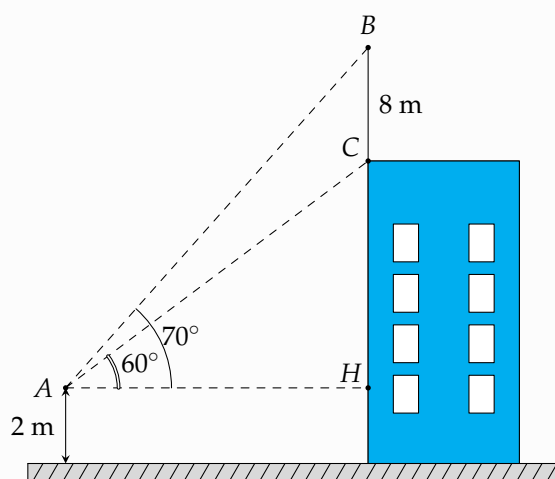
Bài 16

Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 8$, $\widehat{A} = 60^\circ$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $CM = 2BM$. Tính độ dài cạnh BC , AM và góc B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



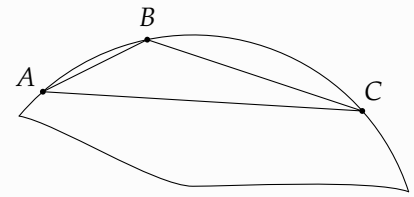
Bài 17

Trên nóc một toà nhà có một cột ăng-ten cao 8 m. Từ một vị trí quan sát A cao 2 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 70° và 60° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của toà nhà (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài 18

Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết $AB = 6,1$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 16,8$ cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài 19

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 135^\circ$, $\widehat{C} = 15^\circ$ và $b = 12$. Tính a , c , R và số đo góc B .

$$\text{ĐS: } a = 12\sqrt{2}; c = 6,21; R = 12$$

Bài 20

Cho tam giác ABC có $AB = 15$, $AC = 35$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

$$\text{ĐS: } B \approx 30,4; \widehat{B} \approx 95^\circ$$

Bài 21

Cho tam giác ABC biết

a) $a = 12$, $b = 13$, $c = 15$. Tính số đo góc A .

$$\text{ĐS: } \widehat{A} \approx 50^\circ$$

b) $AB = 5$, $AC = 8$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

$$\text{ĐS: } BC = 7$$

Bài 22

Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\widehat{A} = 45^\circ$. Tính độ dài các cạnh và độ lớn các góc còn lại của tam giác.

$$\text{☞ } BC = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}}; \widehat{B} \approx 96^\circ; \widehat{C} = 39^\circ$$

Bài 23

Cho tam giác ABC có $a = 6$, $b = 5$, $c = 8$. Tính $\cos A$, S , r .

$$\text{☞ } \cos A = \frac{53}{80}; S = \frac{3\sqrt{399}}{4}; r = \frac{3\sqrt{399}}{38}$$

Bài 24

Cho tam giác ABC có $a = 10$, $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$. Tính R , b , c .

$$\text{☞ } R = 5\sqrt{2}; b \approx 13,28; c \approx 12,81$$

Bài 25

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB .

$$\text{☞ } \frac{50\sqrt{6}}{3}$$

Bài 26

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) $b + c = 2a \Leftrightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

b) Góc A vuông $\Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$.

Bài 27

Gọi S là diện tích tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

b) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Bài 28

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$, AD là đường phân giác trong ($D \in BC$). Chứng minh rằng $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Bài 29

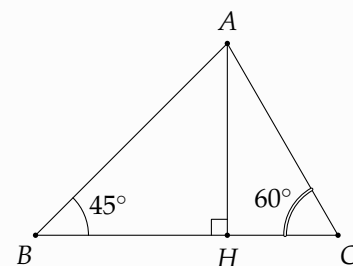
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$.
Chứng minh rằng: $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$.

Bài 30

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 55^\circ$, $AB = 30$. Tính các cạnh AC , BC của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

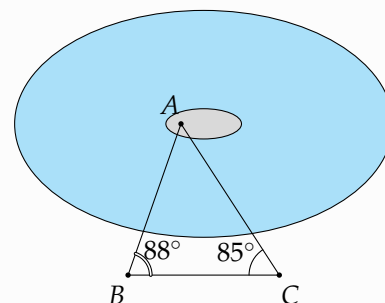
Bài 31

Cho tam giác ABC có $BC = 80$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



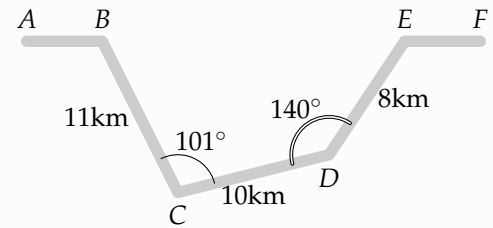
Bài 32

Ở giữa một cái hồ có một cái đảo nhỏ. Để tính khoảng cách từ điểm A trên đảo đến điểm B trên bờ hồ, người ta chọn điểm C . Sau đó thực hiện đo các góc B , C và khoảng cách BC . Biết $\widehat{B} = 88^\circ$, $\widehat{C} = 85^\circ$ và $BC = 50$ m, tính khoảng cách từ A đến B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



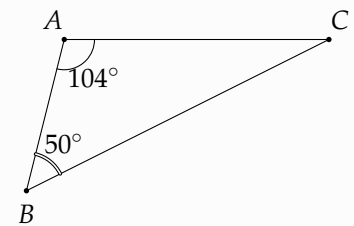
Bài 33

Để tránh núi, đường đi hiện tại phải vòng qua núi như mô hình trong hình vẽ. Hỏi quãng đường đi thẳng từ B đến E dài bao nhiêu km (làm tròn đến hàng phần mười)?



Bài 34

Hai tàu A và B cùng xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc không đổi, tàu A chuyển động với vận tốc 35 km/h. Sau 2 h chúng gặp nhau tại C (hình vẽ). Giả sử hai tàu chuyển động thẳng trong suốt quá trình di chuyển, tính vận tốc tàu B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Bài 35

Bạn Tèo chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài và bạn ấy muốn đo bán kính của đường tròn lớn của tượng đài ở công viên Sông Ray (tâm của đường tròn lớn này bị che khuất bởi tượng cây đuốc). Bạn Tèo đang loay hoay không biết làm cách nào để đo được bán kính của đường tròn này. Hãy tìm cách giúp bạn Tèo hoàn thành công việc.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A $S = \frac{abc}{4r}$.

☐ B $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

☐ C $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

☐ D $S = r(a+b+c)$.

Câu 2

Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a = 6$ cm, $AC = b = 7$ cm, $AB = c = 5$ cm. Tính $\cos B$.

☐ A $\cos B = \frac{5}{7}$.

☐ B $\cos B = \frac{19}{35}$.

☐ C $\cos B = \frac{1}{15}$.

☐ D $\cos B = \frac{1}{5}$.

Câu 3

Tính diện tích của tam giác ABC có $b = 2$, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$.

☐ A $2 + 2\sqrt{3}$.

☐ B 1.

☐ C $\sqrt{3}$.

☐ D $1 + \sqrt{3}$.

Câu 4

Trong tam giác ABC có góc $\widehat{A} = 60^\circ$, $AC = 10$, $AB = 6$. Khi đó, độ dài cạnh BC là

☐ A $2\sqrt{19}$.

☐ B 76.

☐ C 14.

☐ D $6\sqrt{2}$.



Câu 5

Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Khi đó độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A bằng

☐ A $\frac{3\sqrt{15}}{2}$.

☐ B $\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

☐ C $\frac{3\sqrt{15}}{8}$.

☐ D $3\sqrt{15}$.

Câu 6

Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 8$ cm. Giá trị của $\cos B$ là

☐ A $\frac{1}{2}$.

☐ B $\frac{1}{4}$.

☐ C $\frac{17}{32}$.

☐ D $\frac{11}{16}$.

Câu 7

Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC có ba cạnh là 13, 14, 15.

☐ A 3.

☐ B 2.

☐ C 4.

☐ D $\sqrt{2}$.

Câu 8

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chọn đẳng thức **sai**.

☐ A $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

☐ B $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

☐ C $c^2 = b^2 + a^2 + 2ab \cos C$.

☐ D $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$.



Câu 9

Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$.
 ☐ B $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$.
 ☐ C $a \cdot \sin A = b \cdot \sin B = c \cdot \sin C$.
 ☐ D $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Câu 10

Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến kẻ từ A và B vuông góc với nhau. Khi đó tỉ số $\frac{CA^2 + CB^2}{AB^2}$ bằng

- ☐ A 20.
 ☐ B 1.
 ☐ C 10.
 ☐ D 5.

Câu 11

Trong tam giác ABC có

- ☐ A $m_a = \frac{b+c}{2}$.
 ☐ B $m_a > \frac{b+c}{2}$.
 ☐ C $m_a < \frac{b+c}{2}$.
 ☐ D $m_a = b+c$.

Câu 12

Cho $\triangle ABC$ có $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\triangle ABC$ cân tại A .
 ☐ B $\triangle ABC$ cân tại B .
 ☐ C $\triangle ABC$ vuông tại A .
 ☐ D $\triangle ABC$ đều.

Câu 13

Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\triangle ABC$ vuông tại B .
☐ B $\widehat{ABC} \leq 60^\circ$.
☐ C $\widehat{BAC} \leq 60^\circ$.
☐ D $\triangle ABC$ đều.

Câu 14

Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 45^\circ, AB = 9$. Độ dài cạnh AC là

- ☐ A $\frac{6\sqrt{6}}{2}$.
☐ B $3\sqrt{6}$.
☐ C $\frac{9\sqrt{6}}{2}$.
☐ D $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15

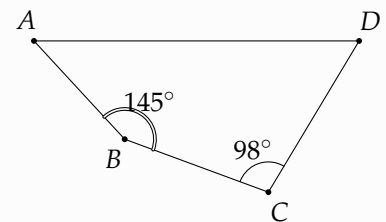
Cho tam giác ABC có $AB = 16, BC = 18, AC = 20$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BM = 2CM$. Tính góc $\widehat{BAM}$.

- ☐ A $40,5^\circ$.
☐ B $42,9^\circ$.
☐ C $38,9^\circ$.
☐ D $44,5^\circ$.

Câu 16

Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 35, BC = 42, CD = 51, \widehat{ABC} = 145^\circ, \widehat{BCD} = 98^\circ$. Tính độ dài cạnh AD .

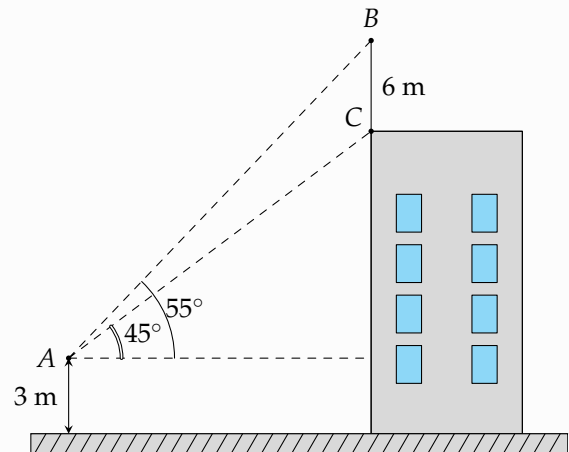
- ☐ A 74,2.
☐ B 77,3.
☐ C 71,7.
☐ D 70,5.



Câu 17

Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 6 m. Từ vị trí quan sát A cao 3 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 55° và 45° so với phương ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với số nào dưới đây?

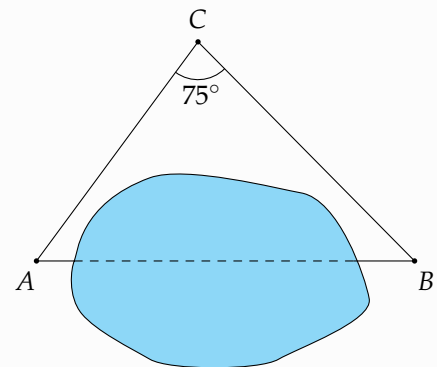
- ☐ A 17 m. ☐ B 17,1 m.
☐ C 18,1 m. ☐ D 18 m.



Câu 18

Để đo khoảng cách từ A đến B ngang qua một cái hồ nước, người ta chọn điểm C , sau đó đo độ dài các cạnh AC , BC và góc C . Biết $AC = 112$ m, $BC = 145$ m, $\widehat{C} = 75^\circ$, khoảng cách từ A đến B gần nhất với giá trị nào dưới đây?

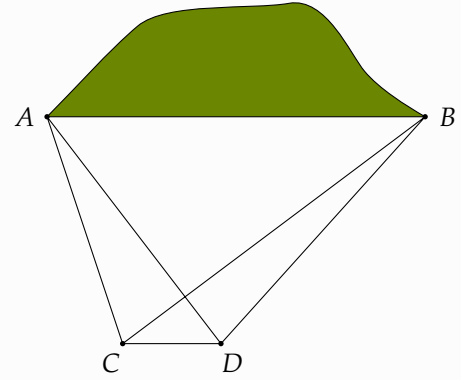
- ☐ A 155 m. ☐ B 160 m. ☐ C 165 m. ☐ D 170 m.



Câu 19

Để đo khoảng cách giữa hai điểm A, B trên hòn đảo ngoài biển. Người ta đo được các góc $\widehat{ACD} = 112^\circ$, $\widehat{ADC} = 55^\circ$, $\widehat{BDC} = 138^\circ$, $\widehat{BCD} = 38^\circ$. Biết $CD = 100$ m, khoảng cách từ A đến B nằm trong khoảng nào dưới đây? (Đơn vị là m)

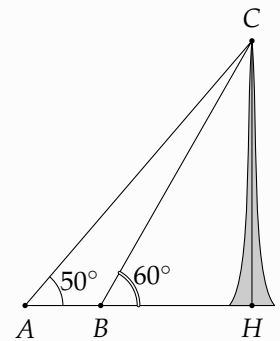
- ☐ A (800; 850). ☐ B (850; 900).
☐ C (900; 950). ☐ D (950; 1000).



Câu 20

Để đo chiều cao CH của một tháp truyền thông, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 50^\circ$, $\widehat{CBH} = 60^\circ$ và $AB = 80$ m, tính chiều cao của tháp.

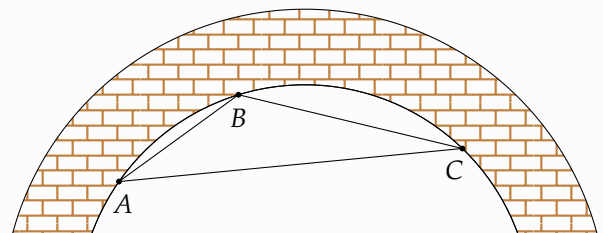
- ☐ A 300,3 m. ☐ B 305,6 m. ☐ C 301,8 m. ☐ D 306,9 m.



Câu 21

Để xác định bán kính của một cái cầu vòm, người ta lấy 3 điểm trên cầu (hình vẽ) và tiến hành đo. Biết $AB = 5,8$ m, $BC = 9,2$ m, $AC = 12,9$ m, tính bán kính của cầu.

- ☐ A 7,2 m. ☐ B 7,5 m. ☐ C 8,1 m. ☐ D 8,9 m.





Câu 22

Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200$ m, $CB = 180$ m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- Ⓐ $AB = 20\sqrt{91}$ m. Ⓑ $AB = 190$ m. Ⓒ $AB = 36400$ m. Ⓓ $AB = 163$ m.

Câu 23

Cho tam giác MNP vuông tại M , $NP = 16$ và $\widehat{PNM} = 30^\circ$. Tính độ dài cạnh MP .

- Ⓐ $MP = 8\sqrt{3}$. Ⓑ $MP = 8$. Ⓒ $MP = 32$. Ⓓ $MP = 16$.

Câu 24

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $S = \frac{1}{2}ca$. Ⓑ $S = -\frac{\sqrt{2}}{4}ac$. Ⓒ $S = \frac{\sqrt{2}}{4}bc$. Ⓓ $S = \frac{\sqrt{2}}{4}ca$.

Câu 25

Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\cos A = \frac{3}{4}$. Tính độ dài cạnh BC .

- Ⓐ 43. Ⓑ $\sqrt{7}$. Ⓒ 7. Ⓓ $\sqrt{43}$.



Câu 26

Cho tam giác ABC có $BC = 5\text{cm}$, góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

5 cm

☐ A 5 cm.

☐ B 10 cm.

☐ C $5\sqrt{3}$ cm.

☐ D $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm.

Câu 27

Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài đoạn AC .

$AC = \sqrt{3}$

☐ A $AC = \sqrt{3}$.

☐ B $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

☐ C $AC = 3$.

☐ D $AC = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28

Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Khi đó diện tích tam giác ABC bằng

3

☐ A 3.

☐ B $4\sqrt{3}$.

☐ C $6\sqrt{3}$.

☐ D 6.

Câu 29

Cho tam giác ABC có $AB = 8$, $AC = 6$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$ thì độ dài cạnh BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là

12,2

☐ A 12,2.

☐ B 12,1.

☐ C 4,7.

☐ D 7,2.



Câu 30

Cho $\triangle ABC$ có $S = 84$, $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là

$\rightarrow S = 84$

- ☐ A 8,125.
 ☐ B 130.
 ☐ C 8,5.
 ☐ D 8.

Câu 31

Cho tam giác ABC có $a = 13$ m, $b = 14$ m, $c = 15$ m. Tính diện tích S của tam giác ABC .

$\rightarrow S = 84 \text{ m}^2$

- ☐ A $S = 84 \text{ m}^2$.
 ☐ B $S = 90 \text{ m}^2$.
 ☐ C $S = 76 \text{ m}^2$.
 ☐ D $S = 80 \text{ m}^2$.

Câu 32

Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R , r , S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- ☐ A $S = \frac{abc}{4R}$.
 ☐ B $R = \frac{a}{\sin A}$.
☐ C $S = \frac{1}{2}ab \sin C$.
 ☐ D $a^2 + b^2 - c^2 = 2ac \cos C$.

Câu 33

Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , độ dài các cạnh BC , CA , AB lần lượt là a , b , c và $GB \perp GC$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

- ☐ A $b^2 + c^2 = 5a^2$.
 ☐ B $b^2 + c^2 = 3a^2$.
 ☐ C $b^2 + c^2 = 4a^2$.
 ☐ D $b^2 + c^2 = 6a^2$.



Câu 34

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trên cạnh AC lấy điểm M sao cho diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{3}$ diện tích tam giác ABM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- ☐ A $AC = 3AM$.
 ☐ B $AM = \frac{3}{4}MC$.
 ☐ C $AM = \frac{1}{4}MC$.
 ☐ D $AM = 3MC$.

Câu 35

Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- ☐ A $\cos B + \cos C = 2 \cos A$.
 ☐ B $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
☐ C $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.
 ☐ D $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Câu 36

Cho tam giác $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh BC, AB, AC lần lượt là a, b, c và $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b+c}{2c}}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\triangle ABC$ vuông tại B .
 ☐ B $\triangle ABC$ vuông tại C .
☐ C $\triangle ABC$ vuông tại A .
 ☐ D $\triangle ABC$ đều.

Câu 37

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a, BC = b, BD = m$ và $AC = n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng?

- ☐ A $m^2 + m^2 = 3(a^2 + b^2)$.
 ☐ B $m^2 + m^2 = 2(a^2 + b^2)$.
☐ C $2(m^2 + m^2) = a^2 + b^2$.
 ☐ D $3(m^2 + m^2) = a^2 + b^2$.

Câu 38

Tam giác có độ dài ba cạnh là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có số đo bằng bao nhiêu?

- Ⓐ $93,5^\circ$. Ⓑ $88,6^\circ$. Ⓒ $99,6^\circ$. Ⓓ $101,3^\circ$.

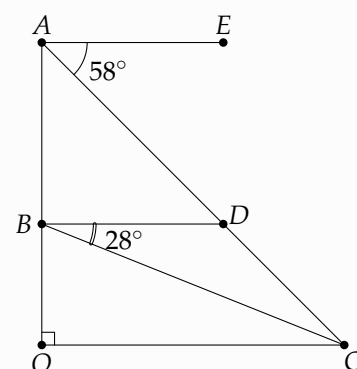
Câu 39

Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB = 8$, $\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Độ dài cạnh AC bằng

- Ⓐ $8\sqrt{3}$. Ⓑ $8(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Ⓒ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$. Ⓓ $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Câu 40

Tại điểm B trên ngọn đồi có một cái tháp cao 80 m. Từ vị trí quan sát C người ta đo được các góc tương ứng là $\widehat{CAE} = 58^\circ$, $\widehat{CBD} = 28^\circ$ (hình vẽ). Khi đó chiều cao OB của ngọn đồi gần nhất với giá trị nào sau đây?

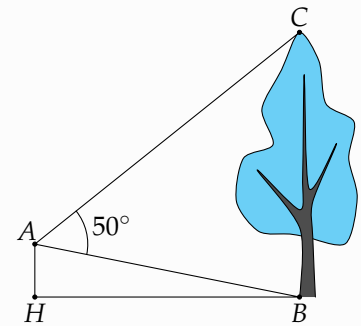


- Ⓐ 39,3 m. Ⓑ 38,8 m. Ⓒ 39,8 m. Ⓓ 40,9 m.

Câu 41

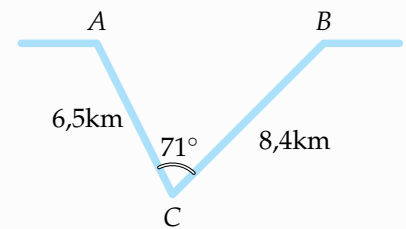
Từ vị trí A người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Biết $AH = 5\text{ m}$, $HB = 20\text{ m}$, $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Chiều cao của cây nằm trong khoảng nào sau đây? (Tính theo đơn vị m)

- Ⓐ (17; 18). Ⓑ (18; 19). Ⓒ (19; 20). Ⓓ (20; 21).


Câu 42

Một tàu vận tải đang di chuyển trên Đại Tây Dương thì có cảnh báo băng trôi phía trước nên đã di chuyển như hình vẽ. Nếu đi thẳng từ A đến B thì quãng đường ngắn lại bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

- Ⓐ 5,8 km. Ⓑ 6,1 km. Ⓒ 7,2 km. Ⓓ 6,6 km.


Câu 43

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 38 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

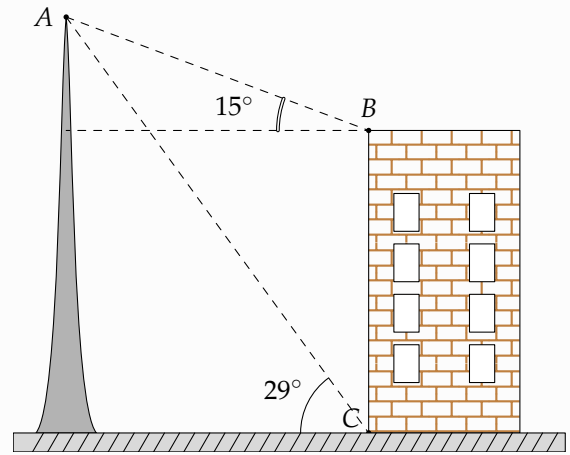
- Ⓐ 70,2 km. Ⓑ 71,3 km. Ⓒ 69,4 km. Ⓓ 66,8 km.



Câu 44

Từ đỉnh của một tòa nhà người ta đo được góc tạo bởi hướng nhìn đến đỉnh của tháp truyền thông và phương ngang là 15° . Từ chân tòa nhà đó người ta đo được góc tạo bởi hướng nhìn đến đỉnh của tháp truyền thông và phương ngang là 29° . Biết tòa nhà cao 50 m, tính chiều cao của tháp.

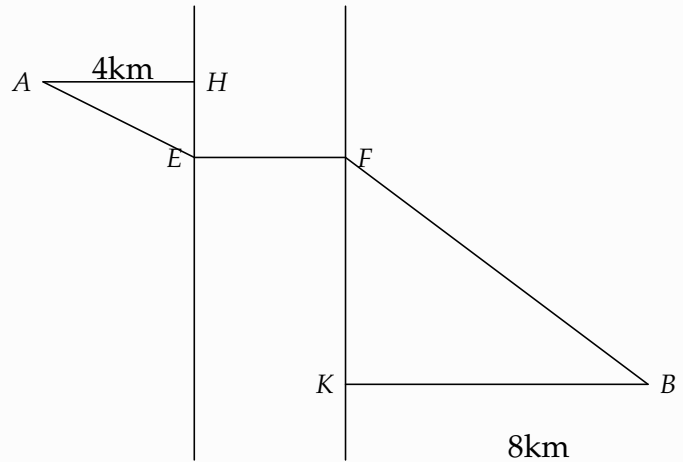
- Ⓐ 91,5 m. Ⓑ 90,6 m. Ⓒ 93,9 m. Ⓓ 96,8 m.



Câu 45

Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu $EF = 1$ km bắc qua sông và vuông góc với bờ sông, biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 8 km (hình vẽ), $HE = 3$ km, $KF = 6$ km. Tính tổng quãng đường d đi từ A đến B (đi theo đường $AEFB$).

- Ⓐ $d = 16$ km. Ⓑ $d = 22$ km.
Ⓒ $d = 21$ km. Ⓓ $d = 15$ km.



Câu 46

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

- Ⓐ $10\sqrt{13}$ km. Ⓑ $20\sqrt{13}$ km. Ⓒ 1300 km. Ⓓ 5200 km.



Câu 47

Tính độ dài đường chéo MP của hình bình hành $MNPQ$ biết $MN = 2$ m, $MQ = 3$ m và $\widehat{QMN} = 120^\circ$.

Ⓐ $\sqrt{3}$ m.

Ⓑ $\sqrt{11}$ m.

Ⓒ $\sqrt{7}$ m.

Ⓓ $\sqrt{5}$ m.



§3. ÔN TẬP CHƯƠNG 3

A BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 15^\circ$; $\cos 18^\circ$; $\sin 36^\circ$; $\cos 36^\circ$.

$$\text{☞ } \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}; \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}; \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}; \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Bài 2

Tính các giá trị lượng giác của các góc sau: $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{5}$.

Bài 3

Tính $\sin x$, $\tan x$ và $\cot x$, biết

a) $\cos x = \frac{3}{5}$ và $0^\circ < x < 90^\circ$;

b) $\cos x = -\frac{5}{13}$ và $180^\circ < x < 270^\circ$.

$$\text{☞ a) } \sin x = \frac{4}{5}, \tan x = \frac{4}{3}, \cot x = \frac{3}{4}; \text{ b) } \sin x = -\frac{12}{13}, \tan x = \frac{12}{5}, \cot x = \frac{5}{12}$$

Bài 4

Cho $\cos \alpha = -\frac{5}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính các giá trị lượng giác của góc $\frac{\alpha}{2}$.

$$\text{☞ } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3}; \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}; \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

Bài 5

Tính các giá trị lượng giác của cung α biết

a) $\cos \alpha = -0,7$ khi $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

α a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$; $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{51}}{7}$; $\cot \alpha = -\frac{7\sqrt{51}}{51}$; b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài 6

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

a) Nếu góc A nhọn thì $b^2 + c^2 > a^2$;

b) Nếu góc A tù thì $b^2 + c^2 < a^2$;

c) Nếu góc A vuông thì $b^2 + c^2 = a^2$.

Bài 7

Chứng minh biểu thức sau độc lập với đối với x .

$$P = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Bài 8

Cho $\sin a \cos a = -\frac{5}{18}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\sin a$ và $\cos a$.

$$\text{☞ } \sin a = \frac{2 + \sqrt{14}}{6} \text{ và } \cos a = \frac{2 - \sqrt{14}}{6} \text{ hoặc } \sin a = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6} \text{ và } \cos a = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$$

Bài 9

Cho $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = 2$. Tính $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$ với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$$\text{☞ } \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Bài 10

Cho $\cot\left(\frac{2021\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}{\cos^2 x - 3\sin^2 x}.$$

$$\text{☞ } P = -8$$



Bài 11

Cho $6\cos^2\alpha + \cos\alpha - 2 = 0$. Biết $A = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} = a + b\tan\alpha$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

$$\text{Đ. } a + b = -\frac{2}{3}$$

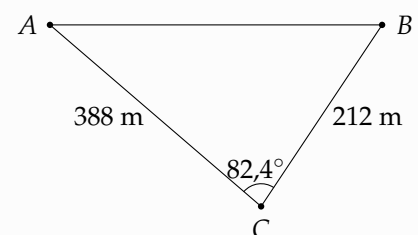
Bài 12

Cho $\tan\alpha = \sqrt[4]{2}$, biết $A = \frac{2\cos^2\alpha - 1004}{\sin^2\alpha} = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $\sin\frac{\pi(a-b)}{3}$.

$$\text{Đ. } \sin\frac{\pi(a-b)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 13

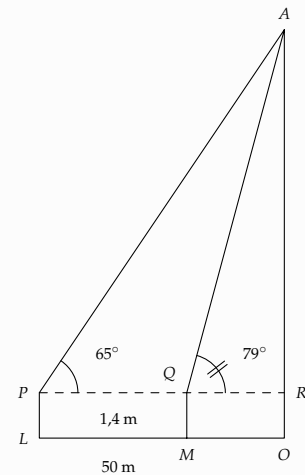
Một đường hầm được dự kiến xây dựng xuyên qua một ngọn núi. Để ước tính chiều dài của đường hầm, một kỹ sư đã thực hiện các phép đo và cho ra kết quả như hình. Tính chiều dài của đường hầm từ các số liệu đã khảo sát được.





Bài 14

Để xác định chiều cao của một tòa nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M , sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh tòa nhà với góc nâng $\widehat{RQA} = 79^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM = 50$ m thì nhìn thấy đỉnh tòa nhà với góc nâng $\widehat{RPA} = 65^\circ$. Hãy tính chiều cao của tòa nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế đó là $PL = QM = 1,4$ m (Hình bên).

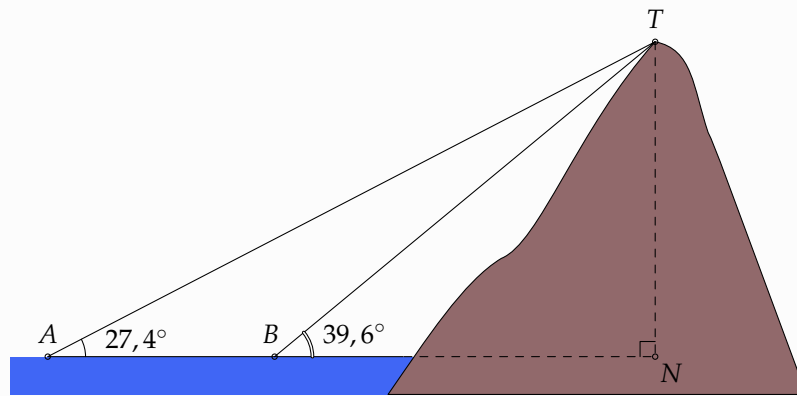


Bài 15

Hai trạm quan sát ở hai thành phố Đà Nẵng và Nha Trang đồng thời nhìn thấy một vệ tinh với góc nâng lần lượt là 75° và 60° (Hình 3). Vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Đà Nẵng bao nhiêu kilômét? Biết rằng khoảng cách giữa hai trạm quan sát là 520 km.

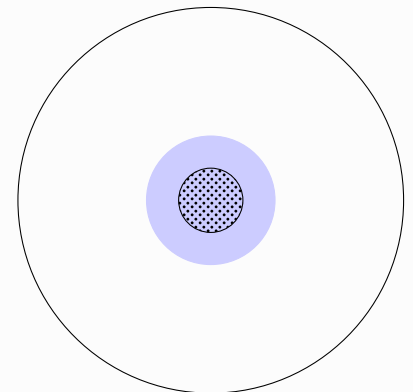
Bài 16

Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536m thì ngọn núi cao bao nhiêu (tính gần đúng sau dấu phẩy hai chữ số)?



Bài 17

Trong một lần đi khảo sát các đảo thuộc quần đảo Trường Sa của Việt Nam, các nhà khoa học phát hiện có một đảo có dạng hình tròn, tâm của đảo này bị che bởi một bãi đá nhỏ mà các nhà khoa học không thể tới được. Các nhà khoa học muốn đo bán kính của đảo này, biết rằng các nhà khoa học chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài. Nêu cách để các nhà khoa học tính được bán kính đảo?



Bài 18

Vịnh Vân Phong – tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Diệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B. Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa AB và AC là 60° ?



B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A $R = \frac{a}{\sin A}$.

☐ B $R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$.

☐ C $R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

☐ D $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

☒ $R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$

Câu 2

Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

☐ A 8 cm.

☐ B 10 cm.

☐ C 9 cm.

☐ D 7,5 cm.

☒ 7,5 cm

Câu 3

Cho tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = 2\sqrt{2}$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

☐ A $r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

☐ B $r = \frac{2}{2 - \sqrt{2}}$.

☐ C $r = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

☐ D $r = \frac{2}{2 + \sqrt{2}}$.

☒ $r = \frac{2}{2 + \sqrt{2}}$

Câu 4

Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $\cos(A + B) = \frac{2}{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .



☐ A $3\sqrt{5}$.

☐ B $6\sqrt{5}$.

☐ C 15.

☐ D 30.

☒ $3\sqrt{5}$

Câu 5

Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 4$, trung tuyến $BM = \sqrt{33}$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

☐ A $S = 3\sqrt{6}$.

☐ B $S = 4\sqrt{6}$.

☐ C $S = 2\sqrt{13}$.

☐ D $S = 24\sqrt{33}$.

☒ $S = 4\sqrt{6}$

Câu 6

Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 75^\circ$, $AB = 10$. Độ dài cạnh BC gần với giá trị nào nhất dưới đây?

☐ A 8.

☐ B 9.

☐ C 10.

☐ D 11.

☒ 9

Câu 7

Một hình bình hành có độ dài hai cạnh kề lần lượt là 16 cm và 24 cm. Một đường chéo có độ dài là 32 cm. Tính góc đối diện với đường chéo đó.

☐ A $101,3^\circ$.

☐ B $107,3^\circ$.

☐ C $100,7^\circ$.

☐ D $104,5^\circ$.

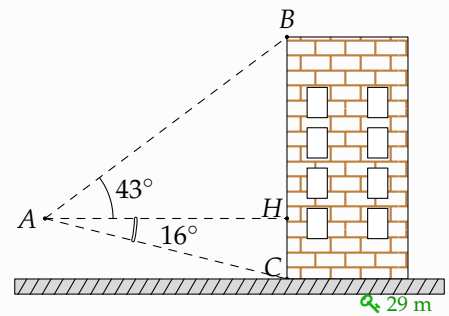
☒ $104,5^\circ$



Câu 8

Từ một vị trí quan sát A , một người nhìn đỉnh B và chân C của nhà cao tầng với các góc tương ứng là 43° và 16° so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của tòa nhà là 18 m, tính khoảng cách từ A đến C (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- (A) 27 m. (B) 28 m. (C) 29 m. (D) 31 m.



Câu 9

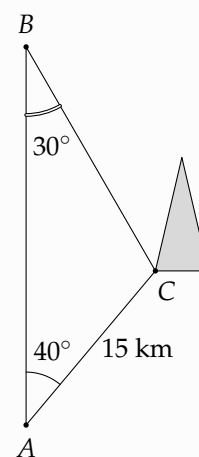
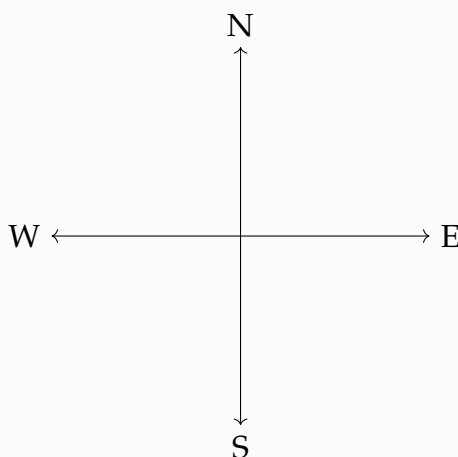
Hai nhà máy thổi còi vào đúng 6h00. Một người nghe thấy hai tiếng còi phát ra từ hai nhà máy lần lượt sau 3 giây và 6 giây. Góc giữa đường nhìn của anh ta đến hai nhà máy là 42° . Nếu âm thanh truyền đi 344 m mỗi giây, các nhà máy cách nhau bao nhiêu m?

- (A) 1787,5 m. (B) 1777,5 m. (C) 1887,5 m. (D) 1987,5 m.

👉 1787,5 m

Câu 10

Một tàu biển đang đi về phía bắc. Tại một thời điểm, con tàu cách một ngọn hải đăng 15 km và có hướng là $N40^\circ E$ so với con tàu. Sau đó, tại một thời điểm khác thuyền trưởng nhận thấy hướng ngọn hải đăng đã trở thành $S30^\circ E$. Trong khoảng thời gian đó con tàu đã đi được bao nhiêu km?





A 25,5 km.

B 30,2 km.

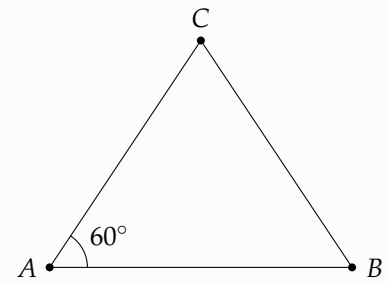
C 29,5 km.

D 28,2 km.

28,2 km

Câu 11

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?



A 61 hải lý.

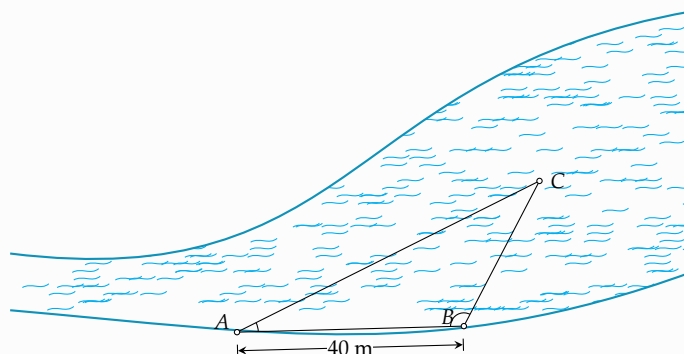
B 36 hải lý.

C 21 hải lý.

D 18 hải lý.

Câu 12

Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?



A 53 m.

B 30 m.

C 41,5 m.

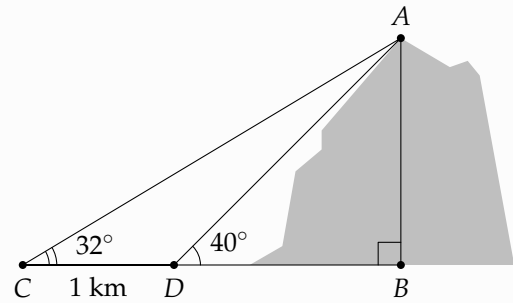
D 41 m.



Câu 13

Tính chiều cao AB của một ngọn núi. Biết tại hai điểm C, D cách nhau 1 km trên mặt đất (B, C, D thẳng hàng), người ta nhìn thấy đỉnh A của núi với góc nâng lần lượt là 32° và 40° như hình bên.

- ☐ A 2,45 km. ☐ B 3,45 km.
☐ C 4,45 km. ☐ D 5,45 km.



Câu 14

Từ trên nóc nhà của một tòa nhà cao 18,5 m, bạn Nam quan sát một cái cây cách tòa nhà 30 m và dùng giác kế đo được góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là 34° , góc lệch giữa phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là 24° . Biết chiều cao của thân giác kế là 1,5 m. Chiều cao của cái cây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

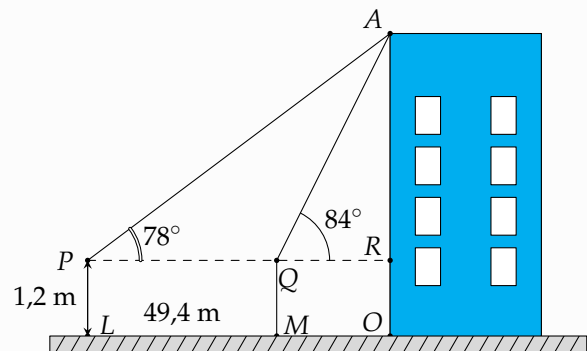
- ☐ A 31,4 m. ☐ B 32,4 m. ☐ C 33,4 m. ☐ D 34,4 m.

Câu 15

Để xác định chiều cao của một tòa nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M , sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh tòa nhà với góc nâng $\widehat{RQA} = 84^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM = 49,4$ m thì nhìn thấy đỉnh tòa nhà với góc nâng $\widehat{RPA} = 78^\circ$. Tính chiều cao của tòa nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế đó là $PL = QM = 1,2$ m (Hình 2).

Giải thích: Góc nâng là góc tạo bởi tia ngắm nhìn lên và đường nằm ngang.

- ☐ A 471,2 m. ☐ B 481,2 m.
☐ C 461,2 m. ☐ D 491,2 m.



Câu 16

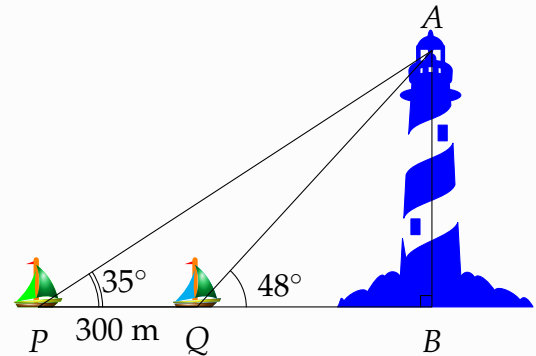
Cho hai tàu thủy P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q , người ta nhìn thấy tháp hải đăng AB dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$ và $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.

(A) 558,46 m.

(B) 578,46 m.

(C) 568,46 m.

(D) 588,46 m.



Câu 17

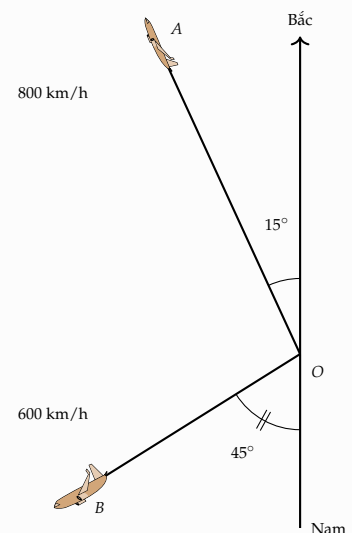
Hai máy bay rời một sân bay cùng một lúc. Một chiếc bay với vận tốc 800 km/h theo hướng lệch so với hướng bắc 15° về phía tây. Chiếc còn lại bay theo hướng lệch so với hướng nam 45° về phía tây với vận tốc 600 km/h (Hình vẽ). Hỏi hai máy bay đó cách nhau bao xa sau 3 giờ?

(A) 3650 km.

(B) 3750 km.

(C) 3850 km.

(D) 3950 km.

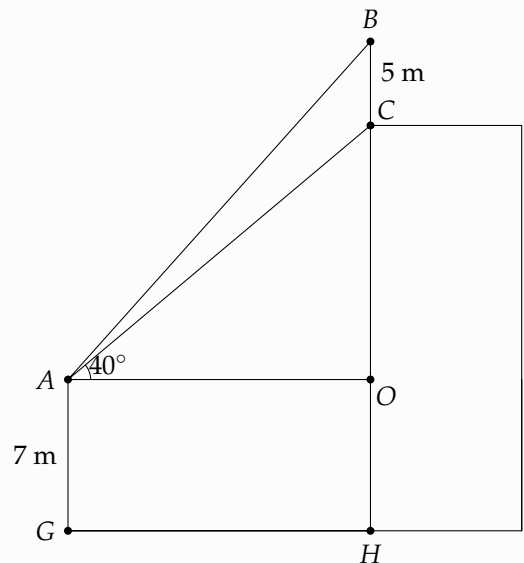




Câu 18

Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?

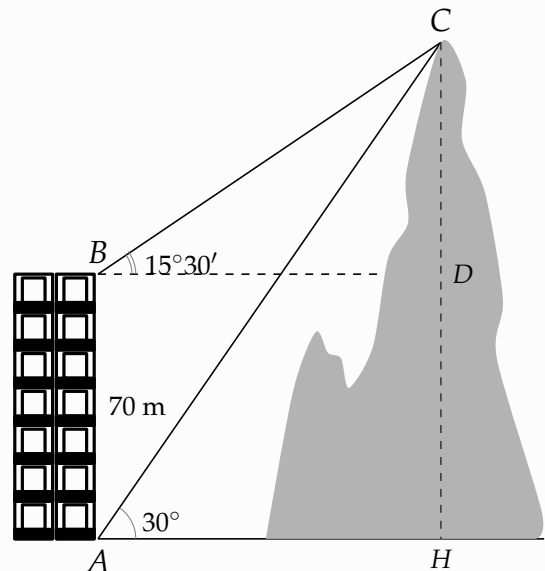
- (A) 12 m. (B) 19 m. (C) 24 m. (D) 29 m.



Câu 19

Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70$ m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?

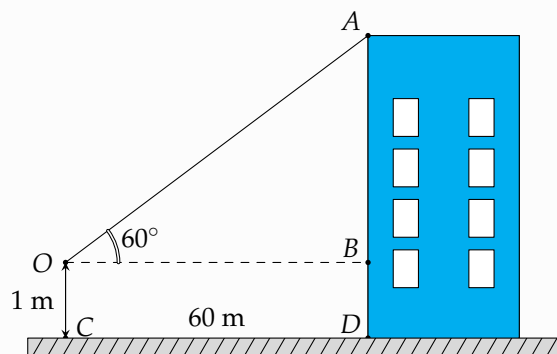
- (A) 135 m. (B) 234 m. (C) 165 m. (D) 195 m.



Câu 20

Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt giác kế thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{ m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{ m}$. Quay thành giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây?

- Ⓐ 40 m. Ⓑ 114 m. Ⓒ 105 m. Ⓓ 110 m.



Chương

5

VÉC TƠ

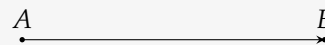
§1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm vectơ

Định nghĩa 1.1.

- ✔ **Vectơ** là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- ✔ **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa hai điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.



2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau



- ✔ Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là **giá** của vectơ đó.
- ✔ Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ✔ Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
- ✔ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **bằng nhau**, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Ví dụ 1

Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy chỉ ra các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là một trong bốn đỉnh của hình bình hành $ABCD$. Trong số các véc-tơ trên, hãy chỉ ra

- Các véc-tơ cùng phương.
- Các cặp véc-tơ cùng phương nhưng ngược hướng.
- Các cặp véc-tơ bằng nhau.

Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F, M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD và DA .

- Chứng tỏ rằng 3 vectơ $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương;
- Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Xác định một Véc-tơ

- Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng. Véc-tơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 1

Cho hai điểm phân biệt A, B . Tìm số véc-tơ được tạo thành từ hai điểm này?

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC . Viết tất cả các véc-tơ mà điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C .

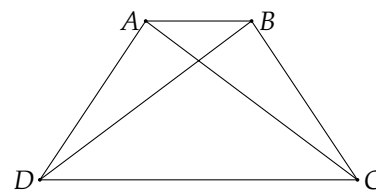
Dạng 2 Sự cùng phương và hướng của hai véc-tơ

- Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Đối với hai véc-tơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.



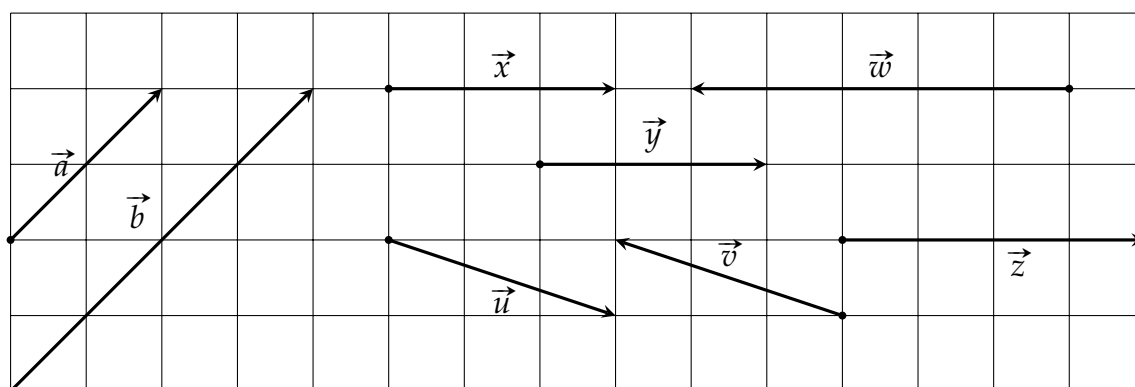
Ví dụ 1

Cho hình thang cân $ABCD$ với hai đáy AB, CD , $AB < CD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Có cặp véc-tơ nào trong các cặp véc-tơ trên bằng nhau hay không?



Ví dụ 2

Trong hình 1.4, hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các véc-tơ bằng nhau.



Hình 1.4

Dạng 3

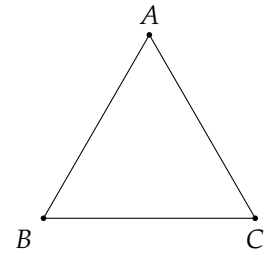
Hai véc-tơ bằng nhau, độ dài của véc-tơ

☑ $|\overrightarrow{AB}| = AB.$

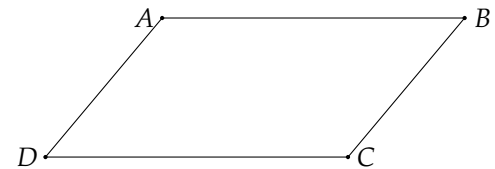
☑ Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Ví dụ 1

Cho tam giác đều ABC với cạnh có độ dài bằng a . Hãy chỉ ra các véc-tơ có độ dài bằng a và có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC .

**Ví dụ 2**

Cho hình bình hành $ABCD$ như hình vẽ.



a) Véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{AD}$?

Ví dụ 3

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MN}$.



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

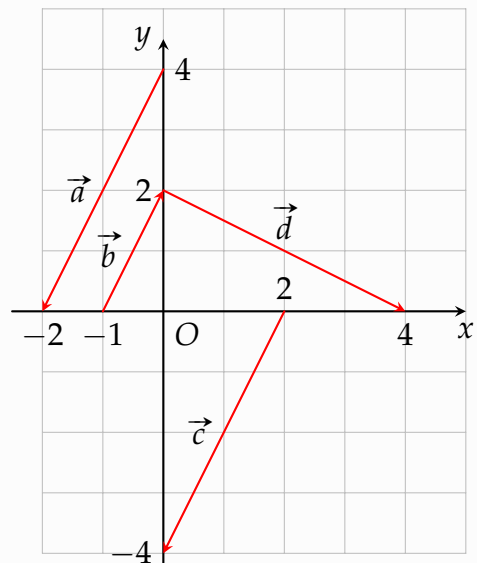
Bài 1

Cho ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

- a) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều cùng hướng với $\vec{0}$.
- b) Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$.
- c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
- d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Bài 2

Trong hình 4.12, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau.



Bài 3

Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình khi và chỉ khi $\vec{BC} = \vec{AD}$.

**Bài 4**

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MN}$ với $A(1;2)$, $M(0;-1)$, $N(3;5)$.

- Hãy chỉ ra mối liên hệ giữa các vectơ trên.
- Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể đó qua N hay không? nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N ?

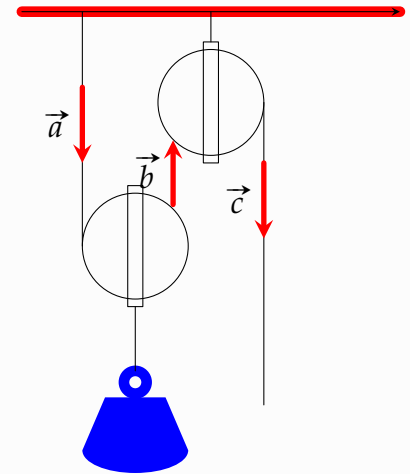
Bài 5

Cho A, B, C là ba điểm thẳng hàng, B nằm giữa A và C . Viết các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng trong những vectơ sau: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.



Bài 6

Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của đoạn dây mô tả bằng các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (như hình vẽ).



- Hãy chỉ ra các vectơ cùng phương.
- Trong các vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.

Bài 7

Cho bốn điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C, D . Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là hai trong bốn điểm đã cho?

Bài 8

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

- Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.
- Liệt kê các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.



Bài 9

Cho hình thang vuông tại A và D có $AB = AD = a$, $\hat{C} = 45^\circ$.

a) Tính $|\overrightarrow{CD}|$.

b) Tính $|\overrightarrow{BD}|$.

Bài 10

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Bài 11

Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Hãy chỉ ra tập hợp S gồm tất cả các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp $\{A; B; C; D; O\}$. Hãy chia tập hợp S thành các nhóm sao cho hai vectơ thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

Bài 12

Cho đoạn thẳng MN có trung điểm là I .

a) Viết các véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là một trong ba điểm M, N, I .

b) Vectơ nào bằng $\overrightarrow{MI}$? bằng $\overrightarrow{NI}$?

Bài 13

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD . Tìm vectơ:

- Cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$.
- Ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$.

Bài 14

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài 15

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH . Chứng minh $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AN}$

Bài 16

Cho tam giác ABC có O nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện lần lượt tại M, N, P . Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN, MP tại H, K . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$.

**Bài 17**

Cho tam giác ABC . Vẽ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Bài 18

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Bài 19

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GA}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

2. Bài tập trắc nghiệm**Câu 1**

Chọn khẳng định đúng?

- ☐ A Véc-tơ là một đường thẳng có hướng.
- ☐ B Véc-tơ là một đoạn thẳng.
- ☐ C Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.



D Véc-tơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

Câu 2

Cho bốn điểm phân biệt không thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu véc-tơ được tạo thành từ bốn điểm này?

- A** 6. **B** 8. **C** 10. **D** 12.

Câu 3

Cho lục giác $ABCDEF$. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lục giác.

- A** 20. **B** 12. **C** 30. **D** 16.

Câu 4

Trong các điều kiện dưới đây. Chọn điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B .

- A** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng. **B** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng phương.
C $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng. **D** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

Câu 5

Phát biểu nào sau đây là sai?

- A** Hai véc-tơ cùng phương là hai véc-tơ có giá song song hoặc trùng nhau.



- ☐ B Nếu hai véc-tơ cùng hướng thì chúng có cùng phương.
☐ C Véc-tơ không cùng phương với mọi véc-tơ.
☐ D Nếu hai véc-tơ cùng phương thì chúng ngược hướng.

Câu 6

Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.
☐ B $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.
☐ C $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$ ngược hướng.
☐ D $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$.

Câu 7

Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng. Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng?

- ☐ A A nằm trong đoạn BC .
☐ B $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$.
☐ C A nằm ngoài đoạn BC .
☐ D $AB = AC$.

Câu 8

Điền từ thích hợp vào dấu (...) để được mệnh đề đúng. Hai véc-tơ ngược hướng thì.

- ☐ A Bằng nhau. ☐ B Cùng phương. ☐ C Cùng độ dài. ☐ D Cùng điểm đầu.



Câu 9

Khẳng định nào sau đây sai?

- ☐ A Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ khác véc-tơ không thì hai véc-tơ đó cùng phương.
- ☐ B Hai véc-tơ cùng hướng với một véc-tơ khác véc-tơ không thì hai véc-tơ đó cùng hướng.
- ☐ C Hai véc-tơ ngược hướng với một véc-tơ khác véc-tơ không thì hai véc-tơ đó ngược hướng.
- ☐ D Hai véc-tơ cùng bằng một véc-tơ thứ ba thì hai véc-tơ đó bằng nhau.

Câu 10

Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng. Vị trí của A, B, C để hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ ngược hướng là

- ☐ A B nằm giữa A và C .
- ☐ B C nằm giữa A và B .
- ☐ C Theo thứ tự C, B, A .
- ☐ D Theo thứ tự B, A, C .

Câu 11

Cho hình thoi $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
- ☐ B $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- ☐ C $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
- ☐ D $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 12

Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A Hai véc-tơ bằng nhau là hai véc-tơ có cùng hướng và cùng độ dài.
- ☐ B Hai véc-tơ bằng nhau là hai véc-tơ có độ dài bằng nhau.
- ☐ C Hai véc-tơ bằng nhau là hai véc-tơ có cùng giá và cùng độ dài.
- ☐ D Hai véc-tơ bằng nhau là hai véc-tơ có cùng phương và cùng độ dài.



Câu 13

Cho tam giác đều ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
 ☐ (B) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.
 ☐ (C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
 ☐ (D) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Câu 14

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Tìm khẳng định sai

- ☐ (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
 ☐ (B) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.
 ☐ (C) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.
 ☐ (D) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Câu 15

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
 ☐ (B) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.
 ☐ (C) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DB}|$.
 ☐ (D) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

Câu 16

Cho các mệnh đề sau:

- (I) Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.
- (II) Véc-tơ không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- (III) Hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng.
- (IV) Hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.

Số mệnh đề đúng là

- ☐ (A) 1.
 ☐ (B) 2.
 ☐ (C) 3.
 ☐ (D) 4.



Câu 17

Cho ngũ giác $ABCDE$. Số các vec-tơ được tạo thành từ hai đỉnh bất kỳ của ngũ giác?

- Ⓐ 10. Ⓑ 14. Ⓒ 18. Ⓓ 20.

Câu 18

Số vec-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước là

- Ⓐ 42. Ⓑ 3. Ⓒ 9. Ⓓ 27.

Câu 19

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ Có duy nhất một vec-tơ cùng phương với mọi vec-tơ.
 Ⓑ Có ít nhất hai vec-tơ cùng phương với mọi vec-tơ.
 Ⓒ Có vô số vec-tơ cùng phương với mọi vec-tơ.
 Ⓓ Không có vec-tơ nào cùng phương với mọi vec-tơ.

Câu 20

Khẳng định nào sau đây đúng ?

- Ⓐ Hai vec-tơ cùng phương với 1 vec-tơ thứ ba thì cùng phương.
 Ⓑ Hai vec-tơ cùng phương với một vec-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
 Ⓒ Vec-tơ không là vec-tơ không có giá.
 Ⓓ Điều kiện đủ để 2 vec-tơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.



Câu 21

Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khi đó phát biểu nào là sai?

- ☐ A $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CB}$ cùng phương.
☐ B $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.
☐ C $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CB}$ cùng hướng.
☐ D $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Câu 22

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?

- ☐ A Véc-tơ là một đoạn thẳng được định hướng.
☐ B véc-tơ không là véc-tơ có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.
☐ C Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
☐ D Véc-tơ không là véc-tơ có độ dài không xác định.

Câu 23

Cho tam giác đều ABC . D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$.
☐ B $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.
☐ C $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA}$.
☐ D $|\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{BC}|$.



Câu 24

Cho tam giác ABC đều có đường cao AH . Trong các khẳng định sau, tìm khẳng định đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$. Ⓑ $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AC}|$. Ⓒ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25

Cho tam giác ABC đều cạnh a . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$. Ⓑ $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $|\overrightarrow{AB}| = a$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} = a$.

Câu 26

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 27

Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

- Ⓐ Hình bình hành. Ⓑ Hình thang. Ⓒ Hình chữ nhật. Ⓓ Hình vuông.

Câu 28

Vectơ có điểm đầu là D , điểm cuối là E được kí hiệu là

- Ⓐ DE . Ⓑ $|\overrightarrow{DE}|$. Ⓒ $\overrightarrow{ED}$. Ⓓ $\overrightarrow{DE}$.



Câu 29

Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C ?

- ☐ A 3.
 ☐ B 6.
 ☐ C 4.
 ☐ D 9.

Câu 30

Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác?

- ☐ A 4.
 ☐ B 6.
 ☐ C 8.
 ☐ D 12.

Câu 31

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.
☐ B Có ít nhất hai vectơ có cùng phương với mọi vectơ.
☐ C Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.
☐ D Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

Câu 32

Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó

- ☐ A Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.
☐ B Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

- Ⓒ Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
 Ⓓ Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 33

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

- Ⓐ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. Ⓒ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Câu 34

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ khác vectơ - không cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 9.

Câu 35

Với $\overrightarrow{DE}$ (khác vectơ - không) thì độ dài đoạn DE được gọi là

- Ⓐ Phương của $\overrightarrow{ED}$. Ⓑ Hướng của $\overrightarrow{ED}$. Ⓒ Giá của $\overrightarrow{ED}$. Ⓓ Độ dài của $\overrightarrow{ED}$.

Câu 36

Mệnh đề nào sau đây sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$. Ⓑ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.
 Ⓒ $|\overrightarrow{AB}| > 0$. Ⓓ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.



Câu 37

Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

- ☐ A Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
- ☐ B Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
- ☐ C Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.
- ☐ D Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Câu 38

Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D và không cùng nằm trên một đường thẳng. Điều kiện nào trong các đáp án A, B, C, D sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

- ☐ A $ABCD$ là hình bình hành.
- ☐ B $ABDC$ là hình bình hành.
- ☐ C $AC = BD$.
- ☐ D $AB = CD$.

Câu 39

Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- ☐ A $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$.
- ☐ B $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{CD}$.
- ☐ C $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.
- ☐ D $ABCD$ là hình bình hành.



Câu 40

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. Ⓒ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. Ⓓ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 41

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Khẳng định nào sau đây sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Ⓑ $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$. Ⓒ $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. Ⓓ $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Câu 42

Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Ⓒ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Ⓓ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 43

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. Ⓑ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. Ⓓ $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

**Câu 44**

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

☐ A $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

☐ B $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

☐ C $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$.

☐ D $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Câu 45

Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

☐ A $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

☐ B $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

☐ C $\overrightarrow{AM} = a$.

☐ D $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 46

Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

☐ A $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

☐ B $|\overrightarrow{BD}| = a$.

☐ C $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

☐ D $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 47

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

☐ A $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$.

☐ B $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AF}|$.

☐ C $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$.

☐ D $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.



Câu 48

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vector bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

Câu 49

Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. (B) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
(C) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. (D) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Câu 50

Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Câu 51

Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) Vô số.

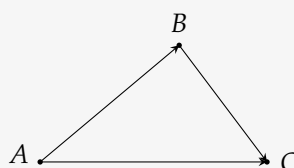
§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

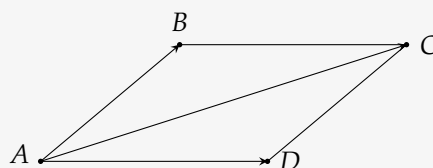
1. Tổng của hai vectơ

Định nghĩa 2.1.

- ✔ Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C tùy ý, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



- ✔ Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



- ✔ Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý ta có

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

2. Hiệu của hai vectơ

Định nghĩa 2.2.

- ✔ Vectơ đối: Hai vectơ đối nhau khi chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- ✔ Vectơ không được coi là vectơ đối của chính nó.
- ✔ Quy tắc trừ: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
- ✔ Áp dụng:
 - I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
 - G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tổng, hiệu của hai hay nhiều vectơ

Sử dụng định nghĩa, tính chất và quy tắc tính tổng, hiệu của hai vectơ.

- ✔ Quy tắc ba điểm (đối với phép cộng) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- ✔ Quy tắc ba điểm (đối với phép trừ) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.
- ✔ Quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 1

Tính hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$.

Ví dụ 3

Cho M, N, P là các điểm bất kì. Tính

a) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$.

b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$.

c) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PN}$.

Ví dụ 4

Cho các điểm A, B, C, D, E bất kì. Tính

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DE}$.

**Ví dụ 5**

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB . Tính

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$.

b) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IB}$.

Ví dụ 6

Cho G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Tính $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{GC}$.

Dạng 2 Chứng minh đẳng thức véc tơ

Chứng minh đẳng thức véc tơ ta dùng các quy tắc (ba điểm, hình bình hành) để

- ✔ Biến đổi vế này thành vế kia (thường biến đổi vế chưa gọn thành vế gọn hơn).
- ✔ Biến đổi cả hai vế bằng một biểu thức thứ ba (tính chất bắc cầu).
- ✔ Biến đổi đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức luôn đúng...

Ví dụ 1

Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.



Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Chứng minh $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP}$.

Ví dụ 4

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}.$$

Dạng 3 Xác định vị trí của một điểm nhờ đẳng thức véc-tơ.

Để xác định điểm M thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước, ta thực hiện một trong các hướng sau

◦ Hướng 1

- Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$, trong đó A cố định và $\vec{v}$ cố định.
- Khi đó điểm M được xác định
 - $\overrightarrow{AM}, \vec{v}$ cùng hướng.
 - Độ dài $AM = |\vec{v}|$.

◦ Hướng 2

- Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $|\overrightarrow{IM}| = |\overrightarrow{AB}|$, trong đó I, A, B là các điểm cố định.



- Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường tròn tâm I , bán kính AB .

◦ Hướng 3

- Biến đổi đẳng thức véctơ đã cho về dạng $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, trong đó A, B cố định và phân biệt.
- Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường trung trực của đoạn AB .

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AI . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}|$.

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.



Dạng 4 Tính độ dài của tổng, hiệu các vectơ

Để tính độ dài của các vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$ ta thường thực hiện các bước sau

Bước 1. Dùng các quy tắc vectơ để xác định $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$.

Bước 2. Dùng tính chất của hình học phẳng để đưa bài toán tính độ dài vectơ thành bài toán tính độ dài đoạn thẳng trong hình đặc biệt đã biết cách tính.

Ví dụ 1

Cần thêm điều kiện gì của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ để

a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

b) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC vuông tại A . $AB = 2a$, $AC = a$. Tính độ dài các vectơ

a) $\vec{AB} + \vec{AC}$.

b) $\vec{AB} - \vec{AC}$.

Ví dụ 3

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài của các vectơ sau

a) $\vec{AB} - \vec{AC}$.

b) $\vec{AB} + \vec{AC}$.

c) $\vec{AB} + \vec{CB}$.

Ví dụ 4

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\vec{AB} - \vec{AC}|$, $|\vec{AB} + \vec{AD}|$ theo a .



.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Chứng minh rằng

a) $|\vec{AB} + \vec{AD}| = AC$.

b) Nếu $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{CB} - \vec{CD}|$ thì $ABCD$ là hình chữ nhật.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$; $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M . Cường độ hai lực $\vec{F}_1$; $\vec{F}_2$ lần lượt là $300N$ và $400N$. Tìm cường độ lực tổng hợp tác động vào vật, biết $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

.....

.....

.....

.....





C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng

a) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$.

b) $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BC} - \vec{BD}$.

Bài 2

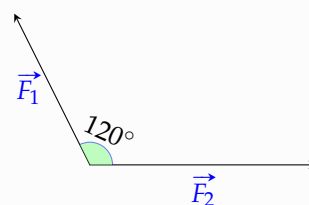
Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\vec{BM} = \vec{AB} + \vec{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\vec{CD}$ và $\vec{CM}$.

Bài 3

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài các vectơ $\vec{AB} - \vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$.

Bài 4

Hình 4.19 biểu diễn hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3\text{ N}$, $|\vec{F}_2| = 2\text{ N}$. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



Hình 4.19

**Bài 5**

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD .

- Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{IJ}$.

Bài 6

Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm AM .

- Chứng minh rằng $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- Với điểm O bất kỳ. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$.

Bài 7

Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.



Bài 8

Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$.

Bài 9

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Bài 10

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Gọi I là trung điểm BC . Xác định và tính độ dài véc-tơ

a) $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

$\sqrt{2}\sqrt{3}$ cm.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$\sqrt{5}$ cm.

c) $\vec{w} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

$\sqrt{73}$ cm.

d) $\vec{x} = 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{CA}$.

$\sqrt{3}$ cm.

Bài 11

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$, $BC = 4$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

$\sqrt{10}$.

b) $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}|$.

$\frac{15}{2}$.

Bài 12

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$.

Bài 13

Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

Bài 14

Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$.

Bài 15

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

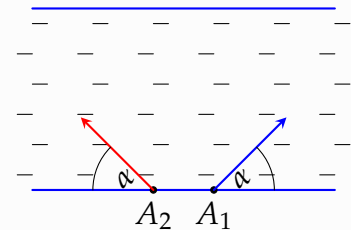


Bài 16

Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P và $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$. Tìm giá trị của x .

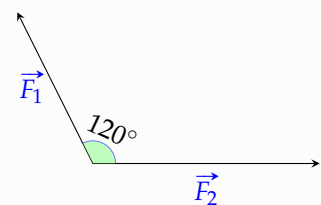
Bài 17

Hai con tàu cùng xuất phát từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?



Bài 18

Hình 4.19 biểu diễn hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3\text{ N}$, $|\vec{F}_2| = 2\text{ N}$. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



Hình 4.19



Bài 19

Cho tam giác ABC đều cạnh a , gọi G là trọng tâm tam giác và H là trung điểm BC . Tính

- a) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $|\vec{AB} - \vec{AC}|$. a
- c) $|\vec{GA} - \vec{GC}|$. a d) $|\vec{GB} + \vec{GC}|$. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
- e) $|\vec{AH} + \vec{BC}|$. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Cho ba điểm M, N, P . Vectơ $\vec{u} = \vec{NP} + \vec{MN}$ bằng vectơ nào sau đây?

- ☐ A $\vec{PN}$. ☐ B $\vec{PM}$. ☐ C $\vec{MP}$. ☐ D $\vec{NM}$.

Câu 2

Cho ba điểm D, E, G . Vectơ $\vec{v} = \vec{DE} + (-\vec{DG})$ bằng vectơ nào sau đây?

- ☐ A $\vec{EG}$. ☐ B $\vec{GE}$. ☐ C $\vec{GD}$. ☐ D $\vec{ED}$.

Câu 3

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}|$.
- b) $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{CB}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Câu 4

Cho đường tròn tâm O . Giả sử A và B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ đối nhau.

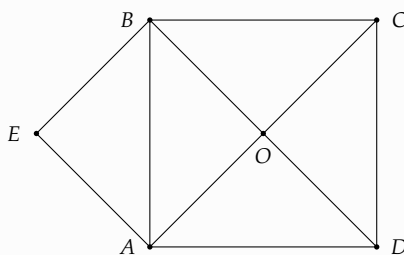
Câu 5

Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ với mỗi điểm M trong mặt phẳng.

Câu 6

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính độ dài của các vectơ sau

- $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD .





Câu 7

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{OA}$, $\vec{F}_2 = \vec{OB}$ và $\vec{F}_3 = \vec{OC}$ cùng tác động vào vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết độ lớn của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tìm độ lớn và hướng của lực $\vec{F}_3$.

Câu 8

Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h. Một chiếc canô chuyển động từ phía đông sang tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của canô so với bờ sông.

Câu 9

Cho ba điểm M, N, P . Véc-tơ $\vec{u} = \vec{NP} + \vec{MN}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

(A) $\vec{PN}$.

(B) $\vec{PM}$.

(C) $\vec{MP}$.

(D) $\vec{NM}$.

Câu 10

Cho ba điểm D, E, G . Véc-tơ $\vec{v} = \vec{DE} + (-\vec{DG})$ bằng véc-tơ nào sau đây?

(A) $\vec{EG}$.

(B) $\vec{GE}$.

(C) $\vec{GD}$.

(D) $\vec{ED}$.

Câu 11

Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

- Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 12

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, AD = 4$. Giá trị của $|\overrightarrow{AC}|$ bằng

- Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 13

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3, BC = 5$. Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ bằng

- Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 13. Ⓓ 4.

Câu 14

Cho tam giác đều ABC với đường cao AH . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\overrightarrow{HC}|$.
Ⓒ $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. Ⓓ $|\overrightarrow{AC}| = 2 |\overrightarrow{HC}|$.



Câu 15

Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Kết luận nào sau đây đúng?

- Ⓐ Không xác định được $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$. Ⓑ $\vec{GA} = \vec{GB} = \vec{GC}$.
 Ⓒ $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Ⓓ $\vec{GC} = \vec{GA} + \vec{GB}$.

Câu 16

Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh bằng a và góc A bằng 60° . Kết luận nào đúng?

- Ⓐ $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$. Ⓑ $|\vec{OA}| = a$. Ⓒ $|\vec{OA}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $|\vec{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17

Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CA}$. Ⓑ $\vec{BA} + \vec{AD} = \vec{AC}$. Ⓒ $\vec{BC} + \vec{BA} = \vec{BD}$. Ⓓ $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CA}$.

Câu 18

Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\vec{OA} = \vec{OB} = \vec{OC} = \vec{OD}$. Ⓑ $\vec{AC} = \vec{BD}$.
 Ⓒ $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}| = \vec{0}$. Ⓓ $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{AB}$.



Câu 19

Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, O . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

☐ A $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

☐ B $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$.

☐ C $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

☐ D $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Câu 20

Điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB là

☐ A $OA = OB$.

☐ B $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

☐ C $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$.

☐ D $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Câu 21

Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$ bằng

☐ A $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

☐ B a .

☐ C $2a$.

☐ D $a\sqrt{3}$.

Câu 22

Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 3, AC = 4$. Véc-tơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng

☐ A $2\sqrt{13}$.

☐ B $2\sqrt{3}$.

☐ C $\sqrt{3}$.

☐ D $\sqrt{13}$.



Câu 23

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Hỏi $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng véc-tơ nào?

☐ A $\overrightarrow{PB}$.

☐ B $\overrightarrow{AP}$.

☐ C $\overrightarrow{MN}$.

☐ D $\overrightarrow{AM}$.

Câu 24

Cho hình bình hành $ABCD$, giao điểm của hai đường chéo là O . Tìm mệnh đề **sai**?

☐ A $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

☐ B $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

☐ C $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

☐ D $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.

Câu 25

Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào **sai**?

☐ A $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

☐ B $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$.

☐ C $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EB}$.

☐ D $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$.

Câu 26

Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$ bằng

☐ A $\overrightarrow{AC}$.

☐ B $2\overrightarrow{DC}$.

☐ C $\vec{0}$.

☐ D $\overrightarrow{BD}$.



Câu 27

Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Câu 28

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

- Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $2a$. Ⓓ a .

Câu 29

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- Ⓐ $a\sqrt{5}$. Ⓑ $a\sqrt{3}$. Ⓒ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 30

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Giá trị của $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

- Ⓐ $A\sqrt{2}$. Ⓑ $2a$. Ⓒ $2a\sqrt{2}$. Ⓓ $3a$.



Câu 31

Cho tam giác đều ABC cạnh $4a$. Độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

- Ⓐ $2a\sqrt{3}$. Ⓑ $a\sqrt{5}$. Ⓒ $a\sqrt{6}$. Ⓓ $4a\sqrt{3}$.

Câu 32

Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , tâm O và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$ bằng

- Ⓐ $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ⓒ $2a$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

Câu 33

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Giá trị của $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$ bằng

- Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ a . Ⓒ $\frac{a}{2}$. Ⓓ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34

Cho tam giác ABC , E là điểm trên đoạn BC sao cho $BE = \frac{1}{4}BC$. Tìm khẳng định đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.



Câu 35

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ qua hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là

- (A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. (B) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 (C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. (D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

Câu 36

Tam giác ABC có $AB = AC = a, \widehat{ABC} = 120^\circ$. Độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng

- (A) $2a$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) a . (D) $3a$.

Câu 37

Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$ bằng

- (A) $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. (C) $\frac{a}{2}$. (D) $\frac{3a}{2}$.

Câu 38

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng

- (A) $-2\overrightarrow{MN}$. (B) $\overrightarrow{MN}$. (C) $2\overrightarrow{MN}$. (D) $3\overrightarrow{MN}$.



Câu 39

Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

- Ⓐ M là trung điểm AC .
- Ⓑ M là trung điểm AB .
- Ⓒ M là trung điểm BC .
- Ⓓ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Câu 40

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$.
- Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.
- Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$.
- Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

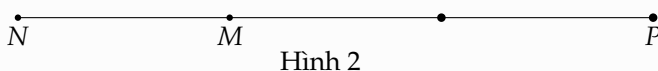
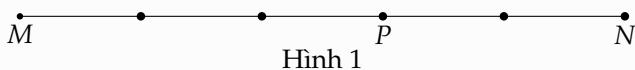
Câu 41

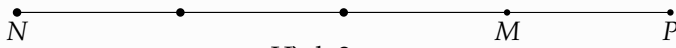
Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Tìm mệnh đề **sai**.

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.
- Ⓑ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.
- Ⓒ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
- Ⓓ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

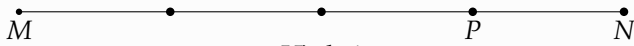
Câu 42

Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây





Hình 3



Hình 4

- Ⓐ Hình 3. Ⓑ Hình 4. Ⓒ Hình 1. Ⓓ Hình 2.

Câu 43

Cho tam giác ABC và I thỏa $\vec{IA} = 3\vec{IB}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\vec{CI} = 3\vec{CB} - \vec{CA}$. Ⓑ $\vec{CI} = \vec{CA} - 3\vec{CB}$.
 Ⓒ $2\vec{CI} = 3\vec{CB} - \vec{CA}$. Ⓓ $2\vec{CI} = \vec{CA} - 3\vec{CB}$.

Câu 44

Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\vec{MB} = 3\vec{MC}$. Đẳng thức nào đúng?

- Ⓐ $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Ⓑ $\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$.
 Ⓒ $\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{AC}$. Ⓓ $2\vec{AM} + \vec{AB} = 3\vec{AC}$.

Câu 45

Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\vec{CA} - \vec{HC}|$.

- Ⓐ $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $|\vec{CA} - \vec{HC}| = 5$.
 Ⓒ $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$. Ⓓ $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.



Câu 46

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Ⓑ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Ⓒ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Câu 47

Có hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- Ⓐ 100 (N). Ⓑ $50\sqrt{3}$ (N). Ⓒ $100\sqrt{3}$ (N). Ⓓ Đáp án khác.

Câu 48

Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Ⓑ $ABCD$ là hình thoi.
Ⓒ $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$. Ⓓ $ABCD$ là hình thang cân.

Câu 49

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

- Ⓐ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$. Ⓑ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$. Ⓓ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.



Câu 50

Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$.

- Ⓐ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $2a$. Ⓒ $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

Câu 51

Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Ⓑ $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$. Ⓒ $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$. Ⓓ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Câu 52

Tam giác ABC thỏa mãn $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ thì tam giác ABC là

- Ⓐ Tam giác vuông A . Ⓑ Tam giác vuông C .
Ⓒ Tam giác vuông B . Ⓓ Tam giác cân tại C .

Câu 53

Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$ có G là trọng tâm. Khi đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$ là

- Ⓐ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\frac{2a}{3}$.

**Câu 54**

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ lần lượt là 300 (N) và 400 (N). Biết $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

☐ A 0 (N).

☐ B 700 (N).

☐ C 100 (N).

☐ D 500 (N).





§3. TÍCH MỘT SỐ VỚI MỘT VEC TƠ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm

Khái niệm 3.1.

- ✔ Tích của một véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với số thực $k > 0$ là một véc tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với véc tơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.
- ✔ Tích của một véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với số thực $k < 0$ là một véc tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với véc tơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.



- ✔ Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.
- ✔ véc tơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.
- ✔ Hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.
- ✔ Để chứng minh ba điểm thẳng hàng ta cần chỉ ra hai véc tơ tạo bởi các cặp điểm trong ba điểm đó cùng phương.

2. Tính chất

Tính chất 3.1. Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực k, t , ta luôn có

- ✔ $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- ✔ $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
- ✔ $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- ✔ $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$.



- ✔ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
- ✔ Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.



Cho hai véc tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó, mọi véc tơ $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $(x; y)$ sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm K thoả mãn $3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Ví dụ 3

Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 4

Cho hai điểm phân biệt A, B . Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm thuộc AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.



Ví dụ 7

Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 8

Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các véc tơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Ví dụ 9

Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC và G là trọng tâm. Hãy phân tích các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ theo hai véc tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}, \vec{v} = \overrightarrow{BM}$.

Ví dụ 10

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB, CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\vec{CI} = \vec{DA}$. Chứng minh:

a) $\vec{DI} = \vec{CB}$.

b) $\vec{AI} = \vec{IB} = \vec{DC}$.



Ví dụ 11

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Ví dụ 12

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm BC , dựng điểm B' : $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm BB' , chứng minh $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Ví dụ 13

Cho $\triangle ABC$, tìm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Ví dụ 14

Cho $\triangle ABC$, tìm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$.

Ví dụ 15

$\triangle ABC$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

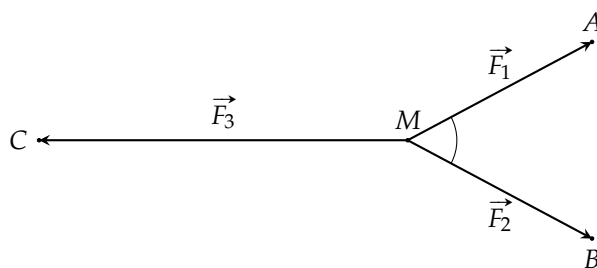


Ví dụ 16

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ lần lượt là 300 (N) và 400 (N). Biết $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

Ví dụ 17

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25 N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính cường độ lực của $\vec{F}_3$.



Ví dụ 18

Có hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1 Xác định hai véc-tơ cùng hướng, ngược hướng

Ta có $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $|\vec{a}| = |k| |\vec{b}|$ và $\begin{cases} k > 0 \text{ thì } \vec{a} \text{ \& } \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ k < 0 \text{ thì } \vec{a} \text{ \& } \vec{b} \text{ ngược hướng.} \end{cases}$

Bài 1

Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

Bài 2

Cho hai điểm phân biệt A, B . Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Dạng 2 Tìm mô-đun (độ dài) véc-tơ

Phương pháp giải: Để tính $|\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d}|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Biến đổi và rút gọn biểu thức véc-tơ $\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d} = \vec{v}$ dựa vào qui tắc ba điểm, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,... sao cho $\vec{v}$ là đơn giản nhất.

Bước 2. Tính độ dài (mô-đun) của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.



Một số kiến thức hình học phẳng thường được sử dụng

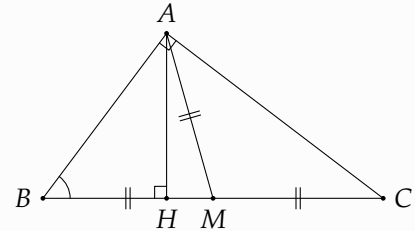
✓ Chiều cao tam giác đều = cạnh $\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

✓ Đường chéo hình vuông = cạnh $\cdot \sqrt{2}$.

Cho tam giác ABC vuông tại A , có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

✓ Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} \\ AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \end{cases}$$



✓ Trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$.

✓ $AB^2 = BH \cdot BC$ và $AC^2 = CH \cdot BC$.

✓ $\frac{1}{HA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB \cdot HC$.

✓ $\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \frac{AC}{BC}$; $\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}} = \frac{AB}{BC}$; $\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{đối}}{\text{kề}} = \frac{AC}{AB}$.

Bài 3

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Gọi I là trung điểm BC . Xác định và tính độ dài véc-tơ

a) $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$.

☞ $2\sqrt{3}$ cm.

b) $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

☞ 5 cm.

c) $\vec{w} = \vec{CA} + \vec{CB}$.

☞ $\sqrt{73}$ cm.

d) $\vec{x} = 2\vec{IA} - \vec{CA}$.

☞ 3 cm.

Bài 4

Cho tam giác ABC đều cạnh a , gọi G là trọng tâm tam giác và H là trung điểm BC . Tính

a) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

☞ $a\sqrt{3}$.

b) $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.

☞ a .

c) $|\vec{GA} - \vec{GC}|$.

☞ a .

d) $|\vec{GB} + \vec{GC}|$.

☞ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

e) $|\vec{AH} + \vec{BC}|$.

☞ $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

**Bài 5**

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$, $BC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính

a) $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$.

10.

b) $|\vec{AM} + \vec{AN}|$.

15/2.

Dạng 3 Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng

Để chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng ta chọn một điểm làm điểm gốc, giả sử chọn điểm M . Sau đó chứng minh một trong hai đẳng thức sau

$$\vec{MN} = k\vec{MP} \text{ với } k \neq 0.$$

$$\vec{MP} = k\vec{MN} \text{ với } k \neq 0.$$

Bài 6

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm thuộc AC sao $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Bài 7

Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$, $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.



Dạng 4 Biểu diễn véc-tơ qua hai véc-tơ không cùng phương

Cho hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó với mọi véc-tơ $\vec{c}$ ta có duy nhất một cách biểu diễn sau

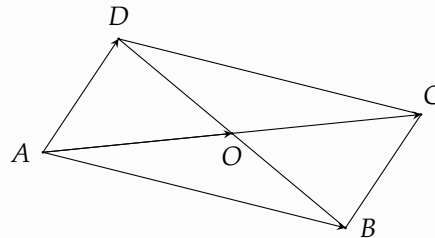
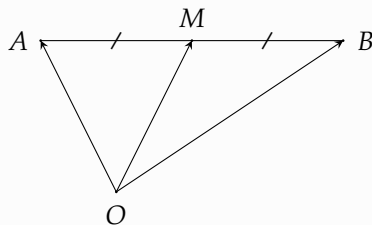
$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

Ta thường sử dụng các quy tắc

+ Quy tắc ba điểm $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

+ Quy tắc trung điểm $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

+ Quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ với $ABCD$ là hình bình hành tâm O .



Bài 8

Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 9

Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Bài 10

Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC , trọng tâm G . Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ theo hai véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 5 Chứng minh đẳng thức véc-tơ

Để chứng minh đẳng thức véc-tơ, ta thường thực hiện theo một trong các cách sau.

Cách 1. Biến đổi về trái sao cho xuất hiện lần lượt các đối tượng ở về phải.

Cách 2. Biến đổi về phải sao cho xuất hiện lần lượt các đối tượng ở về trái.

Cách 3. Xét hiệu $VT - VP = \dots = \dots = \vec{0}$.

Cách 4. Chứng minh hai vế cùng bằng một biểu thức thứ ba.

Thường áp dụng các quy tắc: Quy tắc ba điểm; Quy tắc tổng hiệu véc-tơ; Quy tắc trung điểm; Quy tắc HBH; Quy tắc trọng tâm...

Bài 11

Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 12

Cho các điểm bất kì. Hãy chứng minh đẳng thức



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$

f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}.$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}.$

g) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}.$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$

h) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}.$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$

i) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}.$

e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$

j) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$

Bài 13

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}.$

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{IJ}.$

Bài 14

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các đoạn AD, BC .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}.$

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{MN}.$

c) Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$

Bài 15

Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm AM .

- a) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.
- b) Với điểm O bất kỳ. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$

Bài 16

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD . Chứng minh:

- a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
- b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{AB}$.
- c) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$.

Bài 17

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB, CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Chứng minh:

- a) $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$. b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$.

Bài 18

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OP}$.



Bài 19

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm BC , dựng điểm B' : $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm BB' , chứng minh $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Dạng 6 Xác định điểm thoả mãn đẳng thức véc-tơ

Với mỗi véc-tơ $\vec{v}$ và điểm M cho trước, ta luôn luôn tìm được duy nhất điểm N thoả mãn $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$.

Bài 20

Cho $\triangle ABC$, tìm M thoả $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Bài 21

Cho $\triangle ABC$, tìm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$.



Bài 22

$\triangle ABC$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

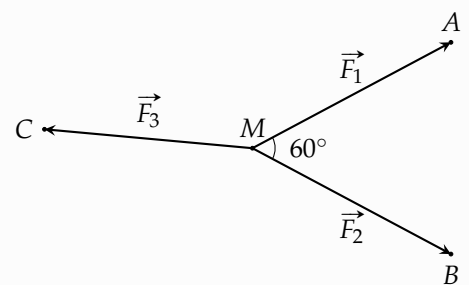
Dạng 7 Ứng dụng thực tế của véc-tơ

Bài 23

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ lần lượt là 300 (N) và 400 (N). Biết $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

Bài 24

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25 N và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính cường độ lực của $\vec{F}_3$.



Bài 25

Có hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ

độ bằng bao nhiêu?

.....

.....

.....

.....

.....

.....





C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Hãy biểu thị vec-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Bài 2

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

Bài 3

Cho hai điểm phân biệt A và B .

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Bài 4

Cho tam giác ABC .

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.

Bài 5

Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng, tức là $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Tính độ lớn của các lực $\vec{F}_2, \vec{F}_3$, biết $\vec{F}_1$ có độ lớn là 20 N.

Bài 6

Cho hình thang $MNPQ$, $MN \parallel PQ$, $MN = 2PQ$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- a) $\vec{MN} = 2\vec{PQ}$;
- b) $\vec{MQ} = 2\vec{NP}$;
- c) $\vec{MN} = -2\vec{PQ}$;
- d) $\vec{MQ} = -2\vec{NP}$.

Bài 7

Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm.

- a) Xác định điểm C thỏa mãn $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$;
- b) Xác định điểm D thỏa mãn $\vec{AD} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$.



Bài 8

Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh

a) $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN};$

b) $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}.$

Bài 9

Cho tam giác ABC . Các điểm D, E thuộc cạnh BC thỏa mãn $BD = DE = EC$. Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

Bài 10

Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN , E là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG};$

b) $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG};$

c) Điểm G thuộc đoạn thẳng AE và $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}.$



Bài 11

Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Biểu thị các véc-tơ $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CG}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Bài 12

Cho tam giác ABC . Các điểm D, E, H thỏa mãn

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

- a) Biểu thị mỗi véc-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HE}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$; b) Chứng minh D, E, H thẳng hàng.

D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1

Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

- Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 2

Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $ABCD$ là hình bình hành. Ⓑ $DA = BC$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Câu 3

Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Cặp véc-tơ cùng hướng là

☐ A $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

☐ B $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

☐ C $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.

☐ D $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Câu 4

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây sai?

☐ A $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

☐ B $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

☐ C $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

☐ D $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.

Câu 5

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, AD = 4$. Giá trị của $|\overrightarrow{AC}|$ bằng

☐ A 6.

☐ B 3.

☐ C 4.

☐ D 5.

Câu 6

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3, BC = 5$. Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ bằng

☐ A 6.

☐ B 8.

☐ C 13.

☐ D 4.



Câu 7

Gọi M là trung điểm của đoạn AB . Khẳng định nào sau đây sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$. Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Câu 8

Cho tam giác đều ABC với đường cao AH . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\overrightarrow{HC}|$.
Ⓒ $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. Ⓓ $|\overrightarrow{AC}| = 2 |\overrightarrow{HC}|$.

Câu 9

Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Kết luận nào sau đây đúng?

- Ⓐ Không xác định được $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.

Câu 10

Cho tam giác MNP vuông tại M và $MN = 3$ cm, $MP = 4$ cm. Độ dài của $\overrightarrow{NP}$ bằng

- Ⓐ 4 cm. Ⓑ 5 cm. Ⓒ 6 cm. Ⓓ 3 cm.

**Câu 11**

Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh bằng a và góc A bằng 60° . Kết luận nào đúng?

- Ⓐ $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$. Ⓑ $|\vec{OA}| = a$. Ⓒ $|\vec{OA}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $|\vec{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12

Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CA}$. Ⓑ $\vec{BA} + \vec{AD} = \vec{AC}$. Ⓒ $\vec{BC} + \vec{BA} = \vec{BD}$. Ⓓ $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CA}$.

Câu 13

Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\vec{OA} = \vec{OB} = \vec{OC} = \vec{OD}$. Ⓑ $\vec{AC} = \vec{BD}$.
 Ⓒ $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}| = \vec{0}$. Ⓓ $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{AB}$.

Câu 14

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3, BC = 5$. Tính $|\vec{AB} + \vec{BC}|$.

- Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 3.



Câu 15

Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, O . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

☐ A $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

☐ B $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$.

☐ C $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

☐ D $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Câu 16

Điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB là

☐ A $OA = OB$.

☐ B $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

☐ C $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$.

☐ D $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Câu 17

Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$ bằng

☐ A $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

☐ B a .

☐ C $2a$.

☐ D $a\sqrt{3}$.

Câu 18

Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 3, AC = 4$. Véc-tơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng

☐ A $2\sqrt{13}$.

☐ B $2\sqrt{3}$.

☐ C $\sqrt{3}$.

☐ D $\sqrt{13}$.



Câu 19

Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ bằng

☐ A $a\sqrt{3}$.

☐ B $2a$.

☐ C $2a\sqrt{3}$.

☐ D $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Hỏi $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng véc-tơ nào?

☐ A $\overrightarrow{PB}$.

☐ B $\overrightarrow{AP}$.

☐ C $\overrightarrow{MN}$.

☐ D $\overrightarrow{AM}$.

Câu 21

Cho hình bình hành $ABCD$, giao điểm của hai đường chéo là O . Tìm mệnh đề **sai**?

☐ A $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

☐ B $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

☐ C $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

☐ D $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.

Câu 22

Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Phát biểu nào đúng?

☐ A $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}|$.

☐ B $|\overrightarrow{GA}| + |\overrightarrow{GB}| + |\overrightarrow{GC}| = 0$.

☐ C $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = \overrightarrow{AC}$.

☐ D $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 0$.



Câu 23

Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào **sai**?

- (A) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$.
 (C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EB}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$.

Câu 24

Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$ bằng

- (A) $\overrightarrow{AC}$. (B) $2\overrightarrow{DC}$. (C) $\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{BD}$.

Câu 25

Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Câu 26

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

- (A) $a\sqrt{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $2a$. (D) a .



Câu 27

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

(A) $a\sqrt{5}$.

(B) $a\sqrt{3}$.

(C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 28

Cho hình chữ nhật $ABCD$, biết $AB = 4a$ và $AD = 3a$. Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

(A) $5a$.

(B) $6a$.

(C) $2a\sqrt{3}$.

(D) $7a$.

Câu 29

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Giá trị của $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

(A) $A\sqrt{2}$.

(B) $2a$.

(C) $2a\sqrt{2}$.

(D) $3a$.

Câu 30

Cho tam giác đều ABC cạnh $4a$. Độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

(A) $2a\sqrt{3}$.

(B) $a\sqrt{5}$.

(C) $a\sqrt{6}$.

(D) $4a\sqrt{3}$.

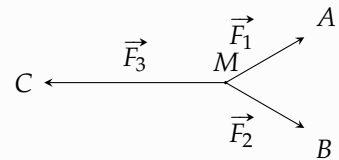
Câu 31

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên.



Cho biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 100 N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ bằng

- Ⓐ $50\sqrt{2}\text{ N}$. Ⓑ $50\sqrt{3}\text{ N}$. Ⓒ $25\sqrt{3}\text{ N}$. Ⓓ $100\sqrt{3}\text{ N}$.



Câu 32

Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , tâm O và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài véc-tơ $\vec{OB} - \vec{CD}$ bằng

- Ⓐ $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ⓒ $2a$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

Câu 33

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Giá trị $|\vec{AB} - \vec{DA}|$ bằng

- Ⓐ $A\sqrt{2}$. Ⓑ $2a$. Ⓒ 0 . Ⓓ A .

Câu 34

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Giá trị của $|\vec{OB} + \vec{OC}|$ bằng

- Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ a . Ⓒ $\frac{a}{2}$. Ⓓ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 35**

Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$, $BD = a$. Giá trị của $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$ bằng

- Ⓐ $a\sqrt{5}$. Ⓑ $5a$. Ⓒ $3a$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

Câu 36

Cho tam giác ABC , E là điểm trên đoạn BC sao cho $BE = \frac{1}{4}BC$. Tìm khẳng định đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

Câu 37

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Biểu diễn Véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ qua hai Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là

- Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

Câu 38

Tam giác ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng

- Ⓐ $2a$. Ⓑ $a\sqrt{3}$. Ⓒ a . Ⓓ $3a$.



Câu 39

Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$ bằng

- Ⓐ $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. Ⓒ $\frac{a}{2}$. Ⓓ $\frac{3a}{2}$.

Câu 40

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng

- Ⓐ $-2\overrightarrow{MN}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN}$. Ⓒ $2\overrightarrow{MN}$. Ⓓ $3\overrightarrow{MN}$.

Câu 41

Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

- Ⓐ M là trung điểm AC .
 Ⓑ M là trung điểm AB .
 Ⓒ M là trung điểm BC .
 Ⓓ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Câu 42

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$. Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.



Câu 43

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Tìm mệnh đề **sai**.

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

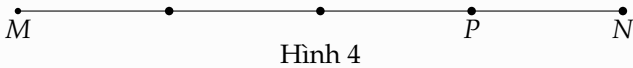
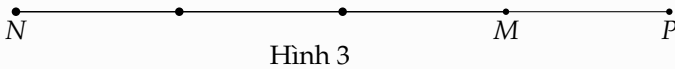
(B) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

(C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

(D) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

Câu 44

Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây



(A) Hình 3.

(B) Hình 4.

(C) Hình 1.

(D) Hình 2.

Câu 45

Cho tam giác ABC và I thỏa $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

(B) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

(C) $2\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

(D) $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.



Câu 46

Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P . Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x bằng

(A) $-\frac{5}{3}$.

(B) $-\frac{4}{3}$.

(C) $-\frac{2}{3}$.

(D) $-\frac{3}{2}$.

Câu 47

Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Đẳng thức nào đúng?

(A) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

(B) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

(D) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

Câu 48

Phát biểu nào là **sai**?

(A) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

(B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.

(C) $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì A, B, C thẳng hàng.

(D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

Câu 49

Cho tam giác đều ABC cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{2MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$ là đường tròn cố định có bán kính R . Tính R theo a .

(A) $R = \frac{a}{3}$.

(B) $R = \frac{a}{9}$.

(C) $R = \frac{a}{2}$.

(D) $R = \frac{a}{4}$.





§4. VECTO TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

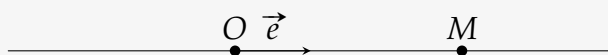
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trục và độ dài đại số trên trục

a) Trục tọa độ

Định nghĩa 4.1.

- ✔ Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một véc-tơ đơn vị $\vec{e}$.
- ✔ Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- ✔ Hướng của véc-tơ đơn vị là hướng của trục.
- ✔ Ta kí hiệu trục đó là $(O; \vec{e})$.



b) Tọa độ của một điểm

Định nghĩa 4.2. Cho M là một điểm tùy ý trên trục $(O; \vec{e})$. Khi đó có duy nhất một số k sao cho $\overrightarrow{OM} = k \cdot \vec{e}$.

Ta gọi số k đó là tọa độ của điểm M đối với trục đã cho.

c) Tọa độ véc-tơ

Định nghĩa 4.3. Cho hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{e})$.

Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a \cdot \vec{e}$. Ta gọi số a là độ dài đại số của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $a = \overline{AB}$.



✔ Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = AB$, còn nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = -AB$.

✔ Nếu hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{e})$ có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.

2. Hệ trục tọa độ

a) Hệ trục tọa độ

Định nghĩa 4.4. Hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ gồm hai trục $(O; \vec{i})$ và $(O; \vec{j})$ vuông góc với nhau.

- ✔ Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc tọa độ.
- ✔ Trục $(O; \vec{i})$ được gọi là trục hoành và kí hiệu là Ox , trục $(O; \vec{j})$ được gọi là trục tung và kí hiệu là Oy .
- ✔ Các véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các véc-tơ đơn vị trên Ox và Oy và $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.
- ✔ Hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ còn được kí hiệu là Oxy .



- ✔ Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ Oxy còn được gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy . Hay gọi tắt là mặt phẳng Oxy .

b) Tọa độ véc-tơ

Định nghĩa 4.5.

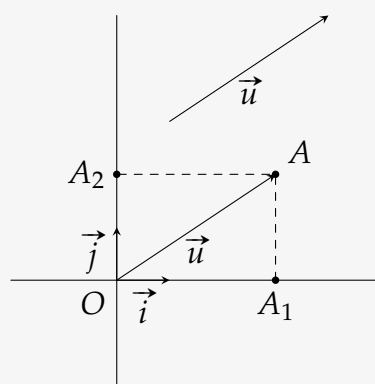
Trong mặt phẳng Oxy cho một véc-tơ $\vec{u}$ tùy ý. Vẽ $\vec{OA} = \vec{u}$ và gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên Ox và Oy .

Ta có $\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$ và cặp số duy nhất $(x; y)$ để $\vec{OA_1} = x \cdot \vec{i}, \vec{OA_2} = y \cdot \vec{j}$.

Như vậy $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

Cặp số $(x; y)$ duy nhất đó được gọi là tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ đối với hệ tọa độ Oxy và viết $\vec{u} = (x; y)$ hoặc $\vec{u}(x; y)$. Số thứ nhất x gọi là hoành độ, số thứ hai y gọi là tung độ của véc-tơ $\vec{u}$.

$$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$



⚠ Từ định nghĩa tọa độ của véc-tơ, ta thấy hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

$$\text{Nếu } \vec{u} = (x; y) \text{ và } \vec{u}' = (x'; y') \text{ thì } \vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Như vậy mỗi véc-tơ được hoàn toàn xác định khi biết tọa độ của nó.

c) Tọa độ của một điểm

Định nghĩa 4.6.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một điểm M tùy ý.

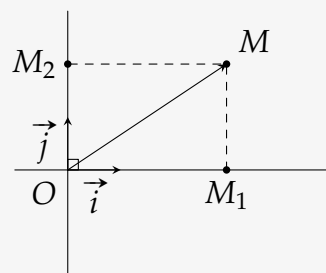
Tọa độ của véc-tơ $\vec{OM}$ đối với hệ trục Oxy được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ trục đó.

Như vậy cặp số $(x; y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\vec{OM} = (x; y)$.

Khi đó ta viết $M = (x; y)$ hoặc $M(x; y)$. Số x được gọi là hoành độ, còn số y được gọi là tung độ của điểm M . Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M , tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M .

$$M = (x; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Chú ý rằng: nếu $MM_1 \perp Ox, MM_2 \perp Oy$ thì $x = \overline{OM_1}, y = \overline{OM_2}$.





3. Biểu thức tọa độ của phép toán véc tơ

Định lý 4.1. Cho $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{u}' = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó, ta có

a) $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

b) $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$.

c) $k \cdot \vec{u} = (kx; ky)$.

d) $\vec{u}'$ cùng phương $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

e) Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$. Khi đó, độ dài của đoạn thẳng $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

4. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng

Định nghĩa 4.7. Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm $I(x_I; y_I)$ của đoạn thẳng AB là

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác

Định nghĩa 4.8. Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Khi đó tọa độ của trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ 1

Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là $-2; 1$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho điểm $M(x; y)$. Tìm tọa độ của các điểm M_1 đối xứng với M qua trục hoành.



Ví dụ 3

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 4

Véc-tơ $\vec{a} = (-4;0)$ được phân tích theo hai véc-tơ đơn vị $(\vec{i}; \vec{j})$ như thế nào?

Ví dụ 5

Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1;3)$. Biết điểm B thuộc trục Ox và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 6

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (1;3)$, $\vec{b} = (3;-4)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$.

Ví dụ 7

Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (x;2)$, $\vec{b} = (-5;1)$, $\vec{c} = (x;7)$. Tìm x để véc-tơ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.



Ví dụ 8

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(0;-2)$. Tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$ là

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tọa độ của điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục

- ✔ Điểm M có tọa độ $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a \cdot \vec{e}$ với O là điểm gốc.
- ✔ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{e}$.
- ✔ Nếu A và B có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.
- ✔ Tọa độ trung điểm I của đoạn AB : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Ví dụ 1

Trên trục tọa độ $(O; \vec{e})$, cho ba điểm A, B, C với $\overrightarrow{OA} = 4,5\vec{e}$, $\overrightarrow{OB} = -7,2\vec{e}$, $\overrightarrow{OC} = -3,6\vec{e}$.

- a) Xác định tọa độ các điểm A, B, C .
- b) Tìm tọa độ các trung điểm M, N, P theo thứ tự của các đoạn thẳng AB, BC, CA .
- c) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA .

Ví dụ 2

Trên trục $(O; \vec{e})$, cho các điểm A, B, M, N có tọa độ lần lượt là $-1, 2, 3, -2$. Tính độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$.



Ví dụ 3

Trên trục tọa độ $(O, \vec{e})$, cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là $1, -2, 7$.

- Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{AM} + 3\overline{BM} = 2\overline{CM}$.
- Tìm tọa độ của D sao cho $\overline{DA} + 4\overline{DB} \leq 3\overline{DC}$.

Dạng 2 Tọa độ của điểm và của véc-tơ

- ✓ Áp dụng định nghĩa tọa độ của điểm.
- ✓ Áp dụng định nghĩa tọa độ của véc-tơ.
- ✓ Sử dụng các tính chất của phép toán véc-tơ.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng (Oxy) , tìm tọa độ của các véc-tơ sau?

- $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
- $\vec{v} = \pi\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$.
- $\vec{x} = -3\vec{j}$.
- $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i}$.

Ví dụ 2

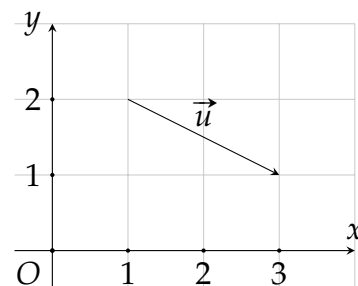
Trong mặt phẳng (Oxy) , tìm tọa độ của các điểm thỏa mãn?

- $\overrightarrow{OM} = -2\vec{i} + \vec{j}$.
- $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.
- $\overrightarrow{OP} = 2\vec{j}$.
- $\overrightarrow{OQ} = -5\vec{i}$.



Ví dụ 3

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{u}$ như hình vẽ bên. Xác định tọa độ của $\vec{u}$.



Ví dụ 4

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-1; -4)$ và $\vec{c} = (-3; 2)$.

- Tìm tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.
- Tìm tọa độ của $\vec{x} = 4\vec{a} + 7\vec{b} - 2\vec{c}$.

Dạng 3

Tọa độ của điểm và véc-tơ thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp

- ✔ Gọi điểm (véc-tơ) cần tìm có tọa độ $(x; y)$.
- ✔ Theo yêu cầu bài toán, lập hệ phương trình với hai ẩn x, y .
- ✔ Giải hệ phương trình tìm $x, y \Rightarrow$ tọa độ của điểm (véc-tơ) cần tìm.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(3; 4)$, $C(-2; -1)$.

- Tìm tọa độ trung điểm của cạnh AB .
- Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.



Ví dụ 2

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(1; 3)$.

- Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}$.
- Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-1; 1)$, $D\left(-1; \frac{5}{2}\right)$.

- Tìm tọa độ điểm B biết D là trung điểm đoạn AB .
- Tìm tọa độ điểm M đối xứng với A qua B .

Ví dụ 4

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$ và $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm x sao cho $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$.

- Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.
- Tìm các số k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.



Dạng 4

Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Phân tích $\vec{u}$ theo hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Phương pháp

- ✔ Giả sử $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b}$.
- ✔ Lập hệ phương trình với hai ẩn m, n .
- ✔ Giải hệ phương trình tìm $m, n \Rightarrow$ kết luận.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = (4; -2)$, $\vec{b} = (-1; -1)$, $\vec{c} = (2; 5)$.

- a) Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.
- b) Hãy phân tích véc-tơ $\vec{b}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (1; -3)$, $\vec{c} = (-1; -7)$.

- a) Tìm các số k, h để $\vec{a} = k\vec{b} + h\vec{c}$.
- b) Phân tích $\vec{c}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(-3; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(1; -1)$. Gọi M là điểm thuộc BC sao cho $\vec{MB} = -2\vec{BC}$ và G là trọng tâm của tam giác ABC .

- a) Phân tích $\vec{AM}$ theo hai véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.



b) Phân tích $\overrightarrow{GM}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Dạng 5

Chứng minh ba điểm thẳng hàng, véc-tơ cùng phương, hai đường thẳng song song

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau

- ☑ Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
Cụ thể, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases} \text{ hay } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, b_1b_2 \neq 0.$$

- ☑ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- ☑ Điểm M thuộc đường thẳng $AB \Leftrightarrow$ ba điểm M, A, B thẳng hàng.

Ví dụ 1

Tìm x để các cặp véc-tơ sau cùng phương

- $\vec{a} = (-3; 2)$, $\vec{b} = (6; x)$
- $\vec{m} = (0; 4)$, $\vec{n} = (x; 7)$
- $\vec{u} = (x; -6)$, $\vec{v} = (-8; 2x)$.

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(2; -5)$, $B(-3; 6)$, $C(12; -27)$, $D(m; 2)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Xác định m để ba điểm A, B, D thẳng hàng.

**Ví dụ 3**

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $M(4; 0)$, $N(-2; 3)$, $P(6; 1)$.

- Chứng minh ba điểm M , N , P là ba đỉnh của một tam giác.
- Xác định điểm Q trên trục hoành biết các điểm N , P , Q thẳng hàng.

Ví dụ 4

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(3; 8)$, $B(6; 1)$. Tìm x để điểm $C(-9; x)$ thuộc đường thẳng AB .

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng Oxy , cho bốn điểm $A(3; -4)$, $B(5; 0)$, $C(-6; 3)$, $D(2; 19)$. Chứng minh đường thẳng AB và CD song song.

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(1;3), N(4;2)$

- Tính độ dài các đoạn thẳng OM, ON, MN .
- Chứng minh rằng tam giác OMN vuông.

Bài 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = (4; -1)$ và các điểm $M(-3;6), N(3; -3)$.

- Tìm mối liên hệ giữa các véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.
- Các điểm O, M, N có thẳng hàng hay không?
- Tìm điểm $P(x;y)$ để $OMNP$ là hình bình hành.

Bài 3

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1;3), B(2;4), C(-3;2)$.

- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm điểm $D(x;y)$ để $O(0;0)$ là trọng tâm của tam giác ABD .



Bài 4

Tìm tọa độ của các vectơ sau

a) $\vec{a} = 3\vec{i}$.

b) $\vec{b} = -\vec{j}$.

c) $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

d) $\vec{d} = 0,5\vec{i} + \sqrt{6}\vec{j}$.

Bài 5

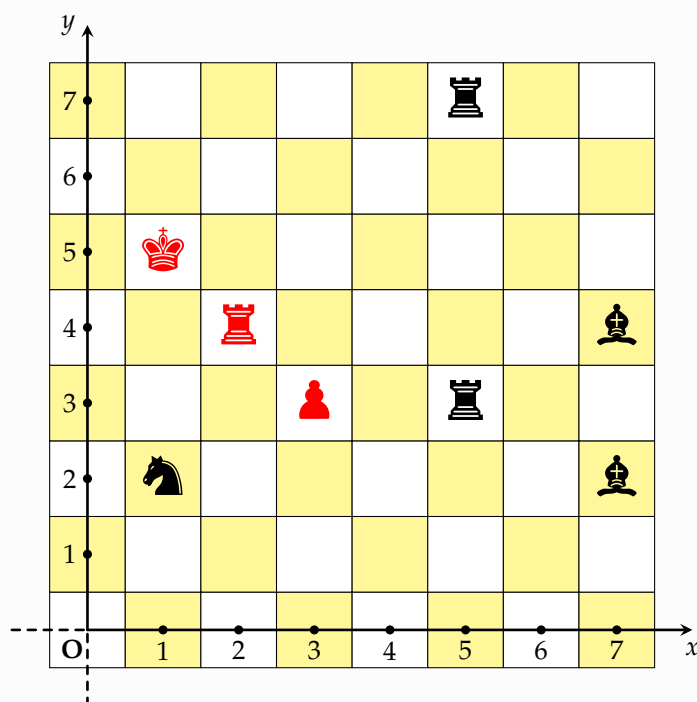
Sự dịch chuyển của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(1;2)$ chuyển động đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi véc-tơ $\vec{v} = (3;4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

Bài 6

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-3;1)$, $B(-1;3)$ và $I(4;2)$ không thẳng hàng. Tìm tọa độ hai điểm C và D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nhận I là tâm đối xứng.

Bài 7

Trong hình 4.38, quân mã đang ở vị trí có tọa độ $(1;2)$. Hỏi sau một nước đi quân mã có thể đến những vị trí nào?



Hình 4.38

Bài 8

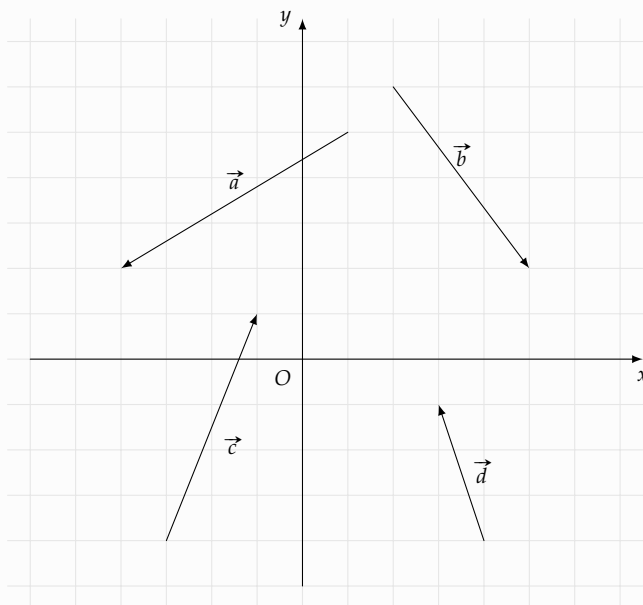
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;3)$, $B(-1;1)$, và $C(3;-1)$.

- Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.
- Tìm tọa độ trung điểm N của đoạn thẳng AC . Chứng minh $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.



Bài 9

Tìm tọa độ của các vectơ trong hình bên và biểu diễn mỗi vectơ đó qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.



Bài 10

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-1;3)$.

- Tìm tọa độ điểm A đối xứng với điểm M qua gốc O .
- Tìm tọa độ điểm B đối xứng với điểm M qua trục Ox .
- Tìm tọa độ điểm C đối xứng với điểm M qua trục Oy .

Bài 11

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, $D(x_D; y_D)$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $x_A + x_C = x_B + x_D$ và $y_A + y_C = y_B + y_D$.



Bài 12

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Biết các điểm $M(1; -2)$, $N(4; -1)$ và $P(6; 2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA , AB . Tìm tọa độ các điểm A , B , C .

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (-4; 0)$ cùng hướng. ☐ B $\vec{s} = (7; 3)$ là véc-tơ đối của $\vec{d} = (-7; 3)$.
☐ C $\vec{u} = (4; 2)$, $\vec{v} = (8; 3)$ cùng phương. ☐ D $\vec{a} = (6; 3)$, $\vec{b} = (2; 1)$ ngược hướng.

Câu 2

Cho $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (-5; 3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

- ☐ A $\vec{u} = (7; -7)$. ☐ B $\vec{u} = (9; -11)$. ☐ C $\vec{u} = (9; -5)$. ☐ D $\vec{u} = (-1; 5)$.

Câu 3

Cho $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (-1; 2)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$.

- ☐ A $(-4; 6)$. ☐ B $(2; -2)$. ☐ C $(4; -6)$. ☐ D $(-3; -8)$.



Câu 4

Cho $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (5; -7)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$.

- Ⓐ $(6; -9)$. Ⓑ $(4; -5)$. Ⓒ $(-6; 9)$. Ⓓ $(-5; -14)$.

Câu 5

Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tọa độ của véc-tơ $\vec{i} + \vec{j}$ là

- Ⓐ $(0; 1)$. Ⓑ $(1; -1)$. Ⓒ $(-1; 1)$. Ⓓ $(1; 1)$.

Câu 6

Cho $\vec{u} = (3; -2)$, $\vec{v} = (1; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ ngược hướng. Ⓑ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.
Ⓒ $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng. Ⓓ $2\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}$ cùng phương.

Câu 7

Cho $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

- Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = -\frac{1}{2}$. Ⓒ $x = \frac{1}{4}$. Ⓓ $x = 2$.



Câu 8

Cho $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (4; x)$. Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

- Ⓐ $x = -5$. Ⓑ $x = 4$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $x = -1$.

Câu 9

Cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

- Ⓐ $x = -15$. Ⓑ $x = 3$. Ⓒ $x = 15$. Ⓓ $x = 5$.

Câu 10

Cho ba véc-tơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Giá trị của k, h để $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + h \cdot \vec{b}$ là

- Ⓐ $k = 2, 5; h = -1, 3$. Ⓑ $k = 4, 6; h = -5, 1$.
Ⓒ $k = 4, 4; h = -0, 6$. Ⓓ $k = 3, 4; h = -0, 2$.

Câu 11

Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{AB}$?

- Ⓐ $\vec{AB} = (15; 10)$. Ⓑ $\vec{AB} = (2; 4)$. Ⓒ $\vec{AB} = (5; 6)$. Ⓓ $\vec{AB} = (50; 16)$.

Câu 12

Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-2; 1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{AB} - \vec{AC}$.

- Ⓐ $(-5; -3)$. Ⓑ $(1; 1)$. Ⓒ $(-1; 2)$. Ⓓ $(-1; 1)$.

**Câu 13**

Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3), B(4; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- ☐ A $I(6; 4)$. ☐ B $I(2; 10)$. ☐ C $I(3; 2)$. ☐ D $I(8; -21)$.

Câu 14

Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3; 5), B(1; 2), C(5; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC ?

- ☐ A $G(-3; -3)$. ☐ B $G\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$. ☐ C $G(9; 9)$. ☐ D $G(3; 3)$.

Câu 15

Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 1), B(-3; 5)$ và trọng tâm $G(-1; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

- ☐ A $C(6; -3)$. ☐ B $C(-6; 3)$. ☐ C $C(-6; -3)$. ☐ D $C(-3; 6)$.

Câu 16

Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 2), B(3; 5)$ và trọng tâm là gốc tọa độ $O(0; 0)$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

- ☐ A $C(-1; -7)$. ☐ B $C(2; -2)$. ☐ C $C(-3; -5)$. ☐ D $C(1; 7)$.



Câu 17

Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(5; -3)$ và C thuộc trục Oy , trọng tâm G của tam giác thuộc trục Ox . Tìm tọa độ điểm C .

- ☐ A $C(0; 4)$.
 ☐ B $C(2; 4)$.
 ☐ C $C(0; 2)$.
 ☐ D $C(0; -4)$.

Câu 18

Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $C(-2; -4)$, trọng tâm $G(0; 4)$ và trung điểm cạnh BC là $M(2; 0)$. Tổng hoành độ của điểm A và B là

- ☐ A -2 .
 ☐ B 2 .
 ☐ C 4 .
 ☐ D 8 .

Câu 19

Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 0)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- ☐ A $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.
 ☐ B A, B, C thẳng hàng.
 ☐ C $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
 ☐ D $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Câu 20

Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(3; -2)$, $B(7; 1)$, $C(0; 1)$, $D(-8; -5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ đối nhau.
 ☐ B $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
 ☐ C $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
 ☐ D A, B, C, D thẳng hàng.



Câu 21

Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(-1;5)$, $B(5;5)$, $C(-1;11)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A A, B, C thẳng hàng.
 ☐ B $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.
 ☐ C $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
 ☐ D $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 22

Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1;1)$, $B(2;-1)$, $C(4;3)$, $D(3;5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
 ☐ B $G(9;7)$ là trọng tâm tam giác BCD .
 ☐ C $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
 ☐ D $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ cùng phương.

Câu 23

Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(-2;-2)$, $C(7;7)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $G(2;2)$ là trọng tâm tam giác ABC .
 ☐ B B ở giữa hai điểm A và C .
 ☐ C A ở giữa hai điểm B và C .
 ☐ D $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 24

Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(3;-4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy . Khẳng định nào đúng?

- ☐ A $\overline{OM_1} = -3$.
 ☐ B $\overline{OM_2} = 4$.
 ☐ C $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (-3; -4)$.
 ☐ D $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3; -4)$.



Câu 25

Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $OABC$, điểm C thuộc trục hoành. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{AB}$ có tung độ khác 0.
 ☐ B Hai điểm A, B có tung độ khác nhau.
 ☐ C C có hoành độ bằng 0.
 ☐ D $x_A + x_C - x_B = 0$.

Câu 26

Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-5; -2)$, $B(-5; 3)$, $C(3; 3)$, $D(3; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
 ☐ B $ABCD$ là hình chữ nhật.
 ☐ C $I(-1; 1)$ là trung điểm AC .
 ☐ D $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

Câu 27

Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -3)$, $D(-2; -1)$. Xét hai mệnh đề

- ☒ (I): $ABCD$ là hình bình hành.
 ☒ (II): AC cắt BD tại $M(0; -1)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A Chỉ (I) đúng.
 ☐ B Chỉ (II) đúng.
 ☐ C Cả (I) và (II) đều đúng.
 ☐ D Cả (I) và (II) đều sai.



Câu 28

Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(6; 5)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- Ⓐ $D(4; 3)$. Ⓑ $D(3; 4)$. Ⓒ $D(4; 4)$. Ⓓ $D(8; 6)$.

Câu 29

Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(0; -3)$, $B(2; 1)$, $D(5; 5)$. Tìm tọa độ điểm C để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- Ⓐ $C(3; 1)$. Ⓑ $C(-3; -1)$. Ⓒ $C(7; 9)$. Ⓓ $C(-7; -9)$.

Câu 30

Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(0; 3)$, $D(2; 1)$ và $I(-1; 0)$ là tâm của hình chữ nhật. Tìm tọa độ trung điểm của cạnh BC .

- Ⓐ $(1; 2)$. Ⓑ $(-2; -3)$. Ⓒ $(-3; -2)$. Ⓓ $(-4; -1)$.

Câu 31

Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $B(9; 7)$, $C(11; -1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{MN}$?

- Ⓐ $\overrightarrow{MN} = (2; -8)$. Ⓑ $\overrightarrow{MN} = (1; -4)$. Ⓒ $\overrightarrow{MN} = (10; 6)$. Ⓓ $\overrightarrow{MN} = (5; 3)$.

**Câu 32**

Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(2;3)$, $N(0;-4)$, $P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA , AB . Tìm tọa độ đỉnh A ?

(A) $A(1;5)$.

(B) $A(-3;-1)$.

(C) $A(-2;-7)$.

(D) $A(1;-10)$.

Câu 33

Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$.

(A) $I(1;2)$.

(B) $I\left(1; \frac{2}{5}\right)$.

(C) $I\left(-1; \frac{8}{3}\right)$.

(D) $I(2;-2)$.

Câu 34

Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho A , B , M thẳng hàng.

(A) $M(1;0)$.

(B) $M(4;0)$.

(C) $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

(D) $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

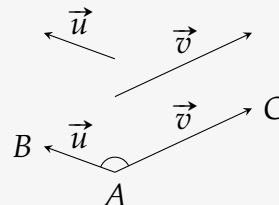
§5. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC - TƠ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai véc-tơ

Khái niệm 5.1.

Cho hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm A tùy ý, vẽ các véc-tơ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Khi đó, số đo của góc BAC được gọi là số đo góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$. Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



- ⚠️ ✔ Quy ước rằng góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .
- ✔ Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$. Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi véc-tơ.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

2. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Khái niệm 5.2. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

- ⚠️ ✔ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ✔ $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được coi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{u}$. Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| |\vec{u}| \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.

Ví dụ 2

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



3. Biểu thức tọa độ và tích chất của tích vô hướng

Khái niệm 5.3. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ được tính theo công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$



- ✔ Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' = 0$.
- ✔ Bình phương vô hướng của $\vec{u}(x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.
- ✔ Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Ví dụ 3

Cho các véc-tơ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tính tích vô hướng và tìm góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Tính chất 5.1. Với ba véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bất kì và mọi số thực k ta có

- ✔ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (tính chất giao hoán)
- ✔ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (tính chất phân phối với phép cộng)
- ✔ $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.



Từ các tính chất trên ta có thể chứng minh được

- ✔ $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$ (tính chất phân phối với phép trừ)
- ✔ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- ✔ $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Ví dụ 4

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2.$$



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

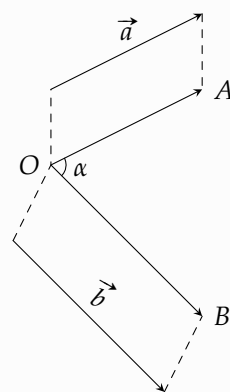
Dạng 1 Xác định góc giữa hai véc-tơ

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Khi đó để xác định góc giữa hai véc-tơ ta thực hiện như sau:

- ✔ Vẽ véc-tơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
- ✔ Khi đó góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$.

* **Chú ý**

- ✔ $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.
- ✔ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- ✔ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.



Ví dụ 1

Góc $\widehat{N}$ trong $\triangle MNP$ được biểu diễn theo hai véc-tơ nào? Viết kí hiệu.

Ví dụ 2

Góc tạo bởi hai véc-tơ $\overrightarrow{OX}$ và $\overrightarrow{XY}$ là góc nào trong hình bình hành $OXYZ$?

Ví dụ 3

Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.



Dạng

2

Tích tích vô hướng

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó, ta có công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

Tích vô hướng còn được tính theo công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

* **Chú ý** $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $A(1; 2), B(-2; 6), C(9; 8)$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Tam giác $\triangle ABC$ là tam giác gì?

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng: $\vec{BA} \cdot \vec{BC}; \vec{BC} \cdot \vec{CA}$.
- Tính giá trị của biểu thức $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$.
- Tính giá trị của biểu thức $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$.

Ví dụ 3

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a ; M là trung điểm của AB ; G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau.

- $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC})$.
- $\vec{CG} \cdot (\vec{CA} + \vec{DM})$.



Dạng 3 Tính góc giữa hai véc-tơ

Để tính góc giữa hai véc-tơ ta áp dụng công thức

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ví dụ 1

Cho $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 4)$. Tính $\cos \alpha$, với $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$.

Ví dụ 2

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ví dụ 3

Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\vec{AC}, \vec{CB})$.

Dạng 4 Ứng dụng của tích vô hướng

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4; 3)$, $B(2; 7)$ và $C(-3; -8)$. Tính độ dài đường cao AA' của $\triangle ABC$.

**Ví dụ 2**

Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M thỏa $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Ví dụ 3

Cho điểm $A(2; 1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tìm tọa độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Bài tập tự luận

Bài 1

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , hãy tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau

- a) $\vec{a} = (3; 1), \vec{b} = (2; 6);$ b) $\vec{a} = (3; 1), \vec{b} = (2; 4);$ c) $\vec{a} = (\sqrt{-2}; 1), \vec{b} = (2; \sqrt{-2}).$

Bài 2

Tìm điều kiện của $\vec{u}, \vec{v}$ để

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|;$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|.$

Bài 3

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-4; 3)$. Gọi $M(t; 0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

- a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t . b) Tìm t để $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Bài 4

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$.

- a) Giải tam giác ABC .



b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

Bài 5

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}.$$

Bài 6

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Bài 7

Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau

a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ;$

b) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ;$

c) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng;

d) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.



Bài 8

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính các tích vô hướng sau

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Bài 9

Cho tam giác ABC . Chứng minh

$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0.$$

Bài 10

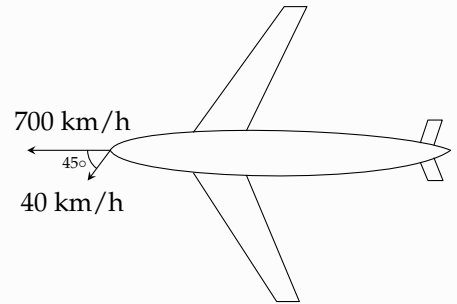
Cho tam giác nhọn ABC , kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài 11

Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Bài 12

Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh $AM \perp BD$.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1

Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

- ☐ A $MN = 4$.
 ☐ B $MN = 2$.
 ☐ C $MN = 16$.
 ☐ D $MN = 256$.



Câu 2

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.
- ☐ B Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.
- ☐ C Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.
- ☐ D Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Câu 3

Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng và đều khác véc-tơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- ☐ B $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- ☐ C $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.
- ☐ D $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 4

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véc-tơ $\vec{0}$. Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ thì góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- ☐ A 180° .
- ☐ B 0° .
- ☐ C 90° .
- ☐ D 45° .

Câu 5

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Khi đó góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- ☐ A 30° .
- ☐ B 45° .
- ☐ C 60° .
- ☐ D 120° .



Câu 6

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Khi đó góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- (A) 90° . (B) 180° . (C) 60° . (D) 45° .

Câu 7

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
 (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

Câu 8

Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- (A) $2a^2$. (B) $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (C) $-\frac{a^2}{2}$. (D) $\frac{a^2}{2}$.

Câu 9

Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- (A) a^2 . (B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (C) $-\frac{a^2}{2}$. (D) $\frac{a^2}{2}$.

Câu 10

Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

☐ A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$.

☐ B $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.

☐ C $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

☐ D $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11

Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

☐ A $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$.

☐ B $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$.

☐ C $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$.

☐ D $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$.

Câu 12

Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

☐ A $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$.

☐ B $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$.

☐ C $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$.

☐ D $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$.

Câu 13

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

☐ A $P = b^2 - c^2$.

☐ B $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

☐ C $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

☐ D $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Câu 14

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

☐ A $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$.

☐ B $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

☐ C $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

☐ D $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Câu 15

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

☐ A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.

☐ B $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$.

☐ C $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

☐ D $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

Câu 16

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$.

☐ A $P = -1$.

☐ B $P = 3a^2$.

☐ C $P = -3a^2$.

☐ D $P = 2a^2$.

Câu 17

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

☐ A $P = 2\sqrt{2}a$.

☐ B $P = 2a^2$.

☐ C $P = a^2$.

☐ D $P = -2a^2$.



Câu 18

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. Ⓑ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. Ⓒ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. Ⓓ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Câu 19

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 6$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 48$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -48$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Câu 20

Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Câu 21

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $AD = 12$ cm, góc ABC nhọn và diện tích bằng 54 cm². Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

- Ⓐ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\sqrt{7}}{16}$. Ⓑ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{2\sqrt{7}}{16}$.
 Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$. Ⓓ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

**Câu 22**

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\vec{BK} \cdot \vec{AC}$.

☐ A $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = 0$.

☐ B $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = -a^2\sqrt{2}$.

☐ C $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = a^2\sqrt{2}$.

☐ D $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = 2a^2$.



§6. ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vec-tơ nào sau đây có cùng phương

- ☐ A $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; 6\right)$.
 ☐ B $\vec{a} = (\sqrt{2}; 6)$ và $\vec{b} = (1; 3\sqrt{2})$.
 ☐ C $\vec{i} = (0; 1)$ và $\vec{j} = (1; 0)$.
 ☐ D $\vec{c} = (1; 3)$ và $\vec{d} = (2; -6)$.

Câu 2

Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vectơ nào sau đây vuông góc với nhau?

- ☐ A $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{v} = (4; 6)$.
 ☐ B $\vec{a} = (1; -1)$ và $\vec{b} = (-1; 1)$.
 ☐ C $\vec{z} = (a; b)$ và $\vec{t} = (-b; a)$.
 ☐ D $\vec{n} = (1; 1)$ và $\vec{k} = (2; 0)$.

Câu 3

Trong mặt phẳng tọa độ, vectơ nào sau đây có độ dài bằng 1?

- ☐ A $\vec{a} = (1; 1)$.
 ☐ B $\vec{b} = (1; -1)$.
 ☐ C $\vec{c} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$.
 ☐ D $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 4

Góc giữa vectơ $\vec{a} = (1; -1)$ và vectơ $\vec{b} = (-2; 0)$ có số đo bằng

- ☐ A 90° .
 ☐ B 0° .
 ☐ C 135° .
 ☐ D 45° .



Câu 5

Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

☐ B $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

☐ C $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

☐ D $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Câu 6

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A $(\vec{AB}, \vec{BD}) = 45^\circ$.

☐ B $(\vec{AC}, \vec{BC}) = 45^\circ$ và $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = a^2$.

☐ C $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = a^2\sqrt{2}$.

☐ D $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = -a^2$.

Câu 7

Cho 3 điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn $3\vec{AC} + 2\vec{AB} = \vec{0}$. Tìm khẳng định đúng.

☐ A $|\vec{AB}| = \frac{3}{5}|\vec{BC}|$.

☐ B $|\vec{AB}| = \frac{3}{2}|\vec{BC}|$.

☐ C $|\vec{AB}| = \frac{2}{5}|\vec{BC}|$.

☐ D $|\vec{AB}| = \frac{2}{3}|\vec{BC}|$.

Câu 8

Gọi C là trung điểm của AB . Tìm khẳng định đúng.

☐ A $\vec{CB} = \vec{CA}$.

☐ B $|\vec{AB}| = |\vec{CB}|$.

☐ C $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ cùng hướng.

☐ D $\vec{AB}$ và $\vec{CB}$ ngược hướng.



Câu 9

Cho tam giác vuông ABC có trọng tâm G và cạnh huyền $BC = 12$. Khi đó, vectơ tổng $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

- ☐ A $2\sqrt{3}$.
 ☐ B 2.
 ☐ C 4.
 ☐ D 8.

Câu 10

Cho hình vuông $ABCD$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau

- ☐ A $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.
 ☐ B $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
 ☐ C $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
 ☐ D $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Câu 11

Gọi AI là trung tuyến của $\triangle ABC$. Tìm điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$.

- ☐ A M là trung điểm của CI .
 ☐ B M là trung điểm của BI .
 ☐ C M là trung điểm của AI .
 ☐ D M là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Câu 12

Nếu G là trọng tâm của giác ABC thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 ☐ B $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 ☐ C $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 ☐ D $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 13

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

☐ A $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$.

☐ B $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

☐ C $\overrightarrow{GG'} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$.

☐ D $\overrightarrow{GG'} = -(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$.

Câu 14

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, EF . Tìm vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với điểm M tùy ý.

☐ A $4\overrightarrow{MH}$.

☐ B $\vec{0}$.

☐ C $4\overrightarrow{ME}$.

☐ D $4\overrightarrow{MF}$.

Câu 15

Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

☐ A $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

☐ B $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$.

☐ C $\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{GP} = \vec{0}$.

☐ D $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Câu 16

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

☐ A Cho vectơ $\overrightarrow{MN}$, với điểm O tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$.

☐ B Hiệu của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

☐ C Vectơ đối của vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là vectơ ngược hướng với $\vec{a}$ và có cùng độ dài với $\vec{a}$.

☐ D Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Câu 17

Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC có cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Ⓐ $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

Ⓑ $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = \sqrt{2}$ cm.

Ⓒ $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = \sqrt{3}$ cm.

Ⓓ $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ cm.

Câu 18

Cho 5 điểm M, N, P, Q, R tùy ý. Tìm vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{PN}$.

Ⓐ $\vec{u} = \overrightarrow{MR}$.

Ⓑ $\vec{u} = \overrightarrow{MP}$.

Ⓒ $\vec{u} = \vec{0}$.

Ⓓ $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

Câu 19

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tìm độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Ⓐ $2a$.

Ⓑ $a\sqrt{2}$.

Ⓒ a .

Ⓓ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 20

Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $|\overrightarrow{MB}| + |\overrightarrow{MC}| = 0$.

Ⓑ $GB + GC = 2GM$.

Ⓒ $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.



Câu 21

Cho tam giác ABC có D, E lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và AC . Tìm số k , biết rằng $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{ED}$.

☐ (A) -2 .

☐ (B) 2 .

☐ (C) $\frac{1}{2}$.

☐ (D) $-\frac{1}{2}$.

Câu 22

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

☐ (A) Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.

☐ (B) Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.

☐ (C) Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

☐ (D) Có ít nhất hai vectơ cùng phương với mọi vectơ.

Câu 23

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I . Tìm khẳng định đúng.

☐ (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

☐ (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

☐ (C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

☐ (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Câu 24

Cho vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$. Tìm khẳng định đúng.

☐ (A) $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

☐ (B) $\vec{u} = \overrightarrow{MQ}$.

☐ (C) $\vec{u} = \overrightarrow{MR}$.

☐ (D) $\vec{u} = \overrightarrow{MP}$.



Câu 25

Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

☐ A $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

☐ B $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

☐ C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

☐ D $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 26

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tìm $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

☐ A $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 5$ cm.

☐ B $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 14$ cm.

☐ C $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 20$ cm.

☐ D $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 10$ cm.

Câu 27

Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G và M là một điểm tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

☐ A $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{GM}$.

☐ B $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GM}$.

☐ C $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

☐ D $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Câu 28

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm I . Khi đó tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ bằng

☐ A $2\overrightarrow{AI}$.

☐ B $4\overrightarrow{AI}$.

☐ C $4\overrightarrow{IA}$.

☐ D $2\overrightarrow{IA}$.



Câu 29

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{CA} = -2\vec{a} - \vec{b}$. Ⓑ $\overrightarrow{CA} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Ⓒ $\overrightarrow{CA} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. Ⓓ $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

Câu 30

Cho $\triangle MNP$ đều cạnh bằng $5\sqrt{3}$. Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$ bằng

- Ⓐ $\frac{15}{2}$. Ⓑ 30. Ⓒ $10\sqrt{3}$. Ⓓ 15.

Câu 31

Cho $\triangle MNP$. Tìm điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QN} - \overrightarrow{QM} = \vec{0}$.

- Ⓐ Q là một đỉnh của hình bình hành $MPNQ$.
 Ⓑ Q là một đỉnh của hình bình hành $MNPQ$.
 Ⓒ Q là một đỉnh của hình bình hành $MPQN$.
 Ⓓ Q là một đỉnh của hình bình hành $MNQP$.

B BÀI TẬP TỰ LUẬN



Bài 1

Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho $MB = 3MC$.

- Tìm mối liên hệ giữa hai vec-tơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$.
- Biểu thị vec-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$$

Bài 3

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1)$, $B(-2;5)$ và $C(-5;2)$.

- Tìm tọa độ của các vec-tơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.
- Chứng minh rằng A , B , C là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $BCAD$ là một hình bình hành.

**Bài 4**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(-1;-2)$ và $D(6;5)$.

- Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.
- Hãy giải thích tại sao các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.
- Giả sử E là điểm có tọa độ $(a;1)$. Tìm a để các véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương.
- Với a tìm được, hãy biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{AE}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5

Cho véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ (hay còn được viết là $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một véc-tơ đơn vị cùng hướng với véc-tơ $\vec{a}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6

Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$ với $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \perp \vec{b}$. Xét một hệ trục Oxy với các véc-tơ đơn vị $\vec{i} = \vec{a}$, $\vec{j} = \vec{b}$. Chứng minh rằng

- Véc-tơ $\vec{u}$ có tọa độ là $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$.
- $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \vec{b}$

.....

.....

.....

.....

.....





Bài 7

Trên sông một ca nô chuyển động thẳng đều theo hướng $S15^\circ E$ với vận tốc có độ lớn bằng 20km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 3km/h.

Bài 8

Chứng minh

- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ với E là điểm bất kì.
- Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MN}$ với M, N là hai điểm bất kì.
- Nếu G là trọng tâm của tam giác thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NG}$ với M, N là hai điểm bất kì.

Bài 9

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4, AD = 6, \widehat{BAD} = 60^\circ$.

- Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.
- Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Tính độ dài các đường chéo BD, AC .



Bài 10

Hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm O và tạo với nhau một góc $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \alpha$ làm cho vật di chuyển từ O đến C . Lập công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{F}$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (giả sử chỉ có đúng hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ làm cho vật di chuyển).

Bài 11

Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG . Tính độ dài của các véc-tơ $\vec{AB}, \vec{AG}, \vec{BI}$.

Bài 12

Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính độ dài của các véc-tơ $\vec{AB} - \vec{AC}, \vec{AB} + \vec{AC}$.

Bài 13

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $|\vec{AB} + \vec{OD}|, |\vec{AB} - \vec{OC} + \vec{OD}|$.

b) Tính độ dài véc-tơ $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}$.

Bài 14

Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BCD} = 60^\circ$. Gọi O là tâm hình thoi. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....