

TÀI LIỆU
HỌC TẬP

HK2

TOÁN 12



Trường THCS&THPT Mỹ Thuận
Vĩnh Long

KẾ HOẠCH TUẦN

✍️ *TUẦN 19*

✍️ *TUẦN 20*

✍️ *TUẦN 21*

✍️ *TUẦN 22*

✍️ *TUẦN 23*

✍️ *TUẦN 24*

 **TUẦN 25**

 **TUẦN 28**

 **TUẦN 26**

 **TUẦN 29**

 **TUẦN 27**

 **TUẦN 30**

 **TUẦN 31**

 **TUẦN 34**

 **TUẦN 32**

 **TUẦN 35**

 **TUẦN 33**

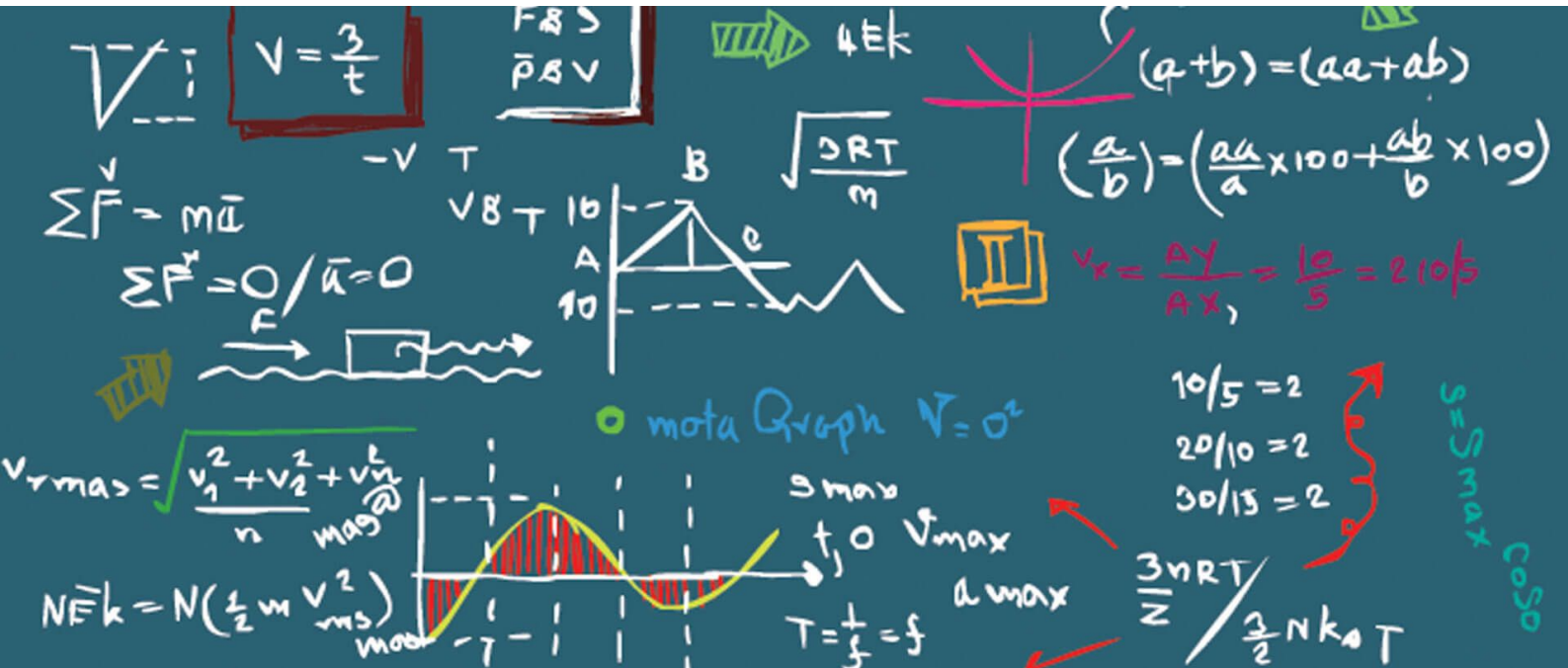
MỤC LỤC

PHẦN I GIẢI TÍCH 5

Chương 3. Nguyên hàm - Tích phân và ứng dụng	6
§1. Nguyên hàm	6
1. Nguyên hàm và tính chất	6
2. Phương pháp tìm nguyên hàm	8
3. Thực hành	9
§2. Tích phân	13
1. Khái niệm tích phân	13
2. Tính chất của tích phân	14
3. Phương pháp tính tích phân	14
4. Thực hành	15
§3. Ứng dụng của tích phân trong hình học	19
1. Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành	19
2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong	19
3. Tính thể tích	20
4. Thể tích khối tròn xoay	21
5. Thực hành	21
Chương 4. Số phức	25
§1. Số phức	25
1. Định nghĩa số phức	25
2. Số phức bằng nhau	25
3. Biểu diễn hình học và môđun của số phức	26
4. Thực hành	26
§2. Cộng, trừ và nhân số phức	28
1. Phép cộng và phép trừ	28
2. Phép nhân	28
3. Thực hành	28
§3. Phép chia số phức	30
1. Tổng và tích của hai số phức liên hợp	30
2. Phép chia hai số phức	30
3. Thực hành	30
§4. Phương trình bậc hai với hệ số thực	32
1. Căn bậc hai của số thực âm	32
2. Phương trình bậc hai với hệ số thực	32
3. Thực hành	32

PHẦN II HÌNH HỌC 34

Chương 3. Phương pháp tọa độ trong không gian	35
§1. Hệ tọa độ trong không gian	35
1. Tọa độ của điểm và của vectơ	35
2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ	36
3. Tích vô hướng	36
4. Phương trình mặt cầu	37
5. Thực hành	37
§2. Phương trình mặt phẳng	40
1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng	40
2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng	41
3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc	41
4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	42
5. Thực hành	42
§3. Phương trình đường thẳng	46
1. Phương trình tham số của đường thẳng	46
2. Hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau	47
3. Thực hành	48



PHẦN I

GIẢI TÍCH

Chương 3. Nguyên hàm - Tích phân và ứng dụng	6
§1. Nguyên hàm	6
§2. Tích phân	13
§3. Ứng dụng của tích phân trong hình học	19
Chương 4. Số phức	25
§1. Số phức	25
§2. Cộng, trừ và nhân số phức	28
§3. Phép chia số phức	30
§4. Phương trình bậc hai với hệ số thực	32

Chương 3.

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1. NGUYÊN HÀM

Đặt vấn đề

1) Bổ sung thông tin thích hợp vào các ô trống dưới đây:

STT	$f(x)$	$f'(x)$
1		$n \cdot x^{n-1}$
2		0
3		$-\frac{1}{x^2}$
4		$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

STT	$f(x)$	$f'(x)$
5		$a^x \cdot \ln a$
6		e^x
7		$\frac{1}{x}$
8		$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

STT	$f(x)$	$f'(x)$
9		$\cos x$
10		$-\sin x$
11		$\frac{1}{\cos^2 x}$
12		$\frac{1}{\sin^2 x}$

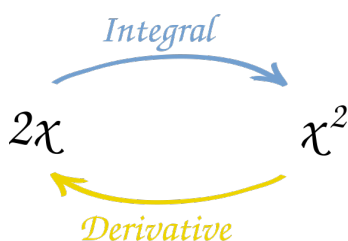
2) Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng

a. $f'(x) = 3x^2$

b. $f'(x) = x^2$

1

NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT



1 Nguyên hàm

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{K}$.
Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{K}$ nếu với mọi $x \in \mathbb{K}$.

Ví dụ 1.

- Hàm số $F(x) = \dots\dots\dots$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$.
- Hàm số $F(x) = \dots\dots\dots$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$.

Ví dụ 2. Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 x}$?

- A. $F_1(x) = \tan x$. B. $F_2(x) = \tan x + 2020$.
C. $F_3(x) = \tan x + 2021$. D. $F_4(x) = 2020 \tan x$.

Định lý 1

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{K}$ thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = \dots\dots\dots$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{K}$.

Định lý 2

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{K}$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{K}$ đều có dạng $\dots\dots\dots$, với C là một $\dots\dots\dots$

$$\int f(x) dx = \dots\dots\dots$$

- $F(x)$ là một $\dots\dots\dots$ của $f(x)$
- $F(x) + C$ là $\dots\dots\dots$ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$
- $f(x) dx = F'(x) dx$ là *vi phân* của $\dots$

Ví dụ 3. Tìm các nguyên hàm sau:

a) $\int x^2 dx =$

b) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} =$

c) $\int e^x dx =$

2 Tính chất của nguyên hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{K}$.

Tính chất 1. $\int f'(x) dx = \dots\dots\dots$

! Tính chất 2. $\int k \cdot f(x) dx = \dots\dots\dots$ (k là hằng số)

Tính chất 3. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \dots\dots\dots$

Ví dụ 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \sin x + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ và $f(4) = 5$. Tìm $f(x)$.

3 Sự tồn tại của nguyên hàm

Mọi hàm số $\dots\dots\dots$ trên $\mathbb{K}$ đều có nguyên hàm trên $\mathbb{K}$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

• $\int 0 dx = \dots\dots\dots$

• $\int dx = \dots\dots\dots$

• $\int x^n dx = \dots\dots\dots$ ($n \neq -1$)

• $\int \frac{1}{x} dx = \dots\dots\dots$

• $\int e^x dx = \dots\dots\dots$

• $\int a^x dx = \dots\dots\dots$ ($a > 0, a \neq 1$)

• $\int \cos x dx = \dots\dots\dots$

• $\int \sin x dx = \dots\dots\dots$

• $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \dots\dots\dots$

• $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \dots\dots\dots$

Chú ý

Từ đây, yêu cầu tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của nó.

Ví dụ 6. Tìm các nguyên hàm sau:

a) $\int \left(3x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$

b) $\int (1 + \tan^2 x) dx$

2

PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM



1 Phương pháp đổi biến số

Ví dụ 7. Tìm $\int (x - 2)^{2021} dx$.

Định lý 3

Nếu $\int f(u) dx = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \dots\dots\dots$$

Ví dụ 8. Tìm $\int (3x - 2)^{2021} dx$.

Chú ý

Nếu tính nguyên hàm theo biến mới $u = u(x)$ thì sau khi tính nguyên hàm, ta phải trở lại biến x ban đầu bằng cách thay u bởi $u(x)$.

Hệ quả. Với $u = ax + b$ ($a \neq 0$) thì

$$\int f(ax + b) dx = \dots\dots\dots$$

Ví dụ 9. $\int \cos(5x + 7) dx = \dots\dots\dots$

Ví dụ 10. Xét nguyên hàm $I = \int x\sqrt{x+2} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{x+2}$ thì ta được

A. $I = \int (4t^4 - 2t^2) dt.$

B. $I = \int (t^4 - 2t^2) dt.$

C. $I = \int (2t^4 - 4t^2) dt.$

D. $I = \int (2t^4 - t^2) dt.$

2 Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 4

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{K}$ thì

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = \dots\dots\dots$$

Ví dụ 11. Tìm các nguyên hàm sau:

a) $\int (x + 1) \ln x dx$

c) $\int (x + 1)e^x dx$

b) $\int (x + 1) \cos x dx$

d) $\int e^x \cos x dx$

Tips

Thứ tự ưu tiên đặt $u(x)$ là

- I) Logarit
- II) Đa thức
- III) Lượng giác
- IV) Mũ

3

THỰC HÀNH

✔ TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

- A. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx.$
- B. $\int 0 dx = 0.$
- C. $\int f(x) dx = f'(x) + C.$
- D. $\int f'(x) dx = f(x) + C.$

Câu 2. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\int [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int f(x) dx + 3 \int g(x) dx.$
- B. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$
- C. $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx.$
- D. $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx.$

Câu 3. Cặp số nào sau đây có tính chất "Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại"?

- A. $\tan x^2$ và $\frac{1}{\cos^2 x^2}.$
- B. $\sin 2x$ và $\sin^2 x.$
- C. e^x và $e^{-x}.$
- D. $\sin 2x$ và $\cos^2 x.$

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- B. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$
- C. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C.$
- D. $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a + C (a > 0, a \neq 1).$

Câu 5. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- A. $\sin x + 3x^2 + C.$
- B. $-\sin x + 3x^2 + C.$
- C. $\sin x + 6x^2 + C.$
- D. $-\sin x + C.$

Câu 6. Xác định $f(x)$ biết $\int f(x) dx = \frac{1}{x} + e^x + C$.

A. $f(x) = \ln|x| + e^x$.

B. $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^x$.

C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + e^x$.

D. $f(x) = \ln x + e^x$.

Câu 7. Hàm số $F(x) = 2\sin x - 3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = -2\cos x - 3\sin x$.

B. $f(x) = -2\cos x + 3\sin x$.

C. $f(x) = 2\cos x + 3\sin x$.

D. $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$.

Câu 8. Tìm m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

A. $m = 3$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 0$.

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1+3x^3)$ là

A. $x^2(1+3x^2) + C$.

B. $2x(x+x^3) + C$.

C. $x^2(x+x^3) + C$.

D. $x^2\left(1+\frac{6x^3}{5}\right) + C$.

Câu 10. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2}$.

A. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^2} dx = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + C$.

B. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^2} dx = 2x + \frac{1}{x} + \ln|x| + C$.

C. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^2} dx = x^2 + \ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

D. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^2} dx = x^2 - \frac{1}{x} + \ln|x| + C$.

Câu 11. Hàm số nào sau đây **không phải** là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-3)^3$?

A. $F(x) = \frac{(2x-3)^4}{8} + 8$.

B. $F(x) = \frac{(2x-3)^4}{8} - 3$.

C. $F(x) = \frac{(2x-3)^4}{8}$.

D. $F(x) = \frac{(2x-3)^4}{4}$.

Câu 12. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-x}$?

A. $F(x) = -\frac{1}{4} \ln|4-4x| + 3$.

B. $F(x) = -\ln|1-x| + 4$.

C. $F(x) = \ln|1-x| + 2$.

D. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+1) + 5$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết rằng $F(1) = 4$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x$.

B. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$.

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$.

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{49}{12}$.

Câu 14. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Khi đó $F(3)$ bằng bao nhiêu?

A. $\ln \frac{3}{2}$.

B. $\ln 2 + 1$.

C. $\ln 2$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 15. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $x + 3\ln(x-1) + C$.

B. $x - 3\ln(x-1) + C$.

C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

D. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{3x^4}{2x^4+6} + C$.

B. $\int f(x) dx = \ln(x^4+1) + C$.

C. $\int f(x) dx = x^3 \ln(x^4+1) + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + C$.

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{5-3x}$.

- A. $\int f(x) dx = -\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C.$
 B. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C.$
 C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C.$
 D. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C.$

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^x$.

- A. $\int f(x) dx = (x+1)e^x + C.$ B. $\int f(x) dx = (x-1)e^x + C.$
 C. $\int f(x) dx = xe^x + C.$ D. $\int f(x) dx = x^2e^x + C.$

Câu 19. Biết $\int (x+3) \cdot e^{-3x+1} dx = -\frac{1}{m}e^{-3x+1}(3x+n) + C$ với m, n là các số nguyên. Tính tổng $S = m + n$.

- A. 10. B. 1. C. 9. D. 19.

Câu 20. Một vật chuyển động với vận tốc $a(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s^2). Biết rằng vận tốc ban đầu của vật đó là 6 (m/s), hãy tính vận tốc của vật đó tại giây thứ 10.

- A. 10 m/s . B. 15,2 m/s . C. 13,2 m/s . D. 12 m/s .

TỰ LUẬN

Câu 1 (SGK GT12). Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số còn lại?

- a) e^{-x} và $-e^{-x}$ b) $\sin 2x$ và $\sin^2 x$ c) $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$ và $\left(1 - \frac{4}{x}\right)^2 e^x$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

- a) $f(x) = e^{3-2x}$ b) $f(x) = \tan^2 x$ c) $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 3x$ d) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$

Câu 3. Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính:

- a) $\int (1-x)^9 dx$ (đặt $u = 1-x$) b) $\int \cos^3 x \sin x dx$ (đặt $u = \cos x$)

Câu 4. Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

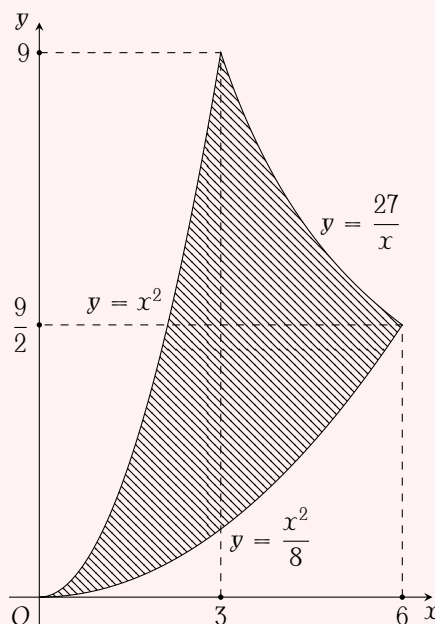
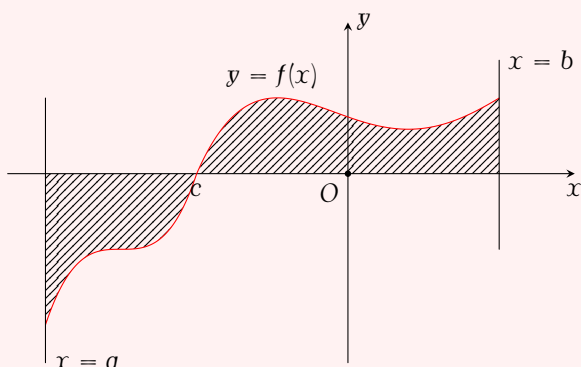
- a) $\int x \ln(1+x) dx$ b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$ c) $\int x \sin(2x+1) dx$ d) $\int (1-x) \cos x dx$

Vocabulary		—	□	×
derivative	đạo hàm	method	phương pháp	
antiderivative	nguyên hàm	change of variable	đổi biến số	
differential	vi phân	antiderivative by parts	nguyên hàm từng phần	

§2. TÍCH PHÂN

Đặt vấn đề

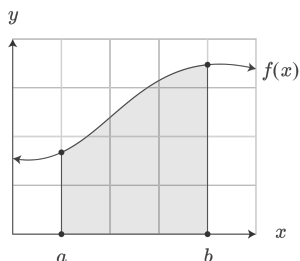
Nhờ tích phân, ta có thể tính độ dài của một đường cong, diện tích của một hình phẳng, thể tích của một khối tròn xoay hay các bài toán về quãng đường, vận tốc...



1

KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

1 Diện tích hình thang cong



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không trên đoạn $[a; b]$.

Hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là **hình thang cong**.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Người ta chứng minh được rằng hình thang cong nêu trên có diện tích là

$$S = F(b) - F(a)$$

2 Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$ là hiệu $F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ta gọi a là cận dưới, b là cận trên.

end $\rightarrow b$ differential

$\int_a^b f(x) dx$

start $\rightarrow a$ expression

Quy ước:

- $\int_a^a f(x) dx = \dots\dots$
- $\int_b^a f(x) dx = \dots\dots$

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^2 (x^3 + 3^x) dx$

b) $\int_{-1}^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

2

TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Tính chất 1. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = \dots\dots\dots (k \text{ là hằng số})$

! Tính chất 2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \dots\dots\dots$

Tính chất 3. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \dots\dots\dots (a < c < b)$

Ví dụ 2. Tính $\int_0^1 |x - 1| dx$.

3

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1 Phương pháp đổi biến số

Ví dụ 3. Để tính tích phân $\int_1^2 (2x - 1)^3 dx$, ba bạn Trường, Mỹ và Thuận đưa ra cách giải như sau:

Trường

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x - 1)^3 dx &= \int_1^2 (8x^3 - 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 2x - 1) dx \\ &= \int_1^2 (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) dx \\ &= \left(8 \cdot \frac{x^4}{4} - 12 \cdot \frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \\ &= (2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x) \Big|_1^2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Mỹ

Đặt $u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ x = 2 \Rightarrow u = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \end{cases}$

Khi đó $\int_1^2 (2x - 1)^3 dx = \int_1^3 u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} \Big|_1^3 = 10$.

Thuận

$$\int_1^2 (2x - 1)^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x - 1)^4}{4} \Big|_1^2 = 10.$$

Hãy so sánh ba lời giải trên.

Ví dụ 4. Tính

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

b) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

2 Phương pháp tính tích phân từng phần

Định lí

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{K}$ thì

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \dots\dots\dots$$

Ví dụ 5. Tìm các nguyên hàm sau:

a) $\int_1^e (x+1) \ln x dx$

c) $\int_0^1 (x+1)e^x dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

4

THỰC HÀNH

☑ TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(0) - F(1)$ bằng

A. $\int_0^1 -F(x) dx$. B. $\int_0^1 F(x) dx$. C. $-\int_0^1 f(x) dx$. D. $\int_0^1 f(x) dx$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$.

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$.

Câu 3. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$, $\int_{-2}^3 f(x) dx = 12$ và $F(3) = 7$. Tính $F(-2)$.

A. $F(-2) = 19$. B. $F(-2) = 2$. C. $F(-2) = 5$. D. $F(-2) = -5$.

Câu 4. Cho $\int_a^b f(x) dx = -3$ và $\int_a^b g(x) dx = 4$. Tính $I = \int_a^b [4f(x) - 3g(x)] dx$.

A. $I = 25$. B. $I = -24$. C. $I = 24$. D. $I = 0$.

Câu 5. Giả sử các biểu thức trong dấu nguyên hàm, tích phân đều có nghĩa, trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

- A. $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
- B. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \forall k \in \mathbb{R}$.
- C. $\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$.
- D. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \forall k \in \mathbb{R}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = 15$, $f(4) = 8$. Tính $\int_1^4 f'(x) dx$.

- A. $\int_1^4 f'(x) dx = 7$. B. $\int_1^4 f'(x) dx = 3$.
- C. $\int_1^4 f'(x) dx = 23$. D. $\int_1^4 f'(x) dx = -7$.

Câu 7. Cho biết $\int_2^5 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 g(t) dt = 9$. Tính $\int_2^5 [f(x) - 2g(x)] dx$.

A. -6 . B. -15 . C. 12 . D. 21 .

Câu 8. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-1}^5 [2f(x) + 3g(x)] dx = -5$; $\int_{-1}^5 [3f(x) - 5g(x)] dx = 21$. Tính $\int_{-1}^5 [f(x) + g(x)] dx$.

A. -5 . B. 1 . C. 5 . D. -1 .

Câu 9. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

A. -3 . B. -1 . C. 1 . D. 3 .

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^3 f(x) dx = 5$ và $\int_{-1}^3 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

A. $I = -6$. B. $I = 6$. C. $I = 4$. D. $I = -4$.

Câu 11. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$, $\int_{-1}^7 f(t) dt = 9$. Giá trị của $\int_2^7 f(z) dz$ là

A. 7 . B. 3 . C. 11 . D. 5 .

Câu 12. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(y) dy$.

A. $I = 5$. B. $I = 3$. C. $I = -3$. D. $I = -5$.

- Câu 13.** Tính $I = \int_0^2 (2x - x^3) dx$.
- A. $I = 0$. B. $I = 10$. C. $I = -4$. D. $I = -10$.
- Câu 14.** Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. $I > J$. B. $I = J$. C. $I < J$. D. $I = 2J$.
- Câu 15.** Tích phân $\int_0^1 3^{2x+1} dx$ bằng
- A. $\frac{27}{\ln 9}$. B. $\frac{9}{\ln 9}$. C. $\frac{4}{\ln 3}$. D. $\frac{12}{\ln 3}$.
- Câu 16.** Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{2x+1}$ bằng
- A. $\log \frac{5}{3}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{16}{225}$.
- Câu 17.** Tính $I = \int_e^{e^2} \frac{(1 - \ln x)^2}{x} dx$ được kết quả là
- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{13}{3}$.
- Câu 18.** Biết rằng $\int_2^7 \frac{x dx}{x^2 + 1} = a \ln 2 - b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $2a + b$ bằng
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.
- Câu 19.** Biết $\int_{\ln 2}^{\ln 5} (x + 1)e^x dx = a \ln 5 + b \ln 2$, với a, b là các số nguyên. Tính $T = 3a - 2b$.
- A. $T = 19$. B. $T = -4$. C. $T = 11$. D. $T = -16$.
- Câu 20.** Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$ bằng
- A. $\frac{4 + \pi}{4\sqrt{2}}$. B. $\frac{4 - \pi}{4\sqrt{2}}$. C. $\frac{2 - \pi}{2\sqrt{2}}$. D. $\frac{2 + \pi}{2\sqrt{2}}$.
- Câu 21.** Tìm giá trị của b để $\int_1^b (2x - 6) dx = 0$.
- A. $b = 0$ hoặc $b = 1$. B. $b = 0$ hoặc $b = 3$.
C. $b = 1$ hoặc $b = 5$. D. $b = 5$ hoặc $b = 0$.
- Câu 22.** Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.
- A. $S = 6$. B. $S = 7$. C. $S = 5$. D. $S = 8$.
- Câu 23.** Tích phân $I = \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x - 6}{2x + 1} dx$ có giá trị là
- A. $\frac{3}{2} - \frac{7}{2} \ln 3$. B. $\frac{3}{2} + \frac{7}{2} \ln 3$. C. $5 \ln 3$. D. $-2 \ln 3$.
- Câu 24.** Cho $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $a + 2b = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $a + b = -2$. D. $a + b = 2$.

Câu 25. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 9}$.

- A. $I = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$. B. $I = -\frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$. C. $I = \frac{1}{6} \ln 2$. D. $I = \ln \sqrt[6]{2}$.

Câu 26. Biết $\int_2^3 \frac{5x + 12}{x^2 + 5x + 6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

- A. -11 . B. -14 . C. -2 . D. 3 .

Câu 27. Biết $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{2}{3}(\sqrt{a} - b)$ với a, b là các số nguyên dương.

Tính $T = a + b$.

- A. $T = 7$. B. $T = 10$. C. $T = 6$. D. $T = 8$.

Câu 28. Biết $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính

$P = a + b + c$.

- A. $P = \frac{13}{2}$. B. $P = \frac{16}{3}$. C. $P = 5$. D. $P = \frac{2}{3}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $4 < f(5) < 5$. B. $3 < f(5) < 4$. C. $1 < f(5) < 2$. D. $2 < f(5) < 3$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 \cdot f(x)}{x^2 + 1} dx =$

2. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. 6 . B. 1 . C. 0 . D. 2 .

TỰ LUẬN

Câu 1 (SGK GT12). Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$

b) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

c) $\int_0^2 (x+1)^2 dx$

Câu 2 (SGK GT12). Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

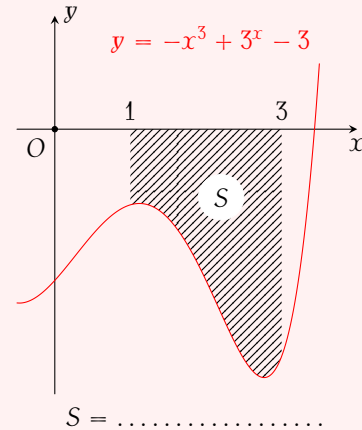
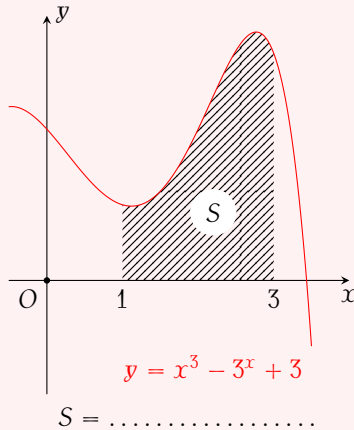
b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} dx$

c) $\int_0^1 \ln(1+x) dx$

§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

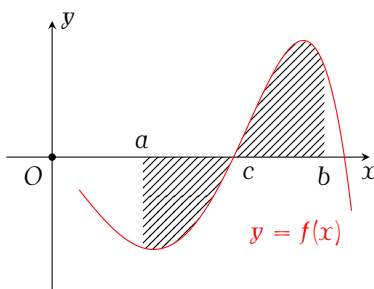
Đặt vấn đề

Trong bài §2. Tích phân, ta đã biết tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ (không âm), trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Mời các em tính diện tích của các hình thang dưới đây:



1

HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI MỘT ĐƯỜNG CONG VÀ TRỤC HOÀNH



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

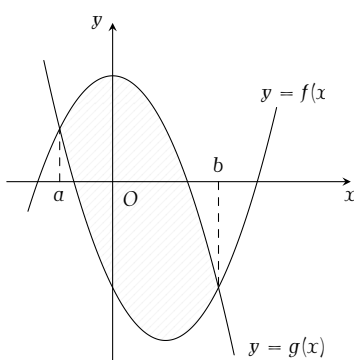
Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục $\dots\dots\dots$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b \dots\dots\dots dx = \int_a^c \dots\dots\dots dx + \int_c^b \dots\dots\dots dx$$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 5$.

2

HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI HAI ĐƯỜNG CONG



Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b \dots\dots\dots dx$$

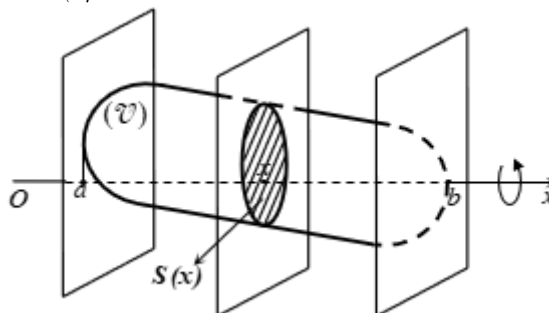
Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai parabol $y = x^2 - 2x - 2$ và $y = 2 - x^2$.

3

TÍNH THỂ TÍCH

1 Thể tích của vật thể

Cắt một vật thể $\mathcal{V}$ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Cắt $\mathcal{V}$ bởi một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm $x \in [a; b]$ theo thiết diện có diện tích $S(x)$.



Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, khi đó vật thể $\mathcal{V}$ có thể tích là

$$V = \int_a^b \dots \dots \dots dx$$

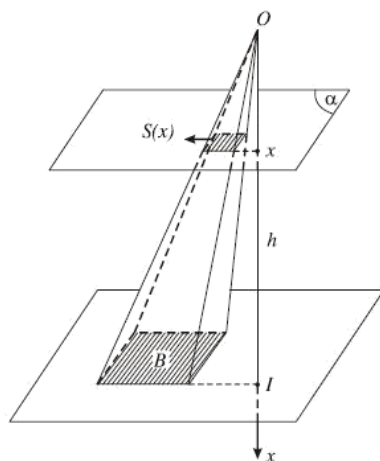
Ví dụ 3. Viết công thức tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \ln 4$, bị cắt bởi một mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x \in (0; \ln 4)$, có thiết diện là một hình vuông cạnh $\sqrt{xe^x}$.

A. $V = \pi \int_0^{\ln 4} xe^x dx.$

B. $V = \int_0^{\ln 4} \sqrt{xe^x} dx.$

C. $V = \int_0^{\ln 4} xe^x dx.$

D. $V = \pi \int_0^{\ln 4} [xe^x]^2 dx.$

**2 Thể tích khối chóp và khối chóp cụt**

a) Cho khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy B .

Chọn hệ trục tọa độ như hình, khi đó hình chóp đã cho có thể tích là

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \dots \dots \dots dx = \dots \dots \dots$$

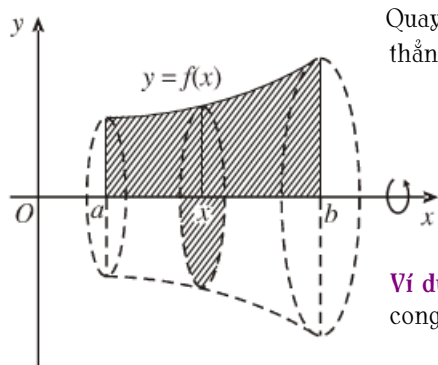
b) Cho khối chóp cụt tạo bởi khối chóp đỉnh S có diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao bằng h .

Khi đó khối chóp cụt đã cho có thể tích bằng

$$V = \dots \dots \dots$$

4

THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY



Quay hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục tạo thành một khối có thể tích là

$$V = \dots \int_a^b \dots dx$$

Ví dụ 4. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \cos x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ quanh trục hoành.

5

THỰC HÀNH

☑ TRẮC NGHIỆM

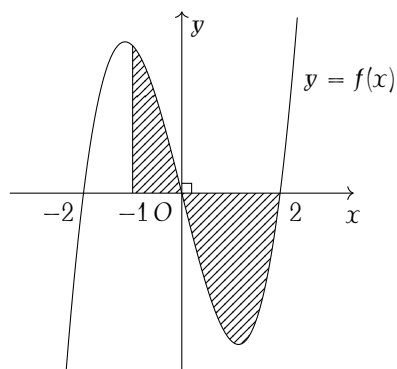
Câu 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

A. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

B. $\int_b^a |f(x)| dx$.

C. $\int_a^b f(x) dx$.

D. $\int_a^b |f(x)| dx$.



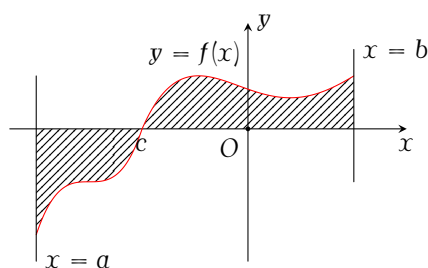
Câu 2. Cho hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ trục Ox và đường thẳng $x = -1$ (phần gạch sọc như hình bên). Gọi S là diện tích của hình phẳng H . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_{-1}^0 |f(x)| dx - \int_0^2 |f(x)| dx$.

B. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

C. $S = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$.



Câu 3. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$ và $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$) (phần gạch sọc trong hình vẽ) tính theo công thức

A. $S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

B. $S = \int_a^b f(x) dx$.

C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

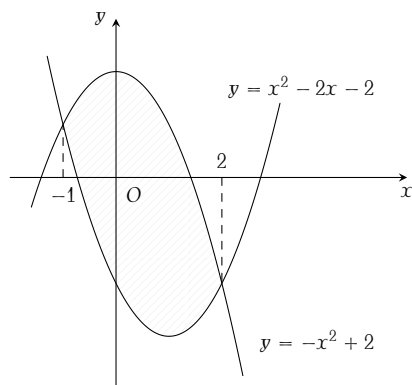
Câu 4. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Diện tích S của hình phẳng D là

A. $S = \int_a^b [f(x) + g(x)] dx$.

B. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

C. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

D. $S = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$.



Câu 5. Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng

- A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$. B. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.
C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$. D. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$.

Câu 6. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

- A. $S = \frac{26}{3}$. B. $S = 12$. C. $S = \frac{12}{\ln 3}$. D. $S = \frac{26}{3 \ln 3}$.

Câu 7. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

- A. $S = \frac{5}{2}$. B. $S = \frac{3}{2}$. C. $S = \frac{7}{2}$. D. $S = 4$.

Câu 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x$ và đường thẳng $y = -x + 3$.

- A. $S = -\frac{32}{3}$. B. $S = \frac{16}{3}$. C. $S = 16$. D. $S = \frac{32}{3}$.

Câu 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(\mathcal{C}) : y = x^4 - 2x^2 + 1$ và trục hoành.

- A. $\frac{8}{15}$. B. $-\frac{15}{16}$. C. $\frac{15}{8}$. D. $\frac{16}{15}$.

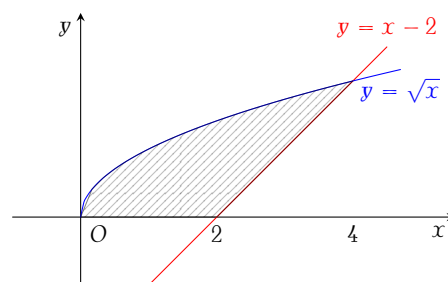
Câu 10. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

- A. $3 + \ln 2$. B. $3 - \ln 2$. C. $3 + 2 \ln 2$. D. $3 - 2 \ln 2$.

Câu 11.

Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình bên.

- A. $S = \frac{8}{3}$. B. $S = \frac{10}{3}$.
C. $S = \frac{11}{3}$. D. $S = \frac{7}{3}$.



Câu 12. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 2 - x$. Diện tích của (H) là

- A. $\frac{4\sqrt{2}-1}{3}$. B. $\frac{8\sqrt{2}+3}{6}$. C. $\frac{7}{6}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{8}$, $y = \frac{27}{x}$.

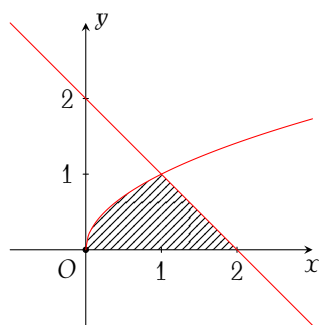
- A. $\frac{63}{8}$. B. $27 \ln 2 - \frac{63}{8}$. C. $27 \ln 2$. D. $27 \ln 2 - \frac{63}{4}$.

Câu 14. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

- A. $S = \pi \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2$. B. $S = \pi(a+b)^2$.
C. $S = \pi ab$. D. $S = \frac{\pi a^2 b^2}{a+b}$.

Câu 15. Trên cánh đồng cỏ có hai con bò được cột vào hai cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa hai cọc là 4m còn hai sợi dây cột hai con bò dài 3m và 2m. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà hai con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

- A. $1,574\text{m}^2$. B. $1,034\text{m}^2$. C. $1,989\text{m}^2$. D. c.



Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$; V là thể tích của khối tròn xoay được thành khi quay (H) quanh trục Ox . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx.$

B. $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

C. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

D. $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

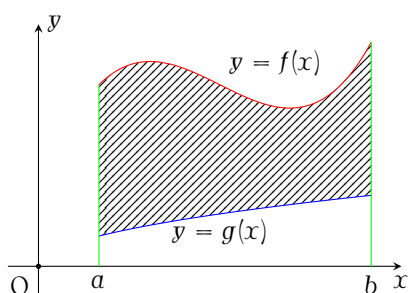
Câu 17. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành, $x = 2$ và $x = 5$ quanh trục Ox bằng

A. $\int_2^5 (x-1) dx.$

B. $\int_2^5 \sqrt{x-1} dx.$

C. $\pi \int_2^5 (x-1) dx.$

D. $\pi^2 \int_2^5 (x-1) dx.$



Câu 18. Cho hình phẳng trong hình vẽ bên (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào trong các công thức sau đây?

A. $V = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

C. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$

Câu 19. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay quanh trục Ox .

A. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx.$

B. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx.$

C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx.$

D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx.$

Câu 20. Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $3\pi.$

B. $\frac{3}{2}.$

C. $\frac{3\pi}{2}.$

D. $\frac{2\pi}{3}.$

Câu 21. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16\pi}{5}.$

B. $\frac{17\pi}{5}.$

C. $\frac{18\pi}{5}.$

D. $\frac{5\pi}{18}.$

Câu 22. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V = \pi - 1.$

B. $V = \pi + 1.$

C. $V = \pi(\pi - 1).$

D. $V = \pi(\pi + 1).$

Câu 23. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng

A. $V = \frac{e^2 - 1}{2}.$

B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}.$

C. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$

D. $V = \frac{\pi e^2}{2}.$

Câu 24. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = x$ xoay quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx.$

B. $\pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_0^1 x^4 dx.$

$$\text{C. } \pi \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx.$$

$$\text{D. } \pi \int_0^1 (x^2 - x) dx.$$

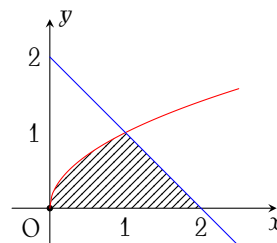
Câu 25. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = \frac{4}{x}$ và đường thẳng $(d): y = 5 - x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

- A. $V = 51\pi$. B. $V = 33\pi$. C. $V = 9\pi$. D. $V = 18\pi$.

Câu 26.

Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng

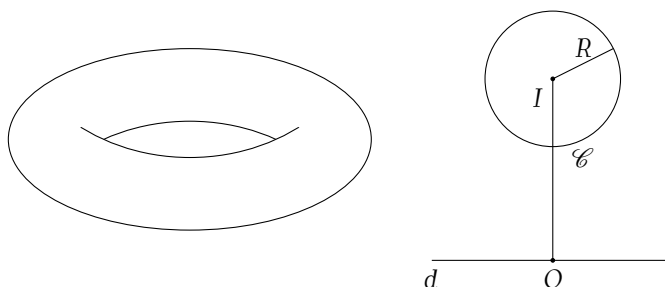
- A. $\frac{5\pi}{4}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{7\pi}{6}$. D. $\frac{5\pi}{6}$.



Câu 27. Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{3\pi}{10}$. B. $V = \frac{\pi}{10}$. C. $V = \frac{7\pi}{10}$. D. $V = \frac{9\pi}{10}$.

Câu 28. Người ta làm một chiếc phao bơi như hình vẽ (với bề mặt có được bằng cách quay đường tròn $\mathcal{C}$ quanh trục d). Biết rằng $OI = 30\text{cm}$, $R = 5\text{cm}$. Tính thể tích V của chiếc phao.



- A. $V = 1500\pi^2\text{cm}^3$. B. $V = 9000\pi^2\text{cm}^3$.
C. $V = 1500\pi\text{cm}^3$. D. $V = 9000\pi\text{cm}^3$.

Câu 29. Một ô tô đang chạy với tốc độ 36 km/h thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 10 m. B. 20 m. C. 2 m. D. 0,2 m.

Câu 30. Một chiếc xe đang chạy đều với vận tốc 20 m/s thì giảm phanh với vận tốc $v(t) = 20 - 2t$ m/s đến khi dừng hẳn. Quãng đường xe đi được từ lúc bắt đầu giảm phanh đến khi dừng hẳn là

- A. 98 m. B. 94 m. C. 100 m. D. 96 m.

TỰ LUẬN

Câu 1 (SGK GT12). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = x^2, y = x + 2$

b) $y = (x - 6)^2, y = 6x - x^2$

Câu 2 (SGK GT12). Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y = 1 - x^2, y = 0$

b) $y = \tan x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

Chương 4.

SỐ PHỨC

§1. SỐ PHỨC

Đặt vấn đề

Số phức cho phép giải một phương trình nhất định mà không giải được trong trường số thực. Ví dụ, phương trình $(x+1)^2 = -9$ không có nghiệm thực, vì bình phương của một số thực không thể âm. Các số phức cho phép giải phương trình này. Ý tưởng là mở rộng trường số thực sang đơn vị ảo i với $i^2 = -1$, vì vậy phương trình trên được giải.

$$\sqrt{-1} = i$$

Examples:

$$1) \sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} = 5i$$

$$2) \sqrt{-16} = \sqrt{-1 \cdot 16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = 4i$$

$$3) \sqrt{-10} = \sqrt{-1 \cdot 10} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{10} = i\sqrt{10}$$

$$4) \sqrt{-32} = \sqrt{-1 \cdot 32} = i\sqrt{16 \cdot 2} = 4i\sqrt{2}$$

Số phức được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học, như khoa học kỹ thuật, điện từ học, cơ học lượng tử, toán học ứng dụng chẳng hạn như trong lý thuyết hỗn loạn. Nhà toán học người Ý Gerolamo Cardano là người đầu tiên đưa ra số phức. Ông sử dụng số phức để giải các phương trình bậc ba trong thế kỉ 16.



1

ĐỊNH NGHĨA SỐ PHỨC

$$\begin{array}{c} a + bi \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Real part} \quad \text{Imaginary part} \end{array}$$

Mỗi biểu thức dạng trong đó $a, b \in \dots$ và $i^2 = \dots$ được gọi là một **số phức**.

- Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là, b là của z .
- Số i được gọi là
- Tập hợp các số phức kí hiệu là (The set of Complex numbers).

Ví dụ 1. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức $-3 + 5i$, $4 - i\sqrt{2}$, $-3i$, 2021 .



- Mỗi số thực a đều là một số phức với **phần ảo bằng ...**
- Số phức bi có **phần thực bằng ...** được gọi là số

2

SỐ PHỨC BẰNG NHAU

Hai số phức được gọi là bằng nhau nếu và của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dots \\ b_1 = \dots \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tìm x, y để hai số phức $z = x + 2 + (y + 4)i$ và $w = 2x + 1 + (3y - 2)i$ bằng nhau

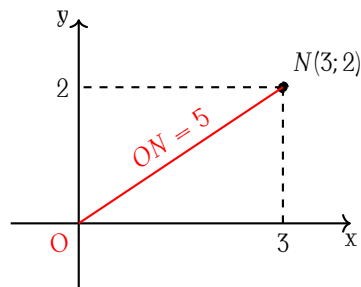
3

BIỂU DIỄN HÌNH HỌC VÀ MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

1 Biểu diễn hình học của số phức

Điểm $M(\dots; \dots)$ trong hệ trục tọa độ Oxy được gọi là điểm của số phức $z = a + bi$.

Ví dụ 3. Trong hình bên, điểm N biểu diễn số phức nào?



2 Môđun của số phức

Cho số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$.

..... của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z , kí hiệu là

$$|z| = \dots\dots\dots$$

Ví dụ 4. Tính môđun của các số phức $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 2021$, $z_3 = i\sqrt{7}$.

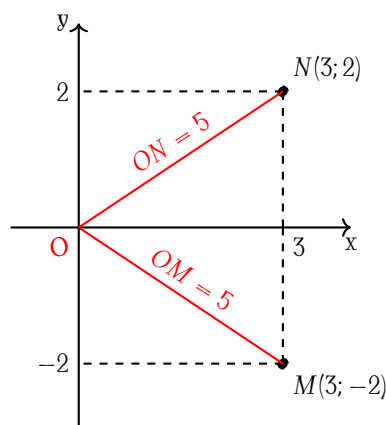
3 Số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi là **số phức liên hợp** của z , kí hiệu là

Ví dụ 5. Ghép nối các cặp số phức liên hợp dưới đây:

- | | |
|----------------|----------------|
| a) $3 + 2i$ | • $4 + 3i$ |
| b) $4 - 3i$ | • $-i\sqrt{5}$ |
| c) $i\sqrt{5}$ | • $-3 + 2i$ |

- Trên mặt phẳng Oxy , các điểm biểu diễn của z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua
- $|z| = \dots\dots\dots$ và $|\bar{z}| = \dots\dots\dots$



4

THỰC HÀNH

❖ TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho số phức $z = a + bi$. Môđun của z là

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| A. $ z = \sqrt{a^2 + b^2}$. | B. $ z = \sqrt{a^2 - b^2}$. |
| C. $ z = a^2 + b^2$. | D. $ z = 2\sqrt{a^2 + b^2}$. |

Câu 2. Cho số phức $z = a + bi$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| A. $\bar{z} = a - bi$. | B. $\bar{\bar{z}} = a + bi$. |
| C. $ z = \sqrt{a^2 + b^2}$. | D. $ \bar{z} = \sqrt{a^2 - b^2}$. |

Câu 3. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$.

- | | |
|--|---|
| A. Phần thực là 2 và phần ảo là 3. | B. Phần thực là 2 và phần ảo là -3 . |
| C. Phần thực là 2 và phần ảo là $3i$. | D. Phần thực là 2 và phần ảo là $-3i$. |

Câu 4. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| A. $3 + 4i$. | B. $4 - 3i$. | C. $3 - 4i$. | D. $4 + 3i$. |
|---------------|---------------|---------------|---------------|

Câu 5. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = -3 + 2i$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- | | | | |
|-------|-----------|-----------|-----------|
| A. 1. | B. -1 . | C. -4 . | D. -7 . |
|-------|-----------|-----------|-----------|

Câu 6. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức liên hợp của z là

- | | | | |
|-------------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|
| A. $\bar{z} = a - bi$. | B. $z = a - bi$. | C. $\bar{z} = bi$. | D. $\bar{z} = -a - bi$. |
|-------------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|

Câu 7. Tính môđun của số phức $z = 4 - 3i$.

- | | | | |
|----------------|-----------------------|----------------|-----------------|
| A. $ z = 5$. | B. $ z = \sqrt{7}$. | C. $ z = 7$. | D. $ z = 25$. |
|----------------|-----------------------|----------------|-----------------|

Câu 8. Trong các số phức sau, số nào có môđun nhỏ nhất?

- A. $z_1 = 1 + 2i$. B. $z_2 = 2 - i$. C. $z_3 = 2$. D. $z_4 = 1 + i$.

Câu 9. Trong các số phức sau, số nào có môđun lớn nhất?

- A. $z_1 = 1 + 2i$. B. $z_2 = 2 - i$. C. $z_3 = 3i$. D. $z_4 = 1 + i$.

Câu 10. Cho hai số phức $z_1 = -1 + 2i$ và $z_2 = -1 - 2i$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. 10. C. -6. D. 4.

Câu 11. Trong các số phức $z_1 = -2i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 5i$, $z_4 = 4$ có bao nhiêu số thuần ảo?

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 12. Cho số phức $z = (2m - 1) + (m^2 - 4)i$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để số phức z là số thuần ảo.

- A. $m = 2$, $m = -2$. B. $m = 2$.
C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho a , b là hai số thực thỏa mãn $2a + (b - 3)i = 4 - 5i$ với i là đơn vị ảo. Giá trị của a , b bằng

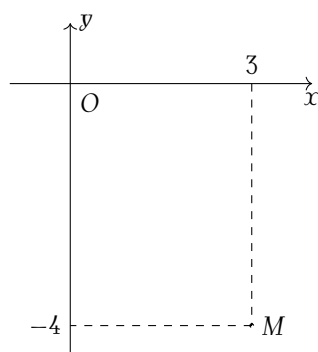
- A. $a = 1$, $b = 8$. B. $a = 8$, $b = 8$.
C. $a = 2$, $b = -2$. D. $a = -2$, $b = 2$.

Câu 14. Tìm các số thực a , b thỏa mãn $(a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi$ với i là đơn vị ảo.

- A. $a = -3$, $b = 1$. B. $a = 3$, $b = -1$.
C. $a = -3$, $b = -1$. D. $a = 3$, $b = 1$.

Câu 15. Tìm các số thực x , y thỏa mãn $(2x + 5y) + (4x + 3y)i = 5 + 2i$.

- A. $x = \frac{5}{14}$, $y = -\frac{8}{7}$. B. $x = \frac{8}{7}$, $y = -\frac{5}{14}$.
C. $x = -\frac{5}{14}$, $y = \frac{8}{7}$. D. $x = -\frac{5}{14}$, $y = -\frac{8}{7}$.



Câu 16. Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của z .

- A. -4 và 3. B. 3 và -4i. C. 3 và -4. D. -4 và 3i.

Câu 17. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tọa độ của điểm M biểu diễn số phức $z = 5 - i$.

- A. $M(5; 0)$. B. $M(5; -1)$. C. $M(0; -5)$. D. $M(5; 1)$.

Câu 18. Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm A , B như hình vẽ bên. Trung điểm của đoạn thẳng AB biểu diễn số phức

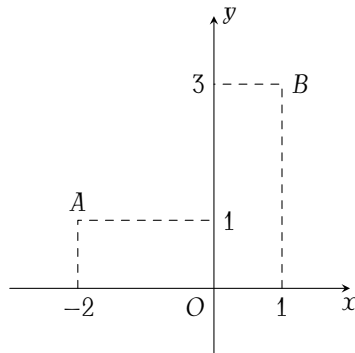
- A. $-\frac{1}{2} + 2i$. B. $2 - \frac{1}{2}i$. C. $-1 + 2i$. D. $2 - i$.

Câu 19. Gọi A , B lần lượt biểu diễn các số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. A , B đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
B. A , B đối xứng nhau qua trục hoành.
C. A , B đối xứng nhau qua trục tung.
D. A , B đối xứng nhau qua điểm $I(1; 0)$.

Câu 20. Cho các số phức $z_1 = 3i$, $z_2 = -1 - 3i$ và $z_3 = m - 2i$. Tập giá trị của tham số m để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

- A. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. B. $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.
C. $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$. D. $(-\infty; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.



TỰ LUẬN

Câu 1 (SGK GT12). Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $|z| = 1$

b) $|z| \leq 1$

1

2

3

Câu 7. Giá trị của biểu thức $z = (1 + i)^2$ là

- A. $2i$. B. $-i$. C. $-2i$. D. i .

Câu 8. Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 1 - 5i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z_1 + z_2$.

- A. Phần thực là 4 và phần ảo là 3. B. Phần thực là 4 và phần ảo là $-3i$.
C. Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$. D. Phần thực là 4 và phần ảo là -3 .

Câu 9. Cho hai số phức $z_1 = \frac{1}{2} - 2i$ và $z_2 = 4 - i$. Tính môđun của số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

- A. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{2}$. B. $|z| = \frac{289}{4}$. C. $|z| = \frac{17}{2}$. D. $|z| = -\frac{17}{2}$.

Câu 10. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 + i$. Tính $|z_1 + 3z_2|$.

- A. $|z_1 + 3z_2| = \sqrt{11}$. B. $|z_1 + 3z_2| = 11$.
C. $|z_1 + 3z_2| = \sqrt{61}$. D. $|z_1 + 3z_2| = 61$.

Câu 11. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (11 - 3i) + (5 + 2i)(1 - i)$.

- A. $\bar{z} = 14 + 6i$. B. $\bar{z} = 18 + 6i$. C. $\bar{z} = 18 - 6i$. D. $\bar{z} = 14 - 6i$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Hiệu phần thực và phần ảo của z là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 13. Tìm hai số thực x, y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = -1 + 6i$, với i là đơn vị ảo.

- A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = 6 - 3i$ có phần ảo bằng

- A. -3 . B. 3. C. $3i$. D. $2i$.

Câu 15. Tìm số phức z thỏa mãn $z - 1 + 4i = 2i\bar{z}$.

- A. $z = \frac{9}{5} - \frac{2}{5}i$. B. $z = -\frac{9}{5} + \frac{2}{5}i$. C. $z = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}i$. D. $z = -\frac{7}{3} - \frac{2}{3}i$.

Câu 16. Cho x, y là các số thực. Số phức $z = i(1 + xi + y + 2i)$ bằng 0 khi

- A. $x = -1; y = -2$. B. $x = 0; y = 0$.
C. $x = -2; y = -1$. D. $x = 2; y = 1$.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$ và $|z^2 + 1| = 4$. Tính $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}|$.

- A. $3 + \sqrt{7}$. B. $3 + 2\sqrt{2}$. C. $7 + \sqrt{3}$. D. 16.

Câu 18. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = 4$.

- A. Đường tròn tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 4$.
B. Đường tròn tâm $I(-2; 3)$ và bán kính $R = 16$.
C. Đường tròn tâm $I(-2; 3)$ và bán kính $R = 4$.
D. Đường tròn tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 16$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 3$. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn số phức $w = 1 + \bar{z}$.

- A. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$.
B. Đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.
C. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$.
D. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $w = 2z + 2 - i$.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

§3. PHÉP CHIA SỐ PHỨC

1

TỔNG VÀ TÍCH CỦA HAI SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Cho số phức $z = a + bi$. Khi đó:



$$\bullet z + \bar{z} = \dots\dots$$

$$\bullet z \cdot \bar{z} = \dots\dots$$

Chú ý: Tổng và tích của một số phức với số phức liên hợp của nó là một số $\dots\dots$

Ví dụ 1. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Tính $z + \bar{z}$ và $z \cdot \bar{z}$.

2

PHÉP CHIA HAI SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$. Khi đó, để tính $\frac{z_1}{z_2}$, ta nhân cả tử và mẫu cho $\bar{z}_2$, tức là

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dots\dots\dots$$

Ví dụ 2. Tính $\frac{2+i}{3-2i}$ và $\frac{5-2i}{i}$.

Ví dụ 3. Tìm nghịch đảo của số phức z , biết $z = \sqrt{2} - 3i$.

Ví dụ 4. Tìm số phức z thỏa mãn $\frac{z}{4-3i} + 2 - 3i = 5 - 2i$.

3

THỰC HÀNH

☑ TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho số phức $z = 1 + i$. Số phức nghịch đảo của z là

- A. $1 - i$. B. $\frac{1-i}{2}$. C. $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{-1+i}{2}$.

Câu 2. Cho số phức $z = 2 + 3i$. Tính $\frac{z}{\bar{z}}$.

- A. $\frac{-5+12i}{13}$. B. $\frac{5-6i}{11}$. C. $\frac{5-12i}{13}$. D. $\frac{-5-12i}{13}$.

Câu 3. Tính môđun của số phức $z = \frac{(-2-3i)(-1+2i)}{2+i}$.

- A. $|z| = \sqrt{13}$. B. $|z| = \sqrt{5}$. C. $|z| = 13$. D. $|z| = 5$.

Câu 4. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{6-3i}{2+5i}$.

- A. Phần thực là $-\frac{3}{29}$ và phần ảo là $-\frac{36}{29}$.
 B. Phần thực là $-\frac{3}{29}$ và phần ảo là $-\frac{36}{29}i$.
 C. Phần thực là $\frac{1}{7}$ và phần ảo là $\frac{12}{7}$.
 D. Phần thực là $\frac{1}{7}$ và phần ảo là $\frac{12}{7}i$.

- Câu 5.** Cho số phức z thỏa mãn $\frac{\bar{z} + i}{z - 1} = 2 - i$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.
- A. $w = 5 - 2i$. B. $5 + 2i$. C. $w = \frac{9}{2} + 2i$. D. $w = \frac{9}{2} - 2i$.
- Câu 6.** Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$.
- A. $|z| = \sqrt{34}$. B. $|z| = 34$. C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.
- Câu 7.** Số phức z thỏa mãn điều kiện $(3 + i)z + (1 - 2i)^2 = 8 - 17i$. Khi đó hiệu của phần thực và phần ảo của z là
- A. 7. B. -3. C. 3. D. -7.
- Câu 8.** Cho số phức z thỏa mãn $(1 - 2i)z + (1 + 3i)^2 = 5i$. Khi đó điểm nào sau đây biểu diễn số phức z ?
- A. $M(2; -3)$. B. $N(2; 3)$. C. $P(-2; 3)$. D. $Q(-2; -3)$.
- Câu 9.** Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{4(-3 + i)}{1 - 2i} + \frac{(3 - i)^2}{-i}$. Môđun của số phức $w = z - i\bar{z} + 1$ là
- A. $|w| = \sqrt{85}$. B. $|w| = 4\sqrt{5}$. C. $|w| = 6\sqrt{3}$. D. $|w| = \sqrt{48}$.
- Câu 10.** Giá trị của tham số thực m bằng bao nhiêu để bình phương số phức $z = \frac{(m + 9i)(1 + i)}{2}$ là số thực?
- A. Không có giá trị m thỏa. B. $m = -9$.
C. $m = 9$. D. $m = \pm 9$.

TỰ LUẬN

Câu 1 (SGK GT12). Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{5i}{2 - 3i}$ b) $\frac{(1 + i)^2(2i)^3}{i - 2}$ c) $4 - 3i + \frac{5 + 4i}{3 + 6i}$

Câu 2 (SGK GT12). Tìm nghịch đảo $\frac{1}{z}$ của số phức z , biết:

a) $z = 1 + 2i$ b) $z = i$ c) $z = 5 + i\sqrt{3}$

Câu 3 (SGK GT12). Giải các phương trình sau:

a) $(3 - 2i)z + (4 + 5i) = 7 + 3i$ b) $(1 + 3i)z - (2 + 5i) = (2 + i)z$

§4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

Đặt vấn đề

1. Căn bậc hai của 9 là
2. Căn bậc hai của -9 là

1 CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC ÂM

Căn bậc hai của số thực $a < 0$ là

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của -1 , -4 , -9 .

2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc n ($n \geq 1$) đều có đúng nghiệm (không nhất thiết phân biệt).

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2 - 2x + 5 = 0$.

3 THỰC HÀNH

☑ TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. $2\sqrt{5}$. B. 3. C. $\sqrt{5}$. D. 10.

Câu 2. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2018 = 0$. Khi đó giá trị của biểu thức $A = |z_1 + z_2 - z_1 z_2|$ bằng

- A. 2017. B. 2019. C. 2018. D. 2016.

Câu 3. Trong tập số phức, phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ có nghiệm là

- A. $z = -1 \pm 2i$. B. $z = 2 \pm 2i$. C. $z = -2 \pm 2i$. D. $z = 1 \pm 2i$.

Câu 4. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ trên tập số phức. Số tập con của S là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

Câu 5. Tìm nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$.

- A. $z = -2 - 3i$. B. $z = 2 - 3i$. C. $z = -2 + 3i$. D. $z = 2 + 3i$.

Câu 6. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có nghiệm $z = -2 + i$. Tính $a + b$.

- A. 4. B. 9. C. -1 . D. 1.

Câu 7. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $2z^2 - 6z + 15 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tọa độ của điểm M biểu diễn số phức z_0 .

- A. $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{21}}{2}i\right)$. B. $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$.
C. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$. D. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{21}}{2}i\right)$.

Câu 8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $z^4 - 7z^2 - 18 = 0$ trên tập số phức.

A. $S = \{-2; 9\}$.

B. $S = \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -3i; 3i\right\}$.

C. $S = \{-4i; 4i; -81; 81\}$.

D. $S = \left\{-3; 3; -\sqrt{2}i; \sqrt{2}i\right\}$.

Câu 9. Tìm một căn bậc hai của -8 .

A. $-2\sqrt{2}i$.

B. $-2\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{-2}i$.

Câu 10. Tìm các căn bậc hai của -6 .

A. $-\sqrt{6}i$.

B. $\pm\sqrt{6}i$.

C. $\pm 6i$.

D. $\sqrt{6}i$.

TỰ LUẬN

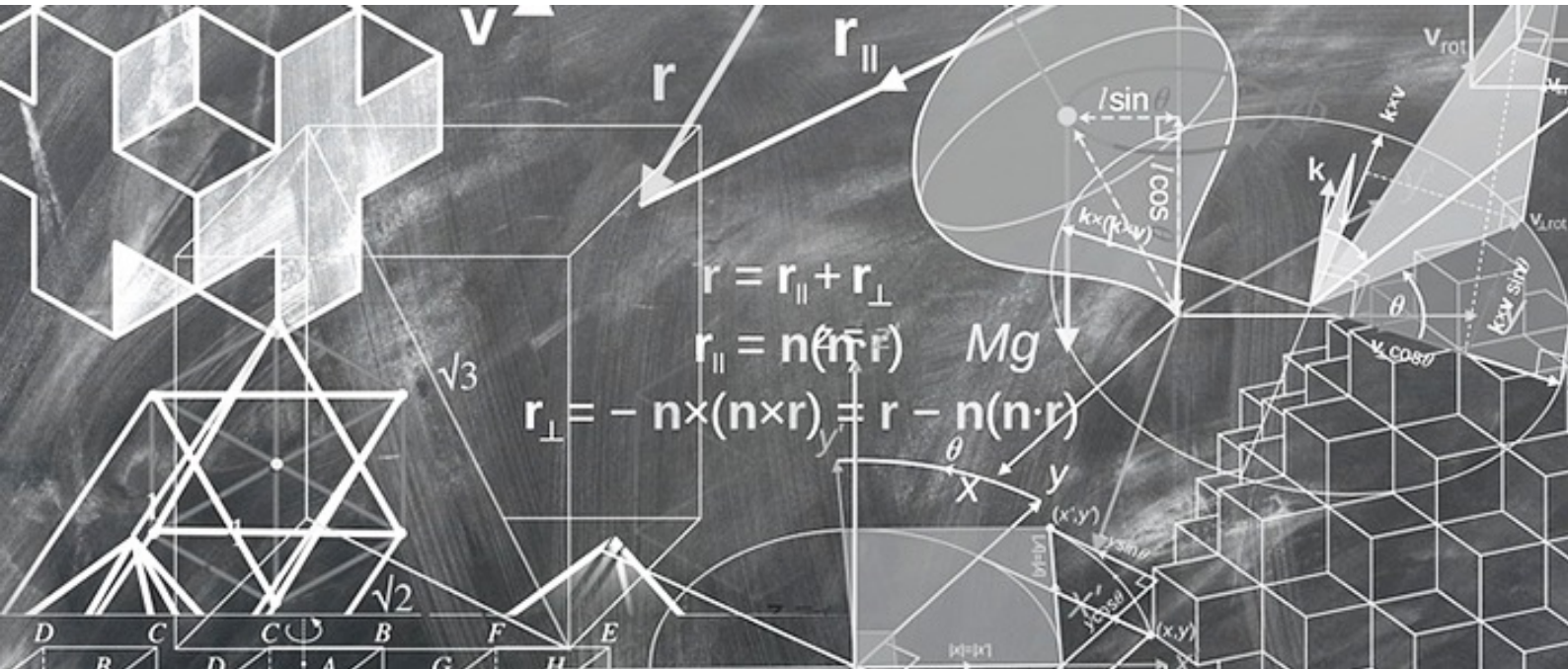
Câu 1 (SGK GT12). Tìm các căn bậc hai phức của các số sau: -7 , -8 , -12 , -20 , -121 .

Câu 2 (SGK GT12). Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $-3z^2 + 2z - 1 = 0$

b) $5z^2 - 7z + 11 = 0$

c) $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$



PHẦN II

HÌNH HỌC

Chương 3. Phương pháp tọa độ trong không gian.....	35
§1. Hệ tọa độ trong không gian.....	35
§2. Phương trình mặt phẳng.....	40
§3. Phương trình đường thẳng.....	46

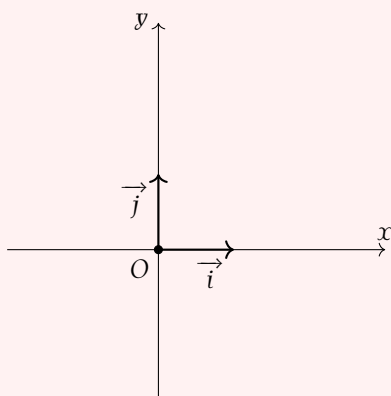
Chương 3.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Nhắc lại về Hệ tọa độ trong mặt phẳng

HỆ TRỤC TỌA ĐỘ Oxy



- Hệ trục tọa độ Oxy gồm trục Ox và trục Oy , vuông góc và cắt nhau tại $O(...; ...)$.
- Vector $\vec{u} = (u_1; u_2)$ nếu $\vec{u} = u_1 \dots + u_2 \dots$
- Điểm $M(x_0; y_0)$ nếu $\vec{OM} = x_0 \dots + y_0 \dots$
- $\vec{AB} = (x_B \dots x_A; y_B \dots y_A)$
- Trung điểm của đoạn AB : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
- Trọng tâm của $\triangle ABC$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và số $k \in \mathbb{R}$.

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dots \\ a_2 = \dots \end{cases}$
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \dots b_1; a_2 \dots b_2)$
- $k \cdot \vec{a} = (\dots a_1; \dots a_2)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ sao cho

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R có phương trình là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

hoặc có thể viết dưới dạng

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

trong đó $R = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{c}{2}}$ ($a^2 + b^2 - \frac{c}{2} > 0$)

1

TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ CỦA VECTƠ

1 Hệ tọa độ

Trong không gian, hệ trục tọa độ $Oxyz$ bao gồm ... trục Ox , Oy , Oz đôi một

- Các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ trên các trục Ox , Oy , Oz .
- Điểm $O(...; ...; ...)$ được gọi là
- Các mặt phẳng,, đôi một vuông góc với nhau, được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian

2 Tọa độ của một điểm và của vectơ

Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nếu $\vec{OM} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các vectơ đơn vị. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A. $(1; 2; -3)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(2; 3; 1)$. D. $(1; -3; 2)$.

2

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Định lý

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \dots\dots\dots$
- $\vec{a} - \vec{b} = \dots\dots\dots$
- $k \cdot \vec{a} = \dots\dots\dots$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (4; -3; 5)$, $\vec{c} = (-2; 4; 6)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

- A. $(10; 9; 6)$. B. $(12; -9; 7)$. C. $(10; -9; 6)$. D. $(12; -9; 6)$.

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dots \\ a_2 = \dots \\ a_3 = \dots \end{cases}$
- Với vectơ $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $a_1 = \dots\dots\dots$, $a_2 = \dots\dots\dots$, $a_3 = \dots\dots\dots$
- $\vec{0} = \dots\dots\dots$
- $\vec{AB} = \dots\dots\dots$
- Trung điểm của đoạn thẳng AB là $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(1; -1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(1; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$ và $D(1; -1; 1)$. Tọa độ điểm C là

- A. $C(2; 0; 2)$. B. $C(2; 2; 2)$. C. $C(2; -2; 2)$. D. $C(0; -2; 0)$.

3

TÍCH VÔ HƯỚNG

1 Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots\dots\dots$$

Ví dụ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (-4; 0; 1)$ và $\vec{c} = (0; 3; 3)$. Tính $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

- A. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3$. B. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 9$.
C. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. D. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = -10$.

2 Ứng dụng của tích vô hướng

Độ dài của một vectơ

Cho vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Khi đó

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots}$$

Ví dụ 5. Tính chu vi của tam giác ABC , biết rằng $A(1; -1; 1)$, $B(0; 1; 2)$ và $C(1; 0; 1)$.

Góc giữa hai vectơ

Góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được tính bởi công thức

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dots$$

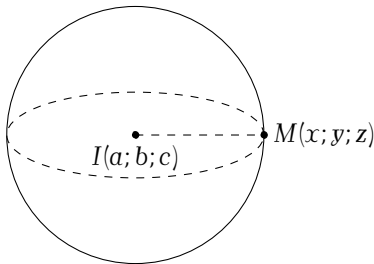
Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; 0; -1)$. Góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo bằng

- A. 120° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Hệ quả: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \dots$

4

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



Định lý

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình là

$$(x - \dots)^2 + (y - \dots)^2 + (z - \dots)^2 = \dots$$

Ví dụ 7. Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau đây:

- a) Có tâm $C(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$
 b) Có đường kính AB với $A(4; -3; 7)$ và $B(2; 1; 3)$

Nhận xét: Phương trình mặt cầu nói trên có thể viết dưới dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - \dots x - \dots y - \dots z + d = 0$$

trong đó $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - \dots}$ ($a^2 + b^2 + c^2 - \dots > \dots$)

Ví dụ 8. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$$

5

THỰC HÀNH

🎯 TRẮC NGHIỆM

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ của $\vec{a}$.

- A. $(2; -3; -1)$. B. $(-3; 2; -1)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(2; -1; -3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(3; 3; -1)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(-1; -1; -3)$. D. $(1; 1; 3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(3; 0; -5)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I(2; 1; -1)$. B. $I(2; 2; -2)$. C. $I(4; 2; -2)$. D. $I(-1; 1; 4)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 3; 4)$, $B(2; -1; 0)$, $C(3; 1; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(2; 1; 2)$. B. $G(6; 3; 6)$. C. $G\left(3; \frac{3}{2}; 3\right)$. D. $G(2; -1; 2)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1; 0; 2)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(3; 2; 4)$ và $D(6; 9; -5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện là

- A. $(2; 3; 1)$. B. $(2; 3; -1)$. C. $(-2; 3; 1)$. D. $(2; -3; 1)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-4; 8; -5)$. B. $D(-4; 8; -3)$.
C. $D(-2; 8; -3)$. D. Không tồn tại.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng?

- A. $x = 4; y = 7$. B. $x = 4; y = -7$.
C. $x = -4; y = 7$. D. $x = -4; y = -7$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

- A. $M(9; -5; 7)$. B. $M(9; 5; 7)$. C. $M(-9; 5; -7)$. D. $M(9; -5; -5)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc trục Oy ?

- A. $N(2; 0; 0)$. B. $Q(0; 3; 2)$. C. $P(2; 0; 3)$. D. $M(0; -3; 0)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$. B. $(2; -2; 0)$. C. $(0; -2; 1)$. D. $(0; 0; 1)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; 1; -1)$ lên trục tung.

- A. $H(2; 0; -1)$. B. $H(0; 1; 0)$. C. $H(0; 1; -1)$. D. $H(2; 0; 0)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng

- A. 25. B. 23. C. 27. D. 29.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 4)$ và $B(-2; 2; -6)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = 5\sqrt{5}$. B. $AB = \sqrt{21} + \sqrt{44}$.
C. $AB = \sqrt{65}$. D. $AB = \sqrt{5}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; -1; 0)$. Góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo bằng

- A. 120° . B. 45° . C. 135° . D. 60° .

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 16$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $I(-7; 3; 0)$ và $R = 4$. B. $I(7; -3; 0)$ và $R = 4$.
C. $I(-7; 3; 0)$ và $R = 16$. D. $I(7; -3; 0)$ và $R = 16$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ có tâm và bán kính là

- A. $I(2; -1; 1)$, $R = 9$. B. $I(2; -1; 1)$, $R = 3$.
C. $I(-2; 1; -1)$, $R = 3$. D. $I(-2; 1; -1)$, $R = 9$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; -3; 0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

- A. $R = \frac{\sqrt{14}}{4}$. B. $R = \sqrt{14}$. C. $R = \frac{\sqrt{14}}{3}$. D. $R = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$. Phương trình của (S) là

- A. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$. B. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 5$.
C. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$. D. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3)$ và $B(5; 4; 7)$. Phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

- A. $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 + (z - 10)^2 = 17$.
B. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 17$.
C. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = 17$.
D. $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 + (z - 7)^2 = 17$.

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Gọi (S) là mặt cầu chứa A có tâm I thuộc tia Ox và bán kính bằng 7. Phương trình mặt cầu (S) là

- A. $(x - 7)^2 + y^2 + z^2 = 49$. B. $(x + 7)^2 + y^2 + z^2 = 49$.
C. $(x + 5)^2 + y^2 + z^2 = 49$. D. $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 49$.

TỰ LUẬN

Câu 1 (SGK HH12). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Câu 2 (SGK HH12). Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ biết

a) $\vec{a} = (3; 0; -6)$ và $\vec{b} = (2; -4; 0)$

b) $\vec{a} = (1; -5; 2)$ và $\vec{b} = (4; 3; -5)$

Vocabulary

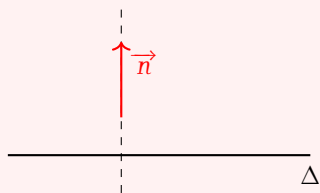
space không gian	coplanar đồng phẳng	scalar product tích vô hướng
plane mặt phẳng	midpoint trung điểm	length độ dài
coordinates tọa độ	centroid trọng tâm	sphere mặt cầu
point điểm	parallel cùng phương	radius bán kính

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Nhắc lại về Phương trình tổng quát của đường thẳng trong mặt phẳng

VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng Δ và vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$. Nếu của $\vec{n}$ vuông góc với Δ thì ta nói $\vec{n}$ là vectơ của Δ .



- Mỗi đường thẳng có vectơ pháp tuyến.
- Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của Δ thì $k \cdot \vec{n}$ cũng là của Δ .

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$. Khi đó

$$\Delta: \dots(x - \dots) + \dots(y - \dots) = 0$$

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

- Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì Δ_1 và Δ_2
- Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì Δ_1 và Δ_2
- Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì Δ_1 và Δ_2

Góc giữa hai đường thẳng là một góc được xác định bởi công thức

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1 \cdot a_2 + \dots|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \dots}$$

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ bằng

$$d(M, \Delta) = \frac{a \dots + b \dots + c}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2}}$$

1

VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG

1 Tích có hướng

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (\dots; \dots; \dots)$$

Ví dụ 1. Tính tích có hướng của hai vectơ $\vec{u} = (2; 1; -2)$ và $\vec{v} = (-12; 6; 0)$.

2 Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa

Cho mặt phẳng (α) . Nếu vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ của (α) .

- Mỗi mặt phẳng có vectơ pháp tuyến.
- Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) thì $k \cdot \vec{n}$ cũng là của (α) .

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$, $C(-10; 5; 3)$. Hãy tìm tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

2

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

1 Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$. Khi đó

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

► Mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{m} = (A; B; C)$.

Ví dụ 3. Mặt phẳng $(\alpha): 4x - 2y - 6z + 7 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$, $C(-10; 5; 3)$. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC) .

2 Các trường hợp riêng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

$A = 0$: (α) song song hoặc trùng với trục Ox

$B = 0$: (α) song song hoặc trùng với trục Oy

$C = 0$: (α) song song hoặc trùng với trục Oz

!

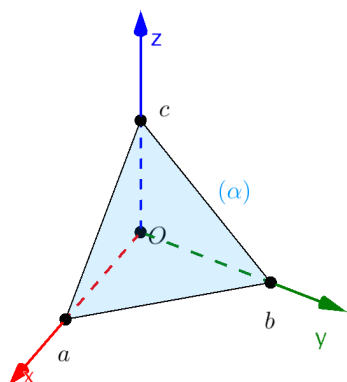
$D = 0$: (α) đi qua điểm $O(0; 0; 0)$

$A = B = 0$: (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng Oxz

$A = C = 0$: (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng Oxy

$B = C = 0$: (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng Oyz

Ví dụ 5. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng Oxz và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Viết phương trình mặt phẳng (β) .



Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Nếu mặt phẳng (α) cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ thì

$$(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Ví dụ 6. Viết phương trình mặt phẳng (HKT) , biết $H(2; 0; 0)$, $K(0; 0; 5)$, $T(0; -3; 0)$.

3

ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẪNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi đó:

!

$$\bullet (\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1; B_1; C_1 \dots k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \dots kD_2 \end{cases} \bullet (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1; B_1; C_1 \dots k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \dots kD_2 \end{cases}$$

$$\bullet (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 2x - y + 5z - 15 = 0$ và điểm $E(1; 2; -3)$. Mặt phẳng (P) qua E và song song với (Q) có phương trình là

A. $x + 2y - 3z + 15 = 0$.

B. $x + 2y - 3z - 15 = 0$.

C. $2x - y + 5z + 15 = 0$.

D. $2x - y + 5z - 15 = 0$.

4

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ được tính bằng

$$d(M, (\alpha)) = \frac{A \dots + B \dots + C \dots + D}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}}$$

Ví dụ 8. Tính khoảng cách từ điểm $Q(1; 0; -3)$ đến mặt phẳng $(\gamma): x - 2y + 2z - 5 = 0$.

Ví dụ 9. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\lambda): x - 2y + 2z + 5 = 0$ và $(\gamma): x - 2y + 2z - 5 = 0$.

5

THỰC HÀNH

❖ TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3; -1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$ và $\vec{c} = (5; 1; 7)$. Tìm giá trị của m để $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$.

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 5y - 8 = 0$. Tìm tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

- A. $\vec{n} = (2; -5; -8)$. B. $\vec{n} = (2; -5; 0)$.
C. $\vec{n} = (2; 0; -5)$. D. $\vec{n} = (-1; -2; 0)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(5; 2; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -2)$?

- A. $x + y - 2z + 9 = 0$. B. $x + y - 2z - 9 = 0$.
C. $5x + 2y - z + 9 = 0$. D. $5x + 2y - z - 9 = 0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(-1; 0; 4)$ và $C(0; -2; -1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng BC ?

- A. $x - 2y - 5z - 5 = 0$. B. $x - 2y - 5z + 5 = 0$.
C. $x - 2y - 5z - 2 = 0$. D. $2x + y - z - 5 = 0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(1; -2; 0)$ và song song với mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 6 = 0$?

- A. $x - y + 3z - 1 = 0$. B. $x - y + 3z + 1 = 0$.
C. $x - y + 3z - 3 = 0$. D. $x - y + 3z + 3 = 0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -3; 0)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z + 3 = 0$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) đi qua A sao cho (P) vuông góc với (α) và (P) song song với trục Oz ?

- A. $2x + y - 1 = 0$. B. $y + 2z + 3 = 0$.
C. $2x - y - 7 = 0$. D. $x + 2y - z + 4 = 0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, chọn câu đúng trong các câu sau:

- A. Mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình $z = 0$.

- B. Mặt phẳng tọa độ (Ozx) có phương trình $x = 0$.
 C. Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình $y + z = 0$.
 D. Mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình $x + y = 0$.

Câu 8. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$ tại điểm $M(7; -1; 5)$ có phương trình là

- A. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$.
 B. $6x + 2y + 3z + 55 = 0$.
 C. $3x + y + z - 22 = 0$.
 D. $3x + y + z + 22 = 0$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(3; -2; 1)$, $B(-4; 0; 3)$, $C(1; 4; -3)$, $D(2; 3; 5)$. Phương trình mặt phẳng chứa AC và song song với BD là

- A. $12x - 10y + 21z - 35 = 0$.
 B. $12x + 10y - 21z + 35 = 0$.
 C. $12x + 10y + 21z + 35 = 0$.
 D. $12x - 10y - 21z - 35 = 0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 1; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ có phương trình là

- A. $2x + 2y + z + 3 = 0$.
 B. $x - 2y - z = 0$.
 C. $2x + 2y + z - 3 = 0$.
 D. $x - 2y - z - 2 = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 1; -2)$ và $B(5; 9; 3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

- A. $2x + 6y - 5z + 40 = 0$.
 B. $x + 8y - 5z - 41 = 0$.
 C. $x - 8y - 5z - 35 = 0$.
 D. $x + 8y + 5z - 47 = 0$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) chứa điểm $H(1; 2; 2)$ và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho H là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $x + 2y - 2z - 9 = 0$.
 B. $2x + y + z - 6 = 0$.
 C. $2x + y + z - 2 = 0$.
 D. $x + 2y + 2z - 9 = 0$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 0; 7)$, $C(0; 3; 0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

- A. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{7} + \frac{z}{3} = 1$.
 B. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 0$.
 C. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 1$.
 D. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} + 1 = 0$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1; 2; 3)$. Gọi (P): $px + qy + rz + 1 = 0$ ($p, q, r \in \mathbb{R}$) là mặt phẳng qua G và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Tính $T = p + q + r$.

- A. $T = -\frac{11}{18}$.
 B. $T = \frac{11}{18}$.
 C. $T = 18$.
 D. $T = -18$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, gọi A , B , C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 2; 3)$ lên các trục tọa độ. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

- A. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$.
 B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
 C. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$.
 D. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, gọi M , N , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; -3; 1)$ lên các trục tọa độ. Phương trình mặt phẳng (MNK) là

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$.
 B. $3x - 2y + 6z = 6$.
 C. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 0$.
 D. $3x - 2y + 6z - 12 = 0$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $x - 3y + 2z - 1 = 0$ và (Q): $x - z + 2 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q), đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của (α) là

- A. $x + y + z - 3 = 0$.
 B. $x + y + z + 3 = 0$.
 C. $-2x + z + 6 = 0$.
 D. $-2x + z - 6 = 0$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; -2)$ và hai mặt phẳng (α): $x + y - 2z - 4 = 0$, (β): $2x - y + 3z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M đồng thời vuông góc với giao tuyến của (α) và (β).

- A. $x - 7y + 3z + 11 = 0$.
 B. $x - 7y - 3z - 1 = 0$.
 C. $x - y + 3z + 5 = 0$.
 D. $x + y - 3z - 9 = 0$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$ và $C(2; 0; 2)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm A , B , C có phương trình là

- A. $3x - 3y + z - 14 = 0$.
 B. $3x + 3y + z - 8 = 0$.
 C. $3x - 2y + z - 8 = 0$.
 D. $2x + 3y - z + 8 = 0$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$. Tổng $a + b + c$ bằng

- A. 6. B. -6. C. 0. D. 5.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x - 3y + 1 = 0$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $A(3; 1; 1)$. B. $B(1; -3; 1)$. C. $C(-1; 0; 0)$. D. $D(1; 0; 0)$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- A. $((P), (Q)) = 30^\circ$. B. $((P), (Q)) = 45^\circ$.
C. $((P), (Q)) = 60^\circ$. D. $((P), (Q)) = 90^\circ$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 2; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 0; \sqrt{2})$ và $D(0; -2; 0)$. Tính số đo góc của hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) .

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 24. Khoảng cách từ $M(1; 4; -7)$ đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 9 = 0$ là

- A. 5. B. 12. C. $\frac{25}{3}$. D. 7.

Câu 25. Khoảng cách giữa mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ và $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$ bằng

- A. 4. B. $\frac{6}{\sqrt{14}}$. C. 6. D. $\frac{4}{\sqrt{14}}$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3; -1; 0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 10 = 0$?

- A. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$. B. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = \frac{1}{9}$.
C. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$. D. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{9}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z + 20 = 0$ và $(Q): 4x - 13y - 6z + 40 = 0$. Vị trí tương đối của (P) và (Q) là

- A. Song song.
B. Trùng nhau.
C. Cắt nhau nhưng không vuông góc.
D. Vuông góc.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cặp mặt phẳng nào sau đây song song với nhau?

- A. $(P): 2x - y + z - 5 = 0$ và $(Q): -3x + 2y - 2z + 10$.
B. $(R): x - y + z - 3 = 0$ và $(S): 2x - 2y + 2z + 6 = 0$.
C. $(T): x - y + z = 0$ và $(U): \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0$.
D. $(X): 3x - y + 2z - 3 = 0$ và $(Y): 6z - 2y - 6 = 0$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 2; 1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 4y - 6z - 5 = 0$, $(Q): x + 2y - 3z = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) .
B. Mặt phẳng (Q) không đi qua A và song song với (P) .
C. Mặt phẳng (Q) đi qua A và không song song với (P) .
D. Mặt phẳng (Q) không đi qua A và không song song với (P) .

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$ và $(Q): (2m - 1)x + m(1 - 2m)y + (2m - 4)z + 14 = 0$. Tìm m để (P) và (Q) vuông góc với nhau.

- A. $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$. B. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$.
C. $m = 2$. D. $m = \frac{3}{2}$.

 TỰ LUẬN

Câu 1 (SGK HH12). Viết phương trình của mặt phẳng

- a) Đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và nhận $\vec{n} = (2; 3; 5)$ làm vectơ pháp tuyến;
- b) Đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và song song với giá của mỗi vectơ $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (-3; 0; 1)$;
- c) Đi qua ba điểm $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; -1)$;
- d) Đi qua điểm $M(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + 3z + 4 = 0$;
- e) Đi qua hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(5; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + z - 7 = 0$;
- f) Trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2; 3; 7)$ và $B(4; 1; 3)$.

Câu 2 (SGK HH12). Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau:

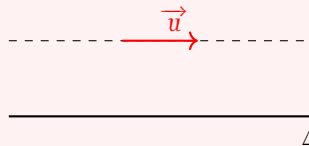
- a) $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$
- b) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Nhắc lại về Phương trình tham số của đường thẳng trong mặt phẳng

VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng Δ và vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$. Nếu **giá** của $\vec{n}$ hoặc với Δ thì ta nói $\vec{u}$ là vectơ của Δ .



- Mỗi đường thẳng có vectơ chỉ phương.
- Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ thì $k \cdot \vec{u}$ cũng là của Δ .

PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Khi đó

$$\Delta: \begin{cases} x = \dots + \dots t \\ y = \dots + \dots t \end{cases}$$

Chú ý: Nếu $u_1, u_2 \neq 0$ thì phương trình trên có thể viết dưới dạng **chính tắc** như sau:

$$\frac{x - \dots}{\dots} = \frac{y - \dots}{\dots}$$

1

PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm vectơ chỉ phương. Khi đó phương trình tham số của Δ có dạng

$$\Delta: \begin{cases} x = \dots + \dots t \\ y = \dots + \dots t \\ z = \dots + \dots t \end{cases} \quad (1)$$

trong đó t là

Ví dụ 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; -2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1; 4; 5)$.

Nếu $u_1, u_2, u_3 \neq 0$ thì phương trình (1) có thể viết dưới dạng **chính tắc** như sau:

$$\frac{x - \dots}{\dots} = \frac{y - \dots}{\dots} = \frac{z - \dots}{\dots}$$

Ví dụ 2. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng AB với $A(1; -2; 3)$ và $B(3; 0; 0)$.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$. Mặt phẳng nào sau đây chứa đường thẳng Δ ?

- A. $(\alpha): 2x + 4y + 6z + 9 = 0.$ B. $(\beta): x + y - z + 3 = 0.$
C. $(\lambda): x + y - z - 3 = 0.$ D. $(\gamma): x + 2y - z + 3 = 0.$

2

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT NHAU, CHÉO NHAU

Điều kiện để hai đường thẳng song song

Gọi $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng Δ_1 , Δ_2 và điểm $M \in \Delta_1$.

$$\bullet \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k \dots\dots \\ M \dots\dots \Delta_2 \end{cases} \quad \bullet \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k \dots\dots \\ M \dots\dots \Delta_2 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Cặp đường thẳng nào dưới đây song song, trùng nhau?

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad \text{và } d': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 5 + 3t' \\ z = 3 - 6t' \end{cases}$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{và } d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}$$

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau

Hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = x'_0 + v_1 t' \\ y = y'_0 + v_2 t' \\ z = z'_0 + v_3 t' \end{cases}$ cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0 + u_1 t = x'_0 + v_1 t' \\ y_0 + u_2 t = y'_0 + v_2 t' \\ z_0 + u_3 t = z'_0 + v_3 t' \end{cases}$$

có đúng nghiệm.

Ví dụ 5. Tìm giao điểm của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 3 - t' \\ z = 3 - 3t' \end{cases}$.

Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau

Hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = x'_0 + v_1 t' \\ y = y'_0 + v_2 t' \\ z = z'_0 + v_3 t' \end{cases}$ chéo nhau khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ phương và hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0 + u_1 t = x'_0 + v_1 t' \\ y_0 + u_2 t = y'_0 + v_2 t' \\ z_0 + u_3 t = z'_0 + v_3 t' \end{cases}$$

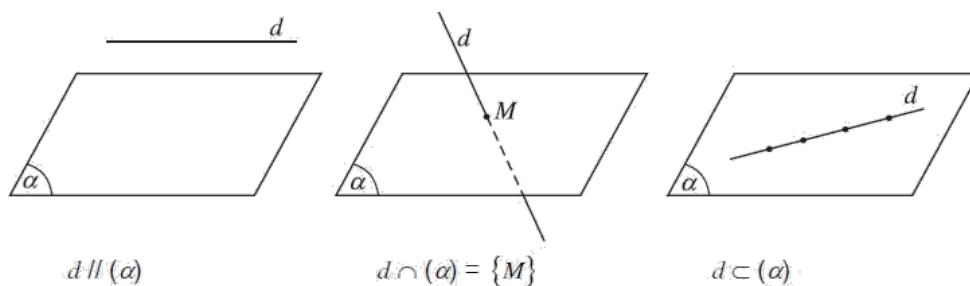
..... nghiệm.

Ví dụ 6. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 3 - t' \\ z = -3t' \end{cases}$.

Để tìm giao điểm của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$, ta xét phương trình

$$A(x_0 + u_1t) + B(y_0 + u_2t) + C(z_0 + u_3t) + D = 0 \quad (1)$$

- Nếu (1) vô nghiệm thì $\Delta \dots\dots\dots (\alpha)$
- Nếu (1) vô số nghiệm thì $\Delta \dots\dots\dots (\alpha)$
- Nếu (1) có đúng một nghiệm thì $\Delta \dots\dots\dots (\alpha)$



Ví dụ 7. Tìm giao điểm của mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$ với các đường thẳng sau:

a) $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 \end{cases}$ b) $d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ c) $d_3: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

3

THỰC HÀNH

🗳️ TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

- A. $P(-1; 2; 1)$. B. $Q(1; -2; -1)$. C. $N(-1; 3; 2)$. D. $M(1; 2; 1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$.

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ .

- A. $M(0; 2; -3)$. B. $M(3; 2; 2)$. C. $M(3; 4; 2)$. D. $M(3; 0; 4)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 \end{cases}.$$

Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của Δ .

- A. $\vec{u} = (1; -1; 0)$. B. $\vec{u} = (1; -1; 1)$.
C. $\vec{u} = (2; 3; 1)$. D. $\vec{u} = (2; 3; 0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2; 3; -1)$ và $N(4; 5; 3)$?

- A. $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$. B. $\vec{u}_3 = (1; 1; 2)$. C. $\vec{u}_1 = (3; 4; 1)$. D. $\vec{u}_2 = (3; 4; 2)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-7}{1}$ nhận vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương?

- A. $\vec{a} = (-2; -4; 1)$. B. $\vec{b} = (2; 4; 1)$.
C. $\vec{c} = (1; -4; 2)$. D. $\vec{d} = (2; -4; 1)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(2; -2; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 1; 1)$?

- A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(6; 11; -3)$?

- A. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-10}{2} = \frac{z+5}{2}$. B. $\frac{x+5}{1} = \frac{y+10}{2} = \frac{z-5}{2}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(0; 4; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) : $2x - 2y - z = 0$?

- A. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Câu 9. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3; 2; 1)$ và song song với đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}$ là

- A. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 5; 3)$ và hai mặt phẳng (P) : $2x + y + 2z - 8 = 0$, (Q) : $x - 4y + z - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với cả hai mặt phẳng (P) , (Q) .

- A. d : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - t \\ z = 3 \end{cases}$. B. d : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 \\ z = 3 - t \end{cases}$.
C. d : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 \\ z = 3 + t \end{cases}$. D. d : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với d và song song với (P) .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.
C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng $(P): x + 3 = 0$?

- A. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$ cắt mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 2 = 0$ tại điểm $I(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng

- A. 7. B. 3. C. 9. D. 5.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(-1; 1; 6)$ trên

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ là

- A. $M(3; -1; 2)$. B. $H(11; -17; 18)$.
C. $K(2; 1; 0)$. D. $N(1; 3; -2)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; -1)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z = 0$ là

- A. $(-2; 1; 1)$. B. $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. C. $(1; 1; -2)$. D. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} =$

$\frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ và $\Delta': \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Δ song song với Δ' . B. Δ trùng với Δ' .
C. Δ vuông góc với Δ' . D. Δ và Δ' chéo nhau.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ và mặt phẳng $(P): 4x + 2y + (m-1)z + 13 = 0$. Tìm giá trị của m để (P) vuông góc với Δ .

- A. $m = -7$. B. $m = 7$. C. $m = -\frac{7}{3}$. D. $m = \frac{7}{3}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và hai mặt

phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y - z - 4 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $d \parallel (P)$. B. $d \parallel (Q)$. C. $(P) \cap (Q) = d$. D. $d \perp (P)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 0; 3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ .

- A. $\frac{\sqrt{34}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{26}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$ và điểm $M(-3; 3; -3)$ nằm trên mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$. Đường thẳng

Δ nằm trên mặt phẳng (α) , đi qua M và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

C. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{8}$.

D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

TỰ LUẬN

Câu 1 (SGK HH12). Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $M(5; 4; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$;

b) d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : x + y - z + 5 = 0$;

c) d đi qua điểm $B(2; 0; -3)$ và song song với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$;

d) d đi qua hai điểm $P(1; 2; 3)$ và $Q(5; 4; 4)$;

Câu 2 (SGK HH12). Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau:

a) $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$

b) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$

Câu 3 (SGK HH12). Tính khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 2y + z + 3 = 0$.

PHỤ LỤC

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG
(Đề có 05 trang)

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: TOÁN 12 THPT
Thời gian làm bài 90 phút (bao gồm trắc nghiệm và tự luận)

Họ và tên học sinh:

Mã đề 101

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (40 câu, 8.0 điểm)

Câu 1. Cặp số nào sau đây có tính chất "Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại"?

- A. $\tan x^2$ và $\frac{1}{\cos^2 x^2}$. B. $\sin 2x$ và $\sin^2 x$. C. e^x và e^{-x} . D. $\sin 2x$ và $\cos^2 x$.

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\int x \sin x \, dx = x \cos x + \sin x + C$. B. $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$.
C. $\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \sin x + C$. D. $\int x \sin x \, dx = x \cos x - \sin x + C$.

Câu 3. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Khi đó $F(3)$ bằng bao nhiêu?

- A. $\ln \frac{3}{2}$. B. $\ln 2 + 1$. C. $\ln 2$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 4. Biết $\int (x+3) \cdot e^{-3x+1} \, dx = -\frac{1}{m} e^{-3x+1} (3x+n) + C$ với m, n là các số nguyên. Tính tổng $S = m + n$.

- A. 10. B. 1. C. 9. D. 19.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-2; 1]$ và $f(-2) = 3, f(1) = 7$. Tính $I = \int_{-2}^1 f'(x) \, dx$.

- A. $I = \frac{7}{3}$. B. $I = -4$. C. $I = 10$. D. $I = 4$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$. B. $\int_a^b k \, dx = k(a-b), \forall k \in \mathbb{R}$.
C. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \forall c \in (a; b)$. D. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt$.

Câu 7. Nếu $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} \, dx = \int_1^2 f(t) \, dt$, với $t = \sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

- A. $f(t) = t^2 - 1$. B. $f(t) = 2t^2 + 2t$. C. $f(t) = t^2 + t$. D. $f(t) = 2t^2 - 2t$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^2 (x+2)^3 \, dx$.

- A. $I = 60$. B. $I = 240$. C. $I = 56$. D. $I = 120$.

Câu 9. Tính $I = \int_e^{e^2} \frac{(1-\ln x)^2}{x} \, dx$ được kết quả là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{13}{3}$.

Câu 10. Biết rằng $\int_1^5 \frac{1}{2x-1} \, dx = \ln a$. Giá trị của a là

- A. 81. B. 27. C. 3. D. 9.

Câu 11. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^2 - 5 \sin x + 6} \, dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c > 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. $S = 3$. B. $S = 4$. C. $S = 0$. D. $S = 1$.

Câu 12. Giả sử $\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$. Tính giá trị biểu thức $S = -2a + b + 3c^2$.

- A. $S = 3$. B. $S = 6$. C. $S = -2$. D. $S = 0$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 \cdot f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. 6. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 14. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = x$ được tính theo công thức nào sau đây?

- A. $S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx$. B. $S = \int_0^2 \left| \frac{1}{2}x^2 - x \right| dx$. C. $S = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right)^2 dx$. D. $S = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) dx$.

Câu 15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 4x - 3$, $x = 0$, $x = 3$, Ox .

- A. $-\frac{8}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

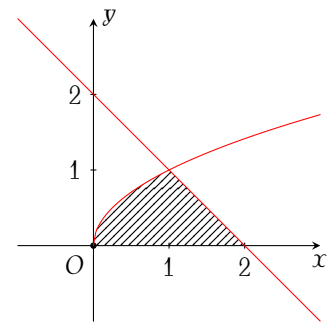
Câu 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(\mathcal{C}) : y = x^4 - 2x^2 + 1$ và trục hoành.

- A. $\frac{8}{15}$. B. $-\frac{15}{16}$. C. $\frac{15}{8}$. D. $\frac{16}{15}$.

Câu 17.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 2 - x$. Diện tích của (H) là

- A. $\frac{4\sqrt{2} - 1}{3}$. B. $\frac{8\sqrt{2} + 3}{6}$. C. $\frac{7}{6}$. D. $\frac{5}{6}$.



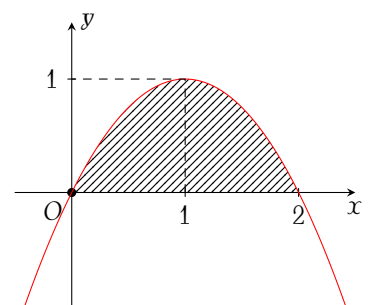
Câu 18. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục hoành: $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 12\pi$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \pi \int_0^{12\pi} (\sin x)^2 dx$. B. $V = \pi \int_0^{12\pi} \sin x dx$. C. $V = \pi^2 \int_0^{12\pi} (\sin x)^2 dx$. D. $V = \pi^2 \int_0^{12\pi} \sin x dx$.

Câu 19.

Cho hàm bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và Ox quanh Ox .

- A. $\frac{4\pi}{3}$. B. $-\frac{12\pi}{15}$. C. $\frac{16\pi}{15}$. D. $\frac{16\pi}{5}$.



Câu 20. Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 3t - 8$ (m/s²) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Quãng đường mà ô tô đi được sau 10 s kể từ lúc tăng tốc là

- A. 540 m. B. 150 m. C. 250 m. D. 246 m.

Câu 21. Cho hai số phức $z = x - yi$ và $w = 2i + 3x$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Biết $z = w$. Giá trị của x và y lần lượt là

- A. 2 và -3. B. -2 và 0. C. 0 và 2. D. 0 và -2.

Câu 22. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(4; 0)$, $B(0; -3)$ và điểm C thỏa mãn điều kiện $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$. Khi đó số phức được biểu diễn bởi điểm C là

- A. $z = -3 - 4i$. B. $z = 4 + 3i$. C. $z = 4 - 3i$. D. $z = -3 + 4i$.

Câu 23. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Điểm M biểu diễn cho số phức $\bar{z}$ trên mặt phẳng Oxy là

- A. $M(-6; -7)$. B. $M(6; -7)$. C. $M(6; 7i)$. D. $M(6; 7)$.

Câu 24. Cho x, y là các số thực. Số phức $z = i(1 + xi + y + 2i)$ bằng 0 khi

- A. $x = -1; y = -2$. B. $x = 0; y = 0$. C. $x = -2; y = -1$. D. $x = 2; y = 1$.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$ và $|z^2 + 1| = 4$. Tính $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}|$.

- A. $3 + \sqrt{7}$. B. $3 + 2\sqrt{2}$. C. $7 + \sqrt{3}$. D. 16.

Câu 26. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z - 4 - 2i| = |z - 2|$. Tính $P = x^2 + y^2$.

- A. 10. B. 16. C. 8. D. 32.

Câu 27. Tìm các căn bậc hai của -6 .

- A. $-\sqrt{6}i$. B. $\pm\sqrt{6}i$. C. $\pm 6i$. D. $\sqrt{6}i$.

Câu 28. Trong tập số phức, phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ có nghiệm là

- A. $z = -1 \pm 2i$. B. $z = 2 \pm 2i$. C. $z = -2 \pm 2i$. D. $z = 1 \pm 2i$.

Câu 29. Cho $\vec{m} = (1; 0; -1)$, $\vec{n} = (0; 1; 1)$. Kết luận nào **sai**?

- A. Góc của $\vec{m}$ và $\vec{n}$ là 30° . B. $[\vec{m}, \vec{n}] = (1; -1; 1)$.
C. $\vec{m} \cdot \vec{n} = -1$. D. $\vec{m}$ và $\vec{n}$ không cùng phương.

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3)$, $C(1; 3; -1)$. Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 0\right)$. B. $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 0\right)$. C. $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$. D. $\left(\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; 0\right)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z - 2 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) là

- A. $I(-3; 2; -1)$ và $R = 4$. B. $I(-3; 2; -1)$ và $R = 16$. C. $I(3; -2; 1)$ và $R = 4$. D. $I(3; -2; 1)$ và $R = 16$.

Câu 32. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$ tại điểm $M(7; -1; 5)$ có phương trình là

- A. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$. B. $6x + 2y + 3z + 55 = 0$. C. $3x + y + z - 22 = 0$. D. $3x + y + z + 22 = 0$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(3; -2; 1)$, $B(-4; 0; 3)$, $C(1; 4; -3)$, $D(2; 3; 5)$. Phương trình mặt phẳng chứa AC và song song với BD là

- A. $12x - 10y + 21z - 35 = 0$. B. $12x + 10y - 21z + 35 = 0$.
C. $12x + 10y + 21z + 35 = 0$. D. $12x - 10y - 21z - 35 = 0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 0)$ và mặt phẳng (α) : $x + 2y - 2z + 1 = 0$. Khoảng cách từ M đến (α) là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song (P) : $x - 2y + 2z + 6 = 0$ và (Q) : $x - 2y + 2z - 10 = 0$ có tâm I trên trục Oy là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - \frac{55}{9} = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 60 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 55 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - \frac{55}{9} = 0$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 11 = 0$ và mặt phẳng (P) : $x - 2y + 2z + 1 = 0$. Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Tính chu vi đường tròn (C) .

- A. 10π . B. 4π . C. 6π . D. 8π .

Câu 37. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng (α) : $3x + 2y - z + 1 = 0$ và (α') : $3x + y + 11z - 1 = 0$ là

- A. Vuông góc với nhau. B. Trùng nhau.
C. Cắt nhau nhưng không vuông góc với nhau. D. Song song với nhau.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua $M(0; 2; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{d} = (4; -3; 1)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -4t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$.

Câu 39. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3; 2; 1)$ và song song với đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}$ là

- A. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng d : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

- A. Δ : $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3}$. B. Δ : $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.
C. Δ : $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$. D. Δ : $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (2.0 điểm)

Câu 41. Tính tích phân $\int_0^1 (2x + 1)^5 dx$.

Câu 42. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính môđun của số phức

$$z = (2 - 4i)(5 + 2i) + \frac{4 - 5i}{2 + i}.$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; -3; 4)$, $B(-2; -5; -7)$, $C(6; -3; -1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC .

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề có 05 trang)

KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA NĂM 2019
Bài thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Mã đề 101

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_1 = (2; -1; -3)$. B. $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$. C. $\vec{n}_3 = (2; 3; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (2; 1; 3)$.

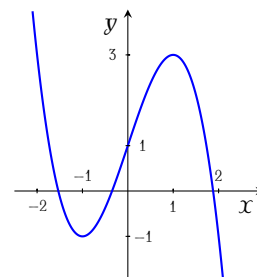
Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. 4. B. 10. C. -6. D. 6.

Câu 3.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_1 = (2; -5; 3)$. B. $\vec{u}_1 = (2; 5; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (1; 3; -2)$. D. $\vec{u}_2 = (1; 3; 2)$.

Câu 5. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

- A. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. B. $\pi r^2 h$. C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. D. $2\pi r^2 h$.

Câu 6. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

- A. $3\log_5 a$. B. $\frac{1}{3} + \log_5 a$. C. $3 + \log_5 a$. D. $\frac{1}{3}\log_5 a$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						
			-2		2		$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 1$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Câu 8. Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là

- A. $-5 + 3i$. B. $5 + 3i$. C. $-3 + 5i$. D. $-5 - 3i$.

Câu 9. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- A. $2x^2 + 6x + C$. B. $x^2 + 6x + C$. C. $2x^2 + C$. D. $x^2 + C$.

Câu 10. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

- A. -7. B. 7. C. -1. D. 1.

Câu 11. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 5$. C. $x = 4$. D. $x = 2$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(3; 0; 0)$. B. $(3; -1; 0)$. C. $(0; -1; 0)$. D. $(0; 0; 1)$.

Câu 13. Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

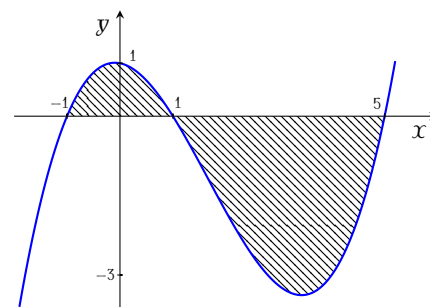
- A. C_5^2 . B. 5^2 . C. A_5^2 . D. 2^5 .

Câu 14. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

- A. $3Bh$. B. $\frac{1}{3}Bh$. C. $\frac{4}{3}Bh$. D. Bh .

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

- D.** $(-2; 0)$.



x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	-1	$+\infty$

- D. 3.

D. $2x - y + z + 2 = 0$.

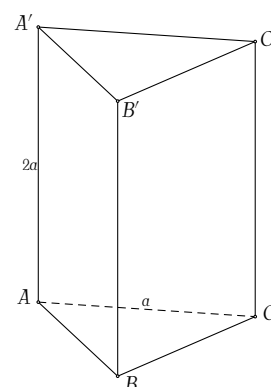
- D. 1.9 m.

- D. 9.

- D. 18.

- D. 5.

D. $\sqrt{3}a^3$.



- D. 60° .

Câu 25. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1)$ là

- A. $x = -2$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Câu 26. Cho hai số phức $z_1 = -2 + i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

- A. $(-3; 2)$. B. $(2; -3)$. C. $(-3; 3)$. D. $(3; -3)$.

Câu 27. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên $[-3; 3]$ bằng

- A. 4. B. 0. C. 20. D. -16.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$ 0 $+$	
y	$0 \searrow$		$2 \searrow$	$+\infty \nearrow$
	$-\infty$		-2	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x - 2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 30. Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x - 3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$. B. $3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$. C. $(x^2 - 3x) \cdot 3^{x^2-3x-1}$. D. $(2x - 3) \cdot 3^{x^2-3x}$.

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} - i) - (2 + 3i)z = 7 - 16i$. Môđun của số phức z bằng

- A. 5. B. 3. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 32. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- A. $3 \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C.$
 B. $3 \ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + C.$
 C. $3 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C.$
 D. $3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C.$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{\pi^2 + 2}{8}$. B. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$. C. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$. D. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(3; 2; 0)$ và $D(1; 1; 3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(5; +\infty)$. B. $(2; 3)$. C. $(0; 2)$. D. $(3; 5)$.

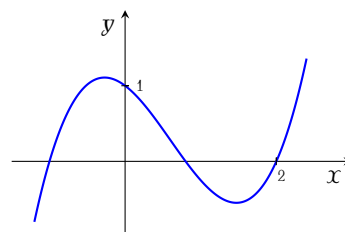
Câu 36. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. Vô số. B. 5. C. 7. D. 6.

Câu 37.

Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq f'(0)$. B. $m < f'(2) - 2$. C. $m < f'(0)$. D. $m \leq f'(2) - 2$.



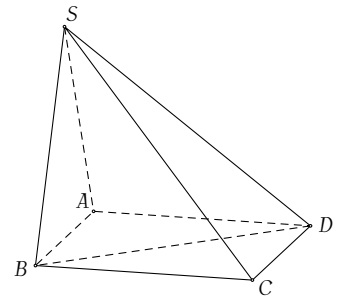
Câu 38. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

- A. $\frac{13}{27}$. B. $\frac{365}{729}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{14}{27}$.

Câu 39.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. B. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.



Câu 40. Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

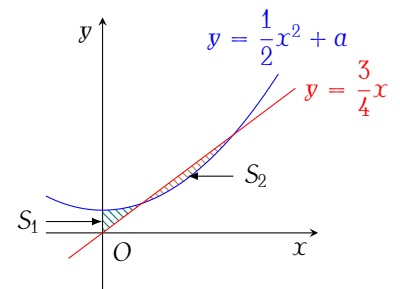
- A. $8\sqrt{2}\pi$. B. $24\sqrt{2}\pi$. C. $16\sqrt{2}\pi$. D. $12\sqrt{2}\pi$.

Câu 41.

Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi

S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$. B. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$. C. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.



Câu 42. Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{3 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 12. B. $2\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 20.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 4; -3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $P(-3; 0; -3)$. B. $M(0; -3; -5)$. C. $Q(0; 11; -3)$. D. $N(0; 3; -5)$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 xf(5x)dx = 1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

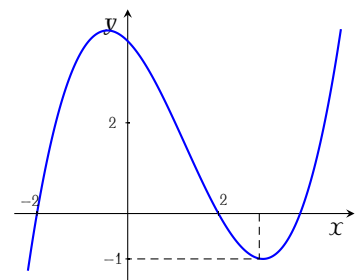
- A. -25. B. 15. C. $\frac{123}{5}$. D. 23.

Câu 45.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương

trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$ là

- A. 3. B. 12. C. 6. D. 10.



Câu 46. Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4}$ và $y = |x+1| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

- A. $[3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3]$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 47. Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực) có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt?

- A. 80. B. 81. C. 79. D. Vô số.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

- A. 12. B. 4. C. 16. D. 8.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 7. B. 5. C. 3. D. 9.

Câu 50. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

- A. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. C. $16\sqrt{3}$. D. $12\sqrt{3}$.