Nhóm "TikzPro – Vẽ hình và LaTeX"

NẮM TRỌN

Chuyên đề ★★★

VD - VDC

HÀM SỐ

$y = a(x+7)(x+2)(x-3)$

(Dùng cho học sinh lớp 12 và luyện thi Đại học năm 2021

Trình bày đầy đủ, chi tiết và khoa học
Có 100% lời giải chi tiết
Tuyển chọn đầy đủ các dạng toán hay và khó

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

1 Cơ bản về tính đơn điệu hàm số 1
A Lý thuyết 1
1 Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng $\mathcal{K}$ 1
2 Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu 2
B Ví dụ 2
Đề VDC số 1. Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số 7
Đề VDC số 2. Tính đơn điệu của hàm hợp 28
Đề VDC số 3. Tính đơn điệu của hàm số hợp 53
Đề VDC số 4. Tính đơn điệu của hàm giá trị tuyệt đối 83
2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 115
A Lý thuyết 115
1 Định nghĩa 116
2 Quy tắc tìm cực trị 116
B Ví dụ 117
Đề VDC số 5. Cơ bản về cực trị của hàm số 122
3 Cực Trị Hàm Tổng Và Hàm Hợp 133
Đề VDC số 7. Bài toán truy tìm hàm ngược 172
4 Cực trị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối 185
A Một số kiến thức cần nắm 185
1 Cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ 185
2 Cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ 185
B Ví dụ mẫu 186
C Bài tập rèn luyện 186
Đề VDC số 1. Cực trị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối 206
5 Cực trị tại một điểm cho trước 217
A Lý thuyết 217
B Câu hỏi trắc nghiệm 218
Đề VDC số 1. Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước 229
3 Giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số 252
A Lý thuyết 252
1 Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất 252
B Ví dụ minh họa 253
Đề VDC số 1. Cơ bản về GTLN-GTNN của hàm số 258
3 Giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số 266
Đề VDC số 13. Min, max của hàm đa thức và BPT 267
Đề VDC số 14. Min, max của hàm hợp 281
Đề VDC số 15. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối 308
Đề VDC số 16. ỨNG DỤNG CỦA GTLN-GTNN 334
4 Tiệm cận của đồ thị hàm số 358
A Lý thuyết 358
1 Đường tiệm cận ngang 358
2 Đường tiệm cận đứng 358
3 Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số 359
4 Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số 359

5 Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận ... *359*
B Ví dụ minh họa ... 359
Đề VDC số 17. Cơ bản về tiệm cận của đồ thị hàm số ... 362
Đề VDC số 18. Bài tập tiệm cận của đồ thị hàm số ... 378
5 Đọc và biến đổi đồ thị ... 393
A Lý thuyết ... 393
1 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ ... *394*
2 Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ ... *394*
3 Hàm số bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$ ... *395*
4 Các phép biến đổi đồ thị ... *396*
B Bài tập rèn luyện ... 397
6 Tương giao của đồ thị hàm số ... 410
A Lý thuyết ... 410
1 Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số ... *410*
2 Tương giao của đồ thị hàm bậc 3 ... *410*
3 Tương giao của hàm số phân thức ... *411*
4 Tương giao của hàm số bậc 4 ... *412*
B Ví dụ minh họa ... 412
Đề VDC số 1. Bài toán tương giao đồ thị hàm số ... 417
Đề VDC số 2. Bài toán tương giao đồ thị hàm số ... 436
7 Tiếp tuyến - sự tiếp xúc của hai đồ thị ... 447
A Lý thuyết ... 447
1 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$ ... *447*
2 Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước ... *447*
3 Điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị ... *447*
B Ví dụ minh họa ... 447
Đề VDC số 1. Bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc ... 453
8 Toàn tập về phương pháp ghép trục ... 478
A Lý thuyết ... 478
1 Cơ sở của phương pháp ghép trục giải quyết bài toán hàm hợp $g = f\left(u(x)\right)$ ... *478*
2 Một số chú ý quan trọng khi sử dụng phương pháp ghép trục để giải quyết các bài toán về hàm hợp ... *479*
3 Ví dụ minh họa ... *480*
B Bài tập rèn luyện ... 482
Đề VDC số 1. Toàn tập về ghép trục ... 491

CHỦ ĐỀ 1. CƠ BẢN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

1. Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng $\mathcal{K}$

Định nghĩa 1.

Giả sử $\mathcal{K}$ là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y=f(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{K}$, ta nói

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên $\mathcal{K}$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên $\mathcal{K}$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathcal{K}$ gọi chung là **đơn điệu** trên $\mathcal{K}$.

Nhận xét.

- **Nhận xét 1**
  Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{D}$ thì hàm số $f(x)+g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{D}$. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x)-g(x)$.
- **Nhận xét 2**
  Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{D}$ thì hàm số $f(x)\cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{D}$. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên $\mathscr{D}$.
- **Nhận xét 3**
  Cho hàm số $u=u(x)$, xác định với $x\in(a;b)$ và $u(x)\in(c;d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x\in(a;b)$. Ta có nhận xét sau
  - Giả sử $u=u(x)$ đồng biến với $x\in(a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x\in(a;b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u\in(c;d)$.
  - Giả sử $u=u(x)$ nghịch biến với $x\in(a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x\in(a;b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u\in(c;d)$.

Định lí 1.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathcal{K}$. Khi đó

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng $\mathcal{K}$ thì $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathcal{K}$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng $\mathcal{K}$ thì $f'(x)\leq 0, \forall x\in\mathcal{K}$.

Định lí 2.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathcal{K}$. Khi đó

- Nếu $f'(x)>0, \forall x\in\mathcal{K}$ thì hàm số f đồng biến trên $\mathcal{K}$.
- Nếu $f'(x)<0, \forall x\in\mathcal{K}$ thì hàm số f nghịch biến trên $\mathcal{K}$.
- Nếu $f'(x)=0, \forall x\in\mathcal{K}$ thì hàm số f không đổi trên $\mathcal{K}$.

2. Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Định lí 3.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathcal{K}$. Khi đó

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc $\mathcal{K}$ thì hàm số f đồng biến trên $\mathcal{K}$.
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc $\mathcal{K}$ thì hàm số f nghịch biến trên $\mathcal{K}$.

- **Bài toán 1.** Tìm tham số m để hàm số $y = f(x; m)$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$.
  - **Bước 1:** Ghi điều kiện để $y = f(x; m)$ đơn điệu trên $(\alpha; \beta)$. Chẳng hạn
    - Để yêu cầu $y = f(x; m)$ đồng biến trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \geq 0$.
    - Để yêu cầu $y = f(x; m)$ nghịch biến trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \leq 0$.
  - **Bước 2:** Độc lập m ra khỏi biến số và đặt vế còn lại là $g(x)$, có hai trường hợp thường gặp
    - $m \geq g(x), \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \geq \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.
    - $m \leq g(x), \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \leq \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.
  - **Bước 3:** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên $(\alpha; \beta)$ (hoặc sử dụng Cauchy) để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Từ đó suy ra m.
- **Bài toán 2.** Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$.
  - Tìm tập xác định, chẳng hạn $x \neq -\dfrac{d}{c}$. Tính đạo hàm y'.
  - Hàm số đồng biến $\Rightarrow y' > 0$ (hàm số nghịch biến $\Rightarrow y' < 0$). Giải ra tìm được m (1).
  - Vì $x \neq -\dfrac{d}{c}$ và có $x \in (\alpha; \beta)$ nên $-\dfrac{d}{c} \notin (\alpha; \beta)$. Giải ra tìm được m (2).
  - Lấy giao của (1) và (2) được các giá trị m cần tìm.
- **Ghi nhớ** Nếu hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên miền $\mathscr{D}$ (*luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến*) thì phương trình $f(t) = 0$ có tối đa một nghiệm và $\forall u, v \in \mathscr{D}$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

B VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(3; +\infty)$. (B) $(-3; 0)$. (C) $(-\infty; -3)$. (D) $(-2; 2)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \left[f\left(x^2\right)\right]' = \left(x^2\right)' x^4 \left(x^2 - 9\right) \left(x^2 - 4\right)^2 = 2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2.$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = -2$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 3$.

Ta có bảng xét dấu của y'

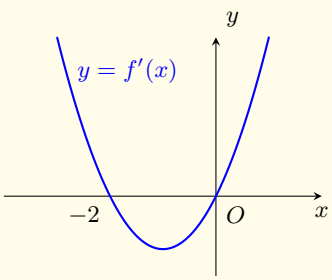
x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y = f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 2.
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây

(A) $(-1;0)$. (B) $(0;1)$. (C) $(-\infty;0)$. (D) $(0;+\infty)$.



Lời giải.
Ta có $y'=2x\cdot f'\left(x^2-1\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow 2x\cdot f'\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x^2-1=-2\\x^2-1=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x^2=-1\\x^2=1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x=0\\x^2=1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=-1\\x=1.\end{bmatrix}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Nhìn bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)\left(x^2+mx+5\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f\left(x^2+x-2\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.
Ta có $g'(x)=(2x+1)\cdot f'\left(x^2+x-2\right)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$
$\Leftrightarrow g'(x)\geq 0\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'\left(x^2+x-2\right)\geq 0\ \forall x\in(1;+\infty)$
$\Leftrightarrow\left(x^2+x-2\right)^2\left(x^2+x\right)\left(\left(x^2+x-2\right)^2+m\left(x^2+x-2\right)+5\right)\geq 0\ \forall x\in(1;+\infty)$
$\Leftrightarrow\left(x^2+x-2\right)^2+m\left(x^2+x-2\right)+5\geq 0\quad(1)\ \forall x\in(1;+\infty)$.
Đặt $t=x^2+x-2$, $x\in(1;+\infty)\Rightarrow t>0$.
Khi đó (1) trở thành $t^2+mt+5\geq 0\ \forall t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow t+\dfrac{5}{t}\geq -m\quad(2)\ \forall t\in(0;+\infty)$.
Để (1) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $t\in(0;+\infty)$.
Ta có $h(t)=t+\dfrac{5}{t}\geq 2\sqrt{5}$ với $\forall t\in(0;+\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{5}{t}\Leftrightarrow t=\sqrt{5}$.
Suy ra $\min\limits_{t\in(0;+\infty)}h(t)=2\sqrt{5}\Rightarrow$ (2) nghiệm đúng $\forall t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\leq 2\sqrt{5}\Leftrightarrow m\geq -2\sqrt{5}$.
Vậy số giá trị nguyên âm của m là 4.
Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

(A) $m \geq f(0)-2$. (B) $m > f(-1)-e$. (C) $m > f(0)-1$. (D) $m \geq f(-1)-e$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < e^{x^2}, \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m > g(x) = f(x) - e^{x^2}, \forall x \in (-1;1)$. (1)

Ta có $g'(x) = g'(x) - 2x \cdot e^{x^2}$ có nghiệm $x = 0 \in (-1;1)$ và $\begin{cases} g'(x) > 0, \forall x \in (-1;0) \\ g'(x) < 0, \forall x \in (0;1). \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)-1$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó $\max\limits_{(-1;1)} g(x) = g(0) = f(0) - 1$.

Ta được (1) $\Leftrightarrow m > f(0) - 1$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2;2)$ khi và chỉ khi

(A) $m \geq f(-2) - 3$. (B) $m > f(2) - 3e^4$. (C) $m \geq f(2) - 3e^4$. (D) $m > f(-2) - 3$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < 3e^{x+2} + m \Leftrightarrow f(x) - 3e^{x+2} < m$.

Đặt $h(x) = f(x) - 3e^{x+2} \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2}$.

Vì $\forall x \in (-2;2)$, $f'(x) \leq 3$ và $x \in (-2;2) \Rightarrow x + 2 \in (0;4) \Rightarrow 3e^{x+2} \in (3;3e^4)$.

Nên $h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2} < 0, \forall x \in (-2;2) \Rightarrow f(2) - 3e^4 < h(x) < f(-2) - 3$.

Vậy bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2;2)$ khi và chỉ khi $m > f(2) - 3e^4$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 6. Tổng các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2020;2020)$ để hàm số $y = \dfrac{\sin x - 3}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(A) -2039187. (B) 2022. (C) 2093193. (D) 2021.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\sin x \neq m$.

Ta có $y = \dfrac{\sin x - 3}{\sin x - m} \Rightarrow y' = \dfrac{\cos x(\sin x - m) - (\sin x - 3)\cos x}{(\sin x - m)^2} = \dfrac{\cos x(3 - m)}{(\sin x - m)^2}$.

Vì $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $\cos x > 0$; $\sin x \in \left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

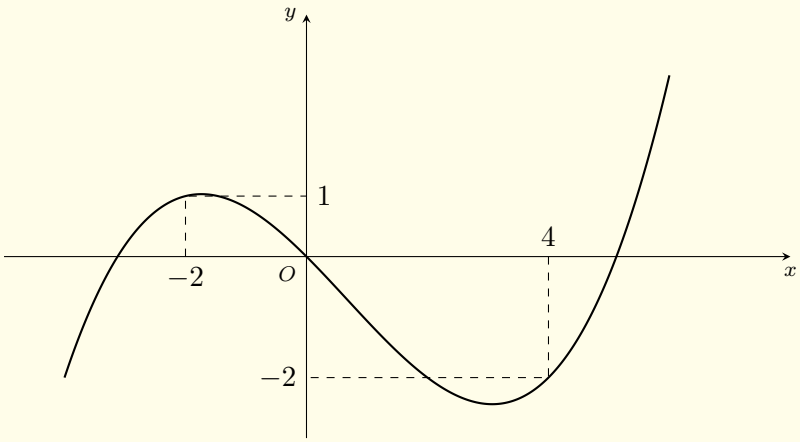
Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le m<3. \end{array}\right.$

Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2019;-2018;\ldots;-1;0\}\cup\{1;2\}$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là $S=\dfrac{-2019+0}{2}\cdot 2020+1+2=-2039187$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. B $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. C $(-2;-1)$. D $(2;3)$.

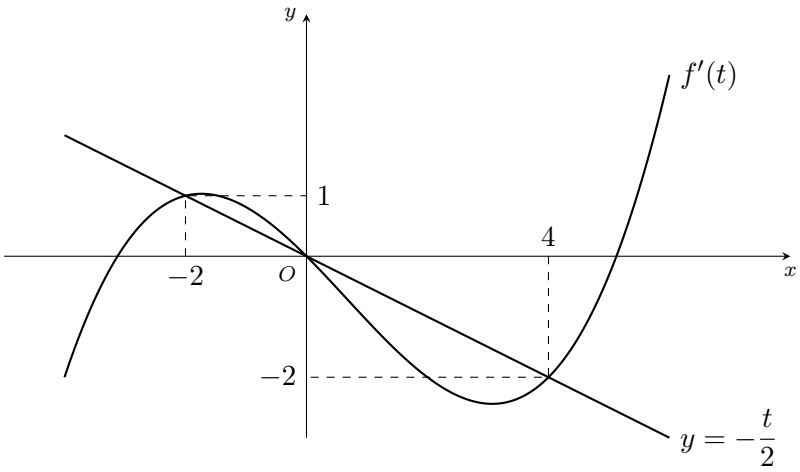
Lời giải.

Cách 1.

Ta có $g(x)=f(1-2x)+x^2-x \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(1-2x)>-\dfrac{1-2x}{2}$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-\dfrac{t}{2}$.



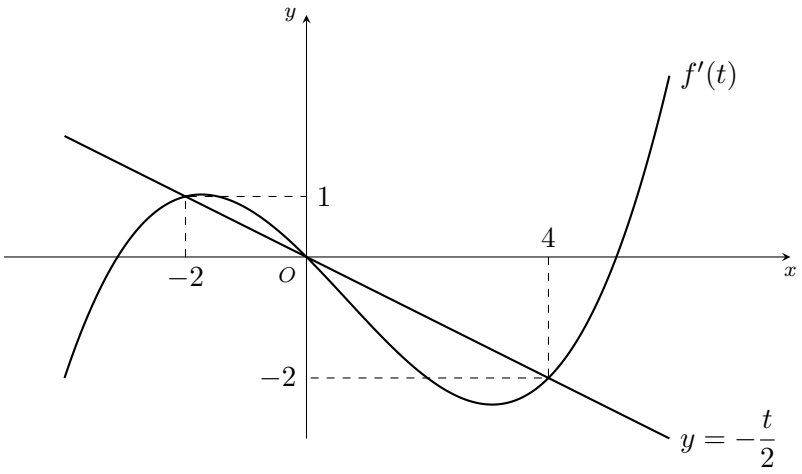
Dựa vào đồ thị ta có $f'(t)>-\dfrac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2<t<0 \\ t>4. \end{array}\right.$

Khi đó $g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<1-2x<0 \\ 1-2x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \\ x<-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Cách 2.

Ta có $g(x)=f(1-2x)+x^2-x \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$.

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(1-2x)=-\dfrac{1-2x}{2}$.



Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-\dfrac{t}{2}$.

Từ đồ thị ta có $f'(t)=-\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow \hoac{t=-2\\t=0\\t=4.}$

Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \hoac{1-2x=-2\\1-2x=0\\1-2x=4} \Leftrightarrow \hoac{x=\dfrac{3}{2}\\x=\dfrac{1}{2}\\x=-\dfrac{3}{2}.}$

Ta có bảng xét dấu

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

ĐỀ VDC SỐ 1: CƠ BẢN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Hàm số nào dưới đây luôn đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^2 + 2x + 1$. (B) $y = x - \sin x$. (C) $y = \dfrac{3x+2}{5x+7}$. (D) $y = x^3 - 3x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x - \sin x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Đạo hàm $y' = 1 - \cos x \geq 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số $y = x - \sin x$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$ nghịch biến trên khoảng nào?

(A) $(2;3)$. (B) $(1;6)$. (C) $(-6;-1)$. (D) $(-3;-2)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = x^2 - 5x + 6$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = \dfrac{14}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y = \dfrac{9}{2}. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{14}{3}$	↘	$\dfrac{9}{2}$	↗	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên $(2;3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$ là **đúng**?

(A) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
(C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

⋆ Đạo hàm $y' = \dfrac{-5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3
		$-\infty$	$\|\|$		

⋆ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y'=3x^2-6x$.

⋆ $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=2 \Rightarrow y=-2. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$?

(A) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. (B) $y=\dfrac{1}{x-2}$. (C) $y=\dfrac{2x-5}{x-2}$. (D) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x-2}$.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

⋆ Đạo hàm $y'=\dfrac{1}{(x-2)^2}>0, \forall x\in\mathscr{D}$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\|\|$ $+\infty$	$\nearrow$	2
			$\|\|$ $-\infty$		

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+1$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.
B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
C Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y'=3x^2-12x+9$.

⋆ $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=5 \\ x=3 \Rightarrow y=-1. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên $(1;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+\dfrac{3}{4}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$.
B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$.
D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y'=x^2-x-6$.

⋆ $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=\dfrac{97}{12} \\ x=3 \Rightarrow y=-\dfrac{51}{4}. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{97}{12}$	↘	$-\dfrac{51}{4}$	↗	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên $(-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

⋆ Đạo hàm $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

⋆ $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Hàm số $y=2x^4+3$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. (B) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $(-\infty;0)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y'=8x^3$.

⋆ $y'=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=3$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y=-\dfrac{1}{1+x^2}$. (B) $y=-x^3-3x$. (C) $y=-x^3+2x^2-7x$. (D) $y=-4x+\cos x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 + 1 > 0$,$\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong các hàm số sau, hàm số nào vừa có khoảng đồng biến, vừa có khoảng nghịch biến trên tập xác định của nó. (I): $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$, (II): $y = -x^4 + x^2 - 2$ và (III): $y = x^3 + 3x - 4$.

(A) (I); (III). (B) (I); (II). (C) (II); (III). (D) (II).

Lời giải.

☑ Xét hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Đạo hàm $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$, $\forall x \in \mathscr{D}$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

☑ Xét hàm số $y = x^3 + 3x - 4$.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Đạo hàm $y' = 3x^2 + 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

☑ Xét hàm số $y = -x^4 + x^2 - 2$.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = -4x^3 + 2x$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{7}{4}. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{7}{4}$	↘	-2	↗	$-\frac{7}{4}$	↘	$-\infty$

⋆ Hàm số nghịch biến trên $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

⋆ Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+x^2-x+1$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y'=-x^2+2x-1$.

⋆ $y'=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\frac{2}{3}$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

⋆ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

⋆ Đạo hàm $y'=\frac{2}{(-x+1)^2}>0,\forall x\in\mathscr{D}$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ -1	

$\star$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho các hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$; $y=\tan x$; $y=x^3+x^2+4x-2022$. Số hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A) 0. B) 3. C) 1. D) 2.

Lời giải.

☑ Xét hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
Do đó hàm số không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

☑ Xét hàm số $y=\tan x$.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Do đó hàm số không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

☑ Xét hàm số $y=x^3+x^2+4x-2022$.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Đạo hàm $y'=3x^2+2x+4$.
Cho $y'=0$ phương trình vô nghiệm.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	$+$	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^2-(m+6)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

A) $-2\le m\le 0$. B) $-2\le m<0$. C) $m\le -2$. D) $m\ge -2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Đạo hàm $y'=2mx-m-6$.

☑ Với $m=0$, ta có $y=-6<0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng sẽ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

☑ Với $m\neq 0$, ta có $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m+6}{2m}$.
Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \dfrac{m+6}{2m}\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m\ge -2.\end{cases}$$

Vậy $-2 \leq m \leq 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{-x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
B Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

⋆ Đạo hàm $y' = \dfrac{3}{(-x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-2

⋆ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A $(-2; 0)$. B $(0; 2)$. C $(2; +\infty)$. D $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2f'(x) = -2x^2 + 4x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bẳng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$y(0)$	↗	$y(2)$	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$. Chọn khẳng định **đúng**.

A Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.
B Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.
D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = x^3 - 4x$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = \pm 2 \Rightarrow y = -5. \end{bmatrix}$

⋆ Giới hạn $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

⋆ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

(B) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 1$.

(C) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

(D) $y = x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 1$.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = x^2 - x + 3$.

⋆ $y' = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(1;+\infty)$?

(A) $y = x^3 + 3x$.

(B) $y = \dfrac{x-1}{x^2+2}$.

(C) $y = -x^3 - x + 1$.

(D) $y = \dfrac{x-3}{x-2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + 3x$.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = 3x^2 + 3$.

⋆ $y' = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 1$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây?

A $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$. B $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$; $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

C $\left(-\sqrt{2}; 0\right)$; $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$. D $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = -4x^3 + 8x$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = 5. \end{array}\right.$

⋆ Giới hạn $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

⋆ Hàm số nghịch biến trên $\left(-\sqrt{2}; 0\right)$ và $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

⋆ Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ và $\left(0; \sqrt{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Hàm số $y = x^3 - 3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-1; 1)$. B $(-\infty; 1)$. C $(0; 2)$. D $(2; +\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = -4. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

(A) $y = -x^3 + 3x^2$. (B) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$. (C) $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$. (D) $y = \dfrac{x}{x - 1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -x^3 + 3x^2$.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = -3x^2 + 6x$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4. \end{array}\right.$

⋆ Giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

⋆ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, đồng biến trên $(0; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$

(A) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. (B) $y = \dfrac{x + 1}{x + 2}$.

(C) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$. (D) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = x^2 - 4x + 3$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{7}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y = 1. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên $(1; 3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+5}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

B Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

C Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

⋆ Đạo hàm $y' = \dfrac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↘	‖	↘	$+\infty$
		$-\infty$	‖		2

⋆ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A $\mathbb{R}$. B $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. C $(-1; 0)$. D $(1; +\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x$.

⋆ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

⋆ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y=\dfrac{x}{x+1}$. B $y=x+1$. C $y=x^4+1$. D $y=x^2+1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x+1$.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Đạo hàm $y'=1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án B □

Câu 29. Hàm số $y=x^4-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. B $(-\infty;0)$. C $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. D $(0;+\infty)$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

⋆ Đạo hàm $y'=4x^3$.

⋆ $y'=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=-2$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

⋆ Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x+1}{-x+1}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

A $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.
C $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.
D $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

⋆ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

⋆ Đạo hàm $y' = \dfrac{4}{(-x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	-3

⋆ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-\infty;1] \cup [5;+\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} > 0, \forall x \in (5;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ nghịch biến trên

A $(-1;0);(1;+\infty)$. B $(-1;1)$. C $\mathbb{R}$. D $(-\infty;-1);(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0);(1;+\infty)$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?
A $y=x^3+3x+1$. B $y=x^3-3x+1$. C $y=x^2+1$. D $y=-x\sqrt{2}+1$.

Lời giải.
Hàm số $y=-x\sqrt{2}+1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y=x^3-3x+1$ có $y'=x^2-3$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y=x^2+1$ có $y'=2x$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y=x^3+3x+1$ có $y'=3x^2+3\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.
Chọn đáp án A □

Câu 35. Hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng
A $(-1;+\infty)$. B $(1;+\infty)$. C $(-\infty;1);(1;+\infty)$. D $(3;+\infty)$.

Lời giải.
TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}\cdot y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0,\forall x\in\mathscr{D}$.
Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1);(1;+\infty)$.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
A Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
B Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.
D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
Ta có $y'=\dfrac{-6}{(x-3)^2}<0,\forall x\in\mathscr{D}$.
Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.
Chọn đáp án D □

Câu 37. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y=\sqrt{9-x^2}$.
A $(0;+\infty)$. B $(-\infty;0)$. C $(-3;0)$. D $(0;3)$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=[-3;3]$.
Ta có $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}<0,\ \forall x\in(0;3)$, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $(-3;0)$.
Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?
A $y=x^4+2x^2+5$. B $y=-2x^3-3x+5$. C $y=-x^4-x^2$. D $y=\dfrac{x+1}{-x+3}$.

Lời giải.
Hàm trùng phương không nghịch biến trên tập xác định của nó.
Với $y=\dfrac{x+1}{-x+3}$ ta có $y'=\dfrac{4}{(-x+3)^2}>0,\forall x\neq 3$.
Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
Với $y=-2x^3-3x+5$ ta có $y'=-6x^2-3<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^4 + 2x^2 + 3$. B $y = \dfrac{x-1}{x+3}$. C $y = -x^3 - x - 2$. D $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$.
Ta có $y' = 3x^2 + 2x + 2 > 0 \quad \forall x \in R$, nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. B $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

C $y = x^4 + 2x^2 + 1$. D $y = -\dfrac{x^3}{3} + 3x + 2$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại $x = 1$.
Vậy $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(3; +\infty)$. B $(-3; 0)$. C $(-\infty; -3)$. D $(-2; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2\right)\right]' = \left(x^2\right)' x^4 \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 4\right)^2 = 2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$.
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = -2$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 3$.
Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

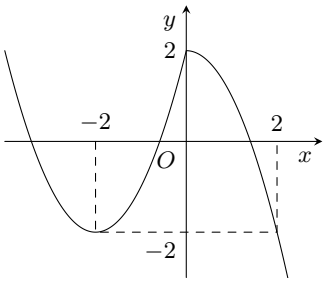
Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y = f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 42.

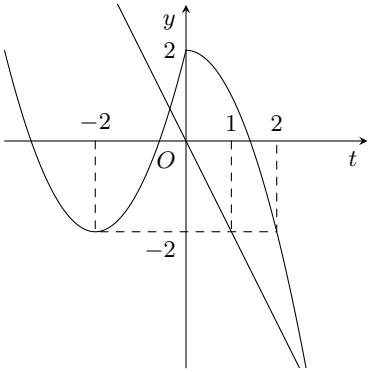
Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng

A $(1; 2)$. B $(-1; 0)$. C $(0; 1)$. D $(-2; -1)$.



Lời giải.

Ta có $y = f(x-1) + x^2 - 2x$.
Khi đó $y' = f'(x-1) + 2x - 2$.
Hàm số đồng biến khi $y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) + 2(x-1) \geq 0 (1)$.
Đặt $t = x - 1$ thì (1) trở thành: $f'(t) + 2t \geq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq -2t$.
Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó ta thấy với $t \in (0;1)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(t)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -2t$.
Suy ra $f'(t) + 2t > 0, \forall t \in (0;1)$. Do đó $\forall x \in (1;2)$ thì hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến.
Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} - 3$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A $(-2;-1)$. B $(-1;1)$. C $(1;2)$. D $(2;3)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\left[f'\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) + 1\right]$.
Vì $f'(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ nên $f'(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f'(x) + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
$f'(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x = 1$.
Do đó $f'\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) + 1 + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Và $f'\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) = -1 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-2;-1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)\left(x^2 - 6x + m\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A 2012. B 2011. C 2009. D 2010.

Lời giải.

Ta có

$$g'(x) = f'(1-x) \cdot (1-x)' = -(1-x)^2(-x-1)\left(x^2 + 4x - 5 + m\right) = (1-x)^2(x+1)\left(x^2 + 4x - 5 + m\right).$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $g'(x) \leq 0$, bằng không tại một số điểm hữu hạn với mọi $x \in (-\infty;-1)$.
Do $(1-x)^2(x+1) < 0$ với mọi $x \in (-\infty;-1)$, nên $g'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (-\infty;-1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 + m \geq 0$ với mọi $x \in (-\infty;-1) \Leftrightarrow m \geq -x^2 - 4x + 5$ với mọi $x \in (-\infty;-1)$.
Xét hàm số $h(x) = -x^2 - 4x + 5$ trên $(-\infty;-1)$.
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	9	↘	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$, kết hợp với điều kiện m nguyên và thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ suy ra có 2011 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(-\infty; -2)$. B $(-2; 1)$. C $(0; 2)$. D $(2; 4)$.

Lời giải.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2) \Leftrightarrow \hoac{x = 0 \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 2.}$

Ta có $g'(x) = \dfrac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2} f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2} \cdot f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right) = 0$

Dựa và $f'(x)$ ta có: $\hoac{\dfrac{-5x^2+20}{x^2+4} = 0 \\ \dfrac{5x}{x^2+4} = 1 \\ \dfrac{5x}{x^2+4} = 2} \Leftrightarrow \hoac{x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 4 \text{ (nghiệm kép)}.}$

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{2}$		-1		$\dfrac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x-1}{2}\right) - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + 3$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1; 0)$. B Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
C Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4; -1)$. D Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)-\left(x^2-3x+2\right)$.

$$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}=-\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{x-1}{2}=-1\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{x-1}{2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=-1\\ x=2\\ x=7\end{array}\right.;$$

$$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}<-\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{1}{2}<\dfrac{x-1}{2}<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\ 2<x<7.\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu cho các biểu thức

x	$-\infty$		-4		-1		0		1		2		7		$+\infty$
$f'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$-(x^2-3x+2)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$				$-$		$-$		$-$						$-$	

Từ bảng xét dấu đáp án "Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$" sai, vì $x\in(0;1)\subset(0;2)$ thì $g'(x)<0$. Hàm số nghịch biến.
Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+\left(m^2+2m\right)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

(A) $S=[-1;0]$. (B) $S=\varnothing$. (C) $S=\{-1\}$. (D) $S=\{1\}$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-2(m+1)x+\left(m^2+2m\right)$.
Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì

$$y\le 0,\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+\left(m^2+2m\right)\le 0,\forall x\in(-1;1).$$

Ta có $y'=0\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+\left(m^2+2m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x=m+2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì

$$\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m+2\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge -1\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Tổng tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-\left(m^2-m-20\right)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng

(A) $\frac{5}{2}$. (B) -2. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-\left(m^2-m-20\right)x+1\Rightarrow y'=m^2x^4-mx^2+20x-m^2+m+20\geq 0$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=m^2x^4-mx^2+20x-m^2+m+20\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và dấu "=" xảy ra chỉ tại một số hữu hạn điểm.

Điều kiện cần:

Ta thấy phương trình $y'=0$ có một nghiệm $x=-1$ nên để $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì y' không đổi dấu khi qua $x=-1$, khi đó phương trình $y'=0$ có nghiệm kép là $x=-1$($x=-1$ không thể là nghiệm bội 4 của phương trình $y'=0$ vì y' không chứa số hạng x^3).

Ta suy ra được $y''(-1)=0\Leftrightarrow -4m^2+2m+20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=\frac{5}{2}.\end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

Với $m=-2$, ta có $y'=4x^4+2x^2+20x+14=4(x+1)^2\left[(x-1)^2+\frac{5}{2}\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $m=-2$ thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Với $m=\frac{5}{2}$, ta có $y'=\frac{25}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+20x+\frac{65}{4}=\frac{25}{4}(x+1)^2\left[(x-1)^2+\frac{8}{5}\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m=\frac{5}{2}$ thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Vậy $m=-2, m=\frac{5}{2}$ là các giá trị cần tìm. Khi đó tổng các giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$. Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;1)$. (B) $(-1;0)$. (C) $(-2;-1)$. (D) $(-2;0)$.

Lời giải.

Xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $y'=\left(f\left(x^2\right)\right)'=2xf'\left(x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=2\\ x^2=-5\\ x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Chọn $x=1\in(0;\sqrt{2})$ ta có $y'(1)=2\cdot 1\cdot f'\left(1^2\right)=2\cdot f'(1)<0$. Do đó, cả khoảng $(0;\sqrt{2})$ âm.

Từ đó ta có trục xét dấu của $y'=\left(f\left(x^2\right)\right)'$ như sau:

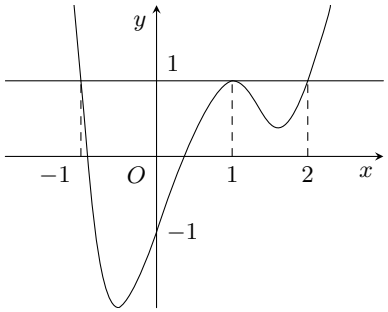
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$(f(x^2))'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên ta thấy hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $g(1) < g(-1) < g(2)$. (B) $g(-1) < g(1) < g(2)$.

(C) $g(2) < g(1) < g(-1)$. (D) $g(2) < g(-1) < g(1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x, \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1, g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↘	$g(2)$	↗	$+\infty$

Vậy $g(2) < g(1) < g(-1)$.

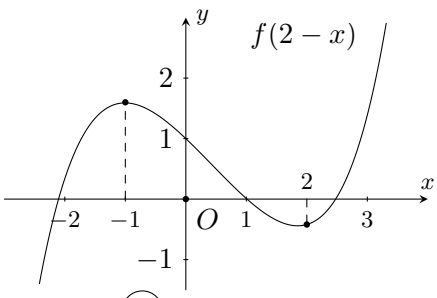
Chọn đáp án (C) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. C	5. C	6. A	7. A	8. A	9. C	10. A
11. C	12. D	13. A	14. A	15. C	16. A	17. C	18. B	19. C	20. B
21. A	22. C	23. C	24. A	25. A	26. D	27. B	28. B	29. B	30. B
31. D	32. A	33. A	34. A	35. C	36. D	37. C	38. B	39. D	40. A
41. C	42. A	43. A	44. B	45. D	46. B	47. C	48. C	49. B	50. C

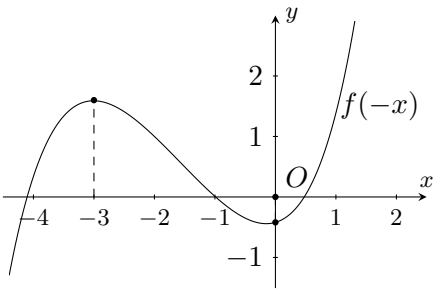
ĐỀ VDC SỐ 2: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP

Câu 1.
Cho đồ thị hàm số $y = f(2-x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

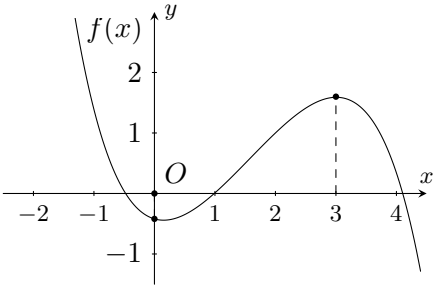


(A) $(0;1)$. (B) $(1;3)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(-1;0)$.

Lời giải.
Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = g(x) = f(2-x)$.
Tịnh tiến (C) sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = g(x+2) = f(-x)$.



Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(-x)$ qua trục Oy ta được đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Ta có $y = f\left(x^2-3\right) \Rightarrow y' = 2x \cdot f'\left(x^2-3\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ f'\left(x^2-3\right) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2-3 = 0 \\ x^2-3 = 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{bmatrix}$$

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;1)$. (B) $(-4;-3)$. (C) $(0;1)$. (D) $(-2;-1)$.

Lời giải.

Đặt $y=g(x)=f\left(x^2+2x\right)$.
Ta có $g'(x)=\left(f\left(x^2+2x\right)\right)'=(2x+2)\cdot f'\left(x^2+2x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(2x+2)\cdot f'\left(x^2+2x\right)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x+2=0\\ f'\left(x^2+2x\right)=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\ x^2+2x=-2\quad\text{(vô nghiệm)}\\ x^+2x=1\\ x^2+2x=3\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\ x=-1\pm\sqrt{2}\quad(x=-1\pm\sqrt{2}\quad\text{là các nghiệm bội chẵn của phương trình}\quad x^2+2x=1)\\ x=1\\ x=-3.\end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên

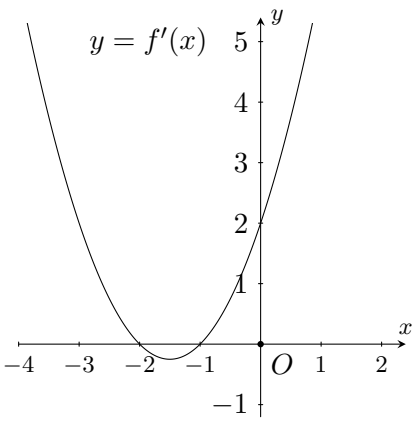
x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘				↗		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.
Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$ như sau:
Chọn giá trị $x=0\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow g'(0)=f'(0)>0$ (dựa theo bảng xét dấu của hàm số $f'(x)$).
Suy ra $g'(x)>0,\ \forall x\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$. Sử dụng quy tắc xét dấu đa thức "lẽ đổi, chẵn không" suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=g(x)=f\left(1+2x-x^2\right)+2020$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-1;0)$. (B) $(0;1)$. (C) $(2;3)$. (D) $(3;5)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=(2-2x)\cdot f'\left(1+2x-x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2x=0 \\ f'\left(1+2x-x^2\right)=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ 1+2x-x^2=-2 \\ 1+2x-x^2=-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3}. \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗		↘		↗		↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, $\left(1-\sqrt{3};1\right)$ và $\left(1+\sqrt{3};3\right)$.
Mà $(0;1)\subset\left(1-\sqrt{3};1\right)$ nên hàm số $y=g(x)=\left(1+2x-x^2\right)+2020$ đồng biến trên $(0;1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2(x-5)^3$. Hàm số $g(x)=f(10x-5)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;1)$. (B) $(1;2)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(1;3)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=(10-5x)'\cdot f'(10-5x)=-5\cdot f'(10-5x)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(10-5x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10-5x=0 \\ 10-5x=-2 \\ 10-5x=5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=2 \\ x=\dfrac{12}{5} \\ x=1 \end{bmatrix}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi giá trị thực của x. Xét hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
(D) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)'\cdot f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)=\dfrac{20-5x^2}{(x^2+4)^2}\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)\left(\dfrac{5x}{x^2+4}-1\right)^2\left(\dfrac{5x}{x^2+4}-2\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

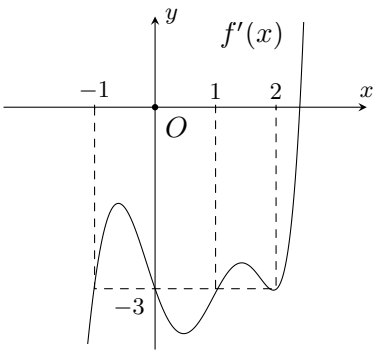
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{20-5x^2}{(x^2+4)^2}=0 \\ \dfrac{5x}{x^2+4}=0 \\ \dfrac{5x}{x^2+4}=1 \\ \dfrac{5x}{x^2+4}=2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\pm 2 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=4. \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$		$\searrow$	CT	$\nearrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 6.
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = g(x) = f\left(2x^2 - x\right) + 6x^2 - 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-\frac{1}{4};0)$. B $(\frac{1}{4};1)$. C $(0;1)$. D $(-\infty;0)$.

Lời giải.
Ta có $y = g(x) = f\left(2x^2 - x\right) + 6x^2 - 3x$.
$\Rightarrow g'(x) = (4x-1)\cdot f'\left(2x^2 - x\right) + 12x - 3 = (4x-1)\left[f'\left(2x^2 - x\right) + 3\right]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 1 = 0 \\ f'\left(2x^2 - x\right) = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{1}{4} & \\ 2x^2 - x = -1 & \text{(vô nghiệm)} \\ 2x^2 - x = 1 & \\ 2x^2 - x = 0 & \\ 2x^2 - x = 2 & \text{(nghiệm kép)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{1}{4} & \\ x = 1 & \\ x = -\dfrac{1}{2} & \\ x = 0 & \\ x = \dfrac{1}{2} & \\ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} & \text{(nghiệm kép)} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} & \text{(nghiệm kép).} \end{array}\right.$$

Ta có $g'(-2) = -9(f'(10) + 3)$ dựa vào đồ thị $f'(x)$ thấy $f'(10) > -3 \Rightarrow f'(10) + 3 > 0 \Rightarrow g'(-2) < 0$.
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Xét dấu $g'(x)$ ta được $g'(x) > 0,\ \forall x \in \left(-\frac{1}{2};0\right) \cup \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) \cup \left(1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.
Suy ra $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right), \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.
Mà $\left(-\frac{1}{4};0\right) \subset \left(-\frac{1}{2};0\right)$ nên hàm số $y = g(x) = f\left(2x^2 - x\right) + 6x^2 - 3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ với mọi giá trị thực của x. Hàm số $g(x)=f(3-x)+\dfrac{1}{6}\left(x^2-1\right)^3$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(-\infty;0)$. B $(0;1)$. C $(1;+\infty)$. D $(-\infty;-\dfrac{1}{2})$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)+x\left(x^2-1\right)^2$.

Theo giả thiết $f'(x)=(3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ nên $f'(3-x)=x(3x+1)^2(1-x)^2$.

Từ đó suy ra $g'(x)=-x(3x+1)^2(1-x)^2+x\left(x^2-1\right)^2=x(x-1)^2\left[-(3x+1)^2+(x+1)^2\right]$

$=x(x-1)^2\left(-8x^2-4x\right)=x^2(x-1)^2(-8x-4)$.

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad\text{(nghiệm kém)}\\ x=1\quad\text{(nghiệm kém)}\\ x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↘		↘	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-3\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2;3)$. B $(1;2)$. C $(3;4)$. D $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3\left(f(x)\right)^2\cdot f'(x)-6f(x)\cdot f'(x)=3f'(x)f(x)\left[f(x)-2\right]$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.$. Khi đó

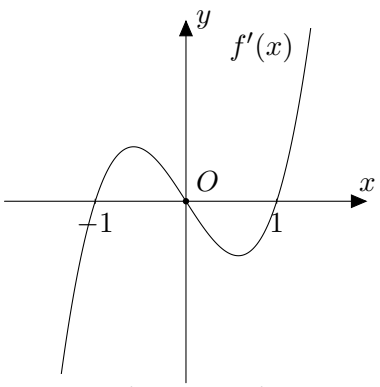
$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=3\\ x=4\end{array}\right.$; $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<1\\ x=4\end{array}\right.$; $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_2\in(x_1;1)\\ x=x_3\in(1;2)\\ x=x_4>4\\ x=3.\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$	x_1	x_2	1	x_3	2	3	4	x_4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y=(f(x))^3-3(f(x))^2$ nghịch biến trên $(2;3)$.
Chọn đáp án A □

Câu 9.
Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(1;+\infty)$. B $(-\infty;-2)$. C $(-1;0)$. D $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

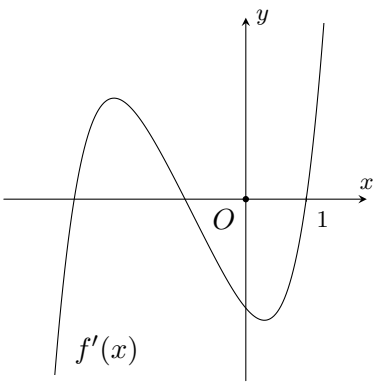
Lời giải.
Vì các điểm $(-1;0)$, $(0;0)$, $(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nên ta có hệ
$$\begin{cases}-1+a-b+c=0\\ c=0\\ 1+a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=x^3-x\Rightarrow f''(x)=3x^2-1.$$
Ta có $g(x)=f(f'(x))\Rightarrow g'(x)=f'(f'(x))\cdot f''(x)$.
$g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(f'(x)\right)\cdot f''(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3-x\right)\left(3x^2-1\right)=0$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-x=0\\ x^3-x=1\\ x^3-x=-1\\ 3x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ x=0\\ x=x_1\quad(x_1\approx1{,}325)\\ x=x_2\quad(x_2\approx-1{,}325)\\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1{,}325$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$1{,}325$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
Chọn đáp án B □

Câu 10.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f\left(2019\right)^x-mx+2$ đồng biến trên $[0;1]$?



(A) 2028. (B) 2019. (C) 2011. (D) 2020.

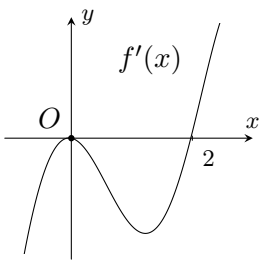
Lời giải.

Ta có $g'(x)=2019^x\ln 2019\cdot f'(2019^x)-m$.
Ta lại có hàm số $y=2019^x$ đồng biến trên $[0;1]$.
Với $x\in[0;1]$ thì $2019^x\in[1;2019]$ mà hàm $y=f'(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ nên hàm $y=f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0;1]$.
Mà $2019^x\geq 1,\ f'(2019^x)>0,\ \forall x\in[0;1]$ nên hàm $h(x)=2019^x\ln 2019\cdot f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0;1]$.
Hay $h(x)\geq h(0)=0,\ \forall x\in[0;1]$.
Do vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0;1]\Leftrightarrow g'(x)\geq 0,\ \forall x\in[0;1]$
$\Leftrightarrow m\leq 2019^x\ln 2019\cdot f'\left(2019^x\right),\ \forall x\in[0;1]\Leftrightarrow m\leq \min\limits_{x\in[0;1]}h(x)=h(0)=0$.
Vì m nguyên và $m\in[-2019;2019]\Rightarrow$ có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $\left(\frac{1}{2};1\right)$. (B) $(1;2)$. (C) $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. (D) $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Ta có $g(x)=f\left(x^2-x\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-1)\,f'\left(x^2-x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'\left(x^2-x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x^2-x=0\\ x^2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=0\\ x=1\\ x=-1\\ x=2.\end{array}\right.$$

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'\left(x^2-x\right)>0\Leftrightarrow x^2-x>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-1.\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $g'(x)$

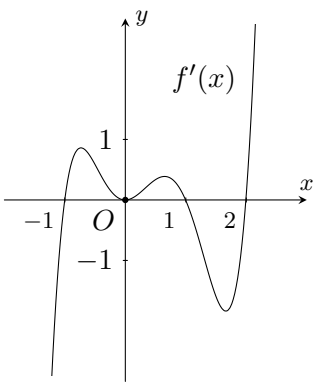
x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-1\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 12.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(0;\sqrt{3}\right)$.
B $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.
C $\left(-\sqrt{3};0\right)$, $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.
D $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=-1\\ \sqrt{x^2+1}=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+1=1\\ x^2+1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

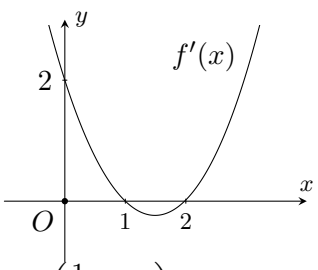
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right)$, $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f\left(x - x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. (B) $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. (C) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. (D) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $y = g(x) = f\left(x - x^2\right) \Rightarrow g'(x) = (1 - 2x)f'\left(x - x^2\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - 2x = 0 \\ f'\left(x - x^2\right) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{1}{2} \\ x - x^2 = 1 \quad \text{(vô nghiệm)} \\ x - x^2 = 2 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < 1 \\ x > 2 \end{bmatrix} \Rightarrow f\left(x - x^2\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - x^2 < 1 \\ x - x^2 > 2 \end{bmatrix}$ (luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).

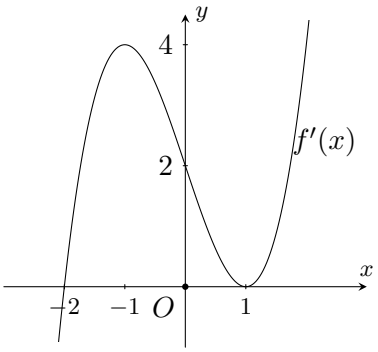
Vậy $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Do đó hàm số $g(x) = f\left(x - x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 3\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



(A) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.
(B) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 2)$.
(D) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải.

$g'(x) = 2x \cdot f'\left(x^2 - 3\right)$.

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ nên $f'\left(x^2 - 3\right) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 < -2 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2 - 3\right)$		$+$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy đáp án C đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(-2;\dfrac{5}{2})$. (C) $(1;3)$. (D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}=1-\dfrac{1}{f\left(x^2-2x\right)+1}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3.\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=(f(x))^3-3\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(1;2)$. (B) $(3;4)$. (C) $(-\infty;1)$. (D) $(2;3)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3\left(f(x)\right)^2f'(x)-6f(x)f'(x)=3f(x)f'(x)\left[f(x)-2\right]$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{x_1,4|x_1<1\}\\ f(x)=2\Leftrightarrow x\in\{x_2,x_3,3,x_4|x_1<x_2<1<x_3<2;4<x_4\}\\ f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,2,3,4\}.\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

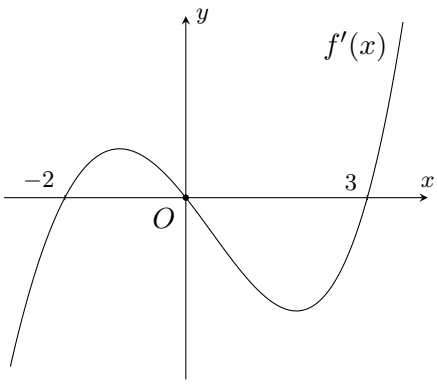
x	$-\infty$	x_1	x_2	1	x_3	2	3	4	x_4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 17.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-1;0)$. B $(0;1)$. C $(1;3)$. D $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=2\\x^2-2x=0\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\\x=-1\\x=3.\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của y' như sau

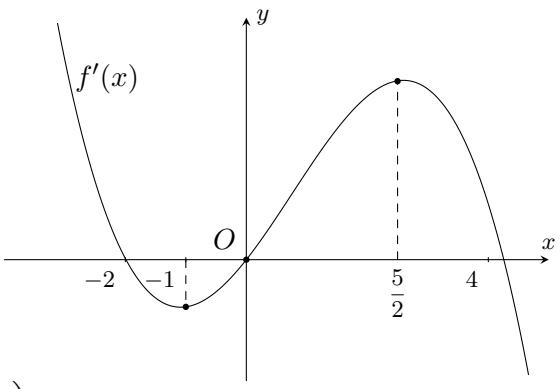
x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
x^2-2x	$+$	3	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	3	$+$
$f'(x^2-2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$, $(1;2)$, $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=[f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-1;1)$. (B) $\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$. (C) $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$. (D) $(-2;-1)$.

Lời giải.

Ta có $y'=2f'(x)f(x)$. Do đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=\dfrac{5}{2} \\ x=4 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-2		-1		0		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, hàm số $y=[f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$, $(-1;0)$, $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 2016. (B) 2015. (C) 2017. (D) 2018.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x+m\right)$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\geq 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$ và $g'(x)=0$ tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow 2(x-1)f'\left(x^2-2x+m\right)\geq 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2-2x+m\right)\geq 0,\ \forall x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+m\geq 2,\ \forall x\in(1;+\infty) \\ x^2-2x+m\leq 0,\ \forall x\in(1;+\infty). \end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^2-2x+m$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có
Trường hợp 1: $x^2-2x+m\geq 2,\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m-1\geq 2\Leftrightarrow m\geq 3$.
Trường hợp 2: $x^2-2x+m\leq 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$. Khi đó không giá trị m thỏa mãn.
Vậy có 2016 số nguyên $m<2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

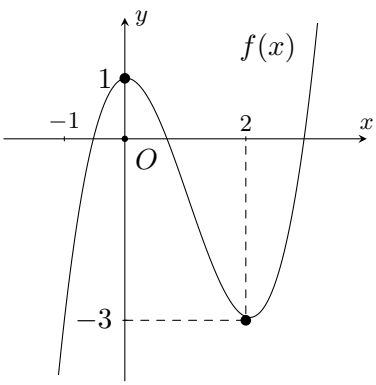
x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=[f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
(A) $(-2;5)$. (B) $(1;2)$. (C) $(2;5)$. (D) $(5;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Ta có $g'(x)=-2f'(3-x)f(3-x)$.
Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow -2f'(3-x)f(3-x)<0\Leftrightarrow f'(3-x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<3-x<1\\ 3-x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<5\\ x<1.\end{array}\right.$
Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;5)$.
Chọn đáp án (C) □

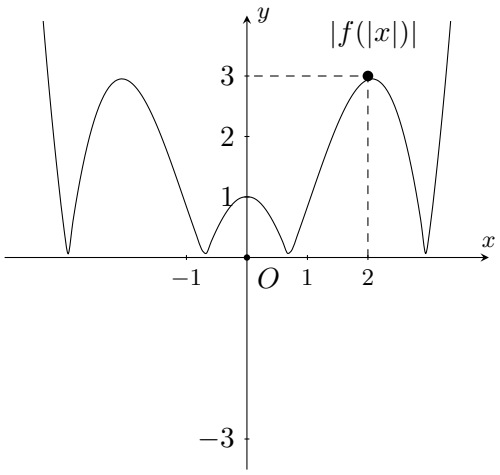
Câu 21.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=|f(|x|)|$ đồng biến trong các khoảng nào dưới đây?



(A) $(0;1)$. (B) $(-1;1)$. (C) $(0;2)$. (D) $(1;2)$.

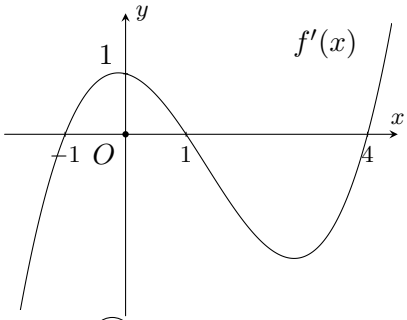
Lời giải.

Thực hiện liên tiếp các bước biến đổi đồ thị $y=f(x)$ thành đồ thị $y=|f(x)|$, sau đó biến đổi đồ thị $y=|f(x)|$ thành đồ thị $y=|f(|x|)|$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y=|f(|x|)|$ ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 22.
Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f\left(|3-x|\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



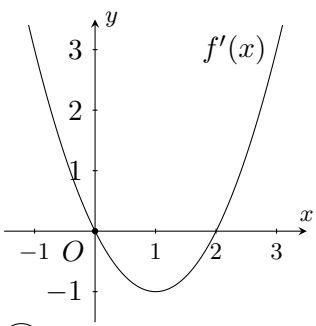
A $(-\infty;-1)$. B $(-1;2)$. C $(2;3)$. D $(4;7)$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị hàm số, suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>4 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<4. \end{array}\right.$

- Với $x>3$ khi đó $g(x)=f(x-3)$.
  $g'(x)=f'(x-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x-3<1 \\ x-3>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<4 \\ x>7. \end{array}\right.$
  Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3;4),(7;+\infty)$.
- Với $x<3$ khi đó $g(x)=f(3-x)$.
  $g'(x)=f'(3-x)>0 \Leftrightarrow f'(3-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x<-1 \\ 1<3-x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \quad \text{(loại)} \\ -1<x<2. \end{array}\right.$
  Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 23.
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(|x|+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(1;+\infty)$. B $(-1;0)$. C $(-1;2)$. D $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x}{|x|} f'(|x|+1)$.

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{|x|} f'(|x|+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{x}{|x|} = 0 \\ f'(|x|) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ |x|+1 = 0 \\ |x|+1 = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ |x| = -1 \\ |x| = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{bmatrix}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra $g(x) = f(|x|+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$, đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

(A) 4. (B) 6. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = 2. \end{bmatrix}$

Bảng biến thiên

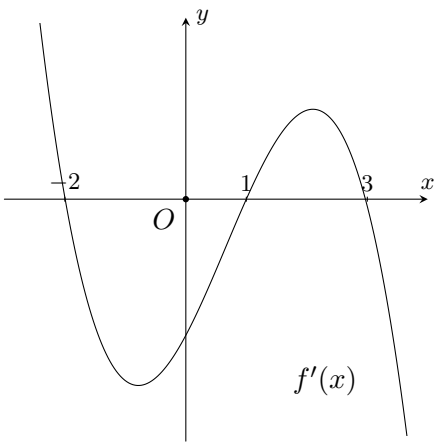
x	$-\infty$		-1		$\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Để hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty;-1) \Leftrightarrow m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.
do yêu cầu m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên ta có $m \in \{5,6,7,8,9\}$. Vậy có 5 giá trị m thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(|4-2x|)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. (B) $(-\infty;-2)$. (C) $\left(\frac{5}{2};7\right)$. (D) $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải.

Trường hợp 1: $x\le 2$. Khi đó $g(x)=f(4-2x)$.

Ta có $g'(x)=-2f'(4-2x)$, $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(4-2x)>0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&4-2x<-2\\&1<4-2x<3\end{aligned}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x>3\\&\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}.\end{aligned}\right.$

So điều kiện $x\le 2$ ta được $g(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Trường hợp 2: $x>2$. Khi đó $g(x)=f(2x-4)$.

Ta có $g'(x)=2f'(2x-4)$, $g'(x)<0\Leftrightarrow f(2x-4)<0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&-2<2x-4<1\\&2x-4>3\end{aligned}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&1<x<\frac{5}{2}\\&x>\frac{7}{2}.\end{aligned}\right.$

So điều kiện $x>2$ ta được $g(x)$ nghịch biến trên $\left(2;\frac{5}{2}\right),\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có 8 điểm cực trị là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+m\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&3x^2-6x=0\\&x^3-3x^2+m=1\\&x^3-3x^2+m=0\\&x^3-3x^2+m=2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0\\&x=2\\&x^3-3x^2+m=1\\&x^3-3x^2+m=0\\&x^3-3x^2+m=2.\end{aligned}\right.$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+m=1$ (nếu có) dấu của $f'\left(x^3-3x^2+m\right)$ không đổi dấu nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3-3x^2+m=0$ và $x^3-3x^2+m=2$ phải có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và 2.

Xét hàm số $h(x)=-x^3+3x^2$, ta có $h'(x)=-3x^2+6x$; $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0\\&x=2.\end{aligned}\right.$

Bảng biến thiên

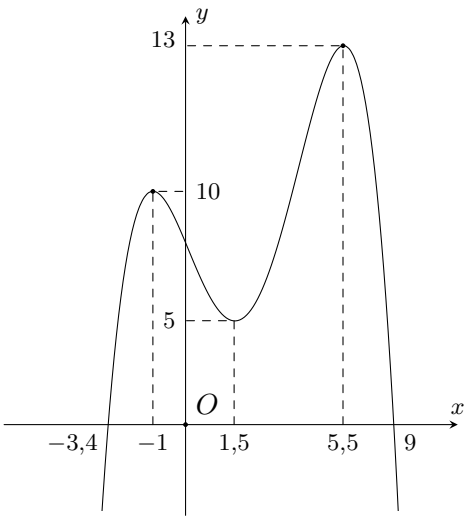
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3+3x^2=m$ và $-x^3+3x^2=m-2$ phải có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và 2 là

$$0<m-2<m<4 \Leftrightarrow 2<m<4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m=3$.
Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-3{,}4)\cup(9;+\infty)$. Đặt $g(x)=f(x)-mx+5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 2 điểm cực trị?



A) 4. B) 7. C) 8. D) 9.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=f'(x)-m$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-m=0\Leftrightarrow f'(x)=m$.
Để hàm số $y=g(x)$ có đúng 2 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 5 \\ 10\le m<13 \end{array}\right.$. Khi đó $m\in\{1,2,3,4,5,10,11,12\}$.
Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x=-3, x=3, x=5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x)=f\left(\mathrm{e}^{x^3+3x^2}-m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị.

A) 3. B) 4. C) 5. D) (6.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)\mathrm{e}^{x^3+3x^2}\cdot f'\left(\mathrm{e}^{x^3+3x^2}-m\right)$.

$$g'=0\Leftrightarrow \left(3x^2+6x\right)\mathrm{e}^{x^3+3x^2}\cdot f'\left(\mathrm{e}^{x^3+3x^2}-m\right)=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0\\ x=-2\\ \mathrm{e}^{x^3+3x^2}-m=-3\\ \mathrm{e}^{x^3+3x^2}-m=3\\ \mathrm{e}^{x^3+3x^2}-m=5 \end{bmatrix}\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0\\ x=-2\\ \mathrm{e}^{x^3+3x^2}=m-3 \quad (1)\\ \mathrm{e}^{x^3+3x^2}=m+3 \quad (2)\\ \mathrm{e}^{x^3+3x^2}=m+5 \quad (3). \end{bmatrix}$$

Hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi tổng số nghiệm đơn và bội lẻ, khác 0 và -2 của phương trình (1), (2), (3) là 5.

Xét hàm số $h(x)=\mathrm{e}^{x^3+3x^2}$ có $h'(x)=\left(3x^2+6x\right)\mathrm{e}^{x^3+3x^2}$.

Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0\\ x=-2. \end{bmatrix}$

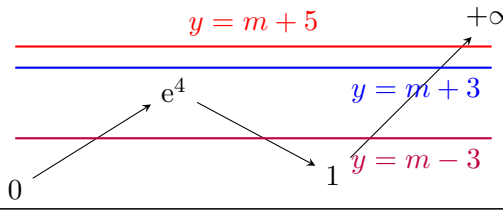
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	e^4	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
					1		
	0						

Khi đó có ba trường hợp sau

Trường hợp 1:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	e^4	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
					1		
	0						

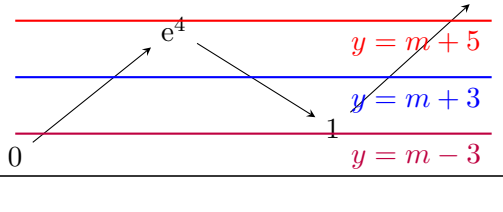


Khi đó $\begin{cases} m+3\geq \mathrm{e}^4\\ 1<m-3<\mathrm{e}^4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq \mathrm{e}^4-3\approx 51{,}6\\ 4<m<\mathrm{e}^4+3\approx 57{,}6. \end{cases}$

Do m nguyên nên $m\in\{52,53,54,55,56,57\}$.

Trường hợp 2:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	e^4	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
					1		
	0						



Khi đó $\begin{cases} m+5\geq \mathrm{e}^4\\ 1<m+3<\mathrm{e}^4\\ 0<m-3\leq 1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq \mathrm{e}^4-5\approx 49{,}6\\ -2<m<\mathrm{e}^4-3\\ 3<m\leq 4 \end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing.$

Trường hợp 3:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		0	$\nearrow$ e^4	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$y=m+5$, $y=m+3$, $y=m-3$

Khi đó $\begin{cases}1<m+5<\mathrm{e}^4\\ m+3\le 1\\ m-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<m<\mathrm{e}^4-5\approx 49{,}6\\ m\le -2\\ m>3\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing.$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-x\right)\left(x^2-4x+3\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2+m\right)$ có 3 cực trị.

A) 0. B) 6. C) 3. D) 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=x(x-1)^2(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=3.\end{array}\right.$

Lại có $g'(x)=2x\cdot f'\left(x^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+m=0\\ x^2+m=1\\ x^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0&\\ x^2=-m&(1)\\ x^2=1-m&(2)\\ x^2=3-m&(3).\end{array}\right.$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình (1) và (3) có nghiệm không chung nhau và $-m<3-m$ nên

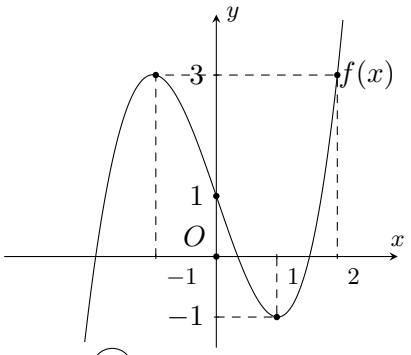
Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow\begin{cases}3-m>0\\ -m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<3.$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0,1,2\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên bằng 3.

Chọn đáp án C □

Câu 30.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f\left(2x^3+x-1\right)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]}g(x)=-10$.



A) 3. B) -12. C) -13. D) 6.

Lời giải.

Đặt $t(x)=2x^3+x-1$, $\forall x\in[0;1]$. Ta có $t'(x)=6x^2+1>0$, $\forall x\in[0,1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[-1;2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max\limits_{[-1;2]}f(t)=3\Rightarrow\max\limits_{[-1;2]}[f(t)+m]=3+m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có $3+m=-10\Leftrightarrow m=-13$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

(A) 18. (B) 17. (C) 16. (D) 20.

Lời giải.

Ta có $y' = f'\left(x^2+3x-m\right) = (2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right)$.
Theo đề bài ta có $f'(x) = (x-1)(x+3)$.
Suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 1 \end{array}\right.$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow (2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0, \forall x \in (0;2).$$

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} y' \geq 0, \forall x \in (0;2) &\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m \leq -3 \\ x^2+3x-m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq x^2+3x+3 \\ m \leq x^2+3x-1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \max\limits_{[0;2]}\left(x^2+3x+3\right) \\ m \leq \min\limits_{[0;2]}\left(x^2+3x-1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq -1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do $m \in [-10;20], m \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho các hàm số $f(x) = x^3+4x+m$ và $g(x) = \left(x^2+2018\right)\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2020\right)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020;2020]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

(A) 2005. (B) 2037. (C) 4016. (D) 4041.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+4x+m \\ g(x) &= \left(x^2+2018\right)\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2020\right)^3 = a_{12}x^{12}+a_{10}x^{10}+\ldots+a_2x^2+a_0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+4 \\ g'(x) &= 12a_{12}x^{11}+10a_{10}x^9+\ldots+2a_2x. \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} [g(f(x))]' &= f'(x)\left[12a_{12}(f(x))^{11}+10a_{10}(f(x))^9+\ldots+2a_2f(x)\right] \\ &= f(x)f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10}+10a_{10}(f(x))^8+\ldots+2a_2\right) \end{aligned}$$

Dễ thấy $a_{12}; a_{10}; \ldots; a_2; a_0 > 0$ và $f'(x) = 3x^2+4 > 0, \forall x > 2$.
Do đó $f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10}+10a_{10}(f(x))^8+\ldots+2a_2\right) > 0, \forall x > 2$.
Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi

$$\begin{aligned} [g(f(x))]' \geq 0, \forall x > 2 &\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x > 2 \\ &\Leftrightarrow x^3+4x+m \geq 0, \forall x > 3 \Leftrightarrow m \geq -x^3-4x, \forall x > 2 \\ &\Rightarrow m \geq \max\limits_{[2;+\infty)}\left(-x^3-4x\right) = -16. \end{aligned}$$

Vì $m \in [-2020;2020]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2037 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2\left(x^2+2mx+1\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(2x+1) = 2(2x+1)(2x+2)^2\left[(2x+1)^2 + 2m(2x+1) + 1\right]$.

Đặt $t = 2x+1$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0, \forall x \in (3;5) &\Leftrightarrow t\left(t^2 + 2mt + 1\right) \geq 0, \forall t \in (7;11) \\ &\Leftrightarrow t^2 + 2mt + 1 \geq 0, \forall t \in (7;11) \\ &\Leftrightarrow 2m \geq \frac{-t^2-1}{t}, \forall t \in (7;11). \end{aligned}$$

Xét hàm số $h(t) = \dfrac{-t^2-1}{t}$ trên $[7;11]$, có $h'(t) = \dfrac{-t^2+1}{t^2}$.

Bảng biến thiên

t	7		11
$h'(t)$		$-$	
$h(t)$	$-\dfrac{50}{7}$	$\searrow$	$-\dfrac{122}{11}$

Dựa vào BBT, ta có $2m \geq \dfrac{-t^2-1}{t}, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow 2m \geq \max\limits_{[7;11]} h(t) \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{50}{14}$.

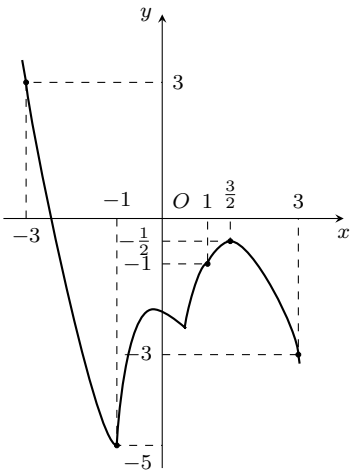
Vì $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x-2m) + \dfrac{1}{2}(2m-x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$. Số phần tử của S là

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

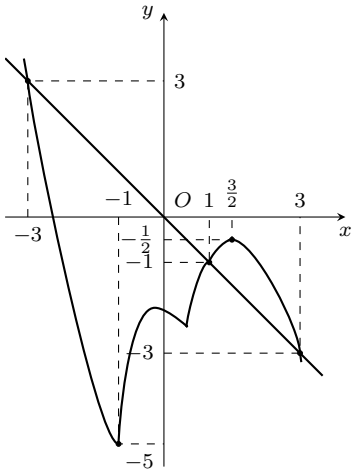


Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x-2m) - (2m-x)$. Đặt $h(x) = f'(x) - (-x)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = -x$ trên hình vẽ, suy ra

$$h(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq -x \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3. \end{cases}$$



Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) = h'(x-2m) \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-2m \leq 1 \\ x - 2m \geq 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq x \leq 2m+1 \\ x \geq 2m+3. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m-3;2m+1)$ và $(2m+3;+\infty)$.

Do đó hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m-3\le 3\\2m+1\ge 4\end{cases}\\2m+3\le 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}\le m\le 3\\m\le 0.\end{array}\right.$

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m\in\{2;3\} \Rightarrow S=\{2;3\}$.

Vậy số phần tử của S là 2.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên trục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)\left(x^2-6x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A 2016. B 2014. C 2012. D 2010.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}g'(x)=-f'(1-x) &= -(1-x)^2(-1-x)\left[(1-x)^2-6(1-x)+m\right]\\ &= (x-1)^2(x+1)\left(x^2+4x+m-5\right).\end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1) \Leftrightarrow g'(x)\le 0,\ \forall x\le -1 \quad (*)$ (dấu "=" tại hữu hạn điểm).

Với $x<-1$ thì $(x-1)^2>0$ và $x+1<0$ nên

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow x^2+4x+m-5\ge 0,\ \forall x<-1\\ &\Leftrightarrow m\ge -x^2-4x+5,\ \forall x<-1.\end{aligned}$$

Xét hàm số $y=-x^2-4x+5$ trên khoảng $(-\infty;-1)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1
y	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m\ge 9$.

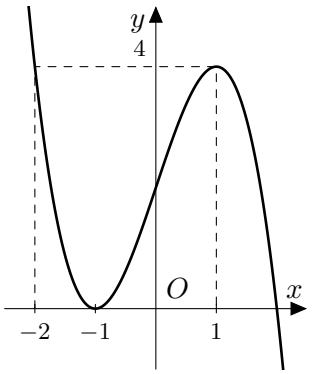
Kết hợp với m là số nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ nên $m\in\{9;10;\ldots;2020\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 36.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2020;2020)$ để hàm số $g(x)=f(2x-3)-\ln\left(1+x^2\right)-2mx$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$?



A 2020. B 2019. C 2021. D 2018.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=2f'(2x-3)-\dfrac{2x}{1+x^2}-2m$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ khi và chỉ khi

$$g'(x)\ge 0,\ \forall x\in\left(\frac{1}{2};2\right) \quad\Leftrightarrow\quad m\le f'(2x-3)-\frac{x}{1+x^2},\ \forall x\in\left(\frac{1}{2};2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad m \le \min_{\left(\frac{1}{2};2\right)} \left[f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2} \right] \quad (1).$$

Đặt $t = 2x - 3$, khi đó $x \in \left(\frac{1}{2};2\right)$ thì $t \in (-2;1)$.
Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(t) \ge 0,\ \forall t \in (-2;1)$ và $f'(t) = 0$ khi $t = -1$.
Tức là $f'(2x-3) \ge 0,\ \forall x \in \left(\frac{1}{2};2\right) \Rightarrow \min_{\left(\frac{1}{2};2\right)} f'(2x-3) = 0$ khi $x = 1 \quad (2)$.
Xét hàm số $h(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.
Ta có $h'(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ như sau

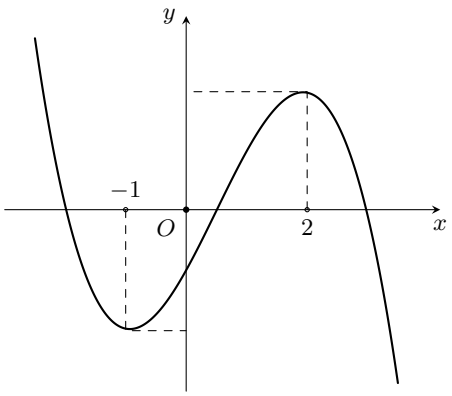
x	$\frac{1}{2}$		1		2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \ge -\dfrac{1}{2},\ \forall x \in \left(\dfrac{1}{2};2\right) \Rightarrow \min_{\left(\frac{1}{2};2\right)} h(x) = -\dfrac{1}{2}$ khi $x = 1 \quad (3)$.
Từ (1), (2) và (3) suy ra $m \le -\dfrac{1}{2}$.
Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-2020;2020)$ suy ra $m \in \{-2019; -2018; \ldots; -1\}$.
Vậy có tất cả 2019 giá trị m cần tìm.
Chọn đáp án (B) □

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(x^2+x\right) - 4x^3 + 3x^2 + 6x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. (B) $(-2;0)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = (2x+1)f'\left(x^2+x\right) - 12x^2 + 6x + 6$.
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$.
Do đó $f'\left(x^2+x\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > -1 \\ x^2+x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1$.
Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x^2+x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$(2x+1)f'(x^2+x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$-12x^2+6x+6$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	chưa biết dấu			$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết $f(x)>2, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=f(3-2f(x))-x^3+3x^2-2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$. (B) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(C) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$. (D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=-2f'(x)f'(3-2f(x))-3x^2+6x$.
Vì $f(x)>2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $3-2f(x)<-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra $f'(3-2f(x))<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Từ đó ta có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)f'(3-2f(x))$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$-3x^2+6x$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

Từ bảng xét dấu trên, loại trừ đáp án suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(5;9)$. (B) $(1;2)$. (C) $(-\infty;9)$. (D) $(1;3)$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một Parabol nên có phương trình dạng

$$y=g(x)=ax^2+bx+c\ (P).$$

Vì (P) có đỉnh $I(2;-1)$ nên $\begin{cases}\frac{-b}{2a}=2\\ g(2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b=4a\\ 4a+2b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+b=0\\ 4a+2b+c=-1.\end{cases}$

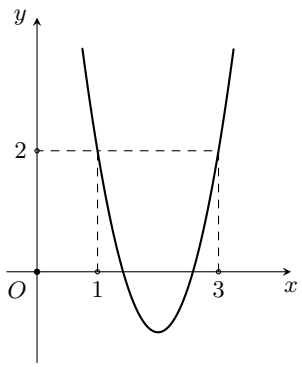
(P) đi qua điểm $A(1;2)$ nên $g(1)=2\Leftrightarrow a+b+c=2$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a+b=0\\ 4a+2b+c=-1\\ a+b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-12\\ c=11\end{cases}$ nên $g(x)=3x^2-12x+11$.

Đồ thị của hàm $y = g(x)$ như hình vẽ.
Theo đồ thị ta thấy $f'(2x+3) \le 0 \Leftrightarrow f'(2x+3)+2 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.
Đặt $t = 2x+3 \Leftrightarrow x = \dfrac{t-3}{2}$ khi đó

$$f'(t) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le \frac{t-3}{2} \le 3 \Leftrightarrow 5 \le t \le 9.$$

Vậy $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5;9)$.



Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x)\cdot f''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) = \left[f'(x)\right]^2 - 2f(x)\cdot f''(x).$$

Hàm số $h(x) = g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty;1)$. B $(2;+\infty)$. C $(0;1)$. D $(1;2)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f''(x)f'(x) - 2f'(x)\cdot f''(x) - 2f(x)\cdot f''(x) = -2f(x)\cdot f'''(x)$.
Khi đó $(h(x))' = (2x-2)g'\left(x^2-2x\right) = -2(2x-2)\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-1\right)^2\left(x^2-2x+4\right)^3$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$		$+$ 0 $+$	0	$-$ 0 $+$	0	$-$ 0	$-$

Suy ra hàm số $h(x) = g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Chọn đáp án D □

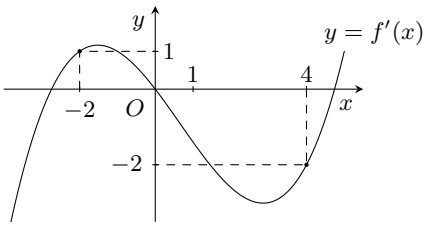
ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. B	5. C	6. A	7. D	8. A	9. B	10. D
11. C	12. C	13. D	14. C	15. C	16. D	17. A	18. C	19. A	20. C
21. D	22. B	23. B	24. D	25. A	26. C	27. C	28. D	29. C	30. C
31. A	32. B	33. A	34. B	35. C	36. B	37. D	38. D	39. A	40. D

ĐỀ VDC SỐ 3: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ HỢP

Câu 1.

Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau. Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

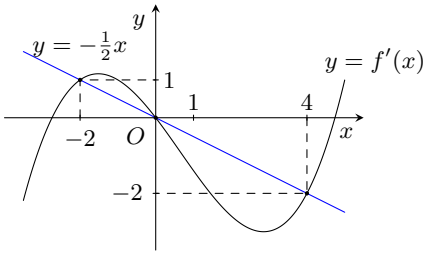


(A) $(4;+\infty)$. (B) $(0;4)$. (C) $(-\infty;-2)$. (D) $(-2;0)$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0)=4f(0)=0$.



Ta có $h'(x)=4f'(x)+2x$. Do đó $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2}x$.

Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}x$, ta có

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-2;0;4\}.$$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘		↗	0	↘		↗	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|h(x)|$ như sau:

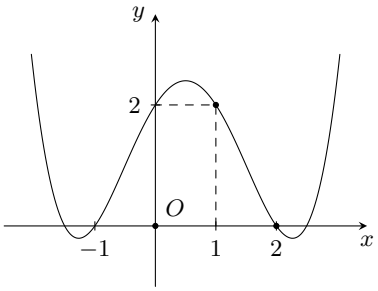
x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$
					0				

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ biết $g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+\left(x^3+3x-m\right)^2\left(-2x^3-6x+2m-6\right)$.



(A) 23. (B) 21. (C) 5. (D) 17.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}g(x)&=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2\left(-x^3-3x+m-3\right)\\&=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^3-6\left(-x^3-3x+m\right)^2.\end{aligned}$$

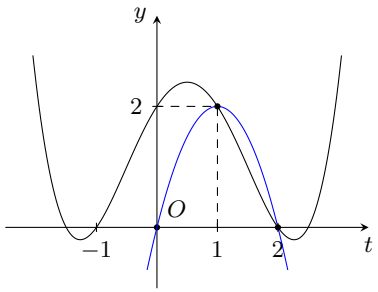
Do đó

$$g'(x)=-9\left(x^2+1\right)f'\left(-x^3-3x+m\right)-18\left(3^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)^2+36\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right).$$

Để hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$, điều kiện là

$$\begin{aligned}&g'(x)\le 0\,\forall x\in(-1;2)\\ \Leftrightarrow&f'\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2-4\left(-x^3-3x+m\right)\ge 0,\ \forall x\in(-1;2)\\ \Leftrightarrow&f'\left(-x^3-3x+m\right)\ge -2\left(-x^3-3x+m\right)^2+4\left(-x^3-3x+m\right),\ \forall x\in(-1;2).\end{aligned}$$

Đặt $t=-x^3-3x+m$ với $x\in(-1;2)$.
Vì $t'=-3x^2-3<0\,\forall x\in(-1;2)$ nên suy ra $t\in(m-14;m+4)$.
Xét bất phương trình $f'(t)\ge -2t^2+4t$. (1).
Đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t^2+4t$ trên cùng hệ trục tọa độ



Để (1) luôn đúng điều kiện là

$$\begin{cases}t\in(m-14,m+4)\\ \left[\begin{array}{l}t\le 1\\ t\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\in(m-14,m+4)\\ t\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}t\in(m-14,m+4)\\ t\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+4\le 1\\ m-14\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge 16.\end{array}\right.$$

Do $m\in[-20;20]$ nên số giá trị của m là $(-3+20)+1+(20-16)+1=23$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $g(x)=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

(A) 4041. (B) 4042. (C) 2021. (D) 4039.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=|f(x)|=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ có $f'(x)=3x^2-6mx-3(m+2)$.
Để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\\ \begin{cases}f(x)\le 0\\ f'(x)\le 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(0)\ge 0\\ 3x^2-6mx+3(m+2)\ge 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\\ \begin{cases}f(0)\le 0\\ 3x^2-6mx+3(m+2)\le 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m-2\ge 0\\ m\le\dfrac{x^2-2}{2x+1},\ \forall x\in(0;3)\end{cases}\\ \begin{cases}-m-2\le 0\\ m\ge\dfrac{x^2-2}{2x+1},\ \forall x\in(0;3)\end{cases}\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m \le -2\\ m \le -2\end{cases}\\ \begin{cases}m \ge -2\\ m \ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \le -2\\ m \ge 1.\end{array}\right.$$

Vì $m \in [-2021; 2021]$ nên $\left[\begin{array}{l}-2021 \le m \le -2\\ 1 \le m \le 2021.\end{array}\right.$

Vậy có tất cả 4041 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(2x-1) - 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A $(3; +\infty)$. B $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. C $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$. D $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta đặt $y = g(x) = 3f(2x-1) - 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$.

Suy ra $g'(x) = 6f'(2x-1) - 12x^2 + 30x - 18 = 6\left[f'(2x-1) - 2x^2 + 5x - 3\right]$.

Có $f'(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=1\\ 2x-1=2\\ 2x-1=3\\ 2x-1=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{3}{2}\\ x=2\\ x=\frac{5}{2}.\end{array}\right.$

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$+$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+4)\left(x^2 + 2mx + 9\right)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f\left(x^2 + 3x - 4\right)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ là

A 1. B 3. C 2. D 4.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (2x+3) f'\left(x^2 + 3x - 4\right)$.

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi

$$\begin{aligned}&(2x+3) f'\left(x^2 + 3x - 4\right) \ge 0, \forall x \in (1; +\infty)\\ \Leftrightarrow &f'\left(x^2 + 3x - 4\right) \ge 0, \forall x \in (1; +\infty)\\ \Leftrightarrow &\left(x^2 + 3x - 4\right)^2 \left(x^2 + 3x\right)\left[\left(x^2 + 3x - 4\right)^2 + 2m\left(x^2 + 3x - 4\right) + 9\right] \ge 0, \forall x \in (1; +\infty). \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 3x - 4$ ($t > 0$ do $x \in (1; +\infty)$).

$$(1) \Rightarrow t^2(t+4)\left(t^2 + 2mt + 9\right) \ge 0, \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow t^2+2mt+9\geq 0,\ \forall t>0$$
$$\Leftrightarrow m\geq -\frac{1}{2}\left(t+\frac{9}{t}\right),\ \forall t>0\Leftrightarrow m\geq -3.$$

Do m nguyên âm nên $m\in\{-3;-2;-1\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=-x^4-\left(4-m^2\right)x+2020$ và $g(x)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $h(x)=g\left[f(x)\right]$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.
(A) 13. (B) 12. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.
Ta có $g'(x)=-3x^2+10x-2020$ và $h(x)=g\left[f(x)\right]\Rightarrow h'(x)=g'\left[f(x)\right].f'(x)=0$. Do đó

$$\begin{aligned} h'(x)=0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} g'\left[f(x)\right]=0\\ f'(x)=0\end{bmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3f^2(x)+10(x)-2020=0\ (\text{vô nghiệm})\\ -4x^3-\left(4-m^2\right)=0\end{bmatrix}\\ &\Leftrightarrow x^3=\frac{m^2-4}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{m^2-4}{4}}.\end{aligned}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{\frac{m^2-4}{4}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗	

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\sqrt[3]{\frac{m^2-4}{4}}\leq 2\Leftrightarrow -6\leq m\leq 6$$

Vậy có 6 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hàm số $g(x)=f(1-x)$ có đạo hàm $g'(x)=(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m+6\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.
Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=-f'(1-x)\Rightarrow f'(1-x)=-g'(x)$.
Suy ra

$$\begin{aligned} & f'(1-x)=-(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m+6\right]\\ \Leftrightarrow\ & f'(1-x)=-\left[2+(1-x)\right]^{2021}\left[3-(1-x)\right]^{2020}\left[(1-x)^2-m(1-x)-2m+5\right].\end{aligned}$$

Vậy $f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}\left(x^2-mx-2m+5\right)$.
Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}\left(x^2-mx-2m+5\right)\leq 0\,\forall x\in(0;+\infty)\\ &\Leftrightarrow x^2-mx-2m+5\geq 0\,\forall x\in(0;+\infty)\\ &\Leftrightarrow m\leq\frac{x^2+5}{x+2}\,\forall x\in(0;+\infty).\qquad(*)\end{aligned}$$

Xét $h(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}=x-2+\dfrac{9}{x+2}$, $x\in(0;+\infty)$.
Ta có $h'(x)=1-\dfrac{9}{(x+2)^2}$. Do đó

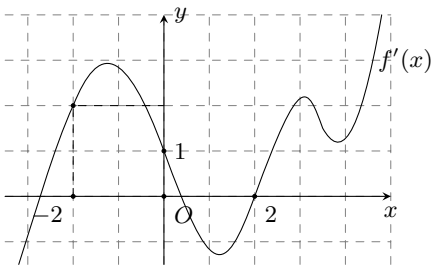
$$h'(x)=0\Leftrightarrow 1-\frac{9}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=3\\x+2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $(*)\Leftrightarrow m\le 2$, mà nguyên dương suy ra $m\in\{1;2\}$.
Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

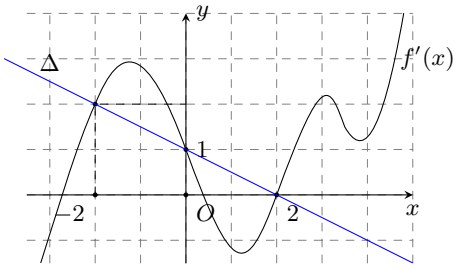
Câu 8.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A $(-\infty;-1)$. B $(-2;0)$. C $(0;2)$. D $(2;+\infty)$.



Lời giải.
Xét hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021$.
Suy ra $g'(x)=4f'(x)+2x-4=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)\right]$.
Để hàm số nghịch biến thì

$$g'(x)=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\frac{x}{2}+1\right)\right]\le 0\Leftrightarrow f'(x)\le\left(-\frac{x}{2}+1\right).$$

Trên hệ trục ta nhận thấy đường thẳng $\Delta\colon y=-\dfrac{x}{2}+1$ đi qua ba điểm $(-2;2)$, $(0;1)$, $(2;0)$.
Để $f'(x)\le\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ phải nằm dưới đường thẳng Δ.
Tương ứng với miền $\left[\begin{array}{l}x\le -2\\0\le x\le 2.\end{array}\right.$



Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
A $(-2;-1)$. B $(-3;-1)$. C $(1;+\infty)$. D $(-2;0)$.

Lời giải.
Ta có $f'(x+2)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\Rightarrow f'(x)=(x-2-1)(x-2-2)=(x-3)(x-4)$.
Khi đó $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=4.\end{array}\right.$

Đặt $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$. Ta có

$$g'(x)=(2x+4)\cdot f'\left(x^2+4x+7\right)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x+4=0\\ f'\left(x^2+4x+7\right)=0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}x=-2\\ x^2+4x+7=3\\ x^2+4x+7=4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\ (x+2)^2=0\\ x=-1\\ x=-3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\ x=-1\\ x=-3.\end{bmatrix}$$

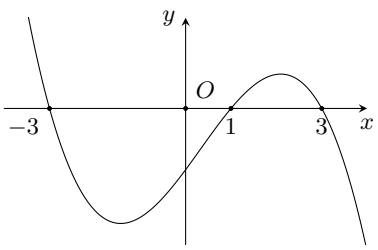
Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$, ta có hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
Chọn đáp án C □

Câu 10.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thoả $f(-3)=f(3)=\dfrac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x)=[f(3-x)]^2-f(3-x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A $(-3;1)$. B $(-\infty;-3)$. C $(0;2)$. D $(2;6)$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$f(1)$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

Suy ra $f(x)\le\dfrac{1}{2}\forall x\in\mathbb{R}$.
Mặt khác

$$g'(x)=-2f'(3-x)f(3-x)+f'(3-x)=-f'(3-x)\left[2f(3-x)-1\right].$$

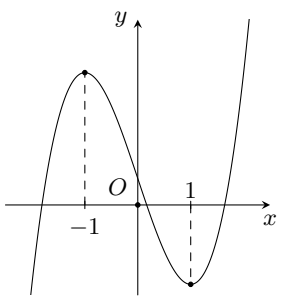
Ta có

$$\begin{aligned}g'(x)\le 0\quad&\Leftrightarrow\quad -f'(3-x)\left[2f(3-x)-1\right]\le 0\\ &\Leftrightarrow\quad f'(3-x)\le 0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3-x>3\\ -3<3-x<1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x<0\\ 2<x<6.\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Do đó hàm số g đồng biến trên khoảng $(2;6)$.
Chọn đáp án D □

Câu 11.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f\left(x^3-3x-1\right)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a;b)$; $(m;n)$; $(p;q)$. Giá trị của biểu thức $\left(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2\right)$ bằng



(A) 9. (B) 12. (C) 14. (D) 10.

Lời giải.

Đặt $u=x^3-3x-1\Rightarrow g(x)=f(u)=f\left(x^3-3x-1\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x-1\right)$.
Do đó

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x^3-3x-1=-1\\x^3-3x-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\\x=\pm\sqrt{3}\\x=-1\\x=2.\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
u'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};-1\right)$, $(0;1)$, $\left(\sqrt{3};2\right)$.
Vậy giá trị của biểu thức $\left(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2\right)=12$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên

(A) $(0;1)$. (B) $(1;2)$. (C) $(-1;0)$. (D) $(-3;-1)$.

Lời giải.

Cách 1: Tập xác định của hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ là $[-2;2]$.
Đạo hàm $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\cdot f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$.
Hàm số đồng biến thì $g'(x)\geq0$. Từ tập xác định ta có

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\geq0\end{cases}\\\begin{cases}x\in(-2;0)\\f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\leq0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\\begin{cases}-3\leq4-\sqrt{4-x^2}\leq1\\4-\sqrt{4-x^2}\geq4\end{cases}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-2;0)\\4-\sqrt{4-x^2}\leq1\end{cases}\\\begin{cases}x\in(-2;0)\\1\leq4-\sqrt{4-x^2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\\sqrt{4-x^2}\geq3\end{cases}\\\begin{cases}x\in(-2;0)\\\sqrt{4-x^2}\leq3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\x\in\varnothing\end{cases}\\\begin{cases}x\in(-2;0)\\x\in\mathbb{R}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-2;0)\,.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục
$g(x) = f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) = f(u)$, $u = 4 - \sqrt{4 - x^2}$, với $x \in [-2; 2]$.
Bảng biến thiên kép

x	-2		0		2
u	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	4
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right)$ nghịch biến trên
(A) $(5; 6)$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(2; 3)$. (D) $(3; 5)$.

Lời giải.

Cách 1: Tập xác định của hàm số $g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right)$ là $\mathscr{D} = [-1; 7]$.
Đạo hàm $g'(x) = \dfrac{3 - x}{\sqrt{7 + 6x - x^2}} \cdot f'\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right)$.
Hàm số nghịch biến khi $g'(x) \le 0$.
Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \in (-1; 3) \\ f'\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3; 7) \\ f'\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right) \ge 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \in (-1; 3) \\ -1 \le -1 + \sqrt{7 + 6x - x^2} \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3; 7) \\ \left[\begin{array}{l} -1 + \sqrt{7 + 6x - x^2} \le -1 \\ -1 + \sqrt{7 + 6x - x^2} \ge 2 \end{array}\right. \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \in (-1; 3) \\ \sqrt{7 + 6x - x^2} \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3; 7) \\ \sqrt{7 + 6x - x^2} \ge 3 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \in (-1; 3) \\ \left[\begin{array}{l} x \le 3 - \sqrt{7} \\ x \ge 3 + \sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x \le 3 - \sqrt{7} \\ 3 < x \le 3 + \sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục
$g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right) = f(u)$ với $u = -1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}$ và $x \in [-2; 2]$.
Bảng biến thiên kép

x	-1		$3 - \sqrt{7}$		3		$3 - \sqrt{7}$		7
u	-1		2		3		2		4
$f(u)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

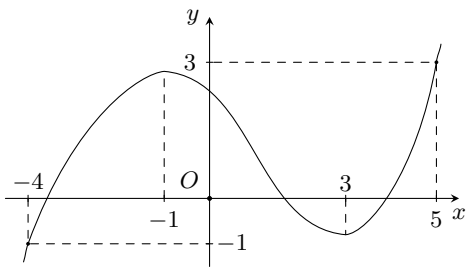
Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$ và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$

Chọn đáp án D □

Câu 14.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $f\left(f(x)\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0;2)$. B $(-3;-1)$. C $(3;5)$. D $(-5;-3)$.



Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]\Rightarrow g'(x)=f'(x)\cdot f'\left[f(x)\right]$.

Hàm số đồng biến khi

$$g'(x)=f'(x)\cdot f'\left[f(x)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\geq 0\\ f'\left[f(x)\right]\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f'(x)\leq 0\\ f'\left[f(x)\right]\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\leq -1\\ f(x)\geq 3\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-1\leq x\leq 3\\ -1\leq f(x)\leq 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\leq -4\\ x\geq 5\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-1\leq\leq 3\\ -4\leq x\leq 5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -4\\ -1\leq x\leq 3\\ x\geq 5.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x)=x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. B $(1;4)$. C $\left(\frac{1}{2};1\right)$. D $(0;1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ có biểu thức đạo hàm

$$g'(x)=3x^2\cdot f'\left(x^3+m\right)=3x^2\cdot\left(x^3+m\right)\left(x^3+m-2\right)\left(x^3+m+1\right).$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{m+1}$		$-\sqrt[3]{m}$		$-\sqrt[3]{m-2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

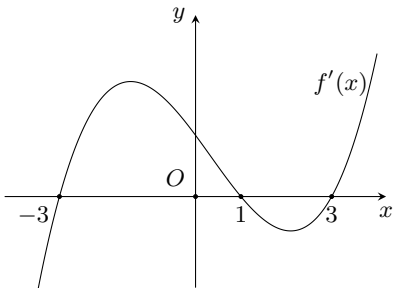
Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì ta phải có

$$\sqrt[3]{m-2}\leq 1\Leftrightarrow m\geq 1\Leftrightarrow m\in[1;+\infty).$$

Chọn đáp án B □

Câu 16.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ đồng biến trên khoảng$(1;3)$?



(A) 19. (B) 23. (C) 18. (D) 17.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)\Rightarrow g'(x)=2(x-1)\cdot f'\left(x^2-2x-m\right)$.
Với $\forall x\in(1;3)\Rightarrow x-1\geq 0$.
Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì

$$\begin{aligned}&g'(x)=2(x-1)\cdot f'\left(x^2-2x-m\right)\geq 0\Leftrightarrow f'\left(x^2-2x-m\right)\geq 0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x^2-2x-m\geq 3\\ &-3\leq x^2-2x-m\leq 1\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m\leq x^2-2x-3\\ &x^2-2x-1\leq m\leq x^2-2x+3\end{aligned}\right.,\forall x\in(1;3).\end{aligned}$$

Suy ra với $\forall x\in(1;3)$ ta có

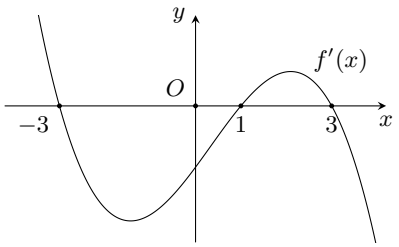
$$\left[\begin{aligned}&m\leq\min_{[1;3]}\left(x^2-2x-3\right)\\ &\max_{[1;3]}\left(x^2-2x-1\right)\leq m\leq\min_{[1;3]}\left(x^2-2x+3\right)\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m\leq 4\\ &2\leq m\leq 2\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&-20\leq m\leq -4\\ &m=2.\end{aligned}\right.$$

Do đó có 18 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x-m\right)$ đồng biến trên $[-2;-1]$.



(A) 24. (B) 25. (C) 26. (D) 31.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=3\left(x^2-1\right)\cdot f'\left(x^3-3x-m\right)$. Với $\forall x\in[-2;-1]\Rightarrow x^2-1\geq 0$.
Để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x-m\right)$ đồng biến trên $[-2;-1]$ thì

$$\begin{aligned}&3\left(x^2-1\right)\cdot f'\left(x^3-3x-m\right)\geq 0,\ \forall x\in[-2;-1]\\ \Leftrightarrow\ &f'\left(x^3-3x-m\right)\geq 0,\ \forall x\in[-2;-1]\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x^3-3x-m\leq -3,\ \forall x\in[-2;-1]\\ &1\leq x^3-3x-m\leq 3,\ \forall x\in[-2;-1]\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x^3-3x\leq m-3,\ \forall x\in[-2;-1]\\ &\begin{cases}m+1\leq x^3-3x\\ m-3\geq x^3-3x\end{cases},\ \forall x\in[-2;-1].\end{aligned}\right.\qquad(1)\end{aligned}$$

Xét hàm số $h(x)=x^3-3x\Rightarrow h'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=1\notin[-2;-1]\\ &x=-1\in[-2;-1].\end{aligned}\right.$
Ta có $h(-2)=-2$ và $h(-1)=2\Rightarrow\max_{[-2;-1]}h(x)=2$ và $\min_{[-2;-1]}h(x)=-2$.

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \max\limits_{[-2;-1]} h(x) \le m-3 \\ \begin{cases} m+1 \le \min\limits_{[-2;-1]} h(x) \\ m+3 \ge \max\limits_{[-2;-1]} h(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le m-3 \\ \begin{cases} m+1 \le -2 \\ m+3 \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 5 \\ \begin{cases} m \le -3 \\ m \ge -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge 5.$$

Mà $m \in [-30;30] \Rightarrow 5 \le m \le 30$, do đó có 26 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}+1}{2m-3-\sqrt{x^2-2x+2}}$ đồng biến trên $(-\infty;1)$?

(A) 21. (B) 19. (C) 22. (D) 20.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{x^2-2x+2}$. Xét trên $(-\infty;1)$ thì $u \in (1;+\infty)$.
Để $(-\infty;1)$ nằm trong tập xác định của hàm số đã cho thì

$$2m-3 \ne \sqrt{x^2-2x+2},\ \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow 2m-3 \le 1 \Leftrightarrow m \le 2.$$

Ta có hàm số $y = \dfrac{u+1}{2m-3-u} \Rightarrow y' = \dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2} \cdot u' = \dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2} \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.
Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ thì

$$y' = \frac{2m-2}{(2m-3-u)^2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} > 0,\ \forall x \in (-\infty;1).$$

Suy ra $2m-2<0 \Leftrightarrow m<1$.
Từ $m<1$, mà $m \in [-20;20]$, $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m = \{-20;-19;\ldots;0\}$.
Vậy có 21 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{x+4a}{x+b}$ và $g(x) = \dfrac{x+b}{x+a^2}$ cùng đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Gọi a_0 và b_0 lần lượt là những số nguyên dương nhỏ nhất của a và b thỏa mãn. Giá trị của biểu thức $T = a_0 + b_0$ tương ứng bằng

(A) 25. (B) 26. (C) 27. (D) 28.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{b-4a}{(x+b)^2} > 0 \Rightarrow b > 4 & (*) \\ g'(x) = \dfrac{a^2-b}{(x+a^2)} > 0 \Rightarrow a^2 > b & (**) \end{cases} \Rightarrow a^2 > 4a \Rightarrow a > 4 \Rightarrow a_0 = 5.$$

Từ $(*) \Rightarrow b > 4a_0 = 20 \Rightarrow b_0 = 21 \Rightarrow T = 26$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 3\left(m^2+m-1\right)x^2 + 3(m-1)x - m - 1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(b-a)$ bằng

(A) $4\sqrt{7}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 4. (D) $4\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3(m-1)x^2 - 6\left(m^2+m-1\right)x + 3(m-1)$ Hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$ nên

$$\begin{aligned} & f'(x) = 3(m-1)x^2 - 6\left(m^2+m-1\right)x + 3(m-1) \le 0\, \forall x \in (a;b) \\ \Rightarrow & (m-1)x^2 - 2\left(m^2+m-1\right)x + (m-1) \le 0\, \forall x \in (a;b) \\ \Rightarrow & -2xm^2 + \left(x^2-2x+1\right)m - x^2 + 2x - 1 \le 0\, \forall x \in (a;b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2xm^2-\left(x^2-2x+1\right)m+x^2-2x+1\geq 0\,\forall x\in(a;b)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ \Delta=(x-1)^4-8x(x-1)^2\leq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ (x-1)^2\left(x^2-10x+1\right)\leq 0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[5-2\sqrt{6};5+2\sqrt{6}\right]$$
$$\Rightarrow (b-a)_{\max}=5+2\sqrt{6}-\left(5-2\sqrt{6}\right)=4\sqrt{6}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=3m^2x^4-8mx^3+6x^2+12(2m-1)x+1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$; với a, b là những số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(2b-a)$ bằng

A 2. B $2\sqrt{2}$. C $\sqrt{5}$. D $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$ suy ra

$$f'(x)=12m^2x^3-24mx^2+12x+12(2m-1)\geq 0\,\forall x\in[a;b]$$
$$\Leftrightarrow m^2x^3-2mx^2+x+(2m-1)\geq 0\,\forall x\in[a;b]$$
$$\Leftrightarrow m^2x^3+\left(2-2x^2\right)m+x-1\geq 0\,\forall x\in[a;b]$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta=\left(1-x^2\right)^2-x^3(x-1)=(x-1)\left(x^2-x-1\right)\leq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}x\leq\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1\leq x\leq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 1\leq x\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

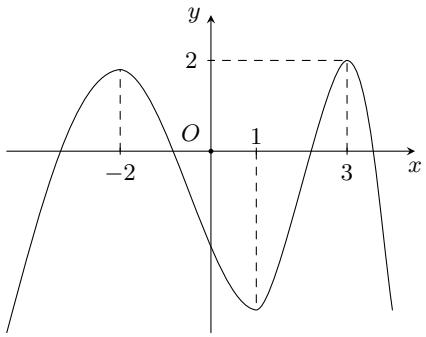
Suy ra $1\leq a\leq b\leq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow(2b-a)_{\max}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-3;-2)$. B $(-2;1)$. C $(-1;2)$. D $(3;+\infty)$.



Lời giải.

Ta luôn có $f(x)\leq 2<3$, suy ra phương trình $f(x)-3=0$ vô nghiệm.

Suy ra hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ có tập xác đinh là $\mathbb{R}$.

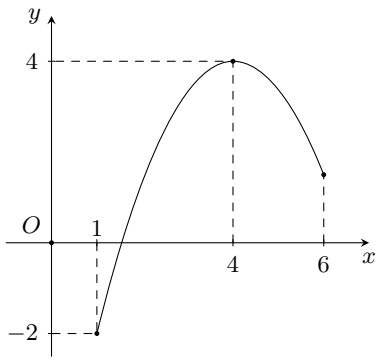
Đạo hàm: $y'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}$.

Hàm số nghịch biến thì

$$y'=-\frac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}<0\Leftrightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-2)\\ x\in(1;3).\end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 23.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;2021)$ để hàm số $y=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1;4)$?



(A) 19. (B) 21. (C) 20. (D) 22.

Lời giải.
Tập xác định của hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ là $\mathscr{D}=\{x\in R\mid f(x)\neq -m\}$.
Để khoảng $(1;4)\subset\mathscr{D}$ thì phương trình $f(x)=-m$ phải không có nghiệm $x\in(1;4)$.
Suy ra $\left[\begin{array}{l}-m\geq 4\\ -m\leq -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -4\\ m\geq 2.\end{array}\right.$ (1)
Đạo hàm $y'=g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{(f(x)+m)^2}$, để ý rằng trên luôn có $f'(x)>0$ với $\forall x\in(1;4)$.
Để hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1;4)$ thì

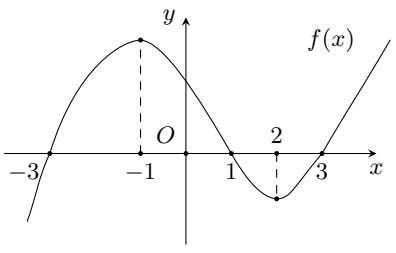
$$g'(x)=f'(x)\cdot\frac{m-5}{(f(x)+m)^2}<0,\ \forall x\in(1;4).$$

Suy ra $\dfrac{m-5}{(f(x)+m)^2}<0\Leftrightarrow m-5<0\Leftrightarrow m<5.$ (2)
Kết hợp (1) và (2) và điều kiện m nguyên, $m\in[-20;2021)$, ta suy ra

$$\left[\begin{array}{l}-20\leq m\leq -4\\ 2\leq m<5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-20\leq m\leq -4\\ 2\leq m\leq 4.\end{array}\right.$$

Có 20 giá trị nguyên của thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) □

Câu 24.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=(f(x))^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(1;3)$. (B) $(2;3)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(-3;-1)$.

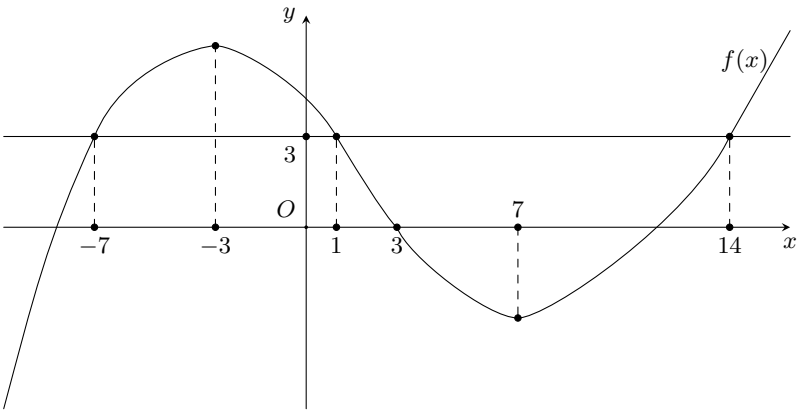
Lời giải.
Đạo hàm $y'=2f'(x)\cdot f(x)$.
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)\cdot f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y=(f(x))^2$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$, $(1;2)$, $(3;+\infty)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=[f(x)]^2-6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-3;2)$. (B) $(7;14)$. (C) $(14;+\infty)$. (D) $(1;7)$.



Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=[f(x)]^2-6f(x)$.
Có $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-6f'(x)=2f'(x)\,[f(x)-3]$.
Hàm số nghịch biến khi

$$g'(x)=2f'(x)\,[f(x)-3]\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\ge 0\\ f(x)-3\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}f'(x)\le 0\\ f(x)-3\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

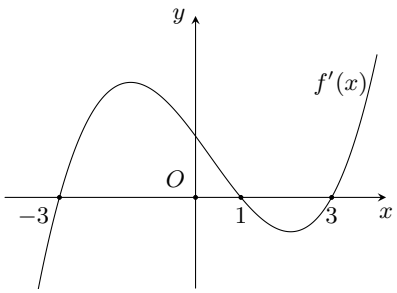
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 7\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 1\le x\le 14\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-3\le x\le 7\\ \left[\begin{array}{l}-7\le x\le 1\\ x\ge 14\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 7\le x\le 14\end{array}\right.\\ -3\le x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 7\le x\le 14\\ -3\le x\le 1.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ nghịch biến trên$(-1;2)$.

(A) 0. (B) 1. (C) 28. (D) 23.



Lời giải.

Ta có: $g'(x)=2\,(x-1)\cdot f'\left(x^2-2x-m\right)$.
Để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x-m\right)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ thì

$$\begin{array}{l}g'(x)=2\,(x-1)\cdot f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\ \forall x\in(-1;2)\\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}2\,(x-1)\cdot f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\ \forall x\in(-1;1)\\ 2\,(x-1)\cdot f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\ \forall x\in(1;2)\end{cases}\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'\left(x^2-2x-m\right)\geq 0,\ \forall x\in(-1;1) \\ f'\left(x^2-2x-m\right)\leq 0,\ \forall x\in(1;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x-m\geq 3 \\ -3\leq x^2-2x-m\leq 1 \end{array}\right.,\ \forall x\in(-1;1) \\ \left[\begin{array}{l} 1\leq x^2-2x-m\leq 3 \\ x^2-2x-m\leq -3 \end{array}\right.,\ \forall x\in(1;2) \end{cases}$$

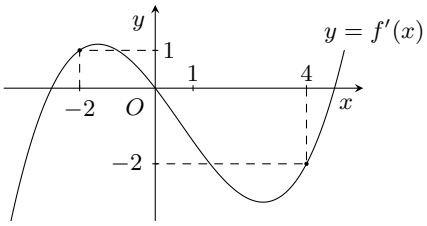
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x\geq m+3 \\ m-3\leq x^2-2x\leq m+1 \end{array}\right.,\ \forall x\in(-1;1) \\ \left[\begin{array}{l} m+1\leq x^2-2x\leq m+3 \\ x^2-2x\leq m-3 \end{array}\right.,\ \forall x\in(1;2). \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $h(x)=x^2-2x\Rightarrow h'(x)=2x-2=0\Leftrightarrow x=1$.
Với $\forall x\in(-1;1)\Rightarrow h'(x)=2x-2<0\Rightarrow h(1)<h(1)<h(-1)\Leftrightarrow -1<h(x)<3,\ \forall x\in(-1;1)$.
Với $\forall x\in(1;2)\Rightarrow h'(x)=2x-2>0\Rightarrow h(1)<h(x)<h(2)\Leftrightarrow -1<h(x)<0,\ \forall x\in(1;2)$.
Do đó

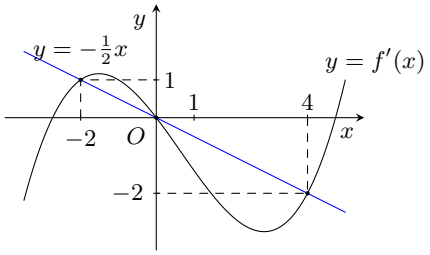
$$(1)\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -1\geq m+3 \\ \begin{cases} m-3\leq -1 \\ 3\leq m+1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1\leq -1 \\ 0\leq m+3 \end{cases} \\ 0\leq m-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -4\geq m \\ \begin{cases} m\leq 2 \\ 2\leq m \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\leq -2 \\ -3\leq m \end{cases} \\ 3\leq m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\leq -4 \\ m=2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -3\leq m\leq -2 \\ m\geq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Vậy không có giá trị nguyên của $m\in[-30;30]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 27.
Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f\left(1-2x\right)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?
(A) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. (B) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. (C) $(-2;-1)$. (D) $(2;3)$.



Lời giải.
Ta có $g(x)=f\left(1-2x\right)+x^2-x\Rightarrow g'(x)=-2f'\left(1-2x\right)+2x-1$.
Đặt $t=1-2x\Rightarrow g'(x)=-2f'(t)-t$.
$g'(x)=0\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{t}{2}$.
Vẽ đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến khi $g'(x)\leq 0\Rightarrow f'(t)\geq -\dfrac{t}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2\leq t\leq 0 \\ t\geq 4. \end{array}\right.$

Như vậy

$$f'\left(1-2x\right)\geq \frac{1-2x}{-2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2\leq 1-2x\leq 0 \\ 4\leq 1-2x \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\leq x\leq \frac{3}{2} \\ x\leq -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\frac{3}{2}\right)\subset\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-40;40]$ để hàm số $g(x)=\left|x^2-4mx+m-3\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

A) 79. B) 39. C) 80. D) 40.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=|f(x)|=\left|x^2-4mx+m-3\right|$ có $f'(x)=2x-4m$.
Để hàm số nghịch biến trên $(1;3)$ thì

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(-1)\geq 0\\ f'(x)=2x-4m\leq 0\end{cases},\forall x\in(-2;-1)\\ \begin{cases}f(-1)\leq 0\\ f'(x)=2x-4m\geq 0\end{cases},\forall x\in(-2;-1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5m-2\geq 0\\ m\geq\dfrac{x}{2}\end{cases},\forall x\in(-2;-1)\\ \begin{cases}5m-2\leq 0\\ m\leq\dfrac{x}{2}\end{cases},\forall x\in(-2;-1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\geq\dfrac{2}{5}\\ m\geq-\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}m\leq\dfrac{2}{5}\\ m\leq-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq\dfrac{2}{5}\\ m\leq-1.\end{array}\right.$$

Vì $m\in[-40;40]$ nên $\left[\begin{array}{l}1\leq m\leq 40\\ -40\leq m\leq -1.\end{array}\right.$

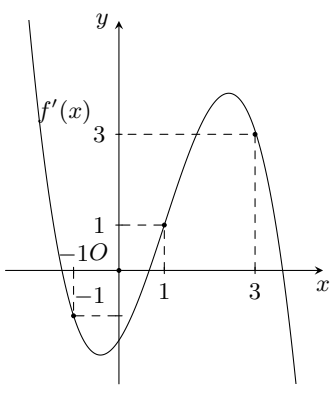
Vậy có 80 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 29.

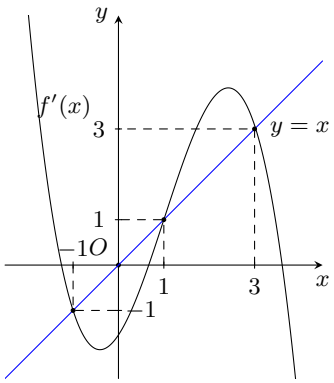
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ. Hàm số $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A) $(0;1)$. B) $(-3;1)$. C) $(1;3)$. D) $(-2;0)$.



Lời giải.

Ta có đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm $x=-1;\ x=1;\ x=3$ như hình vẽ sau



Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x) > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 3 \end{array}\right.$ và $f'(x) < x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x > 3 \end{array}\right.$.

☑ **Trường hợp 1:** $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, khi đó ta có $g(x) = 2f(1-x) - x^2 + 2x + 2020$.
Ta có $g'(x) = -2f'(1-x) + 2(1-x)$. Do đó

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow -2f'(1-x) + 2(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 1-x \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < 1-x < 1 \\ 1-x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x < -2. \end{array}\right.$

☑ **Trường hợp 2:** $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, khi đó ta có $g(x) = 2f(x-1) - x^2 + 2x + 2020$.
$g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$.
Từ đó

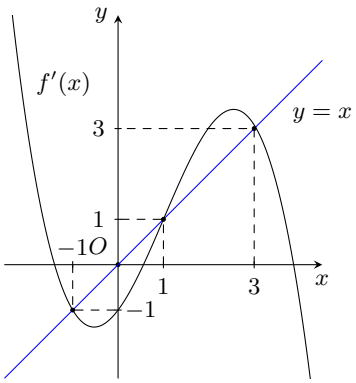
$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x-1 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 < -1 \\ 1 < x-1 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 < x < 4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

Vậy hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 30.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ. Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(0;1)$. (B) $(-3;1)$. (C) $(1;3)$. (D) $(-2;0)$.



Lời giải.

☑ Với $x > 1$, ta có $g(x) = 2f(x-1) - (x-1)^2 + 2021$, $g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$.
Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x-1$. (∗)
Đặt $t = x - 1$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow f'(t) > t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < t < 3 \\ t < -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x < 0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

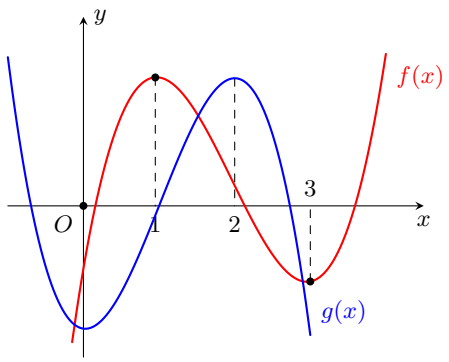
☑ Với $x<1$, ta có $g(x)=2f(1-x)-(1-x)^2+2021$, $g'(x)=-2f'(1-x)+2(1-x)$.
Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(1-x)+2(1-x)>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<1-x$. $(**)$
Đặt $t=1-x$, khi đó

$$(**)\Leftrightarrow f'(t)<t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t<1 \\ t>3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x<-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x<-2. \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;1)$, $(2;4)$.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng

A 0. B -2. C -4. D 3.



Lời giải.
Xét hàm số $y=f(2x-1)\Rightarrow (f(2x-1))'=2f'(2x-1)$ nghịch biến khi

$$y'<0\Leftrightarrow (f(2x-1))'=2\cdot f'(2x-1)<0\Leftrightarrow f'(2x-1)<0\Leftrightarrow 1<2x-1<3\Leftrightarrow 1<x<2.$$

Xét hàm số $y=g(ax+b)\Rightarrow (g(ax+b))'=a\cdot g'(ax+b)$ nghịch biến khi xảy ra hai trường hợp

☑ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} a>0 \\ g'(ax+b)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \left[\begin{array}{l} ax+b<0 \\ ax+b>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{-b}{a} \\ x>\dfrac{2-b}{a}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Nếu $a>0$ thì hàm số $y=g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{a}\right);\left(\dfrac{2-b}{a};+\infty\right)$ không thỏa mãn điều kiện có khoảng nghịch biến là $(1;2)$.

☑ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} a<0 \\ g'(ax+b)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ 0<ax+b<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ -\dfrac{b-2}{a}<x<-\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

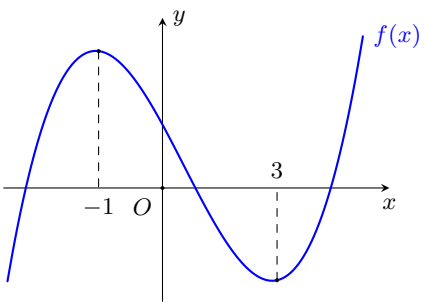
Nếu $a<0$ thì hàm số $y=g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b-2}{a};\dfrac{-b}{a}\right)$

Yêu cầu bài toán là hai hàm số $y=f(2x-1), y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất nên

$$\begin{cases} -\dfrac{b-2}{a}=1 \\ \dfrac{-b}{a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow 4a+b=-4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó hàm số $f\left(x^3+3x-1\right)$ nghịch biến trên



(A) $(1;2)$. (B) $(0;1)$. (C) $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. (D) $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x-1\right)$.
Đạo hàm hàm hợp $g'(x)=\left(3x^2+3\right)\cdot f'\left(x^3+3x-1\right)=3\left(x^2+1\right)\cdot f'\left(x^3+3x-1\right)$.
Để hàm số nghịch biến thì $g'(x)=3\left(x^2+1\right)\cdot f'\left(x^3+3x-1\right)\le 0$.
Ta có

$$\begin{aligned} & f'\left(x^3+3x-1\right)\le 0 \Leftrightarrow -1\le x^3+3x-1\le 3 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^3+3x\ge 0 \\ x^3+3x-4\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+3\right)\ge 0 \\ (x-1)\left(x^2+x+4\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

(A) $(-\infty;1)$. (B) $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. (C) $(1;3)$. (D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'\cdot f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}=\dfrac{(2x-2)\cdot f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3. \end{array}\right.$

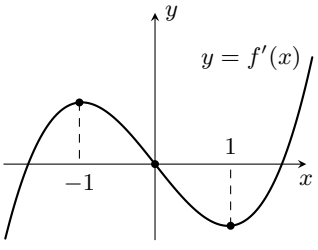
Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=|4f(\sin x)+\cos 2x-a|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?



(A) 2. (B) 3. (C) Vô số. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $g(x)=|4f(\sin x)+\cos 2x-a| \Rightarrow g(x)=\sqrt{[4f(\sin x)+\cos 2x-a]^2}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{[4\cos x\cdot f'(\sin x)-2\sin 2x]\,[4f(\sin x)+\cos 2x-a]}{\sqrt{[4f(\sin x)+\cos 2x-a]^2}}$.

Ta có $4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x=4\cos x\,[f'(\sin x)-\sin x]$.

Với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x>0,\sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)-\sin x<0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x)+\cos 2x-a\geq 0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x\geq a,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\sin x$ được $4f(t)+1-2t^2\geq a,\forall t\in(0;1)$.

Xét $h(t)=4f(t)+1-2t^2\Rightarrow h'(t)=4f'(t)-4t=4\,[f'(t)-1]$.

Với $t\in(0;1)$ thì $h'(t)<0\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $\Leftrightarrow a\leq h(1)=4f(1)+1-2.1^2=3$.

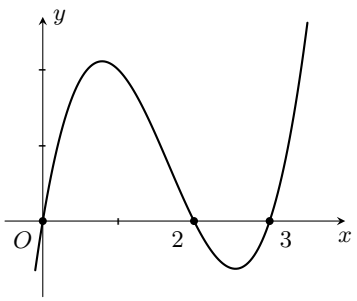
Vậy có 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35.

Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4. Đồ thị của hàm số $y=f'(1-x)$ được cho như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

(A) $(-2;1)$. (B) $(-1;0)$. (C) $(1;2)$. (D) $(0;1)$.



Lời giải.

Đặt $t=1-x\Rightarrow f(t)=f(1-x)\Rightarrow f'(t)=-f'(1-x)$.

Ta có $f'(t)=0\Rightarrow f'(1-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\\t=-2.\end{array}\right.$

Ta có $f'(t)>0\Leftrightarrow f'(1-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\2<x<3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t>1\\-2<t<-1.\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của $f(t)$

t	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗		↘		↗	

Mặt khác $g'(x)=2x\cdot f'\left(x^2-3\right)$

Nên $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x\cdot f'\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-3\right)=0.\end{array}\right.$

Ta có

$$f'\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3=1\\x^2-3=-1\\x^2-3=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm 1.\end{array}\right.$$

Lại có

$$f'\left(x^2-3\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3>1 \\ -2<x^2-3<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \\ -\sqrt{2}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Khi đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

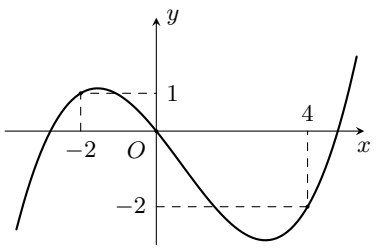
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thoả mãn $-10 \leq m \leq 10$ và hàm số $y=f\left(x^2+2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

(A) 5. (B) 4. (C) 6. (D) 1.

Lời giải.

Xét $y=g(x)=f\left(x^2+2x+m\right)$.
Ta có $y'=g'(x)=2(x+1)f'\left(x^2+2x+m\right)$.
Vì $x+1>0,\ \forall x\in(0;1)$ nên để hàm số $y=f\left(x^2+2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'\left(x^2+2x+m\right)>0,\ \forall x\in(0;1)$.
Do hàm số x^2+2x+m luôn đồng biến trên $(0;1)$ nên đặt $t=x^2+2x+m$.
Vì $x\in(0;1)$ nên $t\in(m;m+3)$.
Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có $\left[\begin{array}{l} m+3\leq -2 \\ \begin{cases} m\geq 0 \\ m+3\leq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -5 \\ m=0. \end{array}\right.$
Mà $-10<m<10$ nên $m=\{-9;-8;-7;-6;-5;0\}$.
Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\neq 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$ .Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là



(A) 12. (B) 9. (C) 6. (D) 15.

Lời giải.

Xét $g'(x)=-2f'(3-2x+m)+2x-(m+3)$. Xét phương trình $g'(x)=0$.
Đặt $t=3-2x+m$ thì phương trình trở thành $-2.\left[f'(t)-\dfrac{-t}{2}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=4 \\ t=0. \end{array}\right.$
Từ đó, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{5+m}{2}, x_2=\dfrac{m+3}{2}, x_3=\dfrac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x>x_1$

thì $t < t_1$ nên $f(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.
Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x) \le 0, \forall x \in (0;1)$ từ đó suy ra

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3+m}{2} \le 0 < 1 \le \dfrac{5+m}{2} \\ 1 \le \dfrac{-1+m}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \ge -3 \\ m \ge 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m \ge -3 \xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m\in(-6,6)} m \in \{-3, \ldots; 4, 5\}.$$

Vậy có 9 giá trị m thoả mãn đề bài.
Chọn đáp án B □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y = mx^9 + \left(m^2 - 3m + 2\right)x^6 + \left(2m^3 - m^2 - m\right)x^4 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A Vô số. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 9mx^8 + 6\left(m^2 - 3m + 2\right)x^5 + 4\left(2m^3 - m^2 - m\right)x^3 \\ &= x^3\left(9mx^5 + 6\left(m^2 - 3m + 2\right)x^2 + 4\left(2m^3 - m^2 - m\right)\right) \end{aligned}$$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Mặt khác ta thấy $y' = 0$ có nghiệm bội lẻ $x = 0$.
Do đó để $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì phương trình

$$9mx^5 + 6\left(m^2 - 3m + 2\right)x^2 + 4\left(2m^3 - m^2 - m\right) = 0$$

có nghiệm $x = 0$.

Suy ra $2m^3 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{2} \\ m = 0. \end{bmatrix}$

Thử lại

- Với $m = 0 \Rightarrow y' = 12x^5$.
- Với $m = 1 \Rightarrow y' = 9x^8 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y' = -\dfrac{9}{2}x^8 + \dfrac{45}{2}x^5$.

Vậy có 1 giá trị m.
Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2}{5}m^2x^5 - \dfrac{8}{3}mx^3 - \left(m^2 - m - 20\right)x + 1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A 7. B 9. C 8. D 10.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{2}{5}m^2x^5 - \dfrac{8}{3}mx^3 - \left(m^2 - m - 20\right)x + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20.$$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Đặt $t = x^2, t \ge 0$ ta có $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 \ge 0 \quad (*), \forall t \ge 0$ nên ta có các trường hợp sau

☑ Với $m=0$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow 20 \geq 0$. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

☑ Với $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2+8m^4-8m^3-160m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2-m-12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3 \leq m \leq 4. \end{cases}$

☑ Với $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2+8m^4-8m^3-160m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2-m-12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -3. \end{cases}$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $2m^2t^2-8mt-m^2+m+20=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $t_1 < t_2 \leq 0$

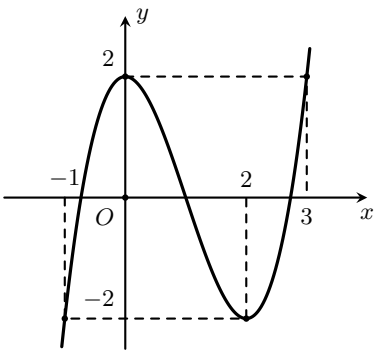
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{m} < 0 \\ \dfrac{-m^2+m+20}{2m^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2+m+20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -4 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có $-4 \leq m < -3$.
Vậy để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} -3 \leq m \leq 4 \\ -4 \leq m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}.$$

Chọn đáp án (B) □

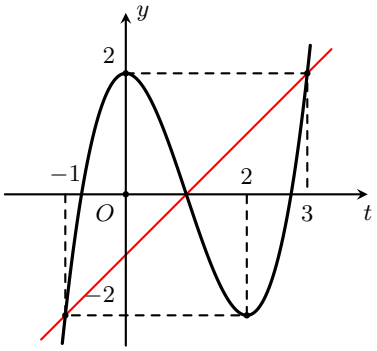
Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x-m)-\dfrac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



(A) 4. (B) 11. (C) 14. (D) 20.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$.
Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x-m)=x-m-1$.
Đặt $x-m=t \Rightarrow f'(t)=t-1$.
Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và và đường thẳng $y=t-1$.



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t)=t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=1 \\ t=3. \end{cases}$

Khi đó ta có bảng xét dấu $g'(t)$

t	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Hay $\begin{cases} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-m < 1 \\ x-m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < x < m+1 \\ x > m+3. \end{cases}$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ thì $\begin{cases} m-1 \leq 5 < 6 \leq m+1 \\ m+3 \leq 5 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2. \end{cases}$

Vì m là các số nguyên dương nên $S = \{1; 2; 5; 6\}$.
Vậy tổng tất cả các phần tử của S là: $1 + 2 + 5 + 6 = 14$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = 2(m+1)x^3 + 3\left(m^2 - 5m - 4\right)x^2 - 6\left(3m^2 - 6m - 19\right)x - 32\sqrt{(x+1)^3} + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. Số phần tử của tập hợp S là

A 3. B 0. C 1. D 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6 \cdot \left[(m+1)x^2 + \left(m^2 - 5m - 4\right)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19\right]$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \quad (m+1)x^2 + \left(m^2 - 5m - 4\right)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19 \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad [x-3] \cdot \left[(m+1)x + m^2 - 2m - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right] \geq 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot g(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty).$$

Với $g(x) = (m+1)x + m^2 - 2m - 1 - \dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}$.

Điều kiện cần:

$$g(3) = 0 \Leftrightarrow 3(m+1) + m^2 - 2m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 0 \\ m = -1. \end{bmatrix}$$

Điều kiện đủ:

Với $m = 0$ ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-3)\left(x - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right) \\ &= (x-3)\left[(x-3) + \left(2 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)\right] = (x-3)\left[(x-3) + \frac{2(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}+2}\right] \\ &= (x-3)^2\left[1 + \frac{2}{(\sqrt{x+1}+2)^2}\right] \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Rightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Với $m = -1$ ta có

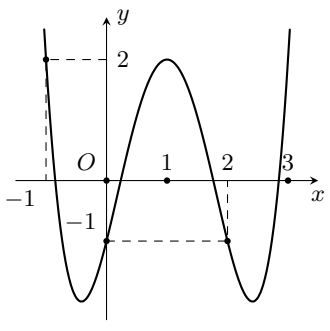
$$f'(x) = (x-3)\left(2 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right) = (x-3) \cdot \frac{2(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{2(x-3)^2}{(\sqrt{x+1}+2)^2} \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

Vậy $m = -1$ thoả mãn.

Vậy số phần tử là 2.
Chọn đáp án D □

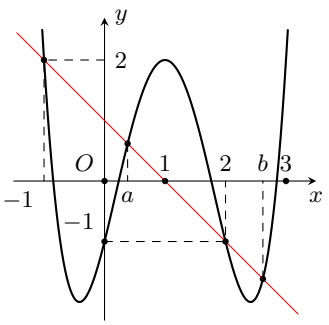
Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'\left(x^2 - 2x\right)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right) + \dfrac{2}{3}x^3 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A $(-3; -2)$. B $(1; 2)$. C $(-2; -1)$. D $(-1; 0)$.



Lời giải.

Đặt $t = x + 1 \Leftrightarrow t - 1 = x$.
Khi đó $y(t) = f\left(t^2 - 2t\right) + \dfrac{2}{3}(t-1)^3 + 1$.
$\Rightarrow y'(t) = 2(t-1)f'\left(t^2 - 2t\right) + 2(t-1)^2 = 2(t-1)\left[f'\left(t^2 - 2t\right) + t - 1\right]$.
Cho



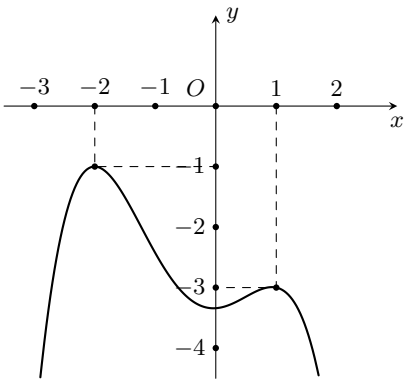
$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ f'\left(t^2 - 2t\right) = 1 - t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = -1 \\ t = 1 \in (0;1) \\ t = 2 \\ t = b \in (2;3) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = -2 \\ x = a - 1 \in (-1;0) \\ x = 1 \\ x = b - 1 \in (1;2). \end{bmatrix}$$

Với $x = 2 \Rightarrow t = 3$, ta có $\begin{cases} t - 1 > 0 \\ f'(t^2 - 2t) > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$.
Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$a-1$		0		1		$b-1$	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

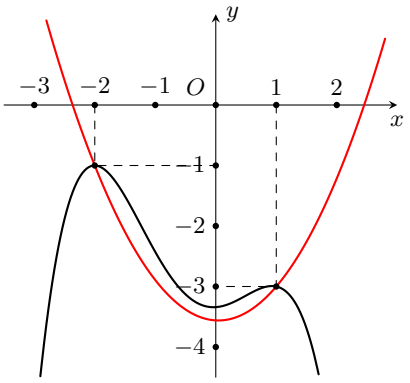
Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(3x+1) - 3\left(2x^3 + 2x^2 - 3x + 5\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-\infty;-2)$, $(1;+\infty)$.
B $(-3;0)$.
C $(-\infty;-1)$.
D $(-1;2)$.

Lời giải.
Ta có $g'(x) = 3f'(3x+1) - \left(18x^2 + 12x - 9\right) < 0$.



$$\Leftrightarrow f'(3x+1) < 6x^2 + 4x - 3 = \frac{2}{3}\left(9x^2 + 6x + 1\right) - \frac{11}{3} = \frac{2}{3}(3x+1)^2 - \frac{11}{3}$$

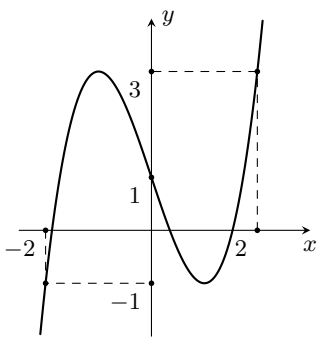
Đặt $t = 3x + 1$, ta được $f'(t) < \dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{11}{3}$.
Vẽ Parabol $(P) : y = \dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{11}{3}$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy với đồ thị hàm số $y = f'(t)$ như hình vẽ bên.
Ta thấy $f'(t) < \dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{11}{3}$ với mọi $t \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3x + 1 < -2 \\ 3x + 1 > 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -1 \\ x > 0. \end{bmatrix}$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(2x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$. Đồng biến trên khoảng nào sau đây

(A) $(-\infty; -3)$. (B) $(-3; 0)$. (C) $(1; 4)$. (D) $(3; +\infty)$.



Lời giải.

Ta có $g(x) = f(x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ có $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1)$.

Đặt $x = 2t+1$, phương trình $(1) \Leftrightarrow f'(2t+1) = \frac{1}{2}(2t+1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(2t+1) = t+1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(2x+1)$ phương trình có các nghiệm

$$f'(2t+1) = t+1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 5. \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có bảng biến thiên

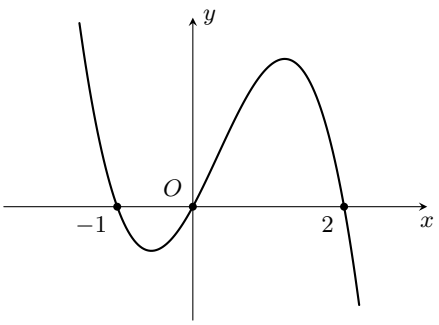
x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3; 1)$, $(5; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(3-2x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = f\left(x^2+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào

(A) $(-\infty; 0)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(2; +\infty)$. (D) $(-1; 0)$.



Lời giải.

Đặt $t = 3 - 2x \Rightarrow f'(t) = f'(3-2x)$.

Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \Rightarrow t = 5 \\ x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 2 \Rightarrow t = -1. \end{bmatrix}$

Khi đó ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(5)$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét $g(x)=f\left(x^2+1\right)$, ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2+1\right)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2xf'\left(x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=-1 \\ x^2+1=3 \\ x^2+1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2. \end{array}\right.$

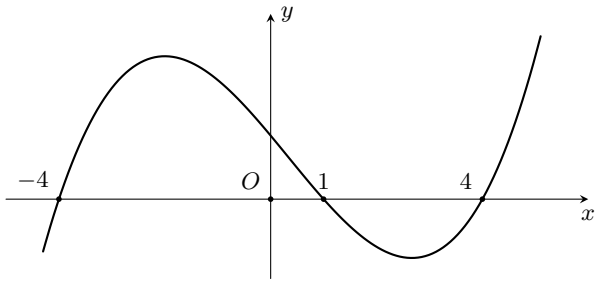
Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(-\sqrt{2})$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(\sqrt{2})$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó hàm số $f\left(x^2+1\right)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g(x)=(f(2-x))'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ như hình bên. Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A $(-\infty;-1)$. B $(0;1)$.

C $(1;2)$. D $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3 nên có dạng $g(x)=(f(2-x))'=a(x+4)(x-1)(x-4),(a>0)$.

$\Rightarrow f'(2-x)=-a(x+4)(x-1)(x-4)$.

Đặt $t=2-x \Rightarrow f'(t)=a(t-6)(t+2)(t-1)$.

Dạo hàm của hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2021$ là

$$y'=2xf'\left(x^2+2\right)-3x^2+4x-1=2ax\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)+\left[-3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]$$

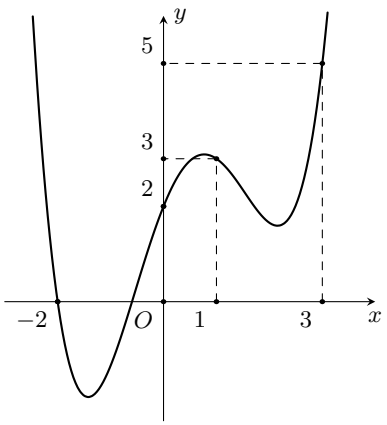
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$2xf'(x^2+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x^2+4x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f'\left(x^2+4x\right)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(x^2-4\right) - \dfrac{2}{3}x^3 + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào



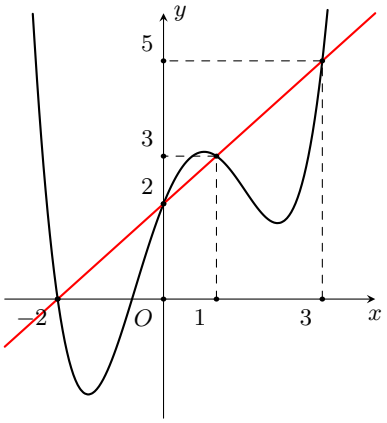
(A) $(0;3)$. (B) $(3;5)$. (C) $(2;3)$. (D) $(4;6)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2xf'\left(x^2-4\right) - 2x^2 = 2x\left[f'\left(x^2-4\right) - x\right]$.

Đặt $t = x-2 \Rightarrow x = t+2$.

Suy ra $g'(t) = 2(t+2)\left[f'\left(t^2+4t\right) - t - 2\right]$.



Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(t^2+4t\right) = t+2 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 3. \end{array}\right.$

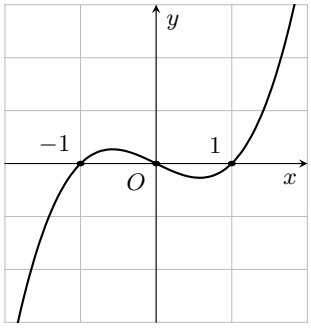
Khi đó ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left[\begin{array}{l} t < 0 \\ 1 < t < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 = 0 \\ 1 < x-2 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ 3 < x < 5. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x) = \left[f\left(x^2-4\right)\right]'$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $h(x) = f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$?



(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có: $g(x) = \left[f\left(x^2-4\right)\right]' = 2xf'\left(x^2-4\right)$.

Dựa trên đồ thị ta có $g(x) = kx(x-1)(x+1) = kx\left(x^2-1\right); k > 0$.

Vì vậy $f'\left(x^2-4\right) = \dfrac{k}{2}\left(x^2-1\right); k > 0$. Đặt $t = x^2-4, t \geq -4$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{k}{2}(t+3); k > 0$ Phương trình đạo hàm $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -3$.

Bảng xét dấu

t	-4		-3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

Hàm số $h(x)=f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi: $h'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x+m\right)>0, \forall x\in(0;1)$ mà $2x+1>0, \forall x\in(0;1)$ nên

$$\begin{aligned} & h'(x)>0, \forall x\in(0;1) \\ \Leftrightarrow\ & f'\left(x^2+x+m\right)>0, \forall x\in(0;1) \\ \Leftrightarrow\ & x^2+x+m>-3, \forall x\in(0;1) \\ \Leftrightarrow\ & m>-x^2-x-3, \forall x\in(0;1) \\ \Leftrightarrow\ & m\geq \max_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right)=-3. \end{aligned}$$

Kết luận có 3 giá trị nguyên âm của m thỏa đề là $m=-1;-2;-3$.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. B $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. C $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1\right)$. D $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right)$.

Lời giải.

Xét $y=f\left(x^2-2x\right)$ có $y'=2xf'\left(x^2-1\right)$. Cho $y'=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-1\right)=0. \end{array}\right.$
Có $x=\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội lẻ của $f'\left(x^2-1\right)=0$ và $f'(1)=0$.
Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Xét $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$, cho $g'(x)=\left(6x^2-1\right)f'\left(2x^3-x\right)$.
Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2x^3-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ x=1. \end{array}\right.$
Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y = f\left(x^2 - 2\right)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x + 3\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty; -2)$. (B) $(-2; 1)$. (C) $(1; 2)$. (D) $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x \cdot f'\left(x^2 - 2\right)$, dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Cho $f'\left(x^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$ và dó đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Xét $g(x) = f\left(x^3 - 3x + 3\right)$ ta có $g'(x) = \left(3x^2 - 3\right) f'\left(x^3 - 3x + 3\right).$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(3x^2 - 3\right) = 0 \\ f'\left(x^3 - 3x + 3\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x + 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

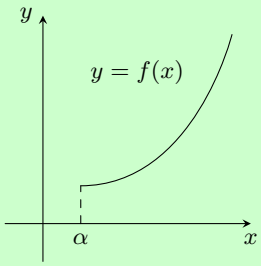
ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. B	5. B	6. D	7. C	8. C	9. C	10. D
11. B	12. C	13. D	14. A	15. B	16. C	17. C	18. A	19. B	20. D
21. C	22. A	23. C	24. D	25. B	26. A	27. A	28. C	29. A	30. A
31. B	32. B	33. C	34. B	35. D	36. C	37. B	38. B	39. B	40. C
41. D	42. C	43. C	44. D	45. D	46. C	47. B	48. D	49. A	50. C

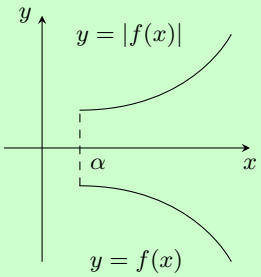
ĐỀ VDC SỐ 4: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên đoạn $[a;+\infty)$ khi và chỉ khi

a) $\begin{cases} y'(\alpha)\geq 0, \forall x\in[\alpha;+\infty) \\ y(\alpha)\geq 0 \end{cases}$

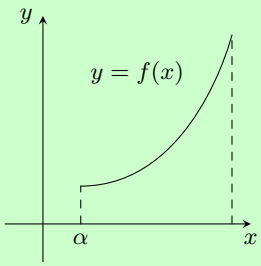


b) $\begin{cases} y'(\alpha)\leq 0, \forall x\in[\alpha;+\infty) \\ y(\alpha)\leq 0 \end{cases}$

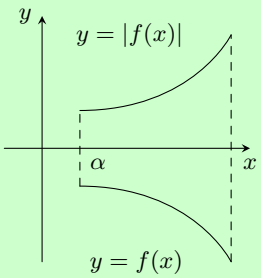


Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha;\beta)$ khi và chỉ khi

a) $\begin{cases} y'(\alpha)\geq 0, \forall x\in(\alpha;\beta) \\ y(\alpha)\geq 0 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y'(\alpha)\leq 0, \forall x\in(\alpha;\beta) \\ y(\alpha)\leq 0 \end{cases}$



Các dạng đồng biến $y=|f(x)|$ trên $(-\infty;a],[\alpha;\beta]$ ta thực hiện tương tự.
Hàm số hỏi nghịch biến làm ngược lại.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^5-5x^2+5(m-1)x-8\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

(A) 2. (B) 0. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^5-5x^2+5(m-1)x-8$.
Trường hợp 1. $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$ thì hàm số $y=|f(x)|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
Trường hợp 2. $f(x)=0$ không có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$.
Ta có $f'(x)=5x^4-10x+5(m-1)$.
Khi đó $y=\left|x^5-5x^2+5(m-1)x-8\right|=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x)\cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y'\leq 0$ với $\forall x\in(-\infty;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)\cdot f(x)\leq 0 \\ f(x)\neq 0 \end{cases}, \forall x\in(-\infty;1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<0 \\ f'(x)\geq 0 \end{cases}, \forall x\in(-\infty;1) \ (\text{vì } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=5x^4-10x+5(m-1)\geq 0, \forall x\in(-\infty;1) \\ f(1)=5m-17\leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^4+2x+1,\ \forall x \in (-\infty;1) \\ m \leq \dfrac{17}{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max\limits_{(-\infty;1)} (-x^4+2x+1) = \dfrac{3}{2\cdot\sqrt[3]{2}}+1 \\ m \leq \dfrac{17}{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2\cdot\sqrt[3]{2}}+1 \leq m \leq \dfrac{17}{5}$$
$$\Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|2x^3 - mx + 1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A) 2. B) 6. C) 3. D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - mx + 1$.

Trường hợp 1. $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1;+\infty)$ thì hàm số$y = |f(x)|$ không thể đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Trường hợp 2. $f(x) = 0$ không có nghiệm $x_0 \in (1;+\infty)$. Ta có $f'(x) = 6x^2 - m$.

Khi đó $y = \left|2x^3 - mx + 1\right| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \dfrac{f'(x)\cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)\cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \forall x \in (1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases} \forall x \in (1;+\infty)\ (\text{vì } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - mx + 1 > 0 \\ 6x^2 - m \geq 0 \end{cases} \forall x \in (1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(1) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m + 1 \geq 0 \\ 6 - m \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow m \leq 3$$
$$\Rightarrow m \in \{1;2;3\}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A) 6. B) 4. C) 3. D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1) \Leftrightarrow m-5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.
Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m<10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{5;6;7;8;9\}$.
Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^4+2x^3+mx+2\right|$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$?

(A) $m \geq 1$. (B) $m \in \varnothing$. (C) $0 \leq m \leq 1$. (D) $m \leq 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=x^4+2x^3+mx+2 \Rightarrow f'(x)=4x^3+6x^2+m$; $y=\left|x^4+2x^3+mx+2\right|=|f(x)|$.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên hàm số đồng biến trên $(-1\,;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} f'(x) \geq 0,\, \forall x \in (-1\,;+\infty) \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 4x^3+6x^2+m \geq 0\,,\, \forall x \in (-1\,;+\infty) \\ 1-m \geq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m \geq -4x^3-6x^2\,,\, \forall x \in (-1\,;+\infty) \\ 1-m \geq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m \geq \max\limits_{(-1;+\infty)} \left(-4x^3-6x^2\right) \\ m \leq 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &0 \leq m \leq 1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

(A) 21. (B) 10. (C) 8. (D) 2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)$ trên khoảng $(0;2)$.
Ta có $f'(x)=-3x^2+6(m+1)x-3m(m+2)=-3\left[x^2-2(m+1)x+m(m+2)\right]$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right.$ $(m<m+2)$. Nhận xét $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+3. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$m+3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}(0;1)\subset(m;m+2)\\(0;1)\subset(m+3;+\infty)\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}m\le 0<1\le m+2\\m+3\le 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1\le m\le 0\\m\le -3.\end{bmatrix}$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-10;10]$ nên có 10 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4;4)$ để hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-x^2+mx+1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+mx+1 \Rightarrow f'(x)=x^2-2x+m$. Ta có $\Delta'=1-m$

Trường hợp 1. $\Delta'\le 0\Leftrightarrow 1-m\le 0\Leftrightarrow m\ge 1$. Suy ra $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases}m\ge 1\\f(1)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ge 1\\\frac{1}{3}+m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ge 1\\m\ge -\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 1.$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z};\ m\in(-4;4)$ ta được $m\in\{-3;-2;-1;0;1\}$.
Ta có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. $\Delta'>0\Leftrightarrow m<1$. Suy ra $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2\,(x_1<x_2)$.
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\x_1<x_2\le 1\\f(1)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\f'(1)>0\\\frac{S}{2}-1<0\\f(1)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\f'(1)>0\\1-1<0\\f(1)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow m=\varnothing.$

Vậy tất cả có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc $[-5;5]$ của m để hàm số $g(x)=\left|\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-3)x-\frac{2}{3}\right|$ đồng biến trên $(1;5)$ là

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-3)x-\dfrac{2}{3}$.

Ta có $f'(x)=x^2+2(m-1)x+2m-3$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3-2m.\end{array}\right.$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1;5)$ khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\begin{cases}f(x)\text{ đồng biến trên }(1;5)\\f(1)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2m\leq 1\\3m-4-\dfrac{1}{3}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq 1\\3m\geq\dfrac{13}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m\geq\dfrac{13}{9}.$

Kết hợp điều kiện m nguyên và thuộc $[-5;5]$ ta được $m\in\{2;3;4;5\}$.

Trường hợp 2. $\begin{cases}f(x)\text{nghịch biến trên }(1;5)\\f(1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\leq 3-2m\\3m-4-\dfrac{1}{3}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -1\\3m\leq\dfrac{13}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m\leq -1.$

Kết hợp điều kiện m nguyên và thuộc $[-5;5]$ ta được $m\in\{-1;-2;-3;-4;-5\}$.

Vậy tổng tất cả các số nguyên của m để hàm số đồng biến trên $[-5;5]$ là -1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số thực m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$?

(A) 4033. (B) 4032. (C) 2018. (D) 2016.

Lời giải.

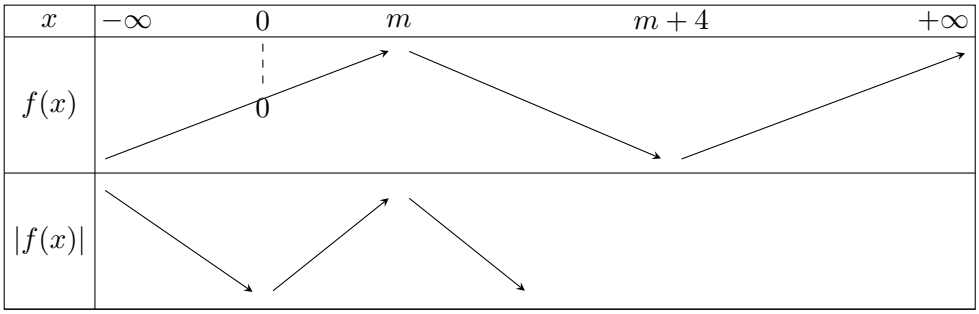
Xét hàm số $f(x)=x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x$ trên khoảng $(0;4)$.

$$f'(x)=3x^2-6(m+2)x+3m(m+4)=3\left[x^2-2(m+2)x+m(m+4)\right].$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+4\end{array}\right.\ (m<m+4).$$

Nhận xét. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0;0)$.

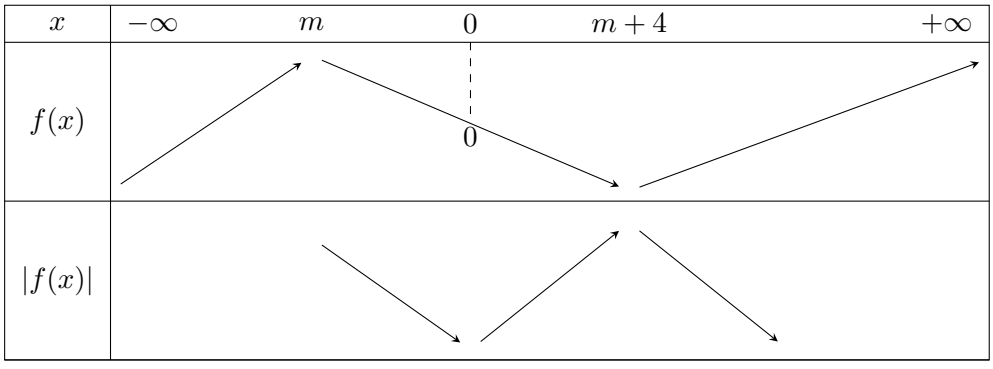
Trường hợp 1. Nếu $m>0$ ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;4)\Leftrightarrow(0;4)\subset(0;m)\Leftrightarrow m\geq 4$.

Kết hợp với $m>0$, suy ra $m\geq 4$.

Trường hợp 2. Nếu $m\leq 0<m+4\Leftrightarrow -4<m\leq 0$ ta có bảng biến thiên.

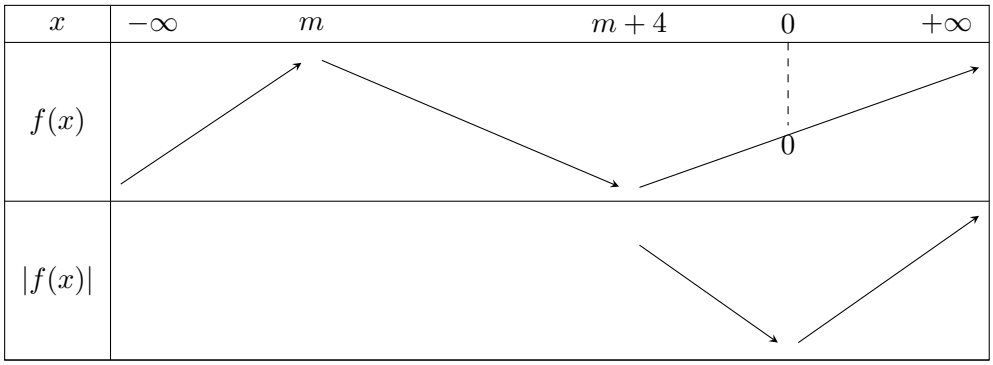


Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$

$$\Leftrightarrow(0;4)\subset(0;m+4)\Leftrightarrow m+4\geq 4\Leftrightarrow m\geq 0.$$

Kết hợp với $-4 < m \leq 0$, suy ra $m = 0$.

Trường hợp 3. Nếu $m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$ ta có bảng biến thiên.



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ với mọi $m \leq -4$.

Vậy từ các trường hợp suy ra $\begin{bmatrix} m \geq 4 \\ m = 0 \\ m \leq -4. \end{bmatrix}$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2019; 2019]$ nên có 4033 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m < 5$ để hàm số $y = \left|\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m\right|$ đồng biến trên $(0, +\infty)$?

A) 2. B) 4. C) 6. D) 8.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ ta có $y' = x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, điều kiện hàm số $y = \left|\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m\right|$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là $y(0) \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$.

Ta lại có m nguyên dương và $m < 5$ vậy có 4 giá trị của m.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |x^5 - mx + 4|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A) 4. B) 5. C) 6. D) 7.

Lời giải.

Ta có $y = \begin{cases} x^5 - mx + 4 \text{ khi } (x^5 - mx + 4 \geq 0) \\ -x^5 + mx - 4 \text{ khi } (x^5 - mx + 4 < 0) \end{cases}$; $y' = \begin{cases} 5x^4 - m \text{ khi } (x^5 - mx + 4 \geq 0) \\ -5x^4 + m \text{ khi } (x^5 - mx + 4 < 0) \end{cases}$

Trường hợp 1. $y' = \begin{cases} 5x^4 - m \geq 0 \\ x^5 - mx + 4 \geq 0 \end{cases}, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5x^4 \\ m \leq x^4 + \frac{4}{x} \end{cases}, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \leq 1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5.$

Trường hợp 2. $y' = \begin{cases} -5x^4 + m \geq 0 \\ x^5 - mx + 4 < 0 \end{cases}, \forall x \geq 1$. Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^5 - mx + 4) = +\infty$.

Vậy $\begin{cases} m \leq 5 \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A) 12. B) 8. C) 11. D) 7.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=2x^3-2mx+3$ có $f'(x)=6x^2-2m$.
Trường hợp 1. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và $f(1)\geq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6x^2-2m\geq 0\\ 5-2m\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\leq 3x^2, \forall x\in(1;+\infty)\\ m\leq \dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\leq 3\\ m\leq \dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow m\leq \frac{5}{2}.$$

Suy ra có 12 giá trị m thỏa yêu cầu.
Trường hợp 2. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và $f(1)\leq 0$.
Trường hợp này không xảy ra do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Vậy có tất cả 12 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.
Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hàm số $y=\left|x^5-mx+1\right|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.
A) 15. B) 14. C) 12. D) 13.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{x^5-mx+1}{|x^5-mx+1|}\cdot\left(5x^4-m\right)$.
Để hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì $g\left(x\right)=\left(x^5-mx+1\right)\left(5x^4-m\right)\geq 0 \quad (*), \forall x\geq 1$.
Với $m=0$ ta có $g(0)=(x^5+1)\cdot 5x^4>0, \forall x\geq 1$.
Với $m>0$. Do $m\in\mathbb{N}\Rightarrow (*)$ luôn có 1 nghiệm là $\sqrt[4]{\dfrac{m}{5}}$. Ta chú ý $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
Do vậy, điều kiện cần để $g(x)\geq 0, \forall x\geq 1$ là $\sqrt[4]{\dfrac{m}{5}}\leq 1\Leftrightarrow m\leq 5$.
Với $m=1$, $m=2$; $m=3$; $m=4$; $m=5$, thay vào $(*)$ kiểm tra bảng xét dấu thấy đúng.
Suy ra nhận các giá trị $m=1$; $m=2$; $m=3$; $m=4$; $m=5$.
Vậy $S=\{1;2;3;4;5\}$ suy ra tổng các phần tử của S là 15.
Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-2mx+m+2\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$?
A) 3. B) 2. C) 16. D) 9.

Lời giải.

Xét hàm $g(x)=x^2-2mx+m+2$. Ta có $g'(x)=2x-2m$.
Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi và chỉ khi
$\begin{cases}g(0)\geq 0\\ g'(x)\geq 0\end{cases}, \forall x\in(0;2)$ hoặc $\begin{cases}g(0)\leq 0\\ g'(x)\leq 0\end{cases}, \forall x\in(0;2)$.
Trường hợp 1. $\begin{cases}g(0)\geq 0\\ g'(x)\geq 0\end{cases}, \forall x\in(0;2)\Leftrightarrow \begin{cases}m+2\geq 0\\ -2m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq m\leq 0$.
Trường hợp 2. $\begin{cases}g(0)\leq 0\\ g'(x)\leq 0\end{cases}, \forall x\in(0;2)\Leftrightarrow \begin{cases}m+2\leq 0\\ -2m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\leq -2\\ m\geq 0\end{cases}$ vô nghiệm.
Do m là nguyên thuộc $[-9;9]$ nên $m\in\{-2,-1,0\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\left|-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\dfrac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?
A) 3. B) 2. C) 16. D) 9.

Lời giải.

Xét hàm $g(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\dfrac{2}{3}$.
Ta có $g'(x)=-x^2+(2m+3)\,x-(m^2+3m)=-\left(x-m\right)\left(x-m-3\right)$.
Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}g(2)\leq 0\\ g'(x)\geq 0\end{cases}, \forall x\in(1;2)$ hoặc $\begin{cases}g(2)\geq 0\\ g'(x)\leq 0\end{cases}, \forall x\in(1;2)$.

Trường hợp 1.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} g(2) \le 0 \\ g'(x) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} -2m^2 - 2m + 4 \le 0 \\ -(x-m)(x-m-3) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m \in (-\infty;-2] \cup [1;+\infty) \\ m \in [-1;1] \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &m = 1
\end{aligned}$$

Trường hợp 2.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} g(2) \ge 0 \\ g'(x) \le 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} -2m^2 - 2m + 4 \ge 0 \\ -(x-m)(x-m-3) \le 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m \in [-2;1] \\ m \in (-\infty,-2] \cup [2;+\infty) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &m = -2.
\end{aligned}$$

Do m là nguyên thuộc $[-9;9]$ nên $m \in \{1,-2\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

(A) 4. (B) 30. (C) 8. (D) 15.

Lời giải.

Ta có $y = \begin{cases} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m, \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \ge 0\right) \\ -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - m, \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0\right). \end{cases}$

Nên $y' = \begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x, \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \ge 0\right) \\ -12x^3 + 12x^2 + 24x, \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0\right). \end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

Trường hợp 1. $\begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x \le 0 \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \ge 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow m \ge -3x^4 + 4x^3 + 12x^2, \forall x < -1 \Leftrightarrow m \ge 5.$

Trường hợp 2. $\begin{cases} -12x^3 + 12x^2 + 24x \le 0 \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Rightarrow$ hệ này vô nghiệm.

Vậy $m \in \{5;6;\ldots;19\}$. Có 15 số nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y = \left|x^4 - mx^2 + 9\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

(A) 3. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y = \begin{cases} x^4 - mx^2 + 9 \left(x^4 - mx^2 + 9 \ge 0\right) \\ -x^4 + mx^2 - 9 \left(x^4 - mx^2 + 9 < 0\right) \end{cases}$ nên $y' = \begin{cases} 4x^3 - 2mx \left(x^4 - mx^2 + 9 \ge 0\right) \\ -4x^3 + 2mx \left(x^4 - mx^2 + 9 < 0\right). \end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

Trường hợp 1.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 4x^3 - 2mx \ge 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 \ge 0 \end{cases}, \forall x > 1 \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m \le 2x^2 \\ m \le x^2 + \dfrac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x > 1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2x^2 \\ m \le x^2 + \dfrac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x \ge 1$$
$$\Leftrightarrow m \le 2 \Rightarrow m \in \{0;1;2\}.$$

Trường hợp 2. $\begin{cases} -4x^3 + 2mx \ge 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 < 0 \end{cases}, \forall x > 1.$

Hệ này vô nghiệm vì khi $x \to +\infty$ thì $x^4 - mx^2 + 9 \to +\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$. Chọn mệnh đề sai?

(A) S có 4 phần tử. (B) Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.

(C) Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0. (D) Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1$.

Ta có: $f'(x) = x^2 - (m+3)x + 2m + 3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi

Trường hợp 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in (4;+\infty) \\ f(4) \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (m+3)x + (2m+3) \ge 0, \forall x \in (4;+\infty) \\ 16 - 4(m+3) + 2m + 3 \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}, \forall x \in (4;+\infty) \\ m \le \dfrac{7}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le \min\limits_{[4;+\infty)} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} \\ m \le \dfrac{7}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{7}{2} \\ m \le \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \le \frac{7}{2}.$$

Trường hợp 2. $\begin{cases} f'(x) \le 0, \forall x \in (4;+\infty) \\ f(4) \le 0 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - (m+3)x + (2m+3)\right) = +\infty$.

Vậy $m \le \dfrac{7}{2}, m$ nguyên dương nên $m \in \{0;1;2;3\}$.

Chọn đáp án (D) □

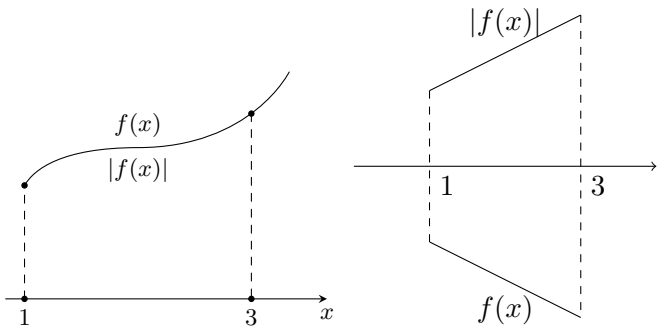
Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \left|x^3 - (2m-5)x + 2018\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

(A) 3032. (B) 4039. (C) 0. (D) 2021.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - (2m-5)x + 2018$, có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - (2m-5)$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì đồ thị của hàm số trong khoảng $(1;3)$ phải có hình dạng như sau:



Trường hợp 1. Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(1;3)$ và không âm trên $(1;3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq 3x^2+5, \forall x \in (1;3) \\ 2024-2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m \leq 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 4.$$

Trường hợp 2. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;3)$ và không dương trên $(1;3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 3x^2+5, \forall x \in (1;3) \\ 2024-2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \geq 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1012.$$

Kết hợp với điều kiện ta được kết quả $m \in [-2019;4] \cup [1012;2019]$. Vậy có 3032 giá trị của m.
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ biết rằng $-2021 \leq m \leq 2021$?

(A) 2020. (B) 2021. (C) 2022. (D) 2019.

Lời giải.

Xét hàm số: $y=f(x)=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$.
Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ta có: $y'=3x^2-6(m+1)x+3m(m+2)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right.$, $(m<m+2, \forall m)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Gọi (C_1) là phần đồ thị của hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$ nằm trên Ox.
Gọi (C_2) là phần đồ thị của hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$ nằm dưới Ox.
Gọi (C_2') là phần đồ thị đối xứng với (C_2) qua Ox.
Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ gồm $(C_1) \cup (C_2')$.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+2 \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$.
Kết hợp với điều kiện $-2021 \leq m \leq 2021$, ta suy ra có 2020 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Gọi $S=[a\,;+\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+mx+3m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-2\,;+\infty)$. Khi đó a bằng

(A) -3. (B) 19. (C) 3. (D) -2.

Lời giải.

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+mx+3m+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+m$.

Trường hợp 1.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} f'(x)\geq 0, \forall x\in(-2\,;+\infty) \\ f\left(-2\right)\geq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} f'(x)\geq 0, \forall x\in(-2\,;+\infty) \\ f\left(-2\right)\geq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 3x^2-6x+m\geq 0, \forall x\in(-2\,;+\infty) \\ m\geq 19 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m\geq -3x^2+6x, \forall x\in(-2\,;+\infty) \\ m\geq 19 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m\geq \max\limits_{x\in(-2;+\infty)}\left(-3x^2+6x\right) \\ m\geq 19 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m\geq 3 \\ m\geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 19.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} f'(x)\leq 0, \forall x\in(-2\,;+\infty) \\ f\left(-2\right)\leq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} f'(x)\leq 0, \forall x\in(-2\,;+\infty) \\ f\left(-2\right)\leq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 3x^2-6x+m\leq 0, \forall x\in(-2\,;+\infty) \\ m-19\leq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m\leq -3x^2+6x, \forall x\in(-2\,;+\infty) \\ m\leq 19 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} m\leq \min\limits_{(-2;+\infty)}\left(-3x^2+6x\right) \\ m\leq 19. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2+6x\right)=-\infty \Rightarrow$ hàm số $y=-3x^2+6x$ không có giá trị nhỏ nhất. Vì vậy TH2 không có giá trị m thỏa mãn. Vậy tập các giá trị m cần tìm là $S=[19\,;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

(A) $S=55$. (B) $S=54$. (C) $S=3$. (D) $S=5$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x+m+2}$ với $x\neq -m-2$, có $y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}$.

Hàm số $y=\left|\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau

Trường hợp 1. $\begin{cases} y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}>0 \\ y(1)\geq 0 \\ -m-2\notin(1;+\infty) \end{cases}, \forall x>1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ \dfrac{m+3}{m+3}\geq 0 \\ -m-2\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \\ m>1 \\ m\geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m>1.$

Trường hợp 2. $\begin{cases} y' = \dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2} < 0 \\ y(1) \le 0 \\ -m-2 \notin (1;+\infty) \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3 < 0 \\ \dfrac{m+3}{m+3} \le 0 \\ -m-2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

Vậy $m \in (1;+\infty)$, lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10;10] \end{cases}$ suy ra $m \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$, vậy $S = 54$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Tìm m để hàm số $y = \left|\dfrac{x-2m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

(A) $\dfrac{1}{3} < m \le 1$. (B) $m \in [-1;1] \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. (C) $-1 \le m < \dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3} < m \le 1$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{x-2m+1}{x+m}$. Điều kiện: $x \ne -m$ khi đó $f'(x) = \dfrac{3m-1}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow y' = \dfrac{f'(x).f(x)}{|f(x)|} \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$

Trường hợp 1. $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 > 0 \\ -m \le 1 \\ \dfrac{2-2m}{1+m} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < m \le 1.$

Trường hợp 2. $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -m \le 1 \\ \dfrac{2-2m}{1+m} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$. Vậy $\dfrac{1}{3} < m \le 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên $[3;+\infty)$?

(A) 4. (B) 5. (C) vô số. (D) 6.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}$ có $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-2m}{(x-1)^2}$.

Khi đó $y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \quad y' \ge 0, \forall x \in [3;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'(x).f(x) \ge 0 \\ f(x) \ne 0 \end{cases}, \forall x \in [3;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in [3;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1} > 0 \\ \dfrac{x^2-2x-2m}{(x-1)^2} \ge 0 \end{cases}, \forall x \in [3;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-2x+2m+2 > 0 \\ x^2-2x-2m \ge 0 \end{cases}, \forall x \in [3;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2m+2 > -x^2+2x \\ 2m \le x^2-2x \end{cases}, \forall x \in [3;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2 > \max\limits_{[3;+\infty)} \left(-x^2+2x\right) \\ 2m \le \min\limits_{[3;+\infty)} \left(x^2-2x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2 > -3 \\ 2m \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{5}{2} \\ m \le \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 24. Tìm tất cả các giá thực của tham số m để hàm số $y = \left|x - \dfrac{2}{x} + m\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

A $m \le -1$. B $-1 \le m \le 1$. C $m \ge 1$. D $m > 0$.

Lời giải.

Ta có: $y = \left|x - \dfrac{2}{x} + m\right| = \sqrt{\left(x - \dfrac{2}{x} + m\right)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{\left(x - \dfrac{2}{x} + m\right)\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(x - \dfrac{2}{x} + m\right)^2}}$.

Hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{2}{x} + m\right) \ge 0 \\ \left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x} + m\right) \ge 0, \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x} + m\right) \ge 0, \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \ge -x + \frac{2}{x}, \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \ge \max_{[1;+\infty)} \left(-x + \frac{2}{x}\right) (*).$$

Xét hàm số

$$g(x) = -x + \frac{2}{x}, \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = -1 - \frac{2}{x^2} < 0, \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \max_{[1;+\infty)} g(x) = \max_{[1;+\infty)} \left(-x + \frac{2}{x}\right) = g(1) = 1.$$

Vậy $(*) \Leftrightarrow m \ge 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = \left|x + 1 + \dfrac{m^2 - 2m - 1}{x+1}\right|$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ là $[a;b]$. Tính $a \cdot b$.

A -10. B -9. C 2. D -7.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x + 1 + \dfrac{m^2 - 2m - 1}{x+1}$. Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{m^2 - 2m - 1}{(x+1)^2}$.

Khi đó $y = \left|x + 1 + \dfrac{m^2 - 2m - 1}{x+1}\right| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \dfrac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)\cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+\dfrac{m^2-2m-1}{x+1} > 0 \\ 1-\dfrac{m^2-2m-1}{(x+1)^2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m-1 > -(x+1)^2 \\ m^2-2m-1 \leq (x+1)^2 \end{cases} \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m-1 \geq \max\limits_{(2;+\infty)} \left[-(x+1)^2\right] = -9 \\ m^2-2m-1 \leq \min\limits_{(2;+\infty)} (x+1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+8 \geq 0 \\ m^2-2m-10 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{11} \leq m \leq 1+\sqrt{11}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

(A) $m < -1$. (B) $m > 1$. (C) $-1 \leq m \leq 1$. (D) $-1 \leq m < 1$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq -1$. Đặt $f(x) = \dfrac{x+m}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó ta có $y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ nếu $y' \geq 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x) \geq 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

Trường hợp 1. $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ \dfrac{1+m}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 1.$

Trường hợp 2. $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ \dfrac{1+m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \varnothing.$

Vậy $m \in [-1;1)$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \left|\dfrac{x^3-2mx+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3-2mx+2}{x-1}$. Ta có: $f'(x) = \dfrac{2x^3-3x^2+2m-2}{(x-1)^2}$.

Khi đó $y = \left|\dfrac{x^3-2mx+2}{x-1}\right| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \dfrac{f'(x)\cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x).f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2;+\infty) \left(\text{do } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \geq 0 \\ \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2m - 2}{(x-1)^2} \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 4m \geq 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 2m - 2 \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{5}{2} \\ 2m \geq -2x^3 + 3x^2 + 2, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{5}{2} \\ 2m \geq \max\limits_{x\in[2;+\infty)} \left(-2x^3 + 3x^2 + 2\right) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{5}{2} \\ 2m \geq -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{5}{2} \\ m \geq -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1;2\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên dương của m là 3.
Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left|\dfrac{x-m}{x+m+3}\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{x-m}{x+m+3}$.
Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m-3\}$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{2m+3}{(x+m+3)^2}$.
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{f(x)\cdot f'(x)}{|f(x)|} \leq 0, \forall x \in (2;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow f(x)\cdot f'(x) > 0, \forall x \in (2;+\infty).$$

Trường hợp 1.

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (2;+\infty) \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 > 0 \\ -m-3 \leq 2 \\ \dfrac{2-m}{5+m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m \geq -1 \\ -5 < m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2.$$

Trường hợp 2.

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (2;+\infty) \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 < 0 \\ -m-3 \leq 2 \\ \dfrac{2-m}{5+m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{3}{2} \\ m \geq -1 \\ m \geq 2 \vee m < -5 \end{cases}$$ (không có m thỏa mãn).

Vậy $-1 \leq m \leq 2$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2\}$. Vậy có 4 số nguyên m thoả mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=\left|x+5+\dfrac{1-m}{x-2}\right|$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A) 11. B) 10. C) 8. D) 9.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Xét hàm số $f(x)=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$. Đạo hàm: $f'(x)=1+\dfrac{m-1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+m+3}{(x-2)^2}$.

Khi đó $y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x)\cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên $[5;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\forall x\in[5;+\infty)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)\cdot f(x)\geq 0 \\ f(x)\neq 0 \end{cases},\forall x\in[5;+\infty)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)\geq 0 \end{cases},\forall x\in[5;+\infty)\ (\text{vì } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+5+\dfrac{1-m}{x-2}>0 \\ 1+\dfrac{m-1}{(x-2)^2}\geq 0 \end{cases},\forall x\in[5;+\infty)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m<x^2+3x-9 \\ m\geq -x^2+4x-3 \end{cases},\forall x\in[5;+\infty)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m<\min\limits_{[5;+\infty)}\left(x^2+3x-9\right) \\ m\geq \max\limits_{[5;+\infty)}\left(-x^2+4x-3\right) \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m<5^2+3.5-9 \\ m\geq -5^2+4.5-3 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow -8\leq m<31.
\end{aligned}$$

Mà m nguyên âm nên ta có: $m\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=\left|x+5+\dfrac{1-m}{x-2}\right|$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+x+2m-3}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A) 7. B) 5. C) 4. D) Vô số.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2+x+2m-3}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-2x+2-2m}{(x-1)^2}$.

Khi đó $y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi $y'\geq 0,\forall x\in(3;+\infty)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}\geq 0,\forall x\in(3;+\infty)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)\cdot f(x)\geq 0 \\ f(x)\neq 0 \end{cases},\forall x\in(3;+\infty)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \,, \forall x \in (3;+\infty) \,, \text{do} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(3) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9+2m}{2} \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 - 2m \geq 0, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \geq 2m, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \geq 2m, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{9}{2} \\ m \leq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

Ta có $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left|\dfrac{x-m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

(A) $m \leq \dfrac{1}{2}$ hoặc $m \geq 2$. (B) $\dfrac{1}{2} < m < 2$. (C) $\dfrac{1}{2} < m \leq 2$. (D) $\dfrac{1}{2} \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{x-m+1}{x+m}$, $(x \neq -m) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2m-1}{(x+m)^2}$.

Để hàm số y đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|} \geq 0$, $\forall x \in (1;+\infty)$.

☑ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ -m \leq 1 \\ \dfrac{2-m}{m+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ m \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

☑ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 > 0 \\ -m \leq 1 \\ \dfrac{2-m}{1+m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \geq -1 \\ -1 < m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \leq 2.$$

Vậy để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{2} < m \leq 2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hàm số $y = \left|\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \dfrac{m}{2}x - 1\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}+\dfrac{m}{2}x-1$. Ta có $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}+\dfrac{m}{2}$.
Do hàm số liên tục tại $x=0$, $x=1$ nên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ ta xét 2 trường hợp sau

☑ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x)\le 0, \forall x\in[0;1] \\ f(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2}\le \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x\in[0;1] \\ f(1)\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2}\le \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x\in[0;1] \\ \dfrac{m}{2}\ge -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2}\le \min\limits_{x\in[0;1]}\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}\right\} \\ m\ge -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3}\le m\le 0.$$

☑ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x)\ge 0, \forall x\in[0;1] \\ f(1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2}\ge \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x\in[0;1] \\ f(1)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2}\ge \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x\in[0;1] \\ \dfrac{m}{2}\le -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2}\ge \max\limits_{x\in[0;1]}\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}\right\} \\ \dfrac{m}{2}\le -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 1-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ m\le -2\sqrt{3} \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\sqrt{x^2-3}-2x-3m\right|$ nghịch biến trên $(2;3)$?

A) 2. B) 3. C) 5. D) 9.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-3}-2x-3m$. Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}-2\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x-2\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2-3}}$.
Cho $f'(x)=0\Rightarrow x-2\sqrt{x^2-3}=0\Rightarrow x=2$.
Ta thấy $f'(x)<0, \forall x\in(2;3)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(2;3)$.
Để $y=\left|\sqrt{x^2-3}-2x-3m\right|$ nghịch biến trên $(2;3)$ thì $f(3)\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{6}-6-3m\ge 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{\sqrt{6}-6}{3}$.
Do $m\in(-5;5)$ nên $m=\{-2;-3;-4\}$.
Chọn đáp án B □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;10]$ để hàm số $y=\left|x+m\sqrt{x^2-2x+3}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A) 11. B) 10. C) 12. D) 9.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Xét hàm số $f(x)=x+m\sqrt{x^2-2x+3}$.
Ta có $f'(x)=1+m\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f'(x)\ge 0, \forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f'(x)\le 0, \forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\le 0. \end{cases} \end{array}\right.$

☑ Trường hợp 1

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow 1 + m\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \geq 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-2x+3} + m(x-1) \geq 0, \forall x \in (1;+\infty)$$

Đặt $t = x-1,\ t>0 \Rightarrow \sqrt{t^2+2} + mt \geq 0,\ \forall t>0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{-\sqrt{t^2+2}}{t},\ \forall t>0.$

Xét $f(t) = \dfrac{-\sqrt{t^2+2}}{t},\ f'(t) = \dfrac{2}{t^2\sqrt{t^2+2}} > 0 \forall t > 0.$

Khi đó ta có bảng biến thiên

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	-1

Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 1 + m\cdot\sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{m \geq -1 \\ m \geq \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

☑ Trường hợp 2

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow 1 + m\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \leq 0, \forall x \in (1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-2x+3} + m(x-1) \leq 0, \forall x \in (1;+\infty).$$

Đặt $t = x-1, t>0 \Rightarrow \sqrt{t^2+2} + mt \leq 0 (*), \forall t > 0.$

Mà $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\sqrt{t^2+2} + mt\right) = 2 > 0$ nên với mỗi giá trị của m luôn có giá trị của t dương đủ nhỏ để vế trái của $(*)$ lớn hơn 0. Suy ra không có giá trị nào của m để trường hợp 2 thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \left|\sqrt{x^2+2x+2} - x + m\right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

(A) 2018. (B) 2017. (C) 2019. (D) 4039.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - x + m$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Ta có, $g'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 0, \forall x > -1.$

$\left(\text{Do } x+1-\sqrt{x^2+2x+2} = (x+1) - \sqrt{(x+1)^2+1} < 0, \forall x > -1\right).$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(x) = |g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty) \Leftrightarrow g(x) \leq 0, \forall x > -1 (1)$.

Do hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;+\infty)$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;+\infty)} g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(-1) = m+2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$. Vậy $S = \{-2019;-2018;\ldots;-2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x+m\right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

(A) 2018. (B) 2017. (C) 2019. (D) 4039.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{x^2+1}+x+m \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}+1$.

Trên $(1;+\infty) \Rightarrow f'(x)>0$. Ta có bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$3\sqrt{2}+1+m$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy: hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty) \Leftrightarrow 3\sqrt{2}+1+m\geq 0 \Leftrightarrow m\geq -3\sqrt{2}-1$.

Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m>0 \end{cases} \Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|4\sqrt{x^2+2x+3}+5x-m^2+5\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 9. (B) 6. (C) 11. (D) 8.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2+2x+3}+5x-m^2+5$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}+5$.

Với $x>1 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Vậy để hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow f(1)\geq 0 \Leftrightarrow -m^2+10+4\sqrt{6}\geq 0 \Leftrightarrow m^2\leq 10+4\sqrt{6} \Leftrightarrow -2-\sqrt{6}\leq m\leq 2+\sqrt{6}.$$

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=\left|\sqrt{x^2+3}+2x+m^2-5m\right|$. Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

(A) $(-\infty;0]$. (B) $91;4$. (C) $(-\infty;2)$. (D) $[3;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $g(x)=\sqrt{x^2+3}+2x+m^2-5m$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}+2>0 \forall x\in(1;+\infty)$.

Dễ thấy $g(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $g'(x)>0$, $\forall x\in(1;+\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

$$\Rightarrow g(1)\geq 0 \Leftrightarrow m^2-5m+4\geq 0\,(*)$$

Nên $y=f(x)=g(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty) \Rightarrow f(1)\geq 0$ kết hợp với $(*)$ ta có

$$m^2-5m+4\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m\geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\in(-\infty;1] \\ m\in[4;+\infty). \end{array}\right.$$

Mà $m\in(-\infty;0]\subset(-\infty;1]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = \left|\sqrt{-x^2+6x}+m\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

(A) 6. (B) 4. (C) 3. (D) 10.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [0;6]$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2+6x}+m \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x}} = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Khi đó ta có bảng biến thiên

x	0		3		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	m	↗	$m+3$	↘	m

Hàm số $y = \lvert f(x)\rvert$ đồng biến trên khoảng $(0;3) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

(A) 2016. (B) 1952. (C) -2016. (D) -496.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2-6x-9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3. \end{array}\right.$

Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0		
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{m}{2}$	↘	$\dfrac{m}{2}-32$	↗	$+\infty$

Do $y = \lvert f(x)\rvert = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$ nên

☑ Nếu $\dfrac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 > 3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		-1		3		x_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\dfrac{m}{2}$	↗	$-\dfrac{m}{2}+32$	↘	0	↗	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

☑ Nếu $\dfrac{m}{2}-32\geq 0\Leftrightarrow m\geq 64$ thì $f(x)=0$ có nghiệm $x_0<-1$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		x_0		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗	$\dfrac{m}{2}$	↘	$\dfrac{m}{2}-32$	↗	$+\infty$
			0						

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

☑ Nếu $\begin{cases}\dfrac{m}{2}>0\\ \dfrac{m}{2}-32<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<64$ thì $f(x)=x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}=0$ có ba nghiệm $x_1;\ x_2;\ x_3$ với $x_1<-1<x_2<3<x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		3		x_3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗	$\dfrac{m}{2}$	↘		↗	$32-\dfrac{m}{2}$	↘		↗	$+\infty$
			0				0				0		

Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m\in\{1;2;3;\ldots;63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là $S=1+2+3+\ldots+63=\dfrac{63\cdot(1+63)}{2}=2016$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|8^{\tan x}+3\cdot 2^{\tan x}-m+2\right|$ đồng biến trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(A) $m\leq\dfrac{29}{8}$. (B) $m>\dfrac{29}{8}$. (C) $m<\dfrac{29}{8}$. (D) $m\geq\dfrac{29}{8}$.

Lời giải.

Đặt $2^{\tan x}=t$, vì $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\tan x\geq -1$ nên $t\geq\dfrac{1}{2}$.

Khi đó ta có hàm số $y=\left|t^3+3t-m+2\right|$. (1)

Để hàm số ban đầu đồng biến trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số (1) phải đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t-m+2$. Ta có $f'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t$.

khi đó $y=|f(t)|=\sqrt{f^2(t)}$ nên $y'=\dfrac{f'(t)\cdot f(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$.

Hàm số đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\ \forall t\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$$\begin{aligned}&f(t)\geq 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\\ \Leftrightarrow\ &t^3+3t-m+2\geq 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\\ \Leftrightarrow\ &m\leq t^3+3t+2,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\qquad(*).\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(t)=t^3+3t+2,\ \forall t\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $g'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t$.

Vậy hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(t) \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Từ $(*)$ suy ra $m \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-100;100)$ của tham số m để hàm số $y = \left|\ln 3x - 4x^2 + m\right|$ đồng biến trên đoạn $[1;e^2]$.

A) 101. B) 102. C) 103. D) 100.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0$.

Xét hàm số $g(x) = \ln 3x - 4c^2 + m$ trên $\left[1;e^2\right]$.

Ta có $g'(x) = \frac{1}{x} - 8x = \frac{1-8x^2}{x} < 0,\ \forall x \in \left[1;e^2\right]$.

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $\left[1;e^2\right]$.

Ta có bảng biến thiên

x	1	e^2
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$\ln 3 - 4 + m$	$\ln 3 - 4e^4 + 2 + m$

Suy ra hàm số $y = |g(x)| = \left|\ln 3x - 4x^2 + m\right|$ đồng biến trên đoạn $\left[1;e^2\right]$.

Hay $\ln 3 - 4 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 4 - \ln 3$.

Mà m nguyên thuộc $(-100;100)$ nên $m \in \{-99;-98;\ldots;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 102 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên $m < 200$ để hàm số $y = |\ln(mx) - x + 2|$ nghịch biến trên $(1;4)$?

A) 2018. B) 2019. C) 1. D) Vô số.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \ln(mx) - x + 2$. Dễ thấy $\forall x \in (1;4)$ thì $x > 0$ nên điều kiện xác định là $m > 0$.

Khi đó $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0,\ \forall x \in (1;4)$. Do đó $f(x)$ luôn nghịch biến trên $(1;4)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(4) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(4m) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{e^2}{4} \approx 1{,}6$.

Vậy $m \in [2;2018]$ nên có 2018 số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số $y = \left|\ln\left(x^2 - 2x + m\right) - 2mx^2 - 1\right|$ luôn đồng biến trên $(0;10)$.

A) 4038. B) 2020. C) 2017. D) 2018.

Lời giải.

Ta xét hàm số $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x - m\right) - 2mx^2 - 1$ trên $(0;10)$.

Điều kiện xác định $x^2 + 2x - m > 0,\ \forall x \in (0;10) \Leftrightarrow x^2 + 2x > m,\ \forall x \in (0;10)$ (1).

Ta lại có $x^2 + 2x = x(x+2) > 0$ với mọi $x \in (0;10)$ nên điều kiện (1) cho ta $m < 0$ (2).

Đạo hàm $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-m} - 4mx$.

Do $m \leq 0$ và $x \in (0;10)$ nên $\frac{2x+2}{x^2+2x-m} > 0$ và $-4mx > 0$.

Suy ra $f'(x) > 0$ hàm số đồng biến trên $(0;10)$.

Từ đó để hàm số $y = \left|\ln\left(x^2 + 2x - m\right) - 2mx - 1\right| = |f(x)|$ đồng biến trên $(0;10)$ điều kiện đủ là $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0;10)$. (3)

- **Trường hợp 1.** $m = 0$ khi đó $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x\right) - 1$ có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ không thỏa mãn (3).

- **Trường hợp 2.** Xét $m<0$, do đó hàm số $f(x)$ đồng biến nên ta chỉ cần $f(0)\geq 0$.
Tương đương $\ln(-m)-1\geq 0\Leftrightarrow -m\geq e\Leftrightarrow m\leq -e$.

Từ đó ta được $\begin{cases}-2020<m\leq -e\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{-2019;-2018;-2017;\ldots;-3\}$ có 2017 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-3;3]$ để tham số $y=\left|\ln\left(x^3+mx+2\right)\right|$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)$
A 7. B 4. C 6. D 5.

Lời giải.
Điều kiện xác định $x^3+mx+2>0$.
Xét hàm số $f(x)=\ln\left(x^3+mx+2\right)$.
Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2+m}{x^3+mx+2}$.
Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geq 0\\ f'(x)\geq 0\end{cases},\forall x\in[1;3)(1)\\ \begin{cases}f(x)\leq 0\\ f'(x)\leq 0\end{cases},\forall x\in[1;3)(2)\end{array}\right.$.

- **Trường hợp 1.**

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\left(x^3+mx+2\right)\geq 0\\ \dfrac{3x^2+m}{x^3+mx+2}\geq 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+mx+2\geq 0\\ 3x^2+m\geq 0\\ x^3+mx+2>0\end{cases},\forall x\in[1;3)\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq -x^2-\dfrac{1}{x}\\ m\geq -3x^2\end{cases},\forall x\in[1;3)\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq \max\limits_{[1;3)}\left(-x^2-\dfrac{1}{x}\right)=-2\\ m\geq \max\limits_{[1;3)}(-3x^2)=3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow m\geq -2.\end{aligned}$$

- **Trường hợp 2.**

$$\begin{aligned}(2)&\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\left(x^3+mx+2\right)\leq 0\\ \dfrac{3x^2+m}{x^3+mx+2}\leq 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+mx+1\leq 1\\ 3x^2+m\leq 0\\ x^3+mx+2>0\end{cases},\forall x\in[1;3)\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -x^2-\dfrac{1}{x}\\ m\leq -3x^2\\ m>-x^2-\dfrac{2}{x}\end{cases},\forall x\in[1;3)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{28}{3} \\ m < -27 \\ m > \max\limits_{[1;3)} \left(-x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = -3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad m \in \varnothing.$$

Từ hai trường hợp trên suy ra $m \geq -2$ và $m \in [-3;3]$ nên $m \in \{-2;-1;0;-1;2;3\}$.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $y = \left|\ln\left(x^2 - mx - m\right) - 1\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ của tham số m để hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$?

A 10. B 6. C 9. D 5.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \ln\left(x^2 - mx + m\right) - 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \\ f(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \\ f'(x \leq 0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right)) \\ f(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$.

Xét $x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

$$x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2};1\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 > m(x+1), \forall x \in \left(-\frac{1}{2};1\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad m < \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2};1\right).$$

Đặt $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.
Khi đó $m < \dfrac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow m < g(x), \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.
Ta có $g(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow g'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \\ x = -2, \forall x \notin \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ trên khoảng $\forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$ suy ra $m<g(x) \Leftrightarrow m<0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2x-m}{x^2-mx-m}$.

$$
\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 2x \geq m \\ \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2};1\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m \leq -1 \\ \ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}m\right)-1 \geq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ \ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}m\right) \geq 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}m \geq e \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \leq \dfrac{1-4e}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow m \leq \frac{1-4e}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
(2) \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 2x \leq m, \forall x \in \left(-\frac{1}{2};1\right) \\ \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m \geq 2 \\ \ln\left(\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\right)-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Không tồn tại } m.
$$

Vậy có 5 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Tổng giá trị của tham số m nguyên thuộc $[-5;5]$ sao cho hàm số $y=\left|\ln\left(x^3-3x+m\right)+1\right|$ nghịch biến trên $[0;1]$ bằng

(A) 10. (B) 11. (C) 12. (D) 13.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\ln\left(x^3-3x+m\right)+1$, ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+m}$.

Điều kiện xác định của $f(x)$ là $x^3-3m+m>0$.

Điều kiện cần để hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên $[0;1]$ là $x^3-3x+m>0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m>-x^3+3x, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m>2.(1)$

Với mọi $x \in [0;1]$, ta có $3x^2-3 \leq 0$. Do đó từ điều kiện (1) ta suy ra

$f'(x)=\dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+m} \leq 0, \forall x \in [0;1]$.

Điều kiện đủ của hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên $[0;1]$ là

$$\begin{aligned} f'(x)\geq 0,\forall x\in[0;1] &\Leftrightarrow \ln\left(x^3-3x+m\right)\geq 0,\forall x\in[0;1]\\ &\Leftrightarrow m-\frac{1}{3}\geq -x^3+3x,\forall x\in[0;1]\\ &\Leftrightarrow m\geq \frac{1}{e}+2\approx 2,37. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\log_3\left(x^2-x^2-mx+1\right)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

(A) 50. (B) 100. (C) 52. (D) 105.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\log_3\left(x^3-x^2-mx+1\right)$ nên $f'(x)=\dfrac{3x^2+2x-m}{\left(x^3+x^2-mx+1\right)\ln 3}$.

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $[1;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x\geq 0)\\ f'(x)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\leq 0\\ f'(x)\leq 0\end{cases}\end{array}\right.,\forall x\in[1;+\infty)$.

- Trường hợp 1

$$\begin{aligned} \begin{cases}f(x)\geq 0\\ f'(x)\geq 0\end{cases},\forall x\in[1;+\infty) &\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\geq 0\\ x^3+x^2-mx+1>0\\ 3x^2+2x-m\geq 0\end{cases},\forall x\in[1;+\infty)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-mx+1\geq 1\\ 3x^2+2x\geq m\end{cases},\forall x\in[1;+\infty)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}m\leq x^2+x\\ m\leq 3x^2+2x\end{cases},\forall x\in[1;+\infty)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}m\leq \min\limits_{[1;+\infty)}\left(x^2+x\right)\\ m\leq \min\limits_{[1+\infty)}\left(3x^2+2x\right)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}m\leq 2\\ m\leq 5\end{cases}\\ &\Leftrightarrow m\leq 2. \end{aligned}$$

- Trường hợp 2

$$\begin{aligned} \begin{cases}f(x)\leq 0\\ f'(x)\leq 0\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\leq 0\\ x^3+x^2-mx+1>0\\ 3x^2+2x-m\leq 0\end{cases},\forall x\in[1;+\infty)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-mx+1\leq 1\\ x^3+x^2-mx+1>0\\ 3x^2+2x\leq m\end{cases},\forall x\in[1;+\infty)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x\leq m\\ x^2+x+\dfrac{1}{x}>m\\ 3x^2+2x\leq m\end{cases},\forall x\in[1;+\infty). \end{aligned}$$

Ta có $m \geq x^2+x, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[1;+\infty)} \left(x^2+x\right)$.
Trường hợp này không có giá trị của m thỏa mãn.
Suy ra $m \leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Mà $m \in [-10;10]$ nên ta có 13 giá trị cần tìm.
Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Tổng các giá trị nguyên của m trên $[-10;10]$ để hàm số $y=g(x)=\left|\ln\left(x^2+x+m\right)+x\right|$ đồng biến trên $(-1;3)$ là
(A) 50. (B) 100. (C) 52. (D) 105.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(x^2+x+m\right)+x$ trên khoảng $(-1;3)$.
Điều kiện xác định $x^2+x+m>0, \forall x \in (-1;3)$.
Khi đó $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+m}=\dfrac{x^2+3x+m+1}{x^2+x+m}$.
Hàm số đồng biến trên $(-1;3) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2+x+m>0 \\ x^2+3x+m+1 \geq 0 \\ \ln\left(x^2+x+m\right)+x \geq 0 \end{cases} (1)\right.$
$\left.\begin{cases} x^2+x+m>0 \\ x^2+3x+m+1 \leq 0 \\ \ln\left(x^2+x+m\right) \leq 0 \end{cases} (2)\right.$ $, \forall x \in (-1;3)$. Xét hệ bất phương trình (1),

$$\begin{cases} x^2+x+m>0 \\ x^2+3x+m+1 \geq 0 \\ \ln\left(x^2+x+m\right)+x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1;3).$$

Ta có $x^2+x+m>0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m>-x^2-x, \forall x \in (-1;3)$.
Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=-x^2-x$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra
$m>\max_{(-1;3)}\left(-x^2-x\right) \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$.
Lại có $x^2+3x+m+1 \geq 0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq -x^2-3x-1, \forall x \in (-1;3)$.
Khảo sát tính biến thiên của hàm số ta suy ra $m \geq 1$.
Ngoài ra $\ln\left(x^2+x+m\right)+x \geq 0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq -x^2-x+e^{-x}, \forall x \in (-1;3)$.
Đặt $k=-x^2-x+e^{-x} \Rightarrow k'=-e^{-x}-2x-1, \forall x \in (-1;3)$.
Do đó $m \geq -x^2-x+e^{-x}, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq e$.
Giải hệ bất phowng trình (2) tương tự ta cũng có

$$\begin{cases} x^2+x+m>0 \\ x^2+3x+m+1 \leq 0 \\ \ln\left(x^2+x+m\right) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{4} \\ m \geq -19 \\ \ln\left(x^2+x+m\right)+x<0 \end{cases}, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Mà $m \in [-10;10]$ nên $m \in \{3;4;5;6;7;8;9;10\}$.
Do đó tổng các giá trị của $m=52$.
Chọn đáp án (C) □

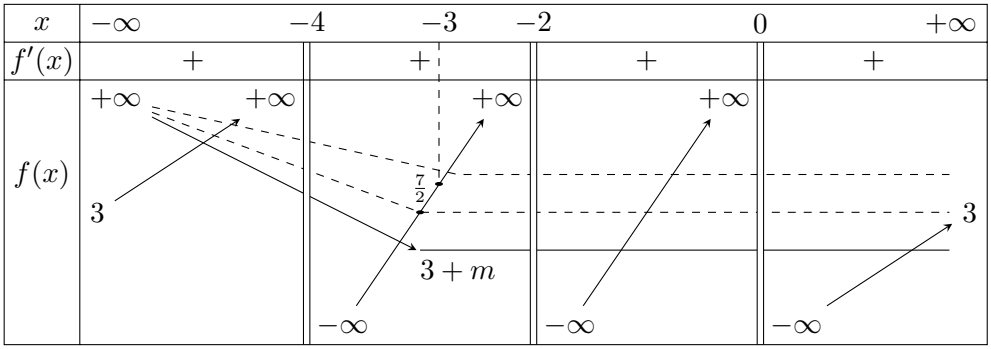
Câu 50. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021;2021]$ để phương trình $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+3}{x+4}-|x+3|+x-m=0$ có đúng 3 nghiệm thực x. Số phần tử của tập S là:
(A) 2018. (B) 2021. (C) 2019. (D) 2022.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+3}{x+4}=|x+3|-x+m \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}>0$.
Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\{-1;-2;-4\}$ có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)=3 \\ f(-3)=\dfrac{7}{2}. \end{cases}$

Xét hàm số $g(x)=|x+3|-x+m=\begin{cases}-2x-3+m & \text{nếu } x<-3\\ 3+m & \text{nếu } x\geq -3.\end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:



Để phương trình $f(x)=g(x)$ có 3 nghiệm thực thì $3+m>0\Leftrightarrow m\geq -3$.
Kết hợp điều kiện $m\in[-2021;2021]$ suy ra có 2022 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $y=\left|\sqrt{x^2+1}-mx-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

(A) 4042. (B) 4039. (C) 4040. (D) 4041.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\sqrt{x^2+1}-mx-1$. Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$.

Vì hàm số liên tục tại $x=1;\ x=2$ nên để hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$ ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1: $\begin{cases}f'(x)\geq 0,\forall x\in[1;\ ]\\ f(1)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m\geq 0,\forall x\in[1;\ 2]\\ m\leq\sqrt{2}-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\forall x\in[1;\ 2]\\ m\leq\sqrt{2}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq\min\limits_{[1;\ 2]}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\ m\leq\sqrt{2}-1\end{cases}\Leftrightarrow m\leq\sqrt{2}-1\quad(1).$$

Trường hợp 2: $\begin{cases}f'(x)\leq 0,\forall x\in[1;\ 2]\\ f(1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m\leq 0,\forall x\in[1;\ 2]\\ m\geq\sqrt{2}-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\forall x\in[1;\ 2]\\ m\geq\sqrt{2}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq\max\limits_{[1;\ 2]}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\ m\geq\sqrt{2}-1\end{cases}\Leftrightarrow m\geq\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\quad(2).$$

Từ (1) và (2) ta có $\left[\begin{array}{l}m\geq\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ m\leq\sqrt{2}-1.\end{array}\right.$

Do $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in[-2020;\ 2020]\end{cases}$ nên có 4041 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=f(x)=\left|x^3-3x^2+3\left(m^2+5\right)x+\left(12-3m^2\right)\cos x\right|$ đồng biến trên $(0;\pi)$?

(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) Vô số.

Lời giải.

Đặt $h(x)=x^3-3x^2+3\left(m^2+5\right)x+\left(12-3m^2\right)\cos x$.
Ta có $h'(x)=3x^2-6x+3\left(m^2+5\right)-\left(12-3m^2\right)\sin x$.

$$\Leftrightarrow h'(x)=3(x-1)^2+12(1-\sin x)+3m^2(1+\sin x)\geq 0,\ \forall x\in(0;\pi).$$

Vậy hàm số $h(x)$ luôn đồng biến trên $(0;\pi)$.
Để $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;\pi)$ thì $h(0)\geq 0\Leftrightarrow\left(12-3m^2\right)\geq 0\Leftrightarrow m\in[-2;2]$.
Kết luận: có 5 giá trị m nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 53. Các giá trị của tham số m để hàm số $y=|\sin x-\cos x+m|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ là

A $m>\sqrt{2}$. B $m\geq\sqrt{2}$. C $m>1$. D $m\geq 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x+m=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+m\Rightarrow f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
Khi đó $y=|\sin x-\cos x+m|=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$. Nên $y'=\dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.
Hàm số $y=|\sin x-\cos x+m|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot f'(x)\geq 0\\ f(x)\neq 0\end{cases}\forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\quad(1).$$

Với $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0,\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.
Nên $(1)\Leftrightarrow f(x)>0,\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{2}\cdot(-1)+m\geq 0\Leftrightarrow m\geq\sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 54. Cho hàm số $y=\left|\sin^3 x-m\cdot\sin x+1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S.

A 1. B 2. C 3. D 0.

Lời giải.

Trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x$ đồng biến. Đặt $t=\sin x$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.
Khi đó hàm số $y=\left|\sin^3 x-m\cdot sinx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $y=g(t)=\left|t^3-mt+1\right|$ đồng biến trên $(0;1)$.
Xét hàm số $y=f(t)=t^3-mt+1$ trên khoảng $(0;1)$ có $f'(t)=3t^2-m$.
Khi $m=0:\ f'(t)=3t^2>0,\forall t\Rightarrow y=f(t)=t^3+1$ đồng biến trên $(0;1)$ và đồ thị hàm số $y=f(t)=t^3+1$ cắt trục hoành tại điểm duy nhất $t=-1$.
Suy ra $y=g(t)=\left|t^3-mt+1\right|$ đồng biến trên $(0;1)\Rightarrow m=0$ thỏa mãn.
Khi $m>0:\ f'(t)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1=-\sqrt{\frac{m}{3}}$, $t_2=\sqrt{\frac{m}{3}}$.
Hàm số $y=f(t)=t^3-mt+1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\frac{m}{3}};+\infty\right)$

Trường hợp 1: $-\sqrt{\frac{m}{3}}<0<\sqrt{\frac{m}{3}}<1\Leftrightarrow 0<m<3$.

Hàm số $y=f(t)=t^3-mt+1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{\frac{m}{3}};1\right)$.
$\Rightarrow$ Không có giá trị của m để $y=g(t)=\left|t^3-mt+1\right|$ đồng biến trên $(0;1)$.

Trường hợp 2: $-\sqrt{\frac{m}{3}}<0<1\leq\sqrt{\frac{m}{3}}\Leftrightarrow m\geq 3$.

Để $y=g(t)=\left|t^3-mt+1\right|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $t^3-mt+1\leq 0,\forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow mt\leq t^3+1,\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow m\leq t^2+\frac{1}{t},\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow m\leq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

$\Rightarrow$ Không có giá trị của m thỏa mãn.
Vậy chỉ có giá trị $m=0$ thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;\,5]$ để hàm số $y=\left|\cos^3 x-3m^2\cos x\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$?

(A) 1. (B) 11. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $t=\cos x$, vì $x\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;\,1)$. Vì $t=\cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$ nên
Yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên thuộc $[-5;\,5]$ để hàm số $y=\left|t^3-3m^2t\right|$ đồng biến trên $(0;\,1)$.
Xét $f(t)=t^3-3m^2t^2$; $t\in(0;\,1)$; $f'(t)=3t^2-3m^2$.
Trường hợp 1: Nếu $m=0\Rightarrow f'(t)>0;\,\forall t\in(0;\,1)\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;1)$.
Mà $f(0)=0\Rightarrow y=|f(t)|$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow y=|f(t)|$ đồng biến trên $(0;1)$.
Do đó $m=0$ thỏa mãn bài toán (1).

Trường hợp 2: $m\neq 0\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m\\t=-m\end{array}\right.$; $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-m\sqrt{3}\\t=0\\t=m\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Với $m>0$, ta có bảng biến thiên sau

t	0		m		$m\sqrt{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$\lvert f(t)\rvert$	0	$\nearrow$	$2m^3$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=|f(t)|$ đồng biến trên $(0;\,m)$.
Yêu cầu bài toán tương đương $(0;\,1)\subset(0;\,m)\Leftrightarrow m\geq 1$ (2).
Với $m<0$, ta có bảng biến thiên sau

t	0		$-m$		$-m\sqrt{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$\lvert f(t)\rvert$	0	$\nearrow$	$-2m^3$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=|f(t)|$ đồng biến trên $(0;\,-m)$.
Yêu cầu bài toán tương đương $(0;\,1)\subset(0;\,-m)\Leftrightarrow m\leq -1$ (3).
Từ (1); (2); (3) vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $y=|9^x+3^x-m+1|$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$?

(A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $3^x=t\Rightarrow t\in[1;3]$ vì $x\in[0;1]$.

$$\Rightarrow y=\left|t^2+t-m+1\right|=\sqrt{(t^2+t-m+1)^2}\Rightarrow y'=\frac{2\cdot\left(t^2+t-m+1\right)'\cdot\left(t^2+t-m+1\right)}{2\cdot\left|t^2+t-m+1\right|}.$$

Để hàm số đồng biến trên đoạn $t\in[1;3]$ thì $y'=\frac{(2t+1)\cdot\left(t^2+t-m+1\right)}{\left|t^2+t-m+1\right|}\geq 0,\,\forall t\in[1;3]$.

Với mọi giá trị của $t\in[1;3]$ thì $2t+1>0$ nên

Để $y' \geq 0,\ \forall t \in [1;3]$ thì $t^2+t-m+1 \geq 0,\ \forall t \in [1;3] \Rightarrow m-1 \leq t^2+t = g(t),\ \forall t \in [1;3]$.

$$\Rightarrow m-1 \leq \min_{[1;3]} g(t) = 2 \Rightarrow m \leq 3.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên $\{1;2;3\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y = \left|4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

(A) 2018. (B) 2019. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2$ (1) trên khoảng $(0;1)$. Đặt $t = 2^x$, $t \in (1;2)$.
Hàm số (1) trở thành $h(t) = t^2 - 2m \cdot t + m + 2$ trên khoảng $(1;2)$. Suy ra $h'(t) = 2t - 2m$.

Ta có $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (0;1) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (0;1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ (∗)

Vì hàm số $t = 2^x$ đồng biến trên $(0;1)$.
Do đó

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (1;2) \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h(t) \text{ nghịch biến trên khoảng } (1;2) \\ 3-m \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2t-2m \geq 0\, \forall t \in (1;2) \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2t-2m \leq 0\, \forall t \in (1;2) \\ 3-m \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} m \geq 2 \\ m \geq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 3. \end{array}\right.$$

Vậy có 2018 số nguyên dương nhỏ hơn 2020 thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Cho hàm số $y = \left|\mathrm{e}^{\frac{2x+2}{x-1}} + 3\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} - 2m + 5\right|$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$?

(A) 234. (B) Vô số. (C) 40. (D) Không tồn tại m.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$, ta có $t' = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \in (2;3) \Rightarrow t \in \left(\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right)$, đồng thời x và t sẽ ngược chiều biến thiên.
Khi đó hàm số trở thành $y = \left|t^2+3t-2m+5\right| = \sqrt{(t^2+3t-2m+5)^2}$ (2).

Ta có $y' = \dfrac{2\left(t^2+3t-2m+5\right)\cdot(2t+3)}{2\sqrt{(t^2+3t-2m+5)^2}} = \dfrac{\left(t^2+3t-2m+5\right)\cdot(2t+3)}{\sqrt{(t^2+3t-2m+5)^2}}$.

Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(2;3) \Leftrightarrow$ hàm số (2) đồng biến trên khoảng $\left(\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(t^2+3t-2m+5\right)\cdot(2t+3)}{2\sqrt{(t^2+3t-2m+5)^2}} \geq 0,\ \forall t \in \left(\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right)$$
$$\Leftrightarrow t^2+3t-2m+5 > 0,\ \forall t \in \left(\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right)$$
$$\Leftrightarrow m < \frac{t^2+3t+5}{2} = g(t),\ \forall t \in \left(\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right).$$

Có $g'(t) = \dfrac{2t+3}{2} > 0,\ \forall t \in \left(\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^4+3\mathrm{e}^2+5}{2} < g(t) < \dfrac{\mathrm{e}^6+3\mathrm{e}^4+5}{2} \Rightarrow m \leq \dfrac{\mathrm{e}^4+3\mathrm{e}^2+5}{2}$.
Với điều kiện m là số nguyên dương ta tìm được 40 giá trị của m.
Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương $m \in (-2019;2020)$, để hàm số $y = \left|\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{x^2} - m\right|$ nghịch biến trên $(1;\mathrm{e})$?

(A) 401. (B) 0. (C) 2019. (D) 2016.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{x^2}-m \Rightarrow f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}+2x\mathrm{e}^{x^2}$.
Ta có $y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in(1;\mathrm{e}) \quad (*)$.
Vì $x\in(1;\mathrm{e})$ nên $-2x\mathrm{e}^{-x^2}+2x\mathrm{e}^{x^2}=\dfrac{2x\left(\mathrm{e}^{2x^2}-1\right)}{\mathrm{e}^{x^2}}>0,\ \forall\in(1;\mathrm{e})$.
Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(x)\le 0,\ \forall x\in(1;\mathrm{e})\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{x^2}-m\le 0,\ \forall x\in(1;\mathrm{e})\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{x^2}\le m,\ \forall x\in(1;\mathrm{e})$.
Ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y=\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{x^2},\ x\in(1;\mathrm{e})$ là $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^2}$ nên $m\ge \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^2}\approx 1618,18$.
Vậy có 401 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Giá trị lớn nhất của m để hàm số $y=\left|\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-m\right|$ đồng biến trên $(1;2)$ là

(A) e. (B) $\mathrm{e}+\mathrm{e}^2$. (C) e^2. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-m \Rightarrow y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$. Ta có $y'=\dfrac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.
Hàm số đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)f'(x)\ge 0 \\ f(x)\ne 0 \end{cases} \forall x\in(1;2)$.
Vì $f'(x)=\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}>0,\ \forall x\in(1;2)$.
Nên $y'\ge 0,\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow f(x)>0,\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m<\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x},\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le \mathrm{e}+\mathrm{e}^2$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. C	5. B	6. A	7. B	8. A	9. B	10. B
11. A	12. A	13. A	14. B	15. D	16. A	17. D	18. A	19. A	20. B
21. B	22. D	23. A	24. C	25. A	26. D	27. A	28. A	29. C	30. A
31. C	32. A	33. B	34. A	35. A	36. A	37. A	38. A	39. D	40. A
41. C	42. B	43. A	44. C	45. C	46. D	47. C	48. A	49. C	50. D
51. D	52. B	53. B	54. A	55. B	56. C	57. A	58. C	59. A	60. B

CHỦ ĐỀ 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

2. Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm $x_i\,(i = 1;2;\ldots)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 1.

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
- Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số.

Quy tắc 2:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm $x_i\,(i = 1;2;\ldots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
  - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
  - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

B VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

(A) $x=-1$. (B) $x=1$. (C) $x=-3$. (D) $x=3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2x-3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

$y''=2x+2$; $y''(-3)=-4<0$; $y''(1)=4>0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

(A) 2. (B) 4. (C) 0. (D) vô số.

Lời giải.

$y'=3x^2-6(m+1)x+3(7m-3)$.

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+7m-3=0$ (2).

Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Delta'_{(2)}\le 0\Leftrightarrow(m+1)^2-1\cdot(7m-3)\le 0\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow 1\le m\le 4.$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy tập có 4 phần tử.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-1\right)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Ta có $g(x)=f(3-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\ge 0\Leftrightarrow f'(3-x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x\le -1\\1\le 3-x\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\-1\le x\le 2\end{array}\right.$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.
Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	1	↗	3	↘ 2

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là
(A) 7. (B) 5. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.
Gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C).
Đặt $g(x) = |f(x)|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.
- Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox, ta được phần II.
- Hợp của phần I và phần II ta được (C').

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C), kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		a		-1		b		0		c		1		$+\infty$
$y = \lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	1	1	↘	0	↗	3	↘ 2

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^5}{5}-(2m-1)x^4-\dfrac{m}{3}x^3+2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $y'=x^4-4(2m-1)x^3-mx^2=x^2\left[x^2-4(2m-1)x-m\right]$.

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của $y'=0$.

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$.

Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x)=x^2-4(2m-1)x-m$.

Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0)=0\Leftrightarrow m=0$.

Thử lại, với $m=0$ thì $g(x)=x^2+4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

(A) $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. (B) $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. (C) $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. (D) $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

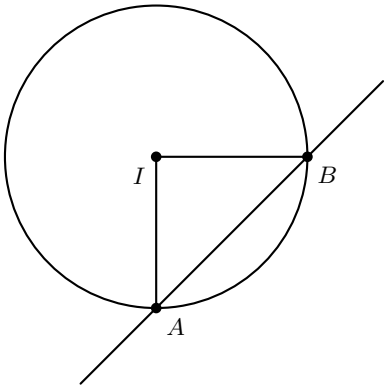
Ta có $y=x^3-3mx+2\Rightarrow y'=3x^2-3m$.

Hàm số $y=x^3-3mx+2$ có 2 điểm cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$ (1).

Ta có $y=\dfrac{1}{3}x\cdot y'-2mx+2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là

$$y=-2mx+2\Leftrightarrow 2mx+y-2=0.$$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A, B khi

$$d(I;\Delta)<R\Leftrightarrow\frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}<1\Leftrightarrow|2m-1|<\sqrt{4m^2+1}\Leftrightarrow -4m<0\ (*)$$

Do $m>0$ nên $(*)$ luôn đúng. Ta có $S_{\triangle IAB}=\dfrac{1}{2}\cdot IA\cdot IB\cdot\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}\cdot\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{1}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^\circ$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA=1$ nên

$$d(I;\Delta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4m^2-8m+1=0\Leftrightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$$ thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 7. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+3m-2$ có ba điểm cực trị.

(A) $m\in(2;+\infty)$. (B) $m\in(-2;2)$. (C) $m\in(-\infty;2)$. (D) $m\in(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3+4(m-2)x=4x\left(x^2+m-2\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2-m\quad(1)\end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow 2-m>0\Leftrightarrow m<2$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

(A) 18. (B) 17. (C) 16. (D) 19.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2\left(x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=4\end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

$g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(4x-12)f'\left(2x^2-12x+m\right)$.

Xét $g'(x)=0\ (*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\2x^2-12x+m=-1\\2x^2-12x+m=0\\2x^2-12x+m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\2x^2-12x+m=-1\,(l)\\2x^2-12x=-m\ (1)\\2x^2-12x=4-m\ (2)\end{array}\right.$.

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của $(*)$ nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$).

Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C) có $y'=4x-12$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình (1); (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 3. Do đó, mỗi đường thẳng $y=4-m$ và $y=-m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3.

Nhận xét: đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-m$.

Ta có $-18<-m\Leftrightarrow m<18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(2m-1)x^2+(8-m)x+2$ với $m\in\mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 cực trị là khoảng $(a;b)$. Tích $a\cdot b$ bằng

(A) 12. (B) 16. (C) 10. (D) 14.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-2(2m-1)x+8-m$.

Vì $f(|x|)$ là hàm chẵn (do $f(|-x|)=f(|x|)$), nên đồ thị hàm $f(|x|)$ đối xứng qua trục Oy.

Do đó, khi hàm $f(x)$ có hai cực trị dương thì hàm $f(|x|)$ sẽ có thêm hai cực trị đối xứng qua trục Oy và một

cực trị còn lại chính là giao điểm của đồ thị hàm $f(|x|)$ và trục Oy.
Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.
Điều kiện tương đương với

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-3m-7>0\\ 2m-1>0\\ 8-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>\dfrac{7}{4}\end{array}\right.\\ m>\dfrac{1}{2}\\ m<8\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(\frac{7}{4};8\right).$$

Vậy $a=\dfrac{7}{4}$, $b=8$ và $a\cdot b=14$.
Chọn đáp án (D) □

ĐỀ VDC SỐ 5: CƠ BẢN VỀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-2018)(x-2019)(x-2020)^4$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

$\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2018 \\ x=2019 \\ x=2020. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		2018		2019		2020		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu qua hai điểm $x=2018$, $x=2019$.

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

(A) $x=-1$. (B) $x=1$. (C) $x=-3$. (D) $x=3$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2x-3$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$; $y''=2x+2$; $y''(-3)=-4<0$; $y''(1)=4>0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)^3(2x+3)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) $x=3$.

Lời giải.

Hàm số có $f'(x)$ đổi dấu khi qua các giá trị $x=3$ và $x=-\dfrac{3}{2}$, không đổi dấu khi qua $x=1$.

Vậy hàm số có 2 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) $x=4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(x)$ sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dễ thấy $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x=-2$ và $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x=1$.
Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.
Chọn đáp án B □

Câu 5. Hàm số $y=2x^3-x^2+5$ có điểm cực đại là
A $x=\dfrac{1}{3}$. B $x=0$. C $M(0;5)$. D $y=5$.

Lời giải.
Ta có $y'=6x^2-2x$, $y''=12x-2$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$
$y''(0)=-2<0 \Rightarrow x=0$ là điểm cực đại của hàm số $y=2x^3-x^2+5$.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)(x+2)^2$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A 2. B 3. C 4. D 1.

Lời giải.
Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$
Nhận thấy $(x+2)^2>0, \forall x\neq -2 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x=-2$ nên $x=-2$ không phải là điểm cực trị hàm số.
Ngoài ra $f'(x)$ cùng dấu với tam thức bậc hai $x(x-1)$.
Vậy $x=0$, $x=1$ là hai điểm cực trị của hàm số.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x+1}$có bao nhiêu điểm cực trị?
A 3. B 0. C 2. D 1.

Lời giải.
$\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}<0, \forall x\in\mathscr{D}$.
Do y' không đổi dấu nên hàm số không có cực trị.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?
A $M(0;1)$. B $Q(-1;10)$. C $P(1;0)$. D $N(1;-10)$.

Lời giải.
Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$, $f'(x)=3x^2-6x-9$.
Ta có $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)\cdot f'(x)-8x-2$.
Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị A và B nên $f'(x_A)=f'(x_B)=0$.
Suy ra $\begin{cases} y_A=f(x_A)=-8x_A-2 \\ y_B=f(x_B)=-8x_B-2. \end{cases}$
Do đó phương trình đường thẳng AB là $y=-8x-2$.
Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Số nào sau đây là điểm cực đại của hàm số $y=x^4-2x^3+x^2+2$.
A $\dfrac{1}{2}$. B 1. C 0. D 2.

Lời giải.
$\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực đại của hàm số đã cho là $x = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x-3)^2$. Khi đó số cực trị của hàm số $y = f(2x+1)$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

$y' = 2 \cdot f'(2x+1) = 2(2x+1-2)(2x+1-3)^2 = 2(2x-1)(2x-2)^2$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 1 \text{ (nghiệm bội chẵn).} \end{array}\right.$

Vậy hàm số có một cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau đây

1) Hàm số có ba điểm cực trị.

2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$.

3) Hàm số có một điểm cực trị.

4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên?

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

$\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có ba điểm cực trị, đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$.

Vậy có ba mệnh đề đúng là 1), 2), 4).

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Hàm số $f(x)=\mathrm{C}_{2019}^{0}+\mathrm{C}_{2019}^{1}\cdot x+\mathrm{C}_{2019}^{2}\cdot x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2019}^{2019}\cdot x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 0. (B) 2018. (C) 1. (D) 2019.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\mathrm{C}_{2019}^{0}+\mathrm{C}_{2019}^{1}\cdot x+\mathrm{C}_{2019}^{2}\cdot x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2019}^{2019}\cdot x^{2019}=(1+x)^{2019}$.
Suy ra $f'(x)=2019\cdot(1+x)^{2018}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$.
Do $x=-1$ là nghiệm bội chẵn nên $x=-1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.
Vậy hàm số không có cực trị.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

(A) $A(-2;0)$. (B) $B(-1;4)$. (C) $C(0;1)$. (D) $D(1;0)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-3$, $y'=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1.\end{array}\right.$
Mà $y''=6x$ nên $y''(1)=6>0$, $y''(-1)=-6<0$.
Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$. Suy ra $y=0$.
Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=1+\mathrm{C}_{10}^{1}\cdot x+\mathrm{C}_{10}^{2}\cdot x^2+\cdots+\mathrm{C}_{10}^{10}\cdot x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

(A) 10. (B) 0. (C) 9. (D) 1.

Lời giải.

Áp dụng khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có
$f(x)=1+\mathrm{C}_{10}^{1}\cdot x+\mathrm{C}_{10}^{2}\cdot x^2+\cdots+\mathrm{C}_{10}^{10}\cdot x^{10}=(1+x)^{10}\Rightarrow f'(x)=10(1+x)^9$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị $x=-1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-2)(3^x-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2(x-1)(x-2)(3^x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2.\end{array}\right.$
Do ba nghiệm của $f'(x)=0$ đều là nghiệm bội lẻ nên hàm số đã cho có ba điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-9)(x^2-3x)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

(A) $T=f(0)$. (B) $T=f(9)$. (C) $T=f(-3)$. (D) $T=f(3)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x^2-9)(x^2-3x)^2=0\Leftrightarrow x^2(x-3)^3(x+3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=-3.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(-3)$	↘	$f(0)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là $T = f(-3)$.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng
A $\sqrt{2}+1$. B $\sqrt{2}$. C $\sqrt{2}-1$. D 1.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{2} - 1.$$

Trong đó $a = BC = 2$, $b = c = AB = AC = \sqrt{2}$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là $\triangle ABC$. Tính diện tích $\triangle ABC$
A $S = 2$. B $S = 1$. C $S = \dfrac{1}{2}$. D $S = 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$
Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$.
Do đó $\overrightarrow{AB} = (-1;1)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{2}. \end{array}\right.$
Suy ra $\triangle ABC$ vuông cân tại A do đó $S = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC = 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là
A 2. B 4. C 0. D Vô số.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x \Rightarrow y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.
Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m - 3 = 0$. Hàm số đã cho không có cực trị
$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép
$\Leftrightarrow \Delta'_y \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.
Do m là số nguyên nên $m \in \{1;2;3;4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2; 1; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?
A 6. B 4. C 5. D 3.

Lời giải.

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2; 1; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$.

Đặt $g(x)=f(x^2-2x) \Rightarrow g'(x)=(2x-2)\cdot f'(x^2-2x)$. Vì $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó những điểm $g'(x)$ có thể đổi dấu thuộc tập các điểm thỏa mãn.

$$\begin{bmatrix} 2x-2=0 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=0 \\ x=2. \end{bmatrix}$$

Ba nghiệm trên đều là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hàm số$f(x)=x^2(x-1)\mathrm{e}^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là
A 1. B 2. C 3. D 0.

Lời giải.
Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$
$\Rightarrow F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ nên $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)\mathrm{e}^{3x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1. \end{bmatrix}$
Bảng xét dấu $F'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.
Chọn đáp án A □

Câu 22. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\sin x-\dfrac{x}{4}\right|$, với mọi $x\in(-\pi;\pi)$ là
A 2. B 4. C 3. D 5.

Lời giải.
Xét hàm số $y=f(x)=\sin x-\dfrac{x}{4}$ với $x\in(-\pi;\pi)$.
Ta có $f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{4}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=x_1\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right) \\ x=x_2\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right). \end{bmatrix}$
$f(x_1)=\sin x_1-\dfrac{x_1}{4}=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}-\dfrac{x_1}{4}<-\dfrac{\sqrt{15}}{4}+\dfrac{\pi}{8}<0.$
$f(x_2)=\sin x_2-\dfrac{x_2}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}-\dfrac{x_2}{4}>\dfrac{\sqrt{15}}{4}-\dfrac{\pi}{8}>0.$
Bảng biến thiên

x	$-\pi$		x_1		x_2		π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\dfrac{\pi}{4}$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘	$\dfrac{-\pi}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khác x_1, x_2.
Suy ra hàm số $y=\left|\sin x-\dfrac{x}{4}\right|$, với $x\in(-\pi;\pi)$ có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 23. Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

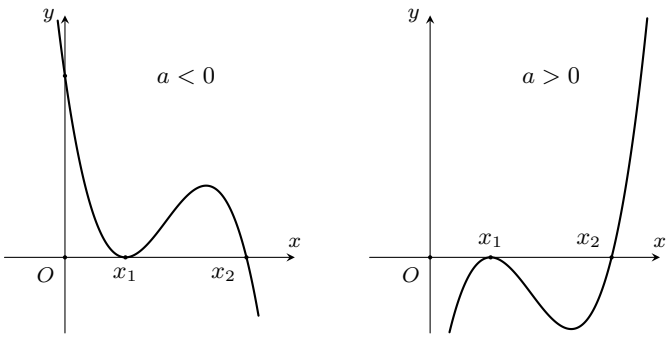
(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

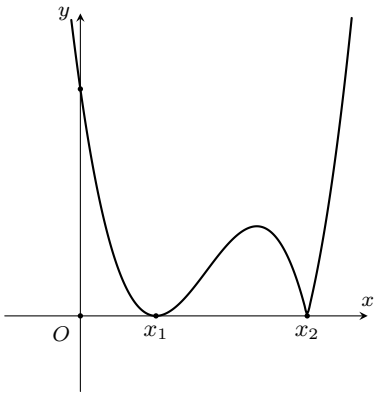
Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$ và trục hoành.

Do phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có thể viết dưới dạng $a(x-x_1)^2(x-x_2)=0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình. Khi đó đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2.

Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ ứng với trường hợp $a>0$ và $a<0$



Đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ $(a\neq 0)$ tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ $(a\neq 0)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\displaystyle\int\limits_{2x}^{x^2}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó: $f(x)=F(t)\Big|_{2x}^{x^2}=F(x^2)-F(2x)\Rightarrow f'(x)=2x\cdot F'(x^2)-2F'(2x)$

$\Rightarrow f'(x)=2x\cdot\dfrac{2x^2}{1+x^4}-2\cdot\dfrac{4x}{1+4x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{8x^5+4x^3-8x}{(1+x^4)(1+4x^2)}$.

$$\begin{aligned} & f'(x)=0\\ \Leftrightarrow\ & 8x^5+4x^3-8x=0\\ \Leftrightarrow\ & 4x(2x^4+x^2-2)=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x^2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x^2=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}<0 \end{bmatrix}$$

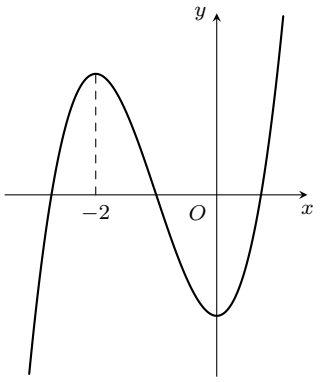
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=x_1=\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2} \\ x=x_2=-\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}. \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có ba điểm cực trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(-2x^2+4x)$ là
(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.
Quan sát đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị $x=-2$, $x=0$ vì vậy $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm $x=-2$, $x=0$ nên $f'(x)=3ax(x+2)$.
Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \left[f(-2x^2+4x)\right]' \\ &= (-4x+4)f'(-2x^2+4x) \\ &= 3a(-4x+4)(-2x^2+4x)(-2x^2+4x+2) \\ &= -48ax(x-2)(x-1)(x^2-2x-1). \end{aligned}$$

$y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ và y' đổi dấu khi x qua mỗi nghiệm trên.

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A) 12,4. B) 6,4. C) 4,4. D) 27.

Lời giải.

$\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

$y'=x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{x^3-3x+1}{x^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1\approx 2{,}8794\\ x_2\approx 0{,}6572\\ x_3\approx -0{,}5321.\end{array}\right.$

Suy ra tọa độ các điểm cực trị: $A\approx(2{,}879;-4{,}84)$, $B\approx(0{,}653;-3{,}277)$, $C\approx(-0{,}532;3{,}617)$.

Gọi $(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0\,(1)$ là đường tròn đi qua ba điểm cực trị.

Thay tọa độ ba điểm A, B, C vào (1) ta được hệ phương trình ba ẩn sau:

$\begin{cases}5{,}758a-9{,}68b-c\approx 31{,}71\\ 1{,}306a-6{,}554b-c\approx 11{,}17\\ -1{,}064+7{,}234-c\approx 13{,}37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\approx 5{,}734\\ b\approx 1{,}0833\\ c\approx -11{,}25\end{cases}$

$R\approx\sqrt{a^2+b^2-c}\approx\sqrt{41{,}3}\approx 6{,}4$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f'(x)-x^2-1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A) 2. B) 3. C) 4. D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-x^3+3x^2+3x-3\Rightarrow y'=f''(x)-2x=-3x^2+4x+3$.

$y'=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$.

$y''=-6x+4$, $y''\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)=-2\sqrt{13}<0$, $y''\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)=2\sqrt{13}>0$.

Suy ra hàm số có một điểm cực tiểu.

Chọn đáp án D □

Câu 28.

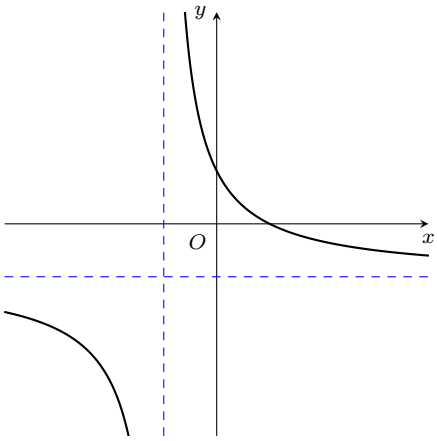
Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A) Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị trái dấu.

B) Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

C) Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

D) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nằm bên trái trục tung.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có $\begin{cases} \dfrac{a}{c}<0 \\ -\dfrac{d}{c}<0 \\ \dfrac{b}{d}>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ ad-bc<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c}<0 & (1) \\ \dfrac{d}{c}>0 & (2) \\ \dfrac{b}{d}>0 & (3) \\ \dfrac{b}{a}<0 & (4) \\ ad-bc<0. & (5) \end{cases}$

- Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị trái dấu
  $\Leftrightarrow y'=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3ac<0 \Leftrightarrow ac<0$. Do đó **đúng** với (1).
- Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương
  Suy ra $d>0$, không thể đúng với (2) vì chưa biết dấu của c. Do đó mệnh đề này **sai**.
- Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.
  Mệnh đề **sai** vì
  $\begin{cases} \Delta' y'>0 \\ \dfrac{-2b}{3a}>0 \\ \dfrac{c}{3a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' y'>0 \\ \dfrac{b}{a}<0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{cases}$. **Trái với** (1).
- Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nằm bên trái trục tung.
  Mệnh đề **sai** vì
  Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của $y''=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$.
  Yêu cầu của đề hoành độ tâm đối xứng âm nên $-\dfrac{b}{3a}<0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a}<0$. **Trái với** (3).

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2018$ và $a+b+c<2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7.

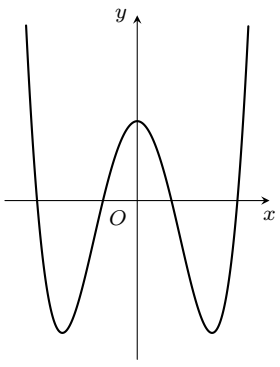
Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2018=ax^4+bx^2+c-2018$.

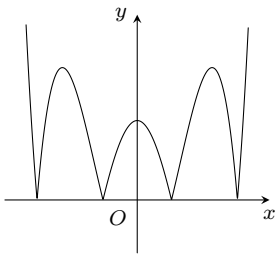
Ta có $\begin{cases} a>0 \\ c>2018 \\ a+b+c<2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ c>2018 \end{cases} \Rightarrow ab<0 \Rightarrow$ hàm số $y=g(x)$ là hàm trùng phương có ba điểm cực trị.

Mà $g(0)=c-2018>0 \Rightarrow g(0)>0$, $g(1)=a+b+c-2018<0 \Rightarrow g(x_{CT})\le g(1)<0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị hàm số $y=g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox, phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số $y=|g(x)|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Hàm số $f(x) = \left|\dfrac{x}{x^2+1} - m\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1} - m$, với $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.
Xét phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1} - m = 0 \Leftrightarrow mx^2 - x + m = 0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.
Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x-4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$.
Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x \leq -1 \\ 1 \leq 3-x \leq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2. \end{array}\right.$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?
(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} y' &= -(12x^3-24x)\cdot f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x \\ &= -12x(x^2-2)\cdot f'(-x^4+4x^2-6)+12x(x^4-x^2-2) \\ &= -12x(x^2-2)\cdot\left(f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)\right). \end{aligned}$$

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1. \end{array}\right.$
Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\le -2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\le f'(-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $x^2+1\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.
Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. B	5. B	6. A	7. B	8. D	9. A	10. C
11. D	12. A	13. D	14. D	15. C	16. C	17. C	18. B	19. B	20. D
21. A	22. D	23. D	24. D	25. D	26. B	27. D	28. A	29. D	30. D
31. B	32. D								

CHỦ ĐỀ 3. CỰC TRỊ HÀM TỔNG VÀ HÀM HỢP

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?
(A) 8. (B) 7. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.
Ta có $g(x)=\begin{cases} f(x^2-3x+2) & \text{khi} x\ge 1 \\ f(x^2-x) & \text{khi} x\le 1. \end{cases}$ Suy ra $g'(x)=\begin{cases} (2x-3)\cdot f'(x^2-3x+2) & \text{khi} x\ge 1 \\ (2x-1)\cdot f'(x^2-x) & \text{khi} x<1. \end{cases}$

☑ Trường hợp 1: $1x \geq 1$

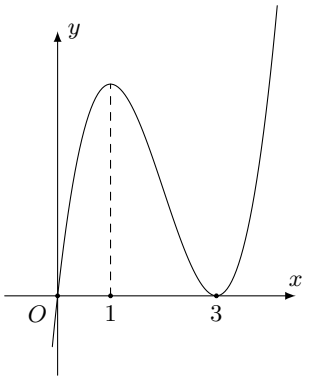
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x-3=0 \\ f'(x^2-3x+2)=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\dfrac{3}{2} \\ x^2-3x+2=-1 \\ x^2+3x-2=0 \\ x^2+3x-2=1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\dfrac{3}{2} \\ x=1 \\ x=2 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$ (không thỏa điều kiện).

☑ Trường hợp 2: $x<1$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x-1=0 \\ f'(x^2-x)=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-x=-1 \\ x^2-x=0 \\ x^2-x=1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ x=1 \text{ (không thỏa điều kiện)} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$ (không thỏa điều kiện).

Suy ra $g'(x)=0$ có 7 lần đổi dấu. Vậy hàm số có 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Câu 34.
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1)>1$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020;2021)$ để hàm số $g(x)=\left|f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m\right|$ có tất cả 9 điểm cực trị.



(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 4.

Lời giải.
Số cực trị của hàm số $g(x)=\left|f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$ và đường thẳng $y=0$.
Xét hàm số $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$ có

$$h'(x)=3f^2(x)f'(x)+3f(x)f'(x)=3f(x)f'(x)[f(x)+1]$$

Giải phương trình $h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \\ f(x)=-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=3 \\ x=1 \\ x=\alpha,(\alpha<0). \end{bmatrix}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		α		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$m+\frac{1}{2}$	↘	m	↗	$h(1)$	↘	m	↗	$+\infty$

Ta có $h(1) > m + \dfrac{1}{2}$. Nên để đồ thị hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 0 < m + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m < 0$.
Đối chiếu điều kiện suy ra không có giá trị nào của m thỏa điều kiện bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y = 2\left[f\left(x\right)\right]^3 - 9\left[f\left(x\right)\right]^2 + 12f\left(x\right) + 2021$ có bao nhiêu điểm cực đại?
(A) 5. (B) 10. (C) 7. (D) 9.

Lời giải.
Hàm số $y = g(x) = 2\left[f\left(x\right)\right]^3 - 9\left[f\left(x\right)\right]^2 + 12f\left(x\right) + 2021$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $y' = 6f^2\left(x\right)f'\left(x\right) - 18f\left(x\right)f'\left(x\right) + 12f'\left(x\right) = 6f'\left(x\right)\left[f^2\left(x\right) - 3f\left(x\right) + 2\right]$.
Giải phương trình đạo hàm $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'\left(x\right) = 0 & (1) \\ f\left(x\right) = 1 & (2) \\ f\left(x\right) = 2. & (3) \end{array}\right.$

☑ Từ (1) ta có $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4. \end{array}\right.$

☑ Từ (2) ta có $f\left(x\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = a \in (-\infty; 1) & \\ x = 2 & \text{(nghiệm kép)} \\ x = b \in (3; 4) & \\ x = c \in (4; +\infty)\,. & \end{array}\right.$

☑ Từ (3) ta có $f\left(x\right) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = d \in (a; 1) & \\ x = e \in (1; 2) & \\ x = 3 & \text{(nghiệm kép)} \\ x = u \in (c; +\infty)\,. & \end{array}\right.$

Lập bảng xét dấu, ta có

x	$-\infty$		a		d		1		e		2		3		b		4		c		u		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)-1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)-2$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực đại.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=[f(x-1)]^2+2021$ là

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=2f(x-1)f'(x-1)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2f(x-1)f'(x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x-1)=0\\ f'(x-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x-1=a\,(a<-1)\\ x-1=b\,(-1<b<0)\\ x-1=c\,(0<c<1)\\ x-1=d\,(d>1)\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x-1=-1\\ x-1=0\\ x-1=1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1+a\,(x<0)\\ x=1+b\,(0<x<1)\\ x=1+c\,(1<x<2)\\ x=1+d\,(x>2)\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=2.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$f'(x-1)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1<-1\\ 0<x-1<1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\ 1<x<2.\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$1+a$		0		$1+b$		1		$1+c$		2		$1+d$		$+\infty$
$f(x-1)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f'(x-1)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$g'(x)-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$, thỏa mãn $1-x^3=2x^2f(x)+xf^2(x)-f'(x)$ và $f(1)=0$. Hàm số $g(x)=[f(2x-1)]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$1-x^3=2x^2f(x)+xf^2(x)-f'(x)\Leftrightarrow 1+f'(x)=x\left[x^2+2xf(x)+f^2(x)\right]=x[x+f(x)]^2.$$

$$\Rightarrow \frac{1+f'(x)}{[x+f(x)]^2}=x\Rightarrow\int\frac{1+f'(x)}{[x+f(x)]^2}\mathrm{dx}=\int\mathrm{xdx}\Rightarrow-\frac{1}{\mathrm{x+f\,(x)}}=\frac{\mathrm{x}^2}{2}+\mathrm{C}.$$

Do $f(1)=0\Rightarrow-\dfrac{1}{1+f(1)}=\dfrac{1}{2}+C\Rightarrow C=-\dfrac{3}{2}$.

Khi đó $-\dfrac{1}{x+f(x)}=\dfrac{x^2-3}{2}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^2-3}-x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x}{(x^2-3)^2}-1$.

Suy ra $f(x)=0\Leftrightarrow-\dfrac{2}{x^2-3}=x\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2.\end{array}\right.$

Và $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x=\left(x^2-3\right)^2\Leftrightarrow 4x=x^4-6x^2+9\Leftrightarrow x^4-6x^2-4x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=a>2.\end{array}\right.$

Khi đó $g'(x)=4f'(2x-1)f(2x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=-2\\ 2x-1=1\\ 2x-1=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=\dfrac{a+1}{2}>\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

Ta có $f(x)$ không xác định khi $x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow g(x)$ không xác định khi $2x-1=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pm\sqrt{3}+1}{2}$.

Mặt khác $g'(-1)=4f'(-3)f(-3)=4\left(-\dfrac{4}{3}\right)\cdot\dfrac{8}{3}<0$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^+} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^+} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$		1		$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$		$\frac{a+1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

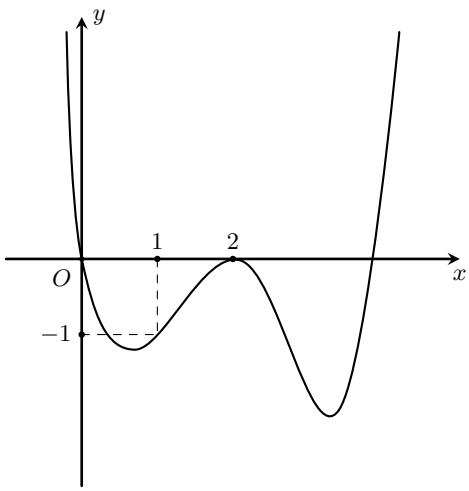
Từ bảng biến thiên suy ra $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38.

Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+m\right)$ là 5.

(A) $(2;+\infty)$. (B) $\left(-\infty;\dfrac{17}{4}\right)$. (C) $\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right)$. (D) $\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{17}{4}\right)$.



Lời giải.

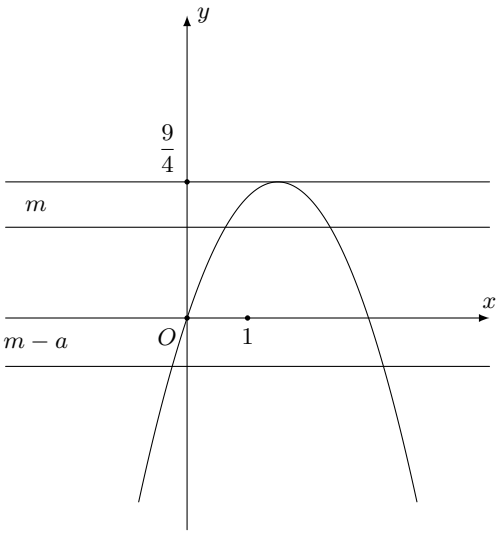
Ta có $g'(x)=(2x-3)f'\left(x^2-3x+m\right)$. Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-3=0 & (1) \\ f'\left(x^2-3x+m\right)=0. & (2)\end{array}\right.$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Và $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+m=0 \\ x^2-3x+m=2 \\ x^2-3x+m=a, a>2\end{array}\right. \left[\begin{array}{l} m=-x^2+3x \\ m-2=-x^2+3x \\ m-a=-x^2+3x.\end{array}\right.$

Với thì có nghiệm kép. Xét hàm số $x^2-3x+m=2$ thì $g'(x)=0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y=-x^2+3x$ ta có đồ thị



Do $a > 2$ suy ra $m < \dfrac{9}{4}$ phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < \dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x-12)^{2020}\left(x^2-2x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2020; 2020)$ để hàm số $y = f\left(x^2-2020x+2021m\right)$ có 3 điểm cực trị dương.

A 4038. B 2021. C 2020. D 2019.

Lời giải.

Ta có $y = f\left(x^2-2020x+2021m\right)$. Suy ra

$$\begin{aligned} y' &= (2x-2020)\, f'\left(x^2-2020x+2021m\right) \\ &= (2x-2020)\left(x^2-2020x+2021m-12\right)^{2020}\left(x^2-2020x+2021m\right)\left(x^2-2020x+2021m-2\right). \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x-2020=0 & (1) \\ x^2-2020x+2021m-12=0 & (2) \\ x^2-2020x+2021m=0 & (3) \\ x^2-2020x+2021m-2=0. & (4) \end{bmatrix}$$

Dễ thấy (2), (3), (4) không có nghiệm chung, và $\left(x^2-2020x+2021m-12\right)^{2020} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f\left(x^2-2020x+2021m\right)$ có 3 điểm cực trị dương khi hai phương trình (3), (4) có 2 nghiệm trái dấu khác 1010.

(3) có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2021m < 0 \\ 1010^2 - 2020\cdot 1010 + 2021m \neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m < 0.$

(4) có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2021m - 2 < 0 \\ 1010^2 - 2020\cdot 1010 + 2021m - 2 \neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m < \dfrac{2}{2021}.$

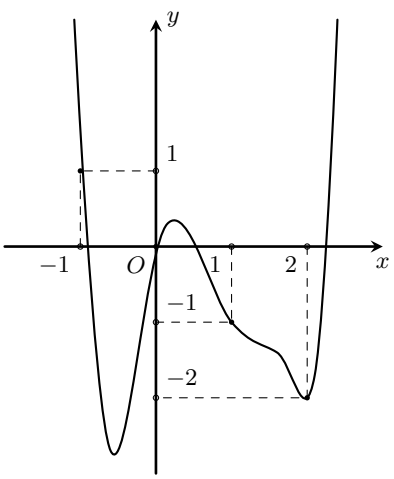
Vậy $m < 0$ thì hàm số có 3 cực trị dương.
Do $m \in (-2020; 2020)$ nên có 2019 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)| = |2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021|$ là

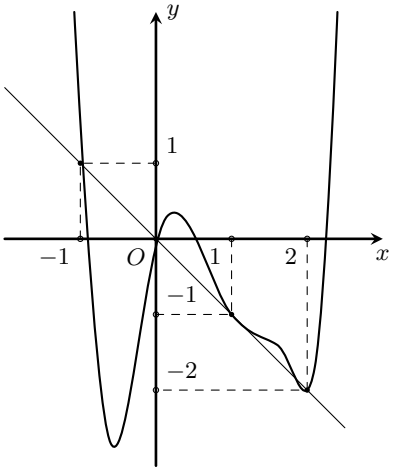
(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.



Lời giải.

Xét $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021$.
Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + (x+3) + (x+1) = 2(f'(x+2) + x + 2)$.
Do đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) + x + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(t) + t = 0$ với $t = x + 2$.

$$\Leftrightarrow f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+2 = -1 \\ x+2 = 0 \\ x+2 = 1 \\ x+2 = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0. \end{bmatrix}$$



Bảng xét dấu của $g'(x)$

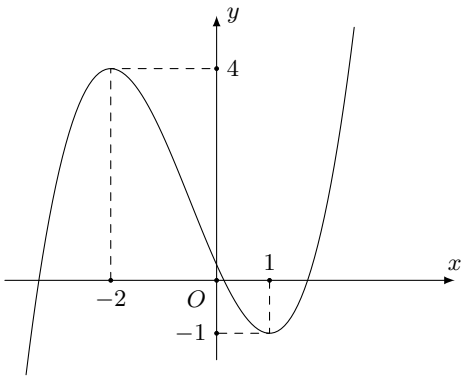
x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘				↗			

Suy ra hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021$ có 2 điểm cực trị và $g(x) = 0$ có 1 nghiệm bội lẻ.
Vậy hàm số $y = |g(x)| = |2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021|$ có 3 điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 41.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = f\left(\left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|\right)$ có 17 cực trị.

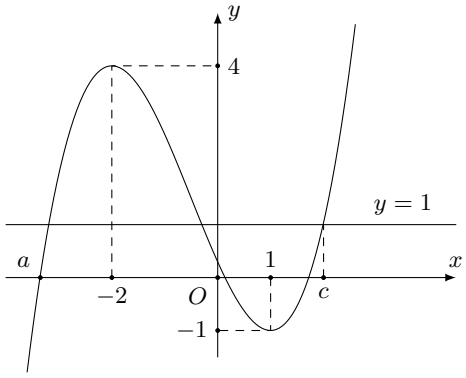
(A) 4. (B) 0. (C) 2. (D) 6.



Lời giải.

Ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=-2$ và $x=1$.
Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)'\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|}f'\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right) \\ &= \frac{2f'(x)\left(f(x)-1\right)\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|}\left(\underbrace{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|+2}_{>0}\right)\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|-1\right). \end{aligned}$$



$$y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2;x=1 \\ f(x)=1\Leftrightarrow x=a,x=b,x=c \\ f^2(x)-2f(x)-m=0\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=m \\ \left|f^2(x)-2f(x)-m\right|=1\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=m\pm 1. \end{bmatrix}$$

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-2f(x)$; $g'(x)=2f'(x)[f(x)-1]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2;x=1 \\ f(x)=1\Leftrightarrow x=a,x=b,x=c \end{bmatrix};\begin{cases} g(a)=g(b)=g(c)=1^2-2\cdot 1=-1 \\ g(-2)=4^2-2\cdot 4=8 \\ g(1)=(-1)^2-2\cdot(-1)=3. \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		-1		b		1		c		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	8	$\searrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			-1				-1				-1		

Số nghiệm bội lẻ của $y'=0$ phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với 3 đường thẳng $d_1\colon y=m+1$, $d_2\colon y=m$, $d_3\colon y=m-1$.
Yêu cầu bài toáng tương đương với 3 trường hợp sau

☑ Trường hợp 1: d_1, d_2, d_3 đều cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm phân biệt không trùng với các điểm $x\in\{-2;1;a;b;c\}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3\le m+2<8 \\ 3\le m<8 \\ 3\le m-2<8 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 1\le m<6 \\ 3\le m<8 \\ 5\le m<10 \end{cases}\Leftrightarrow 5\le m<6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=5. \quad (1)$$

☑ Trường hợp 2: 2 đường thẳng d_1, d_2 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt và d_3 không cắt hoặc tiếp xúc đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có tung độ bằng -1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} -1\le m+2<3 \\ -1\le m<3 \\ -1\le m-2<3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -3\le m<1 \\ -1\le m<3 \\ m\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=0. \quad (2)$$

☑ Trường hợp 3: Đường thẳng d_1 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 2 điểm phân biệt và d_2 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại hai điểm phân biệt, d_3 cắt $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \geq 8 \\ 3 \leq m < 8 \\ -1 \leq m-2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ 3 \leq m < 8 \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)+6x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 2. B 4. C 5. D 3.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^3\right)+6x$ có $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)+6$.

Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{-2}{x^2}$. $(*)$

Ta dễ dàng thấy được $f''(x)=a(x+1)(x+2) \Rightarrow f'(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+2x+C\right)$.

Từ bảng biến thiên $f'(-2)=3$, $f'(-1)=\dfrac{13}{4}$ ta tìm được $a=-\dfrac{3}{2}$, $C=-\dfrac{4}{3}$ từ đó $f'(0)=2>0$.

Với $x<0$, $f'(x)>0$ nên kéo theo $f'(x^3)>0$ mà $\dfrac{-2}{x^2}$ nên phương trinh $(*)$ không có nghiệm và $h'(x)>0$.

Với $x>0$, $f'(x)$ là hàm số nghịch biến, còn $\dfrac{-2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình $(*)$ có nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $h'(0)\simeq+\infty$ và $h'(+\infty)\simeq-\infty$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=c>0$. Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$

x	$-\infty$		0		c		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$h(c)$	$\searrow$	$-\infty$

Do ta có $h(0)=f(0)+6\cdot 0=0$ nên $h(c)>0$.
Từ đó suy ra hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 3 cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m nguyên để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)+3m^2x+m-1\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất có thể. Thì giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(-2;0)$. B $(-1;1)$. C $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. D $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^3\right)+3m^2x+m-1$ có $h'(x)=3x^2f'(x^3)+3m^2$.

Nếu $m=0$ thì $h(x)=f(x^3)-1$ nên $g\left(x\right)=\left|f\left(x^3\right)+3m^2x+m-1\right|$ có 3 cực trị.

Xét với $m\neq 0$

Ta có $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{-m^2}{x^2}\quad(*)$.

Ta dễ dàng thấy được $f''\left(x\right)=a(x+1)(x+2)\Rightarrow f'\left(x\right)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+2x+C\right)$.

Từ bảng biến thiên $f'\left(-2\right)=1$, $f'\left(-1\right)=\dfrac{7}{6}$ ta tìm được $a=-1$, $C=-\dfrac{1}{3}$, từ đó $f'(0)=\dfrac{11}{3}>0$.

Với $x<0$, $f'(x)>0$ nên kéo theo $f'(x^3)>0$ mà $\dfrac{-m^2}{x^2}<0$ nên phương trình $(*)$ không có nghiệm và $h'(x)>0$.

Với $x>0$, $f'(x)$ là hàm số nghịch biến, còn $y=\dfrac{-m^2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình $(*)$ nhiều nhất 1 nghiệm.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left(f'\left(x^3\right)+\dfrac{m^2}{x^2}\right)\approx+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'\left(x^3\right)+\dfrac{m^2}{x^2}\right)\approx-\infty$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=c>0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$

x	$-\infty$		0		c		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	↗	$m-1$	↗	$h(c)$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên và $h(0)=f(0)+m-1=m-1$ nên hàm số $g(x)=|h(x)|$ có nhiều nhất 3 cực trị nếu $h(c)>0$. Từ đó ta cần $h(0)\geq 0\Rightarrow m\geq 1$.

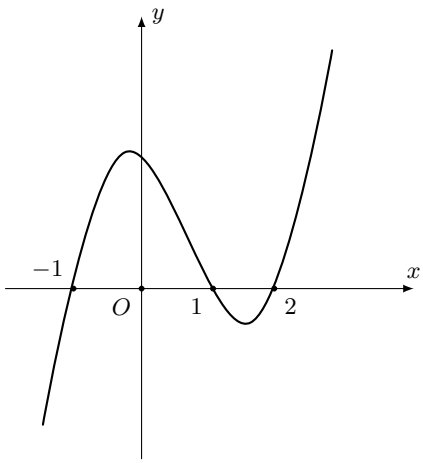
Vậy $\left[\begin{array}{l}m=0\\m\geq 1\end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 44.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g\left(x\right)=\left(|x|+\left|x^2-1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A 3. B 4. C 5. D 7.



Lời giải.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y=f(x)$ như sau thiên như sau

x	$-\infty$		-1		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

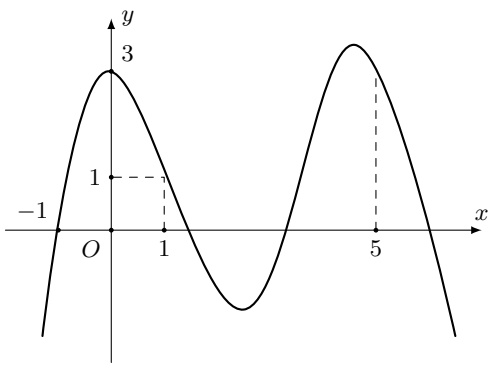
Đặt $u = |x| + \left|x^2 - 1\right|$. Ta có bảng ghép trục sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	-x		-x		0	x		x	
$\left\lvert x^2-1\right\rvert$	x^2-1	0	$1-x^2$			$1-x^2$	0	x^2-1	
u	x^2-x-1		$1-x-x^2$			$1+x-x^2$		x^2+x-1	
u	$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$			$\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$		$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$	
u	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f(u)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Vậy hàm số $g(x) = \left(|x| + \left|x^2 - 1\right|\right)$ có ba điểm cực đại.
Chọn đáp án A □

Câu 45.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 8f\left(x^3 - 3x + 3\right) - \left(2x^6 - 12x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 48x + 1\right)$ là

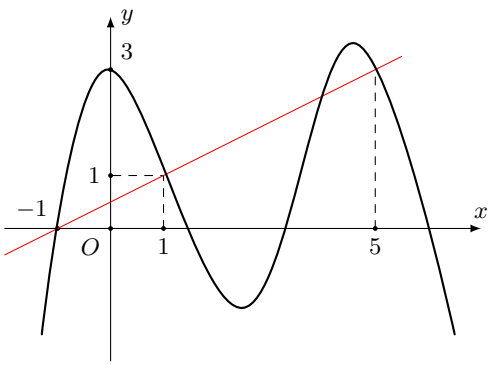
A 5. B 3. C 7. D 9.



Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= 8\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+3\right) - \left(12x^5-48x^3+48x^2+36x-48\right) \\ &= 24\left(x^2-1\right)\left[f'\left(x^3-3x+3\right) - \frac{\left(x^3-3x+3\right)+1}{2}\right]. \end{aligned}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \\ f'\left(x^3-3x+3\right) = \dfrac{\left(x^3-3x+3\right)+1}{2}. \quad (1) \end{array}\right.$ Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có



Đặt $t = x^3 - 3x + 3$. Phương trình (1) trở thành $f'(t) = \dfrac{t+1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=5. \end{array}\right.$

Với $t = -1$ ta có $x^3 - 3x + 3 = -1$. Phương trình này có 1 nghiệm.

Với $t=1$ ta có $x^3-3x+3=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm kép.

Với $t=5$ ta có $x^3-3x+3=-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

Như vậy $g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt và 2 nghiệm bội ba.

Vậy $g(x)$ có 5 cực trị.

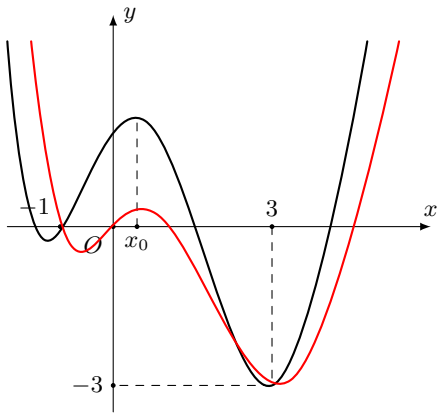
Chọn đáp án A □

Câu 46.

Cho hai hàm số bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có các đồ thị như hình bên.

Số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f^2(x)+g^2(x)-2f(x)g(x)$ là

A) 5. B) 4. C) 6. D) 3.



Lời giải.

Ta có $h(x)=[f(x)-g(x)]^2 \Rightarrow h'(x)=2[f(x)-g(x)][f'(x)-g'(x)]$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)-g(x)=0 & (1) \\ f'(x)-g'(x)=0. & (2) \end{array}\right.$ Từ đồ thị ta thấy phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt là $x=-1$; $x=x_1(x_1\in(-1;3))$; $x=3$, và $f(x)-g(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm này. Do đó các nghiệm trên là nghiệm bội lẻ của (1). Mà $f(x)$ và $g(x)$ đều là đa thức bậc 4 nên bậc của phương trình nhỏ hơn hoặc bằng 4. Từ đó suy ra phương trình (1) là phương trình bậc 3.

Do phương trình (1) là phương trình bậc 3 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt không trùng các nghiệm của phương trình (1).

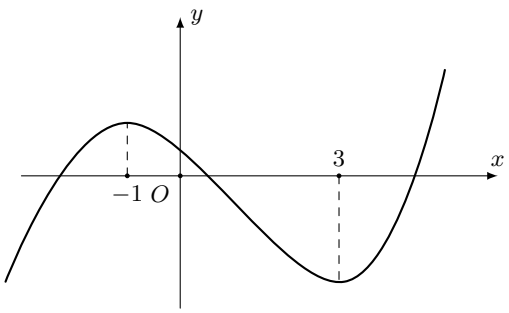
Suy ra $h'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt và $h'(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm đấy, nên hàm $h(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 47.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

A) 2. B) 4. C) 8. D) 10.



Lời giải.

Xét hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có đạo hàm $y'=2(x-1)f'\left((x-1)^2+m\right)$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x-1)^2+m=-1 \\ (x-1)^2+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x-1)^2=-1-m \\ (x-1)^2=3-m. \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $-1-m\le 0<3-m \Leftrightarrow -1\le m<3 \Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$.

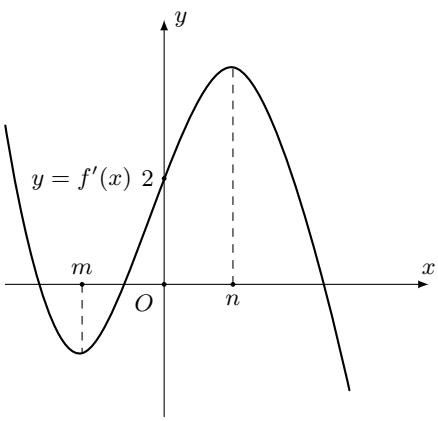
Vậy tổng các phần tử của S là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 48.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $(a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'\left(f\left(x\right) - 2x\right)$ là

(A) 7. (B) 10. (C) 14. (D) 6.



Lời giải.

Ta có $y' = \left(f\left(x\right) - 2x\right)' \cdot f''\left(f\left(x\right) - 2x\right) = \left(f'(x) - 2\right) \cdot f''\left(f\left(x\right) - 2x\right)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right) - 2 = 0 \\ f''\left(f\left(x\right) - 2x\right) = 0. \end{array}\right.$

Khi $f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$ có 3 nghiệm.

Khi $f''\left(f\left(x\right) - 2x\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} f\left(x\right) - 2x = m & (1) \\ f\left(x\right) - 2x = n. & (2) \end{array}\right.$

Xét phương trình (1) $f(x) - 2x = m$ $(m < 0)$, đặt $g\left(x\right) = f\left(x\right) - 2x \Rightarrow g'\left(x\right) = f'\left(x\right) - 2$.

Phương trình đạo hàm $g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 < m \\ x = 0 \\ x = x_2 > n. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$x_1 < m$		0		$x_2 > n$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	e	↗		↘	

Từ bảng biến thiên ⇒ phương trình (1) có 2 nghiệm.

Xét phương trình (2): $f\left(x\right) - 2x = n\,(n < e)$, đặt $h\left(x\right) = f\left(x\right) - 2x \Rightarrow h'\left(x\right) = f'\left(x\right) - 2$.

$h'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 < m \\ x = 0 \\ x = x_2 > n. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$x_1 < m$		0		$x_2 > n$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘	e	↗		↘	

Từ bảng biến thiên ⇒ phương trình (2) có 2 nghiệm.

Vậy hàm số $y = f'\left(f\left(x\right) - 2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $g'\left(x\right)=\left(\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2\right)'=2f\left(2x^2+x\right)\left(4x+1\right)f'\left(2x^2+x\right)$,

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(2x^2+x\right)=0\\4x+1=0\\f'\left(2x^2+x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2+x=a,\quad(a>1)\\x=-\dfrac{1}{4}\\2x^2+x=1\\2x^2+x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4}\quad(a>1)\\x=-\dfrac{1}{4}\\x=\dfrac{1}{2}\\x=-1.\end{array}\right.$$

Vì $a>1$ nên có thứ tự các nghiệm của $g'(x)=0$ là

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{4}<x_2=-1<x_3=-\frac{1}{4}<x_4=\frac{1}{2}<x_5=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}.$$

Vậy $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn như trên suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi chạy qua các nghiệm đơn.

Với $0\in\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ $(0\in(x_3;x_4))$. Xét $g'\left(0\right)=2\cdot f\left(0\right)f'\left(0\right)>0$. Suy ra $g'(x)>0$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ hay khoảng $(x_3;x_4)$. Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{1}{x^4}\left[f(x)-1\right]^4$ là

(A) 6. (B) 7. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Giả sử $f(x)=ax^4+bx^2+c$. Từ $\begin{cases}f'(0)=0\\f(0)=1\\f'(\pm1)=0\\f(\pm1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\\c=1\end{cases}$. Suy ra $f(x)=2x^4-4x^2+1$.

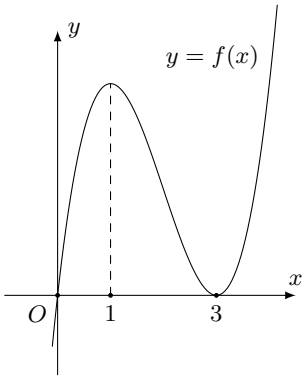
Khi đó $y=\dfrac{1}{x^4}\left[2x^4-4x^2\right]^4=2^4x^4(x^2-2)^4$. Có $y'=2^4\cdot4\cdot x^3\cdot(x^2-2)^3\cdot(3x^2-2)$.

Và $y'=0\Leftrightarrow x=0;\ x=\pm\sqrt{2};\ x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Do đó hàm số y có 5 cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 3 cực trị.



(A) $m\geq\dfrac{1}{4}$. (B) $m\leq 1$. (C) $m<1$. (D) $m>\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Xét $g\left(x\right)=f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\Rightarrow g'\left(x\right)=2f\left(x\right)f'\left(x\right)+f'\left(x\right)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Ta có $f'(x)=0$ có hai nghiệm là $x=0$; $x=3$ và $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ có một nghiệm là $x=a<0$ nên hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Do đó để đồ thị hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 3 cực trị thì phương trình $f^2(x)+f(x)+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta=1-4m<0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x-2\right)^4}{\left[f\left(x+1\right)\right]^3}$ là

(A) 7. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm $x=-1$; $x=0$; $x=1$.
$\Rightarrow f'(x)$ có dạng $f'\left(x\right)=kx\left(x-1\right)\left(x+1\right)=k\left(x^3-x\right)$ với $k\in\mathbb{R}$ và $k\neq 0$.
$\Rightarrow f\left(x\right)=k\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{C}\right)$, C là hằng số.

Mà đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $(1;3)$ và $(0;-1)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}k\left(-\dfrac{1}{4}+\mathrm{C}\right)=3\\k\mathrm{C}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}k=-16\\\mathrm{C}=\dfrac{1}{16}.\end{array}\right.$

$\Rightarrow f\left(x\right)=-16\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{16}\right)=-4x^4+8x^2-1$
$\Rightarrow f\left(x+1\right)=-4\left(x+1\right)^4+8\left(x+1\right)^2-1$
$\Rightarrow f\left(x+1\right)=-4\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)+8\left(x^2+2x+1\right)-1$
$\Rightarrow f\left(x+1\right)=-4x^4-16x^3-16x^2+3\Rightarrow f'\left(x+1\right)=-16x^3-48x^2-32x.$
Ta có

$$\begin{aligned}g'\left(x\right)&=\frac{4\left(x-2\right)^3\left[f\left(x+1\right)\right]^3-\left(x-2\right)^4\cdot 3\left[f\left(x+1\right)\right]^2\cdot f'\left(x+1\right)}{\left[f\left(x+1\right)\right]^6}\\&=\frac{4\left(x-2\right)^3f\left(x+1\right)-3\left(x-2\right)^4f'\left(x+1\right)}{\left[\left(x+1\right)\right]^4}\\&=\frac{\left(x-2\right)^3\left[4f\left(x+1\right)-3\left(x-2\right)f'\left(x+1\right)\right]}{\left[f\left(x+1\right)\right]^4}.\end{aligned}$$

Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ 4f\left(x+1\right)-3\left(x-2\right)f'\left(x+1\right)=0. \end{array}\right.$

Phương trình

$$\begin{aligned} & 4f\left(x+1\right)-3\left(x-2\right)f'\left(x+1\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 4\left(-4x^4-16x^3-16x^2+3\right)-3\left(x-2\right)\left(-16x^3-48x^2-32x\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & -16x^4-64x^3-64x^2+12-3\left(-16x^4-16x^3+64x^2+64x\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & -16x^4-64x^3-64x^2+12+48x^4+48x^3-192x^2-192x=0 \\ \Leftrightarrow\ & 32x^4-16x^3-256x^2-192x+12=0 \\ \Leftrightarrow\ & 8x^4-4x^3-64x^2-48x+3=0. \end{aligned}$$

Xét hàm số $h\left(x\right)=8x^4-4x^3-64x^2-48x+3$

Ta có $h'\left(x\right)=32x^3-48x^2-128x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$ với $x_1<-1<0<x_2<1<2<x_3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		-1		0		x_2		1		x_3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0				$+$		0	$-$			0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(x_1)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$h(x_2)$	$\searrow$	-105	$\searrow$	$h(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

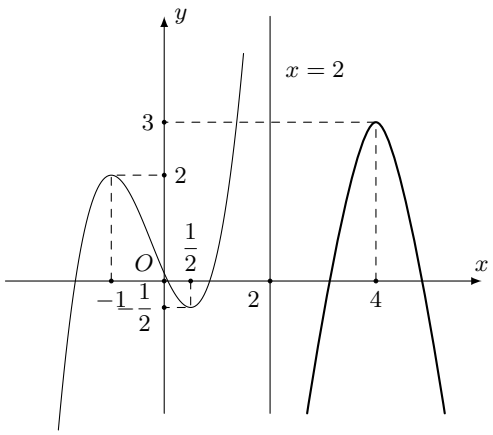
Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $h(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.
Mà $h(2)=-233 \Rightarrow x=2$ không là nghiệm của phương trình $h(x)=0$.
Phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt.
Vậy hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x-2\right)^4}{\left[f\left(x+1\right)\right]^3}$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 53.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|2x-1\right|+2\right)$ là

A) 5. B) 4. C) 2. D) 3.



Lời giải.

Ta có $g\left(x\right)=f\left(\left|2x-1\right|+2\right) \Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{2\left(2x-1\right)}{\left|2x-1\right|}f'\left(\left|2x-1\right|+2\right)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} g'\left(x\right)=0 & \Leftrightarrow f'\left(\left|2x-1\right|+2\right)=0 \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|2x-1\right|+2=-1 \text{ (VN)} \\ \left|2x-1\right|+2=\dfrac{1}{2} \text{ (VN)} \\ \left|2x-1\right|+2=4 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left|2x-1\right|+2=4 \Leftrightarrow \left|2x-1\right|=2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$g'(x)$ không xác định tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $g'(x)$ đổi dấu tại $x=\dfrac{1}{2}$, nhưng tại $x=\dfrac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định.

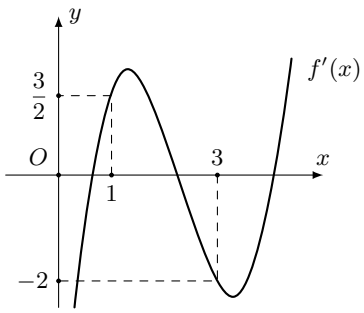
Vậy hàm số có 2 điểm cực trị là $x=-\dfrac{1}{2}$ và $x=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54.

Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(x^4\right)-2x^3+1$ là

A 3. B 6. C 4. D 5.



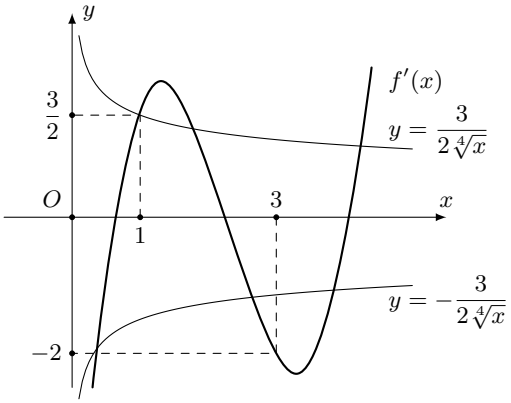
Lời giải.

Ta có $g(x)=f(x^4)-2x^3+1$

$\Rightarrow g'(x)=4x^3f'(x^4)-6x=2x^2\left[2xf'(x^4)-3\right]$.

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{3}{2x}. \end{array}\right.$ $(*)$

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0 \\ f'\left(x^4\right)=-\dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^4}} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^4}} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0 \\ \left[\begin{array}{l} x^4=f \\ x^4=a \\ x^4=c \\ x^4=d \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x^4=1 \\ x^4=b \\ x^4=e \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[4]{f} \\ x=-\sqrt[4]{a} \\ x=-\sqrt[4]{c} \\ x=-\sqrt[4]{d} \\ x=1 \\ x=\sqrt[4]{b} \\ x=\sqrt[4]{e}. \end{array}\right.$$



Bảng biến thiên

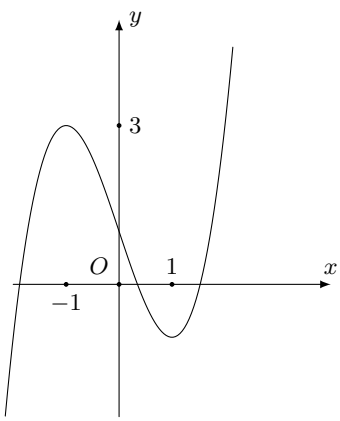
x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{d}$		$-\sqrt[4]{c}$		$-\sqrt[4]{a}$		$\sqrt[4]{f}$		0		1		$\sqrt[4]{b}$		$\sqrt[4]{e}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án C □

Câu 55.

Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=[xf(x-1)]^2$ là



(A) 9. (B) 7. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x3ax^2+2bx+c$.

Ta có đồ thị giao với trục Oy tại điểm $(0;1) \Rightarrow d=1$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $(-1;3)$, $(1;-1)$ nên

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ a+b+c+1=-1 \\ -a+b-c+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=1 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3-3x+1.$$

$\Rightarrow f(x-1)=(x-1)^3-3(x-1)+1=x^3-3x^2+3 \Rightarrow f'(x-1)=3x^2-6x$.

Có $g(x)=[xf(x-1)]^2 \Rightarrow g'(x)=2xf(x-1)[f(x-1)+xf'(x-1)]=2x\left(x^3-3x^2+3\right)\left(4x^3-9x^2+3\right)$.

$$\text{Suy ra } g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3-3x^2+3=0 \\ 4x^3-9x^2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x\approx 2,532 \\ x\approx 1,347 \\ x\approx -0,879 \\ x\approx 2,076 \\ x\approx 0,694 \\ x\approx -0,52. \end{cases}$$

Phương trình $g'(x)$ là phương trình bậc 7 và có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(2x-1)$ như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	7	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$ tương ứng là

(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(2-x)^2} \in [0;2]$.

$$y=f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right) \Rightarrow y'=3\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right).$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)=0. \end{cases}$$

$$f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)=f'\left[2\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}-1\right]=0.$$

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(2-x)^2} \in [0;2]$ nên $\dfrac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2} \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$.

$f'\left[2\dfrac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}-1\right]=0 \Leftrightarrow \dfrac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{4x-x^2}=\dfrac{1}{3}.$

Phương trình này có 2 nghiệm.

Vậy y' có 3 nghiệm, và qua mỗi nghiệm này thì y' đổi dấu, do đó hàm số có 3 cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $f(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;0)$. (B) $(1;2)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Trước hết ta khôi phục bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ từ bảng biến thiên của hàm $f(v(t))=f(3-2t)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x=3-2t$	$+\infty$		5		1		3		$-\infty$
$f(3-2t)=f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có thể vẽ lại bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ cho dễ nhìn như sau

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $f(x^2-2x)=f*u)$, $u=x^2-2x$. Ta có bảng biến thiên ghép $[x;u;f(u)]$ từ lỹ năng ghép trục như sau

x	$-\infty$		$1-\sqrt{6}$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$1+\sqrt{6}$		$+\infty$
u	$+\infty$		5		1		-1		1		5		$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1-\sqrt{6};1-\sqrt{2})$; $(1;1+\sqrt{2})$ và $(1+\sqrt{2};1+\sqrt{6})$.

Mà $(1;2)\in(1;1+\sqrt{2})$ nên hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=a$; $x=8-a$. Bên dưới cho bảng biến thiên của hàm số $f(x^2-2x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x^2-3x^2+1)$ là

x	$-\infty$		x_0		1		$5+2x_0$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

(A) 3. (B) 4. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.

Cho hàm số $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+4x^2-12x+4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+8x-12=0 \Leftrightarrow \hoac{x=2=a\\x=6=8-a.}$

Suy ra hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=a$ và $x=8-a$.

Ta có $f\left(x^2-2x+3\right)=-\dfrac{1}{3}\left(x^2-2x+3\right)^3+4\left(x^2-2x+3\right)^2-12\left(x^2-2x+3\right)+4$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\left[f\left(x^2-2x+3\right)\right]'=0 &\Leftrightarrow (2x-2)\,f'\left(x^2-2x+3\right)=0\\ &\Leftrightarrow \hoac{2x-2=0\\f'\left(x^2-2x+3\right)=0}\\ &\Leftrightarrow \hoac{x=1\\x^2-2x+3=2\\x^2-2x+3=6}\\ &\Leftrightarrow \hoac{x=1\\x=-1=x_0\\x=3=5+2x_0.}\end{aligned}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x^2-2x+3)$ thỏa đề bài.

Mặt khác

$$\begin{aligned}\left[f\left(x^3-3x^2+1\right)\right]'=0 &\Leftrightarrow \left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+1\right)=0\\ &\Leftrightarrow \hoac{3x^2-6x=0\\f'\left(x^3-3x^2+1\right)=0}\\ &\Leftrightarrow \hoac{3x^2-6x=0\\x^3-3x^2+1=2\\x^3-3x^2+1=6}\\ &\Leftrightarrow \hoac{x=0\\x=2\\x\approx 3,103\\x\approx 3,425.}\quad (4 \text{ nghiệm đơn})\end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x^3-3x^2+1)$ có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.

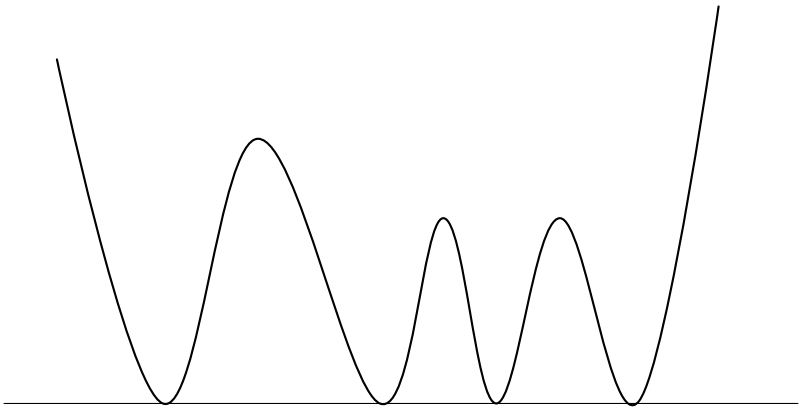
x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
	$-\infty$				-1				$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\cdot[f(x)]^2$ là

(A) 9. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $x^2 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = a (a < -2) \\ x = b, (-2 < b < 0) \\ x = 4 \end{bmatrix}$, trong đó $x = 0$ là nghiệm bội chẵn, $x = a$, $x = b$ là nghiệm bội lẻ và $x = 4$ là nghiệm bội chẵn.
Suy ra $g(x) = x^4 \cdot [f(x)]^2 = 0$ có bốn nghiệm bội chẵn suy ra ĐTHS $g(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại bốn điểm. Mặt khác hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty$ nên ta có thể phác họa đồ thị hàm số $g(x)$ như sau



Vậy hàm số có 7 cực trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	2	↘	$-\infty$

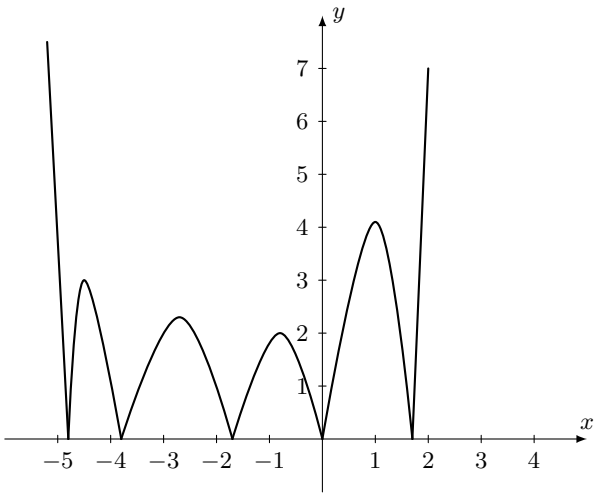
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 \cdot [f(x+2)]^6$ là
(A) 5. (B) 12. (C) 7. (D) 9.

Lời giải.

Ta có

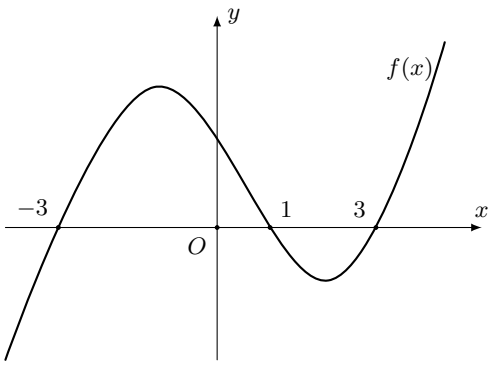
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 = 0 \\ [f(x+2)]^6 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ f(x+2) = 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x + 2 = a < -2 \\ x + 2 = b, \quad b \in (-2; 0) \\ x + 2 = c, \quad c \in (0; 2) \\ x + 2 = d > 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = a - 2 < -4 \\ x = b - 2 \in (-4; -2) \\ x = c - 2 \in (-2; 0) \\ x = d - 2 > 0. \end{bmatrix}$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt, và cả 5 nghiệm đều là nghiệm kép.
Ta suy ra hình dáng đồ thị $y = g(x)$ như sau

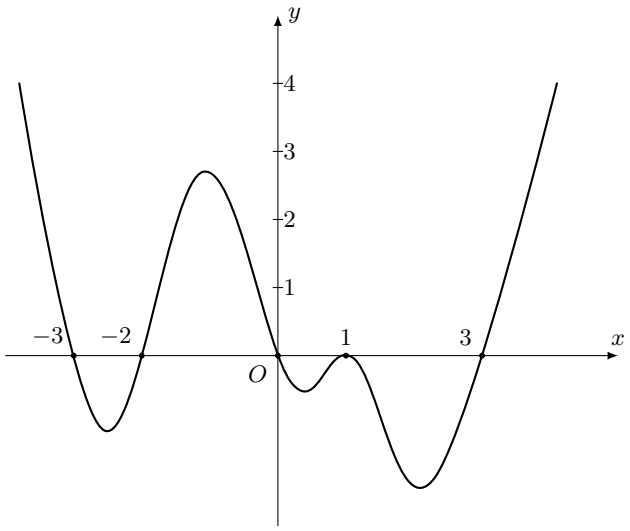


Dựa vào đồ thị ta suy ra hàm số có 9 điểm cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 61.
Cho đồ thị hàm đa thức $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) \cdot f(2x+1)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?
A 5. B 6. C 7. D 9.



Lời giải.
Ta có $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(2x+1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ 2x+1 = -3 \\ 2x+1 = 1 \\ 2x+1 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$
Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 6 điểm, trong đó các nghiệm $\{-3; 3; -2; 0\}$ là nghiệm đơn và $x = 1$ là nghiệm kép.
Ta có hình dáng đồ thị $y = g(x)$ như sau



Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho bảng biến thiên của hàm đa thức $f(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

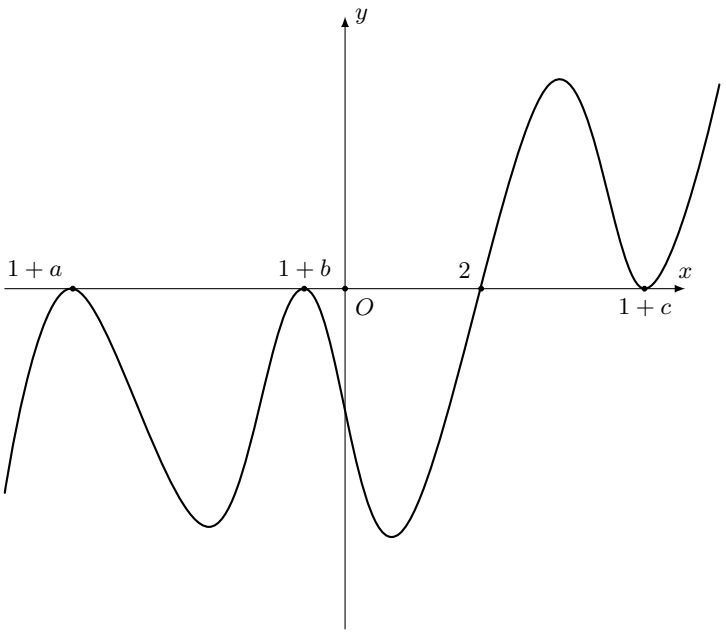
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x-2)^3 [f(x-1)]^2$ là
(A) 8. (B) 5. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.

Nhận xét $\begin{cases} g(x) \geq 0, \forall x \geq 2 \\ g(x) < 0, \forall x < 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty. \end{cases}$

Cho $g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^3 = 0 \\ [f(x-1)]^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x-1) = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x-1 = a, (a < -2) \\ x-1 = b, (-2 < b < -1) \\ x-1 = 1 \\ x-1 = c, (c > 2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1+a < -1 \\ x = 1+b \in (-1;2) \\ x = 1+c > 3. \end{array}\right.$

Do đó $g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó có ba nghiệm bội chẵn và 1 nghiệm bội lẻ. Hay đồ thị $g(x)$ có 3 điểm tiếp xúc với trục hoành và một điểm giao điểm với trục hoành mà tại đó hàm số đổi dấu



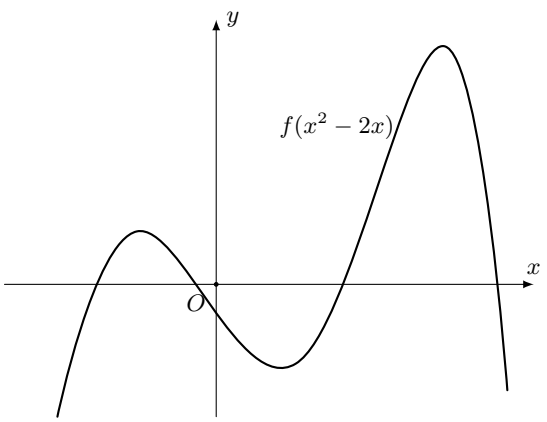
Vậy hàm số $g(x)$ có 6 cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 63.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2mx - |x - m| + m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.

(A) 7. (B) 3. (C) 5. (D) 9.



Lời giải.

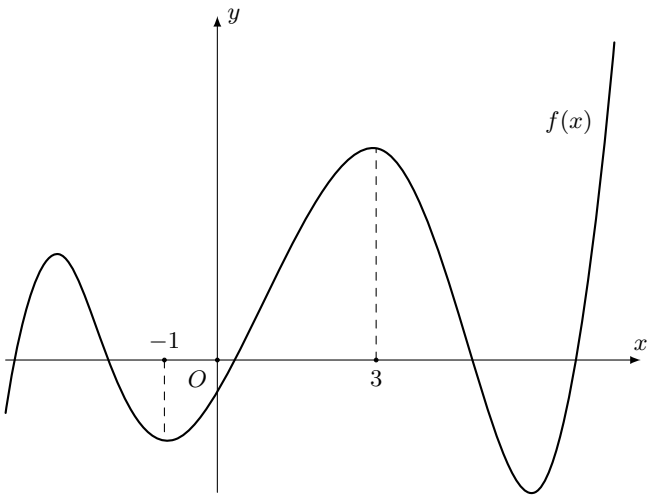
Ta có $y = f\left(|x - m|^2 - |x - m|\right)$.
Đặt $g(x) = f(x^2 - x)$. Suy ra $g(|x|) = f(x^2 - |x|)$. Suy ra $g(|x - m|) = f\left(|x - m|^2 - |x - m|\right)$.
Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(x)$ và $g(|x - m|)$ là như nhau.
Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.
Suy ra hàm $g(|x - m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 64.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ được cho như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(-|x + 2021m| - 2m + 1)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của S là

(A) 5. (B) 2. (C) 1. (D) 3.



Lời giải.

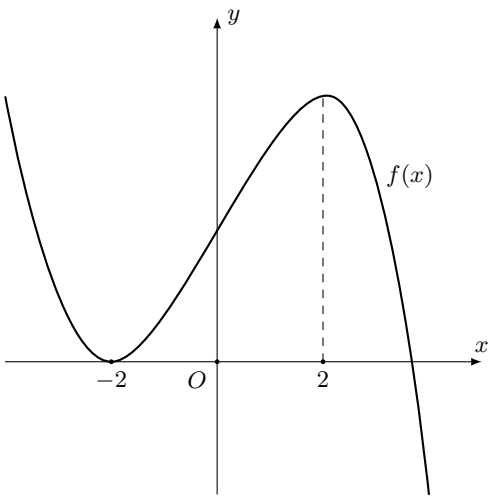
Hàm số $y = f(-|x + 2021m| - 2m + 1)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y = f(-|x| - 2m + 1)$.
Sơ đồ biến đổi đồ thị
$f(x) \to f(-x) \to f(-(x + 2m - 1)) = f(-x - 2m + 1) \to f(-|x| - 2m + 1)$.
Các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là $(x_1 = a < -1)$; $(x_2 = -1)$; $(x_3 = -3)$; $(x_4 = -b < -3)$.
Suy ra các điểm cực trị của hàm số $f(-(x + 2m - 1)) = f(-x - 2m + 1)$ là $x_1 = a - 2m + 1$; $(x_2 = 1 - 2m + 1)$; $(x_3 = -3 - 2m + 1)$; $(x_4 = -b - 2m + 1)$.
Để hàm số $y = (-|x| - 2m + 1)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(-x - 2m + 1)$ có đúng 2 giá trị của m.

Chọn đáp án (B) □

Câu 65.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f\left(x^3 - mx^2 - 5x + 4m\right)$ có 6 điểm cực trị?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 5.



Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2. \end{array}\right.$

$y = f\left(x^3 - mx^2 - 5x + 4m\right) \Leftrightarrow y' = \left(3x^2 - 2mx - 5\right) \cdot f'\left(x^3 - mx^2 - 5x + 4m\right).$

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 2mx - 5 = 0 \\ f'\left(x^3 - mx^2 - 5x + 4m\right) = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 2mx - 5 = 0 \\ x^3 - mx^2 - 5x + 4m = -2 \\ x^3 - mx^2 - 5x + 4m = 2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^2 - 2mx - 5 = 0 & (1) \\ (x-2)\left[x^2 - (m-2)x - 2m - 1\right] = 0 & (2) \\ (x+2)\left[x^2 - (m+2)x + 2m - 1\right] = 0. & (3) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Có $\begin{cases} \Delta_1 = m^2 + 15 > 0 \\ \Delta_2 = m^2 - 4m + 8 > 0 \\ \Delta_3 = m^2 - 4m + 8 > 0. \end{cases}$

Nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt, (2) luôn có 3 nghiệm phân biệt, (3) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $y = f\left(x^3 - mx^2 - 5x + 4m\right)$ có 6 điểm cực trị thì (1) có 2 nghiệm trùng với các nghiệm của (2) hoặc (3).

☑ Trường hợp 1: Phương trình (1) nhận $x = -2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m = \dfrac{7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

☑ Trường hợp 2: Phương trình (1) nhận $x = 2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m = -\dfrac{7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị $m = \pm\dfrac{7}{4}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$ 2 $\searrow$ -2 $\nearrow$	$+\infty$

Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = [f(x) - m]^3 - 3f(x)$ có đúng 9 điểm cực trị?

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y=[f(x)-m]^3-3[f(x)-m]-3m \Rightarrow y'=\left\{3[f(x)-m]^2-3\right\}\cdot f'(x)$.

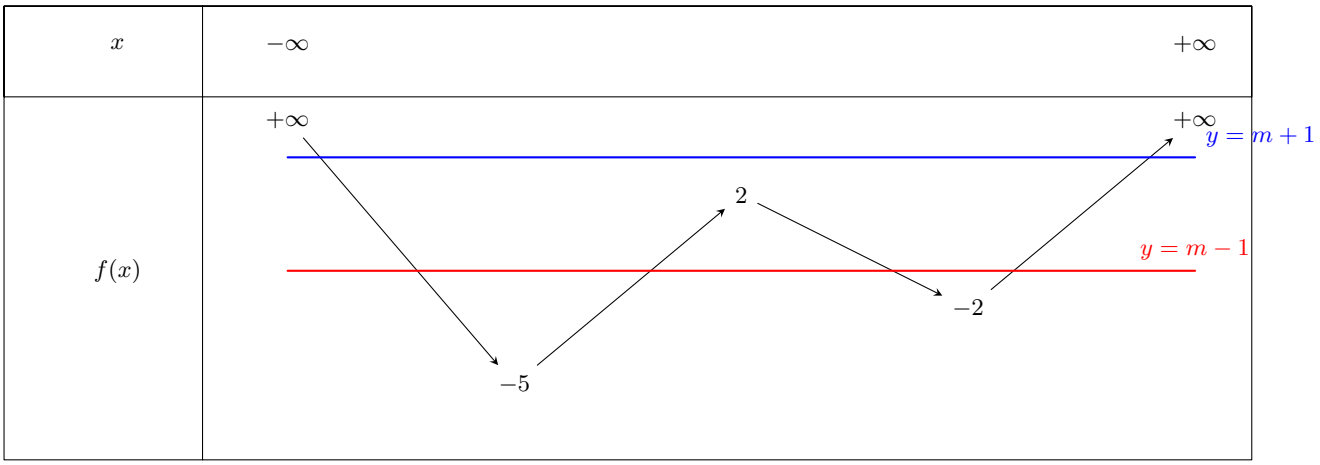
$$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3[f(x)-m]^2-3=0 \\ f'(x)=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} [f(x)-m]^2=1 \\ f'(x)=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x)=m+1 & (1) \\ f(x)=m-1 & (2) \\ f'(x)=0. & (3) \end{bmatrix}$$

Nhận xét: số điểm cực trị của hàm số $y=[f(x)-m]^3-3f(x)$ là tổng số nghiệm bội lẻ của ba phương trình (1); (2); (3).

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để hàm số $y=[f(x)-m]^3-3f(x)$ có 9 điểm cực trị thì phương trình (1) và (2) có 6 nghiệm phân biệt bội lẻ. Căn cứ vào bảng biến thiên, có 2 trường hợp sau

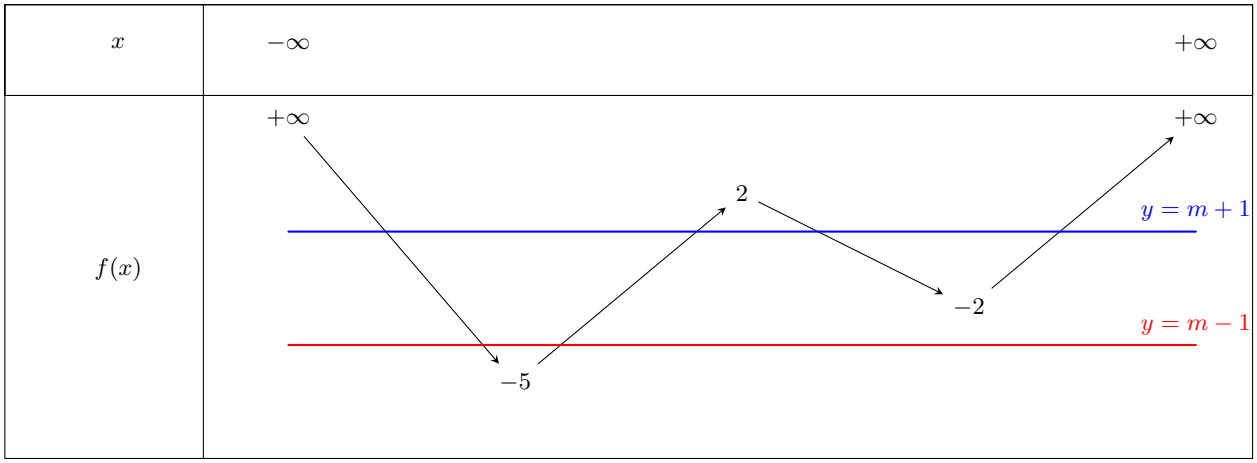
☑ **Trường hợp** 1: Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.



$$\Rightarrow \begin{cases} m+1>2 \\ -2<m-1<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ -1<m<3 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<3 \xRightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=2.$$

Khi $m+1=2 \Leftrightarrow m=1$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=1$ (thỏa mãn).

☑ **Trường hợp** 2: Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.



$$\Rightarrow \begin{cases} -2<m+1<2 \\ -5<m-1<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ -4<m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<-1 \xRightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=-2.$$

Khi $m-1=-\Leftrightarrow m=-1$ thì phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=-1$ (thỏa mãn).

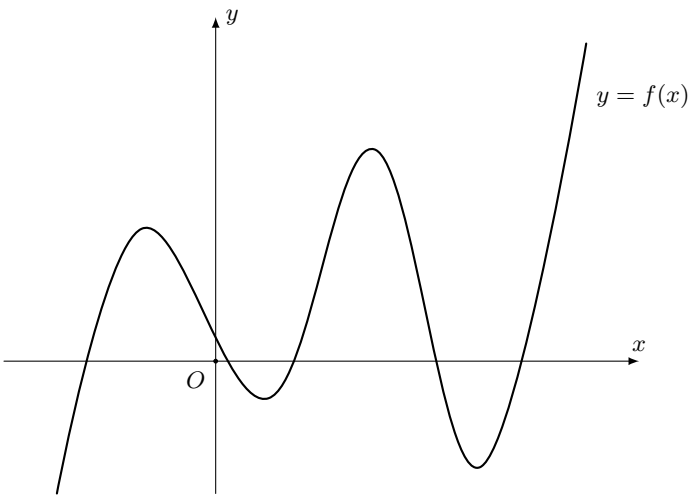
Vậy $m\in\{-2;-1;1;2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 67.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp chứa các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(f(x))^3-m(f(x))^2-(2m-3)f(x)+2021$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

(A) 11. (B) 8. (C) 10. (D) 9.



Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 3f'(x)[f(x)]^2-2m\cdot f'(x)\cdot f(x)-(2m-3)\cdot f'(x)\\ &= f'(x)\left[3(f(x))^2-2mf(x)-(2m-3)\right]. \end{aligned}$$

Cho $y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} f'(x)=0\\ 3(f(x))^2-2mf(x)-(2m-3)=0 \end{bmatrix}.$

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(x)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt.

Để hàm số có 4 cực trị $\Rightarrow 3(f(x))^2-2mf(x)-(2m-3)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Đặt $t=f(x)\Rightarrow 3t^2-2mt-(2m-3)=0$.

Phương trình vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2+3(2m-3)\le 0\Leftrightarrow m^2+6m-9\le 0\Leftrightarrow -3-3\sqrt{2}\le m\le -3+3\sqrt{2}.$$

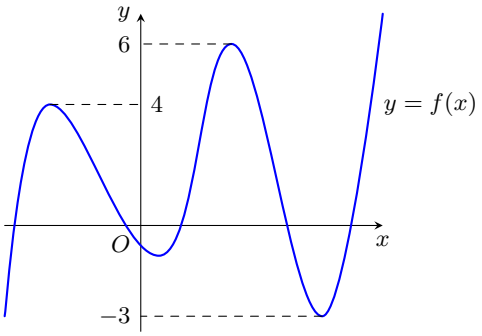
Vậy có 9 giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 68.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $y=f^2(x)-2(m+2)f(x)-3m+12$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

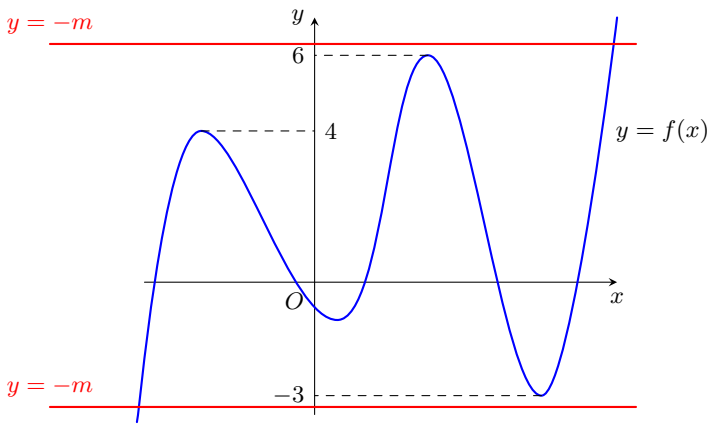
(A) 35. (B) 32. (C) 33. (D) 34.



Lời giải.

Ta có $y'=2f(x)f'(x)-2(m+2)f'(x)=2f'(x)[f(x)-m-2]$.

$y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} f'(x)=0\ \ (*)\\ f(x)=m+2 \end{bmatrix}.$



Dựa vào đồ thị thì $(*)$ có 4 nghiệm,d o đó để hàm số có 5 điểm cực trị thì

$$\begin{bmatrix} m+2 \le -3 \\ m+2 \ge 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \le -5 \\ m \ge 4. \end{bmatrix}$$

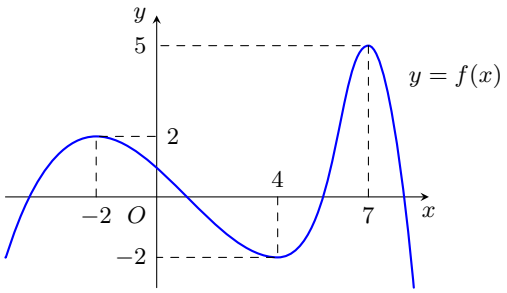
Vậy có 33 giá trị m.

Chọn đáp án C □

Câu 69.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = (f(x) + m)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

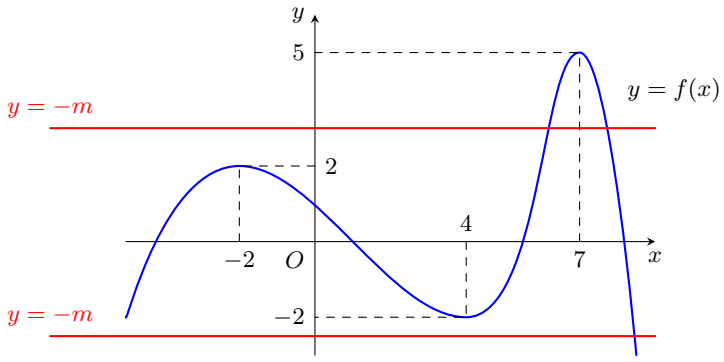
A 20. B 22. C 21. D 19.



Lời giải.

Ta có: $y' = 2\,[f(x) + m] \cdot f'(x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) = -m \\ f'(x) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) = -m \\ x = -2 \\ x = 4 \\ x = 7. \end{bmatrix}$$



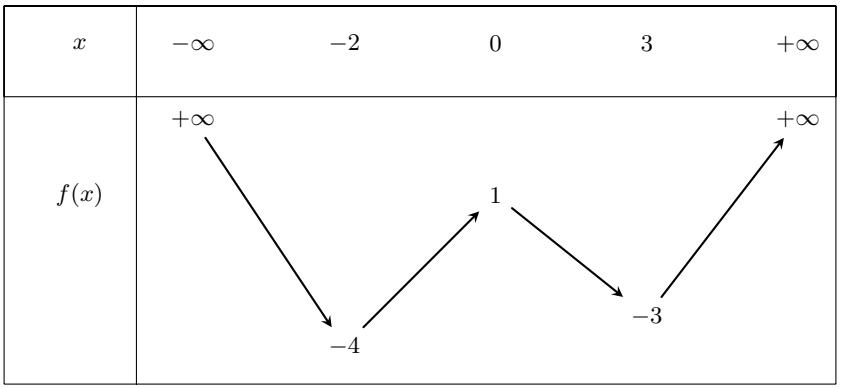
Hàm số có 5 điểm cực trị khi

$$\begin{bmatrix} -m \le -2 \\ 2 \le -m < 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \ge 2 \\ -5 < m \le -2. \end{bmatrix}$$

Vậy có 22 giá trị m.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của hàm số như hình vẽ. Hàm số $y=[f(x)]^3+6[f(x)]^2+2021$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

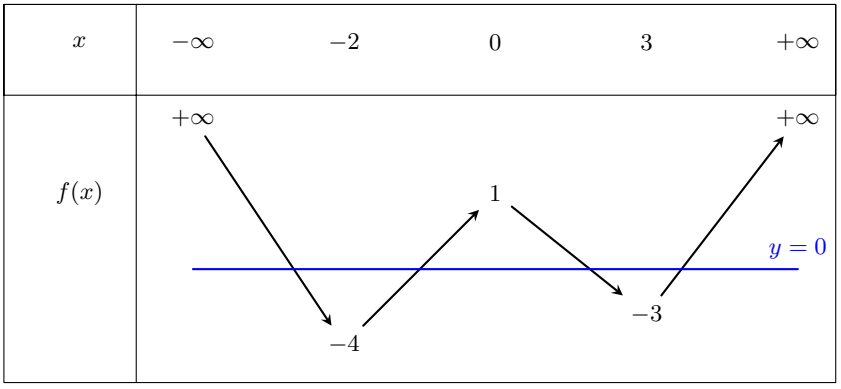


(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Ta có: $y'=3f^2(x)\cdot f'(x)+12f(x)\cdot f'(x)=3f(x)\cdot f'(x)[f(x)+4]$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\\f(x)=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\,(a<-2)\\x=b\,(-2<b<0)\\x=c\,(0<c<3)\\x=d\,(d>3)\\x=-2\\x=0\\x=3\\x=-2.\end{array}\right.$$



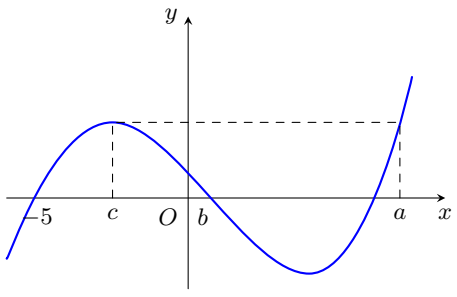
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		a		-2		b		0		c		3		d		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu y' thì hàm số có 4 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án (D) □

Câu 71.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(10)=30f(-6)=30f(5)=30$. Hỏi hàm số $y=f(f(x)-3x+9)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 7. (B) 3. (C) 5. (D) 9.



Lời giải.

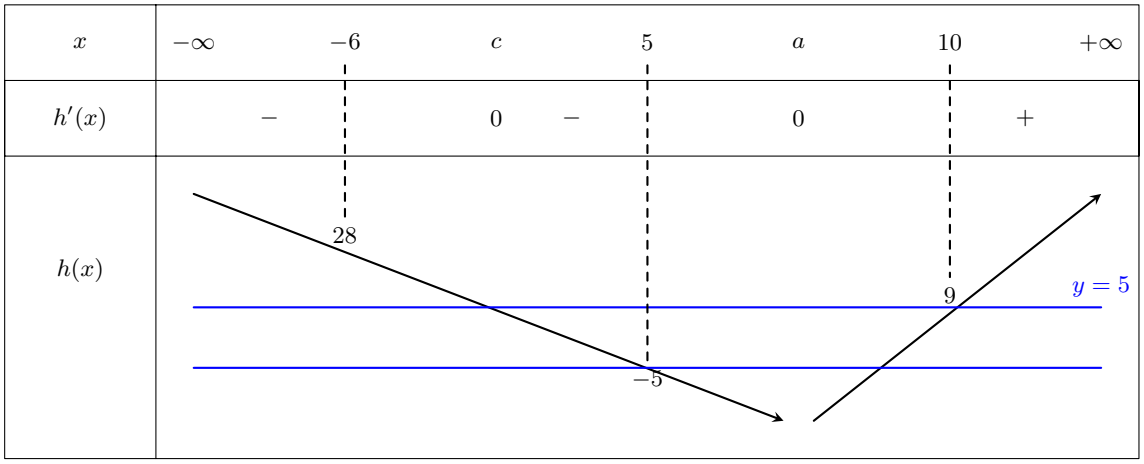
Xét hàm số $y = g(x) = f\left(f(x) - 3x + 9\right) \Rightarrow g'(x) = \left[f'(x) - 3\right] f'\left(f(x) - 3x + 9\right)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 3 \text{ (có một nghiệm bội lẻ)} \\ f'\left(f(x) - 3x + 9\right) = 0. \end{array}\right.$

Để xét phương trình $f'\left(f(x) - 3x + 9\right) = 0$ thì ta cần khảo sát hàm số $h(x) = f(x) - 3x + 9$.

Ta có: $h'(x) = f'(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = c \\ x = a. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

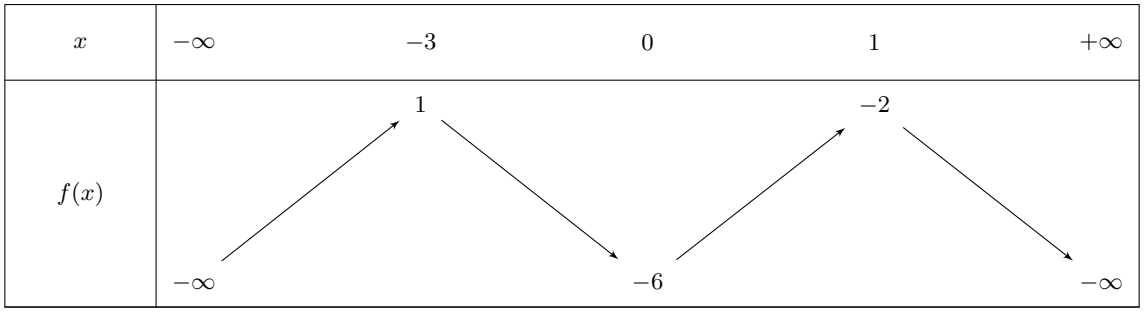


Xét $f'\left(f(x) - 3x + 9\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x) = f(x) - 3x + 9 = -5 \Rightarrow 2 \text{ nghiệm bội lẻ} \\ h(x) = f(x) - 3x + 9 = b \in (0;5) \Rightarrow \text{ nghiệm bội lẻ} \\ hx = f(x) - 3x + 9 = 5 \Rightarrow 2 \text{ nghiệm bội lẻ.} \end{array}\right.$

Như vậy phương trình đạo hàm $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ ứng với 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi hàm số $y = f\left(x^3 - 3x^2 + 1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



(A) 7. (B) 3. (C) 5. (D) 9.

Lời giải.

Đặt $u = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow u' = 3x^2 - 6x$.

Sử dụng phương pháp ghép trục như sau:

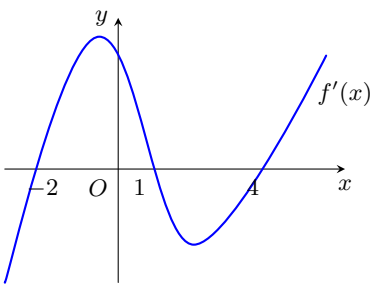
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
u	$-\infty$	-3	0	1	0	-3	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$								$-\infty$

Như vậy hàm số có tất cả 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án A □

Câu 73.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

A 8. B 6. C 4. D 10.



Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)\Rightarrow g'(x)=3\left(x^2-1\right)\cdot 2^{x^3-3x+2}\cdot f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)\cdot \ln 2$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1\Rightarrow \text{ có 2 nghiệm bội lẻ} \\ f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0 \end{array}\right.$.

Để thoả mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0$ phải có 7 nghiệm bội lẻ.

Ta có: $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^3-3x+2}+m=-2 \\ 2^{x^3-3x+2}+m=1 \\ 2^{x^3-3x+2}+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^3-3x+2}+2=-m \\ 2^{x^3-3x+2}-1=-m \\ 2^{x^3-3x+2}-4=-m. \end{array}\right.$

Xét sự biến thiên của ba hàm số $2^{x^3-3x+2}+2$, $2^{x^3-3x+2}-1$, $2^{x^3-3x+2}-4$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y	$-\infty$		18		3		$+\infty$
			15		0		
			12		-3		

Để phương trình $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0$ phải có 7 nghiệm bội lẻ thì

$$\begin{bmatrix}12\le -m<15\\0<-m\le 3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-15<m\le -12\\-3\le m<0\end{bmatrix}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=\{-14;-13;-12;-3;-2;-1\}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}\right)\left(x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

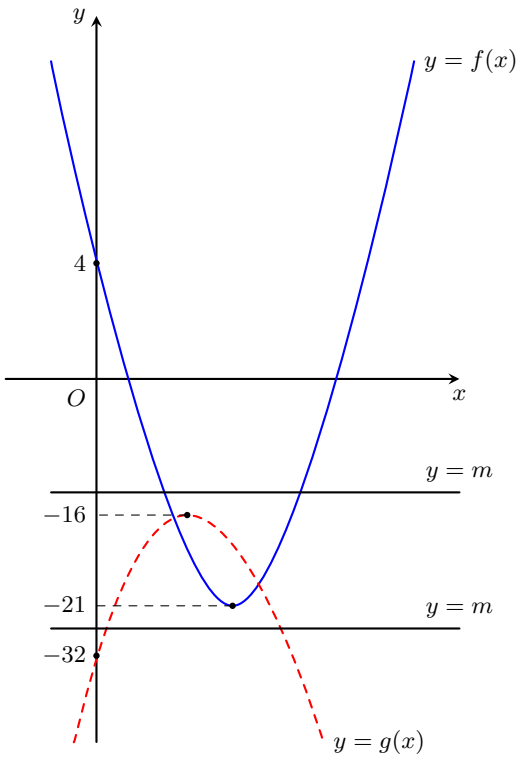
A 31. B 35. C 33. D 37.

Lời giải.

Hàm số liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$ và có đạo hàm không triệt tiêu trên một lân cận chứa điểm $x=0$ nên hàm số $f\left(|x|\right)$ đạt cực trị tại điểm $x=0$.
Để hàm số $f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị dương.
Ta có: $f'(x)=\left(x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}\right)\left(x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8\right)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}=0\\x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4\left(x^2-5x+1\right)=m=f(x)\\-4\left(x^2-4x+8\right)=m=g(x).\end{bmatrix}$$

Vẽ hai đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ trên cùng một hệ trục toạ độ như sau:



Để có đúng hai điểm cực trị dương thì

$$\begin{bmatrix}-16\le m<4\\-32<m\le -21\\m=-17\\m=-20\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-16\le m\le 3\\-31\le m\le -21\\m=-17\\m=-20.\end{bmatrix}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên có tất cả 33 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá tị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f^3(x)-3mf(x)+11-2m$ có đúng 9 điểm cực trị?

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

(A) 3. (B) 5. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

$$g'(x)=3\left(f^2(x)-m\right)\cdot f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f^2x-m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\text{ (nghiệm đơn)}\\x=0\text{ (nghiệm đơn)}\\x=1\text{ (nghiệm đơn)}\\f^2(x)=m.\end{array}\right.$$

Để hàm số $g(x)$ có đúng 9 điểm cực trị thì phương trình $f^2(x)=m$ phải có 6 nghiệm bội lẻ.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{m}\\-f(x)=\sqrt{m}.\end{array}\right.$

Xét sự tương giao của hai hàm số $f(x)$ và $-f(x)$ trên cùng một bảng biến thiên như hình vẽ sau đây:

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-5	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$
	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

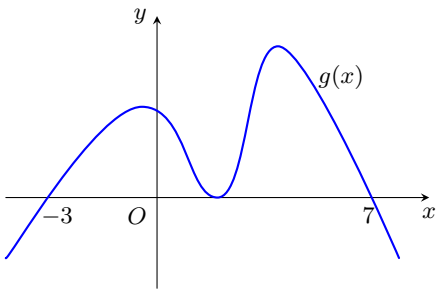
$y=\sqrt{m}$, $y=0$

Suy ra $1\le\sqrt{m}<3\Leftrightarrow 1\le m<9\Rightarrow$ có 8 giá trị nguyên m thoả mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 76.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $f(x)=\displaystyle\int_{2018}^{x^2-2x}g(t)\,\mathrm{d}t$.



Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ tương ứng là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int_{2018}^{x^2-2x}g(t)\,\mathrm{d}t=G(t)\Big|_{2018}^{x^2-2x}=G\left(x^2-2x\right)-G\left(2018\right).$

$f'(x)=G'\left(x^2-2x\right)(2x-2)=g\left(x^2-2x\right)\cdot 2\left(x-1\right).$

$g\left(x^2-2x\right)\cdot 2\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nghiệm bội lẻ)} \\ g\left(x^2-2x\right)=0. \end{array}\right.$

$g\left(x^2-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-3 \text{ (vô nghiệm)} \\ \left(x^2-2x\right)^2=a>0 \text{ (có 2 nghiệm kép)} \\ x^2-2x=7 \Leftrightarrow x=1\pm 2\sqrt{2} \text{ (có 2 nghiệm bội lẻ).} \end{array}\right.$

Suy ra phương trình đạo hàm có 3 nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-60;60]$ để phương trình $f\left(x^2-2mx+1\right)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A) 2. B) 3. C) 4. D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx+1\right)\Rightarrow g'(x)=2\left(x-m\right)f'\left(x^2-2mx+1\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ f'\left(x^2-2mx+1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=1 \\ x^2-2mx+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=m & (1) \\ x^2-2mx=0 & (2) \\ x^2-2mx+2=0. & (3) \end{array}\right. (*)$

Bài toán yêu cầu phương trình $(*)$ phải có đúng 3 nghiệm bội lẻ. Đã có một nghiệm bội lẻ ở phương trình (1), vậy nên trong hai phương trình bậc hai còn lại phải có một phương trình có hai nghiệm phân biệt và phương trình còn lại không có nghiệm phân biệt.

Ta có $\Delta_2=4m^2$ và $\Delta_3=4m^2-8\Rightarrow \begin{cases} \Delta_2=4m^2>0 \\ \Delta_3=4m^2-8\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -\sqrt{2}\le m\le \sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{\pm 1\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên của m thoả mãn.

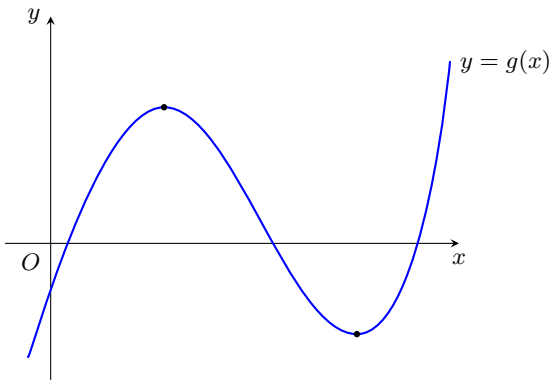
Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3mx^2+3\left(2m-1\right)x-m\right|$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 5 điểm cực trị nằm về phía bên phải của trục tung Oy?

A) 2019. B) 2020. C) 2021. D) 2022.

Lời giải.

Đặt $g(x)=x^3-3mx^2+3\left(2m-1\right)x-m$.
Hình vẽ minh hoạ:



$g'(x)=3x^2-6mx+3\left(2m-1\right)=3\left(x^2-3mx+2m-1\right)=0\Rightarrow] \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2m-1. \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm phía

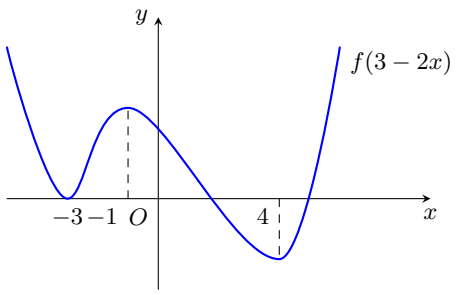
bên phải Oy và nằm về hai phía của trục hoành, đồng thời $g(0)<0$. Suy ra

$$\begin{cases}2m-1\neq 1\\ 2m-1>0\\ g(1)\cdot g\left(2m-1\right)<0\\ g(0)=-m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m>\dfrac{1}{2}\\ (2m-2)\left(-4m+12m^2-10m+2\right)<0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m>\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\\ m>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

Kết hợp điều kiện $\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m\in[-2022;2022]}2\leq m\leq 2022$.
Vậy có tất cả 2021 giá trị thoả mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 79.
Cho hàm số $y=f\left(3-2x\right)$ như hình vẽ. Biết rằng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x^2-2m\left|x\right|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị là $(a;b]$. Giá trị của biểu thức $P=2\left(a^2+b^2\right)$ là

A 5. B 10. C 15. D 20.



Lời giải.
Hàm số $f\left(3-2x\right)$ đạt cực trị tại $\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=-1\\ x=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3-2x=9\\ 3-2x=5\\ 3-2x=-5.\end{array}\right.$
Vậy ta coi như hàm số $f(x)$ sẽ đạt cực trị tại các điểm $x=-5;\ x=5;\ x=9$.
Ta đặt $g(x)=f\left(x^2-2mx\right)\Rightarrow g\left(|x|\right)=f\left(x^2-2m\left|x\right|\right)$.
Nhận thấy hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx\right)$ xác định tại điểm $x=0$ và không phải là hằng số trong một khoảng chứa điểm $x=0$, nên hàm số $g\left(|x|\right)=f\left(x^2-2m\left|x\right|\right)$ sẽ đạt cực trị tại $x=0$.
Để hàm số $g\left(|x|\right)=f\left(x^2-2m\left|x\right|\right)$ có 7 điểm cực trị thì hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx\right)$ có 3 điểm cực trị dương.
Ta có

$$g'(x)=(2x-2m)\,f'\left(x^2-2mx\right)=0\left[\begin{array}{l}x=m\\ x^2-2mx=9\\ x^2-2mx=5\\ x^2-2mx=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=m & (1)\\ x^2-2mx-9=0 & (2)\\ x^2-2mx-5=0 & (3)\\ x^2-2mx+5=0. & (4)\end{array}\right.$$

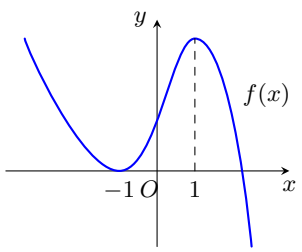
Dễ thấy phương trình (2) và (3) mỗi phương trình cho ta một nghiệm đơn và dương.
Phương trình (4) nếu có nghiệm đơn và dương thì sẽ có hai nghiệm phân biệt. Vì vậy phương trình (4) không thể có hai nghiệm phân biệt dương, tức là phải có hai nghiệm phân biệt âm hoặc không có hai nghiệm phân biệt và phương trình (1) có nghiệm dương.
Suy ra

$$\begin{cases}m>0\\ \left[\begin{array}{l}\Delta_4'=m^2-5\leq 0\\ \begin{cases}\Delta_4'=m^2-5>0\\ 2m\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq\sqrt{5}\Rightarrow m\in\left(0;\sqrt{5}\right]\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=\sqrt{5}.\end{cases}$$

Vậy $P=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(0^2+5\right)=10$.
Chọn đáp án B □

Câu 80.

Cho hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x^3-mx^2-2x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?



(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3-mx^2-2x+m\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-2mx-2\right)f'\left(x^3-mx^2-2x+m\right)$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi phương trình đạo hàm phải có 6 nghiệm bội lẻ.

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-2=0\\ f'\left(x^3-mx^2-2x+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2mx-2=0\\ \left[\begin{array}{l}x^3-mx^2-2x+m=-1\\ x^3-mx^2-2x+m=1.\end{array}\right.\end{array}\right.$

Phương trình $3x^2-2mx-2=0$ luôn cho hai nghiệm phân biệt. Suy ra hai phương trình còn lại phải cho đúng 4 nghiệm bội lẻ.

Ta có $\left[\begin{array}{l}x^3-mx^2-2x+m=-1\\ x^3-mx^2-2x+m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0 & (1)\\ (x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0. & (2)\end{array}\right.$

Nhận thấy hai phương trình (1), (2) luôn cho hai nghiệm phân biệt, và các nghiệm của hai phương trình này là không trùng nhau.

Để hai phương trình có đúng 4 nghiệm bội lẻ thì

Trường hợp 1: $x=1$ là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0$ và $x=-1$ không phải là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0$.

Trường hợp 2: $x=-1$ là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0$ và $x=1$ không phải là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-(m-1)-m-1=0\\ 1+(m+1)+m-1\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}1-(m-1)-m-1\neq 0\\ 1+(m+1)+m-1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\ m\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}m\neq\dfrac{1}{2}\\ m=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}.$

Vậy có hai giá trị thực của m thoả mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↗	4	↘	-1	↘	$-\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^3-3\left|x^2-1\right|+m\right)$ có 10 điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=a(x+2)(x-1)\Rightarrow f(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+b.$

Đồ thị hàm số đi qua $A(-2;4)$, $B(1;-1)$ nên $\begin{cases}4=\dfrac{10}{3}a+b\\ -1=-\dfrac{7}{6}a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{10}{9}\\ b=\dfrac{8}{27}.\end{cases}$

Hàm số ban đầu là $f(x)=\dfrac{10}{9}\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+\dfrac{8}{27}$.

Đặt $\begin{cases} u=x^3-3\left|x^2-1\right|+m \\ f(x)\to f'x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1. \end{array}\right. \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
u	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+m$	$\searrow$	$-3+m$	$\nearrow$	$1+m$	$\searrow$	$-1+m$	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2>-3+m \\ 1<-1+m \end{cases} \\ \begin{cases} -3+m<-2<-1+m \\ -1+m<1<1+m \end{cases} \\ \begin{cases} -2>-1+m \\ 1<1+m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<1 \\ m>2 \end{cases} \text{ (loại)} \\ \begin{cases} -1<m<1 \\ 0<m<2 \end{cases} \\ \begin{cases} m<-1 \\ m>0 \end{cases} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

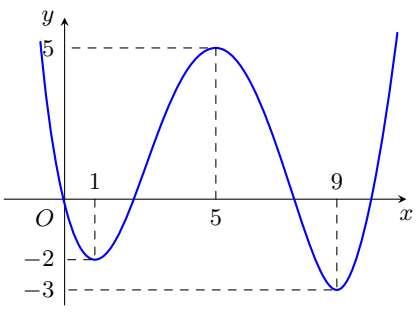
Vậy $m\in(0;1)\Rightarrow$ không có giá trị nào của m thoả mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 82.

Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$ có 51 điểm cực trị?

A 2. B 3. C 0. D 1.



Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=f^2(x)-2f(x)-m \\ hx=f\left(|x|\right) \end{cases}\Rightarrow u'(x)=2f'(x)\cdot f(x)-2f'(x).$

Giải phương trình đạo hàm: $u'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1;5;9\} \\ f(x)=1\Leftrightarrow x\in\{a;b;c;d\}. \end{array}\right.$

Lại có $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\{\pm9;\pm5;\pm1;0\}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a		1		b		5		c		9		d		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$		$-1-m$		$8-m$		$-1-m$		$15-m$		$-1-m$		$15-m$		$-1-m$		$+\infty$

Để hàm số $g(x)$ có 51 điểm cực trị thì $\begin{cases} -9 \le -1-m \\ -5 > -1-m \\ 1 < 8-m \\ 5 > 8-m \\ 9 < 15-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 8 \\ m > 4 \\ m < 7 \\ m > 3 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 6.$

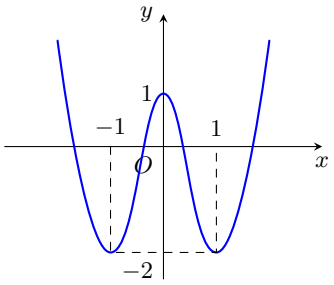
Vậy có một giá trị $m = 5$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 83.

Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3$ là

(A) 5. (B) 7. (C) 9. (D) l.

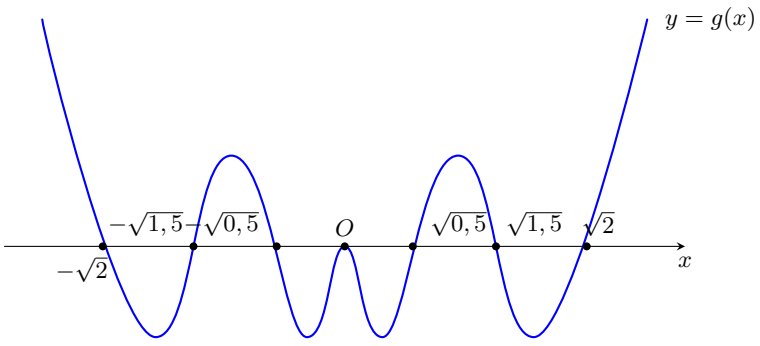


Lời giải.

Ta có

$$g(x) = x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ f\left(x^2-1\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2-1 = -1 \\ x^2-1 \approx -0,5 \\ x^2-1 \approx 0,5 \\ x^2-1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{0; \pm\sqrt{0,5}; \pm\sqrt{1,5}; \pm\sqrt{2}\right\}.$$

Phác họa nhanh đồ thị:



Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$u(x)$	$-\infty$	↗		↘	0	↗		↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$, tập xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y = \begin{cases} 2x^2-8x+4 & \text{nếu } x \le 1 \text{ hoặc } x \ge 7 \\ 8x-10 & \text{nếu } 1 < x < 7 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 4x-8 & \text{nếu } x \le 1 \text{ hoặc } x \ge 7 \\ 8 & \text{nếu } 1 < x < 7. \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	

Suy ra hàm số có một điểm cực trị $x = 1$.

Đặt $u = \left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$. Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$				1						$+\infty$
u	$+\infty$	3	2	1	-1	-2	-1	1	2	3	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	↗ 2	↘ -3	↗	↘ 0	↗	↘ 0	↗	↘ -3	↗ 2	↘ $-\infty$

$y = 0$

Suy ra hàm số $y = |f(u)|$ có 7 điểm cực đại.

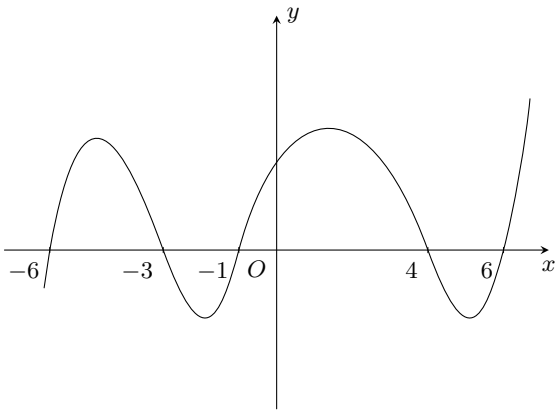
Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

33. B	34. C	35. A	36. B	37. D	38. C	39. D	40. C	41. C	42. D
43. B	44. A	45. A	46. A	47. A	48. A	49. C	50. C	51. D	52. C
53. C	54. C	55. B	56. A	57. B	58. B	59. D	60. D	61. A	62. D
63. C	64. B	65. B	66. A	67. D	68. C	69. B	70. D	71. A	72. A
73. B	74. C	75. C	76. C	77. A	78. C	79. B	80. D	81. C	82. D
83. B	84. B								

ĐỀ VDC SỐ 7: BÀI TOÁN TRUY TÌM HÀM NGƯỢC

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(3-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ là

(A) 3. (B) 7. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ ta có

$$y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x+3\right)=0.\end{array}\right.$$

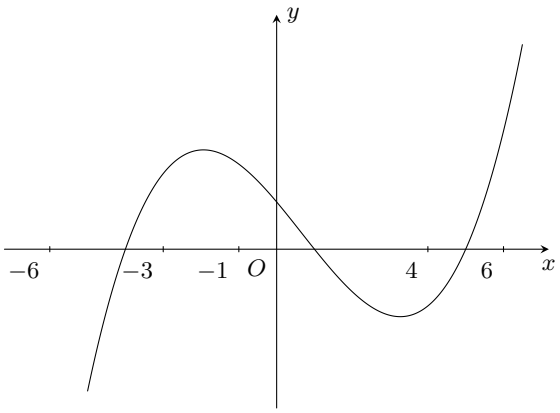
Giải $f'\left(x^2-2x+3\right)=0$, đặt $x^2-2x+3=3-t$ từ đồ thị hàm số $y=f'(3-t)$ ta có

$$f'\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+3=9\\x^2-2x+3=6\\x^2-2x+3=4\\x^2-2x+3=-1\\x^2-2x+3=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-6=0\\x^2-2x-3=0\\x^2-2x-1=0\\x^2-2x+4=0\\x^2-2x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\\x=1\pm\sqrt{2}\\x=1\pm\sqrt{7}.\end{array}\right.$$

Phương trình $f'\left(x^2-2x+3\right)=0$ có 7 nghiệm bội đơn phân biệt suy ra hàm số hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ có đúng 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(1+2x)$ như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị

(A) Không có giá trị nào. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ ta có

$$h'(x)=(-2x+2)\,.f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)$$

.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0,(*).\end{array}\right.$$

Giải $(*)$, đặt $-x^2+2x-2020+m=1+2x$, ta có

$$f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^2+2x-2020+m=-7\\-x^2+2x-2020+m=3\\-x^2+2x-2020+m=11\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=x^2-2x+2013\\m=x^2-2x+2023\\m=x^2-2x+2031.\end{array}\right.$$

Hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ có 3 điểm cực trị dương, từ đồ thị hàm số ta suy ra $2012<m<2013$, do $m\in[-2021;2021]$ suy ra $m\in\varnothing$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $h(x)=f\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có

$$g'(x)=-f'(3-x).$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3.\end{array}\right.$$

Suy ra $x=1;x=3$ là các nghiệm của phương trình $f'(3-x)=0$. Do đó $f'(0)=0;f'(2)=0$.
Ta có

$$h'(x)=2xf'\left(x^2+1\right).$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+1=0\\x^2+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1.\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f(-x^3-x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi hàm số $h(x)=f(2x^2-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=-(3x^2+1)f'(-x^3-x)$ nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Suy ra $x=0;x=1$ là các nghiệm của phương trình $f'(-x^3-x)=0$.

Do đó $f'(0)=0;f'(-2)=0$.

Ta có $h'(x)=(4x-1)f'(2x^2-x)$ nên

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\f'\left(2x^2-x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\2x^2-x=0\\2x^2-x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\x=0\\x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

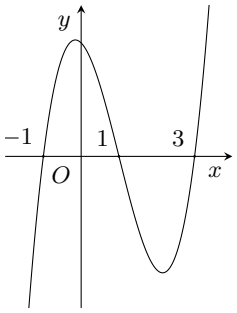
Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5.

Cho hàm đa thức bậc ba $y=f'(x^3+6)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2+4x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 7.



Lời giải.

Ta có $f'(x^3+6)=a(x-1)(x+1)(x-3)$ (với $a>0$).

Với $x=-1$ thì $f'(5)=0$.

Với $x=1$ thì $f'(7)=0$;.

Với $x=3$ thì $f'(33)=0$.

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=7\\x=33.\end{array}\right.$

Ta có $g'(x)=(2x+4)f'(x^2+4x)$ nên

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+4=0\\f'(x^2+4x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x^2+4=5\\x^2+4=7\\x^2+4=33\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\\x=\pm\sqrt{29}.\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $y=f(2x^2-4x+3)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-5		1		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $y' = (4x - 4)f'(2x^2 - 4x + 3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x - 4 = 0 \\ f'(2x^2 - 4x + 3) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ f'(2x^2 - 4x + 3) = 0. \quad (*) \end{bmatrix}$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y' = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ $x = -5, x = 1, x = 6$.

Như vậy phương trình $(*)$ có nghiệm bội lẻ $x = -5$ hoặc $x = 6$.

Thay $x = -5$ vào $(*)$ ta được $f'(73) = 0$.

Thay $x = 6$ vào (1) ta được $f'(51) = 0$ nên $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 73 \\ x = 51. \end{bmatrix}$

Ta có

$$g'(x) = (3x^2 + 6x)f'(x^3 + 3x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x^2 + 6x = 0 \\ x^3 + 3x^2 = 73 \\ x^3 + 3x^2 = 51 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = -2 \\ x \approx 3{,}382 \\ x \approx -5{,}022 \end{bmatrix}$$

Vậy hàm số $g(x)$ có ít nhất 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm đa thức $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu của $f'(x+1)$ ta có $f'(x+1) = (x+1)x(x-1)h(x)$ với $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x+1) = (x+1-2)(x+1)(x+1-1)h(x).$$

Đặt $t = x + 1$ khi đó $f'(t) = t(t-1)(t-2) \cdot U(t)$.

Với $t = x + 1 \Rightarrow h(x) = U(t) > 0$, $\forall t$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2. \end{bmatrix}$

Mặt khác ta có $g(x)=f(x^2+x+1)\Rightarrow g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x+1)$ nên

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x+1=0\\x^2+x+1=0\\x^2+x+1=1\\x^2+x+1=2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}x=0\\x=-1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\\x=\dfrac{-1}{2}.\end{bmatrix}$$

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	
$g(\lvert x\rvert)$		↘		↗		↗		↗		↘		↗	

Vì $y=g(|x|)=f(x^2+|x|+1)$ và $g(x)=f(x^2+x+1)$ đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số $y=f(x^2+|x|+1)$ có một điểm cực đại.
Vậy hàm số
Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f(3-4x)$ có bảng biến thiên như sau

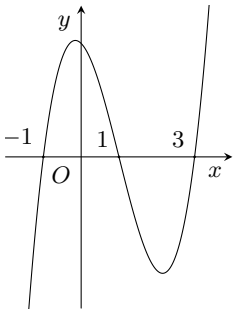
x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-2x-10)$ là
(A) 6. (B) 5. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.
Ta có $y=f(x^2-2x-10)$ nên $y'=(2x-2)f'(x^2-2x-10)$.
Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\f'(x^2-2x-10)=0.\end{bmatrix}$
Xét $f'(x^2-2x-10)=0$. Đặt $x^2-2x-10=3-4t$.
Ta có $f'(3-4t)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=3\\t=2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3-4t=-9\\3-4t=-5.\end{bmatrix}$
Nên $f'(x^2-2x-10)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2-2x-10=-9\\x^2-2x-10=-5\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\\x=1+\sqrt{6}\\x=1-\sqrt{6}.\end{bmatrix}$
Vậy hàm số $y=f(x^2-2x-10)$ có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Câu 9.

Biết đồ thị của hàm $y = f'(1-4x)$ như hình vẽ. Số các giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2+4x-3m-2)$ nhiều nhất là



(A) 4040. (B) 2024. (C) 4002. (D) 2020.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f'(1-4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-4x=5 \\ 1-4x=-3 \\ 1-4x=-11 \end{bmatrix}$.

Từ đó suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=5 \\ t=-3 \\ t=-11 \end{bmatrix}$.

Ta có $g(x) = f(x^2+4x-3m-2) \Rightarrow g'(x) = (2x+4)f'(x^2+4x-3m-2)$.

Nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-2 \\ x^2+4x-3m-2=5 \\ x^2+4x-3m-2=-3 \\ x^2+4x-3m-2=-11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-2((-2)^2+4(-2)=-4) \\ x^2+4x=3m+7 \\ x^2+4x=3m-1 \\ x^2+4x=3m-9. \end{bmatrix}$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2+4x$ ta được $\min\limits_{\mathbb{R}}(x^2+4x) = y(-2) = -4$.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^2+4x-3m-2)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $3m-9 > -4 \Leftrightarrow m > \dfrac{5}{3}$.

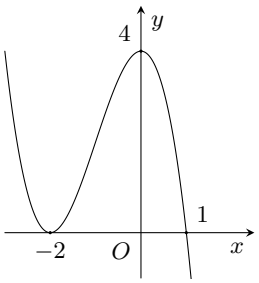
Vì giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ nên $m \in \{2; 3; \cdots; 2021\}$.

Vậy có 2020 số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(3-2x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x^2-3|)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $y = f'(3-2x) = a(x+2)^2(x-1)$ với $a < 0$.

Với $x = -2$ ta có $f'(7) = 0$; Với $x = 1$ ta có $f'(1) = 0$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=7 \\ x=1 \end{bmatrix}$, trong đó $x = 7$ là nghiệm bội hai.

Ta có $g(x) = f\left(|x^2-3|\right) = f\left(\sqrt{(x^2-3)^2}\right) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{x\left(x^2-3\right)}{|x^2-3|} \cdot f'(|x^2-3|)$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ |x^2-3|=1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{bmatrix}$ và $x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$ thì $g'(x)$ không xác định.

Xét $g'(-3) = \dfrac{-3.6}{6} f'(6)$. Ta có $f'(6) = f'\left(3-2.\dfrac{-3}{2}\right)$.

Nên $f'(6) = f'\left(3-2.\dfrac{-3}{2}\right) = a\left(-\dfrac{3}{2}+2\right)^2\left(-\dfrac{3}{2}-1\right) > 0$ vì $a < 0$ suy ra $g'(-3) < 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

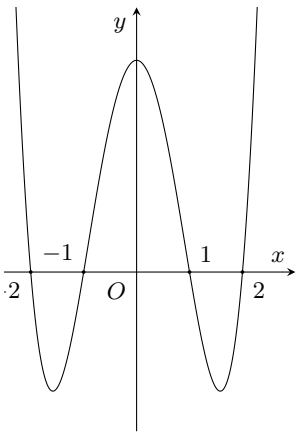
Vậy hàm số có 4 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f'(1-x^2)$ là hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3. (B) 5 . (C) 7. (D) 9.



Lời giải.

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 4 nên có dạng $g(x) = a(x+2)(x+1)(x-1)(x-2), a > 0$.
Suy ra $f'(1-x^2) = a(x^2-4)(x^2-1)$.
Đặt $t = 1-x^2$ ta có $f'(t) = at(t+3)$.
Khi đó $y = f\left(x^2 - 2\,|x|\right)$ nên

$$y' = \left(2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2}}\right) f'\left(x^2 - 2\,|x|\right) = 2ax\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)(x^2 - 2|x|)(x^2 - 2|x| + 3).$$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	

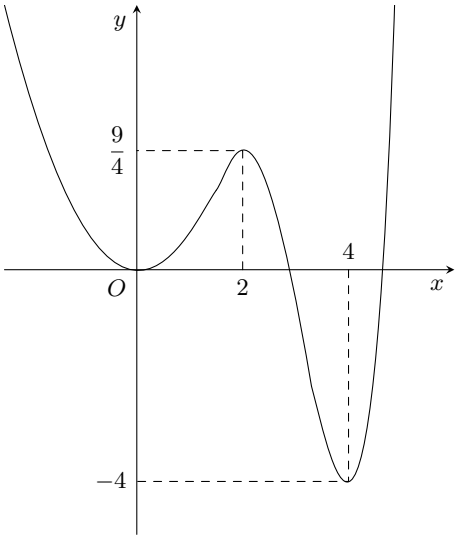
Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(5-2x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9;9)$ thoả mãn $2m \in \mathbb{Z}$ và hàm số $y = \left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\dfrac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 26. (B) 25. (C) 24. (D) 27.



Lời giải.

Đặt $t = 5-2x$. Khi $y = f(5-2x)$ có 3 điểm cực trị $x = 0, x = 2, x = 4$ thì

$$y = f(t) \text{ có 3 điểm cực trị } t = 5, t = 1, t = -3 \text{ và } f(5) = 0, f(1) = \frac{9}{4}, f(-3) = -4.$$

Bảng xét dấu $y = f(t)$ như sau

t	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Xét $g(x) = 2f\left(4x^3+1\right)+m-\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $g'(x) = 24x^2 f'(4x^3+1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ 4x^3+1 = 5 \\ 4x^3+1 = 1 \\ 4x^3+1 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x = 1 \\ x^3 = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Xét phương trình $2f\left(4x^3+1\right)+m-\dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow f\left(4x^3+1\right) = \dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}$.

Đặt $u = 4x^3+1 \Rightarrow u \in \mathbb{R}$.

Ta có số nghiệm $f(4x^3+1) = \dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}$ bằng số nghiệm phương trình $f(u) = f(t) = \dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}$.

Để $y = \left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\dfrac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị thì $f(t) = \dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}$ có 2 nghiệm đơn phân biệt.

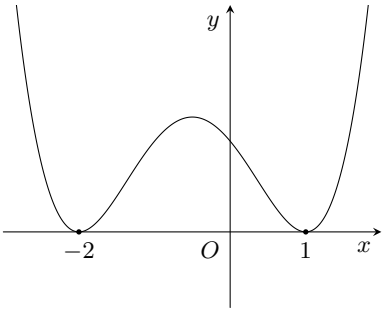
Suy ra $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2} \geq \dfrac{9}{4} \\ -4 < \dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ \dfrac{1}{2} \leq m < \dfrac{17}{2}. \end{array}\right.$

Vì $m \in (-9;9)$ và $2m \in \mathbb{Z}$ nên có 26 giá trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13.

Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f(1-x)$ được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2+2)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=f(1-x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-2$ và $x=1$.
Suy ra $y=f(1-x)=a(x+2)^2\cdot(x-1)^2$ trong đó $a>0$.
Ta có $y=f(1-x)=a[3-(1-x)]^2\cdot[-(1-x)]^2$.
Do đó $f(x)=a(3-x)^2\cdot x^2\Rightarrow f'(x)=2ax\cdot(3-x)\cdot(3-2x)$.
Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $g'(x)=2x\cdot f'(x^2+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2=0\\x^2+2=\frac{3}{2}\\x^2+2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)=f(x^2+2)$ có 2 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f(x^2-2x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Biết hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x=-2$ và $x=a$. Hỏi hàm số $f(x^2-4x+4)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 5. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $t=x^2-2x$. Ta có một phần bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$t=x^2-2x$			15		-1		15		
$f(t)=f(x^2-2x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Ta vẽ lại một phần bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	-1		15	$+\infty$
$f(x)$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$ $+\infty$

Suy ra hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x=-2$ và $x=15$.
Xét hàm số $g(x)=f(x^2-4x+4)$

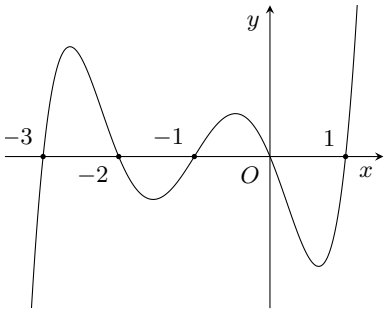
$$g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x+4)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=2\\x^2-4x+4=-2\\x^2-4x+4=15.\end{bmatrix}$$

Ta có $x^2-4x+4=-2$ vô nghiệm và $x^2-4x+4=15$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.
Vậy hàm số $f(x^2-4x+4)$ có 3 điểm cực trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 15.

Cho hàm đa thức $y=[f(x^2+2x)]'$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f(|x-2|+m)$ có 5 cực trị là

(A) -52. (B) 55. (C) -55. (D) 56.



Lời giải.

Ta có $[f(x^2+2x)]'=(2x+2)f'(x^2+2x)=a(x+3)(x+2)(x+1)(x)(x-1)(a>0)$
$\Rightarrow f'\left(x^2+2x\right)=\dfrac{a}{2}(x+3)(x+2)x(x-1)=\dfrac{a}{2}\left(x^2+2x-3\right)(x^2+2x).$
Đặt $t=x^2+2x\Rightarrow f'(t)=\dfrac{a}{2}(t-3)t.$

Ta có $g'=\dfrac{x-2}{|x-2|}f'(|x-2|+m)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=2\\f'(|x-2|+m)=0.\end{bmatrix}$

Để hàm số $g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow\begin{bmatrix}|x-2|+m=0\\|x-2|+m=3\end{bmatrix}$ phải có 4 nghiệm phân biệt

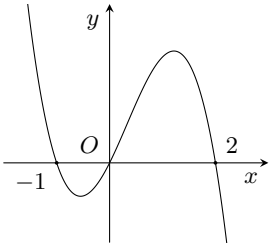
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m>0\\3-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m<3\end{cases}\Leftrightarrow m<0.$$

Suy ra $m\in\{-10;-9;\cdots;-1\}$ nên tổng giá trị m nguyên là -55.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16.

Cho hàm số $y=f'(x^3-x^2-2x+3)$ là hàm số bậc 3 có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Biết $f(0)>0, f(-1)<0$, hỏi hàm số $g(x)=|f(x^4-2x^2)|$ có mấy điểm cực tiểu?

(A) 3. (B) 2. (C) 5. (D) 6.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $f'(x^3-x^2-2x+3)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x=0\\x=2\end{bmatrix}$, do đó ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3.$
Xét $h(x)=f(x^4-2x^2)$ ta có $h'(x)=(4x^3-4x)f'(x^4-2x^2).$

Khi đó

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow (4x^3-4x)f'(x^4-2x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ f'(x^4-2x^2)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x^4-2x^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \text{(Tất cả các nghiệm đều bội lẻ).}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f(x^4-2x^2)$ như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

Do hàm số $y=f'(x^3-x^2-2x+3)$ là hàm bậc 3 suy ra $y=f'(x)$ là hàm bậc nhất có hệ số bậc nhất âm và $f'(3)=0$ do đó $f(3)>f(0)$.
Theo giả thiết $f(0)>0, f(-1)<0$ nên kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f(x^4-2x^2)$ ta suy ra hàm số $g(x)=|f(x^4-2x^2)|$ có 6 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f(|\mathrm{e}^{2x}-2x-2|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 9. (B) 11. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		-1		b		0		c		1		d		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			-3	$\nearrow$			2	$\searrow$			-1	$\nearrow$			$+\infty$
	$y=0$																

Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;1) \\ x=d\in(1;+\infty). \end{array}\right.$

Đặt $h(x)=\mathrm{e}^{2x}-2x-2$, suy ra $h'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2$.

Khi đó $h'(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=1 \Leftrightarrow x=0$ và $h(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha\approx -0{,}92 \\ x=\beta\approx 0{,}57. \end{array}\right.$

Nên ta có bảng biến thiên sau

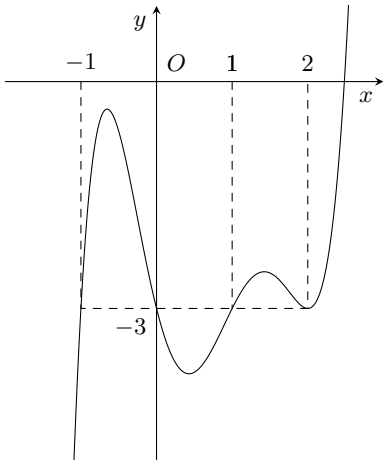
x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$					$+\infty$
									$y=0$
$u=\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Sử dụng phương pháp ghép trục, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|e^{2x}-2x-2|)=f(u)$ như sau

x	$-\infty$			α		0		β			$+\infty$
u	$+\infty$	d	c	0	c	1	c	0	c	d	$+\infty$
$g(x)=f(u)$		↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗

Vậy hàm số $g(x)=f(|e^{2x}-2x-2|)$ có 9 điểm cực trị.
Chọn đáp án A □

Câu 18.
Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=|f(|x|)+3|x||$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?
A 2. B 3. C 4. D 5.

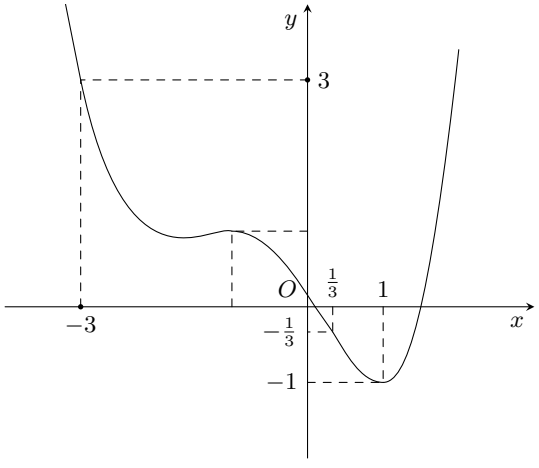


Lời giải.
Đặt $h(x)=f(x)+3x$ suy ra $h'(x)=f'(x)-(-3)$.
Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên

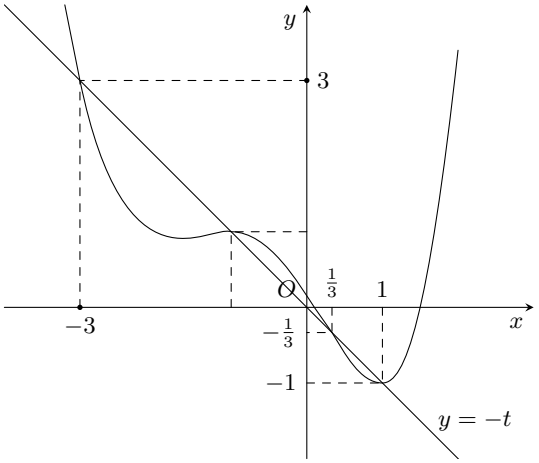
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	Trục Ox	↘		↗	$h(0)$	↘		↗	

Số điểm cực trị dương của hàm $|h(x)|$ là 2.
Do đó số điểm cực tiểu của $g(x)$ là $2\cdot 2+1=5$.
Chọn đáp án D □

Câu 19.
Cho hàm số $y=f(x)$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$?
A 9. B 7. C 6. D 8.



Lời giải.



Đặt $t=\dfrac{5\sin x-1}{2}$, suy ra $g(t)=2f(t)+t^2+3$ và $g'(t)=2f'(t)+2t$.

Khi đó $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=-t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pm 1\\ t=\dfrac{1}{3}\\ t=-3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\infty$	↗	$g(-3)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(\frac{1}{3})$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

Suy ra

x	0			$\frac{\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$		2π
t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	2	1	$\frac{1}{3}$	-1	-3	-1	$-\frac{1}{2}$
$g(t)$	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$ ↗	$g\left(\frac{1}{3}\right)$ ↗	$g(1)$ ↗	$g(2)$ ↘	$g(1)$ ↗	$g\left(\frac{1}{3}\right)$ ↗	$g(-1)$ ↗	$g(-3)$ ↗	$g(-1)$ ↗	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$

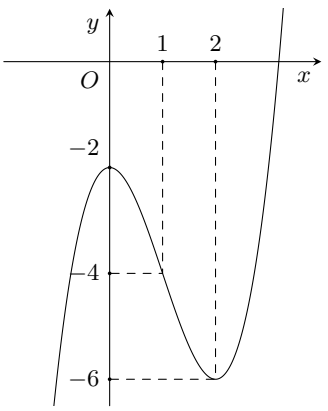
Vậy hàm số $g\left(x\right)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có 8 điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20.

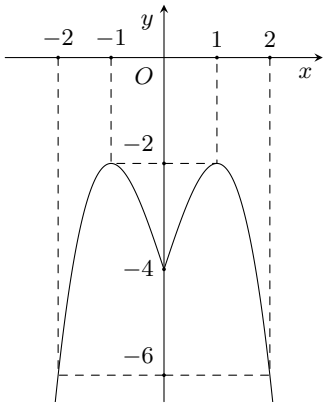
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=|f(1-|x|)+m|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 17.



Lời giải.

Do $f(x)$ có hai cực trị là $x=0, x=2 \Rightarrow f'(x)=ax(x-2) \Rightarrow f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-ax^2+C$.
Ta có $f(0)=-2, f(1)=-4 \Rightarrow a=3, c=-2 \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-2$.
$f(1-|x|)=\begin{cases} f(1-x), \text{ khi } x\geq 0 \\ f(1+x), \text{ khi } x<0 \end{cases} \Rightarrow f(1-|x|)=\begin{cases} -x^3+3x-4, \text{ khi } x\geq 0 \\ x^3-3x-4, \text{ khi } x<0. \end{cases}$
Ta có đồ thị của $f(1-|x|)$ như sau



Đặt $h(x)=f(1-|x|)+m$, ta có $g(x)=|h(x)|$.
Do $g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)=0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m\geq 4$.
Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

CHỦ ĐỀ 4. CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Cách vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ được vẽ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành đồng thời xóa phần phía dưới trục hoành.

Nhận xét. Số cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng tổng số cực trị hàm số $y=f(x)$ và số điểm cắt của $y=f(x)$ và trục Ox (không tính điểm tiếp xúc).

2. Cách vẽ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ được vẽ bằng cách

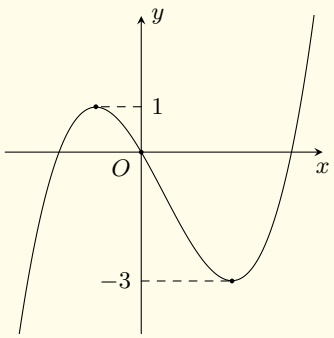
- Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) của hàm số $y=f(x)$ ứng với $x\geq 0$.
- Với $x<0$ được vẽ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) qua trục tung.

Nhận xét. Giả sử (C_1) có số điểm cực trị là α.

- Nếu (C_1) cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y=f(|x|)$ là $2\alpha+1$ (một điểm cực trị là $x=0$).
- Nếu (C_1) không cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y=f(|x|)$ là 2α.

B VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc ba có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Tất cả các số thực của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có 5 điểm cực trị là



(A) $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. (B) $-1<m<3$. (C) $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$. (D) $1<m<3$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x)+m=0 \Leftrightarrow -m=f(x)$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3

$$\Leftrightarrow -3<-m<1 \Leftrightarrow -1<m<3.$$

Chọn đáp án B □

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị.

(A) $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. (B) $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

(C) $(1;+\infty)$. (D) $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $y'=f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \triangle'=(2m+1)^2-9m>0 \\ S=\dfrac{2(2m+1)}{3}>0 \\ P=\dfrac{3m}{3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ 0<m<\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2-4)$ số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

(A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

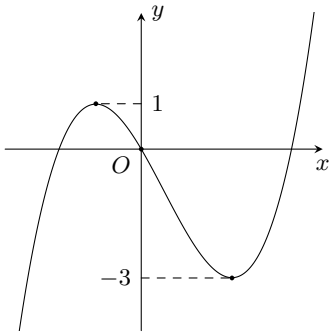
Ta có phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\pm 2. \end{array}\right.$

Do nghiệm $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên $x=1$ không phải là điểm cực trị.

Vậy hàm số $f(x)$ đã cho có 3 cực trị nhưng chỉ có một cực trị $x=2>0 \Rightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.



(A) $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. (B) $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. (C) $m=-1$ hoặc $m=3$. (D) $-1\le m\le 3$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ đã cho có hai điểm cực trị nên hàm số $f(x)+m$ cũng có hai cực trị.

Vậy hàm số $y=|f(x)+m|$ ba cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=-m$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 1

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m\ge 1 \\ -m\le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có ba điểm cực trị?

(A) 4032. (B) 4034. (C) 4030. (D) 4028.

Lời giải.

Ta có $g(x)=x^3-3x^2+m$ có $g'(x)=3x^2-6x\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(0)=m \\ g(2)=m-4. \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán tương đương với $y(0)\cdot y(2)\ge 0\Leftrightarrow m(m-4)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le 0. \end{array}\right.$

Do đó $m\in\{-2017;-2016;\ldots;0;4;\ldots;2017\}\Rightarrow$ có $2018+2014=4032$ số nguyên thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m đề hàm số $y=\left|x^4-mx^2+m\right|$ có 7 cực trị.

(A) $(4;+\infty)$. (B) $(0;1)$. (C) $(0;4)$. (D) $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $g(x)=x^4-mx^2+m$ có tối đa là 3 cực trị và $g(x)=0$ có tối đa là 4 nghiệm.

Vậy hàm số $y=\left|x^4-mx^2+m\right|$ có 7 cực trị $\Leftrightarrow g(x)=0$ có tối đa là 4 nghiệm phân biệt

$$\left\{\begin{array}{l} \triangle>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-4m>0 \\ m>0 \\ m>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>4.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $a>0$, $d>2018$, $a+b+c+d-2018<0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$.

(A) 3. (B) 5. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Xét $g(x)=f(x)-2018$, ta có $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ g(0)=f(0)-2018=d-2018>0 \\ g(1)=f(1)-2018=a+b+c+d-2018<0. \end{array}\right.$

Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Rightarrow$ hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.

Do vậy số điểm cực trị của hàm số $y=|g(x)|$ là $2+3=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ có ba điểm cực trị là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$

$$\Leftrightarrow 12x^3-12x^2-24x=0\Leftrightarrow 12\left(x^3-x^2-12x\right)=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=-1\\x=2.\end{cases}$$

Phương trình $f(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm thực.

Do đó hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2=-m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=3x^4-4x^3-12x^2$, ta có giá trị cần tìm của m thỏa mãn là

$$-5<-m<0\Leftrightarrow 0<m<5\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=-1;\ x=0;\ x=2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 điểm cực trị?

(A) $m<-1$. (B) $m<0$. (C) $-1<m<2$. (D) $m<2$.

Lời giải.

Hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow y=f(x+m)$ có 3 điểm cực trị dương.

Các điểm cực trị của hàm số $y=f(x+m)$ là $\begin{bmatrix}x+m=-1\\x+m=0\\x+m=2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1-m\\x=-m\\x=2-m.\end{bmatrix}$

Vậy ta có điều kiện là $\begin{cases}-1-m>0\\-m>0\\2-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\\m<0\\m<2\end{cases}\Leftrightarrow m<-1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a=0$. (B) $a\le 1$. (C) $1<a\le 3$. (D) $a>3$.

Lời giải.

Ta có $y=\begin{cases}x^3-mx+5\ \ (x\ge 0)\\-x^3-mx+5\ \ (x<0)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m\ \ (x>0)\\-3x^2-m\ \ (x<0)\end{cases}$ và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

☑ Nếu $m=0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2>0\ \ (x>0)\\-3x^2<0\ \ (x<0)\end{cases}$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0$ nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=0$.

☑ Nếu $m>0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m\ \ (x>0)\\-3x^2-m\ \ (x<0)\end{cases}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$, y' chỉ đổi dấu khi đi qua $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$.

Nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$.

☑ Nếu $m<0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m\ \ (x>0)\\-3x^2-m\ \ (x<0)\end{cases}$; $y'=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$, y' chỉ đổi dấu khi đi qua $x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$.

Nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$.

Vậy với mọi m, hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A $-\dfrac{5}{4}<m<2$. B $\dfrac{5}{4}<m<2$. C $\dfrac{1}{2}<m<2$. D $-2<m<\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.
Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\triangle'=(2m-1)^2-3(2-m)>0\\ S=\dfrac{2(2m-1)}{3}>0\\ P=\dfrac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A $(-\infty;0)$. B $(1;+\infty)$. C $(-\infty;0]$. D $\left[0;\dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải.
Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có đúng một điểm cực trị dương, tức là phương trình $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1\le 0<x_2\Leftrightarrow m\le 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng

A 5. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.
Ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(|x|)$ như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$f(0)$	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-mx^3+\dfrac{3}{2}(m^2-1)x^2+(1-m^2)x+2019$ với m là tham số thực. Biết rằng hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi $a<m^2<b+2\sqrt{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Giá trị $T=a+b+c$ bằng

(A) 6. (B) 8. (C) 7. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x + 1 - m^2$ là một đa thức bậc ba có tối đa 3 nghiệm.
Hàm số $y = f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi và chỉ khi $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương, tức là $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x + 1 - m^2 = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt.
Xét hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x + 1 - m^2$ có $y' = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2-1\right) = m \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = m-1 \\ x = m+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{\text{cđ}} = m-1,\ y_{\text{cđ}} = m^3 - m^2 - 3m + 3 \\ x_{ct} = m+1,\ y_{ct} = m^3 - m^2 - 3m - 1. \end{cases}$$

Do đó phương trình $y = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_{\text{cđ}} > 0 \\ y(0) < 0 \\ y_{\text{cđ}} \cdot y_{ct} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ 1 - m^2 < 0 \\ \left(m^3 - m^2 - 3m + 3\right).\left(m^3 - m^2 - 3m + 1\right) < 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 3 < m^2 < 3 + 2\sqrt{2}.$$

Vì vậy $a = 3$, $b = 3$, $c = 2$. Nên $a + b + c = 8$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = \left|mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m\right|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 7. (B) 10. (C) 9. (D) 11.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m$ có hai điểm cực trị và phương trình $mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(mx^2 - 2mx + m - 2\right) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \triangle' = m^2 - m(m-2) > 0 \Leftrightarrow m > 0. \\ m - 2m + m - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy có 10 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	0	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị?

(A) 0. (B) 21. (C) 18. (D) 19.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$ nên hàm số $y = f(x) + m$ cũng có 3 điểm cực trị $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$.
Để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị là phương trình $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -20 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 20$.
Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 9. (B) 2022. (C) 11. (D) 2018.

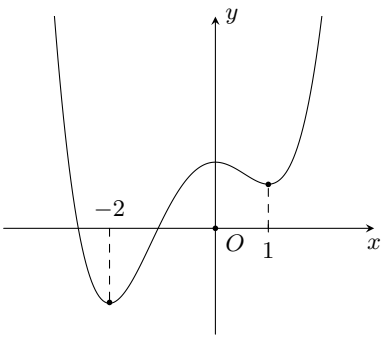
Lời giải.

Ta có $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\text{ (bội 3)}\\x=2\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}.\end{array}\right.$

$$\Rightarrow f'(1-2018x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2018x=0\text{ (bội 3)}\\1-2018x=2\\1-2018x=\sqrt{2}\\1-2018x=-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2018}\text{ (bội 3)}\\x=-\dfrac{1}{2018}\\x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2018}\\x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2018}.\end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $f(1-2018x)$ có 4 điểm cực trị.
Phương trình $f(1-2018x)=0$ có nhiều nhất 5 nghiệm.
Vậy hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất $4+5=9$ điểm cực trị.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Các điểm $x=-2\,;x=0\,;x=1$ là các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.



Hàm số $y=f(|x+1|-3)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 5. (B) 4. (C) 7. (D) 9.

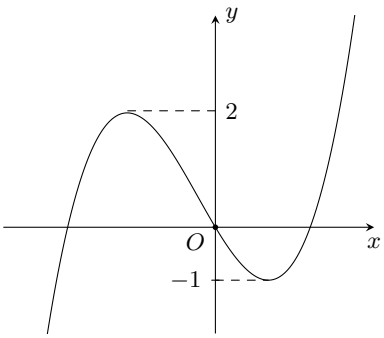
Lời giải.

Ghi chú: *Hàm số $y=f(|x+m|+n)$ có tất cả $2a+1$ điểm cực trị, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-m$ của hàm số $y=f(x+m+n)$.*
Ta có hàm số $y=f(x+1-3)=f(x-2)$ có các điểm cực trị là

$$x-2=-2\,;x-2=0\,;x-2=1\Leftrightarrow x=0\,;x=2\,;x=3$$

Hàm số này có 3 điểm cực trị lớn hơn -1.
Do đó hàm số $y=f(|x+1|-3)$ có tổng cộng $2\cdot3+1=7$ điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

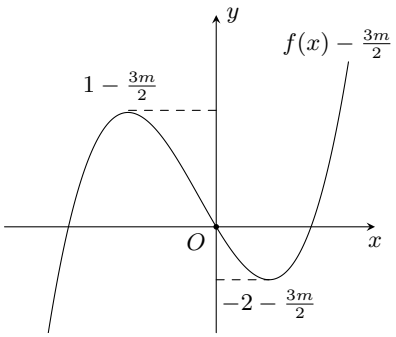


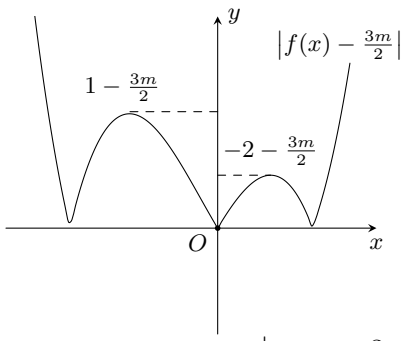
Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|2f(x)-3m|$ có 5 điểm cực trị là

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Hàm số $y=|2f(x)-3m|=2\left|f(x)-\dfrac{3m}{2}\right|$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $g(x)=\left|f(x)-\dfrac{3m}{2}\right|$





Thực hiện biến đổi đồ thị $f(x)\xrightarrow[\text{một đoạn }\frac{3m}{2}\text{ đơn vị}]{\text{Tịnh tiến lên trên}}f(x)-\dfrac{3m}{2}\xrightarrow{\text{lấy đối xứng qua Ox}}\left|f(x)-\dfrac{3m}{2}\right|$.

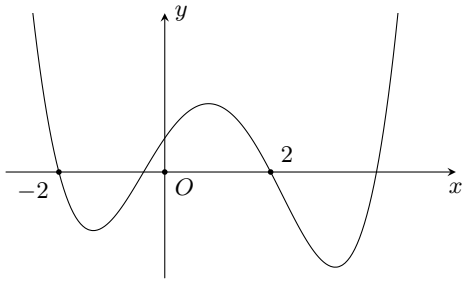
Hàm số $f(x)-\dfrac{3m}{2}$ có hai điểm cực trị tương ứng với hai giá trị cực trị là $\begin{cases}1\to\left(-2-\dfrac{3m}{2}\right)\\1\to\left(1-\dfrac{3m}{2}\right).\end{cases}$

Để hàm số $g(x)=\left|f(x)-\dfrac{3m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f(x)-\dfrac{3m}{2}$ phải cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(-2-\dfrac{3m}{2}\right)<0\\\left(1-\dfrac{3m}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{4}{3}<m<\frac{2}{3}\Rightarrow m=\{1;0\}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=\left|f\left(x^3-3x\right)+2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 16. (B) 17. (C) 19. (D) 18.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)+2$ có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)$.
Phương trình đạo hàm $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\ f'\left(x^3-3x\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x^3-3x=-2\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)=0\\ x^3-3x=a\in(-2;0)\\ x^3-3x=2\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0\\ x^3-3x=b>2.\end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $y=f\left(x^3-3x\right)+2$ có 8 điểm cực trị.
Vậy hàm số $y=\left|f\left(x^3-3x\right)+2\right|$ có tối đa 17 điểm cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?
(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ghi chú: *Hàm số $y=|f(x)|$ có $m+n$ điểm cực trị, trong đó m là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, n là số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x)=0$.*
Vì phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực nên biểu thức có dạng

$$\begin{aligned} & u=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)^2(x-x_2)\\ \Rightarrow\quad & u'=a(x-x_1)^2+2a(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)(ax-ax_1+2ax-2ax_2).\end{aligned}$$

Phương trinh $u'=0$ có hai nghiệm đơn nên ta suy ra hàm số $u=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị.
Từ đó hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có tất cả $2+1=3$ cực trị.
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20\,;20)$ để hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+2x+1$ có ba điểm cực trị?
(A) 17. (B) 16. (C) 19. (D) 18.

Lời giải.

Trường hợp 1: Phương trình $x^2+2x+m=0$ vô nghiệm.
Nếu $x^2+2x+m<0\ \forall x$ (vô lí).
Nếu $x^2+2x+m>0\ \forall x$. Khi đó $y=x^2-2x+m+2x+1=x^2+m+1$.
$\Rightarrow$ Hàm số này có 1 điểm cực trị tại $x=0$ (loại).
Trường hợp 2: Phương trình $x^2+2x+m=0$ có nghiệm.
Nếu phương trình có nghiệm kép thì x^2+2x+m có dạng $(x-x_0)^2\geq 0\,\forall x$.
$\Rightarrow$ Hàm số cũng có 1 điểm cực trị tại $x=0$ (loại).
Nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\Leftrightarrow \triangle'>0\Leftrightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$

$$y'=\frac{(2x-2)(x^2-2x+m)}{|x^2-2x+m|}+2\Rightarrow y'=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2x-2+2=0\\ x^2-2x+m>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-(2x-2)+2=0\\ x^2-2x+m<0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=0\\ x^2-2x+m>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=2\\ x^2-2x+m<0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=0\\ m>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=2\\ m<0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Khi $0<m<1$ rõ ràng không tồn tại số nguyên.
Khi $m<0$ ta có bảng xét dấu của y' như sau:
Vì $x_1+x_2=2$; $x_1\cdot x_2=m<0$ nên $x_1<2<x_2$.

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Lúc này hàm số có 3 điểm cực trị.
Vậy $m \in \{-19; ...; -1\}$. Ta có 19 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 21. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left|x^3 + (2m-1)x^2 + \left(2m^2 - 2m - 9\right)x - 2m^2 + 9\right|$ có 5 điểm cực trị?
A 7. B 5. C 6. D 4.

Lời giải.
Ta có $x^3 + (2m-1)x^2 + \left(2m^2 - 2m - 9\right)x - 2m^2 + 9 = 0 \quad (1)$.

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + 2mx + 2m^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x^2 + 2mx + 2m^2 - 9 = 0. \end{bmatrix}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \triangle' = m^2 - (2m^2 - 9) > 0 \\ 1 + 2m + 2m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Vậy có 5 số nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có 3 điểm cực trị?
A 3. B 5. C 6. D 4.

Lời giải.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)x + 1$ có đúng một điểm cực trị dương

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2 - 4\right) = 0 \text{ có đúng một nghiệm dương} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x = m - 2 \\ x = m + 2 \end{bmatrix} \text{ có đúng một nghiệm dương} \\ &\Leftrightarrow \quad m - 2 \leq 0 < m + 2 \Leftrightarrow -2 < m \leq 2 \Rightarrow m \in \{-1, 0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Vậy có 4 số nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

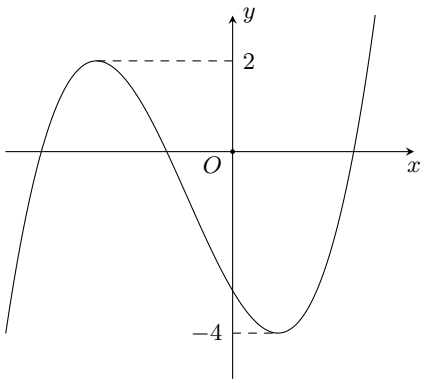
Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có 5 điểm cực trị?
A 3. B 6. C 8. D 7.

Lời giải.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)x + 1$ có đúng hai điểm cực trị dương

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 4) = 0 \text{ có đúng hai nghiệm dương} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x = m - 2 \\ x = m + 2 \end{bmatrix} \text{ có đúng hai nghiệm dương} \\ &\Leftrightarrow \quad m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2 \Rightarrow m \in \{3, 4, ..., 9\}. \end{aligned}$$

Vậy có 7 số nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2012]$ để hàm số $y = \left|f^2(x) - 2f(x) + m + 4\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

(A) 2104. (B) 2016. (C) 2105. (D) 2017.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + m + 4 \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot (2f(x) - 2)$.

Cho $g'(x) = f'(x) \cdot (2f(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Rightarrow \text{ có 2 cực trị} \\ f(x) = 1 \Rightarrow \text{ có 3 cực trị.} \end{array}\right.$

Suy ra $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị.

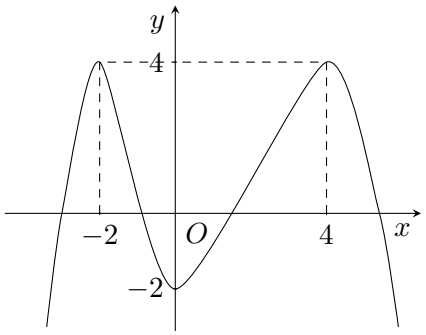
Để hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + m + 4$ vô nghiệm.

$$\Rightarrow \triangle' = 1 - m - 4 = -m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -3 \rightarrow -3 \leq m \leq 2012$$

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|4f^2(x) + 8f(x) + m - 1\right|$ có đúng 15 điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = g(x) = 4f^2(x) + 8f(x) + m - 1 \Rightarrow g'(x) = 4f'(x) \cdot (2f(x) + 2)$.

Phương trình $g'(x) = 4f'(x) \cdot (2f(x) + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Rightarrow \text{ có 3 điểm cực trị} \\ f(x) = -1 \Rightarrow \text{ có 4 điểm cực trị.} \end{array}\right.$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 15 điểm cực trị thì phương trình $4f^2(x) + 8f(x) + m - 1 = 0$ phải có 8 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ.

Dựa vào đồ thị ta thấy, phương trình $f(x) = a \in (-2; 4)$ luôn có 4 nghiệm phân biệt.

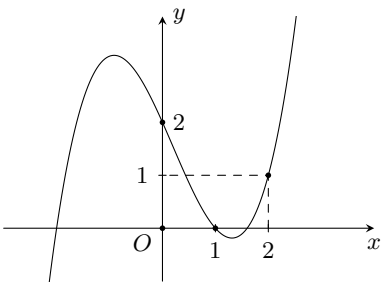
Đặt $f(x) = u$ thì phương trình $4u^2 + 8u + m - 1 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2; 4)$.

Mặt khác $4u^2 + 8u + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m - 1 = -4u^2 - 8u$, ta có bảng biến thiên như sau

u	-2		-1		4
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	4	↘	-96

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow 0 < m-1 < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 5 \Rightarrow m = \{2;3;4\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

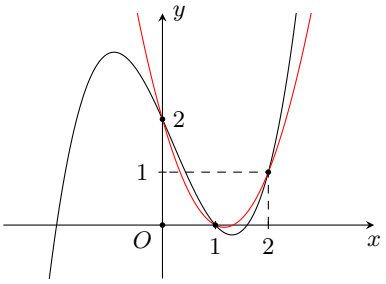


Hàm số $y = \left|4f(x) - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 1\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?
(A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 8.

Lời giải.
Xét hàm số $g(x) = 4f(x) - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 1$ có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4f'(x) - 6x^2 + 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Đường cong $y = f'(x)$ cắt parabol $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 2$ tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $x = 0; x = 1; x = 2$



Và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0; x = 1; x = 2$ nên $g(x)$ có ba điểm cực trị.
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$g(0)$	↗	$g(1)$	↘	$g(2)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình $g(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm (đơn hoặc bội lẻ).
Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có tối đa $3 + 4 = 7$ điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3\left(x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị?

(A) 4. (B) 2. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

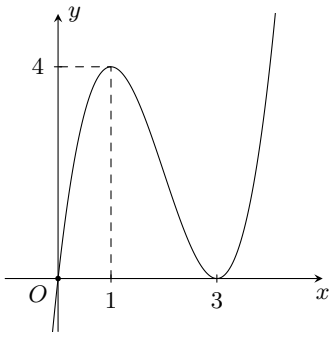
Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow g(x) = x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \le 0 < x_2 \ne 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < 0 < x_2 \ne 1 \\ x_1 = 0 < x_2 \ne 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \cdot g(0) < 0 \\ g(1) \ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) \ne 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m^2-7m+6 < 0 \\ m^2-3m+2 \ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2-7m+6 = 0 \\ m^2-3m+2 \ne 0 \\ 5-4m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 6 \\ m \ne 2. \end{cases}$$

Vậy $m \in \{3;4;5\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = \left|(f(x))^2 + f(x) - 2\right|$ là

(A) 6. (B) 9. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) + f(x) - 2$ có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)(2f(x)+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Quan sát đồ thị hàm số $f(x)$ hàm số có hai điểm cực trị $x = 0; x = 3$ do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 3$.

Đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại duy nhất một điểm có hoành độ $x = a < 0$.

Do đó phương trình $f(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = a$.

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi qua các điểm $x = a; x = 0; x = 3$ do đó $g(x)$ có ba điểm cực trị $x = a; x = 0; x = 3$.

Xét phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -2. \end{array}\right.$

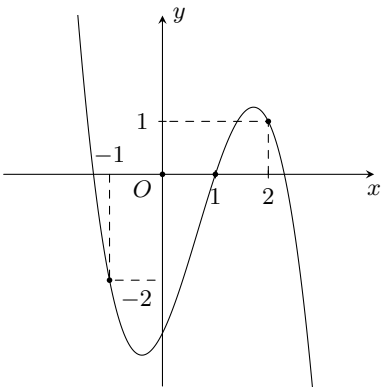
Phương trình $f(x) = 1$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3$.

Phương trình $f(x) = -2$ có một nghiệm duy nhất $x_4 < a$.

Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ

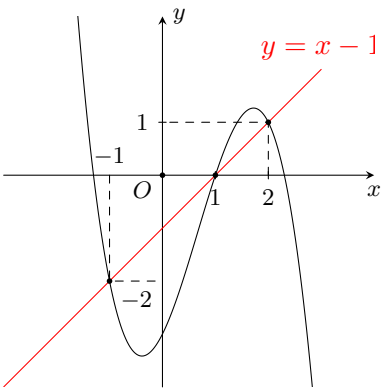


Hỏi hàm số $y=\left|2f\left(x\right)-x^2+2x+3\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 7.

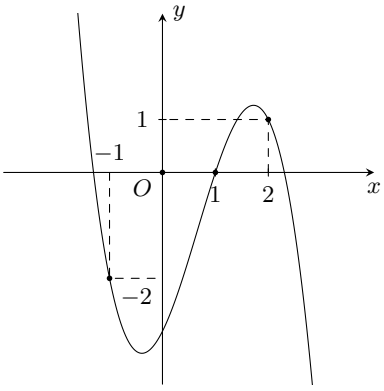
Lời giải.

Xét hàm số $y=g\left(x\right)=2f\left(x\right)-x^2+2x+3\Rightarrow g'\left(x\right)=2f\left(x\right)-2x+2=2\left(f'\left(x\right)-x+1\right)$.
Cho $g'\left(x\right)=2f\left(x\right)-2x+2=2\left(f'\left(x\right)-x+1\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=x-1$.
Ta có đồ thị



Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'\left(x\right)=x-1$ có ba nghiệm phân biệt là $x=\pm1$; $x=2$.
Suy ra hàm số $y=g\left(x\right)=2f\left(x\right)-x^2+2x+3$ có ba điểm cực trị $\Rightarrow y=\left|2f\left(x\right)-x^2+2x+3\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y=\left|2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 9. (B) 11. (C) 10. (D) 12.

Lời giải.

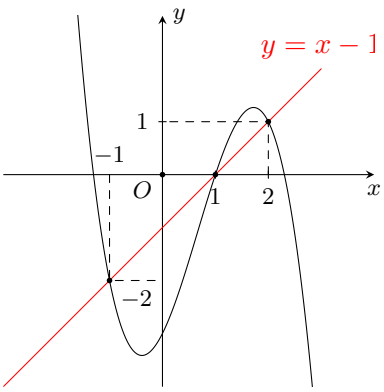
Xét hàm số $y=g\left(x\right)=2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021$ có

$$g'\left(x\right)=2\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2\right)-4x^3+12x^2-4x-4=4\left(x-1\right)\left[f'\left(x^2-2x\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right].$$

Cho $g'(x)=4(x-1)\left[f'\left(x^2-2x\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x\right)=x^2-2x-1. \end{array}\right.$

Xét phương trình $f'\left(x^2-2x\right)=x^2-2x-1$. Đặt $x^2-2x=t \Rightarrow f'(t)=t-1$.

Ta có đồ thị như sau



Dựa vào đồ thị, ta thấy đạo hàm $f'(t)$ cắt đường thẳng $y=t-1$ tại 3 điểm phân biệt $t=\pm 1;\ t=2$

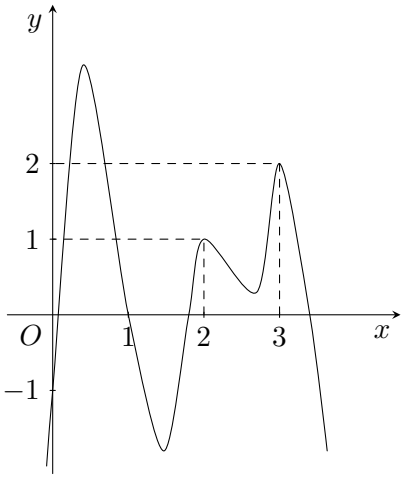
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=x^2-2x=-1 \Rightarrow \text{ có nghiệm kép} \\ t=x^2-2x=1 \Rightarrow \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ t=x^2-2x=2 \Rightarrow \text{ có 2 nghiệm phân biệt.} \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $y=g(x)=2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $y=\left|2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021\right|$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

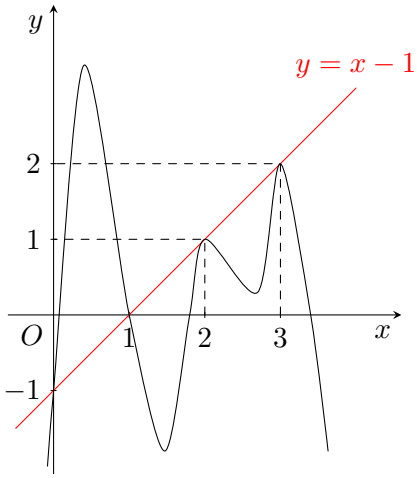
(A) 9. (B) 7. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Xét $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$. Ta có

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3. \end{array}\right.$$

Kẻ đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x=0; x=1; x=2; x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2; x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0; x=1$.

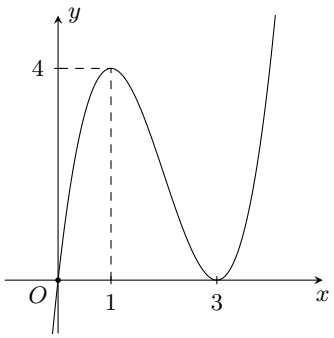


Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0; x=1$.
Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x)=0$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$y=0$	$\searrow$			$-\infty$

Suy ra phương trình $g(x)=0$ có tối đa ba nghiệm phân biệt.
Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa $2+3=5$ điểm cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Khi hàm số $y=\left|(f(x))^2+f(x)+m\right|$ có số điểm cực trị là ít nhất. Giá trị nhỏ nhất của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(0;1)$. B $(-\infty;-1)$. C $(-1;0)$. D $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=f(x); g(t)=t^2+t+m; y=|g(t)|=\left|t^2+t+m\right|$.
Hàm số $g(t)$ có 1 cực trị tại $t=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{2}$ có nghiệm duy nhất.
Do đó hàm số ban đầu có ít cực trị nhất khi và chỉ khi t^2+t+m không đổi dấu

$$\Leftrightarrow \triangle = 1-4m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của m là $\dfrac{1}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+4m|x-m|+2$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in(-21;21)$ để hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. Số phần tử của S là

(A) 20. (B) 16. (C) 18. (D) 19.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)=(x-m)^2+4m|x-m|-m^2+2$.
Mặt khác, hàm số $y=f(x)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=g(|x|)=x^2+4m|x|-m^2+2$.
Có thể coi $y=f(x)=g(|x-m|)$.
Để hàm số $y=f(x)=g(|x-m|)$ có ba điểm cực trị thì hàm số $y=g(|x|)$ phải có ba điểm cực trị.
Khi đó, hàm số $g(x)=x^2+4mx-m^2+2$ phải có 1 cực trị dương.
Suy ra hàm số $g(x)=x^2+4mx-m^2+2$ đạt cực trị tại $x=-2m>0\Leftrightarrow m<0$.
Suy ra $-21<m<0\Rightarrow m=\{-20;\ldots;-1\}$.
Vậy có 20 giá trị thỏa mãn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+6mx+m-1$. Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=f(|x+2019m-2020|)$ có đúng 5 điểm cực trị bằng

(A) 2016. (B) 2018. (C) 2019. (D) 2017.

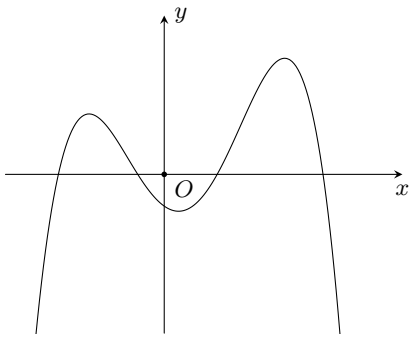
Lời giải.

Hàm số $y=f(|x+a|)$ có hình dạng giống đồ thị hàm số $y=f(|x|)$. Tuy nhiên chỉ là tịnh tiến theo trục hoành Ox (theo chiều ngang), phụ thuộc vào giá trị của a.
Bài toán quy về tìm m để hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+6mx+m-1$ có hai điểm cực trị dương.
Xét đạo hàm $f(x)=3x^2-6mx+6m=0$ có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\triangle'=9m^2-18m>0\\ \dfrac{6m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2\Rightarrow 3\le m\le 2021.$$

Vậy có 2019 giá trị thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ được cho như hình vẽ



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2mx-|x-m|+m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-x\right)$.
Ta có $y=f\left(x^2-2mx-|x-m|+m^2\right)=f\left((x-m)^2-|x-m|\right)=g(|x-m|)$.
Mặt khác hàm số $y=g(|x-m|)$ và hàm số $y=g(|x|)$ có cùng số điểm cực trị.
Lại có, hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị dương $\Rightarrow$ hàm số $y=g(|x|)=f\left(x^2-|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.
Suy ra hàm số $y=g(|x-m|)$ có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ là

(A) 5. (B) 1. (C) 9. (D) 2.

Lời giải.

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$ bằng số cực trị của hàm số $f\left(\left|x-4\right|\right)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn 4 của hàm số $y=f\left(x-4\right)$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bốn điểm cực trị là $x=-2$; $x=-1$; $x=3$; $x=5$ nên hàm số $y=f\left(x-4\right)$ có các điểm cực trị tương ứng là $x-4=-2$; $x-4=-1$; $x-4=3$; $x-4=5\Leftrightarrow x=2$; $x=3$; $x=7$; $x=9$.

Có hai điểm cực trị lớn hơn 4 là $x=7$; $x=9$.

Vậy hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ có 5 điểm cực trị và $g\left(x\right)$ cũng có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m\right|$. Hàm số có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Xét $g\left(x\right)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m$ có $g'\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\left(x+1\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1-x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$m-1$	$\nearrow$	$m+\sqrt{2}$	$\searrow$	$m+1$

Suy ra $g(x)$ có một điểm cực trị $x=1$ và phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+\sqrt{2}>0\\m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow-\sqrt{2}<m<1.$$

Vậy hàm số $f(x)=|g(x)|$ có tối đa $1+2=3$ điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

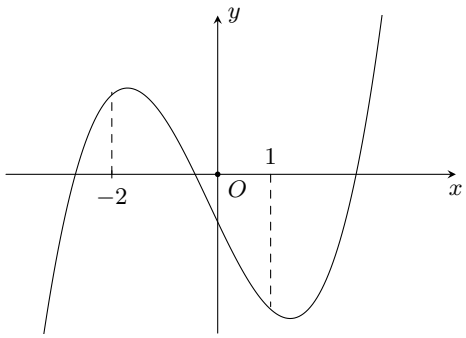
Câu 38. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\c<0\end{cases}$. Hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 7. (B) 9. (C) 11. (D) 5.

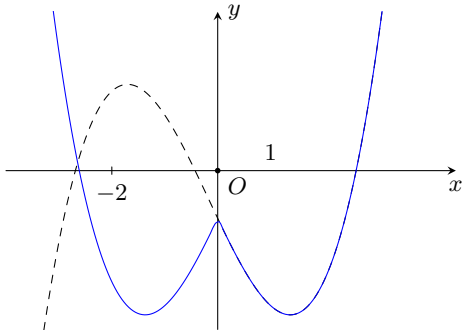
Lời giải.

Cách 1:

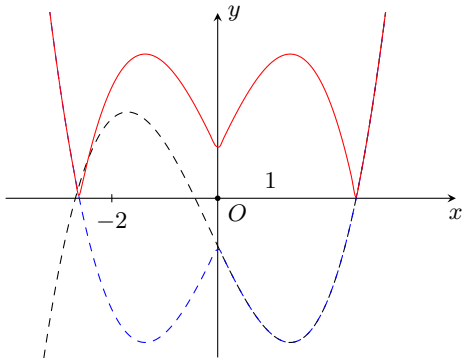
Ta có $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\c<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(1\right)<0\\f\left(-2\right)>0\\f\left(0\right)<0\end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có dạng như sau



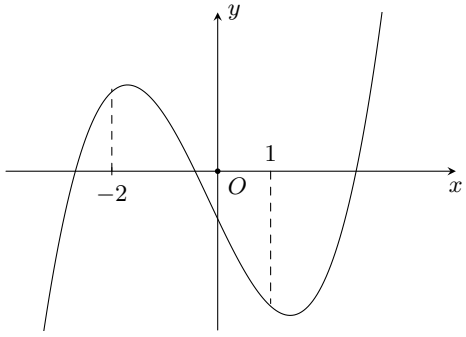
Ta sẽ dùng cách vẽ đồ thị hàm số $y=|f(|x|)|$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$.
Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$ bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục tung của $y=f(x)$; lấy đối xứng qua trục tung phần bên trái trục tung của $y=f(x)$.



Bước 2: Vẽ đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần trên trục hoành của $y=g(x)$; lấy đối xứng qua trục hoành phần bên dưới trục hoành của $y=g(x)$.



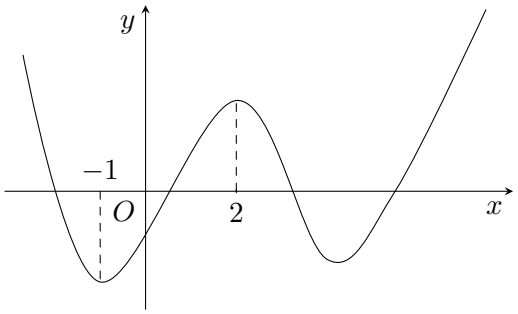
Từ đồ thị suy ra hàm số $y=|f(|x|)|$ có tất cả 5 điểm cực trị.
Cách 2:
Ta có $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\c<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)<0\\f(-2)>0\\f(0)<0\end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng như sau



Hàm số này có 1 điểm cực trị dương và $f(x)=0$ có một nghiệm dương.
Đặt $g(x)=f(|x|)$ hàm số này có $2.1+1=3$ điểm cực trị và phương trình $g(x)=0\Leftrightarrow f(|x|)=0$ có hai

nghiệm (đơn hoặc bội lẻ).
Do vậy hàm số $y=|g(x)|=|f(|x|)|$ có tất cả $3+2=5$ điểm cực trị.
Chọn đáp án D □

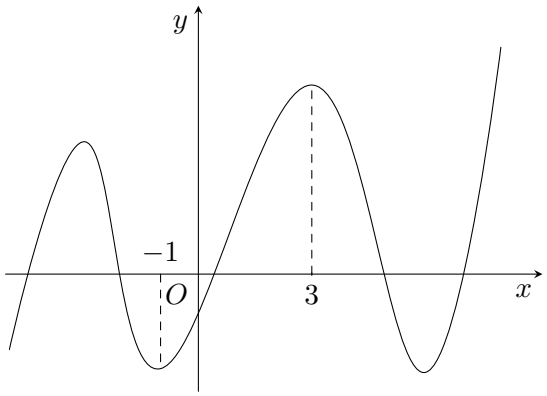
Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ được cho như hình vẽ



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2|x|+12\right)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?
A 7. B 3. C 5. D 1.

Lời giải.
Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-4x\right)$.
Ta có $y=f\left(x^2-8|x|+12\right)=f\left(x^2-4|x|+4-4|x|+8\right)=f\left((|x|-2)^2-4(|x|-2)\right)=g(|x|-2)$.
Mặt khác hàm số $y=g(x)$ có các điểm cực trị là $x=-1;\ x=2;\ x=c>2$.
$\Rightarrow$ hàm số $y=g(x-2)$ có các điểm cực trị là $x=1;\ x=4;\ x=c+2$ (có 3 cực trị dương).
Suy ra hàm số $y=g(|x|-2)=f\left(x^2-8|x|+12\right)$ có 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ



Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để hàm số $y=(-|x+2021m|-2m+1)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là
A 2. B 3. C 0. D 1.

Lời giải.
Hàm số $y=f(-|x+2021m|-2m+1)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=f(-|x|-2m+1)$.
Thực hiện biến đổi đồ thị $f(x)\to f(x-2m+1)\to f(-|x|-2m+1)$.
Các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là $x_1=a<0;\ x_2=-1;\ x_3=3;\ x_4=b>3$.
Do đó các điểm cực trị của hàm số $y=f(-|x|-2m+1)$ là

$$x_1=a+2m-1;\ x_2=-1+2m-1;\ x_3=3+2m-1;\ x_4=b+2m-1.$$

Để hàm số $y=f(-|x|-2m+1)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x-2m+1)$ có đúng 2 điểm cực trị âm.
Suy ra $\begin{cases}-1+2m-1<0\\3+2m-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m<1\to m=\{-1;0\}$.
Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

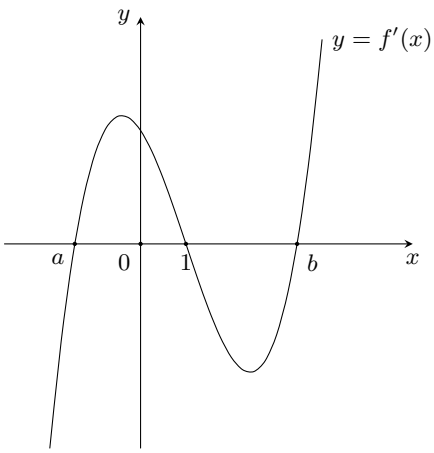
1. B	2. A	3. A	4. A	5. B	6. D	7. A	8. B	9. B	10. C
11. C	12. B	13. B	14. D	15. A	16. C	17. A	18. B	19. A	20. C
21. B	22. D	23. D	24. B	25. B	26. C	27. D	28. D	29. D	30. B
31. D	32. A	33. A	34. C	35. C	36. A	37. B	38. D	39. A	40. A

ĐỀ VDC SỐ 1: CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m\in[-21;21]$ để hàm số $f\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của S là

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.



Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là $x=a<0$; $x=1$; $x=b>1$.
Xét hàm số $f\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)=f(u)$. Ta có bảng biến thiên của $u=\left|x^2+2mx-1\right|$ như sau

x	$-\infty$		x_1		$-m$		x_2		$+\infty$
u	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1+m^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$u=a$

Ta có

Số điểm cực trị của $f(u)$ = Số điểm cực trị của u + Số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l}u=a\\u=1\\u=b.\end{array}\right.$

Do số điểm cực trị của u là 3 nên để hàm số $f(u)$ có 7 điểm cực trị thì số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l}u=a\\u=1\\u=b\end{array}\right.$ là 4.

$\Rightarrow 1\geq 1+m^2\Rightarrow m=0$.
Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)=x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|2x+1|-1\right)$ là

(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x=0$; $x=1$.
Xét hàm số $y=f\left(|2x+1|-1\right)=f(u)$. Bảng biến thiên của $u=|2x+1|-1$ như sau

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
u	$+\infty$	-1	$+\infty$
		$u=1$	
		$u=0$	

Ta có

Số điểm cực trị của $f(u)$ = Số điểm cực trị của u + Số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1. \end{array}\right.$

Do đó số điểm cực trị của $f(u)$ là $1+4=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $y=f'(x)=x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|2x+m|-m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x=0;\ x=2$.

Xét hàm số $y=f\left(|2x+m|-m\right)=f(u)$. Bảng biến thiên của $u=|2x+m|-m$ như sau

x	$-\infty$	$-\dfrac{m}{2}$	$+\infty$
u	$+\infty$	$-m$	$+\infty$
			$u=2$
		$u=0$	

Ta có số điểm cực trị của u là 1. Để hàm số $f(u)$ có đúng 3 cực trị thì số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=2 \end{array}\right.$ phải là $3-1=2$.

$\Rightarrow 0\le -m<2$ hay $-2<m\le 0$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $y=f'(x)=x(x-m)(x-6+m)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $y=f\left(|3x-2|+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Nhận xét: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi đó $y=f\left(|ax+b|+c\right)$ luôn có cực trị tại điểm $x=-\dfrac{b}{a}$.

$y=f\left(|3x-2|+1\right)=\begin{cases} f(3x-1) \text{ khi } x>\dfrac{2}{3} \\ f(-3x+3) \text{ khi } x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$, tại $x=\dfrac{2}{3}$ là một điểm cực trị của hàm số.

$y'=\begin{cases} 3f'(3x-1) \text{ khi } x>\dfrac{2}{3} \\ -3f'(-3x+3) \text{ khi } x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow y'=\begin{cases} 3(3x-1)(3x-1-m)(3x-7+m) \text{ khi } x>\dfrac{2}{3} \\ -3(-3x+3)(-3x+3-m)(-3x-3+m) \text{ khi } x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Hàm số có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác $\dfrac{2}{3}$

☑ Khi $x>\dfrac{2}{3}$ ta có

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{m+1}{3}>\dfrac{2}{3}\\ x_2=\dfrac{7-m}{3}>\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ x_1\neq x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ \dfrac{1+m}{3}\neq\dfrac{7-m}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ m\neq 3.\end{cases}$$

☑ Khi $x<\dfrac{2}{3}$ ta có

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_3=\dfrac{3-m}{3}<\dfrac{2}{3}\\ x_4=\dfrac{m-3}{3}<\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ x_3\neq x_4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ \dfrac{1+m}{3}\neq\dfrac{7-m}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ m\neq 3.\end{cases}$$

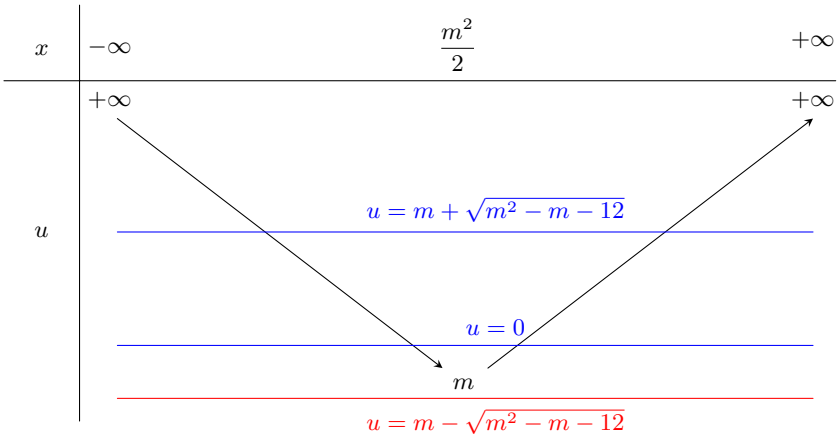
Vậy $m\in(1;5)\setminus\{3\}$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{2;4\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x)=x\left(x^2-2mx+12+m\right)$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(|2x-m^2|+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

(A) 27. (B) 26. (C) 25. (D) 29.

Lời giải.

Xét hàm số $f\left(|2x-m^2|+m\right)=f(u)$. Bảng biến thiên của hàm số $u=|2x-m^2|+m$ như sau



Ta có số điểm cực trị của hàm số u là 1 điểm.
Nhận xét, nếu hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị thì cùng lắm hàm số $f(u)$ có 3 điểm cực trị. Do đó, xét trường hợp $m^2-m-12>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>4\end{array}\right.$ thì hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x=0$, $x=m\pm\sqrt{m^2-m-12}$.
Áp dụng công thức: Số điểm cực trị $f(u)$ bằng tổng số điểm cực trị u và số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l}u=0\\ u=m-\sqrt{m^2-m-12}\\ u=m+\sqrt{m^2-m-12},\end{array}\right.$ suy ra $\begin{cases}m<0\\ m\neq-12\end{cases}$. Kết hợp với điều kiện $\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>4\end{array}\right.$ suy ra

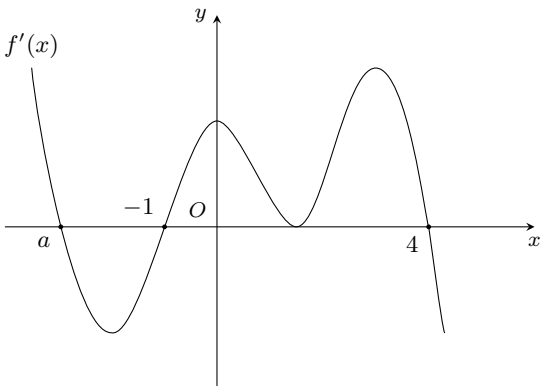
$$\begin{cases}m<-3\\ m\neq 12\end{cases}\text{ và }\begin{cases}m\in[-30;30]\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Do đó, có 26 giá trị nguyên.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6.

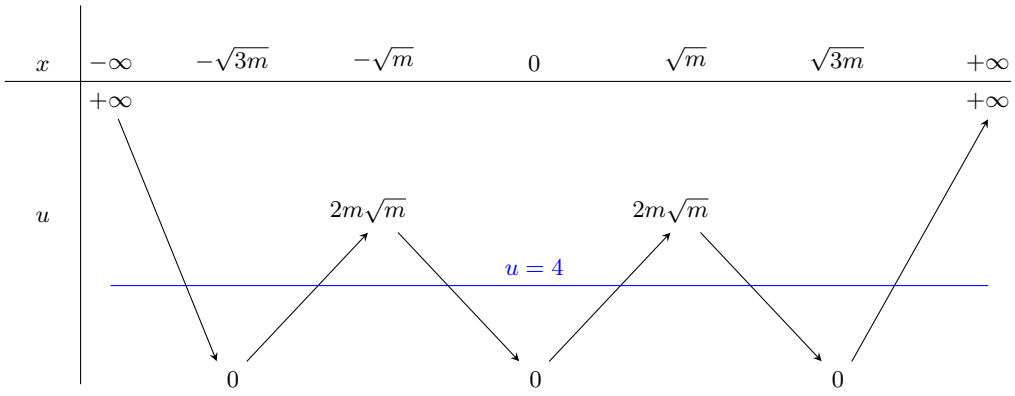
Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f\left(|x^3 - 3m^2x|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?

(A) 29. (B) 23. (C) 21. (D) 22.



Lời giải.

Hàm số đạt cực trị tại $x = a < -1$, $x = -1$, $x = 4$. Xét hàm số $f\left(|x^3 - 3mx|\right) = f(u)$. Bảng biến thiên của hàm số $u = |x^3 - 3mx| \geq 0$, suy ra chỉ có phương trình $u = |x^3 - 3mx| = 4$ cho ta nghiệm bội lẻ.
Nếu $m \leq 0$, suy ra số điểm cực trị của u là 1, suy ra số nghiệm bội lẻ của phương trình $u = 4$ tối đa 2 nghiệm bội lẻ, (không thỏa yêu cầu bài toán).
Khi $m > 0$, số điểm cực trị của u là 5, ta có bảng biến thiên của hàm số $u = |x^3 - 3mx|$ như sau



Áp dụng công thức: Số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ bằng tổng số nghiệm bội lẻ của phương trình $u = 4$ với số điểm cực trị của u. Suy ra, $\begin{cases} m > 0 \\ 2m\sqrt{m} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{4}$, kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-30; 30]. \end{cases}$

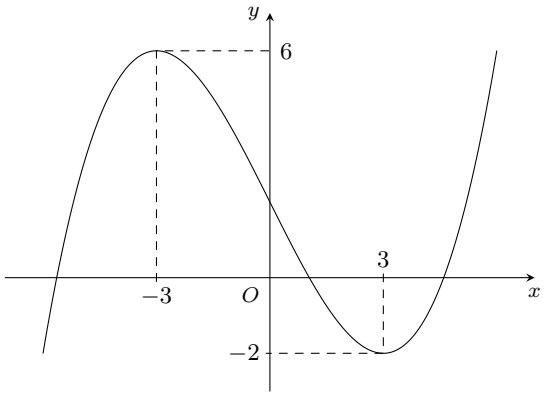
Do đó, có 29 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(|f(x) - m|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?

(A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 0.



Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Ta lại có $g'(x) = f\left(|f(x)-m|\right) = \dfrac{f(x)-m}{|f(x)-m|}\cdot f'(x)\cdot f'\left(|f(x)-m|\right)$. Khi đó,

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f'(x)=0 \\ |f(x)-m|=0 \\ |f(x)-m|=3 \\ |f(x)-m|=-3 \text{ (vô lý)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\pm 3 \\ f(x)=m \quad (1) \\ f(x)=m+3 \quad (2) \\ f(x)=m-3 \quad (3). \end{bmatrix}$$

Để hàm số $g(x)=f\left(|f(x)-m|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị thì các phương trình (1), (2), (3) mỗi phương trình phải có 3 nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{cases} -2<m<6 \\ -2<m+3<6 \\ -2<m-3<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<6 \\ -5<m<3 \\ 1<m<9 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<3.$$

Do m nguyên nên $m=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2(m-4)x-1 & \text{nếu } x\le 1 \text{ hoặc } x\ge 3 \\ 4x^2-2(m-a)x+b & \text{nếu } 1<x<3, \end{cases}$ với a và b là những số thực xác định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

A 2. B 1. C 3. D 4.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=-2m+8,\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=-6m+32.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2a+b-2m+4,\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=6a+b-6m+36.$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1$ và $x=3$, tức là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b-2m+4=-2m+8 \\ 6a+b-6m+36=-6m+32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=4 \\ 6a+b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8. \end{cases}$$

Từ đó, $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2(m-4)x-1 \text{ nếu } x\le 1 \text{ hoặc } x\ge 3 \\ 4x^2-2(m+2)x+8 \text{ nếu } 1<x<3. \end{cases}$
Để hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì hoành độ đỉnh của các parabol phải thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m-4<1 \\ m-4>3 \end{bmatrix} \\ 1<\dfrac{m+2}{4}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} m<5 \\ m>7 \end{bmatrix} \\ 2<m<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2<m<5 \\ 7<m<10. \end{bmatrix}$$

Do m nguyên nên $m\in\{3;4;8;9\}$.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx+n \text{ nếu } x<-1 \\ x^2+nx+m-9 \text{ nếu } x\ge -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

A 6. B 36. C 11. D 5.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x)=\begin{cases} m \text{ nếu } x<-1 \\ 2x+n \text{ nếu } x>-1 \end{cases}$.
Khi đó, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	$-\dfrac{n}{2}$	$+\infty$
y'	m	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$	↗

Hàm số phải liên tục và xác định tại $x=-1$.

Suy ra $\begin{cases} m>0 \\ f(-1)=-m+n=-n+m-8 \\ -\dfrac{n}{2}>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ n=m-4 \\ -\dfrac{n}{2}=-\dfrac{m}{2}+2>-1 \end{cases} \Rightarrow 0<m<6.$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=2x^2-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(|x^2-4x+3|+mx)$ có 9 điểm cực trị?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 31.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Đặt $u=|x^2-4x+3|+mx=\begin{cases} x^2+(m-4)x+3 \text{ nếu } \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right. \\ -x^2+(m+4)x-3 \text{ nếu } 1\le x\le 3 \end{cases}$, $g(x)=f(u)\Rightarrow g'(x)=u'f'(u)$.

Ta thấy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là tổng của số cực trị của hàm u và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

$$u'=(|x^2-4x+3|)'+m,\ u'=0\Leftrightarrow(|x^2-4x+3|)'=-m. \quad (1)$$

Xét hàm số $t=(|x^2-4x+3|)'=\begin{cases} 2x-4 \text{ nếu } \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right. \\ -2x+4 \text{ nếu } 1\le x\le 3 \end{cases}$, $t'=\begin{cases} 2 \text{ nếu } \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right. \\ -2 \text{ nếu } 1\le x\le 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm t:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	$+$	$-$	$+$	
y	$-\infty$ ↗	2 ↘	-2 ↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy số nghiệm tối thiểu của phương trình (1) là 1 và số nghiệm tối đa là 3 nên số điểm cực trị của hàm số u có thể là 1 hoặc 3.

Nếu số điểm cực trị của u là 1 thì số tổng số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ tối đa là 4 $\Rightarrow$ Số cực trị tối đa của hàm số đã cho là 5 (không thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Như vậy, bắt buộc u phải có 3 điểm cực trị. Khi đó phải có: $-2 < m < 2$. (*)

Ta có: $u' = \begin{cases} 2x+m-4 \text{ nếu } \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \\ -2x+m+4 \text{ nếu } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

a) Với $x > 3 \Rightarrow u' = 2x+m-4 > 0$.

b) Với $x < 1 \Rightarrow u' = 2x+m-4 < 0$.

c) Với $1 \leq x \leq 3$. Khi đó $u' = -2x+m+4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{m+4}{2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm u như sau:

x	$-\infty$		1		$\dfrac{m+4}{2}$		3		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\dfrac{m^2+8m+4}{4}$	$\searrow$	$3m$	$\nearrow$	$+\infty$

$u = 1$

$u = \frac{1}{2}$

Số điểm cực trị của u là 3 suy ra số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ là 6.

Từ bảng biến thiên, suy ra: $\begin{cases} \dfrac{1}{2} > m \\ \dfrac{1}{2} > 3m \\ \dfrac{1}{2} < \dfrac{m^2+8m+4}{4} \\ 1 \geq \dfrac{m^2+8m+4}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4+\sqrt{14} < m \leq 0 \\ m < -4-\sqrt{14}. \end{array}\right.$ (**)

Kết hợp (*) và (**) suy ra $4+\sqrt{14} < m \leq 0$.
Vậy có đúng 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hàm số $y = |x-1| + |x+1| + |x-2| - 2x + 1$. Hàm số đạt cực tiểu tại
A $x = 2$. B $x = 1$. C $x = -1$. D $x = 0$.

Lời giải.

Với $x < -1 \Leftrightarrow y = |x-1| + |x+1| + |x-2| - 2x + 1 = 1 - x - x - 1 + 2 - x - 2x + 1 = -5x + 3$.
Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2	$+\infty$
$f(x)$	$-5x+3$		$-3x+5$		$-x+3$		$x-1$	
$f'(x)$	-5		-3		-1		1	
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|-m^2x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Với $x<-1 \Leftrightarrow y=1-x+2-x+3-x+4-x+5-x-m^2x+1=(-5-m^2)x+16$.

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		4		5	$+\infty$
$f(x)$	$(-5-m^2)x+16$		$(-3-m^2)x+14$		$(-1-m^2)x+10$		$(1-m^2)x+4$		$(3-m^2)x-4$		$(5-m^2)x-14$	
$f'(x)$	$-5-m^2$		$-3-m^2$		$-1-m^2$		$1-m^2$		$3-m^2$		$5-m^2$	
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$							

Để hàm số có cực trị thì ít nhất phải có 1 đoạn $f'(x)$ phải đổi dấu từ âm sang dương

$$\Leftrightarrow 5-m^2\geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5}\leq m\leq \sqrt{5}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;\pm 1;2\}$. Thử lại $m=\pm 1$ thì $f(x)$ là hàm hằng (Loại).

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=|x+1|+3|x-2|+5|x-3|+mx$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

(A) 17. (B) 15. (C) 16. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có bảng xét hàm và bảng biến thiên ghép làm một như sau

x	$-\infty$		1		2		3	$+\infty$
$f(x)$	$(-9+m)x+22$		$(-7+m)x+20$		$(-1+m)x+8$		$(9+m)x-22$	
$f'(x)$	$-9+m$		$-7+m$		$-1+m$		$9+m$	
$f'(x)$	$-$		$\neq 0$		$\neq 0$		$+$	

Để hàm số có cực trị thì đạo hàm phải đổi dấu ít nhất một lần. Mà ta lại có:

$$-9+m<-7+m>-1+m<9+m.$$

Suy ra số nhỏ nhất phải âm và số lớn nhất phải dương, đồng thời trên các khoảng $(1;2)$, $(2;3)$ đạo hàm phải khác 0. Tức là

$$\begin{cases} -9+m<0 \\ 9+m>0 \\ -7+m\neq 0 \\ -1+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9<m<9 \\ m\neq 7 \\ m\neq 1. \end{cases}$$

Vậy có tất cả 15 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$ với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. HỎi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?

(A) 1010. (B) 1011. (C) 1009. (D) 2020.

Lời giải.

Dạng bài toán này chúng ta xét một số giá trị cụ thể của số nguyên dương n rồi rút ra quy luật về những giá trị của tham số n để hàm số có cực trị như sau:

Trường hợp 1:
Xét $n=2$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|$.

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$f(x)$	$-2x+3$		1		$2x-3$	
$f'(x)$	-2		0		2	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\longrightarrow$	1	$\nearrow$

Hàm số không có cực trị.

Trường hợp 2:
Xét $n=3$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$.

x	$-\infty$		1		2		3	$+\infty$
$f(x)$	$-3x+6$		$-x+4$		x		$3x-6$	
$f'(x)$	-3		-1		1		3	
$f(x)$		$\searrow$			2	$\nearrow$		

Nhận xét thấy khi n là số nguyên dương lẻ thì hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$ có điểm cực trị. Khi n là số nguyên dương chẵn thì không tồn tại điểm cực trị.
Suy ra $1\leq n\leq 2021$ và n lẻ nên có 1011 giá trị n nguyên dương thỏa mãn.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|+|x+1|$ là
(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.
Những hàm trị tuyệt đối cụ thể luôn được tối ưu bằng bảng xét hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{2}$		3	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$		$x+1$		$x+1$		$x+1$		$x+1$	
$\lvert x^2+2x-3\rvert$	x^2-4x+3		x^2-4x+3		$-x^2+4x-3$		$-x^2+4x-3$		x^2-4x+3	
$f(x)$	x^2-5x+2		x^2-3x+4		$-x^2+5x-2$		$-x^2+5x-2$		x^2-3x+4	
$f'(x)$	$2x-5$		$2x-3$		$-2x+5$		$-2x+5$		$2x-3$	
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	

Suy ra hàm số có một điểm cực tiểu tại $x=1$, $x=3$ và một điểm cực đại tại $x=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=\left|x^2-2mx+1\right|+4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Số phần tử của tập S là

A) 5. B) 4. C) 2. D) 3.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2-2mx+1=0\,(*)$, có $\Delta'=m^2-1$.
Nếu $\Delta'=m^2-1\le 0$ thì hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)^2x+1$ không có điểm cực đại.
Nếu $\Delta'=m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1=m-\sqrt{m^2-1}\text{ và }x_2=m+\sqrt{m^2-1}$$

Với $x\le x_1$ hoặc $x\ge x_2$ thì $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$ không có điểm cực đại.
Với $x_1<x<x_2$ thì $y=-x^2+2mx-1+4x=-x^2+2(m+2)x-1$.
Hàm số này đạt cực đại tại $x=m+2$ và giá trị cực đại là $y_{\text{CD}}=m^2+4m+3$.
Vậy điều kiện để hàm số có cực đại là

$$\begin{cases}x_1<x=m+2<x_2\\ 3<m^2+4m+3<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-\sqrt{m^2-1}<m+2<m+\sqrt{m^2-1}\\ 0<m^2+4m<1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{m^2-1}>2\\ m^2+4m-1<0\\ m^2+4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{5}\\ m>\sqrt{5}\end{array}\right.\\ -2-\sqrt{5}<m<-2+\sqrt{5}\\ \left[\begin{array}{l}m<-4\\ m>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -2-\sqrt{5}<m<-4.$$

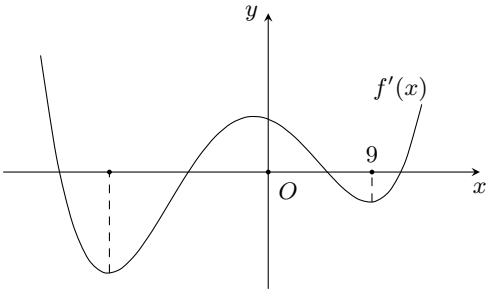
Do $10m$ là số nguyên nên có hai giá trị thỏa mãn là $m=-\dfrac{42}{10}$ và $m=-\dfrac{41}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(6|x|-x^2\right)$ có số điểm cực trị là

A) 9. B) 7. C) 13. D) 11.

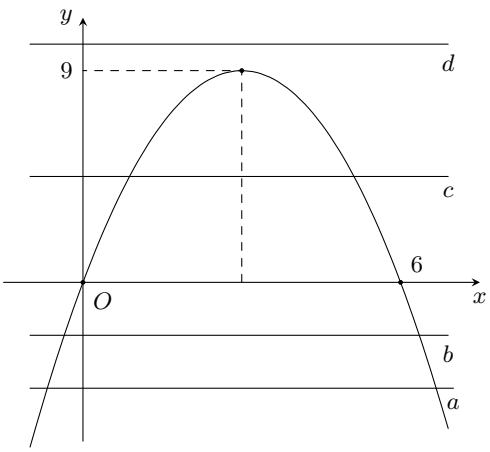


Lời giải.

Từ đồ thị $f'(x)$, ta suy ra hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị.
Đặt $g(x)=f\left(6x-x^2\right)$. Ta suy ra $y=g\left(|x|\right)$. Do đó số điểm cực trị của hàm $y=g\left(|x|\right)$ bằng 2 lần số điểm cực trị dương của hàm số $g(x)$ cộng thêm 1.
Ta có $g'(x)=(6-2x)f'\left(6x-x^2\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\6x-x^2=a<0\\6x-x^2=b<0\\6x-x^2=c\,(0<c<9)\\6x-x^2=d>9.\end{array}\right.$$

Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả là 5 nghiệm dương phân biệt.
Suy ra số điểm cực trị của $g(x)$ là 5. Do đó số điểm cực trị của $y=g\left(|x|\right)$ là 11.

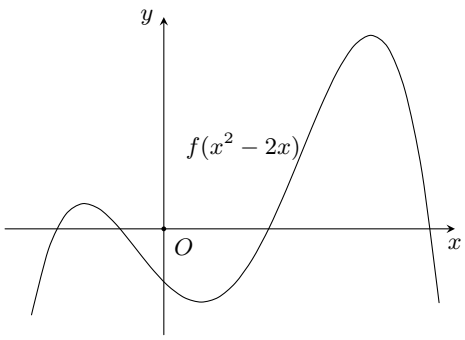


Chọn đáp án (D) □

Câu 18.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2mx-|x-m|+m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 7. (B) 3. (C) 5. (D) 9.



Lời giải.

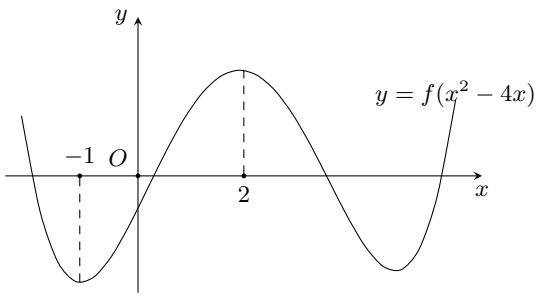
Ta có $y=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$.
Đặt $g(x)=f(x^2-x)$. Suy ra $g(|x|)=f\left(x^2-|x|\right)$. Suy ra $g\left(|x-m|\right)=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$.
Ta biết số điểm cực trị của hàm số $g\left(|x|\right)$ và $g\left(|x-m|\right)$ là như nhau.
Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.
Suy ra hàm $g\left(|x-m|\right)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x^2-4x)$ được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-8|x|+12\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3. (B) 5. (C) 9. (D) 7.



Lời giải.

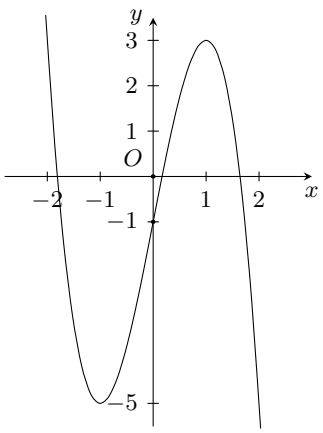
Ta có $y=f\left(x^2-8|x|+12\right)=f\left(x^2-4|x|+4-4|x|+8\right)=f\left((|x|-2)^2-4(|x|-2)\right)=g(|x|-2)$.
Ta thấy hàm số $y=g(x)$ có các điểm cực trị $x=-1, x=2, x=c>2$.
Suy ra hàm số $y=g(x-2)$ có các điểm cực trị là $x=1, x=4, x=c+2$ (3 điểm cực trị dương).
Vậy hàm số $y=g(|x|-2)=f\left(x^2-8|x|+12\right)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f\left(|x| + |x-1|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.



Lời giải.

Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại 3 điểm là $x = a < 0, x = b \in (0;1), x = c > 1$.
Xét hàm số $f(u) = f\left(|x| + |x-1|\right)$ với $u = |x| + |x-1|$.
Ta có bảng khảo sát hàm số $u = |x| + |x-1|$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$		0	x		x	
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$			$-x+1$	0	$x-1$	
u	$-2x+1$			1		$2x-1$	
u'	-2			0		2	
u'	$-$			0		$+$	
u	$\searrow$		1	$\longrightarrow$	1	$\nearrow$	

Ta có $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$ nên số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ bằng số điểm cực trị của u cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(u) = 0$ hay $u = a, u = b, u = c$.
Hàm u không có điểm cực trị, $u = a$ vô nghiệm; $u = b$ vô nghiệm; $u = c$ có 2 nghiệm.
Vậy $f(u)$ có 2 điểm cực trị.
Chọn đáp án (B) □

CHỦ ĐỀ 5. CỰC TRỊ TẠI MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC

A LÝ THUYẾT

Định lí 1.

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại $x = a$.
Các đạo hàm $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$ thì:

- ☑ Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại a.
- ☑ Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại a.
- ☑ Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại a.
- ☑ Đặc biệt, khi $n = 2$ thì có định lý trong SGK Toán 12.

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$+\infty$
							$y = 0$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 + (m+4)x^2 + (5m+2)x + m + 6$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ là

(A) $\varnothing$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\{2\}$. (D) $\{-2\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 2(m+4)x + 5m + 2$; $y'' = 6x + 2(m+4)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4(m+4) + 5m + 2 = 0 \\ -12 + 2m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m > 2. \end{cases}$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$

(A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = -2$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m, y'' = 6x - 6$.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$ nên $y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$ ta có $y''(0) < 0$. Suy ra $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m-1)x^2 + m^2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

(A) $\{5; 1\}$. (B) $\{5\}$. (C) $\varnothing$. (D) $\{1\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 2(3m-1)x + m^2; y'' = 6x + 2(3m-1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ nên $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \\ m = 5. \end{cases}$

☑ Với $m = 1$, ta được $\begin{cases} y'' = 6x + 4 \\ y''(-1) = -2 < 0 \end{cases}$. Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

☑ Với $m = 5$, ta được $\begin{cases} y'' = 6x + 28 \\ y''(-1) = 22 > 0 \end{cases}$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$?

A $m = 2$ hoặc $m = -1$. B $m = 2$ hoặc $m = 1$. C $m = 1$. D $m = 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$, $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ nên $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2. \end{cases}$

☑ Với $m = 1$, ta được $y' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số không có cực trị.

☑ Với $m = 2$, ta được $\begin{cases} y'' = 2x - 4 \\ y''(1) = -2 < 0 \end{cases}$. Suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 26. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A Không tồn tại m. B $m = \pm 1$. C $m = 1$. D $m \in \{1; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4mx + m$; $y'' = 6x - 4m$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-4	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = |f(|x|)|$ có bao nhiêu cực trị?

A 3. B 1. C 7. D 5.

Lời giải.

Hàm số $y = f(|x|)$ trên $\mathbb{R}$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng và gồm hai phần, phần 1 trùng với phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ứng với $x \geq 0$; phần 2 lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$

x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		0		x_3		2		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$.

A $m = 0$. B $m = -1$. C $m = 1$. D $-1 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4mx^3 + m^2 - 1$. Hàm số đạt cực trị tại $x = 0 \Leftrightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

- Với $m = 1$, ta được $y = x^4 + 1$, $y' = 4x^3$. Khảo sát hàm số ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ nên không thỏa.
- Với $m = -1$, ta được $y = -x^4 + 1$, $y' = -4x^3$. Khảo sát hàm số ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ nên $m = -1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng?

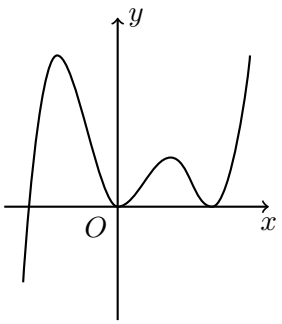
A -2. B -1. C 2. D 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực đại của hàm số bằng 3 tại $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 30.
Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là



(A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.
Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \hoac{x=x_1\\x=0\\x=x_2.}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$	m	$\nearrow$		$\nearrow$	n	$\nearrow$	

Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là

(A) $\{1\}$. (B) $\{-1\}$. (C) $\varnothing$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.
Ta có $y'=3x^2-6mx+m+2$ và $y''=6x-6m$.
Hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$\heva{y'(1)=0\\y''(1)>0} \Leftrightarrow \heva{3-6m+m+2=0\\6-6m>0} \Leftrightarrow \heva{m=1\\m<1.}$$

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$

(A) $m=1, m=5$. (B) $m=5$. (C) $m=1$. (D) $m=-1$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-4$ và $y''=2x-2m$.
Hàm số đạt cực đại tại $x=3$ nên $y'(3)=0 \Leftrightarrow m^2-6m+5=0 \Leftrightarrow \hoac{m=1\\m=5.}$

Thử lại

- ☑ Với $m=1$ thì $y''(3)=4>0$, suy ra $x=3$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- ☑ Với $m=5$ thì $y''(3)=-4<0$, suy ra $x=3$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.
Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Tìm m hàm số $y=x^3+mx^2-3(m+1)x+2m$ đạt cực trị tại điểm $x=-1$

(A) $m=-1$. (B) $m=2$. (C) $m=0$. (D) $m=1$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+2mx-3(m+1)$. Hàm số đã cho đạt cực trị tại $x=-1$ khi $y'(-1)=0\Leftrightarrow m=0$.
Thử lại $m=0$ ta được $y=x^3-3x$, bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Tìm m để hàm số $y=mx^3-\left(m^2+1\right)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

(A) $\frac{3}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) 0. (D) -1.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có $y'=3mx^2-2\left(m^2+1\right)x+2$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ nên $y'(1)=0\Leftrightarrow -2m^2+3m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{3}{2}. \end{array}\right.$
Thử lại

- ☑ Với $m=0$ thì $y'=-2x+2$, hàm số đạt cực đại tại $x=1$.
- ☑ Với $m=\frac{3}{2}$ thì $y'=\frac{9}{2}x^2-\frac{13}{2}x+2$, hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{4}{9}$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Vậy $m=\frac{3}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=(m-1)x^4-\left(m^2-2\right)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

(A) $m=0$. (B) $m=-2$. (C) $m=1$. (D) $m=2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=4(m-1)x^3-2\left(m^2-2\right)x$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ nên

$$f'(-1)=0\Leftrightarrow -4(m-1)+2\left(m^2-2\right)=0\Leftrightarrow 2m^2-4m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2. \end{array}\right.$$

Thử lại

- ☑ Với $m=0$ hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$, hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.
- ☑ Với $m=2$ hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.
Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^9+(m-2)x^7-(m^2-4)x^6+7$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

(A) 3. (B) 4. (C) Vô số. (D) 5.

Lời giải.

Ta có

$$y'=9x^8+7(m-2)x^6-6\left(m^2-4\right)x^5\Rightarrow y'(0)=0,\forall m\in\mathbb{R}$$

.

$$y''=9\cdot 8x^7+7\cdot 6(m-2)x^5-6\cdot 5\left(m^2-4\right)x^4\Rightarrow y''(0)=0,\forall m\in\mathbb{R}$$

Ta nhận thấy $y'''(0)=y^{(4)}(0)=y^{(5)}(0)=0,\forall m\in\mathbb{R}$.
Mặt khác, ta có

$$y^{(6)}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3+7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2(m-2)x-6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\left(m^2-4\right)\Rightarrow y^{(6)}(0)=-6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\left(m^2-4\right)$$

.

☑ Trường hợp 1: $y^{(6)}(0)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2.\end{array}\right.$

+ Với $m=2$ thì $y'=9x^8\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số không đạt cực trị tại $x=0$.
+ Với $m=-2$ thì $y'=x^6\left(9x^2-28\right)$ không đổi dấu khi qua $x=0$, hàm số không đạt cực trị tại $x=0$.

☑ Trường hợp 2: $y^{(6)}(0)\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 2$. Khi đó để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì

$$y^{(6)}(0)>0\Leftrightarrow -6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\left(m^2-4\right)>0\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2\Rightarrow m\in\{-1;0;1\}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m.
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{x^5}{5}-(2m-1)x^4-\dfrac{m}{3}x^3+2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $y'=x^4-4(2m-1)x^3-mx^2=x^2\left[x^2-4(2m-1)x-m\right]$.
Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của đạo hàm y'. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$.
Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x)=x^2-4(2m-1)x-m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0)=0\Leftrightarrow m=0$.
Thử lại, với $m=0$ thì $g(x)=x^2+4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.
Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$ là

(A) 5. (B) 3. (C) 7. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có

$$g'(x)=x\left(2-\frac{1}{|x|}\right)f'\left(x^2-|x|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-|x|=-1\\x^2-|x|=1\\x=0\\2-\dfrac{1}{|x|}=0.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\x=\pm\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

$g'(x)$ không xác định tại $x=0$.
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\dfrac{m-1}{5}x^5+\dfrac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?
(A) 110. (B) 2016. (C) 100. (D) 10.

Lời giải.
Ta có $y'=(m-1)x^4+(m+2)x^3$.

- Nếu $m=1$ thì $y=\dfrac{3}{4}x^4+6\Rightarrow y'=3x^3$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
- Nếu $m\neq 1$ thì ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=-\dfrac{m+2}{m-1}.\end{array}\right.$
  Nhận thấy nếu $x_2=x_1=0$ thì $m=-2\Rightarrow y'=-3x^4\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$, hàm số không có cực trị.
  Vì vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1>0\\x_1<x_2\end{cases}\\\begin{cases}m-1<0\\x_1>x_2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>1\\-2<m<1\end{cases}\\\begin{cases}m<1\\\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m<-2.$

Vậy số giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ là 2016.
Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5+\left(m^2-4\right)x^4+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.
(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) Vô số.

Lời giải.
Ta có $y'(0)=y''(0)=y^{(3)}(0)=0$, $y^{(4)}(0)=-4!\left(m^2-4\right)$.

- Nếu $y^{(4)}(0)>0\Leftrightarrow 4-m^2>0\Leftrightarrow -2<m<2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
- Nếu $y^{(4)}(0)<0$, hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
- Nếu $y^{(4)}(0)=0\Leftrightarrow m=\pm 2$. Kiểm tra trực tiếp với $m=2$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. Với $m=-2$ thì hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy có 4 số nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{2018} + (m-5)x^5 + \left(25 - m^2\right)x^4 + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
A 4. B 5. C 9. D 10.

Lời giải.
Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0, \forall m; y^{(4)}(0) = 4!\left(25 - m^2\right)$.

- Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow 25 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -5 < m < 5$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- Nếu $y^{(4)}(0) < 0$, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow 25 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 5$.
  + Với $m = -5 \Rightarrow y' = 2018x^{2017} - 50x^4 = x^4\left(2018x^3 - 50\right)$ không đổi dấu khi đi qua $x = 0$.
  + Với $m = 5 \Rightarrow y' = 2018x^{2017}$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 0$.

Vậy $-5 < m \leq 5 \Rightarrow m \in \{-4, \cdots, 5\}$. Có 10 số nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 42. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn $a, b \in (-20, 20)$ để hàm số $y = x^8 + ax^7 + bx^6 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?
A 722. B 742. C 703. D 685.

Lời giải.
Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0, \forall a, b$; $y^{(6)} = 6!b$.

- Nếu $y^{(6)}(0) > 0$ thì $b > 0$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Nên trường hợp này $a \in \{-19, \ldots, 19\}$ có 39 cách chọn, $b \in \{1, \ldots, 19\}$ có 19 cách chọn. Vậy có $39 \cdot 19 = 741$ cặp.
- Nếu $y^{(6)}(0) < 0$ thì $b < 0$, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ (loại).
- Nếu $y^{(6)}(0) = 0$ thì $b = 0$. Khi đó $y' = 8x^7 + 7ax^6 = x^6(8x + 7a)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ nên $a = 0$. Vậy trường hợp này có duy nhất 1 cặp $(a; b) = (0; 0)$.

Vậy có tất cả 742 cặp số nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Có bao nhiêu nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?
A 7. B Vô số. C 6. D 4.

Lời giải.
Ta có $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -4!\left(m^2 - 9\right)$.

- Nếu $f^{(4)}(0) = -4!\left(m^2 - 9\right) > 0$ thì $-3 < m < 3$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ (thỏa mãn).
- Nếu $f^{(4)}(0) < 0$ thì $-4!\left(m^2 - 9\right) < 0 \Leftrightarrow m > 3 \vee m < -3$, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ (loại).
- Nếu $f^{(4)}(0) = 0$ thì $-4!\left(m^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -3$.
  + Với $m = 3 \Rightarrow f'(x) = 8x^7$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ (thỏa mãn).
  + Với $m = -3 \Rightarrow f'(x) = 8x^7 - 30x^4 = 2x^4\left(4x^3 - 15\right)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0$ (loại).

Vậy $-3 < m \leq 3$ nên $m \in \{-2, \ldots, 3\}$. Có 6 số nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^6 - mx^5 + \left(10m - m^2\right)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?
A 9. B 10. C 11. D 8.

Lời giải.
Ta có $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \forall m$; $y^{(4)}(0) = 4!\left(10m - m^2\right)$.

☑ Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow 4!\left(10m - m^2\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 10$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

☑ Nếu $y^{(4)}(0) < 0 \Leftrightarrow 4!\left(10m - m^2\right) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (10; +\infty)$, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ (loại).

☑ Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow 4!\left(10m - m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 10. \end{array}\right.$

+ Với $m = 0 \Rightarrow y' = 6x^5$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ (thỏa mãn).
+ Với $m = 10 \Rightarrow y' = 6x^5 - 50x^4 = 2x^4(3x - 25)$. Ta có đạo hàm không đổi khi qua $x = 0$ (loại).

Vậy có 10 giá trị m nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^6 + (m-1)x^4 + \left(m^2 - 4\right)x^3 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?
A 4. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.
Ta có $y'(0) = y''(0) = 0, \forall m$; $y''' = 3!\left(m^2 - 4\right)$.

☑ Nếu $y'''(0) \neq 0 \Leftrightarrow 3!\left(m^2 - 4\right) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Hàm số không đạt đạt cực trị tại điểm $x = 0$ (loại).

☑ Nếu $y'''(0) = 0 \Leftrightarrow 3!\left(m^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

+ Với $m = -2 \Rightarrow y' = 6x^5 - 12x^3 = 6x^3\left(x^2 - 2\right)$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 0$ (loại).
+ Với $m = 2 \Rightarrow y' = 6x^5 + 4x^3 = 2x^3\left(3x^2 + 2\right)$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 2$ thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - \left(m^2 - 16\right)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?
A 7. B Vô số. C 6. D 8.

Lời giải.
Ta có $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \forall m$; $y^{(4)}(0) = -4!\left(m^2 - 16\right)$.

☑ Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow -4!\left(m^2 - 16\right) > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

☑ Nếu $y^{(4)}(0) < 0 \Leftrightarrow -4!\left(m^2 - 16\right) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ (loại).

☑ Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow -4!\left(m^2 - 16\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = 4. \end{array}\right.$

+ Với $m = 4 \Rightarrow y' = 8x^7$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ (thỏa mãn).
+ Với $m = -4 \Rightarrow y' = 8x^7 - 40x^4 = 8x^4\left(x^3 - 5\right)$. Ta có đạo hàm không đổi khi qua $x = 0$ (loại).

Vậy $m \in \{-3; -2; \ldots; 4\}$ hay có 8 giá trị m nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h > 0$. Đặt $g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - \left(m^4 - 29m^2 + 100\right)\sin^2 x - 1$, m là tham số nguyên và $m < 27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.
A 108. B 58. C 100. D 50.

Lời giải.

Chú ý: Định nghĩa đạo hàm tại điểm x_0
$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \forall x\in\mathbb{R}, \forall h>0, |f(x+h)-f(x-h)|\le h^2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\right|\le h.$
Do đó $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}=0$
Suy ra $f'(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Nên $g(x)=x^{2019}+x^{29-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin^2 x-1$. Khi đó

$$\begin{cases} g'(x)=2019x^{2018}+(29-m)x^{28-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin 2x \\ g''(x)=2019.2018x^{2017}+(29-m)(28-m)x^{27-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\cdot 2\cos 2x. \end{cases}$$

Có $g'(0)=0$, $g''(0)=-2\left(m^4-29m^2+100\right)$.

- Trường hợp 1: $g''(0)<0\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.
- Trường hợp 2: $g''(0)>0\Leftrightarrow m^4-29m^2+100<0\Leftrightarrow 4<m^2<25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<m<5 \\ -5<m<-2. \end{array}\right.$
  Khi đó hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.
- Trường hợp 3: $g''(0)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 5 \\ m=\pm 2 \end{array}\right.$. Thay lại ta có với $m=\pm 5$, $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=0$. Khi đó hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $S=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng 100.
Chọn đáp án C □

Câu 48. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^9+(m-2)x^7-\left(m^2-4\right)x^6+7$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$?
A 3. B Vô số. C 4. D 5.

Lời giải.
Ta có $y'=9x^8+7(m-2)x^6-6\left(m^2-4\right)x^5, y'(0)=y''(0)=...=y^{(5)}(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}, y^{(6)}(0)=-6!\left(m^2-4\right)$.

- Trường hợp 1: $y^{(6)}(0)<0\Rightarrow y$ đạt cực đại tại $x=0$.
- Trường hợp 2: $y^{(6)}(0)>0\Leftrightarrow -2<m<2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. Do đó $m=0$, $m=\pm 1$ thỏa ycbt.
- Trường hợp 3: $y^{(6)}(0)=0\Leftrightarrow m=\pm 2$. Thay $m=\pm 2$ vào y', ta thấy y' không đổi dấu khi đi qua $x=0$. Do đó y không đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa ycbt.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $y=x^5-mx^4+\left(m^3-3m^2-4m+12\right)x^3+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$?
A 1. B 3. C 2. D 4.

Lời giải.
Ta có $y'=5x^4-4mx^3+3\left(m^3-3m^2-4m+12\right)x^2, y'(0)=y''(0)=0, \forall m$ và $y^{(3)}(0)=6\left(m^3-3m^2-4m+12\right)$.

- Trường hợp 1: $y^{(3)}(0)\neq 0$ thì hàm số đã cho không đạt cực trị tại $x=0$.
- Trường hợp 2: $y^{(3)}(0)=0\Leftrightarrow m\in\{-2;2;3\}$.
  + Với $m=-2$ thì $y'=5x^4+8x^3=x^3(5x+8)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
  + Với $m=2$ thì $y'=5x^4-8x^3=x^3(5x-8)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
  + Với $m=3$ thì $y'=5x^4-12x^3=x^3(5x-12)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.
Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

21. A	22. A	23. D	24. B	25. D	26. C	27. C	28. B	29. D	30. C
31. C	32. B	33. C	34. A	35. D	36. A	37. B	38. A	39. B	40. C
41. D	42. B	43. C	44. B	45. B	46. D	47. C	48. A	49. C	

ĐỀ VDC SỐ 1: CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 1. Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$

(A) $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$. (B) $m\in(3;4)$. (C) $m\in(1;3)$. (D) $m\in(-1;4)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$. Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2-m.\end{array}\right.$

Hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2-m\neq -1\Leftrightarrow m\neq 3$.

Hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$ khi và chỉ khi

$$\left\{\begin{array}{l}-2<-1<3\\-2<2-m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow -1<m<4.$$

Kết hợp điều kiện $m\neq 3$, ta được $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Với m là một tham số thực sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m\geq 2$. (B) $0\leq m<2$. (C) $-2\leq m<0$. (D) $m<-2$.

Lời giải.

Cách 1.

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông khi và chỉ khi $b^3=-8a$. Áp dụng vào bài toán ta có $(2m)^3=-8\Leftrightarrow m^3=-1\Leftrightarrow m=-1$.

Cách 2.

Ta có $y'=4x^3+4mx$. Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+m=0.\qquad(1)\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị Khi và chỉ khi phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, nghĩa là $m<0$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\x=\pm\sqrt{-m}\Rightarrow y=1-m^2.\end{array}\right.$

Gọi $A(0;1)$, $B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$ và $C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$ lần lượt ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Theo tính chất của hàm số đã cho thì tam giác ABC luôn cân tại A, vậy tam giác ABC chỉ có thể vuông tại A. Ta có $\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{-m};m^2\right)$, $\overrightarrow{CA}=\left(-\sqrt{-m};m^2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow m+m^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1.\end{array}\right.$

So với điều kiện ta nhận $m=-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị.

(A) $0<m<2$. (B) $m>2$. (C) $m>0$. (D) $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $y'=-x^2+2mx-2m$.

Hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\Delta'=m^2-2m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)\left(x^2-1\right)^3(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 5.

Lời giải.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-1\right)^3(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-1)^3(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

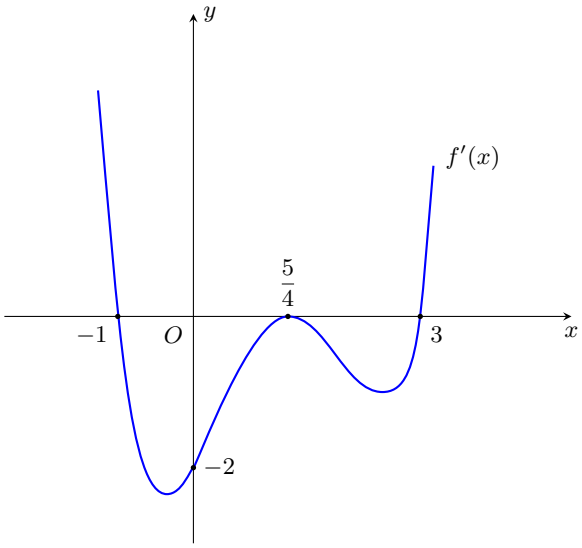
x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗		↗	$+\infty$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Lưu ý: có thể dùng tính chất nghiệm bội chẵn, nghiệm bội lẻ để giải bài toán nhanh hơn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là



(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3. \end{array}\right.$

Khi đi qua điểm $x=-1$, $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" nên $x=-1$ là điểm cực đại của $f(x)$.

Khi đi qua điểm $x=\dfrac{5}{4}$, $f'(x)$ không đổi dấu nên $x=\dfrac{5}{4}$ không là điểm cực trị của $f(x)$.

Khi đi qua điểm $x=3$, $f'(x)$ đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" nên $x=3$ là điểm cực tiểu của $f(x)$.
Do đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là 2.
Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+(m-2019)\,x^2+2018$ có ba điểm cực trị là
(A) $m<2019$. (B) $m\le 2019$. (C) $m<2018$. (D) $m\le 1009$.

Lời giải.

Cách 1.

Ta có $y'=4x^3+2\,(m-2019)\,x=2x\left(2x^2+m-2019\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=\dfrac{2019-m}{2}.\end{array}\right.\quad(*)$

Hàm số đã cho có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT có 2 nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow m<2019$.

Cách 2.

Sử dụng công thức tính nhanh hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow a\cdot b<0$.
Do đó hàm số $y=x^4+(m-2019)\,x^2+2018$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 1\cdot(m-2019)<0\Leftrightarrow m<2019$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+\left(m^2-4\right)x^2+1-m$ có một điểm cực trị
(A) $(-2;2)$. (B) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. (C) $[-2;2]$. (D) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3+2\left(m^2-4\right)x=2x\left(x^2+m^2-4\right)$.
Hàm số đã cho là hàm số trùng phương nên có đúng một cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có một nghiệm.
Hay $2x\left(x^2+m^2-4\right)=0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow m^2-4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -2\\ m\ge 2.\end{array}\right.$

Nhận xét.

- Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases}ab\ge 0\\ a^2+b^2>0.\end{cases}$
- Hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $ab\ge 0$.
- Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab<0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị là
(A) $m>0$. (B) $m\ge 0$. (C) $m<0$. (D) $m\le 0$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$; ta có $y'=4a^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$. Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m.\end{array}\right.\quad(*)$

Hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow m>0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=mx^4-(m-3)\,x^2+m^2$ không có điểm cực đại là
(A) 2. (B) Vô số. (C) 0. (D) 4.

Lời giải.

Trường hợp 1: Với $m=0$ thì $y=3x^2$. Hàm số không có điểm cực đại. Vậy $m=0$.
Trường hợp 2: Với $m\ne 0$. Hàm số là hàm bậc bốn trùng phương.
Ta có $y'=4mx^3-2\,(m-3)\,x=2x\left(2mx^2-m+3\right)$.
Hàm số không có điểm cực đại $\Leftrightarrow m>0$ và $y'=0$ có một nghiệm $\Leftrightarrow 2mx^2-m+3=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0\Leftrightarrow\dfrac{m-3}{2m}\le 0\Leftrightarrow 0<m\le 3$.

Vì m nguyên nên $m \in \{1;2;3\}$.
Vậy có 4 giá trị nguyên.
Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - \left(m^2 - 2019m\right)x^2 - 1$ có đúng một điểm cực trị.

(A) 2019. (B) 2020. (C) 2018. (D) 2017.

Lời giải.

Trường hợp 1: Với $m = 0$ thì $y = 1$, đồ thị hàm số không có cực trị.
Trường hợp 2: Với $m \neq 0$.
Đồ thị hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow m^2\left(-m^2 + 2019m\right) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2019$.
Do m nguyên nên có 2018 giá trị của m.
Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x$ trên $[0;2\pi]$.

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y' = \cos x + 2\sin x \cdot \cos x$.

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(1 + 2\sin x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \dfrac{-1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

Trên $[0;2\pi]$, phương trình $y' = 0$ có 4 nghiệm đơn $x = \dfrac{\pi}{2}$; $x = \dfrac{3\pi}{2}$; $x = \dfrac{11\pi}{6}$; $x = \dfrac{7\pi}{6}$.
Suy ra trên $[0;2\pi]$, hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.
Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị.

(A) $m \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$. (B) $m \in (-6;0)$.
(C) $m \in [-6;0)$. (D) $m \in [-6;0]$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3mx^2 - 4mx + m - 2$.

- Nếu $m = 0$ thì $y' = -2$ nên hàm số không có cực trị.
- Nếu $m \neq 0$ thì $y' = 3mx^2 - 4mx + m - 2$ là tam thức bậc hai.
  Xét phương trình $y' = 0$.
  Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta = (2m)^2 - 3m(m-2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-6;0)$.

Kết hợp các trường hợp ta có $m \in [-6;0]$ thì hàm số không có cực trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

(A) $-3 < m < 1$. (B) $-\dfrac{7}{2} < m < -3$. (C) $\left[\begin{array}{l}m < -3\\ m > 1\end{array}\right.$. (D) $-\dfrac{7}{2} < m < -2$.

Lời giải.

Ta có $y' = f(x) = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$.
Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ a \cdot f(-1) > 0\\ \dfrac{S}{2} > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 + 2m - 3 > 0\\ 1 - 2(m+3) + 4(m+2) > 0\\ \dfrac{-2(m+3)}{2} > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m < -3\\ m > 1\end{array}\right.\\ m > \dfrac{-7}{2}\\ m < -3\end{cases} \Leftrightarrow \frac{-7}{2} < m < 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2-1)x + m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là (a, b). Khi đó giá trị của $a + 2b$ bằng

(A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) 1. (D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m^2-1)$. Xét $3x^2 + 6mx + 3(m^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m-1 \\ x = -m+1 \end{array}\right.$.

Hai nghiệm trên phân biệt với mọi m.

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -2x + m$.

Vậy nên các giá trị cực trị $y(-m-1) = 3m+2, y(-m+1) = 3m-2$.

Theo yêu cầu bài toán ta phải có $(3m+2)(3m-2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$.

Vậy $a + 2b = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.

(A) $m \in (2; +\infty)$. (B) $m \in (-2; 2)$. (C) $m \in (-\infty; 2)$. (D) $m \in (0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 4x(x^2 + m - 2)$, xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m.0 \end{array}\right.$ (1)

Đồ thị hàm số y có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

(A) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. (B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (C) $2 + \sqrt{5}$. (D) $-1 + \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $y = x^4 - 2mx^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1)$, $B\left(-\sqrt{m}; -m^2+1\right)$, $C\left(\sqrt{m}; -m^2+1\right)$.

Suy ra $\begin{cases} BC = 2\sqrt{m} \\ AB = AC = \sqrt{m + m^4} \end{cases}$

Độ dài đường cao AH của ΔABC là

$$AH = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} \Leftrightarrow AH = \sqrt{m + m^4 - m} = m^2$$

Diện tích ΔABC là

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot 2\sqrt{m} = m^2\sqrt{m} \quad (*)$$

Mặt khác

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} = \frac{(m+m^4) \cdot 2\sqrt{m}}{4R} = \frac{(m+m^4) \cdot 2\sqrt{m}}{4 \cdot 1} = \frac{(m+m^4) \cdot \sqrt{m}}{2} \quad (**)$$

Từ $(*), (**)$, suy ra

$$\frac{(m+m^4) \cdot \sqrt{m}}{2} = m^2\sqrt{m} \Leftrightarrow 1 + m^3 = 2m$$

$$\Leftrightarrow \quad m^3-2m+1=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m=1\,(\text{tn}) \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,(\text{tn}) \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,(\text{ktn}) \end{array}\right.$$

Tổng lập phương các giá trị của tham số m là $1^3+\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=-1+\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y=x^4-2kx^2+k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A $k=-1;\ k=\dfrac{1}{2}$. B $k=1;\ k=\dfrac{1}{3}$. C $k=1;\ k=\dfrac{1}{2}$. D $k=\dfrac{1}{3};\ k=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4kx$, xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=k. \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow k>0$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;k)$, $B\left(-\sqrt{k};-k^2+k\right)$, $C\left(\sqrt{k};-k^2+k\right)$.

Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là

$$\left\{\begin{array}{l} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0=\dfrac{-\sqrt{k}+\sqrt{k}}{3}\ (\text{luôn đúng}) \\ \dfrac{1}{3}=\dfrac{k-k^2+k-k^2+k}{3} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \quad 1=-2k^2+3k$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y=x^4-2(m^2-m+1)x^2+m-1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng các giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A $m\geq 1$. B $m\leq 1$. C $m=1$. D $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4(m^2-m+1)x=4x\left[x^2-(m^2-m+1)\right]$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2-m+1. \end{array}\right.$

Do hệ số $a>0$ nên đồ thị của hai điểm cực tiểu là

$$A\left(-\sqrt{m^2-m+1};y_{CT}\right),\ B\left(\sqrt{m^2-m+1};y_{CT}\right)$$

Khi đó

$$AB^2=4(m^2-m+1)=4\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\geq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

(A) 5. (B) 2. (C) 11. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, khi đó $y = \dfrac{x}{3}y' - 2x + m$.

Suy ra, phương trình đi qua 2 điểm cực trị là $(d)\colon y = -2x + m$.

Mặt khác

$$d_{(O,d)} = \frac{|m|}{\sqrt{2^2+1}} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow |m| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le m \le 5.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số$y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

(A) $m > 2$. (B) $m \in \left(2; \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. (C) $\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < -1$. (D) $m < -1$.

Cách 1.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0$. (1)

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Hay

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2. \end{array}\right. \quad (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là $y = \left(-\dfrac{2}{3}m^2 + \dfrac{2}{3}m + \dfrac{4}{3}\right)x + \dfrac{1}{3}m(m+2)$.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1 + y_2 > 0$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2m$

Nên

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 > 0 &\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(x_1 + x_2) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right))(2m) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0 \\ &\Leftrightarrow \Leftrightarrow 2m(-2m^2 + 3m + 6) > 0 \\ &\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right). \quad (**) \end{aligned}$$

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $y = 0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0$ (2) có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có $\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0. \end{array}\right.$ (3)

Phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là

$$\Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}. \quad (***)$$

Kết hợp $(*), (**), (***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (1)

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2. \end{array}\right. \quad (*)$$

Hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0$ (2) có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có $\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0. \end{array}\right. \quad (3)$

Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện

$$\Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}. \quad (**)$$

Giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương

$$y' = x^2 - 2mx + m + 2, y'' = 2x - 2m \; y'' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = m.$$

Ta có

$$\begin{aligned} y(m) > 0 &\Leftrightarrow \frac{m^3}{3} - m^3 + m(m+2) > 0 \\ &\Leftrightarrow m\left(-2m^2 + 3m + 6\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3 + \sqrt{57}}{4}\right). \quad (***) \end{aligned}$$

Kết hợp $(*), (**), (***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \dfrac{2 + 2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m}. \end{array}\right.$

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là

$$A(0; 3m - 2),\ B(\sqrt{m}; -m^2 + 3m - 2),\ C(-\sqrt{m}; -m^2 + 3m - 2).$$

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy khi các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2. \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Biết $m = m_0$; $m_0 \in \mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m_0 \in (0; 3]$. (B) $m_0 \in [-5; 3)$. (C) $m_0 \in (-3; 0]$. (D) $m_0 \in (3; 7)$.

Lời giải.

☑ Cách 1.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$. Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -m$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$.

Khi đó 3 điểm cực trị là $A(0; 1)$, $B(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$, $C(-\sqrt{-m}; 1 - m^2)$.

Ta thấy ΔABC cân tại A, nên ΔABC vuông khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m^4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = -1$.

Kết hợp $m < 0$ ta có $m = -1$.

Cách 2.
Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.
Ta có ΔABC vuông cân $\Rightarrow b^3 = -8a \Rightarrow (2m)^3 = -8 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2+m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A $m = \dfrac{1}{2}$. B $m = -\dfrac{1}{2}$. C $m = \sqrt{3}$. D $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m^2+m+1)x = 4x\left[x^2 - (m^2+m+1)\right] = 0 \Leftrightarrow \hoac{x_1 = -\sqrt{m^2+m+1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{m^2+m+1}.}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	y_{CT}	↗	y_{CT}	↘	$y_{\text{CĐ}}$	↗	$+\infty$

Khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu $d = |x_3 - x_1| = 2\sqrt{m^2+m+1} = 2\sqrt{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} \geq \sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx + 2019$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$.

A $m = -1$. B $m = 2$. C $m = 1$. D $m = -2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m$.
Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+1)x + 12m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0 \quad (1)$.
Hàm số có 2 cực trị x_1, $x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Với điều kiện $m \neq 1$, ta có $\heva{x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = 4m.}$
Do đó $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8 \Leftrightarrow 10m = -10 \Leftrightarrow 2m + 2 + 8m = -8 \Leftrightarrow m = -1$.
Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 25. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$.

A 9. B 4. C 0. D 8.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - mx - 4$; xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$.
Do $\Delta = m^2 + 16 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.
Theo hệ thức Viet, ta có $\heva{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = m \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -4.}$
Vậy $S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (x_1x_2)^2 - [(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2] + 1 = 16 - (m^2+8) + 1 = 9 - m^2 \leq 9$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

(A) $k = -3$. (B) $k = \dfrac{1}{3}$. (C) $k = 3$. (D) $k = \dfrac{-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$, khi đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-3m+2$	↘	$-3m-2$	↗	$+\infty$

Ta thấy điểm $M(m-1; -3m+2)$ là điểm cực đại của đồ thị (C).
Từ đó, ta có

$$y_M = -3m + 2 = -3(x_M + 1) + 2 = -3x_M - 1 \Rightarrow M \in (d)\colon y = -3x - 1,\ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên đường thẳng cố định (d) có hệ số góc là $k = -3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

(A) 18. (B) 19. (C) 21. (D) 20.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1 = (x-1)(x^2 - 2mx - m + 1)$.
Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành khi và chỉ khi đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, nghĩa là

$$\begin{aligned} & y = (x-1)(x^2 - 2mx - m + 1) = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2mx - m + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \Delta' = m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee m < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m \neq \dfrac{2}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Do $m \in \mathbb{N}$ và $m < 20$ nên có 19 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24.

(A) $m = 2$. (B) $m = 1$. (C) $m = \pm 2$. (D) $m = \pm 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$, khi đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m. \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nên $m \neq 0$.
Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(0, 3m^2)$, $B(2m, 3m^2 - 4m^3)$.
Phương trình đường thẳng OA: $x = 0$, suy ra $\mathrm{d}(B; OA) = |2m|$.
Ta có

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(B, OA) \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot 3m^2 \cdot |2m| \Rightarrow \left|m^3\right| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2-2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

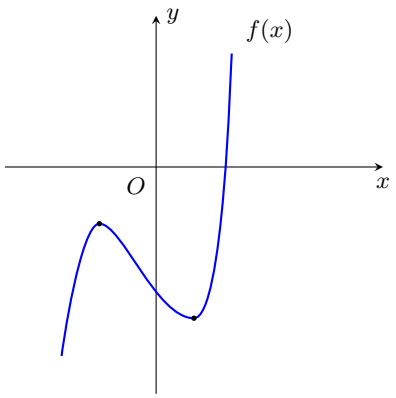
A) 4. B) 1. C) 3. D) 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2$.
Đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2-2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$$\begin{aligned} \Delta' > 0 &\Leftrightarrow (m+1)^2 - 3(m^2-2) > 0 \\ &\Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2}. \end{aligned}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên được $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.
Lúc này hai nghiệm x_1, x_2 của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số. Hai điểm cực trị này nằm cùng phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $y_1 y_2 > 0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm. Tức là phương trình $x^3 - (m+1)x^2 + (m^2-2)x - m^2 + 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực.



- Xét $m = -1$ thì phương trình là $x^3 - x + 2 = 0$, phương trình này có đúng một nghiệm thực nên ta chọn $m = -1$.
- Xét $m = 0$ thì phương trình là $x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$, phương trình này có đúng một nghiệm thực nên ta chọn $m = 0$.
- Xét $m = 1$ thì phương trình là $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt nên ta không chọn $m = 1$.
- Xét $m = 2$ thì phương trình là $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$, phương trình này có đúng một nghiệm thực nên ta chọn $m = 2$.

Vậy $m \in \{-1; 0; 2\}$ thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2mx^2+(m-1)x+2m^2+1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

(A) $\dfrac{2}{9}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-4mx+m-1$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì

$$\begin{aligned} y'=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} &\Leftrightarrow \Delta'=4m^2-m+1>0\\ &\Leftrightarrow \left(2m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}>0\\ &\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

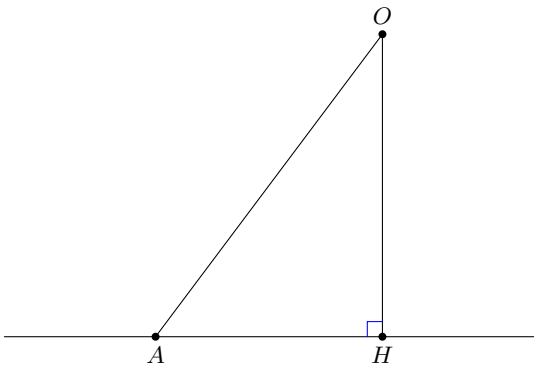
Mà $y=y'(x)\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2m}{3}\right)-\left(\dfrac{8}{3}m^2-\dfrac{2}{3}m+\dfrac{2}{3}\right)x+\dfrac{8}{3}m^2-\dfrac{2}{3}m+1$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$(d)\colon y=-\left(\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+\frac{2}{3}\right)x+\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1.$$

Ta thấy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $A\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (d). Khi đó ta có $\mathrm{d}(O;d)=OH\le OA$.



Do đó khoảng cách lớn nhất khi $H\equiv A$ hay $d\perp OA$.

Vậy khoảng cách lớn nhất là $OA=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị

(A) $m<-2$. (B) $-2<m<0$. (C) $0<m<3$. (D) $m>3$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$.

Khi đó ta có $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ và $y'=x^2-2mx^2+m+6$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

Khi đó phương trình $y'=x^2-2mx^2+m+6$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-6>0\\ 2m>0\\ m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow m>3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hàm số $y = |\sin(2x) + x|$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị trong $(-\pi; \pi)$?

(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 7.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \sin(2x) + x \Rightarrow f'(x) = 2\cos(2x) + 1$.

Khi đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{-1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vì $x \in (-\pi; \pi)$ nên $x = \pm\frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \pm\frac{2\pi}{3}$.

Ta có

- $f\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} < 0.$
- $f\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} < 0.$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} > 0.$
- $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} > 0.$

Lập bảng biến thiên

x	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{-\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\pi$	↗	$f\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$	↘	$f\left(\frac{-\pi}{3}\right)$	↗	0	↗	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↘	$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	↗	π

Từ bảng biến thiên ta thấy trên $(-\pi; \pi)$ đồ thị hàm số $f(x) = \sin(2x) + x$ có điểm cực trị và cắt trục hoành tại duy nhất một điểm có hoành độ $x = 0$.

Do đó hàm số $y = |\sin(2x) + x|$ có 5 điểm cực trị trên $(-\pi; \pi)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 + 2.(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

(A) $\frac{7}{2}$. (B) -1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 4(m-2)x - 5$.

Khi đó $\Delta' = a.(m-2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Do $3 \cdot (-5) = -15 < 0$ $(a \cdot c < 0)$ nên $x_1 < 0 < x_2$, nên ta có

$$|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -2 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -2 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x) \cdot (x^3 - 3x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 9. (B) 7. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1 - 2019x) = 0$ và số cực trị của hàm số $y = f(1 - 2019x)$.

Ta có $f'(x) = x^2(x - 1)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$ và $[f(1 - 2019x)]' = -2019f'(1 - 2019x)$.

Do đó

$$[f(1 - 2019x)]' = 0 \Leftrightarrow (1 - 2019x)^2(1 - 2019x - 1)\left(1 - 2019x - \sqrt{3}\right)\left(1 - 2019x + \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2019} \\ x = 0 \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2019} \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2019}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $y = f(1 - 2019x)$

x	$-\infty$		$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2019}$		0		$\dfrac{1}{2019}$		$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2019}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$y\left(\dfrac{1}{2019}\right)$	$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó phương trình $f(1 - 2019x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y = f(1 - 2019x)$ có 3 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d\colon x + 8y - 74 = 0$.

(A) $m \in (-1; 1]$. (B) $m \in (-3; -1]$. (C) $m \in (3; 5]$. (D) $m \in (1; 3]$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6mx$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2m$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Giả sử hai điểm cực trị là $M(0; -3m - 1)$ và $N(2m; 4m^3 - 3m - 1)$, suy ra $\overrightarrow{MN} = (2m; 4m^3)$.

Trung điểm I của MN có tọa độ $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$.

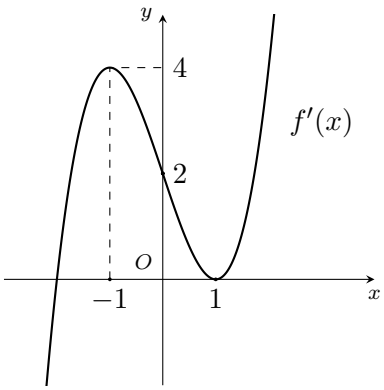
Đường thẳng $d\colon x + 8y - 74 = 0$ có một VTCP là $\vec{u} = (8; -1)$.

Ta có M và N đối xứng với nhau qua $d \Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ MN \perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0. \end{cases}$ $(*)$

Giải $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8.(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ 16m - 4m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3 - 23m - 82 = 0 \\ 16m - 4m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x-2018) - 2019x + 1$ là:

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y = f(x-2018) - 2019x + 1 \Rightarrow y' = f'(x-2018) - 2019$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x-2018) = 2019$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với đường thẳng $y = 2019$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy chỉ có 1 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = f(x-2018) - 2019x + 1$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng.

(A) $m_0 \in (3;4)$. (B) $m_0 \in (1;2)$. (C) $m_0 \in (0;1)$. (D) $m_0 \in (2;3)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6m$; xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Ta có $y = \dfrac{1}{3}y' \cdot x - 4mx + 4$.

Gọi $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có $\begin{cases} y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \\ y_1 = y(x_1) = \dfrac{1}{3}y'(x_1)\,x_1 - 4mx_1 + 4 \\ y_2 = y(x_2) = \dfrac{1}{3}y'(x_2)\,x_2 - 4mx_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4mx_1 + 4 \\ y_2 = -4mx_2 + 4. \end{cases}$

Suy ra M, N thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -4mx + 4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là $y = -4mx + 4$.

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B và tạo thành tam giác IAB.

$$\Leftrightarrow 0 < \mathrm{d}(I,d) < R \Leftrightarrow 0 < \mathrm{d}(I,d) < \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \dfrac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Cách 1.

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0;4)$, $IK = \sqrt{17} > R \Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A, B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I.

Do đó $S_{IAB} = \dfrac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} \le \dfrac{1}{2} IA \cdot IB$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,d) = \dfrac{R}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{15}{32}$.

Nhận xét. Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK < \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I. Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong trường hợp đó thì ta

phải đặt $\mathrm{d}(I,d)=t(0<t\le l)$, với l là độ dài đoạn thẳng IK, rồi tính $S_{\triangle IAB}=f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;l]$.

Cách 2.

Phương trình đường tròn là $(C)\colon (x-1)^2+y^2=2$.

Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=2\\ y=-4mx+4\end{cases}\Rightarrow (16m^2+1)x^2-2(16m+1)x+15=0.\qquad (1)$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, $B\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt a, $b\Leftrightarrow (16m+1)^2-15(16m+1)>0$.

Khi đó $A(a;-4ma+4)$, $B(b;-4mb+4)\Rightarrow \hoac{\overrightarrow{IA}=(a-1;-4ma+4)\\ \overrightarrow{IB}=(b-1;-4mb+4).}$

Từ đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=0 &\Leftrightarrow ab-(a+b)+16\left[m^2ab-m(a+b)+1\right]+1=0\\ &\Leftrightarrow ab-(a+b)+16m^2ab-16m(a+b)+17=0\\ &\Leftrightarrow (16m^2+1)ab-(16m+1)(a+b)+17=0\\ &\Leftrightarrow 15-\frac{2(16m+1)^2}{16m^2+1}+17=0\\ &\Leftrightarrow \frac{(16m+1)^2}{16m^2+1}=16\\ &\Leftrightarrow m=\frac{15}{32}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$.

A $\sqrt{30}$. B $2\sqrt{6}$. C $3+\sqrt{6}$. D $3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+2$. Hàm số $y=f(x)$ có cực trị khi $a^2-6>0\Leftrightarrow a<-\sqrt{6}\vee a>\sqrt{6}$. (1)

Ta có $g'(x)=-3x^2+2bx-3$. Hàm số $y=g(x)$ có cực trị khi $b^2-9>0\Leftrightarrow b<-3\vee b>3$. (2)

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$, khi đó

$$\begin{cases}3x_0^2+2ax_0+2=0\\ -3x_0^2+2bx_0-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{1}{2x_0}\\ b=\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{3}{2}x_0\\ b=\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right).\end{cases}$$

Ta có $P=|a|+|b|=\left|\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right|+\left|\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\right|\ge\left|\dfrac{5}{2x_0}+3x_0\right|$.

Suy ra $P^2=\dfrac{25}{4x_0^2}+9x_0^2+15\ge 2\sqrt{\dfrac{25}{4x_0^2}\cdot 9x_0^2}+15=30\Rightarrow P\ge\sqrt{30}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\dfrac{1}{x)_0}\right)\ne 0\\ \dfrac{25}{4x_0^2}=9x_0^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)>0\\ x_0=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}\end{cases}\Rightarrow x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Với hai giá trị x_0, ta tìm được hai cặp giá trị a, b thoả mãn. Vậy $\min P=\sqrt{30}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. B $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. C $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. D $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

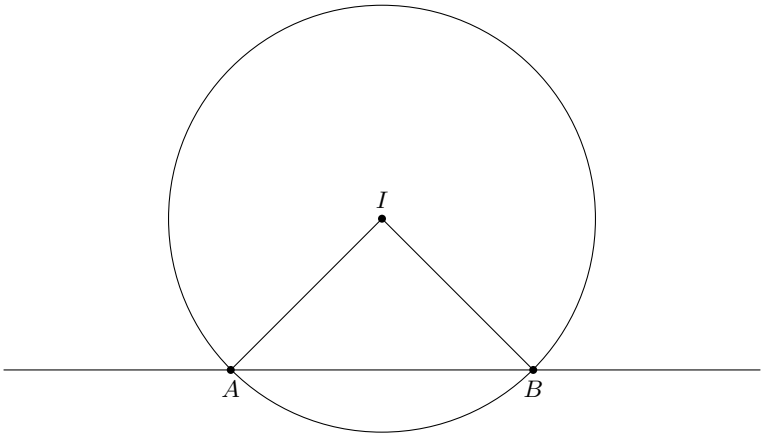
Lời giải.

Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$.

Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$. (1)

Ta có $y = \dfrac{1}{3}x \cdot y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$.



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow d(I;\Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0 \text{ luôn đúng do } m > 0.$$

Ta có $S_{IAB} = \dfrac{1}{2} \cdot IA \cdot \text{IB} \cdot \sin \widehat{AIB} = \dfrac{1}{2} \cdot \sin \widehat{AIB} \le \dfrac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$$\text{d}(I;\Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ thỏa mãn đk (1).}$$

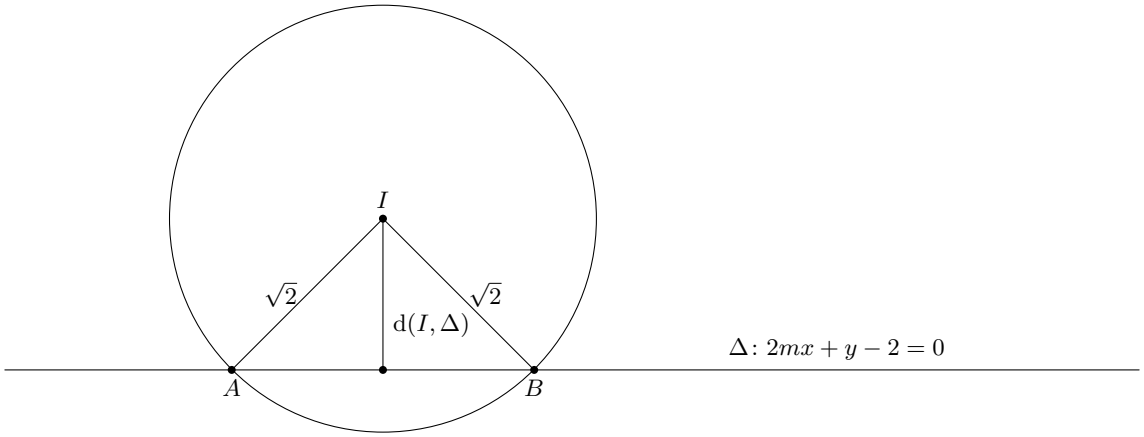
Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn $(C)\colon (x-1)^2 + y^2 = 2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

(A) $m = \dfrac{3}{8}$. (B) $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. (C) $m = \dfrac{8}{3}$. (D) $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{2} \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải.



Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3\left(x^2 - m\right)$, xét $y' = 0 \Rightarrow x^2 = m$.
Suy ra hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.
Ta có $y = y' \cdot \left(\dfrac{1}{3}x\right) - 2mx + 2$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cựa trị của đồ thị hàm số là $\Delta\colon y = -2mx + 2$ hay $\Delta\colon 2mx + y - 2 = 0$.
Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.
Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi

$$\mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 < 8m^2 + 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m - 2 > 0.$$

Khi đó, diện tích tam giác IAB là $S_{\triangle IAB} = \dfrac{1}{2}IA \cdot IB \cdot \sin\widehat{AIB}$.
Mà $\dfrac{1}{2}IA \cdot IB \cdot \sin\widehat{AIB} \le \dfrac{1}{2}IA \cdot IB = \dfrac{1}{2}R^2 = 1$.
Như thế diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.
Từ đó $\mathrm{d}(I,\Delta) = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \cdot R\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{8}$.
Vậy giá trị m cần tìm là $m = \dfrac{3}{8}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m-1)x^3 - (m-1)x^2 + 2mx + m + 3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2019 của tham số m để hàm số trên không có cực trị?
(A) 2018. (B) 2019. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.
Trường hợp 1: Với $m = 1 \Rightarrow y = 2x + 4$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị.
Trường hợp 2: Với $m \neq 1$, khi đó ta có: $y' = (m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m$.
Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 2m(m-1) \le 0 \Leftrightarrow -m^2 + 1 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -1. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có $\left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -1. \end{array}\right.$
Vậy $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -1 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{N}^*,\ m < 2019 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 2018\} \Leftrightarrow$ có 2018 giá trị của tham số thực m.
Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào sau đấy đúng?
(A) $m_0 \in (-1;7)$. (B) $m_0 \in (7;10)$. (C) $m_0 \in (-7;-1)$. (D) $m_0 \in (-15;-7)$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$.
Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{3}. \end{cases}$
Ta có $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13$.
Thay hệ thức Vi-ét vào, ta được $4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

(A) $\dfrac{5}{4} \le m \le \dfrac{7}{5}$. (B) $\hoac{m < \dfrac{5}{4}\\ m > \dfrac{7}{5}}$. (C) $\hoac{m < -1\\ \dfrac{5}{4} < m < \dfrac{7}{5}}$. (D) $\hoac{m \le \dfrac{5}{4}\\ m \ge \dfrac{7}{5}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 1$, khi đó

$$\Leftrightarrow \heva{\Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0\\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0\\ x_1 + x_2 < 2.} \quad (1)$$

Xét phương trình $y' = 0$, theo hệ thức Vi-ét

$$\heva{x_1 + x_2 = \dfrac{-2(1-2m)}{3}\\ x_1 x_2 = \dfrac{2-m}{3}.}$$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \heva{\hoac{m < -1\\ m > \dfrac{5}{4}}\\ \dfrac{2-m}{3} - \dfrac{-2(1-2m)}{3} + 1 > 0\\ \dfrac{-2(1-2m)}{3} - 2 < 0}$$

$$\Leftrightarrow \heva{\hoac{m < -1\\ m > \dfrac{5}{4}}\\ m < \dfrac{7}{5}\\ m < 2}$$

$$\Leftrightarrow \hoac{m < -1\\ \dfrac{5}{4} < m < \dfrac{7}{5}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + m - 1$ có đồ thị (C) , với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) có hai điểm cực trị là A, B cùng với điểm $C(0;-1)$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 10 ?

(A) 7. (B) 9. (C) 12. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$. $(*)$

Đồ thị (C) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$.

Đặt $A(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + m - 1)$ và $B(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + m - 1)$.

Khi đó $\overrightarrow{CA} = (\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + m)$; $\overrightarrow{CB} = (-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + m)$.

Ta lại có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\sqrt{m} \cdot (2m\sqrt{m} + m) - (-\sqrt{m}) \cdot (-2m\sqrt{m} + m)\right| = m\sqrt{m}$.

Theo đề bài $S_{ABC} < 10 \Leftrightarrow m\sqrt{m} < 10 \Leftrightarrow m^3 < 100 \Leftrightarrow m < \sqrt[3]{100}$.

Kết hợp với điều kiện $m > 0$ ta được $0 < m < \sqrt[3]{100}$.

Suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm $M\left(2m^3;m\right)$ tạo với hai điểm A và B một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(-7;-3)$. (B) $(-3;3)$. (C) $(3;7)$. (D) $(7;13)$.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow 6(x-m)(x-m-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+1.\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m.

Với $x=m\Rightarrow y=2m^3+3m^2+1\Rightarrow A\left(m;2m^3+3m^2+1\right)$.

Với $x=m+1\Rightarrow y=2m^3+3m^2\Rightarrow B\left(m+1;2m^3+3m^2\right)$.

Có $\overrightarrow{AB}=(1;-1)\Rightarrow AB=\sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là $x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$.

Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(M,AB)$ nhỏ nhất, ta có

$$d(M,AB)=\frac{\left|2m^3+m-2m^3-3m^2-m-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-3m^2-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3m^2+1}{\sqrt{2}}\Rightarrow d(M,AB)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu "=" xảy ra $m=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{MAB}=\frac{1}{2}d(M,AB)\cdot AB=\frac{1}{2}$, đạt khi $m=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ (m là tham số), có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C_m) có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m).

(A) $m=-5$. (B) $m=3$. (C) $m=2$. (D) $m=-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+4x+m-3$.

(C_m) có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow 4-3(m-3)>0\Leftrightarrow m<\frac{13}{3}.$$

Ta có $y=y'\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$.

Nên phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm cực trị của (C_m) là $d\colon y=\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$.

Đường thẳng d đi qua $M(9;-5)$ nên

$$\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)\cdot 9+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}=-5\Leftrightarrow m=3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d)\colon y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

(A) $m=\frac{1}{6}$. (B) $m=-\frac{1}{3}$. (C) $m=\frac{1}{3}$. (D) $m=-\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$. Suy ra $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho. Khi đó $(\Delta)\colon y=-2x-1$.

Vì d vuông góc với Δ nên $(3m+1)\cdot(-2)=-1\Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hàm số $y=(m+1)x^4-2x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1.

(A) $-1<m<0$. (B) $m>-1$. (C) $0<m<1$. (D) $m>0$.

Lời giải.

☑ **Trường hợp 1.**
Nếu $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ thì hàm số đã cho trở thành $y=2x^2+1$, hàm số này có một điểm cực trị. Do đó ta loại trường hợp này.

☑ **Trường hợp 2.**
Nếu $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.
Ta có $y'=4(m+1)x^3-4x=4x\left[(m+1)x^2-1\right]$.
Xét $y'=0 \Leftrightarrow \hoac{x=0 \\ (m+1)x^2-1=0} \Leftrightarrow \hoac{x=0 \\ x^2=\dfrac{1}{m+1}.}$ $(*)$
Hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 và nhỏ hơn 1

$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{m+1}<1 \Leftrightarrow \heva{\dfrac{1}{m+1}>0 \\ \dfrac{1}{m+1}<1} \Leftrightarrow \heva{\dfrac{1}{m+1}>0 \\ -\dfrac{m}{m+1}<0} \Leftrightarrow \heva{m>-1 \\ \hoac{m<-1 \\ m>0}} \Leftrightarrow m>0.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 49. Cho hàm số $y=(m-2)x^4+(m-1)x^2-3$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
A $m \in [2;+\infty)$.
B $m \in (-\infty;1] \cup (2;+\infty)$.
C $m \in (-\infty;1]$.
D $m \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải.
Ta xét hai trường hợp.

☑ **Trường hợp 1:**
Nếu $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$ thì hàm số đã cho trở thành $y=x^2-3$, hàm số có một điểm cực trị.

☑ **Trường hợp 2:**
Nếu $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.
Ta có $y'=4(m-2)x^3+2(m-1)x=2x\left[2(m-2)x^2+m-1\right]$.
Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \hoac{x=0 \\ 2(m-2)x^2+m-1=0} \Leftrightarrow \hoac{x=0 \\ x^2=\dfrac{1-m}{2(m-2)}.}$ $(*)$
Hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-m}{2(m-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \hoac{m>2 \\ m \leq 1.}$$

Kết hợp với 2 trường hợp, ta được $m \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$.

Nhận xét.

☑ Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\heva{ab \geq 0 \\ a^2+b^2>0.}$

☑ Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab<0$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 50. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+1$ đều thuộc khoảng $(-1;1)$.
A $(-1;1)$.
B $\left(-\dfrac{4}{5};0\right)$.
C $(-2;0)$.
D $(-1;0)$.

Lời giải.
Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0 \Leftrightarrow -2(m+1)<0 \Leftrightarrow m>-1$.
Ta có $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-m-1\right)$.
Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \hoac{x=0\\x^2=m+1} \Leftrightarrow \hoac{x=0\in(-1;1)\\x=\pm\sqrt{m+1}.}$
Hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu đều thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

$$\pm\sqrt{m+1}\in(-1;1) \Leftrightarrow \sqrt{m+1}<1 \Leftrightarrow -1<m<0.$$

Kết hợp điều kiện hàm số có ba cực trị ta được tập hợp các giá trị của m là $(-1;0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m^2-m+1)x^2+m-1$ có 3 điểm cực trị, đồng thời hoành độ hai điểm cực tiểu $x_1;x_2$ thỏa điều kiện $|x_1-x_2|\le 2$.
(A) $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. (B) $\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. (C) $(0;1]$. (D) $[0;1]$.

Lời giải.
Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0 \Leftrightarrow -2(m^2-m+1)<0 \Leftrightarrow m^2-m+1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.
Ta có $y'=4x^3-4(m^2-m+1)x=4x(x^2-m^2+m-1)$.
Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \hoac{x=0\\x^2=m^2-m+1} \Leftrightarrow \hoac{x=0\\x=\pm\sqrt{m^2-m+1}}$
Nhận thấy $x=0$ là điểm cực đại của hàm số nên suy ra $x_{1,2}=\pm\sqrt{m^2-m+1}$.
Do đó $|x_1-x_2|\le 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-m+1}\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-m+1}\le 1 \Leftrightarrow m^2-m\le 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 1$.
Vậy tập hợp các giá trị của m cần tìm là $[0;1]$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi.
(A) $m=-1$. (B) $m=1$. (C) $m=2$. (D) $m=3$.

Lời giải.
Ta có $y'=4x^3-4m^2x=4x(x^2-m^2)$. Xét $y'=0 \Leftrightarrow \hoac{x=0\\x=\pm m.}$
Vậy với điều kiện $m\ne 0$ hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0;2m)$, $B(-m;-m^4+2m)$, $C(m;-m^4+2m)$.
Ta có $\overrightarrow{OB}=(-m;-m^4+2m)$; $\overrightarrow{CA}=(-m;m^4)$.
Vì tứ giác $ABOC$ có hai đường chéo AO và BC vuông góc và $AB=AC$ nên nó là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow -m^4+2m=m^4 \Leftrightarrow 2m(m^3-1)=0 \Leftrightarrow \hoac{m=0\,(\text{L})\\m=1.}$$

Vậy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?
(A) $m\in\left(\dfrac{9}{5};2\right)$. (B) $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. (C) $m\in(2;3)$. (D) $m\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{5}\right)$.

Lời giải.
Ta có $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \hoac{x=0\\x^2=m.}$
Với điều kiện $m>0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;m^4-2m^2)$; $B(-\sqrt{m};m^4-3m^2)$; $C(\sqrt{m};m^4-3m^2)$.
$ABDC$ là hình thoi khi và chỉ khi $BC\perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD.
Do tính đối xứng ta luôn có $BC\perp AD$ nên chỉ cần $I\equiv J$ với $I(0;m^4-3m^2)$, $J\left(0;\dfrac{;m^4-2m^2-3}{2}\right)$.
Khi đó

$$m^4-2m^2-3=2m^4-6m^2 \Leftrightarrow m^4-4m^2+3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow m \in \left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A, B. Khi $\widehat{AOB}=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

(A) $\dfrac{1}{16}$. (B) 8. (C) $\dfrac{1}{8}$. (D) 16.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-(m+m^2)}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, $B \Leftrightarrow y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=1+m+m^2>0 \\ -1-m-m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y=\dfrac{(x^2+mx+m^2)'}{(x-1)'}=2x+m$.

Gọi x_A; x_B là hoành độ của A, B, khi đó x_A; x_B là nghiệm của phương trình $x^2-2x-(m+m^2)=0$.

Theo định lí Viet ta có $x_A+x_B=2$; $x_A.x_B=-m^2-m$.

Suy ra $y_A=2x_A+m$; $y_B=2x_B+m$.

Vậy

$$\begin{aligned} \widehat{AOB}=90^\circ \Rightarrow x_A.x_B+y_A.y_B=0 &\Leftrightarrow x_Ax_B+4x_Ax_B+2m(x_A+x_B)+m^2=0 \\ &\Leftrightarrow 5(-m^2-m)+4m+m^2=0 \\ &\Leftrightarrow -4m^2-m=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{1}{4}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng $0^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho hàm số $f(x)=x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=|f(x)|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

(A) 15. (B) 16. (C) 13. (D) 14.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathbb{R}$ và cũng là tập xác định của hàm số $y=|f(x)|$.

Ta có, hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 4 nên nó có tối đa 3 điểm cực trị là x_1, x_2, x_3 và đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_4, x_5, x_6, x_7.

Do đó, hàm số $y=|f(x)|$ có nhiều nhất là 7 điểm cực trị, chính là các điểm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

Vậy để hàm số $y=|f(x)|$ có nhiều điểm cực trị nhất thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt hay $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12=0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2-2mx+6-m)=0. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=x^2-2mx+6-m$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 và khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+m-6>0 \\ g(-1)\neq 0 \\ g(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m\neq -7. \end{cases}$$

Từ đó ta được $m \in \{-10;-9;-8;-6;-5;-4;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Có 14 số nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. B	5. C	6. A	7. D	8. A	9. D	10. C
11. A	12. D	13. B	14. D	15. D	16. D	17. C	18. D	19. C	20. B
21. A	22. C	23. B	24. A	25. A	26. A	27. B	28. C	29. C	30. D
31. D	32. A	33. C	34. B	35. D	36. B	37. C	38. A	39. B	40. A
41. A	42. D	43. C	44. D	45. B	46. B	47. D	48. D	49. D	50. D
51. D	52. B	53. D	54. A	55. D					

CHỦ ĐỀ 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$.

- Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D}, f(x_0) = M. \end{cases}$
- Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.
- Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D}, f(x_0) = m. \end{cases}$
- Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.

1. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

- **Bước 1:** Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{D}$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

- **Bước 1:**
  Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.
  Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 2:** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.
- **Bước 3:** Khi đó:
  $\max\limits_{[a,b]} f(x) = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.
  $\min\limits_{[a,b]} f(x) = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(x_i), f(\alpha_i)$.
- **Bước 4:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x), m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b).\end{cases}$

Nếu $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a).\end{cases}$

Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

d) Bất đẳng thức trị tuyệt đối

- Cho hai số thực a, b khi đó ta có: $|a|+|b|\geq |a+b|\geq |a|-|b|$.
- Dấu "=" về trái xảy ra khi a, b cùng dấu. Dấu "=" về phải xảy ra khi a, b trái dấu.
- Tính chất của hàm trị tuyệt đối: $\max\{|a|,|b|\}=\dfrac{|a-b|+|a+b|}{2}$.

e) Phương pháp chung để giải các bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

- **Bước 1:** Xét hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
  Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.
  Giải phương trình $f'(x)=0$ và tìm các nghiệm a_i thuộc $[a;b]$
- **Bước 2:** Giải phương trình $f(x)=0$ và tìm các nghiệm b_j thuộc $[a;b]$.
- **Bước 3:** Tính các giá trị $|f(a)|;|f(b)|;|f(a_i)|;|f(b_j)|$. So sánh và kết luận.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị m_1+m_2 bằng

(A) 3. (B) 5. (C) 10. (D) 2.

Lời giải.

Với mọi $x\in[2;5]$ có $f'(x)=\dfrac{m}{2\sqrt{x-1}}$. Ta thấy dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của m.

$\forall m\neq 0$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $[2;5]\Rightarrow \min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)+f(5)=m+2m$.

Từ giả thiết ta được $m^2-10=m+2m\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=5\\ m=-2\end{array}\right.$. Vậy $m_1+m_2=3$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

(A) -2. (B) 4. (C) -4. (D) 0 .

Lời giải.

Đặt $y=f(x)=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y'=f'(x)=2\left(x^3-3x+m+1\right)\left(3x^2-3\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\m=-x^3+3x-1=g(x).\end{array}\right.$

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.. Bảng biến thiên cua $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Nếu $m\in[-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0\in[-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra $\min\limits_{[-1:1]}y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\notin[-3;1]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-1;1]$.

Ta có: $\min_{[-1:1]}f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\left\{(m-1)^2;(m+3)^2\right\}$.

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0\Rightarrow\min\limits_{[-1:1]}f(x)=(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (TM)\\m=0\ (KTM).\end{array}\right.$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0\Rightarrow\min_{[-1:1]}f(x)=(m+3)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\ (TM)\\m=-2\ (KTM).\end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2;m=-4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 3. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 20 (với m là tham số). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $0<m\leq2$. (B) $4<m\leq8$. (C) $2<m\leq4$. (D) $m>8$.

Lời giải.

Ta có: $\min\limits_{[0:3]}y=20\Leftrightarrow\begin{cases}mx+\dfrac{36}{x+1}\geq20,\forall x\in[0;3]\\\exists x_0\in[0;3]:mx_0+\dfrac{36}{x_0+1}=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq\dfrac{20x-16}{x(x+1)},\forall x\in(0;3]\\\exists x_0\in(0;3]:m=\dfrac{20x_0-16}{x_0(x_0+1)}\end{cases}(*).$

(vì $y(0)=36>20$).

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{20x-16}{x(x+1)}$ trên $(0;3]$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-20x^2+32x+16}{[x(x+1)]^2}$; $g'(x)=0\Rightarrow-20x^2+32x+16=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\quad(tm)\\x=-\dfrac{2}{5}(l).\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\dfrac{11}{3}$

Do đó, từ $(*)$ suy ra $m=-4$. Vậy $2<m\leq4$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = x^6 + ax^2 + bx + 2a + b$ với a, b là các số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?

(A) 128. (B) 243. (C) 81. (D) 696 .

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6x^5 + 2ax + b$. Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$ nên $f'(1) = 0 \Rightarrow b = -2a - 6$. Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$ nên $f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^6 + ax^2 + bx + 2a + b \geq 1 + 3a + 2b, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & x^6 + ax^2 + (-2a - 6)x + 2a - 2a - 6 \geq 1 + 3a + 2b, \forall x \in \mathbb{R} (\text{do} b = -2a - 6) \\ \Leftrightarrow\ & a\left(x^2 - 2x + 1\right) \geq -x^6 + 6x - 5, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & a(x-1)^2 \geq (x-1)^2\left(-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5\right), \forall x \in \mathbb{R} (*) \end{aligned}$$

Mà $\max\left(-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5\right) = -3 \Leftrightarrow x = -1$ nên $(*)$ xảy ra khi $a \geq -3$.
$f(3) = 3a + 705 \Rightarrow \min f(3) = 696$.
Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 5. Cho $y = f(x) = \left|x^2 - 5x + 4\right| + mx$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ lớn hơn 1. Tính số phần tử của S.

(A) 7. (B) 8. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Vì $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) > 1$ nên $f(x) = \left|x^2 - 5x + 4\right| + mx > 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $x \in [4; +\infty)$, ta có $f(x) = mx + x^2 - 5x + 4 > 1 \Leftrightarrow m > -x - \dfrac{3}{x} + 5, \forall x \geq 4$.

Đặt $g(x) = -x - \dfrac{3}{x} + 5, \forall x \geq 4$.. Ta có $g'(x) = -1 + \dfrac{3}{x^2} < 0, \forall x \in [4; +\infty),\ g(4) = \dfrac{1}{4}$.

Do đó $g(x) \leq g(4) = \dfrac{1}{4}$. Vì $m > g(x) \forall x \in [4; +\infty) \Leftrightarrow m > g(4) \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$. (1)

Tương tự, với $x \in [1; 4)$. Ta có $f(x) = -x^2 + 5x - 4 + mx > 1\ \forall x \in [1; 4) \Leftrightarrow m > 1$. (2)

Với $x \in (0; 1)$. Ta có $f(x) = x^2 - 5x + 4 + mx > 1\ \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m > -x - \dfrac{3}{x} + 5 \Leftrightarrow m \geq 1$. (3)

Với $x \in (-\infty; 0)$. Ta có $f(x) = x^2 - 5x + 4 + mx > 1\ \forall x \in (-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow m < -x - \dfrac{3}{x} + 5 \quad \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m < 5 + 2\sqrt{3}$. (4)

Với $x = 0$ luôn đúng.
Từ (1), (2), (3) và (4) ta có $1 < m < 5 + 2\sqrt{3}$.
Vậy $S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thỏa mãn.
Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị thực của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{4^{\sin x} + m \cdot 6^{\sin x}}{9^{\sin x} + 4^{1+\sin x}}$ không nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$.

(A) $m > \dfrac{2}{3}$. (B) $m \geq \dfrac{2}{3}$. (C) $m \geq \dfrac{13}{18}$. (D) $\dfrac{2}{3} \leq m \leq \dfrac{13}{18}$.

Lời giải.

Ta có: $y = \dfrac{4^{\sin x} + m \cdot 6^{\sin x}}{9^{\sin x} + 4^{1+\sin x}} = \dfrac{1 + m \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sin x}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\sin x} + 4}$.

Đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sin x}$ với $t \in \left[\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right]$ khi đó $y = f(t) = \dfrac{mt + 1}{t^2 + 4}$.

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tồn tại $\max f(t)$ (điều này luôn đúng) và $f(t) \geq \dfrac{1}{3}$ có nghiệm $t \in \left[\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right]$.

Xét $f(t) \geq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow mt + 1 \geq \dfrac{1}{3}t^2 + \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 3m \geq \dfrac{t^2+1}{t}$ (1).

Đặt $g(t) = \dfrac{t^2+1}{t}, g'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên của hàm $g(t)$:

x	$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$g(1)$	↗	

Yêu cầu bài toán tương đương (1) có nghiệm hay $3m \geq g(t)$ có nghiệm $t \in \left[\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right]$

$\Leftrightarrow 3m \geq g(1) \Leftrightarrow 3m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘			2	↗	4	↘	0		
			0							↘	$-\infty$

Biết rằng $f(-1) = \dfrac{10}{3}, f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f'(x) - 3f(x)$ trên đoan $[-1;2]$ bằng

(A) $\dfrac{10}{3}$. (B) $\dfrac{820}{27}$. (C) $\dfrac{730}{27}$. (D) 198 .

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$.

$g'(x) = 3\left[f^2(x) - 1\right] \cdot f'(x),\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f'(x) = 0\ (1) \\ f^2(x) = 1\ (2). \end{bmatrix}$

Từ bảng biến thiên, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \in [-1;2] \\ x = 2 \in [-1;2]. \end{bmatrix}$

Và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [-1;2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1;2] \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = \dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1, \forall x \in [-1;2]$ nên (2) vô nghiệm.

Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Ta có $g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\dfrac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{730}{27}$.

$g(2) = f^3(2) - 3f(2) = (6)^3 - 3(6) = 198$. Vậy $\min\limits_{[-1;2]} g(x) = g(-1) = \dfrac{730}{27}$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $(f(x)-x)f(x)=x^6+3x^4+2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $3M-m$ bằng

(A) 4. (B) -28. (C) -3. (D) 33 .

Lời giải.

Ta có: $(f(x)-x)f(x)=x^6+3x^4+2x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-xf(x)=x^6+3x^4+2x^2$.

$\Leftrightarrow 4f^2(x)-4xf(x)=4x^6+12x^4+8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x)-4xf(x)+x^2=4x^6+12x^4+9x^2$

$\Leftrightarrow [2f(x)-x]^2=\left(2x^3+3x\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&2f(x)-x=2x^3+3x\\&2f(x)-x=-2x^3-3x\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&f(x)=x^3+2\\&xf(x)=-x^3-x.\end{aligned}\right.$

Với $f(x)=x^3+2x \Rightarrow f'(x)=3x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $f'(x)=-x^3-x \Rightarrow f'(x)=-3x^2-1<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

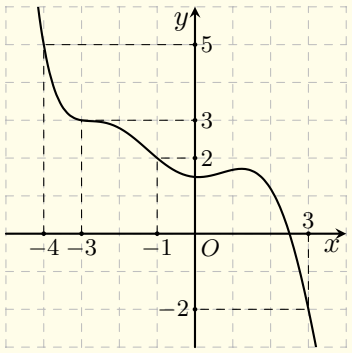
Suy ra: $f(x)=-x^3-x$. Vì $f(x)$ nghich biến trên $\mathbb{R}$ nên $M=\max\limits_{[1;2]} f(x)=f(1)=-2$ và

$m=\min\limits_{[1;2]} f(x)=f(2)=-10$. Từ đây, ta suy ra: $3M-m=3.(-2)+10=4$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

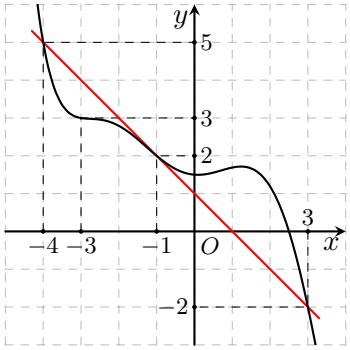
(A) $x=-3$. (B) $x=-4$. (C) $x=3$. (D) $x=-1$.



Lời giải.

Ta có: $g'(x)=2f'(x)+(2x-2)=0$

$\Leftrightarrow 2\left[f'(x)-(1-x)\right]=0 \Leftrightarrow f'(x)=1-x \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=-4\\&x=-1\\&x=3.\end{aligned}\right.$ Bảng biến thiên



x	-4		-1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-4)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(3)$

Vậy trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=-1$.

Chọn đáp án (D) □

ĐỀ VDC SỐ 1: CƠ BẢN VỀ GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+4x}$ trên khoảng $(0;3)$ là

(A) 4. (B) 2. (C) 0. (D) -2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[0;4]$.

Xét hàm số $y=\sqrt{-x^2+4x}$ trên khoảng $(0;3)$.

Ta có $y'=\dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}}$ có $y'=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	0		2		3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	2	↘	$\sqrt{3}$

Trên khoảng $(0;3)$ giá trị lớn nhất của hàm số là $y=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

(B) Hàm số có đúng một cực trị.

(C) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và đạt cực tiểu tại $x=3$.

(D) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

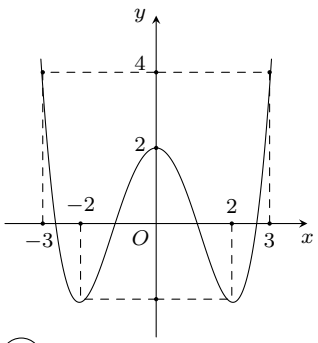
Lời giải.

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và đạt cực tiểu tại $x=3$. □

Câu 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$ bằng



(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta thấy rằng hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;3]$ và ta có $f(x)\in[-2;4]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Nên ta có $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(3)=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2019$ là

(A) 2017. (B) 2020. (C) 2018. (D) 2019.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Biến đổi $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2019=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+2019$.

Đặt $t=x^2+5x+4 \Rightarrow t=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4} \Rightarrow t \geq -\dfrac{9}{4} \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho trở thành $f(x)=t^2+2t+2019=(t+1)^2+2018 \geq 2018 \, \forall t \geq -\dfrac{9}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2018 tại $t=-1 \in \left[-\dfrac{9}{4};+\infty\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau:

x	$-\infty$		-5		1		7		$+\infty$
y'				$-$	0	$+$			
y		$\searrow$	6		2	$\nearrow$	9		

Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

(B) $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

(C) $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

(D) $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=6$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên dễ dàng ta thấy $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ khi $x=1$.

$\max\limits_{[-5;7)} f(x)=6$ là sai vì $f(x)$ sẽ nhận các giá trị $7;8$ lớn hơn 6 khi $x \to 7$.

$\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ là sai vì $f(x)$ không bằng 9 mà chỉ tiến đến 9 khi $x \to 7$, $(x \neq 7)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m

(A) $m=4$. (B) $m=2$. (C) $m=1$. (D) $m=3$.

Lời giải.

Ta có $y'=1-\dfrac{4}{x^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \in (0;+\infty) \\ x=-2 \notin (0;+\infty) \end{array}\right.$.

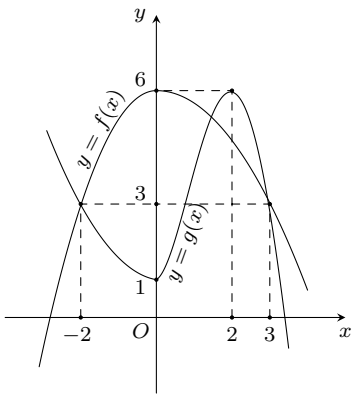
Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2)=4 \Rightarrow m=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7.
Cho hàm số $y=f(x)$ và hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)}=m$ có nghiệm thuộc $[-2;3]$?



(A) 4. (B) 5. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.
Xét hàm số $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Dựa vào đồ thị, ta thấy các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2;3]$, do đó $h(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2;3]$.
Ngoài ra với $x\in[-2;3]$, dễ thấy $f(x)\le 6$, $g(x)\ge 1$ nên $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 6$.
Mà $h(0)=\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{6}{1}=6$ nên $\max\limits_{[-2;3]}h(x)=6$.
Lại có $h(x)>0$ với mọi $x\in[-2;3]$ và $h(-2)=1$ nên $0<\min\limits_{[-2;3]}h(x)\le 1$.
Phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)}=m$ có nghiệm trên $[-2;3]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[-2;3]}h(x)\le m\le\max\limits_{[-2;3]}h(x)$.
Từ (1), (2) và (3) kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, ta có $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\dfrac{1}{6}$	↗	$+\infty$

(A) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập số thực bằng $-\dfrac{1}{6}$.
(B) Giá trị cực đại của hàm số bằng 0.
(C) Giá trị lớn nhất của hàm số trên tập số thực bằng 0.
(D) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Lời giải.
Từ bảng biên thiên ta nhận thấy đạo hàm của hàm số đổi dấu từ dương sang âm qua nghiệm 0 nên hàm số đạt cực đại tại 0 và giá trị cực đại của hàm số bằng 0.
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]}f(x)=3$. Xét $g(x)=f(3x-1)+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]}g(x)=-10$.

(A) 13. (B) -7. (C) -13. (D) -1.

Lời giải.
Ta có $\max\limits_{[0;1]}g(x)=\max\limits_{[0;1]}[f(3x-1)+m]=m+\max\limits_{[0;1]}f(3x-1)$.
Đặt $t=3x-1$. Ta có hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[-1;2]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} f(3x-1) = \max\limits_{[-1;2]} f(t) = 3$. Suy ra $\max\limits_{[0;1]} g(x) = m+3$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10 \Leftrightarrow m+3 = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A) 1. B) 3. C) -1. D) 7.

Lời giải.

Đặt $\sin x = t \Rightarrow t \in (-1;1)$. Khi đó ta có $y = f(t) = 3t - 4t^4$.

Khi đó $f'(t) = -12t^2 + 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{2}$.

So sánh $f\left(\frac{1}{2}\right)$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ta thấy GTLN là $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hàm số $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A) $M = \frac{3}{2}m$. B) $M = m + \frac{3}{2}$. C) $M = m + \frac{2}{3}$. D) $M = m + 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in [-1;1]$.

Khi đó $y = f(t) = \dfrac{t+1}{t^2+t+1}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Lại có $f(0) = 1$; $f(-1) = 0$; $f(1) = \frac{2}{3}$.

Vậy $M = 1$, $m = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0;1)$.

A) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{54+25\sqrt{5}}{20}$. B) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{11+5\sqrt{5}}{4}$.

C) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{10+5\sqrt{5}}{4}$. D) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{56+25\sqrt{5}}{20}$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $(0;1)$ và có $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{2(x-1)^2}$.

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-6x+4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \quad \text{(loại)} \\ x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		$3-\sqrt{5}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{11+5\sqrt{5}}{4}$	$\nearrow$	∞

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{11+5\sqrt{5}}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập $\mathscr{D} = (-\infty;-1] \cup \left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Tính giá trị của $m \cdot M$.

A $T = \dfrac{3}{2}$. B $T = 0$. C $T = -\dfrac{3}{2}$. D $T = \dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty) \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} = \dfrac{-2x+1}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{1}{2}$		1		$\dfrac{3}{2}$
y'		$+$		$\|\|$	0	$\|\|$	0	$-$	
y	-1	↗		$\|\|$		$\|\|$		↘	$-\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên, suy ra $M = 0$; $m = -\sqrt{5}$.

Vậy $M \cdot m = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25;\dfrac{11}{10}\right)$. Tìm M.

A $M = 1$. B $M = \dfrac{129}{250}$. C $M = 0$. D $M = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-25		0		1		$\dfrac{11}{10}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\dfrac{33123}{2}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{129}{250}$

Từ bảng biến thiên ta có $M = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng

A 3. B 1. C -1. D 5.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} y = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Trên khoảng $(0;+\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

(A) Có giá trị lớn là $\max y = -1$.
(B) Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = -1$.
(C) Có giá trị lớn nhất là $\max y = 3$.
(D) Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} y = 3$ hàm số không có giá trị nhỏ nhất. □

Câu 17. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
(B) Hàm số có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.
(C) Hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
(D) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty; -2017)$. (B) $(2017; +\infty)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(-2017; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$, ta có bảng biến thiên của $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	

Đặt $t = x + 2017$. Ta có $y = f(x+2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018 = g(t)$.

$g'(t) = f'(t) + 2018$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$, suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty; 0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên của $g(t)$

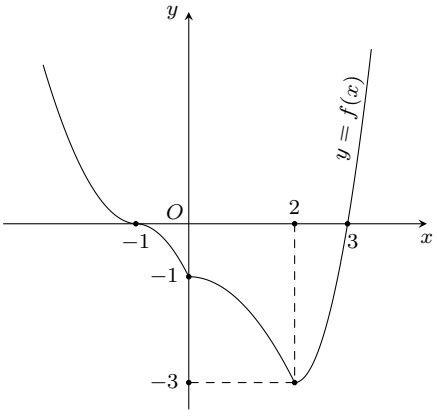
x	$-\infty$		α		2		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty; 0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thỏa $x_0+2017 \in (\infty; 0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty; -2017)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi



(A) $m < -10$. (B) $m < -5$. (C) $m < -3$. (D) $m < -2$.

Lời giải.

Ta có

$$2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in (-1; 3)$$

$$\Leftrightarrow f(x) + \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} > m, \forall x \in (-1; 3). \quad (*)$$

Đặt $g(x)=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3x^2}{2}$, $x\in(-1;3)$.

- Từ đồ thị, ta có $\min\limits_{(-1;3)} f(x)=f(2)=-3$. (1)
- Xét $h(x)=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3x^2}{2}$, $x\in(-1;3)$.
  Ta có $h'(x)=\dfrac{3x^2}{2}-3x$; $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$
  Bảng biến thiên

x	-1		0		2		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

  Từ bảng biến thiên, suy ra $\min\limits_{(-1;3)} h(x)=h(2)=-2$. (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\min\limits_{(-1;3)} g(x)=g(2)=-5$.
Khi đó $(*)\Leftrightarrow m<-5$.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|-4x$ bằng -5?
A) 2. B) 3. C) 0. D) 1.

Lời giải.
Xét $f(x)=x^2-4x+m+3$.
Ta có $\Delta'=2^2-(m+3)=1-m$.

- **Trường hợp 1:** $m\geq 1$. Suy ra $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
  Khi đó $y=x^2-8x+m+3$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-13$	$\nearrow$	$+\infty$

  Suy ra $\min y=-5\Leftrightarrow m=8$ (thỏa mãn).
- **Trường hợp 2:** $m<1$.
  Khi đó phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=2-\sqrt{1-m}$; $x_2=2+\sqrt{1-m}$.
  Nhận xét rằng với $x\in(x_1;x_2)$ thì $y=-x^2-m-3$ và $\begin{cases}y(x_1)=-8+4\sqrt{1-m}\\y(x_2)=-8-4\sqrt{1-m}.\end{cases}$
  Suy ra $y(x_1)<y(x_2)$. Do đó $\min\limits_{(x_1;x_2)} y=-8-4\sqrt{1-m}<-5$.
  Khi đó nếu tồn tại $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y$ thì giá trị này nhỏ hơn -5 (loại).

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. C	5. A	6. A	7. D	8. B	9. C	10. A
11. D	12. B	13. B	14. A	15. A	17. C	18. A	19. B	20. D	

CHỦ ĐỀ 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

ĐỀ VDC SỐ 13: MIN, MAX CỦA HÀM ĐA THỨC VÀ BPT

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=x^{20-m}-x^7+2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

(A) 6. (B) 25. (C) 7. (D) 10.

Lời giải.

TH1: $m=13\Rightarrow f(x)=2\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=2$. Vậy $m=13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m\neq 13$ (*)

Khi đó một hàm đa thức có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20-m>7 \\ 20-m=2k \\ m,k\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m<13 \\ m=20-2k \\ m,k\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m<13 \\ \dfrac{7}{2}<k\le\dfrac{19}{2} \\ m=20-2k \\ m,k\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\le m\le 9 \\ m=20-2k \\ m,k\in\mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m\in\{2;4;6;8;10;12\}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy có 7 giá tri m nguyên dương thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=x^{30-m}-x^6+1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$?

(A) 6. (B) 8. (C) 7. (D) 3.

Lời giải.

TH1: $m=24\Rightarrow f(x)=1\Rightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$. Vậy $m=24$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m\neq 24$ (*)

Khi đó một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le 30-m\le 6 \\ m\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24\le m\le 30 \\ m\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow m\in\{24;25;26;27;28;29;30\}.$$

Trong trường hợp này kết hợp với (*) ta có $m\in\{25;26;27;28;29;30\}$.

Vậy $m\in\{24;25;26;27;28;29;30\}$. Suy ra có 7 giá tri m nguyên dương thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\left(m^2-3m\right)x^{11}-mx^6+x^3-3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$?

(A) 0. (B) 2. (C) Vô số. (D) 1.

Lời giải.

Một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải âm, suy ra

$$m^2-3m=0\Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3. \end{cases}$$

Với $m=0\Rightarrow f(x)=x^3-3\Rightarrow$ không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Với $m=3\Rightarrow f(x)=-3x^6+x^3-3\Rightarrow$ tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy có duy nhất một giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\left(m^3-m\right)x^{13}-mx^6+x^4+1$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Hàm đa thức $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi bậc cao nhất phải là bậc chẵn suy ra

$$m^3-m=0\Leftrightarrow\hoac{m=0\\m=\pm1.}$$

Với $m=0\Rightarrow f(x)=x^4+1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=0$ thỏa mãn.
Với $m=1\Rightarrow f(x)=-x^6+x^4+1$, không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=1$ không thỏa mãn.
Với $m=-1\Rightarrow f(x)=x^6+x^4+1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=-1$ thỏa mãn.
Vậy có 2 giá trị thực của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3-(m-1)x^2+2mx+1$. Để hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây ?

A $(-3;-1)$. B $(1;3)$. C $(3;4)$. D $(-1;1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4x^3+3x^2-2(m-1)x+2m$, $f''(x)=12x^2+6x-2(m-1)$.
Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=0$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0=0$. Suy ra

$$\heva{f'(0)=2m=0\\f''(0)=-2m+2\geq0}\Leftrightarrow m=0.$$

Thử lại: với $m=0\Rightarrow f(x)=x^4+x^3+x^2+1$ và $f(0)=1$.
Xét $f(x)-f(0)=x^4+x^3+x^2=x^2(x^2+x+1)\geq0,\forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra $m=0$ thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 6. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2mx^3+4mx^2-(2m+2)x-2021$ đạt tại $x_0=2$. Số phần tử của tập S là

A 1. B 0. C 2. D 12.

Lời giải.

$f'(x)=4x^3-6mx^2+8mx-2m-2$.
$f''(x)=12x^2-12mx+8m$.
Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=2$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0=2$. Suy ra

$$\heva{f'(2)=30-10m=0\\f''(2)=48-16m\geq0}\Leftrightarrow m=3.$$

Thử lại: với $m=3\Rightarrow f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x-2021$ và $f(2)=-2021$.
Xét $f(x)-f(2)=x^4-6x^3+12x^2-8x=(x-2)^2(x^2-2x)$ không thỏa mãn điều kiện không âm, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=-x^4-2mx^3+3mx^2-2mx-2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=1$. Số phần tử của tập S là

A 3. B 2. C 1. D 0.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-4x^3-6mx^2+6mx-2m$, $f''(x)=-12x^2-12mx+6m$.
Hàm đa thức đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x_0=1$ thì hàm số phải đạt cực đại tại $x_0=1$. Suy ra

$$\heva{f'(1)=-4-2m=0\\f''(1)=-12-6m\leq0}\Leftrightarrow m=-2.$$

Thử lại: với $m=-2\Rightarrow f(x)=-x^4+4x^3-6x^2+4x-2021$ và $f(1)=-2020$.
Xét $f(x)-f(1)=-x^4+4x^3-6x^2+4x-1=-(x-1)^4\leq0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra $m=-2$ thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^6+(m-2)x^5+(m^2-11)x^4+2021$ đạt tại $x_0=0$. Số phần tử của tập S là

(A) 34. (B) 42. (C) 35. (D) 37.

Lời giải.

Cách 1: Lập luận bản chất theo tư duy bất phương trình

Ta có $f(x)=x^6+(m-2)x^5+\left(m^2-11\right)x^4+2021 \geq f(0)=2021, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^4\left[x^2+(m-2)x+\left(m^2-11\right)\right] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+(m-2)x+\left(m^2-11\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta=(m-2)^2-4\left(m^2-11\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \geq \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3}. \end{array}\right.$$

Vì $m \in [-21;21]$ và m nguyên nên $\left[\begin{array}{l} -21 \leq m \leq -5 \\ 4 \leq m \leq 21. \end{array}\right.$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$.

$f'(x)=6x^5+5(m-2)x^4+4\left(m^2-11\right)x^3$.

$f''(x)=30x^4-20(m-2)x^3+12\left(m^2-11\right)x^2$.

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=0$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0=0$. Suy ra

$$\begin{cases} f'(0)=0=0 \\ f''(0)=0 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m.$$

Thử lại. Xét $f(x)-f(0)=x^6+(m-2)x^5+\left(m^2-11\right)x^4=x^4\left[x^2+(m-2)x+\left(m^2-11\right)\right] \geq 0$.

$$x^2+(m-2)x+(m^2-11) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta=(m-2)^2-4(m^2-11) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \geq \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3}. \end{array}\right.$$

Vì $m \in [-21;21]$ và m nguyên nên $\left[\begin{array}{l} -21 \leq m \leq -5 \\ 4 \leq m \leq 21. \end{array}\right.$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=(x-1)(x-2)\left(x^2-ax+b\right)+2021$. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2021. Giá trị của biểu thức $S=4a+b$ tương ứng bằng

(A) 5. (B) 0. (C) 10. (D) 14.

Lời giải.

Cách 1: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=(2x-3)\left(x^2-ax+b\right)+\left(x^2-3x+2\right)(2x-a)$.

$f''(x)=2\left(x^2-ax+b\right)+(2x-3)(2x-a)+(2x-3)(2x-a)+2\left(x^2-3x+2\right)$.

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thì hàm số phải đạt cực tiểu tại x_0. Suy ra $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0) \geq 0. \end{cases}$

Nhận thấy rằng $\min f(x)=2021=f(1)=f(2)$. Tức là hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$; $x=2$. Suy ra

$$\begin{cases} f'(1)=a-b-1=0 \\ f'(2)=4-2a+b=0 \\ f''(1)=2b-2 \geq 0 \\ f''(2)=16-6a+2b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2. \end{cases}$$

Thử lại

Với $a=3$; $b=2 \Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)\left(x^2-3x+2\right)+2021=(x-1)^2(x-2)^2+2021 \geq 2021$ (thỏa mãn).

Suy ra $a=3;\ b=2$ thỏa mãn. Suy ra $S=4a+b=14$.
Cách 2: Lập luận bản chất theo tư duy bất phương trình.
Ta có $f(x)=(x-1)(x-2)\left(x^2-ax+b\right)+2021\geq 2021, \forall x\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\left(x^2-ax+b\right)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra $\left(x^2-ax+b\right)\big|_{x=1;x=2}=0\Rightarrow \begin{cases}1-a+b=0\\4-2a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=2.\end{cases}$

Thử lại
Với $a=3;\ b=2$ thỏa mãn. Suy ra $S=4a+b=14$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^2+bx+2a+b$, với a, b là hai số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu ?
(A) 128. (B) 243. (C) 81. (D) 696.

Lời giải.
Ta có $f'(x)=6x^5+2ax+b;\ f''(x)=30x^4+2a$.
Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x_0=1$. Suy ra

$$\begin{cases}f'(x_1)=6+2a+b=0\\f''(x_1)=30+2a\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=-2a-6\\a\geq -15.\end{cases}$$

Thử lại
Với $\begin{cases}b=-2a-6\\a\geq -15\end{cases}\Leftarrow f(x)=x^6+ax^2-2(a+3)x-6$ và $f(1)=-a-11$.
$f(x)-f(1)=x^6+ax^2-2(a+3)x+a+5=(x-1)^2\left(x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5\right)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Xét hàm số $g(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5$ có

$$g'(x)=4x^3+6x^2+6x+4=(x+1)\left(4x^2+2x+4\right).$$

Khảo sát nhanh hàm số $y=g(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$a+3$	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ thì $a+3\geq 0\Leftrightarrow a\geq -3$.
Có $f(3)=11a+4b+729=11a+4(-2a-6)+729=3a+705\geq 3(-3)+705=696$.
Suy ra giá tri nhỏ nhất của $f(3)$ là 696.
Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3+ax^2+bx+b-1$. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in[-20;20]$ thỏa mãn bài toán?
(A) 30. (B) 23. (C) 22. (D) 24.

Lời giải.
Ta có $f'(x)=4x^3+3x^2+2ax+b;\ f''(x)=12x^2+6x+2a$.
Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x_0=1$. Suy ra

$$\begin{cases}f'(x_1)=2a+b+7=0\\f''(x_1)=2a+18\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=-2a-7\\a\geq -9.\end{cases}$$

Thử lại

Với $\begin{cases} b=-2a-7 \\ a\geq -9 \end{cases}$ suy ra $f(x)=x^4+x^3+ax^2+(-2a-7)x-2a-8$ và $f(1)=-3a-13$.

Xét $f(x)-f(1)=x^4+x^3+ax^2+(-2a-7)x+a+5=(x-1)^2\left(x^2+3x+a+5\right)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+3x+a+5\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta=3^2-4(x+5)\leq 0 \Leftrightarrow a\geq -\dfrac{11}{4}$.

Vì $a\in[-20;20]$ và a nguyên nên $-2\leq a\leq 20$.

Vậy có tất cả 23 giá trị a nguyên thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=(m+n-2)x^7+x^4+(m+2n-1)x^3+x^2+(2n-1)x+2$. Với m và n là hai tham số thực. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=2$. Giá trị của biểu thức $T=16m+2n$ bằng

A 22. B 38. C 46. D 79.

Lời giải.

Điều kiện để hàm số tồn tại giá trị nhỏ nhất là $m+n-2=0\Leftrightarrow m=2-n$.

$f(x)=x^4+(n+1)x^3+x^2+(2n-1)x+2$.

$f'(x)=4x^3+3(n+1)x^2+2x+2n-1$ và $f''(x)=12x^2+6(n+1)x+2$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=2$ thì

$$\begin{cases} f'(2)=14n+47=0 \\ f''(2)=62+12n\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow n=-\frac{47}{14}.$$

Thử lại Thay $n=-\dfrac{47}{14}$ vào ta được

$$f(x)-f(2)=x^4-\frac{33}{14}x^3+x^2-\frac{54}{7}x+\frac{100}{7}=(x-2)^2\left(x^2+\frac{23}{14}x+\frac{25}{7}\right)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $n=-\dfrac{47}{14}$, $m=2-n=\dfrac{75}{14}$. Suy ra $T=16m+2n=79$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+2bx^2+2cx+2b$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=1$ và $x_2=2$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b$ bằng

A 7. B 8. C 3. D 9.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4x^3+3ax^2+4bx+2c$ và $f''(x)=12x^2+6ax+4b$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=1$ và $x_2=2$ thì phải có

$$\begin{cases} f(1)=f(2) \\ f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \\ f''(1)\geq 0 \\ f''(2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a+6b+2c=-15 \\ 3a+4b+2c=-4 \\ 12a+8b+2c=-32 \\ 12+6a+4b\geq 0 \\ 48+12a+4b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=\dfrac{13}{2} \\ c=-6. \end{cases}$$

Thử lại Thay $a=-6$; $b=\dfrac{13}{2}$; $c=-6$ vào ta được $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-12x+13$ và $f(1)=9$.

Xét $f(x)-f(1)=x^4-6x^3+13x^2-12x+4=(x-1)^2(x-2)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Vậy $T=a+2b=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=0$ và $x_2=1$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b+c$ bằng

A 1. B 0. C 2. D -3.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ và $f''(x)=12x^2+6ax+2b$.
Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$ thì phải có

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\geq 0 \\ f''(1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ c=0 \\ 3a+2b+c=-4 \\ 2b\geq 0 \\ 12+6a+2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=0. \end{cases}$$

Thử lại Thay $a=-2;\ b=1;\ c=0$ vào ta được $f(x)=x^4-2x^3+x^2+1$ và $f(0)=f(1)=1$.
Xét $f(x)-f(1)=x^4-2x^3+x^2=x^2(x-1)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Vậy $T=a+2b+c=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=x^6-ax^5+2bx^4+1$ với a,b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=0$ và $x_2=1$. Giá trị của biểu thức $T=3a+4b$ bằng
(A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 0.

Lời giải.
Ta có $f'(x)=6x^5-5ax^4+8bx^3$ và $f''(x)=30x^4-20ax^3+24bx^2$.
Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$ thì phải có

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\geq 0 \\ f''(1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b=-1 \\ 0=0 \\ -5a+8b=-6 \\ 0\geq 0 \\ 30-20a+24b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Thử lại Thay $a=2;\ b=\dfrac{1}{2}$ vào ta được $f(x)=x^6-2x^5+x^4+1$ và $f(0)=f(1)=1$.
Xét $f(x)-f(1)=x^6-2x^5+x^4=x^4(x-1)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Vậy $T=3a+4b=8$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng b. Giá trị của biểu thức $T=a+3b+c$ bằng
(A) 3. (B) 5. (C) -6. (D) -1.

Lời giải.
Dễ thấy $\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}=b$.
Ta có $\begin{cases} \min f(x)=b\leq f(-1) \\ \min f(x)=b\leq f(1) \end{cases} \Rightarrow b\leq \dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$.
Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên $\min f(x)=f(-1)=f(1)$.
Ta có $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ và $f''(x)=12x^2+6ax+2b$.
Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=-1$ và $x_2=1$ thì phải có

$$\begin{cases} f(-1)=f(1) \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(-1)\geq 0 \\ f''(1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c=a+b+c \\ -4+3a-2b+c=0 \\ 4+3a+2b+c=0 \\ 12-6a+2b\geq 0 \\ 12+6a+2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0. \end{cases}$$

Thử lại Thay $a=0;\ b=-2;\ c=0$ vào ta được $f(x)=x^4-2x^2-1$ và $f(-1)=f(1)=b=-2$.
Xét $f(x)-b=f(x)-f(1)=x^4-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Vậy $a=0;\ b=-2;\ c=0$ suy ra $T=a+3b+c=-6$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=x^8+ax^5+bx^4+cx+2021$ với a,b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b$ bằng

(A) -1. (B) 1. (C) -2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\min f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)\geq f(0)=2021,\forall x\in\mathbb{R}$.
Dễ thấy để xuất hiện $(a+b)$ thì ta xét $f(1)=1+a+b+2021\geq f(0)=2021\Leftrightarrow a+b\geq -1$.
Dấu "=" xảy ra khi $f(1)=f(0)$ tức là khi đó $\min f(x)=f(0)=f(1)$.
Ta có $f'(x)=8x^7+5ax^4+4bx^3$ và $f''(x)=56x^6+20ax^3+12bx^2$.
Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$ thì phải có

$$\begin{cases}f(0)=f(1)\\f'(0)=0\\f'(1)=0\\f''(0)\geq 0\\f''(1)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1\\0=0\\5a+4b=-8\\0\geq 0\\56+20a+12b\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=3.\end{cases}$$

Thử lại Thay $a=-4;\ b=3$ vào ta được $f(x)=x^8-4x^5+3x^4+2021$ và $f(0)=f(1)=2021$.
Xét $f(x)-f(0)=x^8-4x^5+3x^4=x^4(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Vậy $a=-4;\ b=3$ suy ra $T_{min}=(a+b)_{min}=-1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^5+bx^4+1$ với a,b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2a-b$ bằng

(A) 4. (B) 8. (C) 16. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\min f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)\geq f(0)=1,\forall x\in\mathbb{R}$.
Dễ thấy để xuất hiện $(2a-b)$ thì ta xét $f(-2)=64-32a+16b+1\geq f(0)=1\Leftrightarrow 2a-b\leq 4$.
Dấu "=" xảy ra khi $f(-2)=f(0)$ tức là khi đó $\min f(x)=f(0)=f(-2)$.
Ta có $f'(x)=6x^5+5ax^4+4bx^3$ và $f''(x)=30x^6+20ax^3+12bx^2$.
Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=-2$ thì phải có

$$\begin{cases}f(0)=f(-2)\\f'(0)=0\\f'(-2)=0\\f''(0)\geq 0\\f''(-2)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=4\\0=0\\5a-2b=12\\0\geq 0\\480-160a+48b\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=4.\end{cases}$$

Thử lại Thay $a=4;\ b=4$ vào ta được $f(x)=x^6+4x^5+4x^4+1$ và $f(0)=f(-2)=1$.
Xét $f(x)-f(0)=x^6+4x^5+4x^4=x^4(x+2)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Vậy $a=4;\ b=4$ suy ra $T_{min}=(2a-b)_{min}=4$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha=\min f(x)$. Giá trị lớn nhất của α bằng

(A) 1. (B) -1. (C) -2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1=m\left(x^2-x\right)+\left(x^4-4x^3+x^2+1\right)$.
Dễ thấy $x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$
Biết rằng $\alpha=\min f(x)\leq f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $\begin{cases}\alpha\leq f(0)=1\\\alpha\leq f(1)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\alpha\leq f(1)=-1$.
Ta có $f'(x)=4x^3-12x^2+2(m+1)x-m$ và $f''(x)=12x^2-24x+2(m+1)$.
Ta tìm điều kiện dấu bằng xảy ra $\alpha=\min f(x)=f(1)=-1$.

Tức là ta tìm điều kiện để hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$.

$$\begin{cases} f'(1) = m - 6 = 0 \\ f''(1) = 2m - 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6.$$

Thử lại Thay $m = 6$ ta được
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ và $f(1) = -1$.
Xét $f(x) - f(1) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = (x-1)^2\left(x^2 - 2x + 2\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Vậy khi $m = 6$ thì $\alpha = \min f(x) = f(1) = -1$ là giá trị lớn nhất của α.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - mx^2 + 2mx + 3m$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha = \min f(x)$. Khi α đạt giá trị lớn nhất thì $x = x_0$ và $m = m_0$. Giá trị của biểu thức $(x_0 + m_0)$ bằng

(A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) -1. (D) $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^4 + x^3 - mx^2 + 2mx + 3m = m\left(-x^2 + 2x + 3\right) + \left(x^4 + x^3\right)$.
Dễ thấy $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$
Biết rằng $\alpha = \min f(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $\begin{cases} \alpha \leq f(-1) = 0 \\ \alpha \leq f(3) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \leq f(-1) = 0$.
Ta có $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2mx + 2m$ và $f''(x) = 12x^2 + 6x - 2m$.
Ta tìm điều kiện dấu bằng xảy ra $\alpha = \min f(x) = f(-1) = 0$.
Tức là ta tìm điều kiện để hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = -1$.

$$\begin{cases} f'(-1) = 4m - 1 = 0 \\ f''(-1) = 6 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

Thử lại Thay $m = \frac{1}{4}$ ta được
$f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ và $f(-1) = 0$.
Xét $f(x) - f(-1) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = (x+1)^2\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Suy ra khi $m = \frac{1}{4} = m_0$ thì $\alpha = \min f(x) = f(x_0) = f(-1) = 0$ là giá trị lớn nhất của α.
Vậy $(x_0 + m_0) = -\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^3 + mx^2 - (m+2)x$ với m là tham số thực. Biết rằng $\beta = \max f(x)$. Khi đó β đạt giá trị nhỏ nhất bằng

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x + m\left(x^2 - x\right)$,
$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$ suy ra $\max f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta chỉ ra tồn tại m để $\max f(x) = 0$ tại $x_0 = 0$. Khi đó, hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 0$. Suy ra $f'(0) = 0 \Rightarrow m = -2$.
Thử lại Với $m = -2$ thì $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 4x$.
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy với $m=-2$ thì $\max f(x)=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=x^6-6a^5x-5b$ với a và b là hai số thực không âm. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5. Giá trị lớn nhất của biểu thức ab tương ứng bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{6}{7}$. (C) $\dfrac{2}{7\sqrt{6}}$. (D) $\dfrac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Lời giải.
Ta có $f'(x)=6x^5-6a^5$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=a$.
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-5a^6-5b$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-5\Leftrightarrow -5a^6-5b=-5\Leftrightarrow b=1-a^6$.
Giả sử $h(a)=ab=a\left(1-a^6\right)=a-a^7$. Cho $h'(a)=1-7a^6=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}$.
Ta có bảng biến thiên

a	0		$\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}$		$+\infty$
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{6}{7\sqrt[6]{7}}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức ab bằng $\dfrac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+4y^2=4$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2+2xy+1}{2y^2+2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T=4M-4m$ bằng

(A) $\sqrt{113}$. (B) 36. (C) 12. (D) 64.

Lời giải.

Nếu $y=0 \Rightarrow x^2=4$ khi đó $P=\dfrac{5}{2}$.

Nếu $y\neq 0$ ta có $P=\dfrac{4x^2+8xy+4}{8y^2+8}=\dfrac{5x^2+8xy+4y^2}{2x^2+16y^2}=\dfrac{5\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+8\left(\dfrac{x}{y}\right)+4}{2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+16}$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$ ta được $P=\dfrac{5t^2+8t+4}{2t^2+16} \Leftrightarrow (5-2P)t^2+8t+4-16P=0$.

Nếu $P=\dfrac{5}{2}$ thì $t=\dfrac{9}{2}$.

Nếu $P\neq\dfrac{5}{2}$ thì phương trình bậc hai trên có nghiệm khi $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{11-\sqrt{113}}{8}\leq P\leq\dfrac{11+\sqrt{113}}{8}$.

Suy ra $M=\max P=\dfrac{11+\sqrt{113}}{8}$ và $m=\min P=\dfrac{11-\sqrt{113}}{8}$.

Vậy $T=4M-4m=\sqrt{113}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Biết rằng để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx+1$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 4 thì giá trị thực của tham số $m=\dfrac{a}{b}$, trong đó a,b là những số nguyên dương và phân số $m=\dfrac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $\max\limits_{[1;2]}\left\{x^2-mx+1\right\}=4 \Leftrightarrow x^3-mx+1\leq 4, \forall x\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\geq\dfrac{x^3-3}{x}, \forall x\in[1;2] \Leftrightarrow m\geq\max\limits_{[1;2]}\left\{\dfrac{x^3-3}{x}\right\}=\dfrac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m=\dfrac{5}{2}$. Suy ra $a=5$ và $b=2$.

Vậy $T=a+b=7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in[-50;50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-mx$ trên đoạn $[-1;3]$ nhỏ hơn hoặc bằng 60

(A) 53. (B) 44. (C) 58. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\max\limits_{[-1;3]}\left\{x^4-mx\right\}\leq 60 \Leftrightarrow x^4-mx\leq 60, \forall x\in[-1;3] \Leftrightarrow mx\geq x^4-60, \forall x\in[-1;3]$.

Với $x=0$, thỏa mãn.

Với $x\neq 0$ ta xét

$$\begin{cases}\begin{cases}m\in[-1;0)\\ mx\geq x^4-60\end{cases}\Leftrightarrow m\leq\dfrac{x^4-60}{x}, \forall x\in[-1;0) \Leftrightarrow m\leq\min\limits_{[-1;0)}\left\{\dfrac{x^4-60}{x}\right\}\Leftrightarrow m\leq 59\\ \begin{cases}m\in(0;3]\\ mx\geq x^4-60\end{cases}\Leftrightarrow m\geq\dfrac{x^4-60}{x}, \forall x\in(0;3] \Leftrightarrow m\geq\max\limits_{(0;3]}\left\{\dfrac{x^4-60}{x}\right\}\Leftrightarrow m\geq 7\end{cases}\Leftrightarrow 7\leq m\leq 59.$$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-50;50] \Rightarrow m\in\{7;8;\ldots;50\}$.

Vậy có 44 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in[-50;50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3mx$ trên đoạn $[1;3]$ lớn hơn hoặc bằng 40

(A) 52. (B) 51. (C) 49. (D) 50.

Lời giải.

Ta có $\max\limits_{[1;3]}\left\{x^3-3mx\right\}<40 \Leftrightarrow x^3-3mx<40, \forall x\in[1;3]$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{x^3-40}{3x}, \forall x\in[1;3] \Leftrightarrow m>\max\limits_{[1;3]}\left\{\dfrac{x^3-40}{3x}\right\}=-\dfrac{13}{9}$.

Suy ra, để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 40 thì $m \le -\dfrac{13}{9}$.
Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-50;50] \Rightarrow m \in \{-50;-49;\ldots;-2\}$.
Vậy có 49 giá trị nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 27. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ nằm trong $(6;20)$?

A) 1. B) 2. C) 4. D) 3.

Lời giải.

Đặt M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx^2$ trên đoạn $[1;2]$. Ta có $6<M<20$.
Để $M<20$ thì $x^3+mx^2<20, \forall x\in[1;2]$.
Từ đó, suy ra $m<\dfrac{20-x^3}{x^2}, \forall x\in[1;2] \Rightarrow m<\min\limits_{[1;2]}\left\{\dfrac{20-x^3}{x^2}\right\}=3$.
Tương tự, để $M\le 6$ thì $x^3+mx^2\le 6, \forall x\in[1;2] \Rightarrow m\le \min\limits_{[1;2]}\left\{\dfrac{6-x^3}{x^2}\right\}=-\dfrac{1}{2}$.
Do đó, để $M>6$ thì $m>-\dfrac{1}{2}$. Vậy $-\dfrac{1}{2}<m<3$, do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì giá trị thực của tham số m bằng ?

A) -1. B) 1. C) -2. D) 0.

Lời giải.

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì $x^3-mx^2\ge 1, \forall x\in[1;2]$ và dấu "=" phải xảy ra. Khi đó $m=\min\limits_{[1;2]}\left\{\dfrac{x^3-1}{x^2}\right\}=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 29. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2

A) 3. B) 27. C) 28. D) 33.

Lời giải.

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2 thì

$$\frac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}\ge 2, \forall x\in[1;4] \Rightarrow mx\le x\sqrt{x}-2x-2, \forall x\in[1;4] \Rightarrow m\le \frac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}, \forall x\in[1;4].$$

Suy ra $m\le \min\limits_{[1;4]}\left\{\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}\right\}$.
Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}$ thì $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^2}>0, \forall x\in[1;4]$.
Do đó, $m\le \min\limits_{[1;4]}\left\{\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}\right\}=g(1)=-3$. Vậy có tất cả 28 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ nhỏ hơn hoặc bằng 3

A) 35. B) 26. C) 11. D) 31.

Lời giải.

Vì $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x+1}$ là hàm liên tục trên $[1;2]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[1;2]$.
Ta có $\min\limits_{[1;2]} f(x)\le 3 \Leftrightarrow \exists x\in[1;2]: \dfrac{x^2+mx+1}{x+1}\le 3 \Leftrightarrow \exists x\in[1;2]: m\le \dfrac{-x^2+3x+2}{x}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{-x^2+3x+2}{x}$. Khi đó $m\le \max\limits_{[1;2]} g(x)\Leftrightarrow m\le 4$.

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in(-44;44)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx-1$ trên đoạn $[0;3]$ nằm trong $[-2;0]$. Số phần tử của tập S là

(A) 41. (B) 45. (C) 72. (D) 5.

Lời giải.

Vì hàm số $f(x)=x^3+mx-1$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $\min\limits_{[0;3]} f(x)\in[2;0]\Leftrightarrow -2\le \min\limits_{[0;3]} f(x)\le 0\quad(1)$.

Ta thấy $f(0)=-1<0,\forall m$ nên $\min\limits_{[0;3]} f(x)\le 0,\forall m$.

Suy ra $(1)\Leftrightarrow -2\le \min\limits_{[0;3]} f(x)\Leftrightarrow -2\le f(x),\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow x^3+mx-1\ge -1,\forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow m\ge -x^2-\dfrac{1}{x}\forall x\in(0;3]\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(0;3]}\left(-x^2-\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}-\sqrt[3]{2}$.

Vậy số giá trị nguyên của m thuộc $(-44;44)$ là 45.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2mx}{x^2+x+1}$ bằng $-\dfrac{1}{2}$. Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng

(A) $\dfrac{13}{8}$. (B) 1. (C) $\dfrac{11}{4}$. (D) $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2mx}{x^2+x+1}$ bằng $-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)\ge -\dfrac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$ và phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3x^2+(4m+1)x+1\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và phương trình $3x^2+(4m+1)x+1=0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(4m+1)^2-12\le 0\\ \Delta=(4m+1)^2-12\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \Delta=(4m+1)^2-12=0\Leftrightarrow 16m^2+8m-11=0.$$

Theo định lý Vi-et, ta có phương trình $16m^2+8m-11=0$ có hai nghiệm phân biệt m_1,m_2 thỏa mãn

$$\begin{cases}m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}\\ m_1\cdot m_2=-\dfrac{11}{16}\end{cases}\Rightarrow m_1^2+m_2^2=(m_1+m_2)^2-2m_1\cdot m_2=\dfrac{13}{8}.$$

Vậy tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng $\dfrac{13}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+m}{x^2+2x+2}$ lớn hơn $-\dfrac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng

(A) 31. (B) 32. (C) 11. (D) 2.

Lời giải.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\ge\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}.\end{array}\right.$

Dễ thấy $\dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}$ nên hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Khi đó $f(x)=\dfrac{x^2+m}{x^2+2x+2}\ge \min f(x)>-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3x^2+3m>-x^2-2x-2$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4x^2+2x+3m+2>0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta' = 1 - 12m - 8 < 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{7}{12}$.
Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-30; 30]$ suy ra $0 \le m \le 30$.
Vậy có tất cả 31 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + 4}{x^2 + 2x + 3}$ nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng
(A) 2. (B) 3. (C) 59. (D) 58.

Lời giải.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \ge \dfrac{c}{c'} \\ \dfrac{a}{a'} \ne \dfrac{b}{b'}. \end{array}\right.$
Trường hợp 1: Ta có $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \ge \dfrac{c}{c'} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1} = -\dfrac{2m}{2} > \dfrac{4}{3}$ nên vô nghiệm.
Trường hợp 2: $\dfrac{a}{a'} \ne \dfrac{b}{b'} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1} \ne -\dfrac{2m}{2} \Leftrightarrow m \ne -1$. Khi đó hàm số có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
Ta sẽ đi tìm điều kiện để $\min f(x) \ge \dfrac{1}{4}$.
Khi đó $f(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + 4}{x^2 + 2x + 3} \ge \min f(x) \ge \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 8mx + 16 \ge x^2 + 2x + 3$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Suy ra $3x^2 - 2(4m + 1)x + 13 \ge 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Suy ra $\Delta' = (4m + 1)^2 - 39 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1 - \sqrt{39}}{4} \le m \le \dfrac{-1 + \sqrt{39}}{4}$.
Suy ra để $\min f(x) < \dfrac{1}{4}$ thì $\left[\begin{array}{l} m > \dfrac{-1 - \sqrt{39}}{4} \\ m < \dfrac{-1 + \sqrt{39}}{4}. \end{array}\right.$
Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}$, $m \ne -1$, $m \in [-30; 30]$ suy ra $\left[\begin{array}{l} -30 \le m \le -2 \\ 2 \le m \le 30. \end{array}\right.$
Vậy có tất cả 58 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 2x + 2}$ bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng
(A) 32. (B) 36. (C) 40. (D) 48.

Lời giải.

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \le \dfrac{c}{c'} \\ \dfrac{a}{a'} \ne \dfrac{b}{b'}. \end{array}\right.$
Trường hợp 1: Ta có $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \le \dfrac{c}{c'} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1} = -\dfrac{m}{2} \le \dfrac{3}{2} \Rightarrow m = -2$.
Trường hợp 2: $\dfrac{a}{a'} \ne \dfrac{b}{b'} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1} \ne -\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow m \ne -2$.
Khi đó ta tìm điều kiện để $\max f(x) = 2$.
Mặt khác $f(x) = \dfrac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 2x + 2} \le \max f(x) = 2$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Phải có điều kiện dấu "=" xảy ra, ta suy ra $x^2 + (m + 4)x + 1 \ge 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Suy ra $\Delta = (m + 4)^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow -6 \le m \le -2$. Kết hợp điều kiện suy ra $m = -6$.
Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra $m \in \{-6; -2\} \Rightarrow S = \{-6; -2\}$.
Tổng bình phương các giá trị của S bằng 40.
Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) =$

$\dfrac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}$ nhỏ hơn 4. Số phần tử của tập S bằng

(A) 2. (B) 10. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\begin{bmatrix}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1}=-\dfrac{m}{1}\le\dfrac{2}{1}\\ \dfrac{1}{1}\ne-\dfrac{m}{1}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=-1\\ m\ne-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\forall m.$

Ta có $f(x)=\dfrac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}\le\max f(x)<4$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-mx+2<4\left(x^2+x+1\right)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3x^2+(m+4)x+2>0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow(m+4)^2-24<0\Leftrightarrow-4-2\sqrt{6}<m<-4-2\sqrt{6}.$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z}$, ta suy ra $m\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Vậy có tất cả 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}$ lớn hơn 6. Số phần tử của tập S bằng

(A) 17. (B) 16. (C) 43. (D) 35.

Lời giải.

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\begin{bmatrix}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\dfrac{2}{1}=\dfrac{-m}{-2}\le\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2}{1}\ne\dfrac{-m}{-2}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\text{Vô nghiệm}\\ m\ne-4\end{bmatrix}\Leftrightarrow m\ne-4.$

Để tìm điều kiện của m để $\max f(x)>6$ ta đi tìm điều kiện để $\max f(x)\le 6$.

Ta có $f(x)=\dfrac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}\le\max f(x)\le 6$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2x^2-mx+3\le 6\left(x^2-2x+2\right)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 4x^2+(m-12)x+9>0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow(m-12)^2-144\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 24.$

Vậy để $\max f(x)>6$ thì $\begin{bmatrix}m<0\\ m>24.\end{bmatrix}$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z}$, $m\ne-4$, $m\in[-30;30]$ suy ra $\begin{cases}m\ne-4\\ \begin{bmatrix}-30\le m\le-1\\ 25\le m\le 30.\end{bmatrix}\end{cases}$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

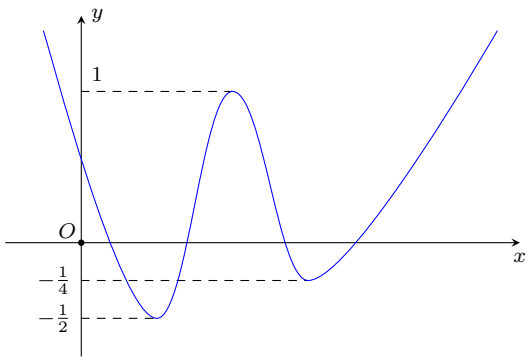
ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	7. C	8. C	9. D	10. D
11. B	12. D	13. A	14. B	15. B	16. C	17. A	18. A	19. B	20. D
21. A	22. D	23. A	24. A	25. B	26. C	27. D	28. D	29. C	30. A
31. B	32. A	33. A	34. D	35. C	36. D	37. D			

ĐỀ VDC SỐ 14: MIN, MAX CỦA HÀM HỢP

Câu 1.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau. Cho $a=|f(x)-|f(x)||$, $b=-a^2+a+\dfrac{3}{4}$ và $S=\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(b+1)^2\left[1+b^2(2-b)^2\right]}-\dfrac{2}{1+b\sqrt{2-b}}$. Có giá trị lớn nhất của S bằng $\dfrac{m}{n}$ và $k=\dfrac{(m+n)^2}{|mn|}$. Khẳng định đúng là



(A) $k=1$. (B) $k=\dfrac{49}{6}$. (C) $k=\dfrac{25}{4}$. (D) $k=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)-|f(x)|=\begin{cases}0 & \text{khi } f(x)\geq 0\\ 2f(x) & \text{khi } f(x)<0.\end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)\Rightarrow a=|f(x)-|f(x)||\in[0;1],\forall x\in\mathbb{R}$.

Có $b=-a^2+a+\dfrac{3}{4}\in\left[\dfrac{3}{4};1\right],\forall a\in[0;1]$. Xét $g(b)=(b+1)^2\left[1+b^2(2-b)^2\right]$

$$\begin{aligned}g'(b)&=2(b+1)\left[1+b^2(2-b)^2\right]+(b+1)^2\left[2b(2-b)^2-2b^2(2-b)\right]\\&=2(b+1)\left[1+b^2\left(4-4b+b^2\right)+(b+1)\left(4b-4b^2+b^3\right)-(b+1)\left(2b^2-b^3\right)\right]\\&=2(b+1)\left(3b^4-8b^3+2b^2+4b+1\right)\\&=2(b+1)\left[b(b-2)(3b^2-2b-2)+1\right].\end{aligned}$$

Ta có $b\in\left[\dfrac{3}{4};1\right]\Rightarrow b-2<0;3b^2-2b-2<0\Rightarrow g'(b)>0,\forall b\in\left[\dfrac{3}{4};1\right]$.

Suy ra hàm số $g(b)=(b+1)^2\left[1+b^2(2-b)^2\right]$ đồng biến trên $\left[\dfrac{3}{4};1\right]$.

Suy ra $g(b)\leq g(1)=8,\forall b\in\left[\dfrac{3}{4};1\right]$.

Xét $h(b)=-\dfrac{2}{1+b\sqrt{2-b}}\Rightarrow h'(b)=-\dfrac{4-3b}{\sqrt{2-b}\left(1+b\sqrt{2-b}\right)^2}$

$\Rightarrow h'(b)>0,\forall b\in\left[\dfrac{3}{4};1\right]\Rightarrow h(b)\leq h(1)=-1,\forall b\in\left[\dfrac{3}{4};1\right]$

$\Rightarrow S=\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(b+1)^2\left[1+b^2(2-b)^2\right]}-\dfrac{2}{1+b\sqrt{2-b}}\leq\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{8}-1=-\dfrac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $b=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của S bằng $-\dfrac{1}{4}$ và $k=\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) -16. (B) 16. (C) -12. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\left|x^3-3x+m\right|\leq 16,\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow -16\leq x^3-3x+m\leq 16,\forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow -16-m\leq x^3-3x\leq 16-m,\forall x\in[0;3]$.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x$ với $x\in[0;3]$.

Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{[0;3]}g(x)=18\\ \min\limits_{[0;3]}g(x)=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}18\leq 16-m\\ -2\geq -16-m\end{cases}\Leftrightarrow -14\leq m\leq -2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} m=-14 \\ m=-2 \end{array}\right.$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -16.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2\left(x+m^2\right)-\dfrac{3}{2}m$ (m là số thực). Gọi tổng các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|+\min\limits_{[1;2]}|f(x)|=\dfrac{9}{4}$ là $S=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ (với $a,b\in\mathbb{R}$). Giá trị $\dfrac{b}{a}$ bằng

A $\dfrac{5}{18}$. B $\dfrac{9}{5}$. C $\dfrac{36}{5}$. D $\dfrac{18}{5}$.

Lời giải.

$f'(x)=(x-1)\left(3x+2m^2-1\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(3x+2m^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\notin(1;2) \\ x=\dfrac{1-2m^2}{3}\notin(1;2),\forall m. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{3}{2}m$	↗	$m^2-\dfrac{3}{2}m+2$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[1;2]}f(x)=-\dfrac{3}{2}m$ và $\max\limits_{[1;2]}f(x)=m^2-\dfrac{3}{2}m+2>0,\forall m$.

Xét phương trình $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|+\min\limits_{[1;2]}|f(x)|=\dfrac{9}{4}$ (1).

Trường hợp 1: $-\dfrac{3}{2}m>0\Leftrightarrow m<0$.

$(1)\Leftrightarrow m^2-\dfrac{3}{2}m+2-\dfrac{3}{2}m=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow m^2-3m-\dfrac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3+\sqrt{10}}{2} \\ m=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}. \end{array}\right.$

Do $m<0$ nên $m=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}$.

Trường hợp 2: $-\dfrac{3}{2}m\le0\Leftrightarrow m\ge0$.

$(1)\Leftrightarrow\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=\dfrac{9}{4}$.

$\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=\max\left\{\dfrac{3m}{2};m^2-\dfrac{3m}{2}+2\right\}$.

☑ $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3m}{2}=\dfrac{9}{4} \\ \dfrac{3m}{2}\ge m^2-\dfrac{3m}{2}+2 \end{array}\right.\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (nhận).

☑ $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} m^2-\dfrac{3m}{2}+2 \\ \dfrac{3m}{2}\le m^2-\dfrac{3m}{2}+2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3+\sqrt{13}}{4}\ \text{(loại)} \\ m=\dfrac{3-\sqrt{13}}{4}\ \text{(loại)}. \end{array}\right.$

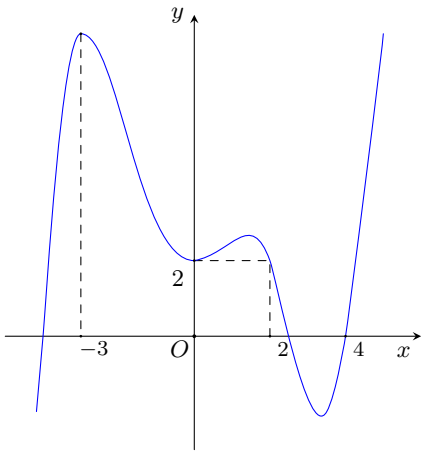
Suy ra $S=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{36}-\sqrt{10}\right)$ nên $a=36$ và $b=10$.

Vậy giá trị $\dfrac{b}{a}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2}; 2\right]$ bằng



(A) $f(0)$. (B) $f(-3) + 6$. (C) $f(2) - 4$. (D) $f(4) - 8$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x$, với $x \in \left[-\dfrac{3}{2}; 2\right] \Rightarrow t \in [-3; 4]$.

Xét hàm $h(t) = f(t) - 2t$ trên $[-3; 4]$, có $h'(t) = f'(t) - 2$.

Cho $h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [-3; 4] \\ t = 2 \in [-3; 4]. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$ trên $[-3; 4]$

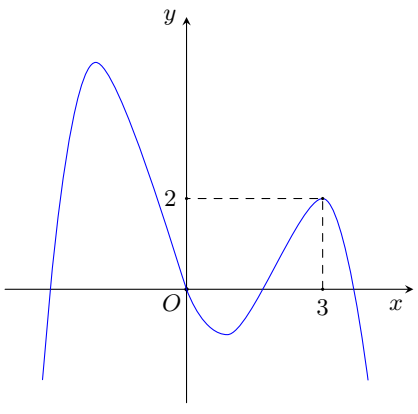
t	-3		0		2		4
$h'(t)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗		↗	$h(2)$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{\left[-\frac{3}{2};2\right]} g(x) = \max\limits_{[-3;4]} h(t) = h(2) = f(2) - 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của x sao cho hàm số $g(x) = \dfrac{2f(x) - 2}{f^2(x) - 2f(x) + 2}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là



(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Đặt $t = f(x)$, với $t \in (-\infty; a], a > 2$.

Xét hàm số $h(t) = \dfrac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2}$, $t \in (-\infty; a], a > 2$.

$h'(t)=\dfrac{-2t^2+4t}{\left(t^2-2t+2\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2.\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$

t	$-\infty$		0		2		a
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$h(a)$
				-1			

Ta có $h(a)=\dfrac{2a-2}{a^2-2a+2}>0,\forall a>2$ nên từ bảng biến thiên, suy ra

- $\max\limits_{\mathbb{R}}g(x)=\max\limits_{(-\infty;a]}h(t)=1\Leftrightarrow t=2$ hay $f(x)=2$ (phương trình này có 3 nghiệm).
- $\min\limits_{\mathbb{R}}g(x)=\min\limits_{(-\infty;a]}h(t)=-1\Leftrightarrow t=0$ hay $f(x)=0$ (phương trình này có 4 nghiệm).

Vậy có tất cả 7 giá trị của x sao cho hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất.
Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$. Số giá trị của m thỏa mãn $\max\limits_{[1;2]}f(x)+\min\limits_{[1;2]}f(x)=\dfrac{16}{3}$ là

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\max\limits_{[1;2]}f(x)+\min\limits_{[1;2]}f(x)=\dfrac{16}{3}\quad(1)$.

Đặt $h(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$. Ta có $h'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=1$ thì $\max\limits_{[1;2]}f(x)=\min\limits_{[1;2]}f(x)=1$ (không thỏa).

Nếu $m\neq1$ thì $h'(x)\neq0$ và $\forall x\neq-1$ ta có $h(1)=\dfrac{m+1}{2}$, $h(2)=\dfrac{m+2}{3}$.

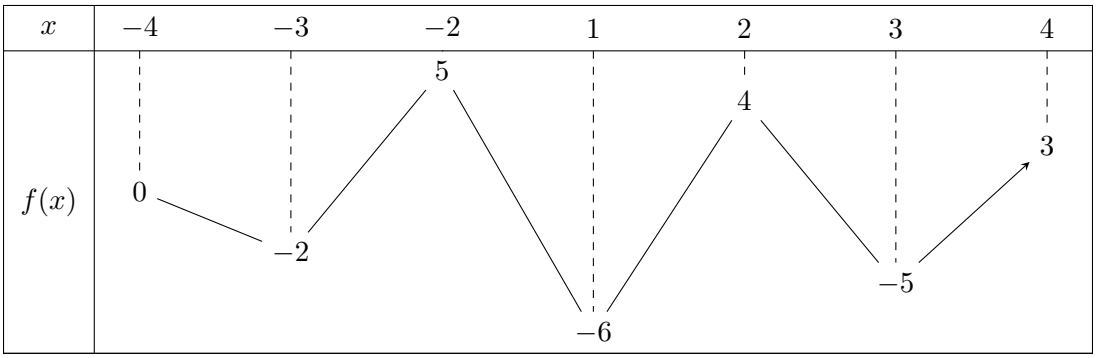
- Trường hợp 1: $\begin{cases}h(1)\geq0\\h(2)\geq0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq-1$ ta có $(1)\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn).
- Trường hợp 2: $\begin{cases}h(1)\leq0\\h(2)\leq0\end{cases}\Leftrightarrow m\leq-2$ ta có $(1)\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=-\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow m=-\dfrac{39}{5}$ (thỏa mãn).
- Trường hợp 3: $\begin{cases}h(1)\cdot h(2)<0\\\left|\dfrac{m+1}{2}\right|\leq\left|\dfrac{m+2}{3}\right|\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{7}{5}<m<-1.$

  Khi đó $(1)\Leftrightarrow\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow m=14$ (không thỏa mãn).
- Trường hợp 4: $\begin{cases}h(1)\cdot h(2)<0\\\left|\dfrac{m+2}{3}\right|\leq\left|\dfrac{m+1}{2}\right|\end{cases}\Leftrightarrow-2<m<-\dfrac{7}{5}.$

  Khi đó $(1)\Leftrightarrow-\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow m=-\dfrac{35}{3}$ (không thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

(A) 12. (B) 11. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $t=f\left(x^3+2x\right)$. Vì $x\in[-1;1]$ nên $t\in[-6;5]$. Khi đó, $g(x)=|t+n|$ với $n=3f(m)$.

Do đó $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=\max\{|n+5|;|n-6|\}=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|n+5|=8\\|n+5|\geq|n-6|\end{cases}\Leftrightarrow n=3\\\begin{cases}|n-6|=8\\|n-6|>|n+5|\end{cases}\Leftrightarrow n=-2.\end{array}\right.$

- $n=3\Leftrightarrow 3\cdot f(m)=3\Leftrightarrow f(m)=1$, suy ra có 5 giá trị của m.
- $n=-2\Leftrightarrow 3\cdot f(m)=-2\Leftrightarrow f(m)=-\dfrac{2}{3}$, suy ra có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2: Vì $x\in[-1;1]$ nên $-3\leq x^3+3x\leq 3\Rightarrow -6\leq f\left(x^3+3x\right)\leq 5$.

Ta có $\left|f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\right|\leq 8,\ \forall x\in[-1;1]\Leftrightarrow -8\leq f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\leq 8,\ \forall x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x^3+3x\right)\leq 8-3f(m)\\-8-3f(m)\leq f\left(x^3+3x\right)\end{cases}\forall x\in[-1;1]\Rightarrow\begin{cases}5\leq 8-3f(m)\\-8-3f(m)\leq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)\leq 1\\f(m)\geq -\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Do đó $\max\left|f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\right|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}fm)=1\\f(m)=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

Với $f(m)=1$, có 5 giá trị của m. Với $f(m)=-\dfrac{2}{3}$, có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=8x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $|f(x)|\leq 1,\forall x\in[-1;1]$. Tính $S=a^2+b^2+c^2+d^2$.

(A) 60. (B) 75. (C) 70. (D) 65.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}|f(-1)|\leq 1\\\left|f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\leq 1\\|f(0)|\leq 1\\\left|f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\leq 1\\|f(1)|\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|8-a+b-c+d|\leq 1\\\left|2-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|\leq 1\\|d|\leq 1\\\left|2+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|\leq 1\\|8+a+b+c+d|\leq 1.\end{cases}$

Từ đó $|4+b+2d|\leq\left|2-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|+\left|2+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|\leq 2\Rightarrow\left|2+\dfrac{b}{2}+d\right|\leq 1$.

Tương tự: $|16+2b+2d|\leq 2\Rightarrow|8+b+d|\leq 1$.

Dấu "=" xảy ra kết hợp với $|d| \le 1$ khi $\begin{cases} 2+\dfrac{b}{2}+d=-1 \\ 8+b+d=1 \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ b=-8. \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} |-a-c+1| \le 1 \\ \left|-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}-\dfrac{c}{\sqrt{2}}-1\right| \le 1 \\ \left|\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{c}{\sqrt{2}}-1\right| \le 1 \\ |a+c+1| \le 1 \end{cases}$, dấu "=" xảy ra khi $a=c=0$.

Vậy $f(x)=8x^4-8x^2+1$.

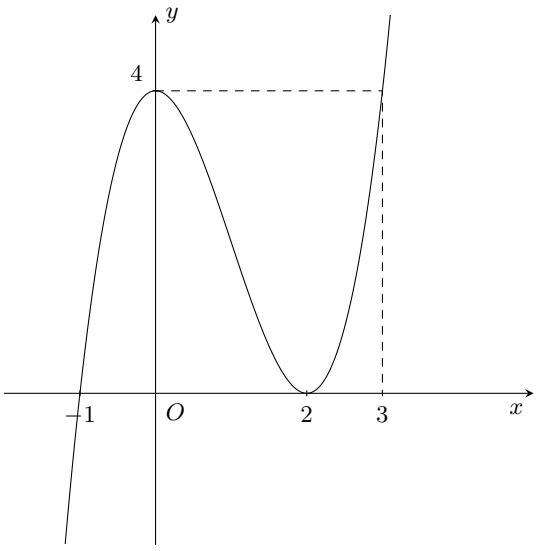
Suy ra $a^2+b^2+c^2+d^2=65$.

Chú ý: Ta có thể suy luận như sau để được nhanh đáp số:

Vì $\cos(4t)=8\cos^4 t-8\cos^2 t+1$ nên nếu đặt $x=\cos t$ thì $\cos(4t)=8x^4-8x^2+1$ và như vậy hàm $f(x)=8x^4-8x^2+1$ thỏa mãn $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+|4x-2|+|6-4x|}{|2x-1|+|2x-3|}$. Đặt $h(x)=f\left(g(x)\right)-f\left(3-2x+x^2\right)+f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right)$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $h(x)$. Giá trị lớn nhất của M thuộc khoảng nào sau đây?



(A) $(0;2)$. (B) $(2;4)$. (C) $(4;5)$. (D) $(5;10)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in [0;2]$. Ta có: $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+|4x-2|+|6-4x|}{|2x-1|+|2x-3|}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{|2x-1|+|2x-3|}+2$.

Do $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^2=2+2\sqrt{x(2-x)} \le 4$ vì $\sqrt{x(2-x)} \le 1, \forall x \in [0;2]$.

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2-x} \le 2 \le |2x-1|+|3-2x| \Rightarrow 2 < g(x) \le 3 \Rightarrow f\left(g(x)\right) \le 4 \quad (1)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $3-2x+x^2 \in [2;3], \forall x \in [0;2] \Rightarrow -f\left(3-2x+x^2\right) \le 0 \quad (2)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$. Ta có: $2-\sqrt{4-m^2} \in [0;2] \Rightarrow f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right) \le 4 \quad (3)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=0$.

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow h(x) \le 4-0+4=8 \Rightarrow \max h(x)=8 \Leftrightarrow x=1;\ m=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}$ với m là tham số .Tìm tham số m để $\min\limits_{[-1;1]}|f(x)|>\dfrac{3}{4}$.

(A) $m>\dfrac{1}{4}$. (B) $m<\dfrac{1}{5}$. (C) $m \in \mathbb{R}$. (D) $\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\min\limits_{[-1;1]}|f(x)|>\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow|f(x)|>\dfrac{3}{4},\forall x\in[-1;1]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)>\dfrac{3}{4},\ \forall x\in[-1;1]\quad(1)\\ f(x)<-\dfrac{3}{4},\ \forall x\in[-1;1]\quad(2).\end{array}\right.$

☑ Trường hợp 1: $f(x)>\dfrac{3}{4},\forall x\in[-1;1]$.

Nhận thấy $f(0)=-2<\dfrac{3}{4}$. Nên trường hợp (1) không tìm được m.

☑ Trường hợp 2: $f(x)<-\dfrac{3}{4},\ \forall x\in[-1;1]$.

Ta có

$$\begin{aligned}&f(x)<-\frac{3}{4},\ \forall x\in[-1;1]\\ \Leftrightarrow\ &8x^4-4mx-16<-3x-6,\forall x\in[-1;1]\\ \Leftrightarrow\ &4mx>8x^4+3x-10,\forall x\in[-1;1]\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}0>-10,\ \text{khi } x=0\\ 4m>8x^3+3-\dfrac{10}{x},\forall x\in(0;1]\quad(*)\\ 4m<8x^3+3-\dfrac{10}{x},\forall x\in[-1;0)\end{cases}\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x)=8x^3+3-\dfrac{10}{x}$ có $g'(x)=24x^2+\dfrac{10}{x^2}=\dfrac{24x^4+10}{x^2}>0,\forall x\neq 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
$g'(x)$	$+$		$\|$	$+$	
$g(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty\ \|\ -\infty$	$\nearrow$	1

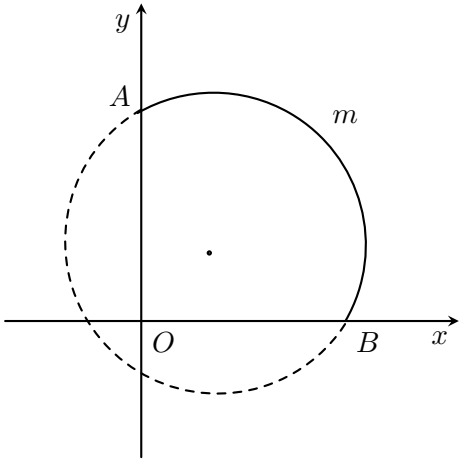
Dựa vào bảng biến thiên $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\in\mathbb{R},\ \text{khi } x=0\\ 4m>\max\limits_{(0;1)}g(x)\\ 4m<\min\limits_{[-1;0]}g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m>1\\ 4m<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{4}\\ m<\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$ là

(A) $\min P=\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$. (B) $\min P=9+3\sqrt{15}$. (C) $\min P=-63$. (D) $\min P=-91$.

Lời giải.



Cách 1:
Đặt $X=\sqrt{x+1}$, $Y=\sqrt{y+2}$ với $X,Y\geq 0$ suy ra $x=X^2-1$, $y=Y^2-2$.
Ta có: $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y\Rightarrow X^2+Y^2-3X-3Y-3=0\quad(1)$.
Tập hợp các điểm $M(X;Y)$ thỏa mãn phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.
Gọi $A=(C)\cap(Oy)\Rightarrow A\left(0;\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$; $B=(C)\cap(Ox)\Rightarrow B\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2};0\right)$.
Vì $X,Y\geq 0$ nên ta chỉ xét các điểm $M\in\overset{\frown}{AmB}$.
Ta có: $P=x+y=X^2+Y^2-3=OM^2-3$ suy ra $P_{\min}\Leftrightarrow OM_{\min}=OA=OB$.
Mặt khác $OA=\sqrt{0^2+\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2}=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.
Vậy $\min P=OA^2-3=\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2-3=\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$.

Cách 2:
Điều kiện xác định $x\geq 1$; $y\geq -2$. Ta có

$$\begin{aligned}
&x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y\\
\Leftrightarrow\ &x+y=3\sqrt{x+1}+3\sqrt{y+2},(x+y>0).\\
\Rightarrow\ &(x+y)^2=9(x+y+3)+18\sqrt{(x+1)(y+2)}\\
\Rightarrow\ &(x+y)^2-9(x+y)-27\geq 0\\
\Rightarrow\ &x+y\geq\frac{9+3\sqrt{21}}{2}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=\dfrac{11+3\sqrt{21}}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y=-2\\ x=\dfrac{13+3\sqrt{21}}{2}\end{cases}$.
Vậy $\min P=\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x=-1\\ y=\dfrac{11+3\sqrt{21}}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y=-2\\ x=\dfrac{13+3\sqrt{21}}{2}\end{cases}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$ và $g(x)=|f(2-\cos x)+m|$ (m là tham số thực), gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $3\max\limits_{\mathbb{R}}g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}}g(x)=10$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

(A) -16. (B) 12. (C) -32. (D) -28.

Lời giải.
Đặt $t=2-\cos x,\ t\in[1;3]$.Ta có $f(t)=t^3-3t$; $g_1(t)=\left|t^3-3t+m\right|$.
Xét hàm số $h(t)=t^3-3t+m$ trên đoạn $[1;3]$; $h'(t)=3t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\text{ (thỏa mãn)}\\ t=-1\text{ (không thỏa mãn).}\end{array}\right.$

$h(1)=m-2$, $h(3)=m+18$.

☑ **Trường hợp 1:** $m>2 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t)=m-2 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t)=m+18. \end{cases}$

Từ giả thiết bài toán ta có $3(m+18)+m-2=100 \Leftrightarrow m=12$ (thỏa mãn).

☑ **Trường hợp 2:** $m<-18 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t)=-m-18 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t)=-m+2. \end{cases}$

Từ giả thiết bài toán ta có $3(-m+2)-m-18=100 \Leftrightarrow m=-28$ (thỏa mãn).

☑ **Trường hợp 3:** $-18\le m\le 2 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t)=0 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t)=\max\{|m-2|;|m+18|\}. \end{cases}$

Xét $|m-2|\ge|m+18| \Leftrightarrow m\le -8$.

Từ giả thiết bài toán ta có $3|m-2|=100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{106}{3} \text{ (không thỏa mãn)} \\ m=-\dfrac{94}{3} \text{ (không thỏa mãn)} \end{array}\right.$ do $-18\le m\le -8$.

Xét $|m+18|\ge|m-2| \Leftrightarrow m\ge -8$.

Từ giả thiết bài toán ta có $3|m+18|=100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{154}{3} \text{ (không thỏa mãn)} \\ m=-\dfrac{46}{3} \text{ (không thỏa mãn)} \end{array}\right.$ do $-8\le m\le 2$.

Vậy $S=\{12;-28\}$. Do đó tổng các phần tử của S là -16.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{2x^2+2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Có bao nhiêu cặp số (a,b) với $a,b\in\mathbb{Z}$ sao cho $M^2+m^2\le 5$?

(A) 51. (B) 89. (C) 198. (D) 102.

Lời giải.

Cách 1:

Tập xác định $D=\mathbb{R} \Rightarrow$ với mọi $x\in\mathbb{R}$: $y=\dfrac{ax+b}{2x^2+2} \Leftrightarrow 2yx^2-ax+2y-b=0 \quad (1)$.

Để có $\max y, \min y$ thì phương trình (1) phải có nghiệm x.

☑ Trường hợp 1: $y=0$, khi đó $(1) \Leftrightarrow -ax-b=0$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \\ a\ne 0. \end{array}\right.$

Với $a=b=0$ thì $y=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $\min y+\max y=0\le 5$ (thoả mãn).

Với $a\ne 0$ thì $y=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$.

☑ Trường hợp 2: $y\ne 0$. Xét $\Delta=-16y^2+8by+a^2$.

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow -16y^2+8by+a^2\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}\le y\le \dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{4}$

$\Rightarrow M=\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{4}; m=\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}$.

Ta có $M^2+m^2=\dfrac{a^2+2b^2}{8}\le 5 \Rightarrow a^2+2b^2\le 40 \quad (*)$.

Suy ra $b^2\le 20 \Rightarrow -4\le b\le 4$ (do $b\in\mathbb{Z}$).

Nhận xét nếu $a^2\le M$ thì có $2\times[\sqrt{M}]+1$ số nguyên a thoả mãn.

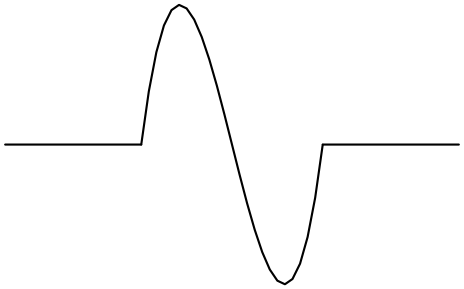
Với $b=\pm 4 \Rightarrow a^2\le 8$. Có 5 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 10 cặp $(a;b)$.

Với $b=\pm 3 \Rightarrow a^2\le 22$. Có 9 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 18 cặp $(a;b)$.

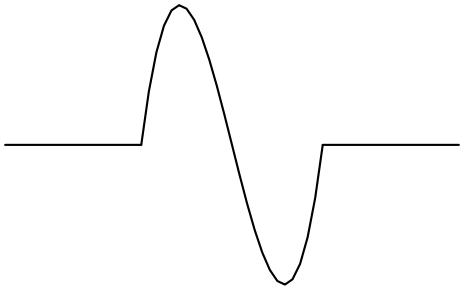
Với $b=\pm 2 \Rightarrow a^2\le 32$. Có 11 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 22 cặp $(a;b)$.

Với $b=\pm 1 \Rightarrow a^2 \leq 38$. Có 13 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 26 cặp $(a;b)$.
Với $b=0 \Rightarrow a^2 \leq 40$. Có 13 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 13 cặp $(a;b)$.
Tổng cộng có 89 cặp $(a;b)$ cần tìm.

Cách 2:
$(C): y=\dfrac{ax+b}{2x^2+2} \Rightarrow y'=\dfrac{-ax^2-2bx+a}{2\left(x^2+1\right)^2}$.
Nếu $a=b=0$ thì $y=0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $M=m=0 \Rightarrow M^2+m^2 \leq 5$ (thoả mãn).
Xét a, b không đồng thời bằng 0. Khi đó $y'=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.
Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2b}{a} \\ x_1.x_2=-1 \end{cases}$ (giả sử $x_1<x_2$).
$\lim\limits_{x \to \pm\infty}=0$ nên (C) có dạng



hoặc



M, m nhận $y(x_1)$, $y(x_2)$. Ta có công thức cực trị của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ là $y(x_{\text{ct}})=\dfrac{u'}{v'}=\dfrac{a}{4x_{\text{ct}}}$
$\Rightarrow M^2+m^2=\dfrac{a^2}{4^2x_1^2}+\dfrac{a^2}{4^2x_2^2}=\dfrac{a^2}{16}\left(\dfrac{4b^2}{a^2}+2\right) \leq 5 \Leftrightarrow 2b^2+a^2 \leq 40$.
(đến đây thực hiện tương tự cách 1).
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+\left(3-3m^2\right)x+1\right|$. Tìm $m \in \left(-\dfrac{2}{3};0\right)$ để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4.

(A) $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. (B) $m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$. (C) $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$. (D) $m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-(m+2)x^2+(3-3m^2)x+1$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$.
Suy ra $f'(x)=x^2-2(m+2)x+3-3m^2=(x+m-1)(x-3m-3)$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1-m \\ x_2=3+3m. \end{array}\right.$
Vì $m \in \left(-\dfrac{2}{3};0\right)$ nên $\begin{cases} x_1 \in \left(1;\dfrac{5}{3}\right) \\ x_2 \in (1;3) \end{cases} \Rightarrow x_1,\, x_2 \notin (-1;1)$.
Ta có hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $(-1;1)$.
Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\limits_{[-1;1]}\{|f(-1)|;|f(1)|\}$.

$$|f(1)|=\left|-3m^2-m+\frac{7}{3}\right|=-3m^2-m+\frac{7}{3}\Leftrightarrow |f(-1)|=\left|3m^2-m-\frac{13}{3}\right|=-3m^2+m+\frac{13}{3}.$$

$$\max_{[-1;1]} y=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|f(1)|=4\\|f(-1)|\le 4\end{cases}\\ \begin{cases}|f(1)|\le 4\\|f(-1)|=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3m^2-m+\dfrac{7}{3}=4\\-3m^2+m+\dfrac{13}{3}\le 4\end{cases}\\ \begin{cases}-3m^2-m+\dfrac{7}{3}\le 4\\-3m^2+m+\dfrac{13}{3}=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\frac{1-\sqrt{5}}{6}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Tìm số giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m\right|$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 18.

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $f(x)=3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m$ là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Ta có $f(1)=7m-1$ và $f(2)=m+16$.

Điều kiện cần: giả sử $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=18\Rightarrow \begin{cases}|f(1)|=|7m-1|\le 18\\|f(2)|=|m+16|\le 18\end{cases}\Rightarrow -\frac{17}{7}\le m\le 2.$

Vậy chỉ cần xét $m\in\left[-\frac{17}{7};2\right]$.

Điều kiện đủ: Ta có $f'(x)=12(x-1)\left(x^2-m\right)$.

Trường hợp 1: $-\frac{17}{7}\le m\le 1$, khi đó $f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;2)$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;2)$, mà $f(2)=m+16\in(0;17)$ nên yêu cầu bài toán tương đương $f(1)=7m-1=-18\Leftrightarrow m=-\frac{17}{7}$.

Trường hợp 2: $1<m\le 2$, khi đó $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{m}\in(1;2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$f(1)$	↘	$f(\sqrt{m})$	↗	$f(2)$

Với $f(\sqrt{m})=3m^2-4m\sqrt{m}-6m^2+12m\sqrt{m}+m=3m\sqrt{m}\left(2-\sqrt{m}\right)+2m\sqrt{m}+m>0$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(1)=7m-1=18\\f(2)=m+16=18\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{19}{7}\ \text{(không thỏa mãn)}\\m=2.\end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn là $m=-\frac{17}{7}$, $m=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x)-x]\cdot f(x)=x^6+3x^4+2x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị của $3M-m$ bằng

(A) 33. (B) -3. (C) 4. (D) -28.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&[f(x)-x]\cdot f(x)=x^6+3x^4+2x^2\\\Leftrightarrow\ &[f(x)-x]\cdot f(x)=\left(x^3+2x\right)\left(x^3+2x-x\right),\forall x\in\mathbb{R}\\\Rightarrow\ &\left[f(x)-x^3-2x\right]\cdot\left[f(x)+x^3-x\right]=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x)=x^3+2x \\ f(x)=-x^3+x. \end{array}\right.$$

Vì $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại $f(x)=-x^3+x$
$\Rightarrow f(x)=x^3+2x \Rightarrow f'(x)=3x^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow f(1)=3=\min\limits_{[1;2]} f(x)=m; f(2)=12=\max\limits_{[1;2]} f(x)=M.$
Suy ra $3M-m=3\cdot 12-3=33$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+4x$ bằng -1.
(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}$ và $y=-1$ có nghiệm.
Ta có $y\geq -1, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left|x^2-2x+m\right|+4x\geq -1, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left|x^2-2x+m\right|\geq -4x-1, \forall x\in\mathbb{R} \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+m\leq 4x+1, \forall x\leq -\dfrac{1}{4} \\ x^2-2x+m\geq -4x-1,\ \forall x\leq -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \text{ (vì } x>-\frac{1}{4} \text{ nên } (*) \text{ luôn đúng)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -x^2+6x+1, \forall x\leq -\dfrac{1}{4} \\ m\geq -x^2-2x-1, \forall x\leq -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow m\geq 0 \quad (1).$$

Ta có $y=-1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left|x^2-2x+m\right|=-4x-1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+m=4x+1 \\ x^2-2x+m=-4x-1 \end{array}\right.$ có nghiệm $x\leq -\dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-x^2+6x+1 \\ m=-x^2-2x-1 \end{array}\right. \text{ có nghiệm } x\leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -\dfrac{9}{16} \\ m\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\leq 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $m=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên $[1;3]$ không vượt quá 20?
(A) 33. (B) 34. (C) 35. (D) 36.

Lời giải.
Đặt $g(x)=x^3-12x+m \Rightarrow g'(x)=3x^2-12$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in(1;3) \\ x=-2\notin(1;3). \end{array}\right.$
Ta có $g(1)=m-11$; $g(2)=m-16$; $g(3)=m-9 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} g(x)=m-16; \max\limits_{[1;3]} g(x)=m-9.$
Do đó $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\max\{|m-9|;|m-16|\}$.

$$\left\{\begin{array}{l} |m-9|\leq 20 \\ |m-16|\leq 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -20\leq m-9\leq 20 \\ -20\leq m-16\leq 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -11\leq m\leq 29 \\ -4\leq m\leq 36 \end{array}\right. \Leftrightarrow -4\leq m\leq 29$$

Vậy có 34 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

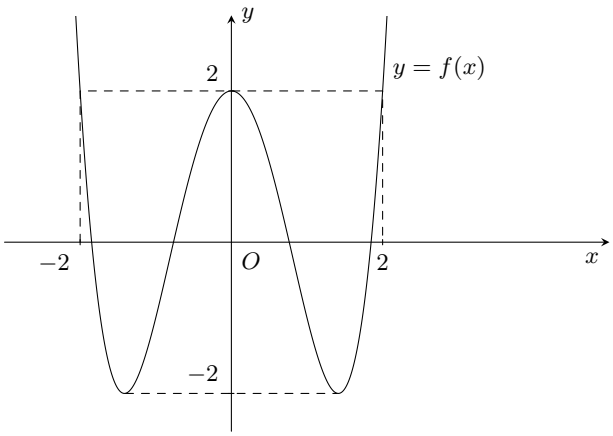
Câu 19. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của biểu thức $a+2b$ khi M nhỏ nhất là
(A) 3. (B) -4. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.
M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1;3]$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M\geq f(-1) \\ M\geq f(3) \\ 2M\geq 2f(1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} M\geq |1-a+b| \\ M\geq |9+3a+b| \\ 2M\geq 2|1+a+b| \end{array}\right.$$

$\Rightarrow 4M \geq |1-a+b|+|9+3a+b|+2|-1-a-b| \geq |1-a+b+9+3a+b-2-2a-2b|$
$\Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2 \Rightarrow M_{\min} = 2.$
Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} -a+b+1=2 \\ 3a+b+9=2 \\ -1-a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1. \end{cases}$
Thử lại thấy thỏa $M=2$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$.
Vậy $a+2b=-4$. □

Câu 20. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=||2f(x)+m+4|-f(x)-3|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?



(A) 18. (B) 19. (C) 20. (D) 21.

Lời giải.

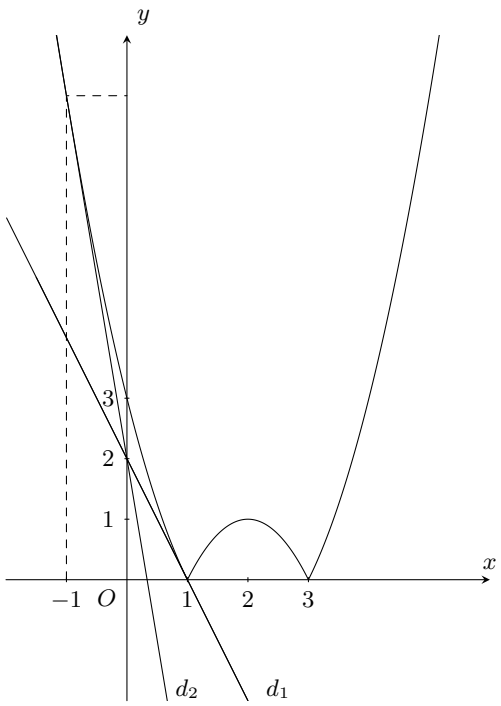
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $f(x) \in [-2;2]$ với $x \in [-2;2]$.
Đặt $t=f(x)+2$ với $x \in [-2;2] \Rightarrow t \in [0;4]$ với $x \in [-2;2]$.
Xét $h(t)=||2t+m|-t-1|=|2t+m-t-1|=|t+m-1|$ (vì $2t+m \geq 0$ do $t \in [0;4], m \in [0;20]$).
Trường hợp 1: Xét $m-1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1 \Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) = \min\limits_{[0;4]} h(t) = m-1 \geq 1 \Rightarrow m \geq 2$ (thỏa mãn).
Trường hợp 2: Xét $\begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq m \leq 1$ (do $m \in [0;20]$)
$\Rightarrow \min\limits_{x \in [-2;2]} g(x) = \min\limits_{t \in [0;4]} |h(t)| = 0 \geq 1$ (không thỏa mãn).
Trường hợp 3: Xét $m+3 \leq 0 \Rightarrow m \leq -3$ (không thỏa mãn $m \in [0;20]$).
Ta có $\min\limits_{[2;,2]} g(x) \geq 1 \Leftrightarrow m-1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2$ mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [0;20]$ nên $m \in \{2;\ 3;\ ...;\ 20\}$.
Vậy có 19 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4ax+\left|x^2-4x+3\right|$ lớn hơn 2?

(A) $a > \dfrac{1}{2}$. (B) $a < -1$. (C) $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}$. (D) $a < 0$.

Lời giải.



Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4ax + \left|x^2 - 4x + 3\right|$ lớn hơn 2 ta phải có $4ax + \left|x^2 - 4x + 3\right| > 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Suy ra $\left|x^2 - 4x + 3\right| > 2 - 4ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Hàm số $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ có đồ thị (C). Đường thẳng $d\colon y = 2 - 4ax$ đi qua điểm cố định $(0;2)$.
Đường thẳng $d\colon y = 2 - 4ax$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, $(x \le 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4ax = x^2 - 4x + 3 \\ -4a = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d_1\colon y = 2 - 2x \\ x = -1 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d_2\colon y = 2 - 6x. \end{array}\right.$$

Để $\left|x^2 - 4x + 3\right| > 2 - 4ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $d\colon y = 2 - 4ax$ nằm giữa d_1, $d_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x) = \left|\dfrac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0 < a < 1$?
(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.
Đặt $t = \sqrt{x+2}$ với $x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [1;\sqrt{3}]$ và $x = t^2 - 2$.
Hàm số đã cho trở thành $g(t) = \left|\dfrac{2mt^2 - 4t - 4m}{t^2}\right|$. Khi đó $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = \min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t)$.
Xét hàm số $h(t) = \dfrac{2mt^2 - 4t - 4m}{t^2}$ trên đoạn $[1;\sqrt{3}]$.
$h'(t) = \dfrac{4t^2 + 8mt}{t^4} > 0, \forall t \in [1;\sqrt{3}]$ và $m > 0$.
Suy ra $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} h(t) = -2m - 4$ và $\max\limits_{[1;\sqrt{3}]} h(t) = \dfrac{2m - 4\sqrt{3}}{3}$.
Điều kiện cần: Ta có

$$\min_{[1;\sqrt{3}]} g(t) = a \in (0;1) \Rightarrow h(1) \cdot h\left(\sqrt{3}\right) > 0 \Leftrightarrow (-2m-4)\left(\frac{2m - 4\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2\sqrt{3}$$

.
Vì m nguyên dương nên $m \in \{1;2;3\}$.
Điều kiện đủ: $m \in \{1;2;3\}$. Khi đó $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t) = \min\left\{g(1); g\left(\sqrt{3}\right)\right\} = \min\left\{|2m+4|; \left|\dfrac{2m - 4\sqrt{3}}{3}\right|\right\}$.

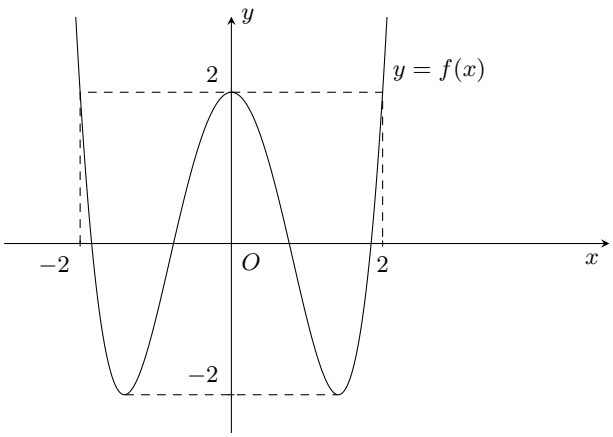
☑ $m=1$: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t)=\min\left\{6;\dfrac{4\sqrt{3}-2}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-2}{3}>1$ (loại).

☑ $m=2$: $\min_{[1;\sqrt{3}]} g(t)=\min\left\{8;\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\in(0;1)$ (nhận).

☑ $m=3$: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t)=\min\left\{10;\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}\in(0;1)$ (nhận).

Vậy $m\in\{2;3\}$ nên có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=|2f(x)+m+4|+|f(x)+3m-2|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng



A 207. B 209. C 210. D 212.

Lời giải.
Với $m\in\mathbb{N}^*, m\le 20$, ta có $x\in[-2;2]\Rightarrow t=f(x)\in[-2;2]$.
Khi đó $h(t)=|2t+m+4|+|t+3m-2|-2\ge 0,\forall t\in[-2;2]$
$\Rightarrow h(t)=2t+m+2+|t+3m-2|\ge 0,\forall t\in[-2;2]$.
Trường hợp 1: $t\ge 2-3m\Rightarrow h(t)=3t+4m$.

☑ $\begin{cases}2-3m\in[-2;2]\\ \min\limits_{[-2;2]} h(t)=h(2-3m)=6-5m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le\dfrac{6}{5}\Rightarrow m=1.$

☑ $\begin{cases}2-3m\le -2\\ \min\limits_{[-2;2]} h(t)=h(-2)=4m-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3}{2}\Rightarrow m\in\{2;3;...;20\}\Rightarrow m\in\{1;2;...;20\}.$

Trường hợp 2: $t<2-3m$ không cần xét nữa vì đã lấy tất cả các giá trị m nguyên thuộc đoạn cho trong đề bài.
Vậy tổng các phần tử của S là $1+2+....+20=\dfrac{(1+20)\cdot 20}{2}=210$.
Chọn đáp án C □

Câu 24. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1. Số phần tử của S là

A 7. B 6. C 8. D 3.

Lời giải.
Ta có $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx=\begin{cases}x^2-(5-m)x+4,\ x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)\\ -x^2+(5+m)x+4,\ x\in[1;4].\end{cases}$
Trường hợp 1: $0<m<3\Rightarrow 1<\dfrac{5-m}{2}<\dfrac{m+5}{2}<4$.
Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	1	$\dfrac{5-m}{2}$	$\dfrac{m+5}{2}$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$4m$	$\searrow$ $+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1 thì $m>1$, kết hợp với điều kiện $m<3$ và m nguyên dương ta được $m=2$.

Trường hợp 2: $m\geq 3\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{m+5}{2}\geq 4\\ \dfrac{5-m}{2}\leq 1.\end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	$\dfrac{5-m}{2}$	1	4	$\dfrac{m+5}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-m^2+10m-9}{4}$	$\nearrow$		$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1 thì

$$\frac{-m^2+10m-9}{4}>1\Leftrightarrow -m^2+10m-9>4\Leftrightarrow m^2-10m+13<0\Leftrightarrow 5-2\sqrt{3}<m<5+2\sqrt{3}$$

. Kết hợp với điều kiện $m\geq 3$ và m nguyên dương ta được $m\in\{3;4;5;6;7;8\}$.
Vậy ta được tập các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán $S=\{2;3;4;5;6;7;8\}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ và $f''(x)<0,\forall x\in(0;+\infty)$. Biết a,x thay đổi trên đoạn $[0;2]$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{\left[(f'(x))^2+1\right]\left[2f'(0)+(a-x)f'(a)+6\right]}{\left[f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(x)\right]^2\left[f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(a)\right]}$ bằng $\dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản, $m,n\in\mathbb{Z}_+$). Tổng $m+n$ thuộc khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		2	$\nearrow$ 4	$\searrow$

(A) $(20;25)$. (B) $(95;145)$. (C) $(45;75)$. (D) $(75;95)$.

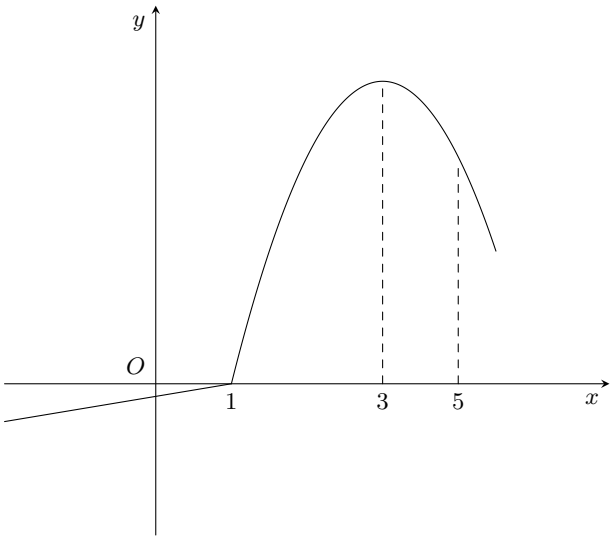
Lời giải.

Do $f''(x)<0,\forall x\in(0;+\infty)$ nên $f(x)$ có đồ thị lồi trên $(0;+\infty)$, tức là tiếp tuyến ở phía trên đồ thị.
Suy ra $f(x)\leq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow f(a)\leq f'(0)(a-0)+f(0)=af'(0)+2$.
Xét trên $[0;2]$, ta có

x	0		2
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	0
$f(x)$	2	$\nearrow$	4

Suy ra $f\left(2-\sqrt{4-2x}\right) \le f(2)=4$, do đó $f(a)+f\left(2-\sqrt{4-2x}\right) \le af'(0)+6$.
Ta chứng minh $2f'(0)+(a-x)f'(a)+6 \ge af'(0)+6 \Leftrightarrow (2-a)f'(0) \ge (x-a)f'(a) \quad (*)$.
Thật vậy:
Nếu $x \le a$ thì $VT\ (*) \ge 0 \ge VP\ (*)$.
Nếu $x \ge a$ thì $\begin{cases} 2-a \ge x-a > 0 \\ f'(0) \ge f'(a) \end{cases}$ nên $(*)$ đúng.
Do đó $\dfrac{2f'(0)+(a-x)f'(a)+6}{f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(a)} \ge 1$.
Lại có $[f'(x)]^2+1 \ge 1$ và $f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(x) \le 2f(2)=8$ nên suy ra $S \ge \dfrac{1}{64}$.
Dấu "=" xảy ra khi $a=0; x=2$. Như vậy $m=1, n=64 \Rightarrow m+n=65$.
Chọn đáp án C □

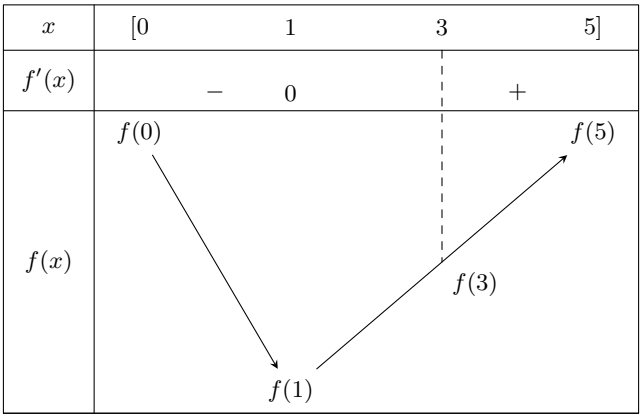
Câu 26. Cho đồ thị hàm số $f(x)=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)-f(3)=f(5)-f(1)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$. Đáp án đúng là



(A) $M=f(5); m=f(1)$. (B) $M=f(0); m=f(1)$. (C) $M=f(3); m=f(0)$. (D) $M=f(1); m=f(5)$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau



Suy ra $\min\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(1)=m$ và $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(0)\\ \max\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(5).\end{array}\right.$

Từ giả thiết: $f(0)-f(3)=f(5)-f(1)\Leftrightarrow f(5)-f(0)=f(1)-f(3)<0\Leftrightarrow f(5)<f(0)$.

Suy ra $\max\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(0)=M$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Đặt $M=max\left|\sqrt{4x-x^2}-mx\right|$. Giá trị nhỏ nhất của M là

A) 1. B) $\sqrt{2}$. C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D) 2.

Lời giải.

Ta có $\left|\sqrt{4x-x^2}-mx\right|\le M, \forall x\in[0;4]$ và $M\ge 0$.

Với $x=0$ thỏa mãn.

Với $x\in(0;4]$ ta có

$$-M\le\sqrt{4x-x^2}-mx\le M\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}+\dfrac{M}{x}=g(x)\\ m\ge\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}-\dfrac{M}{x}=h(x)\end{cases},\ \forall x\in(0;4].$$

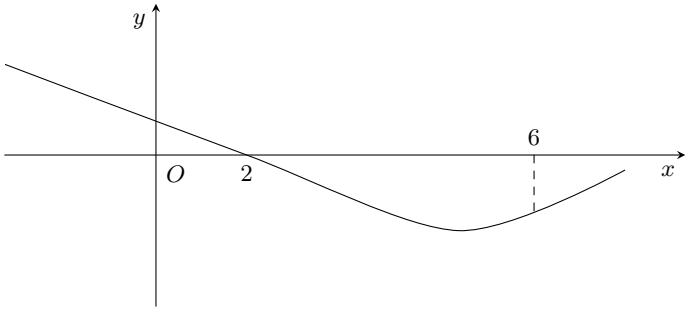
☑ Ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(0;4]$ nên $m\le\min\limits_{(0;4]} g(x)=g(4)=\dfrac{M}{4}$.

☑ Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{4M^2}{4+M^2}<4\Rightarrow\max h(x)=\dfrac{4-M^2}{4M}$.

Vậy $\dfrac{4-M^2}{4M}\le m\le\dfrac{M}{4}\Leftrightarrow M^2\ge 2\Leftrightarrow M\ge\sqrt{2}\Rightarrow M_{\min}=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $2f(6)=f(0)+f(2)$ Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$. Đáp án đúng là



A) $M=f(6);m=f(0)$. B) $M=f(2);m=f(6)$. C) $M=f(2);m=f(0)$. D) $M=f(6);m=f(0)$.

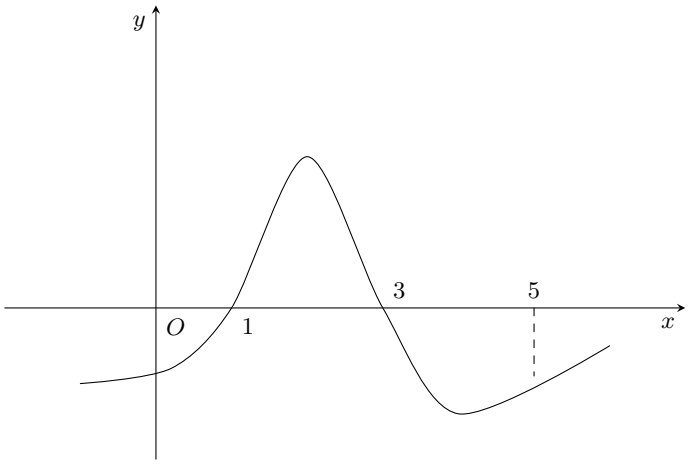
Lời giải.

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ như sau

x	$[0$		2		$6]$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(2)$	↘	$f(6)$

Suy ra $\max\limits_{x\in[0;6]} f(x) = f(2) = M$.
Và $\min\limits_{x\in[0,6]} f(x) = f(0)$ hoặc $\min\limits_{x\in[0;6]} f(x) = f(6)$.
Từ giả thiết ta có $2f(6) = f(0) + f(2) \Leftrightarrow f(6) - f(0) = f(2) - f(6) > 0 \Leftrightarrow f(6) > f(0)$.
Suy ra $\min\limits_{x\in[0;6]} f(x) = f(0) = m$.
Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(2) = f(1) + f(3)$ và$f(0) + f(1) = f(3) + f(5)$ Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$. Đáp án đúng là



(A) $M = f(3); m = f(1)$. (B) $M = f(0); m = f(1)$. (C) $M = f(0); m = f(5)$. (D) $M = f(3); m = f(5)$.

Lời giải.
Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau

x	$[0$		1	2		3		5
$f'(x)$		$-$	0		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(1)$		↗	$f(3)$	↘	$f(5)$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{x\in[0,5]} f(x) = f(0)\\ \max\limits_{x\in[0,5]} f(x) = f(3)\end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l}\min\limits_{x\in[0,5]} f(x) = f(1)\\ \min\limits_{x\in[0,5]} f(x) = f(5).\end{array}\right.$
Từ giả thiết ta có $f(0) + f(2) = f(1) + f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(3) = f(1) - f(2) < 0 \Leftrightarrow f(0) < f(3)$.

Suy ra $\max\limits_{x\in[0,5]} f(x) = f(3) = M$.
Từ giả thiết ta có $f(0) + f(1) = f(3) + f(5) \Leftrightarrow f(1) - f(5) = f(3) - f(0) > 0 \Leftrightarrow f(1) > f(5)$.
Suy ra $\min\limits_{x\in[0,5]} f(x) = f(5) = m$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là m. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 3f(x) + x^2 - 2x$ thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?
(A) $\min g(x) \geq 3m$. (B) $\min g(x) = 3m - 2$. (C) $\min g(x) \leq 3m - 2$. (D) $\min g(x) \geq 3m - 1$.

Lời giải.
Tồn tại một giá trị $x_0 \in R$ sao cho $f(x) \geq f(x_0) = m$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Suy ra $3f(x) \geq 3f(x_0) = 3m$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Lại có $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1$.
Suy ra $y = 3f(x) + x^2 - 2x \geq 3m + (-1) = 3m - 1$.
Suy ra $\min f(x) \geq 3m - 1$
Chọn đáp án (D) □
.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x$ tương ứng bằng 8. Kết luận nào dưới đây luôn đúng?
(A) $f(2) = 3$. (B) $f(2) > 3$. (C) $f(3) < 3$. (D) $f(3) \geq 4$.

Lời giải.
Ta có: $f(x) \geq 3m, \forall x \in \mathbb{R}$.
Mặt khác $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x = 4f(x) + (x-2)^2 - 4 \geq 4 \cdot 3 - 4 = 8$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(2) = 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất lần lượt là 3 và 6. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3f(x) + 2g(x)$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?
(A) $\max(3f(x) + 2g(x)) \leq 21$. (B) $\max(3f(x) + 2g(x)) \geq 24$.
(C) $\max(3f(x) + 2g(x)) \leq 30$. (D) $\max(3f(x) + 2g(x)) \geq 21$.

Lời giải.
Ta có: $f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow y = 3f(x) + 2g(x) \leq 3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21 \Rightarrow \max(3f(x) + 2g(x)) \leq 21$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là 6 và giá trị nhỏ nhất $y = g(x)$ là 3. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2f(x) - 3g(x) + 2$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?
(A) $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \geq 5$. (B) $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 3$.
(C) $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 5$. (D) $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \geq 2$.

Lời giải.
Ta có: $f(x) \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow y = 2f(x) - 3g(x) + 2 \leq 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 + 2 = 5 \Rightarrow \max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 5$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất là 2. Biết hàm số $y = 2f(x) - x^2 + 6x$ có giá trị lớn nhất bằng 8. Chọn đáp án đúng trong các đáp án sau.
(A) $f(0) \leq 4$. (B) $f(3) \leq -1$. (C) $f(2) \geq 0$. (D) $f(2) \leq -2$.

Lời giải.
Theo giả thiết ta có $y = g(x) = 2f(x) - x^2 + 6x \leq 8$. Do đó $g(0) = 2f(0) \leq 8 \Leftrightarrow f(0) \leq 4$.
$g(3) = 2f(3) + 9 \leq 8 \Leftrightarrow f(3) \leq -\dfrac{1}{2}$.
$g(2) = 2f(2) + 8 \leq 8 \Leftrightarrow f(2) \leq 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có $\min f(x)=4$. Khi đó kết luận đúng về nghiệm của bất phương trình $f(x)>4$ sẽ là

(A) luôn có nghiệm. (B) luôn vô nghiệm.

(C) có thể có nghiệm có thể vô nghiệm. (D) luôn có đúng một nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Nếu $f(x)=4$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$ thì bất phương trình $f(x)>4$ vô nghiệm. (Đáp án **A** sai)

Nếu $f(x)=x^2+4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thì bất phương trình $f(x)>4 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$ có vô số nghiệm. (Đáp án **B**, **D** sai)

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2ax+6a-3$ có giá trị nhỏ nhất bằng m. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây luôn đúng?

(A) $m\geq -3$. (B) $m<-3$. (C) $m\leq 78$. (D) $m\leq 3$.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)=x^4-2ax+6a-3\geq m, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(3)=3^4-2a\cdot 3+6a-3\geq m \Leftrightarrow 78\geq m$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và nhỏ bằng M và m. Biết rằng $f(a)+2f(b)=18$, trong đó a và b là hai số thực dương. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây là luôn đúng?

(A) $m\leq 3$. (B) $M\geq 9$. (C) $m\leq 5$. (D) $M\geq 6$.

Lời giải.

Ta có: $m\leq y=f(x)\leq M, \forall x\in\mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a)\geq m \\ f(b)\geq m \end{cases} \Rightarrow 18=f(a)+2f(b)\geq m+2m=3m \Rightarrow m\leq 6$.

Tương tự ta cũng có $\begin{cases} f(a)\leq M \\ f(b)\leq M \end{cases} \Rightarrow 18=f(a)+2f(b)\leq M+2M=3M \Rightarrow M\geq 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m . Biết rằng $f(a)+2f(b)=12$, trong đó a và b là hai số thực dương. Khi đó giá trị biểu thức $(M-2)(m-5)$ có thể bằng

(A) -1. (B) -3. (C) 0. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $m\leq y=f(x)\leq M, \forall x\in\mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a)\geq m \\ f(b)\geq m \end{cases} \Rightarrow 12=f(a)+2f(b)\geq m+2m=3m \Rightarrow m\leq 4 \Leftrightarrow (m-5)\leq -1$.

Tương tự, ta cũng có được: $\begin{cases} f(a)\leq M \\ f(b)\leq M \end{cases} \Rightarrow 12=f(a)+2f(b)\leq M+2M=3M \Rightarrow M\geq 4 \Rightarrow M-2\geq 2$.

Suy ra $(M-2)(m-5)\leq -2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=x^4-2ax+4a-7$, có giá trị nhỏ nhất là m. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương mà m có thể nhận?

(A) 11. (B) 8. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

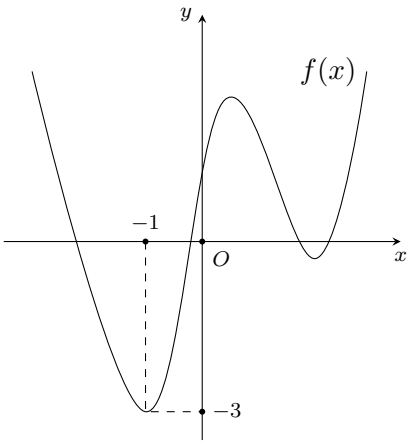
Ta có: $m\leq f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $m\leq f(2)=9$. Suy ra các giá trị nguyên dương của m thỏa $1\leq m\leq 9$.

Có 9 giá trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)+x^2-2mx+m^2+1$ tương ứng bằng

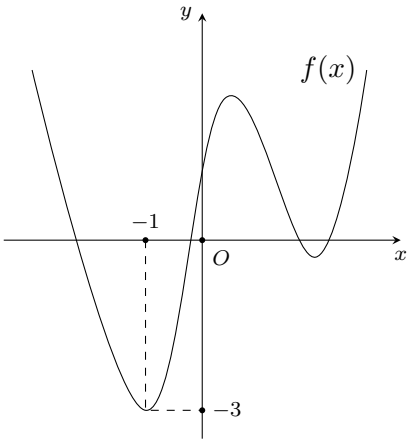


(A) 1. (B) 3. (C) -1. (D) -2.

Lời giải.

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.
Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1 = f(x) + (x-m)^2 + 1$.
Có $\begin{cases} f(x) \geq f(-1) = -3 \\ (x-m)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x) + (x-m)^2 + 1 \geq (-3) + 0 + 1 = -2$.
Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = -1 \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.
Khi đó $\min g(x) = g(-1) = -2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(2x+3) + x^2 - 4mx + 4m^2 - 1$ bằng -4 thì tham số m bằng

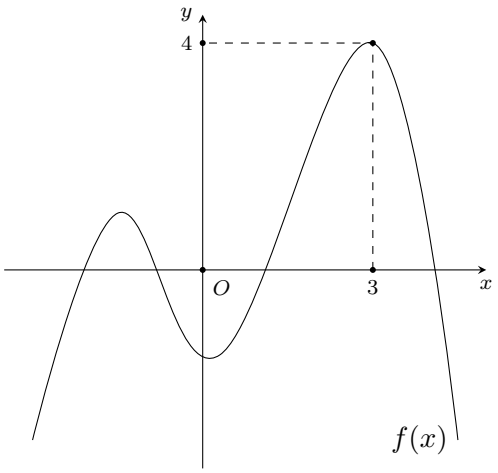


(A) -1. (B) 0. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.
Xét hàm số $g(x) = f(2x+3) + (x-2m)^2 - 1 \geq -3 + 0 - 1 = -4$.
Dấu bằng xày ra khi: $\begin{cases} f(2x+3) = -3 \\ x - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ m = -1 \end{cases}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(3x-m) + 2f\left(x^2 - 2x\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc tập S bằng



(A) 6. (B) 3. (C) 0. (D) -2.

Lời giải.

Ta thấy $\max f(x) = f(3) = 4 \Leftrightarrow f(x) \leq f(3) = 4, x \in \mathbb{R}$.2

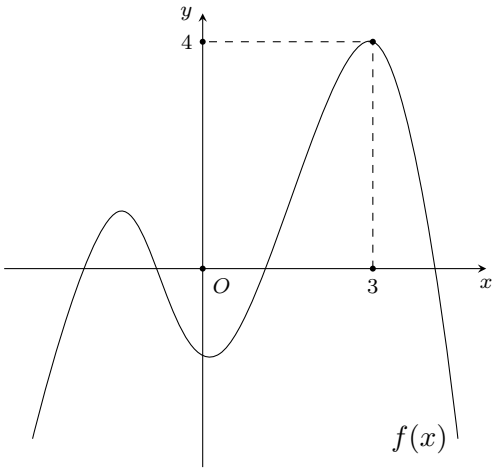
Ta có $\begin{cases} f(3x-m) \leq f(3) = 4 \\ f\left(x^2-2x\right) \leq f(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2f\left(x^2-2x\right) + f(3x-m) \leq 2.4 + 4 = 12$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 3x-m=3 \\ x^2-2x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m \in \{-6;6\} = S.$

Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng 0 .

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $(2m-n)$ bằng



(A) 3. (B) 0. (C) 5. (D) 1.

Lời giải.

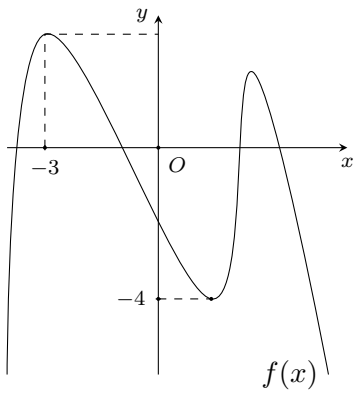
Ta thấy $\max f(x) = f(3) = 4$ nên

$$\begin{cases} f(3x-m) \leq 4 \\ f(x+n) \leq 4 \Rightarrow 3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x \leq 20 \\ -x^2+4x \leq 4 \end{cases}$$

Đề xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x=2 \\ 3x-m=3 \\ x+n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ m=3 \\ n=1 \end{cases}$ Vậy $2m-n=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=x^2-2m^2x+m^4-f(f(x))$ đạt giá trị nhỏ nhất?



(A) 6. (B) 4. (C) 3. (D) 8.

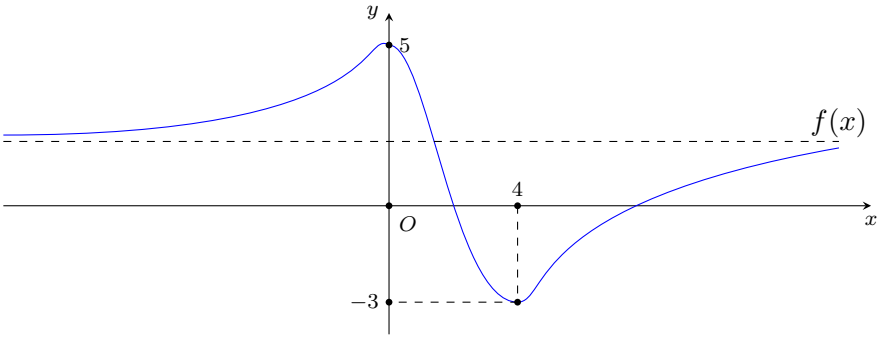
Lời giải.

Ta thấy $\max f(x)=f(-3)$ nên $-f(f(x))\geq -f(-3)$.
Mặt khác, $x^2-2m^2x+m^4=\left(x-m^2\right)^2\geq 0$.
Từ đó, ta có $g(x)=x^2-2m^2x+m^4-f(f(x))\geq -f(-3)$.
Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases}x=m^2\\ f(x)=-3\end{cases}\Rightarrow f\left(m^2\right)=-3(*)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $(*)$ tồn tại $a<0<b<c<d$ để $\left[\begin{array}{l}m^2=a\\ m^2=b\\ m^2=c\\ m^2=d\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\sqrt{b}\\ m=\pm\sqrt{c}\\ m=\pm\sqrt{d}.\end{array}\right.$

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m,n là hai số thực. Để hàm số $2f(2x-m)-f(3x+n)+x^2-2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T=2m+3n$ bằng



(A) -11. (B) -7. (C) -13. (D) 5.

Lời giải.

Ta thấy $\begin{cases}\max f(x)=f(0)=5\\ \min f(x)=f(4)=-3\end{cases}$ nên $\begin{cases}f(2x-m)\geq -3\\ f(3x+n)\leq 5\\ x^2-2x\geq -1\end{cases}\Rightarrow 2f(2x-m)-f(3x+n)+x^2-2x\geq -12$.

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases}x=1\\ 2x-m=4\\ 3x+n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ m=-2\\ n=-3.\end{cases}$

Vậy $T=2m+3n=-13$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=x^2-2mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-1;3)$?

(A) 3. (B) 2. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Ta có đạo hàm: $f'(x)=2x-2m$.

Bảng biến thiên:

x	-1		m		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(m)$	$\nearrow$	$f(3)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\in(-1;3)$ và $m\in Z; m\in[-30;30]$ suy ra $0\le m\le 2$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

□

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=-x^2+2(2m-1)x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-3;11]$?

(A) 6. (B) 37. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Ta có đạo hàm: $f'(x)=-2x+4m-2$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2m-1$.

☑ **TH1:** $-3<2m-1\le 11\Leftrightarrow -1<m\le 6$.

Bảng biến thiên:

x	$(3$		$2m-1$		$11]$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(2m-1)$	$\searrow$	$f(11)$

Dựa theo BBT thì hàm số có GTNN trên $(-3;11]$ suy ra $m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

☑ **TH2:** $2m-1\le -3\Leftrightarrow m\le -1$.

Bảng biến thiên:

x	$2m-1$		$(3$		$11]$
$f'(x)$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$f(2m-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(11)$

Dựa theo BBT thì hàm số có GTNN trên $(-3;11]$ suy ra $m\in\{-30;-29;\cdots;-1\}$.

TH3: $2m-1>11 \Leftrightarrow m>6$.
Bảng biến thiên:

x	$(3$		$11]$		$2m-1$
$f'(x)$		$+$		$+$	0
$f(x)$	$f(3)$	↗	$f(11)$	↗	$f(2m-1)$

Dựa theo BBT thì hàm không có GTNN trên $(-3;11]$.
Vậy có 37 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $y=x^3-3mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1;3)$?

A) 8. B) 9. C) 7. D) 11.

Lời giải.

Ta có đạo hàm: $y'=3x^2-3m$. Hàm số $y=x^3-3mx$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1;3)$ khi có điểm cực tiểu trên $(1;3)$ và giá trị cực tiểu nhỏ hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.
Nhận thấy, khi $m\le 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(1;3)$) nên không tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1;3)$.
Khi $m>0$, hàm số có điểm cực tiểu là $x=\sqrt{m}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$(1$		$\sqrt{m}$		$3)$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	$f(1)$	↘	$f(\sqrt{m})$	↗	$f(3)$

Khi đó, ta phải có: $\begin{cases}\sqrt{m}\in(1;3)\\ f(\sqrt{m})\le f(1)\\ f(\sqrt{m})\le f(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<m<9\\ 7f(\sqrt{m})\le f(1)\\ f(\sqrt{m})\le f(3).\end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\sqrt{m}\in(1;3)\Leftrightarrow 1<m<9\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}2\le m\le 8$.
Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn. □

Câu 49. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-2;3)$?

A) 30. B) 18. C) 32. D) 1.

Lời giải.

Ta có đạo hàm: $y'=3x^2-6mx$. Hàm số $y=x^3-3mx^2$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1;3)$ khi có điểm cực đại trên $(-2;3)$ và giá trị cực đại lớn hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.
Nhận thấy, khi $m=0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(-2;3)$) nên không tồn tại giá trị lớn nhất nhất trên $(-2;3)$.
Khi $m>0$ thì $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow x=0;x=2m\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
Khi đó ta phải có: $\begin{cases}m>0\\ 0\in(-2;3)\\ f(0)\ge f(-2)\\ f(0)\ge f(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 0\ge -8-12m\Leftrightarrow m\ge 1\\ 0\ge 27-27m.\end{cases}$

Khi $m<0$ thì $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow x=0;x=2m\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=2m$.

Khi đó ta phải có: $\begin{cases} m<0 \\ 2m\in(-2;3) \\ f(2m)\geq f(-2) \\ f(2m)\geq f(3) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -1<m<0 \\ -4m^3\geq -8-12m \Leftrightarrow \text{vô nghiệm.} \\ -4m^3\geq 27-27m. \end{cases}$

Kết hợp lại ta được: $m\geq 1$ và $m\in\mathbb{Z}; m\in[-30;30]$ suy ra $1\leq m\leq 30$.

Vậy có tất cả 30 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. C	5. D	6. D	7. B	8. D	9. D	10. D
11. A	12. A	13. B	14. D	15. D	16. A	17. D	18. B	19. B	20. B
21. C	22. D	23. C	24. A	25. C	26. B	27. B	28. C	29. D	30. D
31. A	32. A	33. C	34. A	35. C	36. C	37. D	38. B	39. D	40. D
41. A	42. C	43. C	44. A	45. C	47. B	49. A			

ĐỀ VDC SỐ 15: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 1. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+4x-5\right|$ trên đoạn $[-3;0]$. Khi đó tổng $M+m$ là

(A) 5. (B) 9. (C) 14. (D) 8.

Lời giải.

Xét $g(x)=x^2+4x-5$ liên tục trên đoạn $[-3;0]$.

Ta có $g'(x)=2x+4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-2\in(-3;0)$.

Ta có $f(-3)=-8$, $f(-2)=-9$, $f(0)=-5$.

Khi đó $\max\limits_{[-3;0]}f(x)=-5$, $\min\limits_{[-3;0]}f(x)=-9$.

Suy ra $M=\max\limits_{[-3;0]}|g(x)|=\max\{|-9|;|-5|\}=9$ và $m=\min\limits_{[-3;0]}|g(x)|=\min\{|-9|;|-5|\}=5$.

Vậy $M+m=14$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2-7\right|$ trên đoạn $[0;4]$ là

(A) 0. (B) 11. (C) 9. (D) 7.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-7$ liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Rightarrow x=2\in(0;4)$.

Ta có $f(0)=-7$, $f(2)=-11$, $f(4)=9$.

Khi đó $\max\limits_{[0;4]}f(x)=9$, $\min\limits_{[0;4]}f(x)=-11$.

Suy ra $\max\limits_{[0;4]}|f(x)|=11$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho hàm số $y=\left|x^4-16x^2-7\right|$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$. Tính giá trị biểu thức $M-2m$.

(A) 14. (B) 57. (C) 64. (D) 60.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x^4-16x^2-7$ liên tục trên $[0;4]$.

Ta có $f'(x)=4x^3-32x$; $f'(x)=0\Rightarrow x=2\sqrt{2}\in(0;4)$.

Ta có $f(0)=-7$, $f\left(2\sqrt{2}\right)=-71$, $f(4)=-7$.

Khi đó $\max\limits_{[0;4]}f(x)=-7$, $\min\limits_{[0;4]}f(x)=-71$.

Suy ra $\min\limits_{[0;4]}|f(x)|=|f(0)|=|f(4)|=7;\max\limits_{[0;4]}|f(x)|=\left|f\left(2\sqrt{2}\right)\right|=71$.

Vậy $M-2m=57$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của biểu thức $2M-3m$ là

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) 0. (D) 6.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

$g'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0$, $\forall x\in[-1;1]$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=g(1)=\dfrac{1}{3}$, $\min\limits_{[-1;1]}g(x)=g(-1)=-3$.

Suy ra $M=\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\max\limits_{[-1;1]}|g(x)|=\max\left\{|-3|;\left|\dfrac{1}{3}\right|\right\}=3$.

Và $m=\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\limits_{[-1;1]}|g(x)|=0$.
Vậy $2M-3m=2.3-3.0=6$.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}\right|$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$.
Giá trị của biểu thức $3M+m$ bằng
A $\dfrac{27}{2}$. B 10. C $-\dfrac{40}{3}$. D 16.

Lời giải.
Hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ liên tục trên $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$.
Ta có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0\in\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$.
Ta có $f(-2)=-\dfrac{13}{3}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{2}$, $f(0)=-3$.
Suy ra $\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} f(x)=-3$ tại $x=0$, $\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} f(x)=\dfrac{-13}{3}$ tại $x=-2$.
Từ đó ta có $M=\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]}|f(x)|=\dfrac{13}{3}$ tại $x=-2$, $m=\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]}|f(x)|=3$ tại $x=0$.
Vậy $3M+m=16$.
Chọn đáp án D □

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\mathrm{e}^{3x}-4\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-10\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$.
A 9. B 6. C 10. D 5.

Lời giải.
Đặt $\mathrm{e}^x=t$. Ta có $0\le x\le\ln 4\Leftrightarrow \mathrm{e}^0\le\mathrm{e}^x\le\mathrm{e}^{\ln 4}\Rightarrow 1\le t\le 4$.
Khi đó hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ trở thành $g(t)=\left|t^3-4t^2+4t-10\right|$ với $t\in[1;4]$.
Xét hàm số $h(t)=t^3-4t^2+4t-10$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.

$$h'(t)=3t^2-8t+4;\ h'(t)=0\Rightarrow t=2\in(1;4).$$

Ta có $h(1)=-9$, $h(2)=-10$, $h(4)=6$.
Khi đó $\max\limits_{[1;4]} h(t)=6$, $\min\limits_{[1;4]} h(t)=-10$.
Suy ra $\max\limits_{[1;4]} f(x)=\max\limits_{[1;4]}|h(t)|=10$ khi $t=2\Leftrightarrow x=\ln 2$.
Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ là 10.
Chọn đáp án C □

Câu 7. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|\ln^2 x-2\ln x-3\right|$ trên đoạn $\left[1;\mathrm{e}^2\right]$. Giá trị $M+m$ bằng
A 4. B 7. C 5. D 3.

Lời giải.
Xét $u(x)=\ln^2 x-2\ln x-3$ trên $\left[1;\mathrm{e}^2\right]$; $u(x)$ liên tục trên $\left[1;\mathrm{e}^2\right]$.
Ta có $u'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}$, $u'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=\mathrm{e}\in\left(1;\mathrm{e}^2\right)$.
Ta có $u(1)=-3$, $u(\mathrm{e})=-4$, $u\left(\mathrm{e}^2\right)=-3$ nên
$M=\max\limits_{[1;\mathrm{e}^2]} f(x)=\max\limits_{[1;\mathrm{e}^2]}|u(x)|=\max\{|-3|,|-4|,|-3|\}=4$ khi $x=\mathrm{e}$.
$m=\min\limits_{[1;\mathrm{e}^2]} f(x)=\min\limits_{[1;\mathrm{e}^2]}|u(x)|=\min\{|-3|,|-4|,|-3|\}=3$ khi $x=1$.
Vậy $M+m=4+3=7$.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Giả sử M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|\cos 2x+2\sin x-3|$ trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Tính $M-4m$.

(A) 6. (B) 0. (C) -2. (D) 3.

Lời giải.

Xét hàm số $u(x)=\cos 2x+2\sin x-3$ với $x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$; $u(x)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ta có $u'(x)=-2\sin 2x+2\cos x$;

$$\begin{aligned} & u'(x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\sin 2x+2\cos x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos x(2\sin x-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &\cos x=0\\ &2\sin x-1=0 \end{aligned}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ &x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ &x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{aligned}\right. (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Mà $x\in\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên $x\in\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Ta có $u(0)=-2$, $u\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-6$, $u\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$, $u\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{2}$, $u\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Khi đó $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}u(x)=-\dfrac{3}{2}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}u(x)=-6$.

Suy ra $M=\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}|u(x)|=6$ khi $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $m=\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}|u(x)|=\dfrac{3}{2}$ khi $x\in\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Vậy $M-4m=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-1+\sqrt{3-x^2}\right|$. Khi đó $M+m=\dfrac{a}{4}+b\sqrt{c}$ với a, b, c nguyên. Tính $T=a+bc$.

(A) 7. (B) 9. (C) 12. (D) 8.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. Đặt $t=\sqrt{3-x^2}, t\in\left[0;\sqrt{3}\right]$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành $y=\left|-t^2+t+2\right|=\left|t^2-t-2\right|$.

Xét $g(t)=t^2-t-2$ liên tục trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ ta có $g'(t)=2t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Ta có $g(0)=-2$, $g(\sqrt{3})=1-\sqrt{3}$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$.

Suy ra $M=\left|g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|=\dfrac{9}{4}$; $m=\left|g\left(\sqrt{3}\right)\right|=\sqrt{3}-1$.

$\Rightarrow M+m=\dfrac{5}{4}+\sqrt{3}\Rightarrow a=5;\ b=1;\ c=3$.

Vậy $T=a+bc=5+1.3=8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=|x-1|+x^2-5x+3$ trên đoạn $[-2;4]$. Tính giá trị biểu thức $T=M+m$.

(A) $T=18$. (B) $T=19$. (C) $T=20$. (D) $T=2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên $[-2;4]$.

Ta có $f(x)=|x-1|+x^2-5x+3=\begin{cases}x^2-4x+2 \text{ khi } 1\le x\le 4\\ x^2-6x+4 \text{ khi } -2\le x<1.\end{cases}$

Với $1\le x\le 4$, ta có $f(x)=x^2-4x+2$; $f'(x)=2x-4$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ (nhận).

Với $-2\le x<1$, ta có $f(x)=x^2-6x+4$; $f'(x)=2x-6$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$ (loại).

Ta có $f(-2)=20$; $f(1)=-1$; $f(2)=-2$; $f(4)=2$.

Ta có $M=\max\limits_{[-2;4]}f(x)=f(-2)=20$; $m=\min\limits_{[-2;4]}f(x)=f(2)=-2$.

Vậy $T=M+m=18$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tích giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|+x^2-1$ trên $[-4;2]$ bằng

A -200. B 200. C 50. D 0.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên $[-4;2]$.

Ta có $y=\begin{cases}2x^2-4x+2 \text{ khi } x\in[-4;1]\\ 4x-4 \text{ khi } x\in(1;2]\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}4x-4\le 0 \text{ khi } x\in[-4;1]\\ 4> \text{ khi } x\in(1;2].\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}y(-4)=50\\ y(1)=0\\ y(2)=4\end{cases}$ nên $\max\limits_{[-4;2]}y=50$ tại $x=-4$; $\min\limits_{[-4;2]}y=0$ tại $x=0$.

Vậy $\left(\max\limits_{[-4;2]}y\right).\left(\min\limits_{[-4;2]}y\right)=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-3x+2\right|+|x+3|$ là 2^a. Tìm a.

A 0. B 2. C 3. D 1.

Lời giải.

Ta có $y=\left|x^2-3x+2\right|+|x+3|=\begin{cases}x^2-4x-1 \text{ khi } x<-3\\ x^2-2x+5 \text{ khi } -3\le x<1\\ -x^2+4x+1 \text{ khi } 1\le x<2\\ x^2-2x+5 \text{ khi } x\ge 2.\end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	20	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $4\Rightarrow 2^a=4\Rightarrow a=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hàm số $y=||3x-1|-1|+\left|x^2-2\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. Giả sử $\dfrac{M}{m}=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản), biểu thức $T=a+b$ có giá trị bằng

A 37. B 40. C 13. D 20.

Lời giải.

Ta có $y=\begin{cases}|3x|+x^2-2 \text{ khi } x\le -\sqrt{2}\\ |3x|+2-x^2 \text{ khi } -\sqrt{2}<x\le \dfrac{1}{3}\\ |3x-2|+2-x^2 \text{ khi } \dfrac{1}{3}\le x<\sqrt{2}\\ |3x-2|+x^2-2 \text{ khi } x\ge \sqrt{2}.\end{cases}$

Xét trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ ta có $y=\begin{cases}-x^2+3x+2 \text{ khi } 0\le x\le \dfrac{1}{3}\\ -x^2-3x+4 \text{ khi } \dfrac{1}{3}<x\le \dfrac{2}{3}\\ -x^2+3x \text{ khi } \dfrac{2}{3}<x\le \sqrt{2}\\ x^2+3x-4 \text{ khi } \sqrt{2}<x\le \dfrac{3}{2}.\end{cases}$

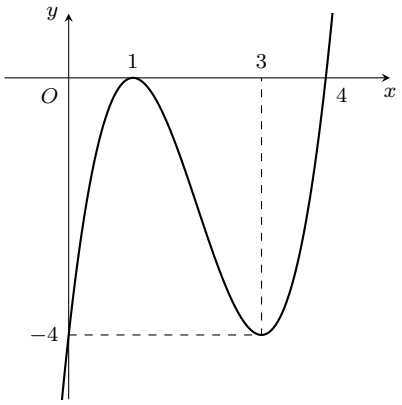
Ta có $y(0)=2$, $y\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{26}{9}$, $y\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{14}{9}$, $y=\left(\sqrt{2}\right)=-2+3\sqrt{2}$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{11}{4}$.

nên $M=\max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]} y=\dfrac{26}{9}$; $m=\min\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]} y=\dfrac{14}{9}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{13}{7}$ hay $a=13;\ b=7\Rightarrow T=a+b=20$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ sau

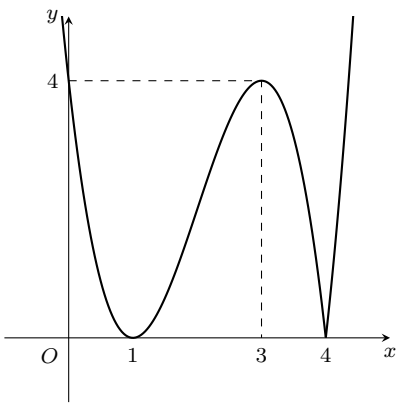


Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;4]$. Khi đó biểu thức $M+2m$ có giá trị

(A) 4. (B) 1. (C) 8. (D) 0.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau Giữ nguyên phần đồ thị trên trục hoành của (C) (ứng với $f(x)\ge 0$), lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C) (ứng với $f(x)<0$). Bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C).



Dựa vào đồ thị ta suy ra $M=\max\limits_{[0;4]}|f(x)|=4$, đạt được khi $x=0$ hoặc $x=3$ và $m=\min\limits_{[0;4]}|f(x)|=0$, đạt được khi $x=1$ hoặc $x=4$. Vậy $M+2m=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(|x|+1)-1|$ trên đoạn $[-2;2]$.

A) 2. B) 1. C) 3. D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f(x+1)$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Khi đó hàm số $p(x)=g(|x|)=f(|x|+1)$ là hàm chẵn nên có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Xét hàm số $h(x)=f(|x|+1)-1=g(|x|)-1=p(x)-1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=|f(|x|+1)-1|=|h(x)|$

x	$-\infty$		a		-2		b		0		c		2		d		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	1	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(|x|+1)-1|$ trên đoạn $[-2;2]$ là 3 tại $x=\pm 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2-2x+m\right|$ trên $[-1;2]$ bằng 5.

A) 3. B) 1. C) 2. D) 4.

Lời giải.

Đặt $g(x)=x^2-2x+m$. Ta có $g'(x)=2x-2\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $\begin{cases} g(-1)=m+3 \\ g(1)=m-1 \\ g(2)=m \end{cases}$ nên $\begin{cases} \min\limits_{[-1;2]} g(x)=m-1 \\ \max\limits_{[-1;2]} g(x)=m+3. \end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} (m-1)(m+3)>0 \\ \min\limits_{[-1;2]} f(x)=\dfrac{|2m+2|-4}{2}=5 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=-8. \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của tham số m thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y=\left|\dfrac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 18 là.

A) 432. B) -216. C) -432. D) 288.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $f'(x)=4x^2-12x+8$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-12x+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;3] \\ x=2\in[0;3] \end{array}\right.$.

Mặt khác $f(0)=m$; $f(1)=\dfrac{10}{3}+m$; $f(2)=\dfrac{8}{3}+m$; $f(3)=6+m$.

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[0;3]} f(x)=\max\{f(0);f(1);(f(2);f(3))\}=f(3)=6+m \\ \min\limits_{[0;3]} f(x)=\max\{f(0);f(1);(f(2);f(3))\}=f(3)=m \end{cases}$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=\min\{0;|m|;|m+6|\}$.

Trường hợp 1: $m>0$ suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=m\Leftrightarrow m=18$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m+6<0\Leftrightarrow m<-6$ suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=-m-6\Leftrightarrow -m-6=18\Leftrightarrow m=-24$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $m(m+6)\le 0\Leftrightarrow -6\le m\le 0\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} y=0$(loại).

Vậy tích các số thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-24\cdot 18=-432$
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=|x^4-2x^2+m-1|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A) -5. B) 4. C) -14. D) -10.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=x^4-2x^2+m-1$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ có $g'(x)=4x^3-4x$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;2] \\ x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \end{array}\right.$.

Lại có $g(0)=m-1$, $g(1)=m-2$, $g(2)=m+7$.

Suy ra $\min\limits_{x\in[0;2]} g(x)=m-2$, $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=m+7\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=\min\{0,|m-2|,|m+7\}$.

Trường hợp 1: $m>2$ suy ra $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=m-2\Leftrightarrow m-2=18\Leftrightarrow m=20$ (nhận).

Trường hợp 2: $m+7<0\Leftrightarrow m<-7\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=-m-7\Leftrightarrow -m-7=18\Leftrightarrow m=-25$ (nhận).

Trường hợp 3: $(m-2)(m+7)\le 0\Leftrightarrow -7\le m\le 2\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=0$ (loại).

Suy ra $m\in\{20;-25\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -5.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-m}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất các giá trị của m để $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=2$. Tổng các phần tử của tập S là

A) 2. B) -8. C) -5. D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Với $m=2$. Ta có $f(x)=\dfrac{2x-2}{1-x}=-2$ nên $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=2$. Vậy $m=2$ (nhận).
Với $m\neq 2$. Khi đó $f'(x)=\dfrac{2-m}{(1-x)^2}, \forall x\neq 1$.
Ta có $f(-2)=\dfrac{-m-4}{3}$, $f(0)=-m$; $f(x)=0\Leftrightarrow 2x-m\Leftrightarrow x=\dfrac{m}{2}$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ thuộc $[-2;0]$ tức là $-2\le\dfrac{m}{2}\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le 0$. Khi đó $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=0$ (loại).

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không cắt trục hoành hoặc cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-2;0]$, tức là $\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}<-2\\ \dfrac{m}{2}>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-4\\ m>0\end{array}\right.$ $(*)$.

Khi đó $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=\min\{|f(-2)|;|f(0)|\}=\min\left\{\left|\dfrac{-m-4}{3}\right|;|-m|\right\}=\min\left\{\left|\dfrac{m+4}{3}\right|;|m|\right\}$.
Nếu $\left|\dfrac{m+4}{3}\right|\le|m|\Leftrightarrow|m+4|\le 3|m|\Leftrightarrow(m+4)^2\le(3m)^2\Leftrightarrow(4-2m)(4m+4)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -1\end{array}\right.$ $(**)$ thì $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=\left|\dfrac{m+4}{3}\right|$.
Ta có $\left|\dfrac{m+4}{3}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+4=6\\ m+4=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\text{ (loại do) }m\neq 2\\ m=-10\text{ (nhận)}\end{array}\right.$ (do điều kiện $(*)$ và $(**)$).
Nếu $\left|\dfrac{m+4}{3}\right|>|m|\Leftrightarrow -1<m<2$ thì $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=|m|$.
Ta có $|m|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\text{ (loại)}\\ m=-2\text{ (loại)}\end{array}\right.$.
Suy ra $S=\{2;-10\}$. Vậy tổng các phần tử của S là -8
Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}+m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=5$. Số phần tử của S là

A) 3. B) 2. C) 1. D) 4.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}+m$ liên tục trên đoạn $[2;3]$ có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.
Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin(2;3)\\ x=2\notin(2;3)\end{array}\right.$.

Khi đó $f(2)=m+4$, $f(3)=m+\dfrac{9}{2}$.

Nếu $f(2)\cdot f(3)\le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{2}\le m\le -4$ thì $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=0$. Trường hợp này không thoả yêu cầu bài toán.

Ta xét trường hợp $f(2)\cdot f(3)>0 \Leftrightarrow \hoac{m<-\dfrac{9}{2}\\ m>-4}$.

Khi đó $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=\min\{|f(2)|;|f(3)|\}=\min\left\{|m+4|;\left|m+\dfrac{9}{2}\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=|m+4|=5 \Leftrightarrow \heva{|m+4|=5\\ \left|m+\dfrac{9}{2}\right|\ge 5} \Leftrightarrow \hoac{m=1\\ m=-9}\\ \hoac{m\le -\dfrac{19}{2}\\ m\ge \dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow m=1$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=\left|m+\dfrac{9}{2}\right|=5 \Leftrightarrow \heva{\left|m+\dfrac{9}{2}\right|=5\\ |m+4|\ge 5} \Leftrightarrow \hoac{m=\dfrac{1}{2}\\ m=-\dfrac{19}{2}\\ m\le -9\\ m\ge 1} \Leftrightarrow m=-\dfrac{19}{2}$ (thoả mãn).

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=|f(x)+m|$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 9.

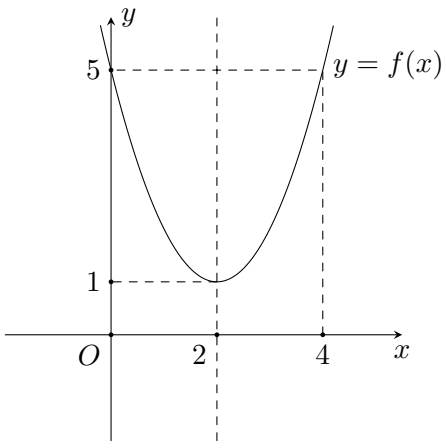
A -10. B -6. C 4. D 8.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ta có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ là trục đối xứng, mà $f(0)=5\Rightarrow f(4)=5$. Suy r: $1\le f(x)\le 5, \forall x\in[0;4]$.

Xét hàm số $g(x)=|f(x)+m|$, $\forall x\in[0;4]$.

Ta có $\max\limits_{[0;4]}g(x)=\max\{|m+1|;|m+5|\}$.



Trường hợp 1: $\heva{|m+1|\ge|m+5|\\ \max\limits_{[0;4]}g(x)=9} \Leftrightarrow \heva{m\le -3\\ |m+1|=9} \Leftrightarrow \heva{m\le -3\\ \hoac{m=8\\ m=-10}} \Leftrightarrow m=-10.$

Trường hợp 2: $\heva{|m+1|<|m+5|\\ \max\limits_{[0;4]}g(x)=9} \Leftrightarrow \heva{m>-3\\ |m+5|=9} \Leftrightarrow \heva{m>-3\\ \hoac{m=4\\ m=-14}} \Leftrightarrow m=4.$

Vậy tổng tất cả giá trị nguyên của m là $-10+4=-6$

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(\sin x+1)+m|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 4. (B) 2. (C) 0. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + 1$ ($t \in [0;2]$), khi đó $y = |f(\sin x + 1) + m| = |f(t) + m| = |t^3 - 3t + m|$.
Xét hàm số $u(t) = t^3 - 3t + m$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ có $u'(t) = 3t^2 - 3$.
$u'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \hoac{t = 1 \in [0;2] \\ t = -1 \notin [0;2]}$.
Ta có $u(0) = m$; $u(1) = m - 2$; $u(2) = m + 2$.
Khi đó $\max\limits_{[0;2]} u(x) = m + 2$, $\min\limits_{[0;2]} u(x) = m - 2$.
Khi đó $\max y = \max\{|m-2|; |m+2|\}$. Xét các trường hợp

Trường hợp 1: $\heva{|m-2| = 4 \\ |m-2| \geq |m+2|} \Leftrightarrow \heva{\hoac{m = 6 \\ m = -2} \\ m \leq 0} \Leftrightarrow m = -2$.

Trường hợp 2: $\heva{|m+2| = 4 \\ |m+2| \geq |m-2|} \Leftrightarrow \heva{\hoac{m = 2 \\ m = -6} \\ m \geq 0} \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $S \in \{-2; 2\} \Rightarrow -2 + 2 = 0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f(1) = -1$; $f'(1) = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $|f(x) - m| \leq 12$ nghiệm đúng $\forall x \in [0;2]$. Số phần tử của S là

(A) 10. (B) 16. (C) 11. (D) 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc toạ độ, suy ra $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (I)$.
Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.
Theo giả thiết $\heva{f(1) = -1 \\ f'(1) = 0} \Leftrightarrow \heva{a + b + c = -1 \\ 4a + 2b = 0} \quad (II)$.
Từ (I) và (II) suy ra $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$ nên $f(x) = x^4 - 2x^2$.
Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0;2]$.
Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;2]$ và có $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \hoac{x = 0 \in [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2]}$.
Khi đó $y(0) = -m$; $y(1) = -m - 1$; $y(2) = -m + 8$. Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = -m + 8$, $\min\limits_{[0;2]} y = -m - 1$.
Theo bài ra $|x^4 - 2x^2 - m| \leq 12, \forall x \in [0;2]$. Suy ra

$$\max\{|-m-1|; |-m+8|\} \leq 12 \Leftrightarrow \hoac{\heva{|-m+8| \leq 12 \\ |-m+8| \geq |-m-1|} \\ \heva{|-m-1| \leq 12 \\ |-m-1| \geq |-m+8|}}$$

$$\Leftrightarrow \hoac{\heva{-4 \leq m \leq 20 \\ m \leq \dfrac{7}{2}} \\ \heva{-13 \leq m \leq 11 \\ m \geq \dfrac{7}{2}}} \Leftrightarrow \hoac{-4 \leq m \leq \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{7}{2} \leq m \leq 11} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 11.$$

Suy ra S có 16 phần tử
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2020}{x-m}$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\max\limits_{[0;2019]}|f(x)|=2020$.

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x\neq m$.

Nếu $m=-2020$ thì $f(x)=1, \forall x\neq -2020$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\neq -2020$ thì $f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$ nên yêu cầu bài toán

$$\max_{[0;2019]}|f(x)|=2020\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin[0;2019]\\ \max\{|f(0)|;|f(2019)|\}=2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin[0;2019]\\ \max\left\{\dfrac{2020}{|m|};\dfrac{4039}{|m-2019|}\right\}=2020.\end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1: $\begin{cases}m\notin[0;2019]\\ \dfrac{2020}{|m|}=2020\\ \dfrac{4039}{|m-2019t|}\leq 2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>2019\end{array}\right.\\ m=\pm 1\\ \dfrac{4039}{|m-2019|}\leq 2020\end{cases}\Leftrightarrow m=-1.$

Trường hợp 2: $\begin{cases}m\notin[0;2019]\\ \dfrac{4039}{|m-2019|}=2020\\ \dfrac{2020}{|m|}\leq 2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>2019\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{4082419}{2020}\approx 2021\\ \dfrac{2020}{|m|}\leq 2020\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{4082419}{2020}\approx 2021.$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) 1. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Hàm số xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$; Có $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;1]\\ x=-4\notin[-1;1]\end{array}\right.$.

Mặt khác $g(0)=2m$; $g(-1)=2m+1$; $g(1)=2m+\dfrac{1}{3}$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=2m+1$; $\min\limits_{[-1;1]}g(x)=2m+\dfrac{1}{3}$.

Do đó $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\max\{|2m+1|;|2m|\}$.

Ta có $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|2m+1|=3\\ |2m+1|\geq|2m|\end{cases}\\ \begin{cases}|2m|=3\\ |2m|\geq|2m+1|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra $S=\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng $-\dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) 1. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=R\setminus\{-2\}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Hàm số xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;1]\\x=-4\notin[-1;1]\end{array}\right.$.

Ta có $g(0)=2m$; $g(-1)=2m+1$;$g(1)=2m+\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]}g(x)=2m+1$; $\min\limits_{[-1;1]}g(x)=2m$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\max\{|2m+1|;|2m|\}$. Ta có $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|2m+1|=3\\|2m+1|\geq|2m|\end{cases}\\\begin{cases}|2m|=3\\|2m|\geq|2m+1|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra $S=\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-(m+1)x+m\right|$ trên $[2;m-1]$nhỏ hơn 2020.

(A) 2043210. (B) 2034201. (C) 3421020. (D) 3412020.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^2-(m+1)x+m$ liên tục trên $[2;m-1]$ với $m>6$.

Ta có: $f'(x)=2x-(m+1)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m+1}{2}\in[2;m-1]$.

Khi đó: $f(2)=2-m$; $f\left(\dfrac{m+1}{2}\right)=-\dfrac{(m-1)^2}{4}$; $f(m-1)=2-m$.

Vì $-\dfrac{(m-1)^2}{4}\leq 2-m<0,\forall m>6$ nên $\max\limits_{[2;m-1]}f(x)=\max\left\{f(2);f\left(\dfrac{m+1}{2}\right);f(m-1)\right\}=2-m$; và $\min\limits_{[2;m-1]}f(x)=\min\left\{f(2);f\left(\dfrac{m+1}{2}\right);f(m-1)\right\}=-\dfrac{(m-1)^2}{4}$.

Do đó: $\min\limits_{[2;m-1]}y=\min\left\{|2-m|;\left|-\dfrac{(m-1)^2}{4}\right|\right\}=|2-m|$.

Theo yêu cầu bài toán: $|2-m|<2020\Leftrightarrow -2020<2-m<2020\Leftrightarrow -2018<m<2022$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m>6$ nên $m\in\{7;8;9;\cdots;2021\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum\limits_{n=7}^{2021}n=\dfrac{(7+2021)2015}{2}=2043210$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho hàm số $y=\left|x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-3+m\right|$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không bé hơn 5.

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) -7.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-3+m$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-9x+6$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\x=2\in[0;3]\end{array}\right.$.

$f(0)=-3+m$; $f(1)=-\dfrac{1}{2}+m$; $f(2)=-1+m$; $f(3)=\dfrac{3}{2}+m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x) = \dfrac{3}{2} + m$; $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -3 + m$.

☑ Trường hợp 1: $\left(\dfrac{3}{2} + m\right)(-3 + m) \le 0$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số y trên đoạn $[0;3]$ là 0 (loại).

☑ Trường hợp 2: $\left(\dfrac{3}{2} + m\right)(-3 + m) > 0$. Khi đó: $\min\limits_{[0;3]} y = \min\left\{\left|\dfrac{3}{2} + m\right|; |-3 + m|\right\}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không bé hơn 5

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left|\dfrac{3}{2} + m\right| \ge |-3 + m| \\ |-3 + m| \ge 5 \end{cases} \\ \begin{cases} \left|\dfrac{3}{2} + m\right| \le |-3 + m| \\ \left|\dfrac{3}{2} + m\right| \ge 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \ge \dfrac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 8 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} m \le \dfrac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{7}{2} \\ m \le -\dfrac{13}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 8 \\ m \le -\dfrac{13}{2}. \end{array}\right.$$

Suy ra các giá trị $m \in [-10;10]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{-10; -9; -8; -7; 8; 9; 10\}$.
Vậy tổng các giá trị m cần tìm là -7
Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m\right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max\limits_{[-1;2]} y \le 11$.

(A) -19. (B) -37. (C) -30. (D) -11.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.
Ta có $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = 1 \in [-1;2] \\ x = 2 \in [-1;2]. \end{array}\right.$$

$f(-1) = \dfrac{9}{4} + m$; $f(0) = m$; $f(1) = \dfrac{1}{4} + m$; $f(2) = m$.

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[-1;2]} f(x) = \max\{f(-1); f(0); f(1); f(2)\} = f(-1) = m + \dfrac{9}{4} \\ \min\limits_{[-1;2]} f(x) = \min\{f(-1); f(0); f(1); f(2)\} = f(0) = f(2) = m. \end{cases}$

Vậy $\max\limits_{[0;3]} y = \max\left\{\left|m + \dfrac{9}{4}\right|, |m|\right\}$, theo yêu cầu bài toán $\max\limits_{[0;3]} y \le 11$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left|m + \dfrac{9}{4}\right| \le 11 \\ \left|m + \dfrac{9}{4}\right| \ge |m| \end{cases} \\ \begin{cases} |m| \le 11 \\ |m| \ge \left|m + \dfrac{9}{4}\right| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\dfrac{53}{4} \le m \le \dfrac{35}{4} \\ m \ge -\dfrac{9}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} -11 \le m \le 11 \\ m \le -\dfrac{9}{8} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{9}{8} \le m \le \dfrac{35}{4} \\ -11 \le m \le -\dfrac{9}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow -11 \le m \le \dfrac{35}{4}.$$

Vì m nguyên nên $m = \{-11; -10; ...; 8\}$.
Kết luận: tổng các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-11 - 10 - 9 - ... + 8 = -30$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|-4\cos^2 x + 2\sin x + m + 4\right|$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

(A) 12. (B) 14. (C) 13. (D) 15.

Lời giải.

Ta có: $y=\left|-4\cos^2 x+2\sin x+m+4\right|=\left|4\left(1-\cos^2 x\right)+2\sin x+m\right|=\left|4\sin^2 x+2\sin x+m\right|$.

Đặt $t=\sin x$, do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra $t\in[0;1]$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|4t^2+2t+m\right|$ trên đoạn $[0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2+2t+m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, ta có

$f'(t)=8t+2; f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{4}\notin[0;1]$.

$f(0)=m; f(1)=m+6$.

☑ Trường hợp 1: Nếu $m\geq 0\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=m$. Kết hợp với giả thiết ta có $0\leq m\leq 4$. (1)

☑ Trường hợp 2: Nếu $m+6\leq 0\Leftrightarrow m\leq -6\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=-m-6$. Kết hợp với giả thiết ta có $\begin{cases}-m-6\leq 4\\ m\leq -6\end{cases}\Leftrightarrow$ $-10\leq m\leq -6$. (2)

☑ Trường hợp 3: Nếu $m(m+6)<0\Leftrightarrow -6<m<0\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=0\leq 4$. Trường hợp này thỏa mãn. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $m\in[-10;4]$. Vì m là số nguyên nên $m\in\{-10,-9,-8,...,2,3,4\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-2mx+3\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3, tức là $\max\limits_{[1;2]} f(x)\leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2mx+3\leq 3,\forall x\in[1;2]\\ x^2-2mx+3\geq -3,\forall x\in[1;2]\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2m\geq x,\forall x\in[1;2]\\ 2m\leq \dfrac{x^2+6}{x},\forall x\in[1;2]\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2m\geq \max\limits_{[1;2]}(x)\ (1)\\ 2m\leq \min\limits_{[1;2]}\left(\dfrac{x^2+6}{x}\right)\ (2).\end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow 2m\geq 2\Leftrightarrow m\geq 1$.

Xét hàm $g(x)=\dfrac{x^2+6}{x}=x+\dfrac{6}{x}$ với $x\in[1;2]$ có $g'(x)=1-\dfrac{6}{x^2}$.

Suy ra: $g'(x)<0,\forall x\in[1;2]\Rightarrow \min\limits_{[1;2]} g(x)=g(2)=5$. Do đó $(2)\Leftrightarrow m\leq\dfrac{5}{2}$.

Vậy $1\leq m\leq\dfrac{5}{2}$, mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x+m\right|$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[-2;3]} y<50$. Tổng các phần tử của M là

(A) 0. (B) 737. (C) 759. (D) −215.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x-9$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$. Có $f(-2)=m-2; f(-1)=m+5; f(3)=m-27$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=m+5;\ \min\limits_{[-2;3]} f(x)=m-27$.

Do đó $M=\max\limits_{[-2;3]} y=\max\{|m+5|;|m-27|\}$.Theo yêu cầu bài toán $\max\limits_{[-2;3]} y<50$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m+5|\geq|m-27|\\ |m+5|<50\end{cases}\\ \begin{cases}|m+5|<|m-27|\\ |m-27|<50\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m-22\geq 0\\ -50<m+5<50\end{cases}\\ \begin{cases}2m-22<0\\ -50<m-27<50\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\in[11;45)\\ m\in(-23;11)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in(-23;45).$$

Do đó $S=\{-22;-21;-20;...;-1;0;1;2;...;44\}$.
Vậy tổng các phần tử của M là 737.
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max\limits_{[-1;2]}y\le 100$.

A) 197. B) 196. C) 200. D) 201.

Lời giải.

Xét $u=x^4-2x^3+x^2+a$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ có $u'=4x^3-6x^2+2x$.

Phương trình $u'=0\Leftrightarrow 4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;2]\\x=1\in[-1;2]\\x=\dfrac{1}{2}\in[-1;2].\end{array}\right.$

Suy ra $\begin{cases}M=\max\limits_{[-1;2]}u=\max\left\{u(-1),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1),u(2)\right\}=u(-1)=u(2)=a+4\\ m=\min\limits_{[-1;2]}u=\min\left\{u(-1),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1),u(2)\right\}=u(0)=u(1)=a.\end{cases}$

Vậy $\max\limits_{[-1;2]}y=\max\{|a+4|,|a|\}\le 100\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|a+4|\le|a|\le 100\\|a|\le|a+4|\le 100\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-100\le a\le -2\\-2\le a\le 96.\end{array}\right.$

Vậy $a\in\{-100,-99,...,96\}$có 197số nguyên thỏa mãn
Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hàm số $y=|\sin x+\cos x+m|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.

A) 0. B) 1. C) 2. D) 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\sin x+\cos x+m$, có tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ta có: $-\sqrt{2}+m\le\sin x+\cos x+m\le\sqrt{2}+m,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra $-\sqrt{2}+m\le f(x)\le\sqrt{2}+m,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Vậy: $\max\limits_D y=\left|m+\sqrt{2}\right|$ hoặc $\max\limits_D y=\left|m-\sqrt{2}\right|$.
Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m+\sqrt{2}\right|<2\\ \left|m-\sqrt{2}\right|\le\left|m+\sqrt{2}\right|\end{cases}\\ \begin{cases}\left|m-\sqrt{2}\right|<2\\ \left|m+\sqrt{2}\right|\le\left|m-\sqrt{2}\right|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2-\sqrt{2}<m<2-\sqrt{2}\\ m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}-2+\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2}\\ m\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le m<2-\sqrt{2}\\ -2+\sqrt{2}<m\le 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\ -2+\sqrt{2}<m<2-\sqrt{2}$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=0$.
Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán
Chọn đáp án B □

Câu 35. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m\right|$ trên đoạn $[-2;1]$. Với $m\in[-3;3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.

Lời giải.

Xét $f(x)=x^2+2x+m$ liên tục trên $[-2;1]$.
Ta có: $f'(x)=2x+2$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1\in(-2;1)$; $f(-2)=m$;$f(1)=m+3$; $f(-1)=m-1$.

☑ Trường hợp 1: $(m-1)(m+3)\le 0\Leftrightarrow -3\le m\le 1$, lúc đó $M=\min\limits_{[-2;1]}y=0$.

☑ Trường hợp 2: $(m-1)(m+3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1. \end{array}\right.$ (*)

Do đó: $M=\min\limits_{[-2;1]} y=\min\{|m-1|;|m+3|\}$.

Khi $|m-1| \leq |m+3| \Leftrightarrow (m-1)^2 \leq (m+3)^2 \Leftrightarrow m \geq -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m>1$, lúc đó: $M=\min\limits_{[-2;1]} y=|m-1|$.

Khi $|m-1|>|m+3| \Leftrightarrow m<-1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m<-3$, lúc đó: $M=\min\limits_{[-2;1]} y=|m+3|$.

Xét các giá trị $m \in [-3;3]$ $M=\begin{cases} 0 \text{ khi } -3 \leq m \leq 1 \\ |m-1| \text{ khi} 1<m \leq 3 \end{cases}=\begin{cases} 0 \text{ khi } -3 \leq m \leq 1 \\ m-1 \text{ khi} 1<m \leq 3. \end{cases}$

Dễ dàng nhận thấy M đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $m=3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+m\right|$. Khi m thuộc $[-3;3]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị lớn nhất bằng

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Xét $u(x)=x^4-4x^3+4x^2+m$ liên tục trên $[0;2]$.

Ta có $u'(x)=4x^3-12x^2+8x$, $u'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta có: $\begin{cases} u(0)=m \\ u(1)=m+1 \\ u(2)=m \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \min\limits_{[0;2]} u(x)=m \\ \max\limits_{[0;2]} u(x)=m+1. \end{cases}$

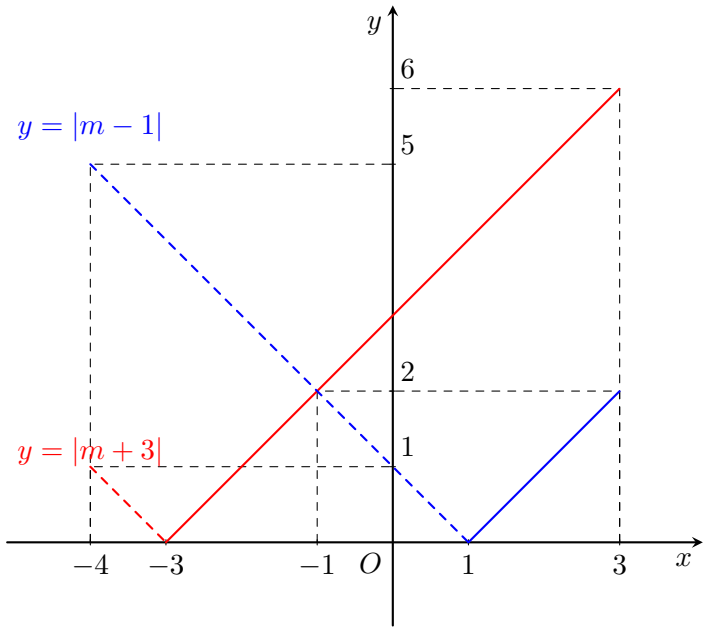
$\min\limits_{[0;2]} f(x)=\min\{0;|m|;|m+1|\}$ hoặc $\min\limits_{[0;2]} f(x)=0$, với $m \in [-3;3]$ (*).

☑ Trường hợp 1: $m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$ suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x)=0$.

☑ Trường hợp 2: $m>0$ kết hợp với (*) ta có: $0<m \leq 3$ suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x)=|m|$.

☑ Trường hợp 3: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$ kết hợp với (*) ta có $-3 \leq m<-1$.
suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x)=|m+1|$.

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]} f(x)=\begin{cases} |m|, m \in (0;3] \\ |m+1|, m \in [-3;-1). \\ 0, m \in [-1;0] \end{cases}$



Dựa vào đồ thị ta thấy $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $m=3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hàm số $y=\left|x^2-4x+2m-3\right|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m=b$. Tính $P=2b-a$.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{13}{4}$. (C) $\frac{-9}{4}$. (D) 6.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f(x)=x^2-4x+2m-3$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.
$f'(x)=2x-4$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;3]; f(1)=2m-6$, $f(2)=2m-7$, $f(3)=2m-6$.
Khi đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\max\{|2m-6|;|2m-7|\}=M$.

Ta có: $\begin{cases}M\geq|2m-6|\\M\geq|2m-7|=|7-2m|\end{cases}$

$\Rightarrow 2M\geq|2m-6|+|7-2m|\geq|2m-6+7-2m|=1\Rightarrow M\geq\frac{1}{2}$.

Dấu $''=''$ xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}|2m-6|=|2m-7|=\frac{1}{2}\\(2m-6)(7-2m)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{13}{4}$.

Do đó $M=\frac{1}{2}=a$ khi $m=\frac{13}{4}=b\Rightarrow P=2b-a=6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là

(A) 4. (B) -4. (C) 8. (D) -8.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ liên tục trên đoạn $[-3;-1]$.
Ta có $f'(x)=3x^2+2x+m^2+1>0$ với $\forall x\in[-3;-1]$.
Ta có $f(-3)=6-3m^2$; $f(-1)=26-m^2$.
Khi đó $\max\limits_{[-3;-1]}|f(x)|=\max\left\{\left|6-3m^2\right|;\left|26-m^2\right|\right\}=M$.

Lại có $\begin{cases}M\geq\left|6-3m^2\right|\\M\geq\left|26-m^2\right|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M\geq\left|6-3m^2\right|\\3M\geq\left|3m^2-78\right|\end{cases}\Rightarrow 4M\geq 72\Leftrightarrow M\geq 18$.

Dấu bằng xẩy ra khi $\begin{cases}\left|6-3m^2\right|=\left|26-m^2\right|=18\\\left(6-3m^2\right)\left(3m^2-78\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow m^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m=2\sqrt{2} \\ m=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất.

Khi đó tích các giá trị là $2\sqrt{2}.\left(-2\sqrt{2}\right)=-8$

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=x^3-19x+30$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-5\notin[0;2] \\ x=3\notin[0;2] \\ x=2\in[0;2]. \end{array}\right.$

Ta có: $f(0)=m; f(2)=m+26$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]}f(x)=\max\{m;m+26\}=m+26$; $\min\limits_{[0;2]}f(x)=\min\{m;m+26\}=m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|m|;|m+26|\}=M$.

Ta có $\begin{cases} M\geq|m|=|-m| \\ M\geq|m+26| \end{cases}$

$\Rightarrow 2M\geq|-m|+|m+26|\Leftrightarrow M\geq\frac{|-m|+|m+26|}{2}\geq\frac{|-m+m+26|}{2}=13.$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} |m|=|m+26|=13 \\ -m(m+26)>0 \end{cases}\Leftrightarrow m=-13.$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 13 khi $m=-13$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 4.

Lời giải.

Xét $u=x^2-2x+m$ liên tục trên trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $u'=2x-2$; $u'=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1\in[0;2]$.

$u(0)=m, u(1)=m-1, u(2)=m$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]}u=\max\{u(0),u(1),u(2)\}=m\max\{m,m-1,m\}=m$.

$\min\limits_{[0;2]}u=\min\{u(0),u(1),u(2)\}=\min\{m,m-1,m\}=m-1$.

$$\Rightarrow\max_{[0;2]}y=\max\{|m-1|,|m|\}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m|=3 \\ |m|\geq|m-1| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-1|=3 \\ |m-1|\geq|m| \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ |m|\geq|m-1| \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-2 \end{array}\right. \\ |m-1|\geq|m| \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow m=3, m=-2.$$

Vậy số phần tử của S là 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-mx^2-9x+9m\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $f(x)=x^3-mx^2-9x+9m$. Dễ thấy $\min\limits_{[-2;2]}|f(x)|\geq 0$, dấu $''=''$ xảy ra khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x\in[-2;2]$.

Ta có: $f(x)=x^2(x-m)-9(x-m)=\left(x^2-9\right)(x-m)$; $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-3\\x=m\end{array}\right.$.

Do đó điều kiện cần và đủ để $f(x)=0$ có nghiệm $x\in[-2;2]$ là $m\in[-2;2]$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\left|-x^4+8x^2+m\right|$ trên đoạn$[-1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) 23. (B) 24. (C) 25. (D) 26.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)=\left|-x^4+8x^2+m\right|=\left|x^4-8x^2-m\right|=\left|\left(x^2-4\right)^2-16-m\right|$.

Đặt $t=\left(x^2-4\right)^2$, vì $x\in[-1;3]$, suy ra $t\in[0;25]$.

Khi đó $y=g(t)=|t-16-m|$.

Ta có $\min\limits_{[-1;3]}f(x)=\min\limits_{[-0;25]}g(t)=\min\{|m-9|,|m+16|\}$.

- ☑ Nếu $m-9\geq 0\Leftrightarrow m\geq 9$, khi đó $\min\limits_{[-1;3]}f(x)=m-9\geq 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]}f(x)\right)=0$, khi $m=9$.
- ☑ Nếu $m+16\geq 0\Leftrightarrow m\geq -16$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]}f(x)=-m-16\geq 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]}f(x)\right)=0$, khi $m=-16$.
- ☑ Nếu $(m-9)(m+16)<0\Leftrightarrow -16<m<9$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]}f(x)=0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]}f(x)\right)=0$.

Vậy $\min\left(\min\limits_{[-1;3]}f(x)\right)=0$, khi $-16\leq m\leq 9$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, nên có 26 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hàm số$y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[-1;2]}y+\max\limits_{[-1;2]}y=10$

(A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Xét hàm số $u=x^4-2x^3+x^2+a$ liên tục trên đoạn$[-1;2]$ có $u'=4x^3-6x^2+2x$.

$u'=0\Leftrightarrow 4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;2]\\x=1\in[-1;2]\\x=\dfrac{1}{2}\in[-1;2]\end{array}\right.$.

$$\Rightarrow\begin{cases}M=\max\limits_{[-1;2]}u=\max\left\{u(-1),u(2),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1)\right\}=u(-1)=u(2)=a+4.\\m=\min\limits_{[-1;2]}u=\min\left\{u(-1),u(2),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1)\right\}=u(0)=u(1)=a\end{cases}$$

- ☑ Trường hợp 1: Nếu $m\geq 0\Leftrightarrow a\geq 0\Rightarrow\min\limits_{[-1;2]}y=m;\max\limits_{[-1;2]}y=M$ Ta có điều kiện $\begin{cases}a\geq 0\\a+a+4=10\end{cases}\Leftrightarrow a=3$ (thoả mãn).
- ☑ Trường hợp 2: Nếu $M\leq 0\Leftrightarrow a\leq -4$. Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]}y=-M;\max\limits_{[-1;2]}y=-m$.

  Ta có điều kiện $\begin{cases}a\leq -4\\-(a+4)-a=10\end{cases}\Leftrightarrow a=-7$ (thoả mãn).

☑ Trường hợp 3: $m<0<M \Leftrightarrow -4<a<0$.
Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]} y=0; \max\limits_{[-1;2]} y=\max\{|a+4|,|a|\}=\max\{a+4;-a\}<10$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} y+\max\limits_{[-1;2]} y<0+10=10$ (loại).

Vậy có 2 giá trị của tham số a thỏa mãn đề bài là $\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-7 \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+ax-4}{x}\right|$ (a là tham số). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1;4]$. Có bao nhiêu giá trị thực của a để $M+2m=7$?

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+ax-4}{x}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2}>0\ \forall x\in[1;4] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[1;4] \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;4]} g(x)=g(1)=a-3 \\ \max\limits_{[1;4]} g(x)=g(4)=a+3. \end{cases}$

☑ Trường hợp 1: $a-3>0 \Leftrightarrow a>3$.
Ta có $\begin{cases} |a-3|=a-3 \\ |a+3|=a+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{[1;4]}|g(x)|=a-3 \\ M=\max\limits_{[1;4]}|g(x)|=a+3 \end{cases}$.
Khi đó $M+2m=7 \Leftrightarrow a+3+2(a-3)=7 \Leftrightarrow a=\dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn).

☑ Trường hợp 2: $a+3<0 \Leftrightarrow a<-3$.
Ta có $\begin{cases} |a-3|=-a+3 \\ |a+3|=-a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{[1;4]}|g(x)|=-a-3 \\ M=\max\limits_{[1;4]}|g(x)|=-a+3 \end{cases}$.
Khi đó $M+2m=7 \Leftrightarrow -a+3+2(-a-3)=7 \Leftrightarrow a=-\dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn).

☑ Trường hợp 3: $a-3\le 0\le a+3 \Leftrightarrow -3\le a\le 3$.
Ta có $\begin{cases} |a+3|=a+3 \\ |a-3|=-a+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{[1;4]}|g(x)|=0 \\ M=\max\limits_{[1;4]}|g(x)|=\max\{a+3;-a+3\} \end{cases}$.
Khi đó $M+2m=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+3+2.0=7 \\ a+3\ge -a+3 \end{cases} \\ \begin{cases} -a+3+2.0=7 \\ -a+3>a+3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ a\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-4 \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a=\pm 4$ (không thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=\pm\dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10$.

A) 4. B) -3. C) 1. D) 2.

Lời giải.

Ta xét $f(x)=x^4-2x^3+m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f'(x)=4x^3-6x^2$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;1] \\ x=\dfrac{3}{2}\notin[0;1]. \end{array}\right.$

$f(0)=m; f(1)=m-1$.
Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m \le 0$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1-m; \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=-m$.
  Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10 \Leftrightarrow (1-m)+2(-m)=10 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện).

- Nếu $m \ge 1$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=m; \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=m-1$.
  Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10 \Leftrightarrow m+2(m-1)=10 \Leftrightarrow m=4$ (thỏa điều kiện).

- Nếu $\dfrac{1}{2} \le m<1$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=m; \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.
  Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10 \Leftrightarrow m=10$ (không thỏa điều kiện).

- Nếu $0<m<\dfrac{1}{2}$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1-m; \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.
  Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10 \Leftrightarrow 1-m=10 \Leftrightarrow m=-9$ (không thỏa điều kiện).

Do đó có hai giá trị $m=-3$ và $m=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10$ là 1.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $3\max\limits_{[1;3]}f(x)-2\min\limits_{[1;3]}f(x)=17$.

A $m \in \{9;-5;29\}$. B $m \in \left\{9;-5;\dfrac{-5}{3}\right\}$. C $m \in \{9;-5\}$. D $m \in \{9;-5;5\}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.
Xét hàm số $y=x^3-3x^2+m$ Ta có $y'=3x^2-6x; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin [1;3] \\ x=2 \in [1;3]. \end{array}\right.$
Khi đó $\begin{cases} \min\limits_{[1;3]}y=\min\{y(1);y(3);y(2)\}=\min\{m-2;m;m-4\}=m-4 \\ \max\limits_{[1;3]}y=\max\{y(1);y(3);y(2)\}=\max\{m-2;m;m-4\}=m. \end{cases}$

- Nếu $m-4 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 4 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]}f(x)=m-4 \\ \max\limits_{[1;3]}f(x)=m. \end{cases}$
  Ta có $3\max\limits_{[1;3]}f(x)-2\min\limits_{[1;3]}f(x)=17 \Leftrightarrow 3m-2(m-4)=17 \Leftrightarrow m=9$ (thoả mãn).

- Nếu $m \le 0 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]}f(x)=-m \\ \max\limits_{[1;3]}f(x)=4-m. \end{cases}$
  Ta có $3\max\limits_{[1;3]}f(x)-2\min\limits_{[1;3]}f(x)=17 \Leftrightarrow 3(4-m)+2m=17 \Leftrightarrow m=-5$ (thoả mãn).

- Nếu $0<m<2 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]}f(x)=0 \\ \max\limits_{[1;3]}f(x)=4-m. \end{cases}$
  Ta có $3\max\limits_{[1;3]}f(x)-2\min\limits_{[1;3]}f(x)=17 \Leftrightarrow 3(4-m)=17 \Leftrightarrow m=\dfrac{-5}{3}$ (không thoả mãn).

☑ Nếu $2 \le m < 4 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} f(x) = 0 \\ \max\limits_{[1;3]} f(x) = m. \end{cases}$

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x) - 2\min\limits_{[1;3]} f(x) = 17 \Leftrightarrow 3m = 17 \Leftrightarrow m = \dfrac{17}{3}$ (không thoả mãn).

Vậy $m \in \{9; -5\}$
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;2]} |f(x)| + \max\limits_{[0;2]} |f(x)| = 6$ là

A -16. B -9. C 16. D 144.

Lời giải.

Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0;2]$ Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ta có: $\begin{cases} f(0) = m \\ f(1) = -2 + m \\ f(2) = 2 + m \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} \min\limits_{[0;2]} f(x) = -2 + m \\ \max\limits_{[0;2]} f(x) = 2 + m. \end{cases}$

☑ Trường hợp 1: $(-2 + m)(2 + m) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2. \end{array}\right.$

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]} |f(x)| + \max\limits_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow |-2 + m| + |2 + m| = 6$.

Nếu $m < -2$ ta có: $2 - m - 2 - m = 6 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa).

Nếu $m > 2$ ta có: $-2 + m + 2 + m = 6 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa).

☑ Trường hợp 2: $(-2 + m)(2 + m) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2.(*)$

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]} |f(x)| = 0$ và $\min\limits_{[0;2]} |f(x)| + \max\limits_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow \max\limits_{[0;2]} |f(x)| = 6$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+2| \ge |-2+m| \\ |m+2| = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} |m+2| \le |-2+m| \\ |-2+m| = 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+2| \ge |-2+m| \\ m = 4 \vee m = -8 \end{cases} \\ \begin{cases} |m+2| \le |-2+m| \\ m = -4 \vee m = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -4 \end{array}\right. \text{(không thỏa (*))}$$

Vậy tích các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là: $-3.3 = -9$
Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;2]} |f(x)| + \max\limits_{[0;2]} |f(x)| = 6$ là

A -16. B -9. C 16. D 144.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0;2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$ với mọi $x \in [0;2]$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Vì $\begin{cases} f(0) = m \\ f(1) = -2 + m \\ f(2) = 2 + m \end{cases}$ nên $\begin{cases} \min\limits_{[0;2]} f(x) = -2 + m, \\ \max\limits_{[0;2]} f(x) = 2 + m. \end{cases}$

Khi đó ta có hai trường hợp xảy ra

Trường hợp 1: $(-2 + m)(2 + m) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2, \\ m > 2. \end{array}\right.$ Khi đó

$$\min_{[0;2]} |f(x)| + \max_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow |-2 + m| + |2 + m| = 6.$$

- Nếu $m < -2$ ta có $2 - m - 2 - m = 6 \Leftrightarrow m = -3$, thỏa mãn.
- Nếu $m > 2$ ta có: $-2 + m + 2 + m = 6 \Leftrightarrow m = 3$, thỏa mãn.

Trường hợp 2:

$$(-2 + m)(2 + m) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2. \quad (*)$$

Khi đó $\min\limits_{[0;2]} |f(x)| = 0$ và

$$\min_{[0;2]} |f(x)| + \max_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 6$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+2| \ge |-2+m| \\ |m+2| = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} |m+2| \le |-2+m| \\ |-2+m| = 6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+2| \ge |-2+m| \\ m = 4 \vee m = -8 \end{cases} \\ \begin{cases} |m+2| \le |-2+m| \\ m = -4 \vee m = 8 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4, \\ m = -4. \end{array}\right. \text{(không thỏa điều kiện (*))}$$

Vậy tích các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là $(-3) \cdot 3 = -9$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+m}{x+2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho

$$2 \max_{[0;1]} |f(x)| + 3 \min_{[0;1]} |f(x)| = 6.$$

Số phần tử của S là

(A) 6. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta thấy

- Hàm số $f(x) = \dfrac{x+m}{x+2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$;
- $f(0) = \dfrac{m}{2}$, $f(1) = \dfrac{m+1}{3}$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -m$.

Trường hợp 1: Nếu $0 \le -m \le 1 \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$ thì

$$\max_{[0;1]} |f(x)| = \max\left\{\left|\frac{m}{2}\right|; \left|\frac{m+1}{3}\right|\right\}, \min_{[0;1]} |f(x)| = 0.$$

Do đó

$$2 \max_{[0;1]} |f(x)| + 3 \min_{[0;1]} |f(x)| = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\left|\dfrac{m}{2}\right| = 6 \\ 2\left|\dfrac{m+1}{3}\right| = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 6, \\ m = 8, \\ m = -10. \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: Nếu $-m < 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì

$$\max_{[0;1]} |f(x)| = \max\left\{\frac{m}{2}; \frac{m+1}{3}\right\}, \min_{[0;1]} |f(x)| = \min\left\{\frac{m}{2}; \frac{m+1}{3}\right\}.$$

Ta có

$$\frac{m}{2} - \frac{m+1}{3} = \frac{m-2}{6} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \ge \dfrac{m+1}{3} & \text{khi } m \ge 2, \\ \dfrac{m}{2} < \dfrac{m+1}{3} & \text{khi } 0 < m < 2. \end{cases}$$

☑ Với $m \geq 2$, ta có

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6 \Leftrightarrow m+m+1=6 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}\text{ (thỏa mãn).}$$

☑ Với $0<m<2$, ta có

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{m+1}{3}+3\cdot\frac{m}{2}=6 \Leftrightarrow m=\frac{32}{13}\text{ (không thỏa mãn).}$$

Trường hợp 3: Nếu $-m>1 \Leftrightarrow m<-1$ thì

$$\max_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{-\frac{m}{2};-\frac{m+1}{3}\right\};\ \min_{[0;1]}|f(x)|=\min\left\{-\frac{m}{2};-\frac{m+1}{3}\right\}.$$

Vì $-\frac{m}{2}+\frac{m+1}{3}=\frac{-m+2}{6}>0, \forall m<-1$ nên $-\frac{m}{2}>-\frac{m+1}{3}$ khi $m<-1$. Do đó

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{-m}{2}+3\cdot\frac{-m-1}{3}=6 \Leftrightarrow m=-\frac{7}{2}\text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4;4]$ như sau

x	-4		-3		-1		0		2		4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-4	↗	4	↘	2	↗	3	↘	-3	↗	1

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in [-4;4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3\right|+3|x|\right)+f(m)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\frac{11}{2}$.

A) 2. B) 3. C) 4. D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[-4;4]$. Ta có

☑ $x \in [-4;4] \Rightarrow -x \in [-4;4]$;

☑ $g(x)=g(-x)$ với mọi $x \in [-4;4]$.

Do đó, $y=g(x)$ là hàm số chẵn trên $[-4;4]$.
Khi đó, theo yêu cầu bài toán ta có

$$\max_{[0;1]}g(x)=\max_{[-1;1]}g(x)=\frac{11}{2}. \quad (1)$$

Xét $x \in [0;1]$ khi đó

$$g(x)=f\left(x^3+3x\right)+f(m).$$

Đặt $u=x^3+3x$ với $x \in [0;1]$. Ta có

$$u'=3x^2+3>0,\ \forall x \in [0\,;1]\,.$$

Suy ra

$$u(0) \leq u \leq u(1) \Leftrightarrow 0 \leq u \leq 4.$$

Khi đó, hàm số trở thành $h(u)=f(u)+f(m)$ với $u \in [0;4]$. Ta có

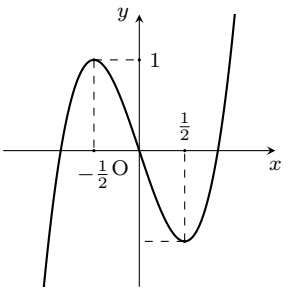
$$\max_{[0;1]}g(x)=\max_{[0;4]}h(u)=f(0)+f(m)=3+f(m).$$

Khi đó,

$$(1) \Leftrightarrow 3 + f(m) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow f(m) = \frac{5}{2}.$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra có 4 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đặt

$$g(x) = |f(x)| - \sqrt{1 - 2|x|} + f\left(\frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right).$$

Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0?

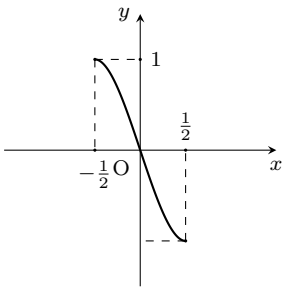
A $-\frac{1}{2}$. B 0. C $\frac{1}{2}$. D Không tồn tại.

Lời giải.

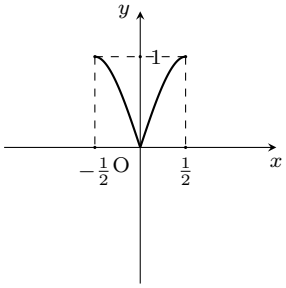
Với $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ điều kiện xác định của $g(x)$ là

$$1 - 2|x| \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Trên tập $D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ hàm số $f(x)$ có đồ thị



Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có dạng



Ta có

$$0 \leq |f(x)| \leq 1, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

và

$$0 \leq 1 - 2|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1 - 2|x|} \leq 0.$$

Thế thì

$$-1 \leq |f(x)| - \sqrt{1 - 2|x|} \leq 1.$$

Do đó $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} g(x) = -1 + f\left(\frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$ khi $x = 0$.

Theo yêu cầu bài toán

$$\min_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} g(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right) = 1.$$

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}$, $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. Ta có

$$t'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2m}}+\frac{1}{\sqrt{1-2m}}\right)>0,\forall m\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Do đó, t đồng biến trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. Điều này chỉ ra rằng $-\dfrac{1}{2}\le t\le\dfrac{1}{2}$. Khi đó

$$f(t)=1\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

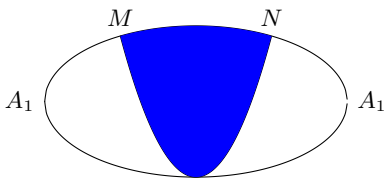
ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. B	4. D	5. D	6. C	7. B	8. B	9. D	10. A
11. D	12. B	13. D	14. A	15. C	16. C	17. C	18. A	19. B	20. B
21. B	22. C	23. B	24. A	25. B	26. B	27. A	28. D	29. C	30. D
31. A	32. B	33. A	34. B	35. B	36. B	37. D	38. D	39. D	40. A
41. B	42. D	43. D	44. B	45. C	46. C	47. B	48. B	49. B	50. C
51. A									

ĐỀ VDC SỐ 16: ỨNG DỤNG CỦA GTLN-GTNN

Câu 1.

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4\text{m}$, $B_1A_2 = 2\text{m}$, $MN = 2\text{m}$.



(A) 2.341.000 đồng. (B) 2.057.000 đồng. (C) 2.760.000 đồng. (D) 1.664.000 đồng.

Lời giải.

Phương trình đường Elip là $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Diện tích hình Elip là

$$S_{(E)} = \pi ab = 2\pi(\text{m}^2).$$

Tọa độ giao điểm M, N là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy $M\left(-1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $N\left(1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol (P) đối xứng qua Oy có dạng $y = ax^2 + c$.

Vì (P) đi qua $B(0; -1)$, $N\left(1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên

$$\begin{cases} c = -1 \\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow (P)\colon \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 - 1.$$

Diện tích phần tô đậm là

$$S_1 = 2\int_0^1 \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 + 1\right] \mathrm{d}x.$$

• Tính $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x$. Đặt $\dfrac{x}{2} = \sin t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{2} = \cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to t = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$.

Suy ra

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

• Mặt khác

$$I_2 = \int_0^1 \left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 + 1\right] \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^3 + x\right]\Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{3}.$$

Do đó $S_1 = 2\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{4}{3}$. Vậy tổng số tiền sử dụng là:

$$S_1 \cdot 200000 + \left(S_{(E)} - S_1\right) \cdot 500000 \simeq 2.341.000(\text{Ø}ng).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

(A) 2. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 0. (D) $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t$ và $v'(t) = 6t - 8$.

Khi đó, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	$-\frac{16}{3}$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$\min_{[0;+\infty)} v = v\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}.$$

Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi $t = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10 cm .

(A) 160 cm^2. (B) 100 cm^2. (C) 80 cm^2. (D) 200 cm^2.

Lời giải.

Đặt $OA = x$ với $0 < x < 10$. Suy ra

$$AB = 2x; \quad AD = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{100 - x^2}.$$

Khi đó

$$S_{ABCD} = S = AB \cdot AD = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{100x^2 - x^4}.$$

Suy ra

$$S' = \frac{200x - 4x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}} \Rightarrow S' = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5\sqrt{2} \\ x = -5\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên của hàm $y = 2\sqrt{100x^2 - x^4}$.

x	0		$5\sqrt{2}$		10
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	100	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ bằng 100 cm^2 khi $x = 5\sqrt{2}$ cm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18\text{m}^3$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất?

(A) 2 m. (B) $\frac{5}{2}$ m. (C) 1 m. (D) $\frac{3}{2}$ m.

Lời giải.

Gọi x $(x > 0)$, là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$. Ta có

$$V = h \cdot x \cdot 3x = h \cdot 3x^2 = 18.$$

Suy ra

$$h = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2}.$$

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật. Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất. Ta có

$$P = 2hx + 2 \cdot h \cdot 3x + 3x^2 = 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot x + 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot 3x + 3x^2 = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

Đặt $f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2$, $x > 0$. Ta có

- $f'(x) = \frac{-48}{x^2} + 6x$;
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên:

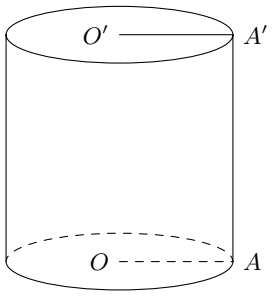
x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	36	↗	

Suy ra nguyên vật liệu ít nhất khi

$$h = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Một cốc hình trụ có bán kính đáy là 2 cm , chiều cao 20 cm . Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là 12 cm. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá 6 cm. Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính 0,6 cm thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



(A) 30. (B) 27. (C) 28. (D) 29.

Lời giải.

Gọi bán kính hình trụ là r, bán kính viên đá hình cầu là R.
Thể tích một viên đá là

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0,6)^3.$$

Gọi n là số viên đá con quạ thả vào cốc, n nguyên dương.
Thể tích nước cần đổ thêm vào cốc để mực nước cách miệng cốc 6 cm là $\pi \cdot r^2 \cdot 2 = 8\pi$.
Để con quạ uống được nước thì lượng đá bỏ vào cốc phải làm mực nước dâng lên cách miệng cốc không quá 6 cm nên ta phải có:

$$n \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,6)^3 \geq 8\pi \Leftrightarrow n \geq \frac{24}{4 \cdot (0,6)^3} \Leftrightarrow n \geq \frac{250}{9}.$$

Do n nguyên dương nên suy ra $n \geq 28$.
Vậy con quạ cần thả vào cốc ít nhất 28 viên đá.
Chọn đáp án C □

Câu 6. Một sợi dây có chiều dài 28m được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A $\frac{56}{4+\pi}$. B $\frac{112}{4+\pi}$. C $\frac{84}{4+\pi}$. D $\frac{92}{4+\pi}$.

Lời giải.

Gọi l_1 , l_2 (m) lần lượt là chu vi hình vuông và hình tròn với $0 < l_1, l_2 < 28$.
Gọi a, R (m) lần lượt là cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn. Khi đó ta có

$$l_1 + l_2 = 28;\ l_1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{l_1}{4};\ l_2 = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{l_2}{2\pi} = \frac{28 - l_1}{2\pi}.$$

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là:

$$S = a^2 + \pi \cdot R^2 = \frac{l_1^2}{16} + \pi \cdot \left(\frac{28 - l_1}{2\pi}\right)^2, 0 < l_1 < 28$$

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm $l_1 \in (0, 28)$ để S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$S' = \frac{l_1}{8} - \left(\frac{28 - l_1}{2\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow l_1 = \frac{112}{\pi + 4}.$$

Lập bảng biến thiên ta được S đạt giá trị nhỏ nhất tại $l_1 = \frac{112}{\pi + 4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là 384 cm^2, lề trên và lề dưới là 3 cm, lề trái và lề phải là 2 cm. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A 82 cm. B 100 cm. C 90 cm. D 84 cm.

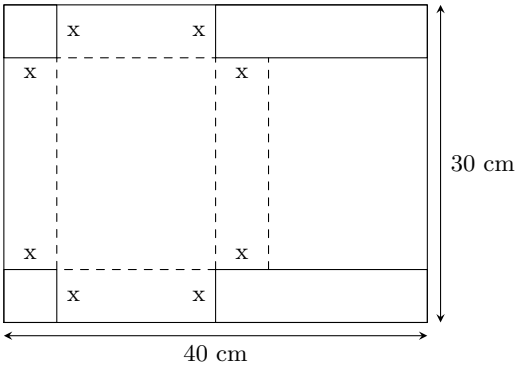
Lời giải.

Ta thấy muốn chi phí sản xuất nhỏ nhất thì kích thước tối ưu là khi diện tích mỗi trang sách phải nhỏ nhất đồng thời vẫn bảo đảm yêu cầu đề ra.
Gọi x, y thứ tự là chiều dài và chiều rộng của trang sách, đơn vị cm , điều kiện: $x > 6$; $y > 4$.
Diện tích phần chữ trên mỗi trang là

$$(x-6)(y-4) = 384 \Leftrightarrow xy = 4x + 6y + 360 \geq 2\sqrt{4x \cdot 6y} + 360.$$

Khi đó $xy - 4\sqrt{6xy} - 360 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 10\sqrt{6} \Rightarrow xy \geq 600$.
Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} xy = 600 \\ 4x = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$.
Vậy chu vi trang sách khi sản xuất theo kích thước tối ưu là $2(x+y) = 100\ (cm)$.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 30 cm, 40 cm. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



(A) $\dfrac{35+5\sqrt{13}}{3}$ cm. (B) $\dfrac{35-4\sqrt{13}}{3}$ cm. (C) $\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}$ cm. (D) $\dfrac{35+4\sqrt{13}}{3}$ cm.

Lời giải.

Khối hộp chữ nhật thu được có kích thước là $30-2x$, $20-x$, x với $x \in [0;15]$. Khi đó

$$V = x(30-2x)(20-x) = f(x) \le \max_{[0;15]} f(x) = f\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{3}\right).$$

Dấu " = " đạt tại $x = \dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Ông A dự định sử dụng hết $6,5$ m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

(A) $2,26$ m^3. (B) $1,01$ m^3. (C) $1,33$ m^3. (D) $1,50$ m^3.

Lời giải.

Gọi chiều rông của bể cá là x m , chiều cao là ym với $x>0$, $y>0$.
Khi đó, chiều dài bể cá là $2x$ m. Diên tích kính sử dụng là

$$S = 2x^2 + 2xy + 4xy \text{ m}^2.$$

Theo bài ra ta có

$$2x^2 + 2xy + 4xy = 6,5 \Rightarrow y = \frac{6.5-2x^2}{6x} = \frac{13-4x^2}{12x}.$$

Thể tích bể cá là

$$\begin{aligned} V(x) &= 2x^2 \cdot \frac{13-4x^2}{12x} \\ &= \frac{x\left(13-4x^2\right)}{6} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Như vậy, yêu cầu bài ra tương ứng với việc tìm x để $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có hai cách giải như sau.

Cách 1: Ta xét hàm số $V(x) = \dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}$ với $x \in \left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$. Khi đó

$$V'(x) = \frac{13-12x^2}{6} \Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{39}}{6}.$$

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$ hàm số $V(x)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là

$$\max_{\left(0;\frac{\sqrt{13}}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50 \text{ m}^3.$$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50$ m^3 .

Cách 2: Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

Theo cách 1, ta tính được $V(x)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}$ với $x\in\left(0\,;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có

$$V(x)=\frac{x\left(13-4x^2\right)}{6}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)}{8}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)\le\left(\frac{8x^2+13-4x^2+13-4x^2}{3}\right)^3=\frac{26^3}{27}.$$

Suy ra

$$V(x)\le\frac{1}{6}\sqrt{\frac{26^3}{8\cdot 27}}=\frac{13\sqrt{39}}{54}\approx 1,50.$$

Dấu "= " xảy ra khi và chỉ khi

$$8x^2=13-4x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{13}{12}}=\frac{\sqrt{39}}{6}.$$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50$ m^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

(A) 243. (B) 144. (C) 27. (D) 36.

Lời giải.

Ta có

$$v(t)=s'(t)=\left(-\frac{1}{3}t^3+6t^2\right)'=-t^2+12t,\forall t\in\mathbb{R}^+.$$

Vì $-t^2+12t=-\left(t-6\right)^2+36\le 36$ với mọi $t>0$.

Suy ra $\max\limits_{t>0}v(t)=36$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\left(t-6\right)^2=0\Leftrightarrow t=6.$$

Vậy trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200 ⩾^{3}, tỉ số giữa chiều của của hố và chiều rọng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi cây tiiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

(A) $1200\,\text{cm}^2$. (B) $120\,\text{cm}^2$. (C) $160\,\text{cm}^2$. (D) $1600\,\text{cm}^2$.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga; h là chiều cao của hố ga $(x,y,h>0)$.

Ta có $h=2x$ và $V=xyh=2x^2y=3200\Rightarrow y=\dfrac{1600}{x^2}$.

Diện tích của bề mặt sử dụng của hố ga không nắp là $S=xy+2xh+2yh=4x^2+5xy=4x^2+\dfrac{8000}{x}$.

Đặt $f(x)=4x^2+\dfrac{8000}{x}$.

Ta có $f'(x)=8x-\dfrac{8000}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=10$.

Bảng biến thiên:

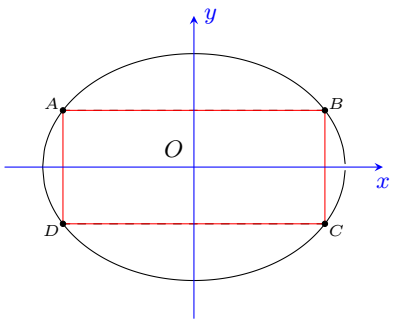
x	0		10		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1200	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy S nhỏ nhất khi $x = 10 \Rightarrow y = 16$.
Diện tích của đáy hố ga khi đó là $160\,\text{cm}^2$.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A 67398224 đồng. B 67593346 đồng. C 63389223 đồng. D 67398228 đồng.

Lời giải.



Gắn mảnh vườn hình elip của ông An vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé bằng 8m nên ta có $a = 5$ và $b = 4$.
Phương trình của elip là $(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.
Diện tích của elip là $S_{(E)} = \pi ab = 20\pi$.
Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp elip. Đặt $AB = 2x$, $(0 < x < 5) \Rightarrow AD = 8\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}}$.
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = 16x \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}}$.
Diện tích phần còn lại trồng hoa là $S_{hoa} = 20\pi - 16x \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}}$.
Tổng chi phí xây dựng là:

$$T = 16000000 \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} + 1200000 \cdot \left(20\pi - 16x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}\right) = 24000000\pi - 3200000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}.$$

Mặt khác, ta có:

$$16000000 \cdot \frac{x}{5}\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \le 16000000 \cdot \frac{\dfrac{x^2}{25} + 1 - \dfrac{x^2}{25}}{2} = 8000000.$$

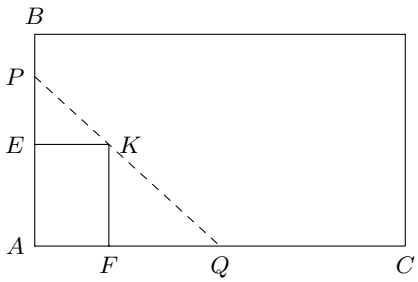
$$\Rightarrow T = 24000000\pi - 3200000x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \ge 24000000\pi - 8000000 = 67398223.69.$$

Dấu $''=''$ xảy ra khi $\dfrac{x}{5} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}} \Leftrightarrow x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.
Vậy tổng chi phí thiết kế xây dựng thấp nhất gần với số 67398224 đồng.
Chọn đáp án A □

Câu 13. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m , rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo. Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K .

(A) $\dfrac{5\sqrt{65}}{4}$ m. (B) $5\sqrt{5}$ m. (C) $9\sqrt{2}$ m. (D) $\dfrac{5\sqrt{71}}{4}$ m.

Lời giải.



Đặt $AP = a$, $AQ = b$ $(a, b > 0)$.
Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE = 1$, $KF = 8$.
Ta có: $\dfrac{KE}{AQ} = \dfrac{PK}{PQ}$; $\dfrac{KF}{AP} = \dfrac{QK}{PQ} \Rightarrow \dfrac{KF}{AP} + \dfrac{KE}{AQ} = 1$ hay $\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

Cách 1.
Ta có $PQ^2 = a^2 + b^2$.
Vì $\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \Rightarrow \dfrac{8k}{a} + \dfrac{k}{b} = k$, $\forall k > 0$.

$$a^2 + b^2 + k = \left(a^2 + \frac{8k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{b}\right) = \left(a^2 + \frac{4k}{a} + \frac{4k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{2b} + \frac{k}{2b}\right) \geq 3\sqrt[3]{16k^2} + 3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

Suy ra PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a^2 + b^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{4k}{a} \\ b^2 = \dfrac{k}{2b} \\ \dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 250 \\ a = 10 \\ b = 5. \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.
Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$.

Cách 2.
Vì $\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \dfrac{a}{a-8}$ với $a > 8$.
Khi đó $PQ^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.
Xét hàm số $f(a) = a^2 + \left(\dfrac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.
Ta có $f'(a) = 2a + \dfrac{2a}{a-8} \cdot \dfrac{-8}{(a-8)^2} = \dfrac{2a\left[(a-8)^3 - 8\right]}{(a-8)^3}$; $f'(a) = 0 \Rightarrow a = 10$.
Bảng biến thiên của $f(a)$

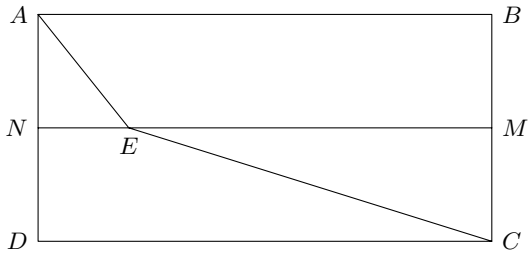
a	8		10		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	$\searrow$	125	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(a)$ là 125 khi $a = 10$.
Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\,\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\,\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được $15\,\text{m}$ và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30\,\text{m}$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .

(A) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. (B) $\dfrac{10+2\sqrt{725}}{30}$. (C) $\dfrac{20+\sqrt{725}}{30}$. (D) 5.

Lời giải.



Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.
Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm.
Với $NE = x\ (m) \Rightarrow EM = 25 - x\ (m)$.
Ta có $AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2}$; $EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25-x)^2}$.
Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là

$$t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100+x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2+100}}{30}\ \text{(h)}$$

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}.$$

Xét

$$\begin{aligned}
t'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}} = 0\\
&\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100} = (25-x)\sqrt{100+x^2}\\
&\Leftrightarrow 4x^2\left((25-x)^2+100\right) = (25-x)^2\left(100+x^2\right)\\
&\Leftrightarrow 4x^2(25-x)^2 + 400x^2 - 100(25-x)^2 - (25-x)^2x^2 = 0\\
&\Leftrightarrow 4(25-x)^2\left(x^2-25\right) + x^2\left(20^2-(25-x)^2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)\right) = 0\\
&\Leftrightarrow x = 5.
\end{aligned}$$

Ta được $\begin{cases} t(0) = \dfrac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5) = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25) = \dfrac{1+\sqrt{29}}{3}. \end{cases}$

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (h) .

Cách 2.

Xét $t(x) = \dfrac{\sqrt{10^2+x^2}}{15} + \dfrac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30} = \dfrac{\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$.

Lại có

$$\sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2} \geq \sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2}\ (\text{do } |\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\geq \sqrt{5\,(x-5)^2+2000}.$$

Do đó $t(x)\geq \dfrac{\sqrt{5\,(x-5)^2+2000}}{30}\geq \dfrac{\sqrt{2000}}{30}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $t(x)_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (h) khi và chỉ khi $x=5$ (m) .

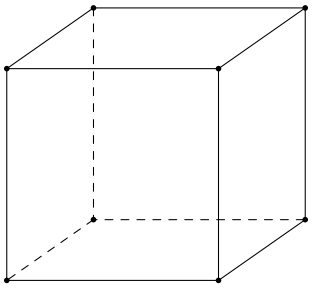
Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (h) .

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60 cm, thể tích là $96.000\,cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

(A) 283.000 đồng. (B) 382.000 đồng. (C) 83.200 đồng. (D) 832.000 đồng.

Lời giải.



Gọi x (m) là chiều dài của hình chữ nhật đáy $(x>0)$.

Khi đó chiều rộng là $\dfrac{0{,}096}{0{,}6x}=\dfrac{4}{25x}$.

Khi đó diện tích mặt xung quanh là $1{,}2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Chi phí để làm mặt xung quanh là $70\cdot 1{,}2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)=84\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Diện tích mặt đáy là $x\cdot\dfrac{4}{25x}=\dfrac{4}{25}$.

Cho phí để làm mặt đáy là $100\cdot\dfrac{4}{25}=16$.

Chi phí để làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi chi phí làm mặt bên thấp nhất.

Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{25x}$, $x>0$. Ta có $f'(x)=1-\dfrac{4}{25x^2}=\dfrac{25x^2-4}{25x^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 25x^2-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó chi phí thấp nhất là $84\cdot\dfrac{4}{5}+16=83.200$ đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\dfrac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

(A) 12. (B) 13. (C) 11. (D) 10.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của hộp là x $(x>0) \Rightarrow$ Chiều dài của hình hộp là $2x$.

Thể tích của hộp là $V = x \cdot 2x \cdot h = 48 \Leftrightarrow h = \dfrac{24}{x^2}$.

Tổng diện tích mặt đáy và 4 mặt bên của hộp là

$$2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x \cdot \frac{24}{x^2} = 2x^2 + \frac{144}{x}.$$

Diện tích nắp hộp là $2x^2$.

Giá thành hộp thấp nhất $\Leftrightarrow f(x) = 3\left(2x^2 + \dfrac{144}{x}\right) + 2x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x > 0$.

Ta có

$$f(x) = 8x^2 + \frac{432}{x} = 8x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{8x^2 . \frac{216}{x} \cdot \frac{216}{x}} = 216.$$

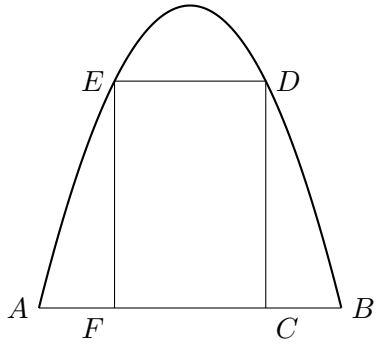
Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 216$ xảy ra khi và chỉ khi

$$8x^2 = \frac{216}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow h = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Vậy $m = 8;\ n = 3 \Rightarrow m + n = 8 + 3 = 11$.

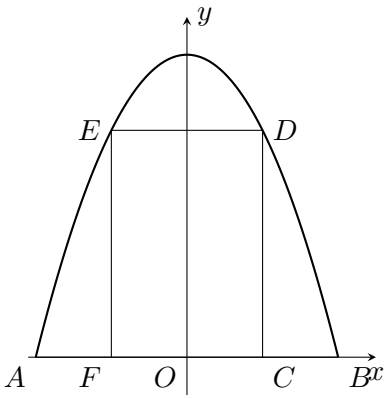
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m, $AB = 4$ m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là 1.000.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



(A) 4.450.000 đồng. (B) 4.605.000 đồng. (C) 4.505.000 đồng. (D) 4.509.000 đồng.

Lời giải.



Xét $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có toạ độ đỉnh $(0;4)$ và qua điểm có toạ độ $(2;0)$.

Ta có hoành độ đỉnh $\dfrac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$.

(P) qua điểm $(0;4) \Rightarrow c=4$ và (P) qua điểm $(2;0) \Rightarrow a=-1$.
Suy ra $(P)\colon y=-x^2+4$
Xét đường thẳng qua $E,D: y=m$.
Khi đó $E\left(-\sqrt{4-m};m\right)$ và $D\left(\sqrt{4-m};m\right)$ là giao điểm của (P) và đường thẳng $y=m$.
Suy ra $ED=2\sqrt{4-m}$, $EF=m$.
Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.
Ta có $S_{CDEF}=ED\cdot EF=2\sqrt{4-m}\cdot m$.
Đặt $t=\sqrt{4-m} \Rightarrow t^2=4-m \Rightarrow m=4-t^2$.
Khi đó $S_{CDEF}=f(t)=2t\left(4-t^2\right)=-2t^3+8t$.
$f'(t)=-6t^2+8=0 \Leftrightarrow t=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Ta có bảng biến thiên

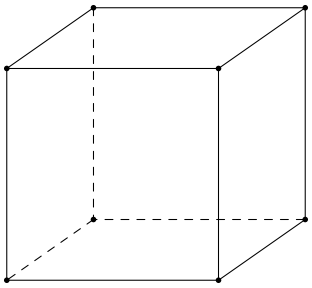
x	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Suy ra $\max_{S_{CDEF}}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$ khi $t=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m=\dfrac{8}{3}$
Mặt khác diện tích của chiếc cổng $S=\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|-x^2+4\right|=\dfrac{32}{3}$ m^2.
Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là: $S_{max}=\dfrac{32}{3}-\dfrac{32\sqrt{3}}{9}\approx 4,5083$ m^2
Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4,5083\times 1.000.000=4.508.300$.
.
Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\dfrac{m}{n}$ với m , n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

(A) 12. (B) 13. (C) 11. (D) 10.

Lời giải.



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp lần lượt là $2x$ và x $(x>0)$.
Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V=2x^2\cdot h \Rightarrow 2x^2\cdot h=48 \Leftrightarrow x^2\cdot h=24.$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là3, giá thành làm nắp hộp là 1nên giá thành làm hộp là

$$L=3\left(2x^2+2xh+4xh\right)+2x^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm, ta được

$$L = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt[3]{648\left(x^2h\right)^2} = 216.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9h}{8} \\ \dfrac{9^2}{8^2} \cdot h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Vậy $m = 8$, $n = 3$ và $m + n = 11$.
Chọn đáp án C □

Câu 19. Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30.000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

(A) 32.400.000 đồng. (B) 34.400.000 đồng. (C) 32.420.000 đồng. (D) 34.240.000 đồng.

Lời giải.

Gọi số lần tăng giá là y $(y \geq 0)$.
Giá bán rau sau mỗi lần tăng giá là $30000 + 1000y$ đồng/kg.
Số rau thừa được thu mua cho chăn nuôi là $20y\,(y \leq 50)$ kg.
Số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi là $1000 - 20y$ kg.
Tổng số tiền bán rau thu được mỗi ngày là:

$$P = (1000 - 20y) \cdot (30000 + 1000y) + 20y \cdot 2000 \Leftrightarrow P = -20000y^2 + 440000y + 30000000.$$
$$P = 32420000 - 20000\left(y - 11\right)^2.$$

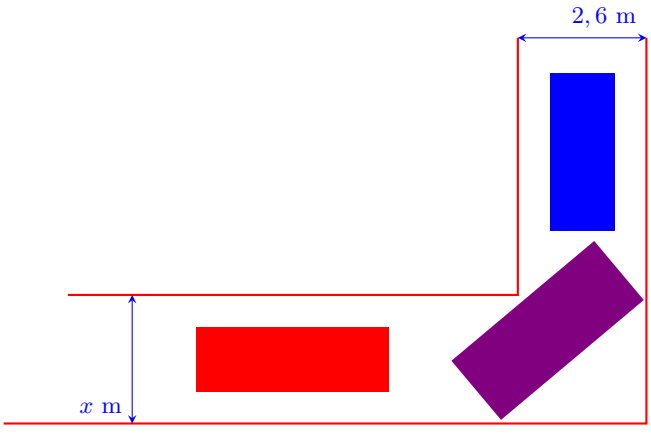
Ta có

$$32420000 - 20000\left(y - 11\right)^2 \leq 32420000 \Rightarrow P \leq 32420000.$$

$\Rightarrow P_{\max} = 324200000$ khi $y = 11$.
Chọn đáp án C □

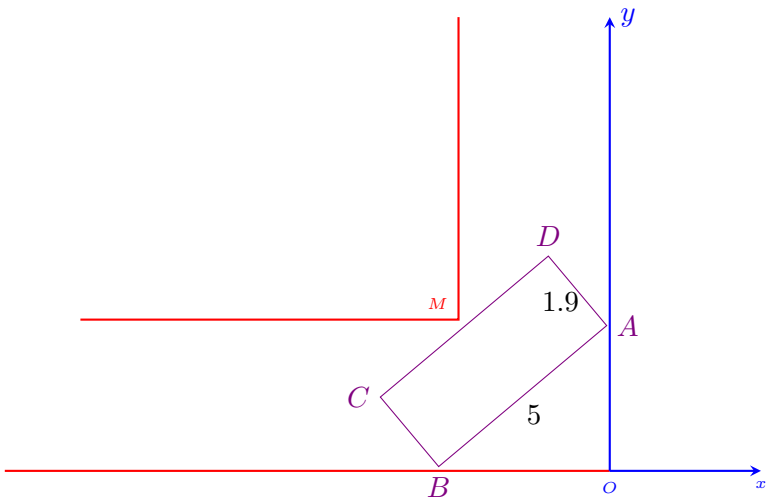
Câu 20.

Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6$ (m). Biết kích thước xe ô tô là $5m \times 1,9m$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng $1,9$ (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



(A) $x = 3,7$ m. (B) $x = 2,6$ m.
(C) $x = 3,55$ m. (D) $x = 4,27$ m.

Lời giải.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó $M\left(-2,6;x\right)$.
Gọi $B\left(-a\ ;\ 0\right)$ suy ra $A\left(0\ ;\sqrt{25-a^2}\right)$.
Phương trình AB: $\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1=0$.
Do $CD\parallel AB$nên phương trình CD: $\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-T=0$.
Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng $1,9$ mnên

$$\frac{|T-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}}=1,9\Rightarrow T=1+\frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M,O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD.
Suy ra

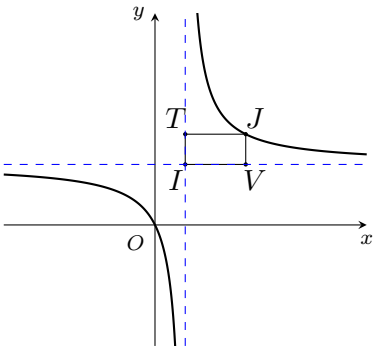
$$\frac{-2,6}{-a}+\frac{x}{\sqrt{25-a^2}}-1-\frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}\geq 0\Leftrightarrow x\geq\sqrt{25-a^2}+\frac{9,5}{a}-\frac{2,6\cdot\sqrt{25-a^2}}{a}.$$

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng TABLE trong máy tính Casio 570ES PLUS.
$f(X)=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ với STEP=$\dfrac{5}{29}$; START=0; END=5.
Thấy giá trị lớn nhất của

$$f(X)=\sqrt{25-X^2}+\frac{9,5}{X}-\frac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}\text{ xấp xỉ v}3,698.$$

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị ở câu A.
Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên. Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng
(A) $2\sqrt{2}$. (B) 6. (C) $4\sqrt{2}$. (D) 4.



Lời giải.
Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$.
Với $J\left(x;\dfrac{2x}{x-1}\right)\in(C)\Rightarrow\begin{cases}TJ=\mathrm{d}(J,\mathrm{TCD})=|x-1|\\ JV=\mathrm{d}(J,TCN)=\left|\dfrac{2x}{x-1}-2\right|=\dfrac{2}{|x-1|}.\end{cases}$

Khi đó, chu vi hình chữ nhật $ITJV$ là

$$P = 2(TJ + JV) = 2\left(|x-1| + \frac{2}{|x-1|}\right) \geq 2 \cdot 2\sqrt{|x-1| \cdot \frac{2}{|x-1|}} = 4\sqrt{2}.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $|x-1| = \dfrac{2}{|x-1|} \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{2} \\ x = 1-\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} J(1+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}) \\ J(1-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}). \end{array}\right.$

Vậy hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $(0;2)$. (B) $(-\infty;-2017)$. (C) $(-2017;0)$. (D) $S = (2017;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x+2017) + 2018$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x+2017) = -2018$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2018	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$f'(x+2017) = -2018 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+2017 = t & (t<0) \\ x+2017 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t-2017 \\ x = -2015. \end{array}\right.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$

x	$-\infty$		$t-2017$		-2015		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = t - 2017 < -2017$. Vậy $x_0 \in (\infty;-2017)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x^2+4}$ với $a \neq 0$ và a, b là các số thực. Biết rằng $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 5$ và $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -2$. Giá trị của biểu thức $P = a^2b$ bằng

(A) 7680. (B) 1920. (C) 3840. (D) -1920.

Lời giải.

Xét phương trình ẩn x

$$y = \frac{ax+b}{x^2+4} \Leftrightarrow yx^2 - ax + 4y - b = 0 \qquad (1)$$

.

☑ Trường hợp 1: Với $y=0$, phương trình (1) trở thành: $x=-\dfrac{b}{a}$ (không thỏa mãn).

☑ Trường hợp 2: Với $y\neq 0$, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow a^2-4y(4y-b)\geq 0\Leftrightarrow 16y^2-4by-a^2\leq 0\Leftrightarrow y^2-\frac{b}{4}y-\frac{a^2}{16}\leq 0. \quad (*)$$

Vì $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=5$ và $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-2$ nên $-2\leq y\leq 5\Leftrightarrow (y+2)(y-5)\leq 0\Leftrightarrow y^2-3y-10\leq 0. \quad (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $\begin{cases}\dfrac{b}{4}=3\\ \dfrac{a^2}{16}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=12\\ a^2=160\end{cases}\Rightarrow P=a^2b=1920.$

Chọn đáp án B □

Câu 24. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{(x^3-3x+2m)^2+1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A 8. B -8. C -6. D -1.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{(x^3-3x+2m)^2+1}}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 2 khi và chỉ khi hàm số $y=\left|x^3-3x+2m\right|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 16.
Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+2m$ trên đoạn $[0;3]$, ta có $g'(x)=3(x^2-1)$.
Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;3]\\ x=1\in[0;3].\end{array}\right.$
Ta có bảng biến thiên

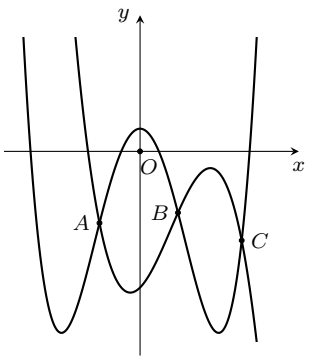
x	0		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$2m$	↘	$2m-2$	↗	$2m+18$

Suy ra $\max\limits_{[0;3]}|g(x)|=\max\{|2m-2|,|2m+18|\}$.

Do đó $\max\limits_{[0;3]}|g(x)|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|2m-2|=16\\ |2m+18|\leq 16\end{cases}\\ \begin{cases}|2m-2|\leq 16\\ |2m+18|=16\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=9\\ m=-7\end{array}\right.\\ -17\leq m\leq -1\end{cases}\\ \begin{cases}-7\leq m\leq 9\\ \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-17\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-7\\ m=-1.\end{array}\right.$

Vậy $S=\{-7;-1\}$.
Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong nét đậm, đồ thị hàm số $y=g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[a;c]$?



(A) $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(0)$. (B) $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(a)$.

(C) $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(b)$. (D) $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(c)$.

Lời giải.

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$. Theo bài ra ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ x=c. \end{array}\right.$

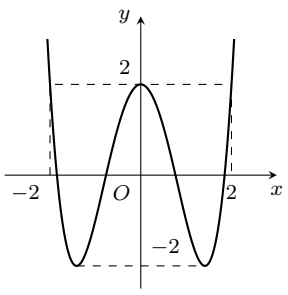
Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	a		b		c
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$		↘		↗	

Suy ra $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(b)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=||2f(x)+m+4|-f(x)-3|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?



(A) 18. (B) 19. (C) 20. (D) 21.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có $-2\le f(x)\le 2$, $\forall x\in[-2;2]$ $(*)$

Suy ra $2f(x)+4\ge 0$, $\forall x\in[-2;2]$.

Vì $m\in[0;20]$ nên $2f(x)+m+4\ge 0\Rightarrow |2f(x)+m+4|=2f(x)+m+4$, $\forall x\in[-2;2]$.

Khi đó $g(x)=||2f(x)+m+4|-f(x)-3|=|2f(x)+m+4-f(x)-3|=|f(x)+m+1|$.

☑ Với $m=0\Rightarrow g(x)=|f(x)+1|$, $\forall x\in[-2;2]$. Khi đó

$$(*)\Leftrightarrow -1\le f(x)+1\le 3\Leftrightarrow 0\le|f(x)+1|\le 3\Leftrightarrow 0\le g(x)\le 3,\ \forall x\in[-2;2].$$

Do đó $\min\limits_{[0;1]} g(x)=0\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Với $m\in[1;20]\Rightarrow f(x)+m+1\ge 0\Rightarrow g(x)=f(x)+m+1$. Khi đó

$$(*)\Rightarrow f(x)+m+1\ge m-1\Rightarrow \min_{[0;1]} g(x)=m-1.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min\limits_{[0;1]} g(x)\ge 1\Leftrightarrow m-1\ge 1\Leftrightarrow m\ge 2\Rightarrow m\in[2;20]$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=3$. Số phần tử của S là

A) 2. B) 3. C) 1. D) 0.

Lời giải.

☑ Với $m=\dfrac{1}{2}$, ta có $f(x)=1,\ \forall x\in[0;\ 1]$. Do đó

$$\max_{[0;1]}|f(x)|=\min_{[0;1]}|f(x)|=1\Rightarrow\max_{[0;1]}|f(x)|+\min_{[0;1]}|f(x)|=2 \text{ (không thỏa mãn đề bài).}$$

☑ Với $m\neq\dfrac{1}{2}$, ta có $f'(x)=\dfrac{1-2m}{(x+1)^2}\neq 0,\ \forall x\in[0;\ 1]$. Có $f(0)=2m;\ f(1)=\dfrac{2m+1}{2}$.

◉ Nếu $2m(2m+1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ thì $\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=|2m|\\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|\end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=|2m|\\ \max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|\end{array}\right.$.

Khi đó:

$$\max_{[0;1]}|f(x)|+\min_{[0;1]}|f(x)|=3\Leftrightarrow|2m|+\left|\frac{2m+1}{2}\right|=3\Leftrightarrow 2|2m|+|2m+1|=6. \qquad (*)$$

✔ Xét $m>0$, phương trình $(*)\Leftrightarrow 4m+2m+1=6\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{6}$ (thỏa mãn).

✔ Xét $m<-\dfrac{1}{2}$, phương trình $(*)\Leftrightarrow -4m-(2m+1)=6\Leftrightarrow m=\dfrac{-7}{6}$ (thỏa mãn).

◉ Nếu $2m(2m+1)\leq 0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq m\leq 0$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|;|2m|\right\}$ và $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.

Ta xét $\left[\begin{array}{l}|2m|=3\\ \dfrac{|2m+1|}{2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\dfrac{2}{3}\\ m=\dfrac{5}{2}\\ m=-\dfrac{7}{2}.\end{array}\right.$

Ta thấy các giá trị này không thỏa mãn $-\dfrac{1}{2}\leq m\leq 0$.

Vậy, ta có tập $S=\left\{-\dfrac{7}{6};\ \dfrac{5}{6}\right\}$, do đó số phần tử của tập S bằng 2.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^2+3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1,m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ bằng 2021. Tính giá trị $|m_1-m_2|$.

A) $\dfrac{1}{3}$. B) $\dfrac{4052}{3}$. C) $\dfrac{8}{3}$. . D) $\dfrac{4051}{3}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3m$.

Ta có $f'(x)=4x^3-4x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1.\end{array}\right.$

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3m-1$	↗	$3m$	↘	$3m-1$	↗	$8+3m$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 8+3m = A;\ \min\limits_{[-1;2]} f(x) = 3m-1 = a.$

- ☑ Nếu $3m+8<0 \Leftrightarrow m<-\dfrac{8}{3}$ thì $\min\limits_{[-1;2]} |f(x)| = -3m-8 = 2021 \Rightarrow m = -\dfrac{2029}{3}$ (không thỏa mãn vì có duy nhất m).
- ☑ Nếu $3m-1 \le 0$ thì $\min\limits_{[-1;2]} |f(x)| = 0$ nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- ☑ Nếu $3m-1>0$ thì $\min\limits_{[-1;2]} |f(x)| = 3m-1 = 2021$.

  Khi đó $\Leftrightarrow A\cdot a>0 \Leftrightarrow (3m-1)(8+3m)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1}{3} \\ m<-\dfrac{8}{3}. \end{array}\right.$

Với điều kiện trên, ta có

$$\begin{aligned} \min_{[-1;2]} |f(x)| = \frac{|A+a|-|A-a|}{2} = 2021 &\Leftrightarrow \frac{|7+6m|-|9|}{2} = 2021 \\ &\Leftrightarrow |7+6m| = 4051 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{4044}{6} \\ m=-\dfrac{4058}{6} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow |m_1-m_2| = \dfrac{4051}{3}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho $\min\limits_{[-1;1]} |f(x)| > \dfrac{3}{4}$.

Số phần tử của S là

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\min\limits_{[-1;1]} |f(x)| > \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x^4-mx-4}{x+2} > \dfrac{3}{4}, \forall x\in[-1;1] \quad (1) \\ \dfrac{2x^4-mx-4}{x+2} < \dfrac{-3}{4}, \forall x\in[-1;1] \quad (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow m\in\varnothing$ do (1) không thỏa mãn với $x=0$.

$(2) \Leftrightarrow 8x^4-4mx+3x-10<0,\ \forall x\in[-1;1]. \quad (*)$

Nhận xét $x=0$ thỏa mãn $(*)$ nên $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 8x^3+3-\dfrac{10}{x}, \forall x\in(0;1] \\ 4m < 8x^3+3-\dfrac{10}{x}, \forall x\in[-1;0). \end{cases} \quad (3)$

Xét $g(x) = 8x^3+3-\dfrac{10}{x}, x\in[-1;1]\setminus\{0\}$ có $g'(x) = 24x^2+\dfrac{10}{x^2} > 0, \forall x\neq 0.$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	-1		0		1
g'		$+$	‖	$+$	
g	5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4m>1 \\ 4m<5 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<m<\dfrac{5}{4}.$

Do $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\log x+m}{\log x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{\left[\frac{1}{10};1\right]}|f(x)|+\max\limits_{\left[\frac{1}{10};1\right]}|f(x)|=2$. Tổng số phần tử của S bằng

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) 2. . (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\log x$, vì $x\in\left[\dfrac{1}{10};1\right]\Rightarrow t\in[-1;0]$.

Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=\dfrac{t+m}{t+2}$ thỏa $\max\limits_{[-1;0]}|f(t)|+\min\limits_{[-1;0]}|f(t)|=2$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t+m}{t+2}$.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ta có $g'(t)=\dfrac{2-m}{(t-2)^2}$.

Trường hợp 1: $m=2$. Ta có $g(t)=1$, khi đó $\max\limits_{[-1;0]}|g(t)|+\min\limits_{[-1;0]}|g(t)|=2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m\neq 2\Rightarrow$ Hàm số đơn điệu trên mỗi khoảng của tập xác định nên đơn điệu trên $[-1;0]$.
Ta có $f(0)=\dfrac{m}{2}$, $f(-1)=m-1$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-m;0)$.

☑ Khi $\dfrac{m}{2}(m-1)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 1$, ta có $\min\limits_{[-1;0]}|g(t)|=0$, $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{[-1;0]}|g(t)|=\dfrac{m}{2}\\ \max\limits_{[-1;0]}|g(t)|=1-m.\end{array}\right.$

Khi đó $\max\limits_{[-1;0]}|g(t)|+\min\limits_{[-1;0]}|g(t)|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{m}{2}\right|=2\\ |m-1|=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-4\\ m=3\\ m=-1\end{array}\right.$ (không thỏa mãn $0\leq m\leq 1$).

☑ Khi $\dfrac{m}{2}(m-1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<0\end{array}\right.$ khi đó $\max\limits_{[-1;0]}|g(t)|+\min\limits_{[-1;0]}|g(t)|=2\Leftrightarrow\left|\dfrac{m}{2}\right|+|m-1|=2$.

☑ Với $m<0$, ta có $\left|\dfrac{m}{2}\right|+|m-1|=2\Leftrightarrow-\dfrac{m}{2}+1-m=2\Leftrightarrow-3m=2\Leftrightarrow m=-\dfrac{2}{3}$.

☑ Với $m>1, m\neq 2$, ta có

$\left|\dfrac{m}{2}\right|+|m-1|=2\Leftrightarrow\dfrac{m}{2}+m-1=2\Leftrightarrow 3m=6\Leftrightarrow m=2$ (không thỏa mãn $m>1$, $m\neq 2$).

Kết hợp trường hợp 1 và trường hợp 2 ta có $S=\left\{-\dfrac{2}{3};2\right\}$.

Tổng số phần tử của S bằng $-\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\left|3\mathrm{e}^{4x}-4\mathrm{e}^{3x}-24\mathrm{e}^{2x}+48\mathrm{e}^{x}+m\right|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;\ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23;-10]$ thỏa mãn $A\leq 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

(A) -33. (B) 0. (C) -111. (D) -74.

Lời giải.

Đặt $t=\mathrm{e}^x\Rightarrow t\in[1;2]$. Khi đó $f(x)=g(t)=\left|3t^4-4t^3-24t^2+48t+m\right|$.
Xét $h(t)=3t^4-4t^3-24t^2+48t+m$, $t\in[1;2]$ có $h'(t)=12t^3-12t^2-48t+48$.
Ta có $\begin{cases}h'(t)=0\\ t\in[1;2]\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=2\end{array}\right.\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $[1;2]$ và $g(1)=|m+23|$, $g(2)=|m+16|$.

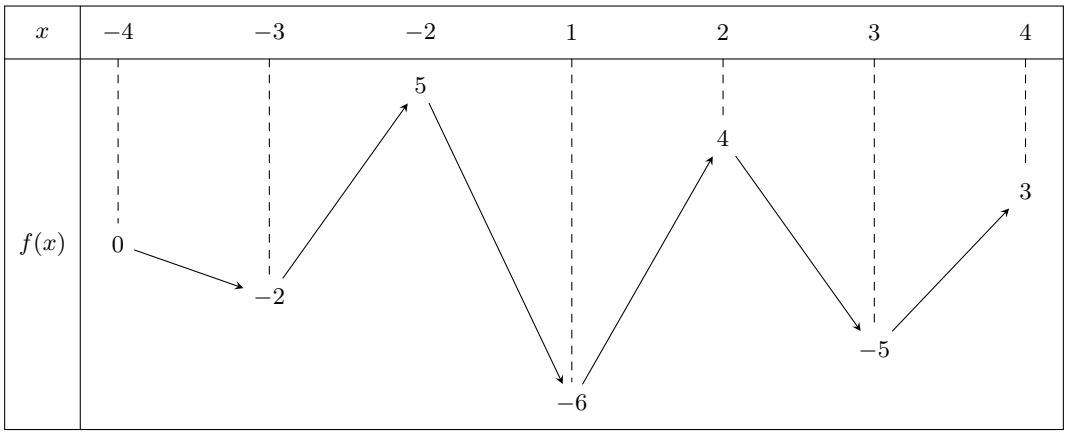
☑ Nếu $(m+16)(m+23)\leq 0$ thì $\min g(t)=0$, suy ra $0\leq\max g(t)\leq 3\min g(t)=0$ hay $g(t)=0\ \forall t\in[1;2]$ (vô lý).

☑ Nếu $\begin{cases} m+16>0 \\ m+23>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-16$.
Khi đó $\max g(t) \le 3\min g(t) \Leftrightarrow m+23 \le 3(m+16) \Leftrightarrow m \ge -12,5 \Rightarrow m \ge -12,5$. (1)

☑ Nếu $\begin{cases} m+16<0 \\ m+23<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-23$
Ta không cần xét tiếp trường hợp này do đề bài chỉ yêu cầu tìm $m \ge -23$.
Từ (1) và $m \in [-23;10]$, ta có $m \in \{-12;-11;-10;-9;\ldots;8;9;10\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa là -33.
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

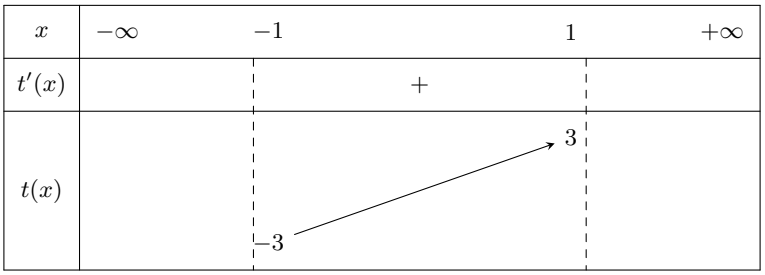


Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f(x^3+2x)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

(A) 12. . (B) 11. (C) 9. (D) 10.

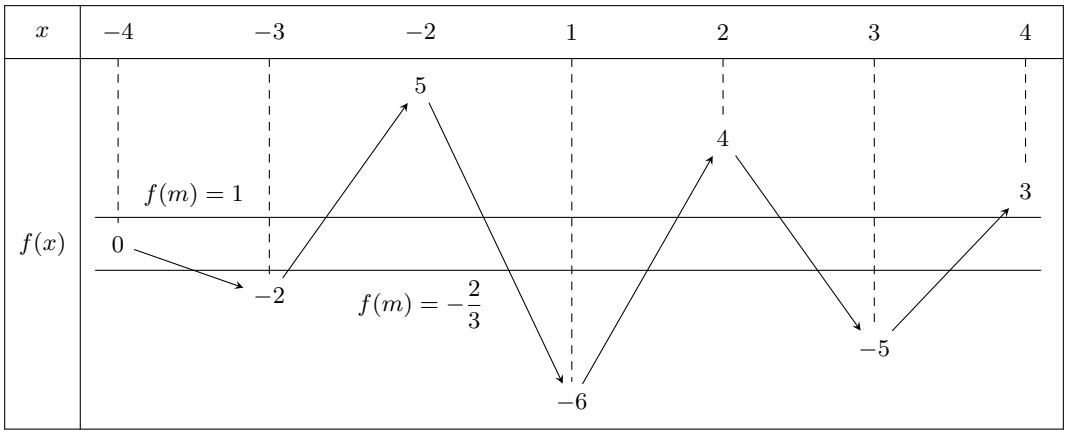
Lời giải.

Đặt $t=u(x)=x^3+2x$ ta có $t'=u'(x)=3x^2+2>0, \forall x$ do đó $t=x^3+2x$ là một hàm số tăng vì vậy $x \in [-1;1]$ thì $t \in [-3;3]$.



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ ta có $\max\limits_{[-3;3]} f(t)=5$ và $\min\limits_{[-3;3]} f(t)=-6$.

Từ đây ta có $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=\left|\max\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right|$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=\left|\min\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right|$.



Trường hợp 1:

$$\begin{cases} \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right| = 8 \\ \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right| \geq \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5+3f(m)| = 8 \\ |5+3f(m)| \geq |-6+3f(m)| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(m)=1 \\ f(m)=-\dfrac{13}{3} \end{array}\right. \\ f(m) \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(m)=1.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(m)=1$ có 5 nghiệm, như vậy trường hợp này có 5 giá trị thực của m thỏa mãn.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right| = 8 \\ \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right| > \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-6+3f(m)| = 8 \\ |-6+3f(m)| > |5+3f(m)| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(m)=-\dfrac{2}{3} \\ f(m)=\dfrac{14}{3} \end{array}\right. \\ f(m) < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(m)=-\frac{2}{3}.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(m)=-\dfrac{2}{3}$ có 6 nghiệm, như vậy trường hợp này có 6 giá trị thực của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả là 11 giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho $a,b,c>0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\dfrac{3a^4+12b^4+25c^3+2}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

(A) $A\left(\frac{5}{6};2\right)$. (B) $\left[\frac{13}{18};2\right]$. (C) $\left[\frac{2}{3};2\right]$. (D) $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có $3a^4+1=a^4+a^4+a^4+1\geq 4\sqrt[4]{a^4\cdot a^4\cdot a^4}=4a^3$

$12b^4+1=4b^4+4b^4+4b^4+1\geq 4\sqrt[4]{4b^4\cdot 4b^4\cdot 4b^4}=4\left(\sqrt{2}b\right)^3$.

Suy ra

$$H = \frac{3a^4+12b^4+25c^3+2}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3} = \frac{4a^3+4\left(\sqrt{2}b\right)^3+25c^3}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3} = \frac{4\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(a^2+\left(\sqrt{2}b\right)^2-\sqrt{2}ab\right)+25c^3}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}$$

$$\geq \frac{4\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(\dfrac{\left(a+\sqrt{2}b\right)^2}{2}-\dfrac{\left(a+\sqrt{2}b\right)^2}{4}\right)+25c^3}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3} = \frac{\left(a+\sqrt{2}b\right)^3+25c^3}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3} = \frac{\left(\dfrac{a+\sqrt{2}b}{c}\right)^3+25}{\left(\dfrac{a+\sqrt{2}b}{c}+1\right)^3}.$$

Đặt $x=\dfrac{a+\sqrt{2}b}{c}$, $x>0$. Xét $f(x)=\dfrac{x^3+25}{(x+1)^3}$ với $x\in(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2(x+1)^3-3(x+1)^2\left(x^3+25\right)}{(x+1)^6}=\dfrac{3x^2(x+1)-3\left(x^3+25\right)}{(x+1)^4}=\dfrac{3\left(x^2-25\right)}{(x+1)^4}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=5$.

x	0		5		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	$\dfrac{25}{36}$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=\dfrac{25}{36}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức H là $\dfrac{25}{36}\in\left[\dfrac{2}{3};2\right]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{mx-\sqrt{x+2019}}{x+2020}$ trên tập $\mathscr{D}=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le|x|\le 2018\}$ không vượt quá $\dfrac{1}{2}$. Số các phần tử của S là

(A) 2110. (B) 2108. (C) 1054. (D) 1009.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{mx-\sqrt{x+2019}}{x+2020}$ với $\mathscr{D}=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le|x|\le 2018\}$.

Đặt $t=\sqrt{x+2019}\Rightarrow t\in\left[1;\sqrt{2018}\right]\cup\left[\sqrt{2020};\sqrt{4037}\right]$.

Ta được hàm số mới: $h(t)=\dfrac{m\left(t^2-2019\right)-t}{t^2+1}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{t^2+4040mt-1}{\left(t^2+1\right)^2}$.

$h'(t)=0$ cho ta hai nghiệm $\begin{cases}t_1=-2020m-\sqrt{(2020m)^2+1}\\ t_2=-2020m+\sqrt{(2020m)^2+1}.\end{cases}$

Trường hợp 1: $m\ge 0\Rightarrow t_1<0;\ t_2=\dfrac{1}{2020m+\sqrt{(2020m)^2+1}}\le 1$.

Ta có bảng biến thiên sau:

t	t_2	1		$\sqrt{2018}$		$\sqrt{2020}$		$\sqrt{4037}$
$h'(t)$	0		$+$		$+$		$+$	
$h(t)$		$\dfrac{-2018m-1}{2}$	↗	$\dfrac{-m-\sqrt{2018}}{2019}$	↗	$\dfrac{m-\sqrt{2020}}{2021}$	↗	$\dfrac{2018m-\sqrt{4037}}{4038}$

Theo đề bài, giá trị nhỏ nhất của $h(t)$ không vượt quá $\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow h(t)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m+\sqrt{2018}}{2019}\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{m-\sqrt{2020}}{2021}\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le\sqrt{2018}+\dfrac{2019}{2}\\ m\le\sqrt{2020}+\dfrac{2021}{2}\end{array}\right.\Rightarrow m\le 1055.$$

Kết hợp điều kiện $m \geq 0$ ta được $0 \leq m \leq 1055$. (1)
Trường hợp 2: $m \leq -1 \Rightarrow t_1 < 0;\ t_2 > \sqrt{4037}$.
Ta có bảng biến thiên sau:

t	t_2	1		$\sqrt{2018}$		$\sqrt{2020}$		$\sqrt{4037}$
$h'(t)$	0		$+$		$+$		$+$	
$h(t)$		$\dfrac{-2018m-1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{-m-\sqrt{2018}}{2019}$	$\nearrow$	$\dfrac{m-\sqrt{2020}}{2021}$	$\nearrow$	$\dfrac{2018m-\sqrt{4037}}{4038}$

Theo đề, giá trị nhỏ nhất của $h(t)$ không vượt quá $\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow h(t) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m-\sqrt{2018}}{2019} \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-m+\sqrt{2020}}{2021} \leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq -\sqrt{2018} - \dfrac{2019}{2} \\ m \geq \sqrt{2020} - \dfrac{2021}{2} \end{array}\right. \Rightarrow m \geq -1054.$$

Kết hợp điều kiện $m \leq -1$ ta được $-1054 \leq m \leq -1$. (2)
Từ (1) và (2) ta được $-1054 \leq m \leq 1055$. Do đó số phần tử của S là 2110 phần tử.
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho hàm số $f(t) = \dfrac{2t+1}{t-2}$ và x, y là các số thực thỏa mãn $5x^2 + 2xy + y^2 = 9$. Giá trị lớn nhất của $f\left(\dfrac{6x-6}{4x-y-9}\right)$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) -3. (D) $\dfrac{-1}{3}$.

Lời giải.
Ta có $5x^2 + 2xy + 2y^2 = 9 \Leftrightarrow (2x+y)^2 + (x-y)^2 = 9$.
Đặt $2x + y = 3\sin t$, $x - y = 3\cos t$, với $t \in [-\pi; \pi]$.
$\Rightarrow x = \sin t + \cos t$ và $y = \sin t - 2\cos t$.
$$K = \frac{6x-6}{4x-y-9} = \frac{6\sin t + 6\cos t - 6}{4(\sin t + \cos t) - \sin t + 2\cos t - 9} = \frac{6\sin t + 6\cos t - 6}{3\sin t + 6\cos t - 9}.$$
$\Rightarrow (3K-6)\sin t + (6K-6)\cos t = 9K - 6$.
Điều kiện để phương trình trên có nghiệm là

$$(3K-6)^2 + (6K-6)^2 \geq (9K-6)^2 \Leftrightarrow -1 \leq K \leq 1.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t+1}{t-2}$ trên $[-1; 1]$.
Ta có $f'(t) = \dfrac{-5}{(t-2)^2} < 0,\ \forall t \neq 2$. Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = \dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho hàm số $y = \left(x^2 + x + m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[-2;2]} y = 4$ bằng

(A) $-\dfrac{23}{4}$. (B) $-\dfrac{31}{4}$. (C) -8. (D) $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.
Đặt $t = x^2 + x$, vì $x \in [-2;\ 2] \Rightarrow t \in \left[-\dfrac{1}{4}; 6\right]$.
Khi đó $y = (t+m)^2$, $\forall t \in \left[-\dfrac{1}{4}; 6\right]$, $y' = 2(t+m)$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow t = -m$.
Biện luận theo tham số m:

Trường hợp 1 : $-m \geq 6 \Leftrightarrow m \leq -6$.

Khi đó y nghịch biến trên $\left[-\dfrac{1}{4};\, 6\right]$ nên $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y(6) = (6+m)^2$.

Ta có $(6+m)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-8 \\ m=-2 \end{array}\right.$. Nhận $m=-8$.

Trường hợp 2: $-m \leq -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{4}$.

Khi đó y đồng biến trên $\left[-\dfrac{1}{4};\, 6\right]$ nên $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \left(-\dfrac{1}{4}+m\right)^2$.

Ta có $\left(-\dfrac{1}{4}+m\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{9}{4} \\ m=-\dfrac{7}{4} \end{array}\right.$. Nhận $m=\dfrac{9}{4}$.

Trường hợp 3: $-\dfrac{1}{4} < -m < 6 \Leftrightarrow -6 < m < \dfrac{1}{4}$.

Khi đó y đồng biến trên $(-m;\, 6)$ và nghịch biến trên $\left(-\dfrac{1}{4};-m\right)$, nên $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y\,(-m) = 0$.

Do đó $y=g(x)$ không có giá trị m thỏa $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = 4$.

Vậy tổng giá trị của tham số m thỏa $\min\limits_{[-2;\,2]} y = 4$ là $-8+\dfrac{9}{4} = -\dfrac{23}{4}$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. D	5. C	6. B	7. B	8. C	9. D	10. D
11. C	12. A	13. B	14. A	15. C	16. C	17. D	18. C	19. C	20. A
21. C	22. B	23. B	24. B	25. C	26. B	27. A	28. D	29. C	30. C
31. A	32. B	33. C	34. A	35. A	36. A				

CHỦ ĐỀ 4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Lưu ý:

Đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0; ad-bc\neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

3. Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

- Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.
- Hàm căn thức dạng: $y=\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$, $y=\sqrt{f(x)}-g(x)$, $y=g(x)-\sqrt{f(x)}$ có tiệm cận ngang (dùng liên hợp).
- Hàm $y=a^x$, $(0<a\neq 1)$ có tiệm cận ngang $y=0$.
- Hàm số $y=\log_a x, (0<a\neq 1)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

4. Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

- Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.
- Tiệm cận ngang: tính hai giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y$.

5. Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận

- Nếu $x\to+\infty \Rightarrow x>0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=|x|=x$.
- Nếu $x\to-\infty \Rightarrow x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=|x|=-x$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Đồ thị hàm số không có tiệm cận. (B) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.
(C) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận. (D) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $=2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ nên đồ thi hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-x}{x^2+5x+4}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4. \end{array}\right. \Rightarrow$ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;-4\}$.

Vì $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2-x}{x^2+5x+4}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{2x^2-x}{x^2+5x+4}=+\infty$, nên đường thẳng $x=-1$ và $x=-4$ là hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2-x}{x^2+5x+4}=2$, nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 3. (B) 1. (C) 4 . (D) 2.

Lời giải.

Ta có $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Tập xác định $\mathscr{D}=[-3;+\infty)\setminus\{1;2\}$.

Ta có $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\dfrac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$, $\forall x\neq 1$.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=+\infty$ nên $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=0$, nên đồ thị hàm số nhận $y=0$ làm tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 4. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-5x}-\sqrt{2x^2-3x}}$

(A) $y=2; y=-2$. (B) $y=\sqrt{2}; y=-\sqrt{2}$. (C) $y=\sqrt{2}$. (D) $y=2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}+\sqrt{2x^2-3x}}{-2x}=-\sqrt{2} \text{ và } \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}+\sqrt{2x^2-3x}}{-2x}=\sqrt{2}.$$

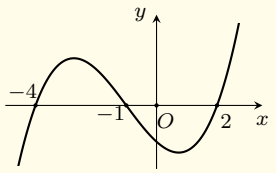
Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.

Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{2x}{f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.

Điều kiện xác định $f(x)\neq 0$.

Từ đồ thị ta thấy $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Khi đó $f(x)=a(x+4)(x+1)(x-2)$ có 3 nghiệm.

Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 6. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x-5}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó $4a-b$ bằng

(A) -8. (B) 10. (C) -4. (D) 8.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x-5}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=\sqrt{3x-5}+ax+b=0 \text{ có nghiệm kép } x=2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(2)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2a+b=0 \\ \dfrac{3}{2\sqrt{2\cdot 3-5}}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy $4a-b=4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)-2=-8$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 7. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{(x-1)(x^2+3x+3)}}{mx^2+2x-3}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A $m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$. B $m\in\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. C $m\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right)$. D $m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right]$.

Lời giải.

Ta có $(x-1)\left(x^2+3x+3\right)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$

Trường hợp 1:

Nếu $m=0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Do đó đồ thị hàm số không thể có ba đường tiệm cận.

Trường hợp 2:

Nếu $m\neq 0$ thì đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow mx^2+2x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thuộc nửa khoảng $[1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\(x_1-1)(x_2-1)\geq 0\\(x_1-1)+(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+3m>0\\\dfrac{-1}{m}\geq 0\\\dfrac{1+m}{m}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{3}\\m<0\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<m<0.$$

Vậy $m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C), gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của (C) tại điểm $A(x_1;y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của (C) tại điểm $B(x_2;y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2+y_1=-5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A 0. B 4. C 10. D 9.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Với $x=m-2\Rightarrow y=1-\dfrac{3}{m}$. Suy ra $A\left(m-2;\,1-\dfrac{3}{m}\right)(m\neq 0)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng $y=\dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=-2$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases}y=\dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m}\\x=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-\dfrac{6}{m}\\x=-2\end{cases}$ nên $y_1=1-\dfrac{6}{m}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases}y=\dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m}\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=2m-2\end{cases}$ nên $x_2=2m-2$.

Suy ra $x_2+y_1=2m-\dfrac{6}{m}-1=-5\Leftrightarrow 2m^2+4m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3.\end{array}\right.$

Vậy tổng bình phương các phần tử của S là $1^2+(-3)^2=10$.

Chọn đáp án C □

ĐỀ VDC SỐ 17: CƠ BẢN VỀ TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 1. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tiệm cận ngang

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=5$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng

Cho $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1.\end{array}\right.$

Ta có

$\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+1}{x+1}=\dfrac{6}{2}=3$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}\right)=-\infty.$

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=-4<0.\end{cases}$

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Mặc khác

$\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=-\dfrac{3}{2}.$

$\Rightarrow x=1$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=+\infty.$

$\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$.

Ta có $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.
$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\dfrac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to (-2)^-}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to (-2)^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$.
Nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là
A 1. B 2. C 0. D 3.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=[-9;+\infty)\setminus\{0;-1\}$.
Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=-\infty$.
$\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$.
$\lim\limits_{x\to 0^-}y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$.
$\Rightarrow x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.
Chọn đáp án A □

Câu 5. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.
A $x=3$ và $x=2$. B $x=3$. C $x=-3$ và $x=-2$. D $x=-3$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=-\frac{7}{6}.$$
Tương tự $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\dfrac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\infty$.
Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là
A 3. B 2. C 1. D 0.

Lời giải.
Tập xác định hàm số $\mathscr{D}=[-16;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.
Ta có
$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\dfrac{1}{8}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)} = +\infty.$

vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \left(\sqrt{x+16}+4\right) = \sqrt{15}+4 > 0$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (x+1) = 0$ và $x \to (-1)^+$ thì $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)} = -\infty.$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A 3. B 0. C 1. D 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-4;+\infty) \setminus \{-1;0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty.$

Nên đường thẳng $x = -1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \dfrac{1}{4}.$

Nên đường thẳng $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là

A 1. B 3. C 2. D 4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right] \cup [0;+\infty) \setminus \{-2\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{6}{x}}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 2.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{6}{x}}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = -2.$

$\lim\limits_{x\to-2^\pm} \dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2^\pm} \dfrac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)\left(\sqrt{x(4x+6)}+2\right)} = \lim\limits_{x\to-2^\pm} \dfrac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)}+2} = \dfrac{-5}{2}.$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 4. B 5. C 3. D 6.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\infty;-\sqrt{2}\right) \cup (-1;1) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim\limits_{x\to 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{(x+1)}(x+2)}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = 0$ nên đường thẳng $x=-1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x=\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x=-\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x^2+x}{(3x+1)\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=1.$$

Nên đồ thị có hai tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{3}$ và $y=1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-1;+\infty)\setminus\{0;2\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to0-} y=\lim_{x\to0-}\frac{25x^2+9x}{(x^2-2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to0-}\frac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=-\frac{9}{4}.$$

$\lim\limits_{x\to2+} y=+\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{2}{x}} = 0.$$

Vậy đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận có phương trình $x = 2$ và $y = 0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left[-\frac{1}{3};+\infty\right) \setminus \{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{(x-1)\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}{-9(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)} = -\infty.$

Do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}} = -\frac{1}{3}.$$

Do đó đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\infty;-\sqrt{2}\right) \cup (-1;1) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

$\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^-} y = \lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(1)^-} y = +\infty.$

$\Rightarrow$ Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có một tiệm cận ngang $y = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+2x-1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ x \geq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \\ x \neq -1. \end{cases}$

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = (-\infty;-1) \cup \left(-1;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4};+\infty\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} y &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{1}{x}} = -1.$$

$\Rightarrow y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} y &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{1}{x}} = 3.\end{aligned}$$

$\Rightarrow y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1} y &= \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to-1} \frac{4x^2+2x-1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)}\\ &= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)} = -2.\end{aligned}$$

$\Rightarrow x=-1$ là **không** đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

A vô số. B 12. C 14. D 13.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}x+2\geq 0\\ x^2-6x+2m>0.\end{cases}$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 lớn hơn $-2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=9-2m>0\\ x_1+x_2>-2\\ (-2)^2-6\cdot(-2)+2m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{9}{2}\\ 3>-2\\ 4+12+2m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{9}{2}\\ m>-8.\end{cases}$

Do đó tập $S=\{-7;-6;-5;\ldots;4\}$ có 12 giá trị.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A 14. B 8. C 15. D 16.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=0$ nên hàm số có một tiện cận ngang $y=0$.
Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=16-m>0\\ m-7\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\ m\neq 7.\end{cases}$
Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m\in\{1;2;3;\ldots;6;8;\ldots;15\}$.
Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?
(A) 4039. (B) 4040. (C) 4038. (D) 4037.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.
Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng $(*)$.
Có $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=(x-m)\left(x^2-2mx+1\right)$.
$x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x^2-2mx+1=0.\quad(2)\end{array}\right.$
$(*)\Leftrightarrow x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3
$\Leftrightarrow m\neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3. $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ m^2-2m\cdot m+1\neq 0\\ 3^2-2m\cdot 3+1\neq 0\\ \Delta_2'=m^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3,m\neq\dfrac{5}{3}\\ \left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1.\end{array}\right.\end{cases}$
Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\{-2020;-2019;\ldots;-2;2;4;5;\ldots;2020\}$.
Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.
Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?
(A) 200. (B) 2. (C) 199. (D) 0.

Lời giải.
Ta có điều kiện xác định là $\begin{cases}x\neq m\\ x\in(0;2)\end{cases}$, do đó đồ thị hàm số sẽ không có tiệm cận ngang.
Ta có $\lim\limits_{x\to0^+}y=\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}y=\infty$.
Suy ra $x=0,x=2$ là hai đường tiệm cận đứng.
Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ m\geq 2\end{array}\right.$, theo bài m thuộc đoạn $[-100;100]$.
Vậy có 200 số nguyên của m thỏa mãn đầu bài.
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.
(A) $m=-1$. (B) $m\in\{1;4\}$. (C) $m=4$. (D) $m\in\{-1;-4\}$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.
Ta có $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2+m}{(x-1)(x-2)}$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$

$x^2+m=0$ nhận nghiệm $x=1$ hoặc $x=2$.
Khi đó $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4. \end{array}\right.$
Với $m=-1$ có một tiệm cận đứng $x=2$.
Với $m=-4$ có một tiệm cận đứng $x=1$.
Vậy $m\in\{-1;-4\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

(A) $m>2$. (B) $\begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$ (C) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$ (D) $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Lời giải.
Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (-1)^2-2m(-1)+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

(A) 0. (B) -3. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.
Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta có
Đồ thị hàm số nhận $x=-\dfrac{d}{c}=-m-3=0$ làm tiệm cận đứng $\Rightarrow m=-3$.
Đồ thị hàm số nhận $y=\dfrac{a}{c}=n-3=0$ làm tiệm cận ngang $\Rightarrow n=3$.
Vậy $m+n=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

(A) 8. (B) 6. (C) 7. (D) Vô số.

Lời giải.
Trường hợp 1: $m<0$.
Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(x_1;x_2)$, ($x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2-8x+2=0$). Do đó $m<0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.
Trường hợp 2: $m=0$.
Suy ra $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;4)$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^-} y=-\infty$. Khi đó ta có $x=-4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Do đó $m=0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.
Trường hợp 3: $m>0$.
Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ ($x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2-8x+2=0$).
Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2-8x+2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác

1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-2m>0 \\ m>0; m\in\mathbb{Z} \\ m-8+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<8 \\ m>0; m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 6 \end{cases} \Rightarrow m=\{1;2;3;4;5;7\}.$$

Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cận ngang.
(A) $m=1$. (B) $m=-1$. (C) $m=\pm 1$. (D) Không có m.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang⇒ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty;a),(-\infty;a],(a,+\infty)$ hoặc $[a;+\infty)$⇒ $m\geq 0$.
Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow y=x-\sqrt{-3x+7}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang.
Trường hợp 2: $m>0, y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$.
Khi $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-m)x^2+3x-7}{x+\sqrt{mx^2-3x+7}}$, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m=1$.
Vậy $m=1$.
Cách trắc nghiệm:
Thay $m=1\Rightarrow y=x-\sqrt{x^2-3x+7}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)=\dfrac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)=-\infty$ không có tiệm cận ngang.
Thay $m=-1\Rightarrow y=x-\sqrt{-x^2-3x+7}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{-x^2-3x+7}\right)$ không tồn tại.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{-x^2-3x+7}\right)$ không tồn tại. Vậy $m=1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.
(A) $a=-1;b=2$. (B) $a=4;b=4$. (C) $a=1;b=2$. (D) $a=-1;b=-2$.

Lời giải.

$b=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.
$b\neq 0$, tập xác định của hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{b}\right\}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+1}{bx-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a+\dfrac{1}{x}}{b-\dfrac{2}{x}}=\frac{a}{b}$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b=2a$.

$$\lim_{x\to\frac{2}{b}^+} y=\lim_{x\to\frac{2}{b}^+}\frac{ax+1}{bx-2}=\pm\infty$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{2}{b}\Rightarrow\dfrac{2}{b}=1\Leftrightarrow b=2\Rightarrow a=1$.
Vậy $a=1;b=2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?
(A) 19. (B) 15. (C) 17. (D) 18.

Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $2x^2+6x-m-3=0$

có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 2(-m-3) > 0 \\ 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{15}{2} \\ m \neq 5. \end{cases}$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ bằng 3?

(A) 4. (B) 2. (C) Vô số. (D) 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

Xét điều kiện tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} y$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y$.

Trường hợp 1: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m \leq 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{16}{9.}$

Trường hợp 2: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với x_1; x_2 là nghiệm của $g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{16}{9.}$

Vậy $m \geq 0$ thì tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} y$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{m + \dfrac{3m}{x} + \dfrac{4}{x^2}}}{1 + \dfrac{2}{x}} = \sqrt{m}.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\sqrt{m + \dfrac{3m}{x} + \dfrac{4}{x^2}}}{1 + \dfrac{2}{x}} = -\sqrt{m}.$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m > 0$.

Xét trường hợp $x = -2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x = -2$ là nghiệm của $g(x) = mx^2 + 3mx + 4$

$\Rightarrow g(-2) = 0 \Rightarrow m = 2.$

Khi đó $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 6x + 4}}{x + 2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2^-} y = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2^-} \left[-\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{x+2}} \right] = -\infty$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2 \Rightarrow m = 2$ thỏa mãn.

Xét trường hợp $x = -2$ không là nghiệm của tử số, để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì

$$\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ g(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ với $\forall m \in (0; 2]$.

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m \in (0; 2]$.

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m = 1$; $m = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) 2. (C) -3. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$.

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $f(x)=0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)=0\end{cases}\\ \Delta'=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(m-1)^2-\left(m^2-2\right)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2=0\end{cases}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\ m=1;m=-3\end{cases}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-3\\ m=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là $-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A 12. B 9. C 8. D 11.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x\neq 3$.

Xét phương trình $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0$ ta có

$$x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0\Leftrightarrow (x-m)\left(x^2-2mx+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m\\ x^2-2mx+1=0.\end{array}\right.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x\neq 3$ khi và chỉ khi $m\neq 3$ và phương trình $x^2-2mx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 3\\ m^2-1>0\\ 3^2-2\cdot 3\cdot m+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 3\\ \left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{5}{3}.\end{cases}$$

Do m nguyên và $m\in[-6;6]$ nên $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A $m=1$. B $m>1$. C $m=1$ và $m=0$. D $m\neq 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Có $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}=\lim\limits_{x\to m}\left(2x+2m-3+\dfrac{2m^2-2m}{x-m}\right)$.

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại

$$\lim_{x\to m}\frac{2x^2-3x+m}{x-m}\Rightarrow 2m^2-2m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.

A 2019. B 2021. C 2018. D 2020.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ 12+m\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2017\leq m<4 \\ m\neq -12 \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m\in\{-2017;-2016;\cdots;3\}\setminus\{-12\}.$$

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là $3-(-2017)+1-1=2020$ giá trị.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2019m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A) 4. B) 2. C) 3. D) 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

$$\Leftrightarrow 2019m=2020m^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\sqrt[3]{\dfrac{2019}{2020}}. \end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A) $\begin{cases} 0<m<1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$. B) $\begin{cases} m<1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$. C) $m>1$. D) $\begin{cases} 0\leq m\leq 1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x>m$.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình $\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-(2m+1)x+2m=0. \quad (*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $m<x_1<x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2>0 \\ (x_1-m)(x_2-m)>0 \\ x_1+x_2>2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2-m(x_1+x_2)-m^2>0 \\ 2m+1>2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq\dfrac{1}{2} \\ m-m^2>0 \\ 1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq\dfrac{1}{2} \\ 0<m<1. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

A) 0. B) 2. C) 1. D) Vô số.

Lời giải.

Đặt $f(x)=mx^2-6x+3$ và $g(x)=9x^2+6mx+1$. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $m=0$.

Khi đó ta có $y=\dfrac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$ do đó $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m\neq 0$.

Cả hai tam thức $f(x)$ và $g(x)$ đều vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_f<0 \\ \Delta'_g<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m<0 \\ 9m^2-9<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ -1<m<1. \end{cases}$

Suy ra không tồn tại m.

Trường hợp 3:

Tam thức $g(x)$ nhận $x=\dfrac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{13}{12}$ khi đó $f(x)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

A $0<m<1$. B $m=1$. C $m=-1$. D $m>1$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k sao cho

$$\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})=k\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})=k\end{array}\right..$$

Nếu $m\le 0$ thì giới $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})$ không hữu hạn.

Nếu $m>0$ ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1-m)-1}{x-\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-m)-\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}.$$

Giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi $m=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A 0. B 2. C 3. D 1.

Lời giải.

Với $m=0$, ta có hàm số $y=\dfrac{x-2}{-2x+4}=-2\Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m\neq 0$, ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$.

$mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\Delta'=0\Leftrightarrow 1-4m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

$mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ 4m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{4}\\ m=0.\end{cases}$

$\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019x}{\sqrt{17x^2-1}-m|x|}$ có bốn đường tiệm cận. Tính số phần tử của tập S.

A Vô số. B 3. C 5. D 4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Với $m\neq\sqrt{17}$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}, y=\dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $\sqrt{17x^2-1}-m|x|=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{17x^2-1}=m|x| \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ 17x^2-1=m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ \left(17-m^2\right)x^2=1. \end{cases}$ (2)

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ 17-m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq m<\sqrt{17}.$$

Suy ra $S=\{0,1,2,3,4\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A $\dfrac{1}{2}$. B $-\dfrac{1}{2}$. C $\dfrac{1}{3}$. D $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x}+\dfrac{m^2x}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^3+mx}{x(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{x^4+x}{x(\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1)}+m^2\right]$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{(x^2+m)}{(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1}+m^2)=0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{3}+m^2=0$

$\Leftrightarrow 6m^2+3m-2=0$.

Vậy $m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A 12. B 11. C 0. D 10.

Lời giải.

Xét $g(x)=\sqrt{x(x-m)}-1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=-1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó hàm số là $y=\dfrac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m>0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}_g=(-\infty;0]\cup[m;+\infty)$.

Ta có $x=-2\in\mathscr{D}_g$ và $g(-2)=\sqrt{2(m+2)}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m\in\{1;2;\ldots;9\}$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m.

Trường hợp 3: $m<0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}_g=(-\infty;m]\cup[0;+\infty)$.

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x=-2\in\mathscr{D}$ hay $m\geq -2$.

Nên chỉ có $m=-2$, $m=-1$ thỏa mãn.

Với $m=-1$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+1)}-1$, $g(-2)=\sqrt{2}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng.

Với $m=-2$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+2)}-1$, $g(-2)=\sqrt{x(x+2)}-1=-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng .

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

A $1<m<5$. B $-1<m<2$. C $m<1$ hoặc $m>5$. D $m>2$ hoặc $m<-1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ không tồn tại.

Suy ra $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận thì phương trình $x^3-3x^2+m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m-1$. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=3x^2-6x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0\\&x=2.\end{aligned}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	$m-1$	↘	$m-5$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3-3x^2+m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$m-5<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<5.$$

Chọn đáp án A □

Câu 41. Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. B $-\dfrac{3}{4}$. C $-\dfrac{5}{4}$. D $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x)=\sqrt{3x+1}+ax+b=(x-1)^2g(x)$.

Suy ra $\begin{cases}f(1)=0\\f'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+2=0\\a+\dfrac{3}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}\\b=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow a-b=\dfrac{1}{2}.$

Chú ý: Với $f(x)=(x-x_0)^ng(x)$ thì ta luôn có $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham để m đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2016x+2017}-24\sqrt{7}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A vô số. B 2. C 2017. D 2019.

Lời giải.

Biểu thức $\sqrt{-x^2+2016x+2017}$ có nghĩa khi $-x^2+2016x+2017\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 2017$.

Đặt $f(x)=\sqrt{-x^2+2016x+2017}$.

Xét $x-m=0\Leftrightarrow x=m$. Vậy đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x=m$, khi đó điều kiện là

$$\begin{cases}-1\leq x\leq 2017\\f(m)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in[-1;2017] \qquad (1)\\\sqrt{-m^2+2016m+2017}\neq 24\sqrt{7}. \qquad (*)\end{cases}$$

Ta có $(*)\Leftrightarrow m^2-2016m+2015\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m\neq 2015.\end{cases}$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow m\in[-1;2017]\setminus\{1;2015\}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có $2019-2=2017$ số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A $-1 \le m < 0$. B $-1 \le m \le 0$. C $m < -1$. D $m > 0$.

Lời giải.

Nếu $m = 0$ thì $y = \dfrac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Nếu $m > 0$ thì $mx^2 + 1 > 0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = \sqrt{m}, \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = -\sqrt{m}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \sqrt{m}$ và $y = -\sqrt{m}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = +\infty$ nên $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m > 0$ không thỏa mãn.

Nếu $m < 0$ thì tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left[-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}; \sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right] \setminus \{-1\}$.

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$$-\sqrt{-\frac{1}{m}} \le -1 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{1}{m}} \ge 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{m} \ge 1 \Leftrightarrow m \ge -1.$$

Vậy với $-1 \le m < 0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. C	4. A	5. B	6. C	7. C	8. C	9. A	10. D
11. A	12. C	13. A	14. B	15. C	16. B	17. A	18. D	19. A	20. D
21. C	22. A	23. B	24. A	25. C	26. C	27. B	28. A	29. B	30. C
31. D	32. B	33. A	34. C	35. B	36. D	37. C	38. B	39. A	40. A
41. C	42. C	43. A							

ĐỀ VDC SỐ 18: BÀI TẬP TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)\,\mathrm{x}-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

(A) 4039. (B) 4040. (C) 4038. (D) 4037.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$, suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng 3 đường tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)\mathrm{x}-m=0(1)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Ta có

$$x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)\mathrm{x}-m=0\Leftrightarrow(x-m)\left(x^2-2mx+1\right)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=m\\ f(x)=x^2-2mx+1=0(2).\end{bmatrix}$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3 khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 và khác m. Tức là khi

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ f(3)\neq0\\ f(m)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1>0\\ 3^2-6m+1\neq0\\ m^2-2m^2+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}m>1\\ m<-1\end{bmatrix}\\ m\neq\dfrac{5}{3}\\ m\neq\pm1\\ m>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m<-1\\ m>1.\end{bmatrix}$$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ nên có 4038 giá trị của tham số m.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{20+\sqrt{6x-x^2}}{\sqrt{x^2-8x+2m}}$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng.

(A) $m\in[6;8)$. (B) $m\in(6;8)$. (C) $m\in[12;16)$. (D) $m\in(0;16)$.

Lời giải.

Ta có tập xác định của hàm số phải thỏa mãn $6x-x^2\geqslant0\Leftrightarrow0\leqslant x\leqslant6$.

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là phương trình $x^2-8x+2m=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $0<x_1<x_2<6$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-8x$ trên đoạn $[0;6]$.

Bảng biến thiên

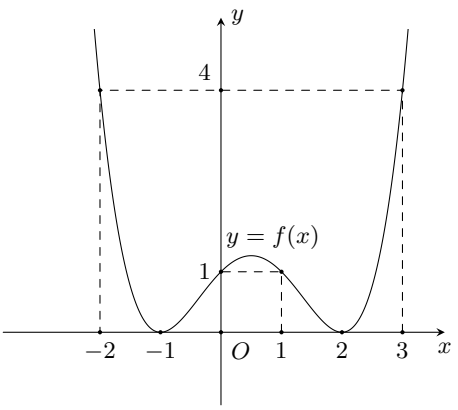
x	0		4		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		-16 ↗		-12

Từ bảng biến thiên ta thấy, yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $-16<-2m<-12\Leftrightarrow6<m<8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3.

Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-4\right)^4(x-3)\left(x^3+1\right)}{f(f(x)-1)}$ là



(A) 6. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại các điểm $x=-1$, $x=2$ và đi qua các điểm $(-2;4)$, $(3;4)$, $(0;1)$ nên ta tìm được hàm $f(x)$ thỏa mãn đó là $f(x)=\dfrac{1}{4}(x+1)^2(x-2)^2$.

Do đó

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\left(x^2-4\right)^4(x-3)\left(x^3+1\right)}{f(f(x)-1)}\frac{\left(x^2-4\right)^4(x-3)\left(x^3+1\right)}{f\left(\frac{1}{4}(x+1)^2(x-2)^2-1\right)} \\ &= \frac{256(x-2)^4(x+2)^4(x-3)(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{\left[(x+1)^2(x-2)^2\right]^2\left[(x+1)^2(x-2)^2-12\right]^2} \\ &= \frac{256(x+2)^4(x-3)\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)^3\left(x^2-x-2-\sqrt{12}\right)^2\left(x^2-x-2+\sqrt{12}\right)^2}. \end{aligned}$$

Xét $(x+1)^3\left(x^2-x-2-\sqrt{12}\right)^2\left(x^2-x-2+\sqrt{12}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{9+8\sqrt{3}}}{2}=x_1 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{9-8\sqrt{3}}}{2}=x_2. \end{array}\right.$

Các số -1, x_1, x_2 không phải là nghiệm của phương trình $256(x+2)^4(x-3)\left(x^2-x+1\right)=0$ nên đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận đứng.

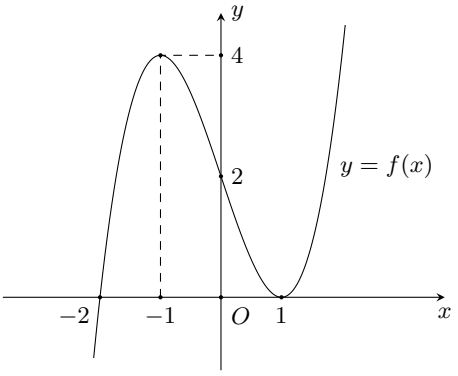
Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ nên đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cần ngang là đường thẳng $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4.

Cho đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng



(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

CÁCH 1.

Ta có $3f^2(x)-6f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2. \end{array}\right.$

Từ đồ thị, ta thấy

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x=1 \text{ (nghiệm kép)} \end{array}\right.$. Suy ra $f(x)=a(x+2)(x-1)^2, (a\neq 0)$.

$f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m\ (-2<m<-1) \\ x=n\ (n>1) \end{array}\right.$, các nghiệm đều là nghiệm đơn.

Suy ra $f(x)-2=ax(x-m)(x-n), (a\neq 0)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} g(x)=\frac{(x-1)(3x+2)}{3f(x)[f(x)-2]} &= \frac{(x-1)(3x+2)}{3a^2(x+2)(x-1)^2x(x-m)(x-n)} \\ &= \frac{(3x+2)}{3a^2x(x+2)(x-1)(x-m)(x-n)}, (a\neq 0). \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng.

CÁCH 2. Chọn hàm số $f(x)$.

Đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đi qua 2 điểm $A(-2;0)$, $D(1;0)$ đạt cực trị tại 2 điểm $B(-1;4)$, $C(0;2)$, $D(1;0)$ nên ta tìm được $f(x)=x^3-3x+2$.

Khi đó

$$\begin{aligned} g(x)=\frac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)} &= \frac{3x^2-x-2}{3f(x)(f(x)-2)} \\ &= \frac{3x^2-x-2}{3\left(x^3-3x+2\right)\left(x^3-3x\right)} \\ &= \frac{(x-1)(3x+2)}{3(x+2)(x-1)^2x\left(x^2-3\right)}. \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Hàm số $g(x)$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x\geqslant -\dfrac{5}{4} \\ f(x)\neq \pm 1 \end{cases}$.

Vì $y=f(x)$ là hàm bậc ba và dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y'=a\left(x^2-1\right) \Rightarrow y=\frac{a}{3}x^3-ax+b.$$

Cũng từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} y(-1)=3 \\ y(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{3}+a+b=3 \\ \dfrac{a}{3}-a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x+1.$$

***)Tìm tiệm cận ngang.**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|x^3-3x+1|-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}-3\sqrt{\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^6}}}{\left|1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right|-\frac{1}{x^3}} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

***)Tìm tiệm cận đứng.**

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1} &= \frac{\left(4x^2-8x+4\right)\left(|f(x)|+1\right)}{\left(f^2(x)-1\right)\left(2x+7+3\sqrt{4x+5}\right)} \\ &= \frac{4(x-1)^2(|f(x)|+1)}{(f(x)-1)(f(x)+1)(2x+7+3\sqrt{4x+5})} \\ &= \frac{4(x-1)^2(|f(x)|+1)}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(x-1)^2(2x+7+3\sqrt{4x+5})} \\ &= \frac{4(|f(x)|+1)}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}. \end{aligned}$$

$x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(2x+7+3\sqrt{4x+5}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$ (vì $x \geqslant -\frac{5}{4}$).

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

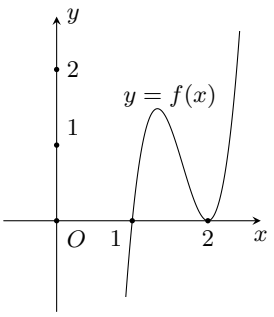
$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-} g(x) = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=\sqrt{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$ và tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=\sqrt{3}$, $x=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6.

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

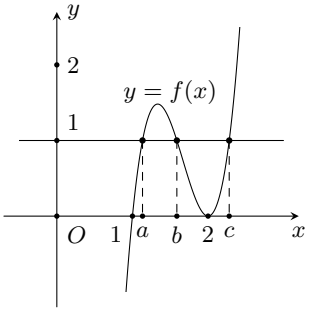


(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện $x \geqslant 1$.

$$x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow x\cdot f(x)\cdot[f(x)-1]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=1. \end{array}\right.$$



$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (nghiệm kép)} \\ x=1 \text{ (nghiệm đơn).} \end{array}\right. \Rightarrow f(x)=k(x-1)(x-2)^2,\ k\neq 0.$$

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, 1<a<2 \\ x=b, 1<b<2, b\neq a \\ x=c, c>2 \end{array}\right. \Rightarrow f(x)-1=k(x-a)(x-b)(x-c).$$

Do đó

$$g(x)=\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{k^2x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

***)Tìm tiệm cận đứng.**

☑ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{k^2x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

☑ $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{k^2x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

☑ $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{k^2x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

☑ $\lim\limits_{x\to b^+} g(x) = \lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{k^2x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty$ đường thẳng $\Rightarrow x=b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

☑ $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{k^2x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

***)Tìm tiệm cận ngang.**

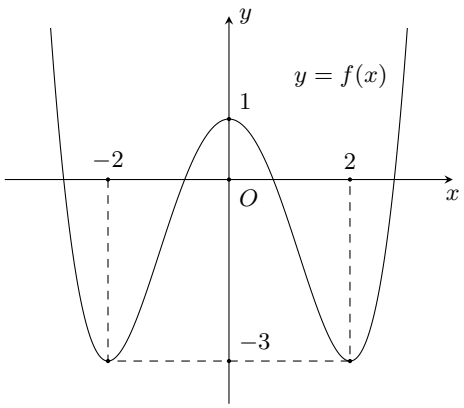
☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{k^2x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = 0 \Rightarrow$ đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 6 đường tiệm cận.
Chọn đáp án C □

Câu 7.

Cho hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?

A 5. B 2. C 3. D 4.



Lời giải.

Ta có

$$y=\frac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}=\frac{(x-2)(x+2)x(x+2)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}=\frac{(x-2)(x+2)^2x}{[f(x)]^2+2f(x)-3}.$$

$$[f(x)]^2+2f(x)-3=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f(x)=1\\f(x)=-3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=m,m<-2\\x=0\\x=n,n>2\\x=2\\x=-2.\end{bmatrix}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0$, $x=\pm 2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2). Do đó đa thức $[f(x)]^2+2f(x)-3$ có bậc là 8.

Suy ra $y=\dfrac{(x-2)(x+2)^2x}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}=\dfrac{1}{a^2x(x-2)(x-m)(x-n)}$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$, $x=2$, $x=m$, $x=n$.
Chọn đáp án D □

Câu 8. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-5)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính a^2+b^3.

(A) $\dfrac{-4841}{152}$. (B) $\dfrac{-4814}{152}$. (C) $\dfrac{4841}{152}$. (D) $\dfrac{4814}{152}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}+ax+b$ có $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}+a$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)=(x-5)^2\cdot g(x)$.

Tức là, ta có điều kiện

$$\begin{cases} f(5)=0 \\ f'(5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3\cdot 5+1}+a\cdot 5+b=0 \\ \dfrac{3}{2\sqrt{3.5+1}}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+b=-4 \\ a=\dfrac{-3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-17}{8} \\ a=\dfrac{-3}{8}. \end{cases}$$

Vậy $a^2+b^3=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-3}{2}\right)^3=\dfrac{-4814}{152}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Biết rằng tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(1+x+\dfrac{4}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{\frac{a}{b}}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-c}{d}}$, trong đó các phân số $\dfrac{a}{b};\dfrac{c}{d}$ tối giản.

Hãy xác định phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

(A) $y=\dfrac{25}{3}$. (B) $y=\dfrac{25}{53}$. (C) $y=\dfrac{25}{9}$. (D) $y=3$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}e^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right)\cdot\mathrm{e}^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x=I_1+I_2$, với $I_1=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}e^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x$; $I_2=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right).\mathrm{e}^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x$.

Tính $I_1=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}e^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\mathrm{e}^{x-\frac{2}{x^2}} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\left(1+\dfrac{4}{x^3}\right)\mathrm{e}^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x \\ v=x. \end{cases}$

Ta có $I_1=x\cdot\mathrm{e}^{x-\frac{2}{x^2}}\Big|_{\frac{1}{3}}^{3}-\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right)\cdot\mathrm{e}^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{\frac{25}{9}}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-53}{3}}-I_2$.

Do vậy $I=I_1+I_2=3\mathrm{e}^{\frac{25}{9}}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-53}{3}}$.

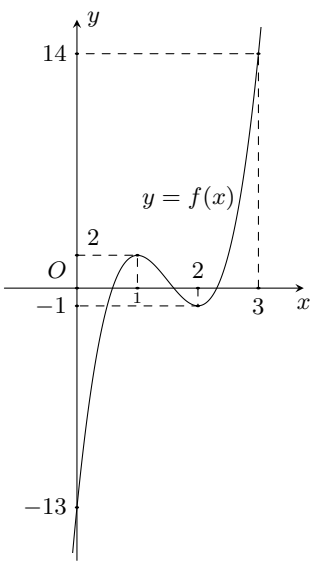
Ta có $a=25$; $b=9$; $c=53$; $d=3$. Suy ra hàm số $y=\dfrac{25x+9}{53x+3}$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{25x+9}{53x+3}$ có duy nhất một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{25}{53}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$có đồ thị như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f\left(f(x)+1\right)-m}$ có 4 đường tiệm cận bằng



(A) 15. (B) 1. (C) 13. (D) 11.

Lời giải.

Ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $f\left(f(x)+1\right)-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đặt $h(x)=f\left(f(x)+1\right)$. Khi đó $h'(x)=f'(x).f'\left(f(x)+1\right)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(f(x)+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)+1=1\\f(x)+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\\f(x)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\{1,2\}\\x\in\{x_1;x_2;x_3\},\\x\in\{x_4;x_5;x_6\}\end{array}\right.$$

với $(x_1<x_4<1<x_5<x_2<2<x_3<x_6)$.

Ta có $h\left(x_1\right)=h\left(x_2\right)=h\left(x_3\right)=f\left(f\left(x_1\right)+1\right)=2$;

$h\left(x_4\right)=h\left(x_5\right)=h\left(x_6\right)=f\left(f\left(x_4\right)+1\right)=-1$; $h(1)=f\left(f(1)+1\right)=14$; $h(2)=f\left(f(2)+1\right)=-13$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_4		1		x_5		x_2		2		x_3		x_6		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗	2	↘	-1	↗	14	↘	-1	↗	2	↘	-13	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f\left(f(x)+1\right)-m=0$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$m\in(2;14)\cup(-13;-1).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{6x-3}+mx-2m-3}{3x^3-14x^2+20x-8}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{2}\\x\neq 2\\x\neq\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{6x-3}+mx-2m-3}{3x^3-14x^2+20x-8}=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.
Ta có $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{6x-3}+mx-2m-3}{(x-2)^2(3x-2)}$.
Đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số nhận một trong hai đường thẳng $x=2$ hoặc $x=\dfrac{2}{3}$ là tiệm cận đứng.

- Nếu $\sqrt{6x-3}+mx-2m-3$ nhận $x=\dfrac{2}{3}$ là nghiệm thì $m=-\dfrac{3}{2}$. Khi đó
  - $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{6x-3}-\frac{3}{2}x}{(x-2)^2(3x-2)}=\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{-3}{4(x-2)\left(\sqrt{6x-3}+\frac{3}{2}x\right)}=\dfrac{9}{32}$.
  - $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{6x-3}-\frac{3}{2}x}{(x-2)^2(3x-2)}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-3}{4(x-2)\left(\sqrt{6x-3}+\frac{3}{2}x\right)}=-\infty$.

    Suy ra đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.
- Nếu $\sqrt{6x-3}+mx-2m-3=(x-2)\left(\dfrac{6}{\sqrt{6x-3}+3}+m\right)$ nhận $x=2$ là nghiệm kép thì $m=-1$. Khi đó
  - $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+}\dfrac{\sqrt{6x-3}-x-1}{(x-2)^2(3x-2)}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+}\dfrac{-1}{(3x-2)\left(\sqrt{6x-3}+x+1\right)}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6x-3}-x-1}{(x-2)^2(3x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-1}{(3x-2)\left(\sqrt{6x-3}+x+1\right)}=-\dfrac{1}{24}$.

    Suy ra đường thẳng $x=\dfrac{2}{3}$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.

Vậy có hai giá trị của $m\in\left\{-1;-\dfrac{3}{2}\right\}$ thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}$ là
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=(-1;+\infty)\setminus\{0;1\}$.
Ta có

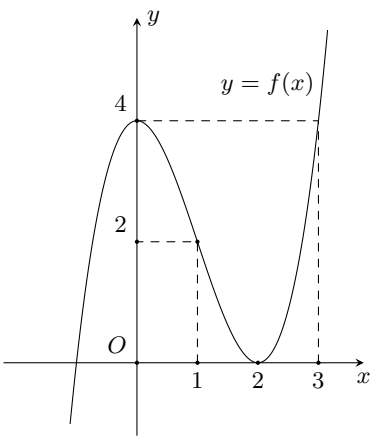
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=0$.
- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)}{x^2-1}.\dfrac{\ln(x+1)}{x}=2-\sqrt[3]{9}$.
- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)}{x^2-1}.\dfrac{\ln(x+1)}{x}=2-\sqrt[3]{9}$.
- $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\left(1-x^2\right)\ln(x+1)}{(x^2-1)\,x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{-\ln(x+1)}{x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}$
  $=-\infty$.

☑ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\left(1-x^2\right)\ln(x+1)}{\left(x^2-1\right)x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-\ln(x+1)}{x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}$
$= \dfrac{1}{12}\ln 2.$

☑ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\left(1-x^2\right)\ln(x+1)}{\left(x^2-1\right)x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-\ln(x+1)}{x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}$
$= \dfrac{1}{12}\ln 2.$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận $y=0$ và $x=-1$.
Chọn đáp án C □

Câu 13.
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là số tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x-3\right)\sqrt{x^2-x}\sqrt{x^4-17x^2+16}}{|f(x)-2|\left(2x^2-3x\right)}$. Khi đó mệnh đề nào đúng?



A $2M=3m$. B $M=3m$. C $M=2m$. D $M=m$.

Lời giải.
Từ giả thiết, ta tìm được $f(x)=x^3-3x^2+4$.
Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{\left(x^2-2x-3\right).\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^4-17x^2+16}}{\left|x^3-3x^2+2\right|.\left(2x^2-3x\right)}$.
Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2-x\geq 0 \\ x^4-17x^2+16\geq 0 \\ \left|x^3-3x^2+2\right|.\left(2x^2-3x\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -4 \\ -1\leq x\neq 1-\sqrt{3}<0 \\ x\geq 4 \end{cases}$.
Ta có

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right).\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}.\sqrt{1-\dfrac{17}{x^2}+\dfrac{16}{x^4}}}{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right).\left(2-\dfrac{3}{x}\right)} = \dfrac{1}{2}.$

☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)\left(-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)\sqrt{1-\dfrac{17}{x^2}+\dfrac{16}{x^4}}}{-\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)\left(2-\dfrac{3}{x}\right)} = \dfrac{1}{2}.$

Suy ra đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang duy nhất của (C).

☑ $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\left(x^2-2x-3\right)\sqrt{1-x}\sqrt{x^4-17x^2+16}}{\left(x^3-3x^2+2\right)\left(-\sqrt{x}\right)\left(2x-3\right)} = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của (C).

☑ $\lim\limits_{x\to\left(1-\sqrt{3}\right)^-} g(x) = \lim\limits_{x\to\left(1-\sqrt{3}\right)^-} \dfrac{\left(x^2-2x-3\right)\sqrt{x^2-x}\sqrt{x^4-17x^2+16}}{\left|x^3-3x^2+2\right|\left(2x^2-3x\right)} = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=1-\sqrt{3}$ là tiệm cận đứng của (C).

Vậy $M=2; m=1$ nên $M=2m$.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1)\left(\sqrt{4x^2+x+4}+2x\right)}$ có tổng số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang là

A) 2. B) 3. C) 4. D) 6.

Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1)\left(\sqrt{4x^2+x+4}+2x\right)}$.

Ta có $(|x+2|-1)\left(\sqrt{4x^2+x+4}+2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x+2|=1\\ \sqrt{4x^2+x+4}=-2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2=\pm 1\\ \begin{cases}x\le 0\\ x+4=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-3\\ x=-4.\end{array}\right.$

Suy ra tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathscr{D}=(-\infty;-4)\cup[2;+\infty)$.

***)Tìm tiệm cận đứng.**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(-4)^-} y &= \lim_{x\to(-4)^-}\frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1)\left(\sqrt{4x^2+x+4}+2x\right)}\\ &= \lim_{x\to(-4)^-}\frac{(2x-3)\sqrt{(-x+2)(-x-4)}\left(\sqrt{4x^2+x+4}-2x\right)}{(-x-3).(x+4)}\\ &= \lim_{x\to(-4)^-}\frac{(2x-3)\sqrt{-x+2}\left(\sqrt{4x^2+x+4}-2x\right)}{(x+3).\sqrt{-x-4}}=+\infty.\end{aligned}$$

Suy ra đường thẳng $x=-4$ là tiệm cận đứng của (C).

***)Tìm tiệm cận ngang.**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} y &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(x+1).\left(\sqrt{4x^2+x+4}+2x\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+2\right)}=\frac{1}{2}.\\ \lim_{x\to-\infty} y &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(-x-3)\left(\sqrt{4x^2+x+4}+2x\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}\left(\sqrt{4x^2+x+4}-2x\right)}{(-x-3)(x+4)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[(2x-3)\frac{\left(-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}}\right)\left(-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-2\right)}{\left(-1-\dfrac{3}{x}\right)\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}\right]=+\infty.\end{aligned}$$

Suy ra đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang duy nhất của (C).

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Đồ thị hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2} \text{ nếu } x>2\\ \sqrt{4x^2+x+1}+2x \text{ nếu } x\le 2\end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 1. (B) 2 . (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Ta có

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-2\sqrt{\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{2}{x^6}}}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2}=0.$

Suy ra (C) nhận đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang.

☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2}=-\dfrac{1}{4}.$

Suy ra (C) nhận đường thẳng $y=-\dfrac{1}{4}$ là tiệm cận ngang.

☑ $\lim\limits_{x\to2^+} y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^4-4(x+2)}{x(x-2)^2\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^3+2x^2+4x+4}{x(x-2)\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)}=+\infty.$

Suy ra (C) nhận đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{4x^3-20x^2+(m+24)x-2m}{20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}$ có đồ thị là (C). Gọi S là tập hợp các giá trị của m để (C) có đúng một tiệm cận đứng. Tổng các giá trị trong S là

(A) -1. (B) -3. (C) -5. (D) -7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=0 \quad (1)\\
\Leftrightarrow\ &350x^2+245x+\frac{315}{2}+\frac{35}{2}(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(14x+\frac{35}{4}\right)^2+2\left(14x+\frac{35}{4}\right)\cdot\frac{35}{4}\sqrt{2x^2+1}+\frac{1225}{16}\left(2x^2+1\right)+\frac{7}{8}x^2+\frac{315}{8}\sqrt{2x^2+1}+\frac{35}{8}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(14x+\frac{35}{4}+\frac{35}{4}\sqrt{2x^2+1}\right)^2+\frac{7}{8}x^2+\frac{315}{8}\sqrt{2x^2+1}+\frac{35}{8}=0. \quad (2)
\end{aligned}$$

Nhận thấy phương trình (2) vô nghiệm nên phương trình (1) vô nghiệm.

Do đó

$$\begin{aligned}
20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1} &= \frac{\left(20x^2+14x+9\right)^2-(14x+11)^2\left(2x^2+1\right)}{20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}\\
&= \frac{8x^4-56x^3+118x^2-5x-40}{20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}\\
&= \frac{2(x-2)^2\left(4x^2-12x-5\right)}{20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
y=f(x) &= \frac{(x-2)\left(4x^2-12x+m\right)}{2(x-2)^2\left(4x^2-12x-5\right)}\left[20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}\right]\\
&= \frac{4x^2-12x+m}{2(x-2)\left(4x^2-12x-5\right)}\left[20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}\right].
\end{aligned}$$

Do vậy, hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{2;\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}\right\}$.

Đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $4x^2-12x+m=0 \quad (1)$ có tập nghiệm gồm 2 số trong tập $\left\{2;\dfrac{3+\sqrt{14}}{2};\dfrac{3-\sqrt{14}}{2}\right\}$.

Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $x_1+x_2=3\in\mathbb{Q}$. Do đó, (1) phải có hai nghiệm là $\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$, suy ra $m=-5$. Do đó $S=\{-5\}$.
Vậy tổng các giá trị trong S là -5.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai đường tiệm cận ngang $y=-5$, $y=1$. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ có đúng một đường tiệm cận ngang.

A $m=1$. B $m=-2$. C $m=2$. D $m=3$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang $y=-5$, $y=1$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ có hai đường tiệm cận ngang $y=-5+m$, $y=1+m$.
Do đó đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ có đúng một đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi hai đường thẳng $y=-5+m$, $y=1+m$ đối xứng qua trục Ox. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $-5+m+1+m=0\Leftrightarrow m=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=x\left(\sqrt[3]{ax^3+bx^2-1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)$. Biết rằng đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang bằng $y=\dfrac{5}{4}$. Giá trị $a+b$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(-5;-3)$. B $(-3;0)$. C $(0;3)$. D $(3;5)$.

Lời giải.

Trường hợp 1. Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{5}{4} &\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{ax^3+bx^2-1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)\right]=\frac{5}{4}\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt[3]{a+\frac{b}{x}-\frac{1}{x^3}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{5}{4}\\ &\Rightarrow \sqrt[3]{a}-2=0\Leftrightarrow a=8.\end{aligned}$$

Với $a=8$, ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{8x^3+bx^2-1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)\right]=\frac{5}{4}\\ \Leftrightarrow\ &\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{8x^3+bx^2-1}-(2x-1)+(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+4}\right)\right]=\frac{5}{4}\\ \Leftrightarrow\ &\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+12)x^3-6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3+bx^2-1}\right)^2+(2x-1)\sqrt[3]{8x^3+bx^2-1}+(2x-1)^2}+\frac{-3x}{(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+4}}\right)=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+4}}=\dfrac{-3}{4}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{5}{4}$ nên

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(b+12)x^3-6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3+bx^2-1}\right)^2+(2x-1)\sqrt[3]{8x^3+bx^2-1}+(2x-1)^2}\right)$ phải hữu hạn.

Do đó $b+12=0\Rightarrow b=-12$ thay lại ta được

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3-12x^2-1}\right)^2+(2x-1)\sqrt[3]{8x^3-12x^2-1}+(2x-1)^2}=\frac{-1}{2}.$$

Khi đó được $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{5}{4} \neq \dfrac{5}{4}$ không thỏa mãn. Vậy, trường hợp 1 không xảy ra.

Trường hợp 2. Xét $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{4} &\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{ax^3+bx^2-1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)\right] = \frac{5}{4}\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} x^2\left(\sqrt[3]{a+\frac{b}{x}-1}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{5}{4}\\ &\Rightarrow \sqrt[3]{a}+2=0 \Leftrightarrow a=-8.\end{aligned}$$

Với $a=-8$, ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)\right] = \frac{5}{4}\\ \Leftrightarrow\ &\lim_{x\to-\infty} x\left[\left(\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}+(2x-1)-(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+4}\right)\right] = \frac{5}{4}\\ \Leftrightarrow\ &\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(b-12)x^3+6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}\right)^2-(2x-1)\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}+(2x-1)^2}-\frac{-3x}{(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+4}}\right) = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Do $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3x}{(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+4}}\right) = -\dfrac{3}{4}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{5}{4}$

nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(b-12)x^3+6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}\right)^2+(2x-1)\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}+(2x-1)^2}\right)$ hữu hạn.

Do đó $b-12=0 \Rightarrow b=12$ thay lại ta được

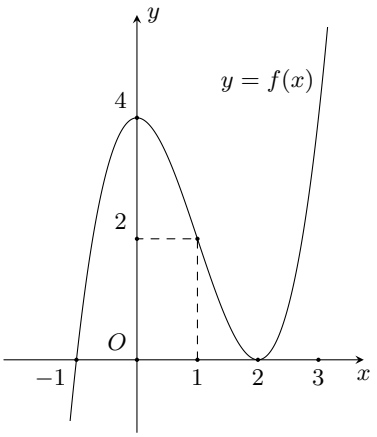
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3+12x^2-1}\right)^2+(2x-1)\sqrt[3]{-8x^3+12x^2-1}+(2x-1)^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{5}{4}$ thỏa mãn. Vậy ta được $a+b=4\in(3;5)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19.

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}(x-2)}{f^2(x)-2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\geq 0\\ f^2(x)-2f(x)\neq 0\end{cases}$.

$f^2(x)-2f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=2.\end{array}\right.$

☑ $f(x)=0 \Leftrightarrow \hoac{x=-1\\x=2} \Rightarrow f(x)=k(x+1)(x-2)^2,\ k\neq 0.$

☑ $f(x)=2 \Leftrightarrow \hoac{x=a<0\\x=1\\x=b>2} \Rightarrow f(x)-2=k(x-1)(x-a)(x-b).$

Do đó
$$g(x)=\frac{\sqrt{x}(x-2)}{k^2(x+1)(x-2)^2(x-1)(x-a)(x-b)}=\frac{\sqrt{x}}{k^2(x+1)(x-2)(x-1)(x-a)(x-b)}.$$
Vì $-1,\ a\notin[0;+\infty)$ còn $1,\ 2,\ b\in[0;+\infty)$, các số $1,\ 2,\ b$ là nghiệm của mẫu, không phải là nghiệm của tử của hàm số $g(x)$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng ba đường tiệm cận, đó là các đường thẳng $x=1$, $x=2$, $x=b$.
Vậy tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 3.
Chọn đáp án C □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-2mx+4}$ có 3 đường tiệm cận.

A $m<2$. B $-2<m<2$. C $\heva{\hoac{m>2\\m<-2}\\m\neq\dfrac{5}{2}}$. D $\hoac{m>2\\m<-2}$.

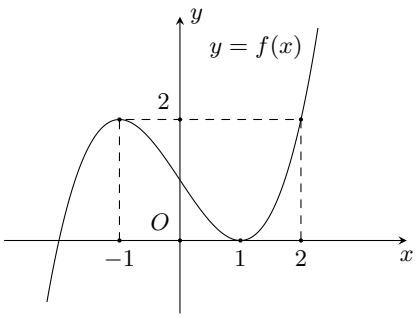
Lời giải.
Ta có
$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$, $\forall m$.
Do đó đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Tức là ta có
$$\heva{\Delta'>0\\m\neq\dfrac{5}{2}}\Leftrightarrow\heva{m^2-4>0\\m\neq\dfrac{5}{2}}\Leftrightarrow\heva{m\neq\dfrac{5}{2}\\\hoac{m>2\\m<-2.}}$$
Chọn đáp án C □

Câu 21. Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-2mx+m^2-2m-6}$ có đúng hai đường tiệm cận. Số phần tử của S là
A 2. B 3. C 0. D 1.

Lời giải.
Ta có
$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{m^2-2m-6}{x^2}}=0,\ \lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{m^2-2m-6}{x^2}}=0.$$
Suy ra đồ thị hàm số luôn có duy nhất một đường tiệm cận ngang là $y=0$.
Do đó để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì phương trình $x^2-2mx+m^2-2m-6=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.
Khi đó $\hoac{2m+6=0\\\heva{2m+6>0\\m^2-4m-5=0}}\Leftrightarrow\hoac{m=-3\\\heva{m>-3\\\hoac{m=-1\\m=5}}}\Leftrightarrow\hoac{m=-3\\m=-1\\m=5.}$
Vậy $S=\{-3\,;\,-1\,;\,5\}$.
Chọn đáp án B □

Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x+1)\sqrt{f(x)}}{(f(x)-2)(x^2-2mx+m+2)}$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang). Số phần tử của tập S là



(A) 2016. (B) 4034. (C) 4036. (D) 2017.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 2 \\ x^2 - 2mx + m + 2 \neq 0. \end{cases}$

- $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$
- $f(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$ ($x = -1$ là nghiệm kép).
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$ ($x = 1$ là nghiệm kép).

Khi đó

$$g(x) = \frac{(x+1)\sqrt{a(x+2)(x-1)^2}}{a(x-2)(x+1)^2(x^2-2mx+m+2)} = \frac{|x-1|\sqrt{a(x+2)}}{a(x-2)(x+1)(x^2-2mx+m+2)} \quad (a>0).$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.
- Vì $x = 2$ và $x = -1$ là nghiệm của mẫu nhưng không phải là nghiệm của tử của $g(x)$ và các giới hạn một bên của $g(x)$ tại các điểm này là giới hạn vô cực nên các đường thẳng $x = 2$, $x = -1$ là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

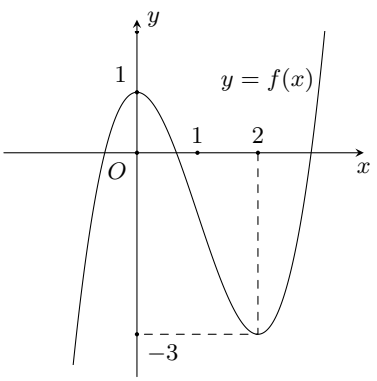
Do đó, đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang) khi và chỉ khi phương trình $h(x) = x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn -2 và không thuộc $\{-1; 1; 2\}$. Tức là, ta có điều kiện

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a_{h(x)}.h(-2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > -2 \\ h(-1) \neq 0 \\ h(1) \neq 0 \\ h(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 5m + 6 > 0 \\ m > -2 \\ 3m + 3 \neq 0 \\ 3 - m \neq 0 \\ 6 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{6}{5} \\ m > -2 \\ m \neq -1 \\ m \neq 3 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{6}{5} < m < -1 \\ \begin{cases} m > 2 \\ m \neq 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Do m có giá trị là nguyên và m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$.
Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ là $\{4; 5; 6; \ldots; 2019\}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23.

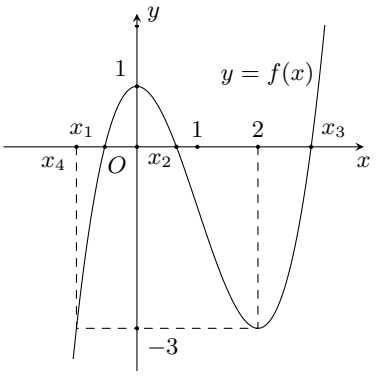
Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{1-x}}{(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



(A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\le 1\\ x-3\neq 0\\ f^2(x)+3f(x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\ f^2(x)+3f(x)\neq 0.\end{cases}$



- $(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ f(x)=0\\ f(x)=-3.\end{array}\right.$
- $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<0\\ x=x_2\in(0\,;1)\\ x=x_3\in(2\,;+\infty)\end{array}\right.\Rightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ a\neq 0.$
- $f(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_4<x_1<0\\ x=2\end{array}\right.\Rightarrow f(x)=a(x-x_4)(x-3)^2.$

Do đó $g(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{1-x}}{a^2(x-3)^3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$.

Vì $x_1,\ x_2,\ x_4\in(-\infty;1]$ và $3,\ x_3\notin(-\infty;1]$ nên đồ thị hàm số đã cho có đúng 3 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. D	4. A	5. B	6. C	7. D	8. A	9. B	10. D
11. B	12. C	13. C	14. A	15. C	16. C	17. C	18. D	19. C	20. C
21. B	22. A	23. B							

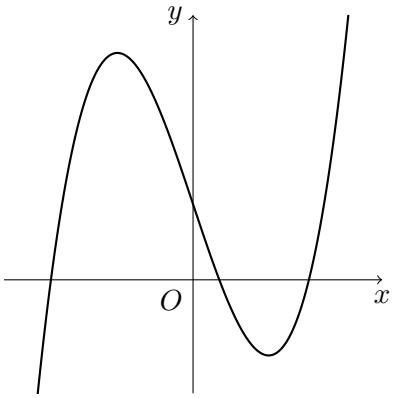
CHỦ ĐỀ 5. ĐỌC VÀ BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

A LÝ THUYẾT

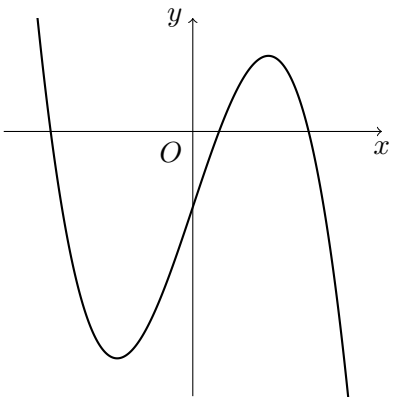
Khảo sát một số hàm đa thức và phân thức

1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

☑ **Trường hợp 1:** phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

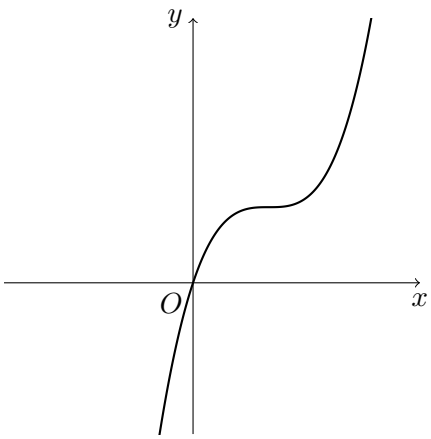


Với $a > 0$

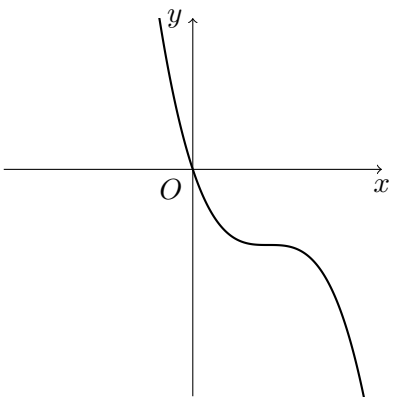


Với $a < 0$

☑ **Trường hợp 2:** phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép.

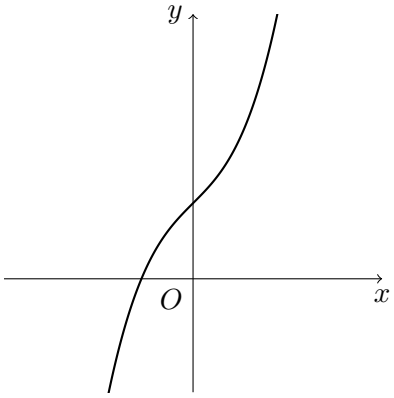


Với $a > 0$

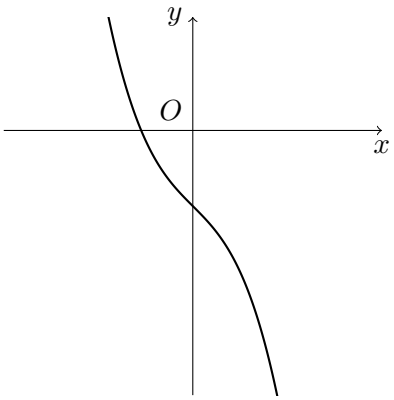


Với $a < 0$

☑ **Trường hợp 3:** phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.



Với $a > 0$



Với $a < 0$

2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$

a) Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2a^2x + b)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0. \end{array}\right.$

b) Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$.

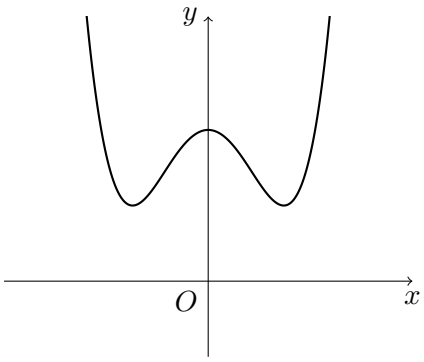
- Nếu $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$ thì hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu.
- Nếu $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$ thì hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

c) Để hàm số có 1 cực trị: $ab \geq 0$.

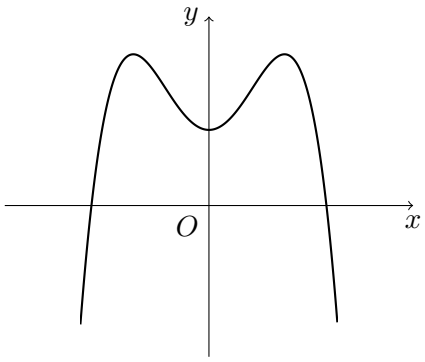
- Nếu $\begin{cases} a>0 \\ b\geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại.
- Nếu $\begin{cases} a<0 \\ b\neq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu.

d) Các dạng đồ thị hàm số trùng phương.

- **Trường hợp 1:** phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $(ab<0)$.

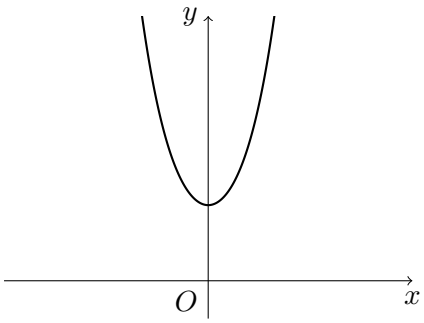


Với $a>0$

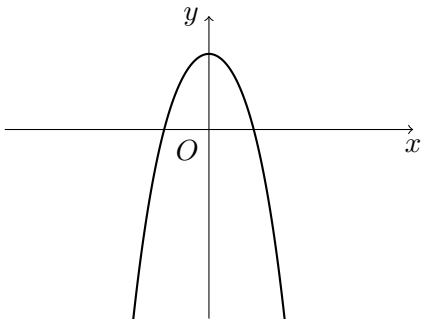


Với $a<0$

- **Trường hợp 2:** phương trình $y'=0$ có 1 nghiệm.



Với $a>0$



Với $a<0$

3. Hàm số bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Nếu $ad-bc>0$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.
- Nếu $ad-bc<0$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.
- Đồ thị hàm số có TCĐ $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN $y=\dfrac{a}{c}$.
- Đồ thị có tâm đối xứng $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.

4. Các phép biến đổi đồ thị

Dạng 1. Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

Cách vẽ (C') từ (C)

- ☑ Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- ☑ Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị được giữ** qua Oy.

Dạng 2. Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0. \end{cases}$

Cách vẽ (C') từ (C)

- ☑ Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C) : $y = f(x)$.
- ☑ Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

Dạng 3. Từ đồ thị $(C): y = u(x)v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)| \cdot v(x)$.

Ta có $y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x)v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x)v(x) = -f(x) & \text{khi } u(x) < 0. \end{cases}$

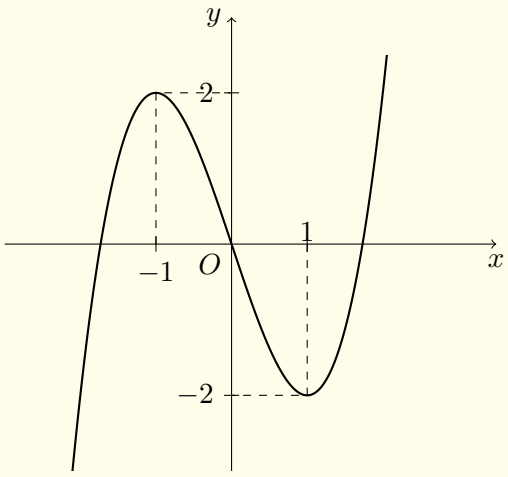
Cách vẽ (C') từ (C)

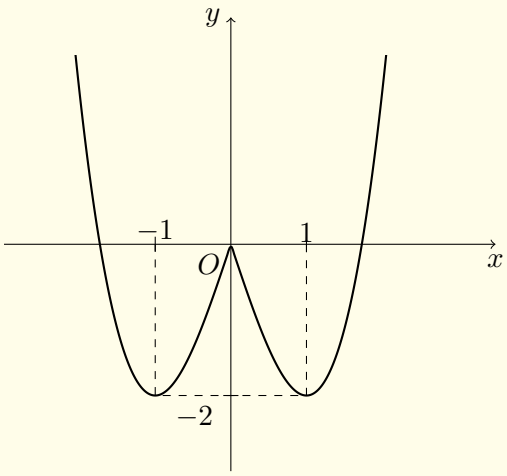
- ☑ Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- ☑ Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

Ví dụ 1. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C)': y = |x|^3 - 3|x|$.

a) Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.

b) Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

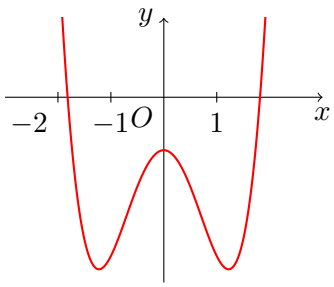




$(C)': y = |x|^3 - 3|x|$

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

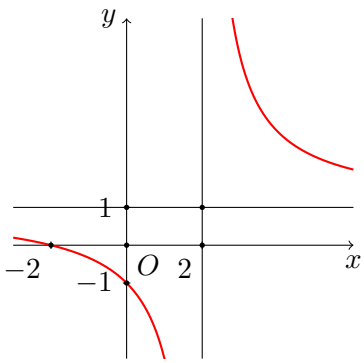


(A) $a > 0, b < 0, c < 0$. (B) $a > 0, b > 0, c < 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c < 0$. (D) $a > 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải.

Do đồ thị cắt Oy tại $M(0; c)$ nằm dưới trục Ox nên $c < 0$.
Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.
Hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Tìm a, b, c để hàm số $y = \dfrac{ax + 2}{cx + b}$ có đồ thị như hình vẽ sau

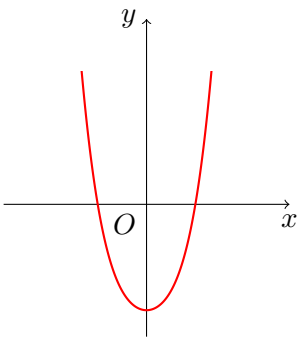


(A) $a = 1; b = 1; c = -1$. (B) $a = 1; b = -2; c = 1$.
(C) $a = 1; b = 2; c = 1$. (D) $a = 2; b = -2; c = -1$.

Lời giải.

Để đường tiệm cận đứng là $x = 2$ thì $-\dfrac{b}{c} = 2 \Leftrightarrow b = -2c$.
Để đường tiệm cận ngang là $y = 1$ thì $\dfrac{a}{c} = 1 \Leftrightarrow a = c$.
Khi đó $y = \dfrac{cx + 2}{cx - 2c}$. Để đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2; 0)$ thì $c = 1$.
Vậy ta có $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



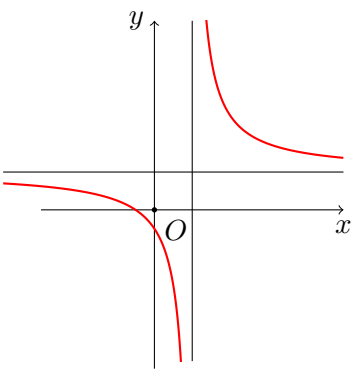
(A) $a > 0, b < 0, c \leq 0$. (B) $a < 0, b < 0, c < 0$.
(C) $a > 0, b \geq 0, c > 0$. (D) $a > 0, b \geq 0, c < 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \\ c < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ c < 0. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ ($a\neq 0$ và a, b, $c\in\mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $a>0, b>0, c-ab<0$. (B) $a<0, b>0, c-ab<0$.

(C) $a<0, b<0, c-ab>0$. (D) $a>0, b<0, c-ab<0$.

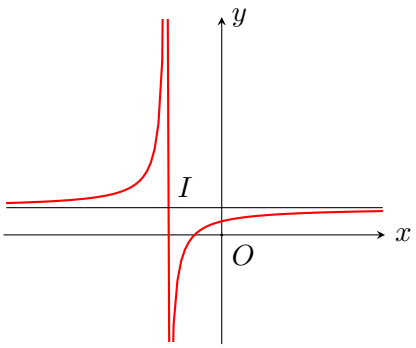
Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=b>0$, tiệm cận đứng $x=a>0$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định nên $c-ab<0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a>0>b$. (B) $a>b>0$. (C) $a<b<0$. (D) $a<0<b$.

Lời giải.

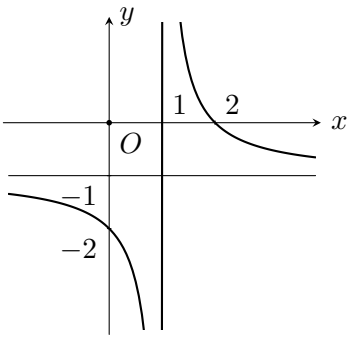
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=b$. Theo như hình vẽ thì $b<0$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$. Theo như hình vẽ thì $a>0$.

Do đó ta có $a>0>b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $b<0<a$. (B) $0<b<a$. (C) $b<a<0$. (D) $0<a<b$.

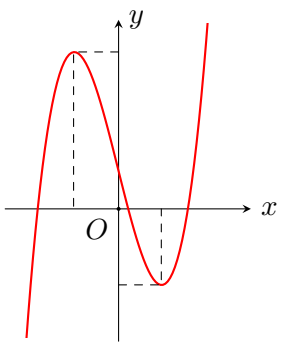
Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=a$ và tiệm cận đứng $x=1$. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{b}{a}>1$.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{a}{-1}=1\\ \dfrac{b}{a}>1\end{cases}\Leftrightarrow b<a=-1<0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



(A) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
(B) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
(D) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số bậc 3. Vì khi $x \to +\infty, y \to +\infty \Rightarrow a > 0$ (Hay phía bên phải đồ thị hàm bậc 3 đồ thị đi lên nên $a > 0$).

Xét $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên suy ra $ac < 0 \Rightarrow c > 0$. Loại đáp án **C** và **D**.

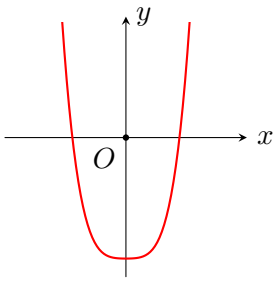
Xét $y'' = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{3a}$, dựa vào đồ thị ta thấy hoành độ của điểm uốn dương.

$\Rightarrow \dfrac{-b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$. Suy ra $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (với $ab \neq 0$).

Chọn điều kiện đúng của a, b để hàm số đã cho có dạng đồ thị như hình bên.



(A) $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

Lời giải.

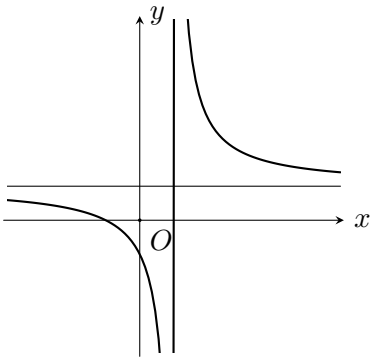
Hàm bậc 4 trùng phương có hướng quay lên thì $a > 0$.

Đồ thị chỉ có một cực trị nên phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$ chỉ có một nghiệm.

Do đó $ab > 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $ab < 0, cd < 0$.
(B) $bc > 0, ad < 0$.
(C) $ac > 0, bd > 0$.
(D) $bd < 0, ad > 0$.

Lời giải.

Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên $ad - bc < 0$, với mọi $x \neq -\dfrac{d}{c}$ nên $ad < bc$.

Mặt khác $(C) \cap Ox = A\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$ và $-\dfrac{b}{a} < 0$ nên $ab > 0$ (1) $\Rightarrow$ Loại **A**.

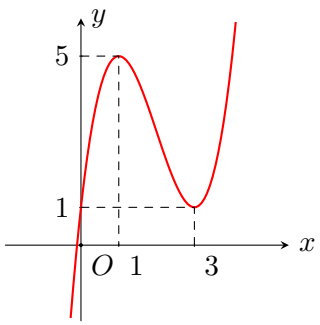
Và $(C) \cap Oy = B\left(0; \dfrac{b}{d}\right)$ và $\dfrac{b}{d} < 0$ nên $bd < 0$ (2) $\Rightarrow$ Loại **C**.

Từ (1) và (2) ta có $ad < 0 \Rightarrow$ Loại **D**.

Mặt khác, phương trình đường tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} > 0$ nên $cd < 0$. Suy ra $bc > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. (B) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

(C) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$. (D) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy nhánh cuối cùng bên phải hướng lên trên suy ra $a > 0$.

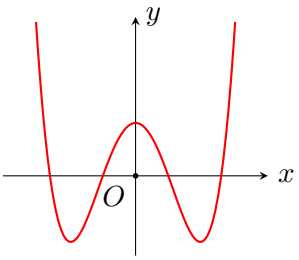
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $x = 1 \Rightarrow d = 1 > 0$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1 = 1 > 0, x_2 = 3 > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

$x_1 x_2 > 0 \Rightarrow \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$. Vậy $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



(A) $a > 0, b < 0, c < 0$. (B) $a > 0, b > 0, c > 0$.

(C) $a > 0, b < 0, c > 0$. (D) $a < 0, b > 0, c > 0$.

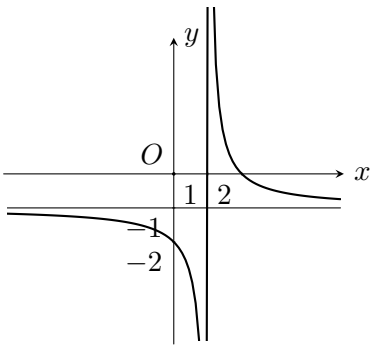
Lời giải.

Do đồ thị hàm số có ba điểm cực trị và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0, b < 0$.

Mặt khác điểm cực đại của đồ thị hàm số có tung độ dương $\Rightarrow c > 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ có đồ thị như hình bên với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$?



(A) $T = -9$. (B) $T = -7$. (C) $T = 12$. (D) $T = 10$.

Lời giải.

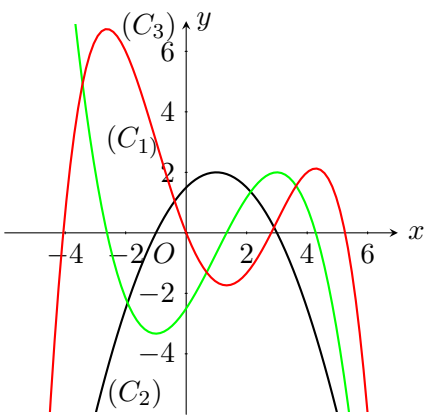
Đồ thị hàm số có $y = -1$ là tiệm cận ngang nên $a = -1$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $\dfrac{b}{c} = -2$ do đó $b = 2$.

Vậy $T = a - 3b + 2c = -1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -9$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y=f(x), y=f'(x), y=f''(x)$ lần lượt là đường cong nào trong hình bên?

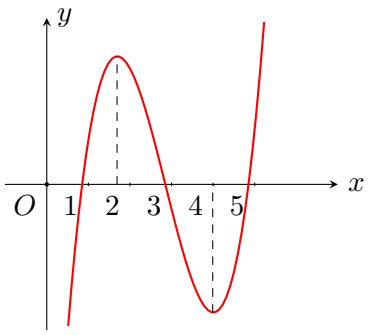


(A) $(C_3),(C_2),(C_1)$.
(B) $(C_1),(C_3),(C_2)$.
(C) $(C_3),(C_1),(C_2)$.
(D) $(C_1),(C_2),(C_3)$.

Lời giải.

Gọi hàm số của các đồ thị $(C_1),(C_2),(C_3)$ tương ứng là $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.
Ta thấy đồ thị (C_3) có các điểm cực trị là nghiệm của phương trình $f_1(x)=0$ nên hàm số $y=f_1(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=f_3(x)$.
Đồ thị (C_1) có các điểm cực trị là nghiệm của phương trình $f_2(x)=0$ nên hàm số $y=f_2(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=f_1(x)$.
Vậy đồ thị của các hàm số $y=f(x), y=f'(x), y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong $(C_3),(C_1),(C_2)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Kết luận nào sau đây là đúng?

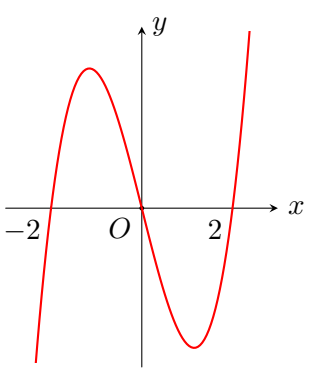


(A) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.
(B) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành..
(C) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.
(D) Hàm số $y=f(x)$ dồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Lời giải.

Vì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt nên hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. Do đó loại hai phương án **A** và **D**.
Vì trên $(-\infty;2)$ thì $f'(x)$ có thể nhận cả dấu âm và dương nên loại phương án **C**.
Vì trên $(1;3)$ thì $f'(x)$ chỉ mang dấu dương nên $y=f(x)$ dồng biến trên khoảng $(1;3)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.
(B) $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.
(C) $f(x)$ đạt cực đại tại $x=\pm 2$.
(D) $f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

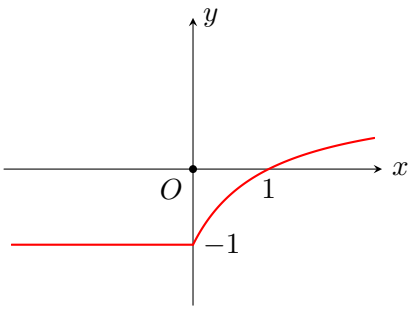
Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
Chọn đáp án (A) □

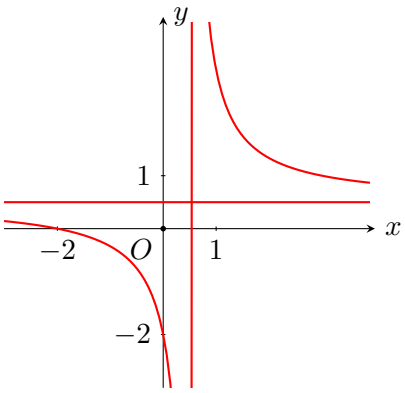
Câu 16. Hình vẽ bên là một phần của đồ thị hàm số nào?

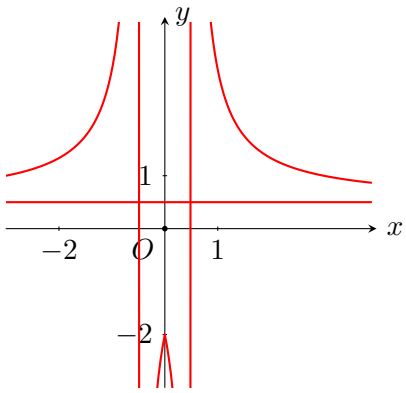


(A) $y = \dfrac{-x-1}{|x|+1}$. (B) $y = \dfrac{x-1}{|x|+1}$. (C) $y = \dfrac{x-1}{|x+1|}$. (D) $y = \dfrac{x}{|x|+1}$.

Lời giải.
Từ đồ thị, ta có tập xác định của hàm số D $= \mathbb{R}$ nên loại phương án **B**.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$ nên loại các phương án **C**, **D**.
Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ lần lượt là đường cong nào trong hình bên?

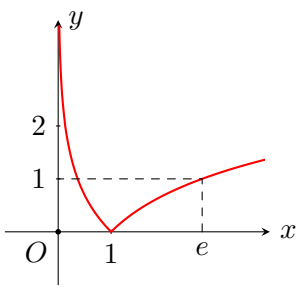




(A) $y = \dfrac{x+2}{|2x-1|}$. (B) $y = \dfrac{|x+2|}{2x-1}$. (C) $y = \dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$. (D) $y = \left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right|$.

Lời giải.
Sử dụng cách suy đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ từ đồ thị $y = f(x)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = \ln(x+1) - \ln 2$. (B) $y = |\ln x|$.
(C) $y = \ln|x+1| - \ln 2$. (D) $y = \ln|x|$.

Lời giải.

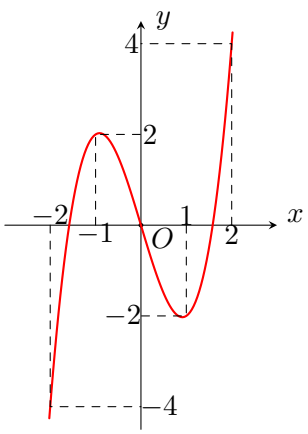
Ta có $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ -\ln x, & x < 1. \end{cases}$

Các số a, b, c có hai giá trị dương.

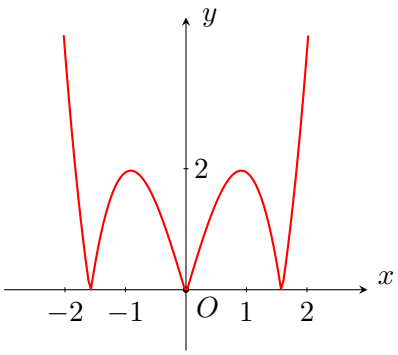
Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Các giá trị của tham số để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm thực phân biệt là

A $0 < m < 2$. B $m < 0$. C $m > 0$. D $0 \leq m \leq 2$.



Lời giải.

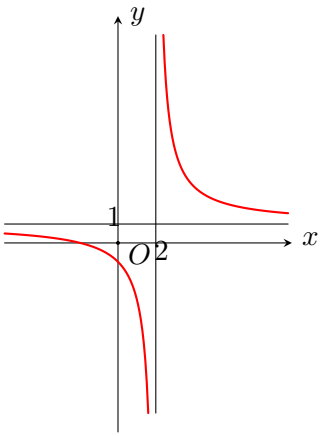


Từ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ ta có phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $y' < 0, \forall x \neq 2$. B $y' < 0, \forall x \neq 1$. C $y' > 0, \forall x \neq 2$. D $y' > 0, \forall x \neq 1$.

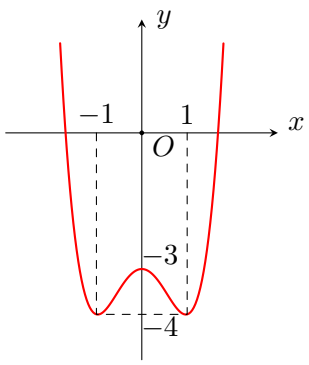


Lời giải.

Hàm số giảm trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên $y' < 0, \forall x \neq 2$.

Chọn đáp án A □

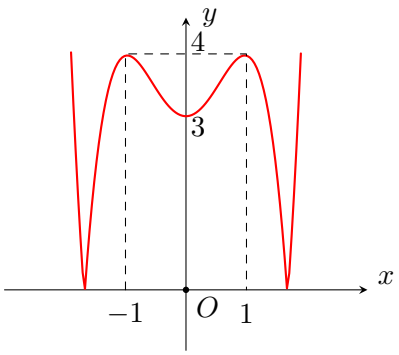
Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có 6 nghiệm phân biệt.



(A) $3<m<4$. (B) $0<m<3$. (C) $-4<m<-3$. (D) $0<m<4$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra được đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như hình bên dưới.



Dựa vào đồ thị suy ra để phương trình $y=|f(x)|$ có 6 nghiệm phân biệt thì $3<m<4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho đồ thị (C) có phương trình $y=\dfrac{x+2}{x-1}$, biết rằng ĐTHS $y=f(x)$ đối xứng với (C) qua trục tung. Khi đó $f(x)$ là

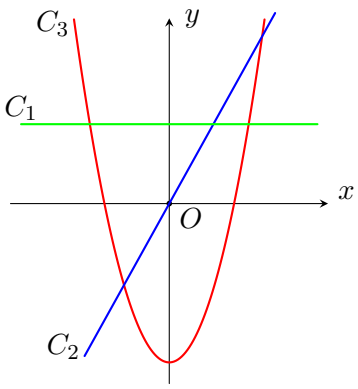
(A) $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. (B) $y=-\dfrac{x+2}{x-1}$. (C) $y=-\dfrac{x-2}{x+1}$. (D) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)\in f(x)\Rightarrow N(-x;y)\in(C)$, ta có $y=\dfrac{-x+2}{-x-1}=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x), y=f'(x), y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x), y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



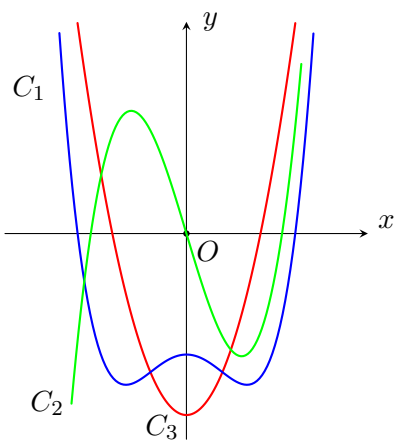
(A) $(C_3);(C_2);(C_1)$. (B) $(C_2);(C_1);(C_3)$.
(C) $(C_2);(C_3);(C_1)$. (D) $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Lời giải.

Trong khoảng $(0;+\infty)$ thì (C_2) nằm trên trục hoành và (C_3) "đi lên".
Trong khoảng $(-\infty;0)$ thì (C_2) nằm dưới trục hoành và (C_3) "đi xuống".
Đồ thị (C_1) nằm hoàn toàn trên trục hoành và (C_2) "đi lên".
Hoặc:
Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 1 điểm là điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_3).
Đồ thị (C_2) đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà đồ thị (C_1) lại nằm hoàn toàn trên trục hoành.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x), y=f'(x), y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x), y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

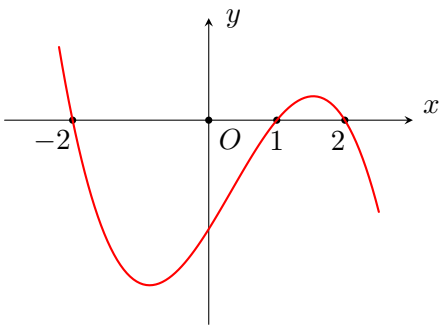


A $(C_3);(C_2);(C_1)$. B $(C_2);(C_1);(C_3)$.
C $(C_2);(C_3);(C_1)$. D $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 3 điểm là 3 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_1).
Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2).
Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?

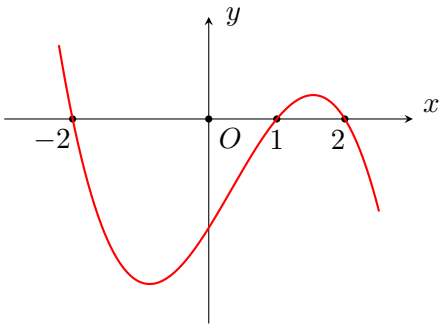


A 3. B 4. C 5. D Vô số.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)
$\Rightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương
$\Rightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị
$\Rightarrow f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). Chọn D.
Chú ý: Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.
Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.
Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?



A 2. B 3. C 4. D Vô số.

Lời giải.

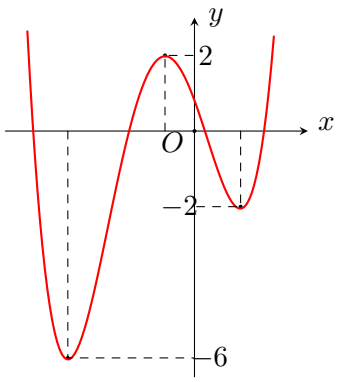
Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).
Từ bảng biến thiên của $f(x)$, suy ra $f(x+m)$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f(x)$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn.
Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\Rightarrow m < 1$.
Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\Rightarrow m \geq -2$.
Suy ra $-2 \leq m < 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x+2018) + m^2|$ có 5 điểm cực trị khi

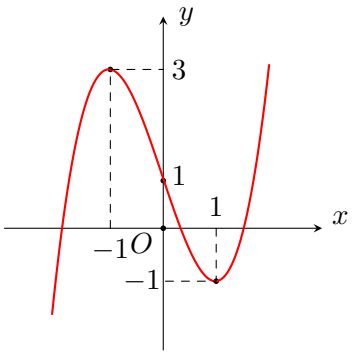
(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 6.



Lời giải.
Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018) + m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m^2$ với trục hoành là 2.
Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m^2$ với trục hoành là 2, ta cần
Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\Rightarrow m^2 \leq -2$ (vô lý)
Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị
$\Rightarrow 2 \leq m^2 < 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \leq m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \leq -\sqrt{2} \end{array}\right.$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; 2\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

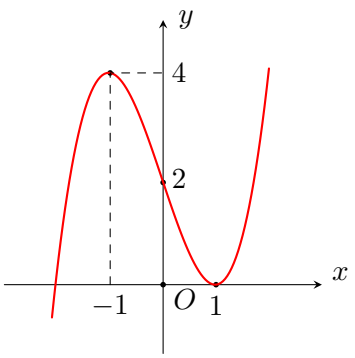
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 5.



Lời giải.
Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình bên dưới Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\Rightarrow f(|x+m|)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.



(A) $m < -1$. (B) $m > -1$. (C) $m > 1$. (D) $m < 1$.

Lời giải.

Cách 1 .

Nhận xét: Hàm $g(x) = f(|x| + m)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục $Oy \Rightarrow x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x}{|x|} \cdot f'(|x| + m)$ với $x = 0$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x| + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| + m = 1 \\ |x| + m = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 1 - m \\ |x| = -1 - m \end{array}\right. \quad (*)$$

Đề hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -1 - m > 0 \\ 1 - m \neq -1 - m \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Cách 2 .

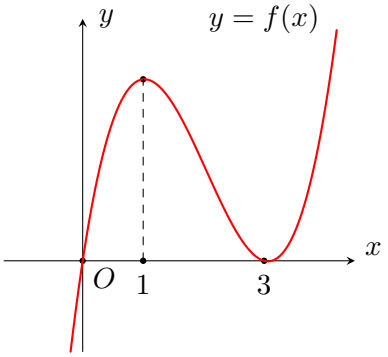
Đồ thị hàm số $f(|x| + m)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Để hàm số $f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x + m)$ có 2 điểm cực trị dương.

Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị $\Rightarrow m < -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



(A) $m > \dfrac{1}{4}$. (B) $m \geq \dfrac{1}{4}$. (C) $m < 1$. (D) $m \leq 1$.

Lời giải.

Xét $g(x) = f^2(x) + f(x) + m \Rightarrow g'(x) = f'(x)[2f(x) + 1]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 2f(x) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = a \ (a < 0) \end{cases}. \text{ Ta tính được } \begin{cases} g(1) = f^2(1) + f(1) + m > m \\ g(3) = m \\ g(a) = m - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|=\left|\left[f(x)+\dfrac{1}{2}\right]^2+m-\dfrac{1}{4}\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc) $\Rightarrow m\geq\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (với a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	$\nearrow$	1

Xét bốn phát biểu sau: (1) $c>1$; (2) $a+b<0$; (3) $a+b+c=0$; (4) $a>0$.

Số phát biểu đúng trong bốn phát biểu đã nêu là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Đồ thị $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=1$.

Hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ đồng biến trên các khoảng xác định. Suy ra

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}y=1\\ y'=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}>0, x\neq-\dfrac{b}{c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+c=0\\ \dfrac{a}{b}=1\\ ac-b>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=-2b\\ -2b^2-b>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=-2b\\ -\dfrac{1}{2}<b<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}<b<0\Rightarrow0<-b<\dfrac{1}{2}\\ a=b\Rightarrow a+b<0\\ c=-2b\Rightarrow a+b+c=0\\ c<1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ (2), (3) đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-5}{bx+c},(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\|$	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-2

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

A 0. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax-5}{bx+c}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a-\dfrac{5}{x}}{b+\dfrac{c}{x}}=\dfrac{a}{b}=-2\Rightarrow a=-2b.$ (1)

Theo bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$ nên suy ra $-\dfrac{c}{b}=-2\Leftrightarrow c=2b.$ (2)

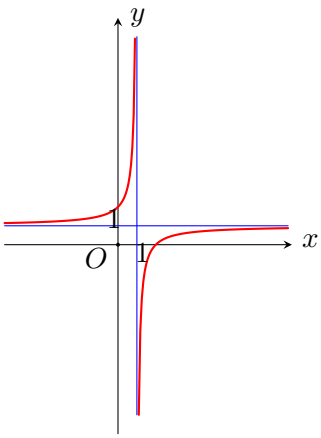
Mặt khác hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $y'=\dfrac{ac+5b}{(bx+c)^2}>0$ hay $ac+5b>0.$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta có $-4b^2+5b>0\Leftrightarrow 0<b<\dfrac{5}{4}$. Từ đó ta có $c>0, a<0.$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-1},(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ: Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A 1. B 2. C 3. D 0.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ có các tính chất

Đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}\Rightarrow\dfrac{a}{c}=1\Rightarrow a=c.$

Đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{c}\Rightarrow\dfrac{1}{c}=1\Rightarrow c=1.$

Cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=-b\Rightarrow -b>0\Rightarrow b<0.$

Vậy có $a,c>0$ và $b<0$ tức là trong các số a,b,c có hai giá trị dương.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. A	5. A	6. C	7. B	8. D	9. B	10. B
11. C	12. A	13. C	14. D	15. A	16. B	17. C	18. B	19. A	20. A

21. A	22. D	23. A	24. D	25. D	26. B	27. B	28. C	29. A	30. B
31. C	32. B	33. B							

CHỦ ĐỀ 6. TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

1. Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

Phương pháp

Cho 2 hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x)=g(x)$. $(*)$
- Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
- Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của (C) và (C').

2. Tương giao của đồ thị hàm bậc 3

Phương pháp

a) Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)

- Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x,m)=0$ (phương trình ẩn x tham số m).
- Cô lập m đưa phương trình về dạng $m=f(x)$.
- Lập bảng biến thiên cho hàm số $y=f(x)$.
- Dựa và giả thiết và bảng biến thiên từ đó suy ra m.

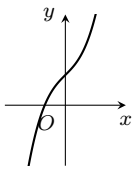
Dấu hiệu: Sử dụng phương pháp bảng biến thiên khi m độc lập với x.

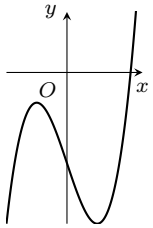
b) Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2

- Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$.
- Nhẩm nghiệm (Khử tham số). Giả sử $x=x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
- Phân tích $F(x,m)=0 \Leftrightarrow (x-x_0)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=0. \end{array}\right.$ ($g(x)=0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m).
- Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc hai $g(x)=0$.

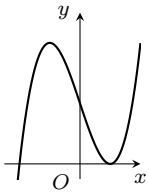
c) Phương pháp 3: Cực trị

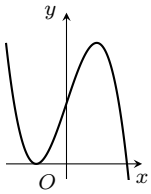
- Nhận dạng: Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.
- Quy tắc
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$. (1).
    Xét hàm số $y=F(x,m)$.
  - Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
    - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$.
    - Hoặc hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{\text{CĐ}}\cdot y_{\text{CT}}>0$.



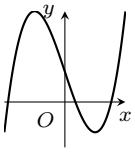


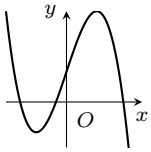
- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{\text{CĐ}} \cdot y_{\text{CT}} = 0$ (tham khảo hình vẽ).





- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{\text{CĐ}} \cdot y_{\text{CT}} < 0$ (tham khảo hình vẽ).





3. Tương giao của hàm số phân thức

a) Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d\colon y = px + q$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d\colon \dfrac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x,m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

b) Các câu hỏi thường gặp.

- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và thỏa mãn $-\dfrac{d}{c} < x_1 < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\dfrac{d}{c}$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{d}{c} < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước
  - Đoạn thẳng $AB = kS$.
  - Tam giác ABC vuông.
  - Tam giác ABC có diện tích S_0.

c) Quy tắc.

- Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.
- Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi-ét).
- Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

d) Công thức khoảng cách.

- $A\left(x_A; y_A\right), B\left(x_B; y_B\right)$ khi đó $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.
- $\begin{cases} M\left(x_0; y_0\right) \\ \Delta\colon Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}\left(M, \Delta\right) = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

4. Tương giao của hàm số bậc 4

a) Nghiệm của phương trình bậc bốn trùng phương $ax^4+bx^2+c=0$. (1)

b) Nhẩm nghiệm

- Nhẩm nghiệm: Giả sử $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.
- Khi đó ta phân tích: $f(x,m)=\left(x^2-x_0^2\right)g(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm x_0\\g(x)=0.\end{cases}$
- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g(x)=0$.

c) Ẩn phụ - tam thức bậc 2

- Đặt $t=x^2,\ (t\geq 0)$. Phương trình (1) trở thành $at^2+bt+c=0$. (2)
- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1;t_2$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}t_1<0=t_2\\t_1=t_2=0.\end{array}\right.$
- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1;t_2$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}t_1<0<t_2\\0<t_1=t_2.\end{array}\right.$
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1;t_2$ thỏa mãn $0=t_1<t_2$.
- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1;t_2$ thỏa mãn $0<t_1<t_2$.

d) Bài toán: tìm m để $(C)\colon y=ax^4+bx^2+c$ cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

- Phương trình hoành độ giao điểm $ax^4+bx^2+c=0$. (1)
- Đặt $t=x^2,\ (t\geq 0)$. Phương trình $at^2+bt+c=0$. (2)
- Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1<t_2$ thỏa mãn $t_2=9t_1$.
- Kết hợp $t_2=9t_1$ với định lý Vi–ét tìm được m.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm phân biệt M,N thỏa mãn tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $m\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)$. (B) $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. (C) $m\in\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$. (D) $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Lời giải.

Gọi $d\colon y=m+1$ và $(C)\colon y=x^4-3x^2-2$.

Phương trình tương giao $x^4-3x^2-2=m+1\Leftrightarrow x^4-3x^2-m-3=0$. (1)

Đặt $t=x^2\geq 0$, phương trình (1) trở thành $t^2-3t-m-3=0$. (2)

Phương trình (2) có tích $a\cdot c=-m-3<0$ khi m là số thực dương.

Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm trái dấu $t_1<0<t_2$.

Từ đó suy ra phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1=-\sqrt{t_2};x_2=\sqrt{t_2}$. Khi đó d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua Oy là $M\left(-\sqrt{t_2};m+1\right)$, $N\left(\sqrt{t_2},m+1\right)$.

Mặt khác tam giác OMN vuông tại O thì $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0\Leftrightarrow t_2=(m+1)^2$.

Thay $t_2=(m+1)^2$ vào phương trình (2) ta được

$$(m+1)^4-3(m+1)^2-m-3=0\Leftrightarrow(m+1)^4-3(m+1)^2-(m+1)-2=0.$$

Đặt $a=m+1>1$ ta được phương trình

$$a^4-3a^2-a-2=0\Leftrightarrow(a-2)\cdot(a^3+2a^2+a+1)=0\Leftrightarrow a=2(\text{do}a>1\text{nên}a^3+2a^2+a+1>0).$$

Từ đó ta được $m+1=2 \Leftrightarrow m=1$.
Chọn đáp án D □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)+1=m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.
A $(-4;2)$. B $(-\infty;2]$. C $[-4;2)$. D $(-3;3)$.

Lời giải.
Phương trình $f(x)+1=m \Leftrightarrow f(x)=m-1$ có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.
Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta được $-4<m-1<2 \Leftrightarrow -3<m<3$.
Vậy $m \in (-3;3)$.
Chọn đáp án D □

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng
A $\dfrac{9}{2}$. B $\dfrac{9}{5}$. C $\dfrac{9}{4}$. D $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải.
Phương trình hoàn độ giao điểm của $y=x^3+3x^2+mx+1$ và $y=1$ là

$$x^3+3x^2+mx+1=1 \Leftrightarrow x(x^2+6x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+6x+m=0. \quad (*) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, $B(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m<\dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_1 \cdot x_2=m. \end{cases}$
Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau thì
$f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow \left(3x_1^2+6x_1+m\right)\cdot\left(3x_2^2+6x_2+m\right)=-1$
$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2+18x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+3m\left(x_1^2+x_2^2\right)+6m\left(x_1+x_2\right)+36x_1x_2+m^2+1=0$

$$\Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{9+\sqrt{65}}{8} \\ m=\dfrac{9-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow S=\frac{9+\sqrt{65}}{8}+\frac{9-\sqrt{65}}{8}=\frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}$, (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm m để đường thẳng $d\colon y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $m = -1$. (B) $m = 0$. (C) $m = -2$. (D) $m = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\dfrac{x}{1-x} = mx - m - 1$ (đk $x \neq 1$)

$\Rightarrow x = (1-x)(mx - m - 1) \Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0.$ $(*)$

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N thì $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m+1) = -m > 0 \quad \Leftrightarrow m < 0. \\ m - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$. Theo hệ thức viét $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m+1}{m}$.

Suy ra $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m - 2 = 2m - 2m - 2 = -2$

và $y_1 \cdot y_2 = (mx_1 - m - 1)(mx_2 - m - 1) = m^2 x_1 x_2 - m(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2$

$= m(m+1) - 2m(m+1) + (m+1)^2 = m + 1.$

Ta có

$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 &= (x_1+1)^2 + (y_1-1)^2 + (x_2+1)^2 + (y_2-1)^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2)^2 - 2(x_1+1)(x_2+1) + (y_1 + y_2 - 2)^2 - 2(y_1-1)(y_2-1) \\ &= (x_1 + x_2 + 2)^2 - 2(x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1) + (y_1 + y_2 - 2)^2 - 2(y_1y_2 - (y_1 + y_2) + 1) \\ &= (2+2)^2 - 2\left(\frac{m+1}{m} + 2 + 1\right) + (-2-2)^2 - 2(m + 1 - (-2) + 1) \\ &= 18 - 2\left(\frac{m+1}{m}\right) - 2m = 18 - 2 - 2 \cdot \frac{1}{m} - 2m = 16 + 2 \cdot \left[\frac{1}{-m} + (-m)\right] \\ &\geq 16 + 2 \cdot 2 = 20. \end{aligned}$$

Suy ra $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 20 khi $\dfrac{1}{-m} = -m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy $m = -1$ (vì $m < 0$)

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Vì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt nên đường thẳng d là đường thẳng có hệ số góc dạng $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $x^4 - 2x^2 = ax + b$.

Mà phương trình là phương trình bậc 4 nên phương trình muốn có 3 nghiệm phân biệt thì trong đó sẽ có 1 nghiệm kép gọi là x_1, hai nghiệm còn lại là x_2, x_3.

Suy ra đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C), không mất tính tổng quát giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại x_1.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_1, d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_2, x_3 (\neq x_1)$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

Ta có $d\colon y = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$x^4 - 2x^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_1)^2(x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ f(x) = x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$ thì phương trình $f(x)=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_2, x_3 khác x_1 và thỏa mãn định lí Vi–ét $\begin{cases} x_2+x_3=-2x_1 \\ x_2\cdot x_3=3x_1^2-2 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} \Delta'=x_1^2-3x_1^2+2>0 \\ {x_1}^2+2x_1^2+3x_1^2-2\neq 0 \\ {x_1}^3+(x_2+x_3)^3-3x_2x_3(x_2+x_3)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x_1<1 \\ 3x_1^2-1\neq 0 \\ {x_1}^3+(-2x_1)^3-3(3x_1^2-2).(-2x_1)=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1=\dfrac{-11+\sqrt{165}}{22}$.

Vậy có đúng 1 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 6. Có bao nhiêu số thực của tham số m để đường thẳng $y=(m-6)x-4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x-1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $\dfrac{1}{y_1+4}+\dfrac{1}{y_2+4}+\dfrac{1}{y_3+4}=\dfrac{2}{3}$.

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm bậc ba đã cho là

$$x^3+x^2-3x-1=(m-6)x-4\Leftrightarrow x^3+x^2+(3-m)x+3=0. \quad (1)$$

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình (1).

Theo hệ thức viet đối với phương trình bậc ba ta có $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3-m \\ x_1x_2x_3=-3 \end{cases}$.

Nhận thấy tung độ của ba giao điểm thỏa mãn phương trình$y=(m-6)x-4$ nên ta có được

$$y_1+4=(m-6)x_1, y_2+4=(m-6)x_2 \text{và} y_3+4=(m-6)x_3.$$

Khi đó $\dfrac{1}{y_1+4}+\dfrac{1}{y_2+4}+\dfrac{1}{y_3+4}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow \dfrac{1}{(m-6)x_1}+\dfrac{1}{(m-6)x_2}+\dfrac{1}{(m-6)x_3}=\dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{1}{m-6}\cdot\dfrac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow \dfrac{1}{m-6}.\dfrac{3-m}{-3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow m=9.$

Thử lại với $m=9$ suy ra phương trình hoành độ giao điểm $x^3+x^2-6x+3=0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn giả thiết cho (Dùng casio để kiểm tra). Vậy có một số thực m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 7. Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m và n. Tính $S=m^2+n^2$.

(A) $S=0$. (B) $S=1$. (C) $S=2$. (D) $S=3$.

Lời giải.

Do đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại điểm có hoành độ 0 nên phương trình đường thẳng có dạng $y=ax$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=ax$ với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ là

$$x^4-2x^2=ax\Leftrightarrow x^4-2x^2-ax=0\Leftrightarrow x(x^3-2x-a)=0$$

Do phương trình có 4 nghiệm là 0, 1, m, n nên ta có

$x(x^3-2x-a)=x(x-1)(x-m)(x-n) \Rightarrow x^3-2x-a=(x^2-mx-x+m)(x-n)$

$\Leftrightarrow x^3-2x-a=x^3-nx^2-mx^2+mnx-x^2+nx+mx-mn$

$\Leftrightarrow x^3-2x-a=x^3+(-n-m-1)x^2+(m+n+mn)x-mn$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-n-1=0 \\ m+n+mn=-2 \\ -mn=-a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n=-1 \\ mn=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow S=m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=3.$

Chọn đáp án D □

Ví dụ 8. Cho phương trình $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A 19. B 18. C 17. D 20.

Lời giải.

Ta có

$\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0 \Leftrightarrow \left[\left(x^2-3x+m\right)^2-x^2\right]+\left(2x^2-8x+2m\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-2x+m\right)+2\left(x^2-4x+m\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-2x+m+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+m=0 \quad (1) \\ x^2-2x+m+2=0. \quad (2) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1'>0 \\ \Delta_2'>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ 1-m-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m<-1. \end{cases}$

Giả sử phương trình (1) và (2) có nghiệm x_0 trùng nhau.

Suy ra hệ $\begin{cases} x^2-4x+m=0 \quad (1) \\ x^2-2x+m+2=0 \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm

$\Rightarrow x_0^2-4x_0+m-\left(x_0^2-2x_0+m+2\right)=0 \Leftrightarrow x_0=-1.$

Với $x_0=-1$ thay vào (1) ta được $m=-5$.

Với $m \neq -5$ phương trình (1) và (2) không có nghiệm trùng nhau.

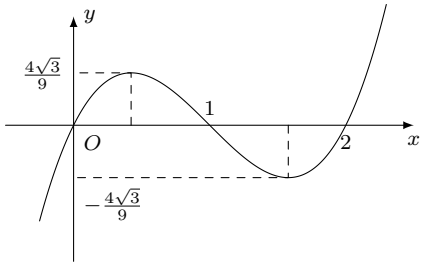
Kết hợp m là số nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ suy ra $m \in \{-20;-19;\ldots;-6;-4;-3;-2\}$.

Vậy có 18 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

ĐỀ VDC SỐ 1: BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-|x^2-1|\right|\right)=\dfrac{1}{2021}$ là



(A) 24. (B) 14. (C) 12. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $y=g(x)=f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-|x^2-1|\right|\right)$ với $g(x)=\dfrac{1}{2021}$.

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}$, $\forall x\in[-2;2]$ thì suy ra $y=g(t)=f\left(\left|t-|t^2-3|\right|\right)$, $\forall t\in[0;2]$.

Suy ra: $h(t)=t-|t^2-3|=\begin{cases}t^2+t-3, & t\in[0;\sqrt{3}]\\ -t^2+t+3, & t\in[\sqrt{3};2].\end{cases}$

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ.

t	0		$\sqrt{3}$		2
$h'(t)$		$+$		$-$	
$h(t)$	-3	↗	$\sqrt{3}$	↘	1

Đặt $u=\left|t-|t^2-3|\right|$thì ta cũng có BBT của u như sau

x	-2				0				2
t	0				2				0
$t-\lvert t^2-3\rvert$	-3		$\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		-3
$\lvert t-\lvert t^2-3\rvert\rvert$	3	↘		↗	$\sqrt{3}$	↘		↗	$\sqrt{3}$
			0				1		

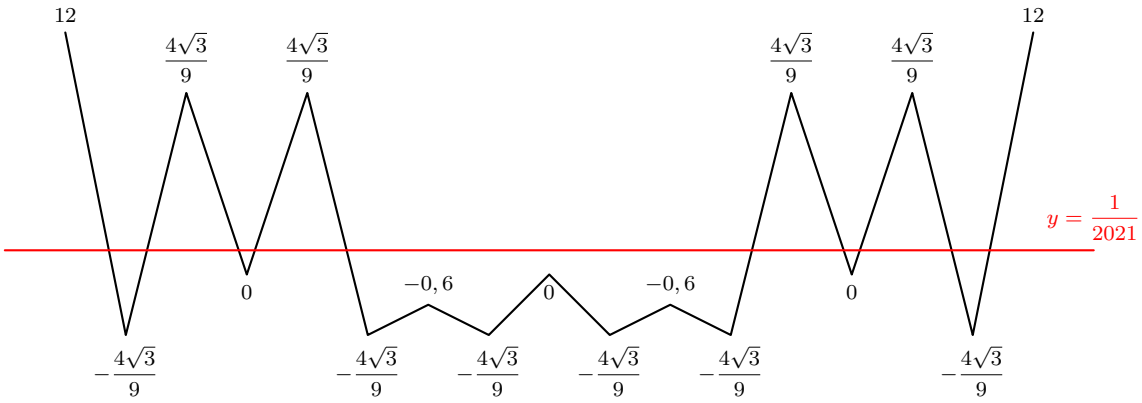
Nhìn vào đồ thị $y=f(x)$ trên ta có được phương trình $f(x)=ax(x-1)(x-2)$.

Hàm số có hai điểm cực trị lần lượt là $x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$.

Từ $f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\Rightarrow a=2$. Suy ra $f(x)=2x(x-1)(x-2)$.

Như vậy $f(3)=4$, $f\left(\sqrt{3}\right)\approx-0.6$, $f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

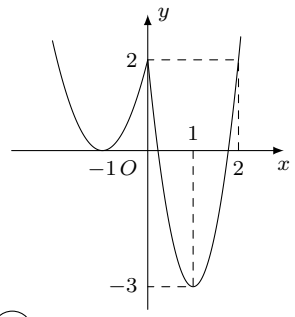
Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y=f(u)$ với $u=\left|t-|t^2-3|\right|$ như sau



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x) = \dfrac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hai hàm số $u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x)) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



(A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$, khi đó $u'(x) = \dfrac{3-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$. Cho $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có BBT của $u(x)$

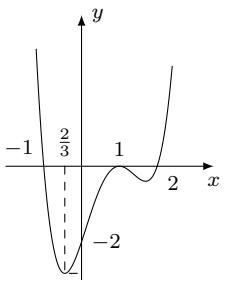
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	-1	↗	2	↘	1

Dựa vào BBT, ta suy ra $u(x) \in (-1;2]$.
Đặt $t = u(x)$, phương trình $f(u(x)) = m$ trở thành $f(t) = m$, với $t \in (-1;2]$.
Dựa vào đồ thị đã cho, ta có

- Khi $m = 2$, phương trình $f(t) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$ ⇒ phương trình $f(u(x)) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.
- Khi $m = 1$, phương trình $f(t) = 1$ có 3 nghiệm $t_1 \in (-1;0)$, $t_2 \in (0,1)$ và $t_3 \in (1;2)$ ⇒ phương trình $f(u(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.
- Khi $m \in \{0;-1;-2\}$, phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm $t_1 \in (0;1)$ và $t_2 \in (1;2)$ ⇒ phương trình $f(u(x)) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Khi $m = -3$, phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t = 1$ ⇒ phương trình $f(u(x)) = m$ có 1 nghiệm.

Vậy $m \in \{0;-1;-2\}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(f'(x)-1)$, gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

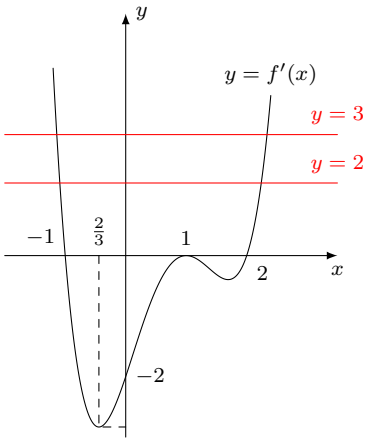


(A) 8. (B) 6. (C) 10. (D) 9.

Lời giải.

Ta có $g(x)=f\left(f'(x)-1\right)\Rightarrow g'(x)=f''(x)\cdot f'\left(f'(x)-1\right)$.

Phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f''(x)=0\\ f'\left(f'(x)-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f''(x)=0\\ f'(x)-1=-1\\ f'(x)-1=1\\ f'(x)-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f''(x)=0\\ f'(x)=0\\ f'(x)=2\\ f'(x)=3.\end{array}\right.$



Dựa vào đồ thị, ta thấy $y=f'(x)$ đạt cực trị tại $x=1$, $x=-\dfrac{2}{3}$ và $x=x_0\in(1;2)$.

Do đó phương trình $f''(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f'(x)=0$ ta thấy có 3 nghiệm $x=-1$, $x=1$ và $x=2$.

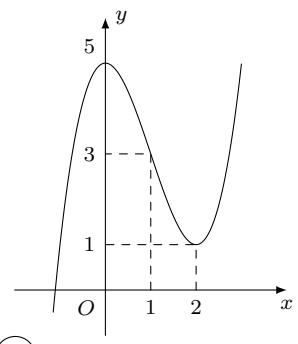
Phương trình $f'(x)=2$ ta thấy có 2 nghiệm $x=x_1\in(-\infty;-1)$ và $x=x_2\in(2;+\infty)$.

Phương trình $f'(x)=3$ ta thấy có 2 nghiệm $x=x_1\in(-\infty;-1)$ và $x=x_2\in(2;+\infty)$.

Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có tất cả là 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm?



(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}-1\le\sin x\le 1\\ -1\le\cos x\le 1\end{cases}\Rightarrow 2\cos x-\sin x+4>0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\Rightarrow(2t+1)\cos x-(t+3)\sin x=-(4t+1)$.

Phương trình trên có nghiệm khi $(2t+1)^2+(t+3)^2 \geq (4t+1)^2 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{11} \leq t \leq 1 \Rightarrow 2 \leq |t|+2 \leq 3$.
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[2;3]$ nên phương trình

$$f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right) \text{ hay phương trình } f\left(|t|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$$

có nghiệm khi và chỉ khi phương trình

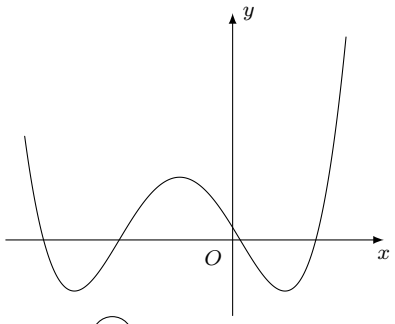
$$|t|+2=\sqrt{(m+2)^2+4} \text{ có nghiệm } t \text{ thỏa mãn điều kiện } 2 \leq |t|+2 \leq 3.$$

Suy ra

$$2 \leq \sqrt{(m+2)^2+4} \leq 3 \Leftrightarrow m^2+4m-1 \leq 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{5} \leq m \leq 2+\sqrt{5}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hai hàm số $y=f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2$ và $y=2021^x$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là



A 1. B 0. C 2. D 4.

Lời giải.
Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình

$$f''(x)\cdot f(x)-\left[f'(x)\right]^2=2021^x \ (*)$$

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4.
Khi đó phương trình $f(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4.
Suy ra $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.
Nếu $f(x)=0$ thay vào phương trình (*) ta thấy vế trái âm, vế phải dương nên phương trình vô nghiệm.
Nếu $f(x)\neq 0$ thì ta có phương trình (*) tương đương với

$$\frac{f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=\frac{2021^x}{[f(x)]^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{2021^x}{[f(x)]^2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& f(x) &&= a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\\
\Rightarrow\ & f'(x) &&= a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]\\
\Rightarrow\ & f'(x) &&= f(x)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]\\
\Rightarrow\ & \frac{f'(x)}{f(x)} &&= \frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\\
\Rightarrow\ & \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' &&= -\left(\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\frac{1}{(x-x_3)^2}+\frac{1}{(x-x_4)^2}\right)<0.
\end{aligned}$$

Mà $\dfrac{2021^x}{[f(x)]^2}>0$ nên phương trình $\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\dfrac{2021^x}{[f(x)]^2}$ vô nghiệm.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Biết hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2021$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt?

(A) 4037. (B) 2019. (C) 4001. (D) 2021.

Lời giải.

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Do hàm số có hai điểm cực trị là $x_1=1$ và $x_2=2021$ nên $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}=2022 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}=2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3033a \\ c=6063a. \end{cases}$

Xét phương trình $f(x)=f(m)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & a(x^3-m^3)+b(x^2-m^2)+c(x-m) &&= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a(x^3-m^3)-3033a(x^2-m^2)+6063a(x-m) &&= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-m)\left(x^2+mx+m^2-3033x-3033m+6063\right) &&= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2+mx+m^2-3033x-3033m+6063=0 \quad (*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

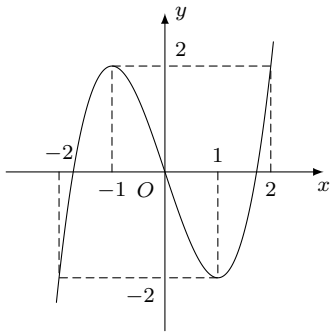
Để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác m

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \Delta=(m-3033)^2-4(m^2-3033m+6063)>0 \\ m^2+(m-3033)m+m^2-3033m+6063\neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} m^2-6066m+3033^2-4m^2+12132m-24252>0 \\ m^2+(m-3033)m+m^2-3033m+6063\neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -1009<m<3031 \\ m\neq 2021;\ m\neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có tất cả là 4037 giá trị nguyên.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số mđể phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?



(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0,1)$.

Từ đồ thị suy ra $f(t)\in(-2;0)$ nên $4+2f(t)\in(0;4) \Rightarrow u=\sqrt{4+2f(t)}\in(0;2)$.

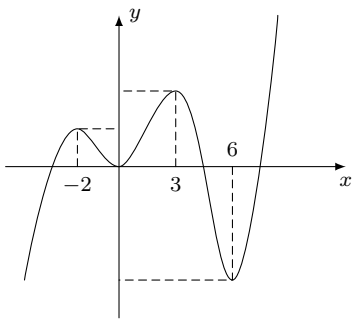
Ta có $f(u)=m$ với $u\in(0;2)$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(u)=m$ có nghiệm $u\in(0;2) \Leftrightarrow -2\le m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$. Suy ra có 4 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = \dfrac{1}{2}m - 5$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(2x^3 - 6x + 2)$, $g'(x) = (6x^2 - 6) \cdot f'(2x^3 - 6x + 2)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^2 - 6 = 0 \\ f'(2x^3 - 6x + 2) = 0. \end{array}\right.$

Giải $6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Giải $f'(2x^3 - 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3 - 6x + 2 = -2 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 0 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 3 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin [-1; 2] \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \approx -1,87 \notin [-1; 2] \\ x \approx 0,34 \\ x \approx 1,53 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \approx -1,64 \notin [-1; 2] \\ x \approx -0,16 \\ x \approx 1,81 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 2. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

x	-1		$-0{,}16$		$0{,}34$		1		$1{,}53$		$1{,}81$		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$-\frac{13}{4}$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$\frac{7}{2}$	↘	$-\frac{13}{4}$

$y = \frac{1}{2}m - 5$

Số nghiệm của phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = \dfrac{1}{2}m - 5$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x) = f(2x^3 - 6x + 2)$ và đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}m - 5$.

Kẻ đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}m - 5$ trên cùng bảng biến thiên của $g(x)$, điều kiện để $y = \dfrac{1}{2}m - 5$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt là $0 < \dfrac{1}{2}m - 5 < 2 \Leftrightarrow 10 < m < 14$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{11; 12; 13\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $|f(f(x))| = 2$ là

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

(A) 4. (B) 5. (C) 9. (D) 7.

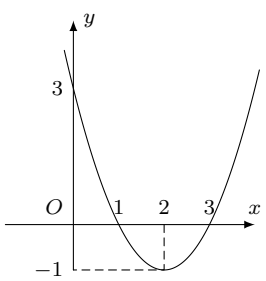
Lời giải.

Ta có $|f\left(f(x)\right)| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(f(x)\right) = 2 \\ f\left(f(x)\right) = -2 \end{array}\right.$. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- $f\left(f(x)\right) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = a < -4 & \text{(vô nghiệm)} \\ f(x) = b > 3 & \text{(có hai nghiệm).} \end{array}\right.$
- $f\left(f(x)\right) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = -4 & \text{(có một nghiệm)} \\ f(x) = d \in (1;3) & \text{(có hai nghiệm)} \\ f(x) = e > 3 & \text{(có hai nghiệm).} \end{array}\right.$

Vậy phương trình $|f\left(f(x)\right)| = 2$ có 7 nghiệm.
Chọn đáp án (D) □

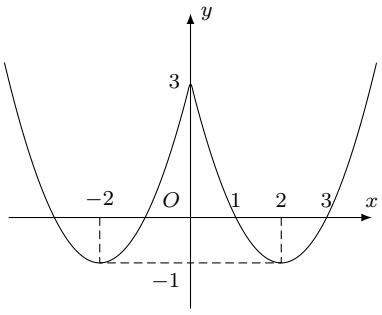
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m - 3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?



(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3 - m. \end{array}\right.$
Từ đồ thị hàm số $f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình

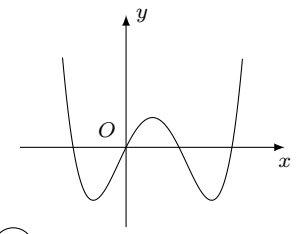


Với $f(|x|) = -1$, phương trình có hai nghiệm.
Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt, tức là phương trình $f(|x|) = 3 - m$ có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < 3 - m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1;2;3\}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Biết đồ thị hàm số bậc bốn $y = f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục hoành.



(A) 4. (B) 0. (C) 6. (D) 2.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = g(x)$ và Ox là

$$[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 0.$$

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4.
Giả sử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, với $a \neq 0$ và $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Ta có $f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\left(\dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3} + \dfrac{1}{x - x_4}\right)$.
Suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3} + \dfrac{1}{x - x_4}$.
Khi đó

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{(x - x_2)^2} - \frac{1}{(x - x_3)^2} - \frac{1}{(x - x_4)^2} = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy số giao điểm của của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và trục hoành bằng 0.
Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $xf(x) - \dfrac{1 + \sqrt{4x + m - 1}}{f(-1 - \sqrt{4x + m - 1})} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

(A) 2. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Suy ra hàm số $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác ta lại có $f(-x) = -x + \sqrt{1 + x^2} = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{1}{f(x)}$.
Nên ta suy ra

$$\begin{aligned} & xf(x) - \frac{1 + \sqrt{4x + m - 1}}{f(-1 - \sqrt{4x + m - 1})} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & xf(x) - (1 + \sqrt{4x + m - 1})f(1 + \sqrt{4x + m - 1}) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & xf(x) = (1 + \sqrt{4x + m - 1})f(1 + \sqrt{4x + m - 1}). \end{aligned}$$

Xét hàm đặc trưng $g(t) = tf(t) = t^2 + t\sqrt{t^2 + 1}$.
Có $g'(t) = 2t + \sqrt{t^2 + 1} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$, với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên suy ra $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Suy ra $g(x) = g(1 + \sqrt{4x + m - 1})$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & x = 1 + \sqrt{4x + m - 1} \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{4x + m - 1} = x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 4x + m - 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x \geq 1 \\ m = x^2 - 6x + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hàm số $y = p(x) = x^2 - 6x + 2$, $x \geq 1 \Rightarrow p'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
Ta có bảng biến thiên như sau

x	1		3		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (-7; -3]$.
Có tất cả 4 giá trị nguyên thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2020; 2021]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [2020;\ 2021]$?

(A) 2023. (B) 2022. (C) 2021. (D) 2020.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & f(x) \geq 0,\ \forall x \in [2020; 2021] \\ \Leftrightarrow\ & (1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m \geq 0,\ \forall x \in [2020; 2021] \\ \Leftrightarrow\ & (x+m)^3 + 2(x+m) \geq (mx)^3 + 2mx,\ \forall x \in [2020; 2021]. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$, với mọi t.
Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta suy ra

$$x + m \geq mx,\ \forall x \in [2020; 2021] \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{x-1},\ \forall x \in [2020; 2021] \Leftrightarrow m \leq \frac{2021}{2020}.$$

Vậy trên đoạn $[-2021; 2021]$ có tất cả 2022 giá trị nguyên của m.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $\left(7; \dfrac{23}{2}\right)$. (B) $(-2; 5)$. (C) $\left(\dfrac{43}{3}; \dfrac{39}{2}\right)$. (D) $\left(\dfrac{37}{3}; \dfrac{65}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $\dfrac{2\sin x + 1}{2} \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right) \in [0; 1]$ nên $f\left[f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right)\right] \in [0, 1]$.
Để phương trình $f\left[f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right)\right] = f(m)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(m) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 3m^2 + 1 \geq 0 \\ 2m^3 - 3m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy $4a^2+8b=13$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+5x+2}{2x+1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021f(\sqrt{3x^2-18x+28})-m\sqrt{3x^2-18x+28}\geq m+4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[2;4]$.

(A) 673. (B) 808. (C) 135. (D) 898.

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{3x^2-18x+28}$, ta có $x\in[2;4]$ thì $u\in[1;2]$.
Biến đổi bất phương trình ta được

$$2021f(u)-mu\geq m+4042\Leftrightarrow 2021[f(u)-2]\geq m(u+1).$$

Lại có $f(x)=\dfrac{x^2+5x+2}{2x+1}\Rightarrow f(u)-2=\dfrac{u^2+u}{2u+1}$ nên bất phương trình viết lại

$$\frac{2021(u^2+u)}{2u+1}\geq m(u+1)\Leftrightarrow m\leq\frac{2021u}{2u+1}.$$

Lúc này yêu cầu bài toán tương đương với

$$m\leq\frac{2021u}{2u+1},\ \forall u\in[1;2]\Leftrightarrow m\leq\min_{u\in[1;2]}g(u).$$

Xét hàm số $g(u)=\dfrac{2021u}{2u+1}$, $u\in[1;2]$.
Ta có $g'(u)=\dfrac{2021}{(2u+1)^2}>0$, $\forall u\in[1;2]$ nên hàm số $g(u)$ đồng biến trên $[1;2]$ nên $\min\limits_{u\in[1;2]}g(u)=g(1)=\dfrac{2021}{3}$.
Kết hợp m là số nguyên dương, ta được $m\in\{1;2;\cdots;673\}$.
Vậy có tất cả 673 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình. Số nghiệm của phương trình $f\left(2^{3x^4-4x^2+2}\right)+1=0$ là

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	1	↗	-1	↘	3	↗	$-\infty$

(A) 2. (B) 3. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

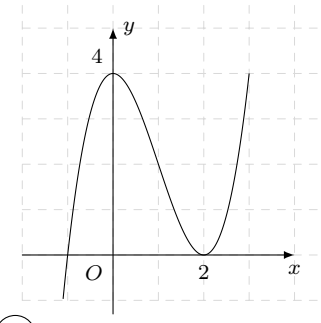
Số nghiệm của phương trình $f\left(2^{3x^4-4x^2+2}\right)+1=0$ chính là số giao điểm của đồ thị $y=f\left(2^{3x^4-4x^2+2}\right)$ và đường thẳng $y=-1$.
Ta có $f(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<-1\\x=2\\x=b>5.\end{array}\right.$
Suy ra $f\left(2^{3x^4-4x^2+2}\right)=-1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2^{3x^4-4x^2+2}=a<-1 & \text{(vô nghiệm)}\\2^{3x^4-4x^2+2}=2\\2^{3x^4-4x^2+2}=b>5\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4-4x^2+1=0 & (4 \text{ nghiệm}) \\ 3x^4-4x^2+2-\log_2 b=0 & (2 \text{ nghiệm}). \end{cases}$$

Vậy có tất cả là 6 nghiệm.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như bên. Số nghiệm phương trình $2f(x+1-\sqrt{6x+3})=1$ là



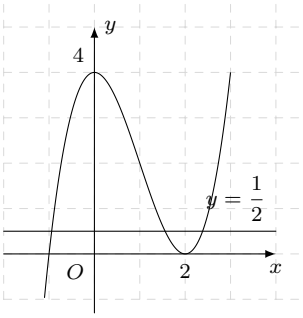
A 3. B 4. C 6. D 5.

Lời giải.

Đặt $t=x+1-\sqrt{6x+3}$, $x\geq -\frac{1}{2}$.
Ta có $t'=1-\dfrac{3}{\sqrt{6x+3}}=0\Leftrightarrow x=1$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{1}{2}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=\dfrac{1}{2}$. Dựa vào đồ thị



Ta thấy phương trình có ba nghiệm là $\begin{cases} t=a\in(-1;0) \\ t=b\in(1;2) \\ t\in(2;3). \end{cases}$
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t=x+1-\sqrt{6x+3}$, ta có
Phương trình $t=a$ có hai nghiệm x, $t=b$ có một nghiệm x, $t=c$ có một nghiệm x.
Vậy phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ có 4 nghiệm.
Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}mx+m-8$, $x\in\mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của k thỏa mãn phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A 3. B 34. C 6. D 34.

Lời giải.

Ta có $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, trong đó một điểm thuộc trục hoành.

Ta có $f'(x)=3x^2-\dfrac{m}{2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{6}}$ $(m>0)$.

- **Trường hợp 1.** $\left(\sqrt{\dfrac{m}{6}}\right)^3-\dfrac{1}{2}m\sqrt{\dfrac{m}{6}}+m-8=0\Leftrightarrow m=24$.

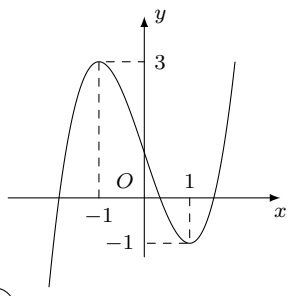
  Với $m=24$, ta có $f(x)=x^3-12x+16$. Phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm thực phân biệt $\Rightarrow k\in(0;32)$.
  Có 31 giá trị nguyên thỏa mãn.

- **Trường hợp 2.** $\left(\sqrt{\dfrac{m}{6}}\right)^3-\dfrac{1}{2}m\sqrt{\dfrac{m}{6}}+m-8=0\Leftrightarrow m=6$.

  Với $m=6$, ta có $f(x)=x^3-3x-2$. Phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow k\in(-4;0)$.
  Có 3 giá trị nguyên thỏa mãn.

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

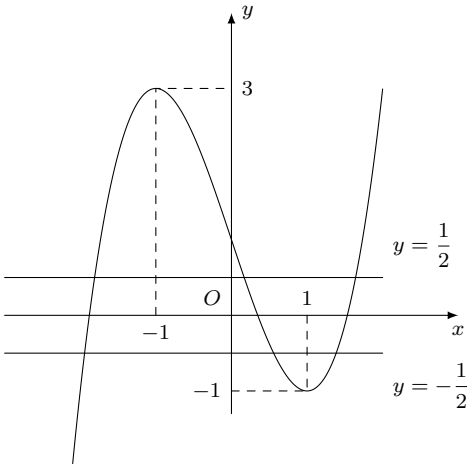
Câu 19. Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=\left|f(x^2)\right|$. Số nghiệm của phương trình $g(x)\cdot[2g(x)-1]=0$ là



(A) 11. (B) 10. (C) 13. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $g(x)\cdot[2g(x)-1]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=0\\ g(x)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|f(x^2)|=0\\ |f(x^2)|=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x^2)=0\\ f(x^2)=\dfrac{1}{2}\\ f(x^2)=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$



$f(x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2=a<-1 & \text{(vô nghiệm)}\\ x^2=b\in(0;1) & \\ x^2=c>1 & \end{array}\right.$ suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

$f(x^2)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=d<-1\ (d\neq a)\\ x^2=e\in(0;1)\ (e\neq b)\\ x^2=f>1\ (f\neq c)\end{array}\right.$ suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

$f(x^2)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \hoac{x^2=m<-1\ (m\neq d;a)\\x^2=n\in(0;1)\ (n\neq e;b)\\x^2=p>1\ (p\neq f;c)}$ suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Vì tất cả các nghiệm này khác nhau nên có tất cả là 12 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Phương trình $\left|f(2x^2+3)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	3

A) 3. B) 5. C) 6. D) 4.

Lời giải.

Gọi $g(x)=f(2x^2+3)-2$. Ta có $g'(x)=4xf'(2x^2+3)$.

Có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \hoac{x=0\\2x^2+3=-1 \Rightarrow x=0.\\2x^2+3=3}$

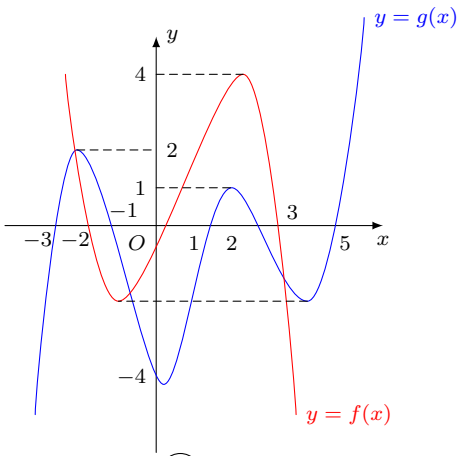
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-5	↗	$+\infty$

Mà $|g(x)|=5 \Leftrightarrow \hoac{g(x)=5\\g(x)=-5}$. Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hai hàm $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là



A) 25. B) 22. C) 21. D) 26.

Lời giải.

Ta có $f(g(x))=0 \Leftrightarrow \hoac{g(x)=-2\\g(x)=a\in(0;1)\\g(x)=3.}$

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$, ta suy ra $\hoac{g(x)=-2 & \text{có 4 nghiệm}\\ g(x)=a & \text{có 5 nghiệm}\\ g(x)=3 & \text{có 1 nghiệm.}}$

Suy ra phương trình $f(g(x))=0$ có 10 nghiệm.

Ta có $g(f(x))=0 \Leftrightarrow \hoac{f(x)=-3\\ f(x)=-1\\ f(x)=b\in(1;2)\\ f(x)=b\in(2;3)\\ f(x)=d\in(4;5).}$

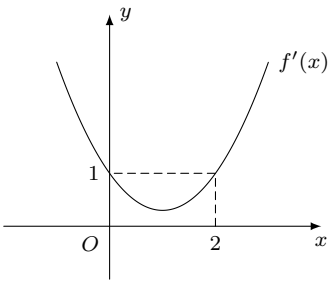
Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta suy ra $\hoac{f(x)=-3 & \text{có 1 nghiệm}\\ f(x)=-1 & \text{có 3 nghiệm}\\ f(x)=b & \text{có 3 nghiệm}\\ f(x)=c & \text{có 3 nghiệm}\\ f(x)=d & \text{có 1 nghiệm.}}$

Suy ra phương trình $g(f(x))=0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng cộng có tất cả là 21 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình.Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x+1)-x-m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.



A $m>f(2)$. B $m>f(2)-1$. C $m<f(1)-\ln 2$. D $m>f(1)+\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $f(e^x+1)-x-m=0 \Leftrightarrow f(e^x+1)-x=m$.

Đặt $t=e^x+1 \Rightarrow t'=e^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên

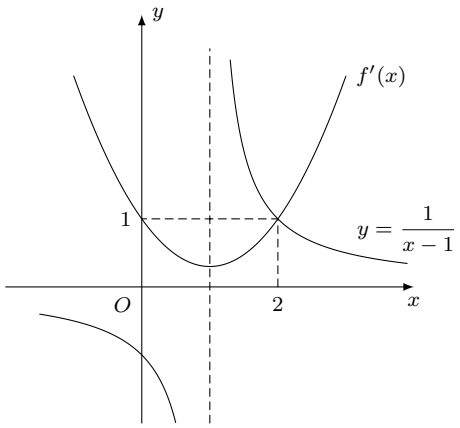
x	$-\infty$		$+\infty$
t	1	$\nearrow$	$+\infty$

Với $t=e^x+1 \Rightarrow x=\ln(t-1)$. Ta có $f(t)-\ln(t-1)=m$ (*).

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1.

Xét hàm số $g(t)=f(t)-\ln(t-1)$, với $t>1$.

Ta có $g'(t)=f'(t)-\dfrac{1}{t-1}$, $g'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t-1}$.



Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ và $y=\dfrac{1}{x-1}$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t-1}\Leftrightarrow t=2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t)$

t	1		2		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘	$g(2)$	↗	$y=m$

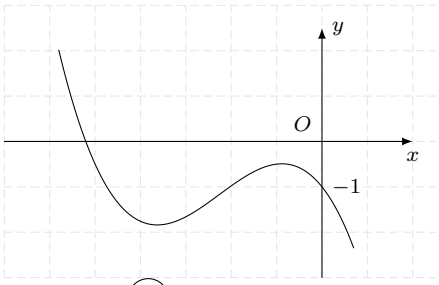
Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $g(t)$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (*) có hai nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1

$$m\geq g(2)\Leftrightarrow m>f(2)-\ln 1\Leftrightarrow m>f(2).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3f(x))+1=0$ là



(A) 6. (B) 8. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Phương trình $f(x^3f(x))+1=0\Leftrightarrow f(x^3f(x))=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3f(x)=a\in(-3;-1) & (1)\\ x^3f(x)=b\in(-5;-3) & (2)\\ x^3f(x)=0. & (3)\end{array}\right.$

Xét phương trình $x^3f(x)=k\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{k}{x^3}$.

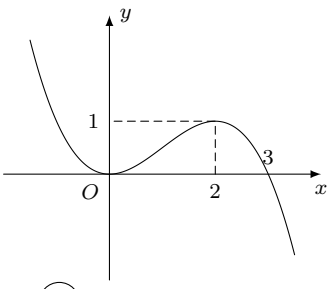
Đặt $g(x)=\dfrac{k}{x^3}$, $g'(x)=-\dfrac{3k}{x^4}>0$, với mọi $x\neq 0$ và $k<0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}=0$ và $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, ta suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty,0)$ và $(0;+\infty)$ thì phương trình $g(x)=f(x)$ có đúng một nghiệm.
Vì $a,b<0$ nên phương trình (1) và (2) mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác nhau.
Phương trình (3) $\Leftrightarrow x^3f(x)=0\Leftrightarrow \hoac{x=0\\f(x)=0}\Leftrightarrow \hoac{x=0\\x=c<0}$ với c khác các nghiệm của (1) và (2).
Vậy phương trình $f(x^3f(x))+1=0$ có tất cả 6 nghiệm.
Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2+2x+m)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.



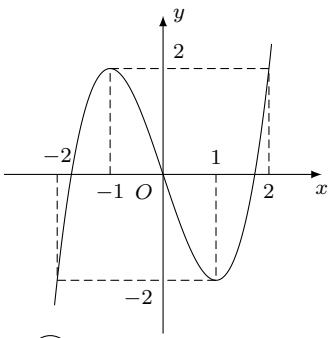
A) 0. B) 2. C) 5. D) 7.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, suy ra hàm số $f'(x)$ là hàm bậc 3 đi qua 0 không đổi dấu và đi qua 3 đội từ + sang − và đồng thời $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty$ nên hệ số $k<0$.
Suy ra $f'(x)=kx^2(x-3)$.
Vì $f'(2)=1\Rightarrow k=-\dfrac{1}{4}$ nên $f'(x)=-\dfrac{1}{4}x^2(x-3)\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{16}x^4+\dfrac{1}{4}x^3+e$.
Xét phương trình

$$f(-x^2+2x+m)=e\Leftrightarrow -\frac{1}{16}(-x^2+2x+m)^4+\frac{1}{4}(-x^2+2x+m)^3=0$$
$$\Leftrightarrow\ (-x^2+2x+m)^3(-x^2+2x+m-4)=0\Leftrightarrow \hoac{-x^2+2x+m=0 & (1)\\-x^2+2x+m-4=0 & (2)}$$

Phương trình $f(-x^2+2x+m)=e$ có 4 nghiệm phân biệt khi phương trình (1) và (2), mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác nhau $\Leftrightarrow \heva{1+m>0\\1+m-4>0}\Leftrightarrow m>3$.
Mặt khác do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-5;5]$ nên $m\in\{4;5\}$.
Suy ra có hai giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4+2f(\cos x)})=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.



A) 4. B) 3. C) 2. D) 5.

Lời giải.
Đặt $t=\cos x$. Do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1]\Rightarrow f(t)\in[-2;0)$. Suy ra

$$\sqrt{4+2f(\cos x)}=\sqrt{4+2f(t)}\in[0;2)\Rightarrow f\left(\sqrt{4+2f(t)}\right)\in[-2;2).$$

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -2\le m<2$.
Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=x^3+x-2^m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x))=x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$.
A 3. B 4. C 0. D 2.

Lời giải.

Đặt $y=f(x)$, ta có hệ $\begin{cases}y=f(x)\\x=f(y)\end{cases}\Rightarrow x+f(x)=y+f(y)$. (*)
Xét hàm số $g(t)=t+f(t)$ có $g'(t)=1+f'(t)=3t^2+2>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}\Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Từ phương trình (*) ta có

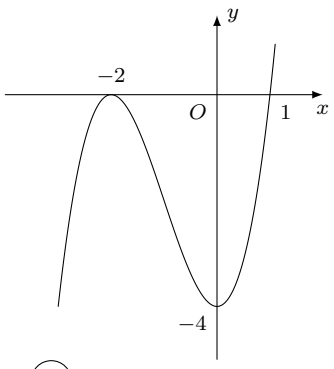
$$g(y)=g(x)\Leftrightarrow y=x\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow x^3=2^m.$$

Để phương trình $f(f(x))=x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$ thì phương trình $x^3=2^m$ có nghiệm $x\in[1;2]$

$$\Leftrightarrow 1\le 2^m\le 8\Leftrightarrow 0\le m\le 3.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3\}$ nên có tất cả 4 giá trị nguyên.
Chọn đáp án B □

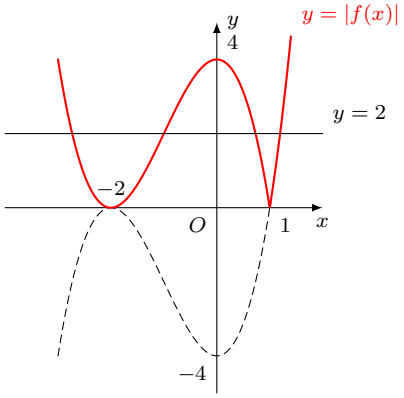
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)\left|f(x)\right|+2m+4=0$ có 6 nghiệm phân biệt?



A 2. B 4. C 3. D 5.

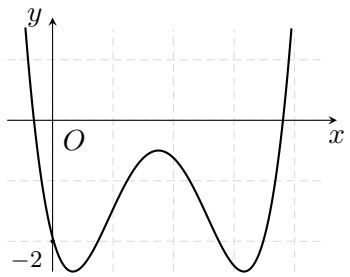
Lời giải.

Ta có $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}|f(x)|=2 & (1)\\|f(x)|=m+2 & (2).\end{array}\right.$



Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt. Do đó để phương trình ban đầu có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 nghiệm của phương trình (1).
Suy ra $\left[\begin{array}{l}m+2=0\\m+2>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m>2\end{array}\right.$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-5;5)$ nên $m\in\{-2;3;4\}$.
Vậy có tất cả 3 giá trị của m.
Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0$ là



(A) 8. (B) 12. (C) 6. (D) 9.

Lời giải.

$$f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = a \in (0;1) \quad (1) \\ x^2 f(x) = b \in (2;3) \quad (2) \\ x^2 f(x) = c \in (3;4) \quad (3) \end{bmatrix} \text{ với } 0 < a < b < c.$$

Ta có $x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{bmatrix}$. Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

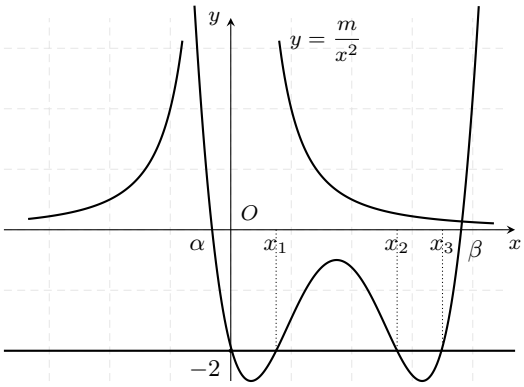
Xét phương trình $x^2 f(x) = m$ với $m > 0$. Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Do đó ta có $x^2 f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{m}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{m}{x^2}$ có $g'(x) = -\dfrac{2m}{x^3}$. Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Ta phát họa đồ thị của $g(x)$ lên cùng hệ tọa độ với $f(x)$.



Ta nhận thấy đồ thị hàm số $g(x)$ luôn cắt $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 0 và khác hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Vậy mỗi phương trình (1), (2), (3) có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm này không trùng nhau, đồng thời khác 0 và khác hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó phương trình đã cho có tất cả là 9 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. A	5. A	6. C	7. B	8. D	9. B	10. B
11. C	12. A	13. C	14. D	15. A	16. B	17. C	18. B	19. A	20. A

21. A	22. D	23. A	24. D	25. D	26. B	27. B	28. C	29. A	30. B
31. C	32. B	33. B							

ĐỀ VDC SỐ 2: BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 1. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

(A) $(-2;+\infty)$. (B) $(-\infty;-2]$. (C) $[-2;+\infty)$. (D) $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-|x+2|+x,\ x\in\mathscr{D}$.

Ta có $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-2,\ x\in(-2;+\infty)\cap\mathscr{D}=\mathscr{D}_1\\ \dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+2x+2,\ x\in(-\infty;-2)\cap\mathscr{D}=\mathscr{D}_2.\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}>0,\ \forall x\in\mathscr{D}_1\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+2>0,\ \forall x\in\mathscr{D}_2.\end{cases}$

Suy ra $f'(x)>0,\forall x\in\mathscr{D}_1\cup\mathscr{D}_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta có: $-m\geq 2\Leftrightarrow m\leq -2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

(A) $(-\infty;0)$. (B) $(-\infty;1)$. (C) $(-\infty;1]$. (D) $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m. \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x\neq\dfrac{4}{3}\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x\neq\dfrac{4}{3}\\ x\neq 2.\end{cases}$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11=m.$

Xét hàm số $f(x)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11$ trên $[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right)$ và các khoảng $\left(\dfrac{4}{3};2\right)$, $(2;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=\left[\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11\right]'$

$=4x\sqrt{x-1}+\left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}$

$=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}.$

Xét tam thức $h(x)=10x^2-8x+1$.

Ta có $h(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{6}}{10}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{6}}{2}$		$\frac{4+\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}>0$ với $\forall x\in[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[1;\dfrac{4}{3}\right)$ và các khoảng $\left(\dfrac{4}{3};2\right)$, $(2;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in(-\infty;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $f(x)=(x-1)(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)$.

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ có nghiệm $x=1$.

Suy ra $a+b+2=0$. (1)

Lí luận tương tự, ta có $h(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm.

Suy ra $4a-2b+2=0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}a+b+2=0\\4a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1.\end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ ta có $f(x)=(x-1)(x+2)\left(-x^2-x+2\right)=-(x-1)^2(x+2)^2\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a;b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

(A) $m \in \mathbb{R}$. (B) $m \in (2;+\infty)$. (C) $m \in (-\infty;2)$. (D) $m \in [2;+\infty)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^7+x^5+x^3+3m-1=|x-2|-x-2m \Leftrightarrow x^7+x^5+x^3-|x-2|+x=-5m+1. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^7+x^5+x^3-|x-2|+x$.

Ta có $f(x)=\begin{cases} x^7+x^5+x^3+2 & \text{khi } x\in[2;+\infty) \\ x^7+x^5+x^3+2x-2 & \text{khi } x\in(-\infty;2). \end{cases}$

☑ $f'(x)=\begin{cases} 7x^6+5x^4+3x^2>0 & \text{khi } x\in(2;+\infty) \\ 7x^6+5x^4+3x^2+2>0 & \text{khi } x\in(-\infty;2). \end{cases}$

Do $g(x)=7x^6+5x^4+3x^2=x^2\left(7x^4+5x^2+3\right)=x^2\left[7\left(x^2+\dfrac{5}{14}\right)^2+\dfrac{257}{144}\right]\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	‖	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m\in\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

(A) 2019. (B) 4032. (C) 4039. (D) 4033.

Lời giải.

Điều kiện $x\in[-3;1]$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}+m\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}\right)=0. \quad (1)$

Đặt $t=2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}=g(x)\Rightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}=t^2+4$ với $x\in[-3;1]$.

Có $g'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}<0, \forall x\in(-3;1)$.

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $[-3;1]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)=-2; \max\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)=4\Rightarrow t\in[-2;4]$.

Từ $(1)\Rightarrow t^2+mt+4=0$.

Với $t=0\Rightarrow 0+4=0\Rightarrow$ phương trình $t^2+mt+4=0$ không có nghiệm $t=0$.

Vậy $t\in[-2;4]\setminus\{0\}$, ta có $m=\dfrac{-t^2-4}{t}=-t-\dfrac{4}{t}=f(t)$.

Có $f'(t)=\dfrac{4-t^2}{t^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 2$.

Bảng biến thiên

t	-2		0		2		4
$f'(t)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4	↘	-5

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình đã cho có nghiệm thực khi và chỉ khi $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4. \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} m \in [-2019; 2019] \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2019;\ -2018; \ldots; -4; 4; \ldots;\ 2018; 2019\}.$

Vậy có $(2019 - 4 + 1) \cdot 2 = 4032$ giá trị nguyên của tham số thực m.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y = \left|2 + \dfrac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y = \sqrt{4x - m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

(A) 35. (B) 37. (C) 36. (D) 34.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 10 \\ x \geq \dfrac{m}{4}. \end{cases}$

Xét trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$$\left|2 + \frac{2}{x-10}\right| = \sqrt{4x - m} \Leftrightarrow m = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10}\right)^2.$$

Đặt $g(x) = 4x - \left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$ với $x \in (0; +\infty) \setminus \{10\}$.

Ta có: $g'(x) = 4\left[1 + \dfrac{2x-18}{(x-10)^3}\right]$; $g''(x) = \dfrac{-16x + 136}{(x-10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{17}{2}$		10		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$	$4{,}072$	↗		↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\dfrac{17}{2}; 10\right)$.

Lại có $g'(9{,}2) = \dfrac{7}{8} > 0$ và $g'(9{,}5) = -28 < 0$ nên $\alpha \in (9,2; 10)$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$.

x	0		9		α		10		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$+$	
$g(x)$	$-\frac{81}{25}$	↗	36	↗	$g(\alpha)$	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{-81}{25} < m < g(\alpha)$ với $g(\alpha) \in (36; 37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $1; 2; 3; \ldots; 36$ hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m\cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

(A) 2020. (B) 4040. (C) 4041. (D) 2020.

Lời giải.

Ta có nhận xét: khi $f(x)=0$ thì phương trình $f'(x)=m\cdot f(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f(x)\neq 0$ và $f'(x)=m\cdot f(x)\Leftrightarrow m=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, ta có:

$$\begin{aligned}\int g(x)\,\mathrm{d}x&=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\\&=\ln|f(x)|=\ln|(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-2020)|+C\\&=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\cdots+\ln|x-2020|+C\\\Rightarrow g(x)&=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\cdots+\frac{1}{x-2020}.\end{aligned}$$

Ta có $g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-1}{(x-2)^2}+\dfrac{-1}{(x-3)^2}+\cdots+\dfrac{-1}{(x-2020)^2}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3;\ldots;2020\}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3	$\cdots$	2020		$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$	$\cdots$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$		$\cdots$	$+\infty$	$\searrow$	0
		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$					

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình$f'(x)=m\cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>0$ hoặc $m<0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020;2020]$ nên $m\in\{n\in\mathbb{Z}|-2020\le n\le 2020,\ n\neq 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hai hàm số $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|$ và $y=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x}+4m-2020$. Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

(A) 506. (B) 1011. (C) 2020. (D) 1010.

Lời giải.

Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

$$\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020\Leftrightarrow\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=4m-2020.\quad(*)$$

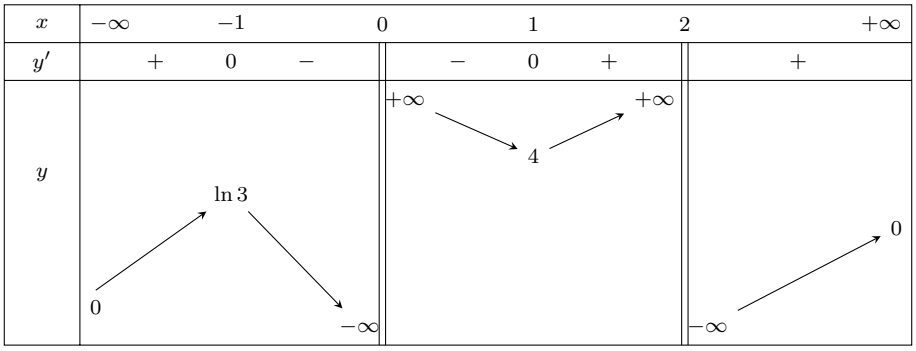
Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm.

$$\text{Xét hàm số } y=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=\begin{cases}g_1(x)=\ln(x-2)-\ln x-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} & \text{khi } x>2\\ g_2(x)=\ln(2-x)-\ln x-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} & \text{khi } 0<x<2\\ g_3(x)=\ln(2-x)-\ln(-x)-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} & \text{khi } x<0.\end{cases}$$

$$\text{Ta có }\begin{cases}g_1'(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x>2\\ g_2'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0<x<2\\ g_3'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x<0.\end{cases}$$

Do vậy $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm số như sau



Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} 4m-2020=4 \\ 4m-2020=\ln 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=506\in\mathbb{Z} \\ m=\dfrac{2020+\ln 3}{4}\notin\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Từ đây yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

(A) 4040. (B) 2020. (C) 2021. (D) 4041.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) :

$$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3. \quad (*)$$

Đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x\in\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x\notin\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$ ta có: $(*)\Leftrightarrow m=\dfrac{-12x^4-22x^3-x^2+10x+3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}-2|x|$

$$\Leftrightarrow m=-2x-2|x|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x)=-2x-2|x|+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$.

$$=\begin{cases} -4x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1} & \forall x\in(0;+\infty) \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1} & \forall x(-\infty;0)\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}. \end{cases}$$

Ta có: $f'(x)=\begin{cases} -4-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2}<0, & \forall x\in(0;+\infty) \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2}<0, & \forall x(-\infty;0)\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\} \end{cases}$ và $f'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$+\infty$	↘	$+\infty$	↘	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$
									$-\infty$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m \geq 0$.
Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

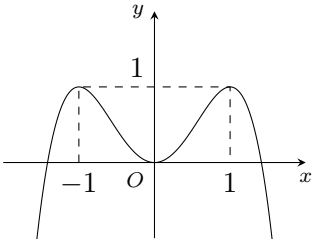
Câu 10. Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3\sqrt{m - 15x}\,(m + 3 - 15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng
A 2006. B 2005. C 2007. D 2008.

Lời giải.
Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình
$$x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1 = x^3\sqrt{m - 15x}\,(m + 3 - 15x) \quad (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt.}$$
Điều kiện: $m - 15x \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 15x$. $(*)$
Nếu $x = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x \neq 0$.
Khi đó $(1) \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + \dfrac{1}{x^3} = \sqrt{m - 15x}\,(m + 3 - 15x)$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\sqrt{m - 15x}\right)^3 + 3\sqrt{m - 15x}.$$
Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó $(1) \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = \sqrt{m - 15x}$. (2)
Nếu $x < 0$ ta có $x + \dfrac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm.
$\Rightarrow x > 0$. Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ x + \dfrac{1}{x} > 0 \end{cases}$ nên $(2) \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = m - 15x \Leftrightarrow m = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 + 15x$.
Đặt $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 + 15x$, $x > 0$.
Ta có $g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3} + 15$.
Phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$				$-$	0	$+$	
$g(x)$			$+\infty$	$\searrow$	$\frac{55}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \dfrac{55}{4}$.
Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.
Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên dây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là
A 3. B 4. C 2. D 0.



Lời giải.
Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$.
Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

Từ đồ thị $\Rightarrow \begin{cases} f'(1)=0 \\ f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2c=0 \\ e=0 \\ a+c+e=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ e=0 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^4+2x^2.$

$\Rightarrow f(\sqrt{x})=-x^2+2x$ và $f\left(\sqrt{f(x)}\right)=-f^2(x)+2f(x)$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(x)\le 1$.

Như vậy phương trình

$f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0 \Leftrightarrow -f^2(x)+2f(x)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ với $0\le f(x)\le 1$.

Đặt $t=f(x)\,(t\in[0;1])$ ta được phương trình $g(t)=0$ với $g(t)=t^2-3t-2\sqrt{t}+1$.

Nhận thấy:

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0)\cdot g(1)<0 \Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1)\cdot g(4)<0 \Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;4)$.

Mà $g(t)=0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối đa hai nghiệm nên $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

Suy ra $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ có duy nhất một nghiệm $f(x)\in(0;1)$.

Suy ra phương trình $f(x)=a$ với $a\in(0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

(A) 25. (B) 30. (C) 29. (D) 24.

Lời giải.

Ta đặt: $g(x)=f\left(x^2-4x\right)$. Ta có $g'(x)=(2x-4)f'\left(x^2-4x\right)$.

$$\text{Suy ra } g'(x)=0 \Leftrightarrow (2x-4)f'\left(x^2-4x\right)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x-4=0 \\ f(x^2-4x)=0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=2 \\ x^2-4x=-4 \\ x^2-4x=-2 \\ x^2-4x=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=2 \\ x^2-4x+4=0 \\ x^2-4x+2=0 \\ x^2-4x=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=2 \\ x=2\pm\sqrt{2} \\ x=0 \\ x=4. \end{bmatrix}$$

Mặt khác: $g(0)=f(0)=-3$; $g\left(2-\sqrt{2}\right)=g\left(2+\sqrt{2}\right)=f(-2)=2$; $g(2)=f(-4)=-2$; $g(4)=f(0)=-3$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

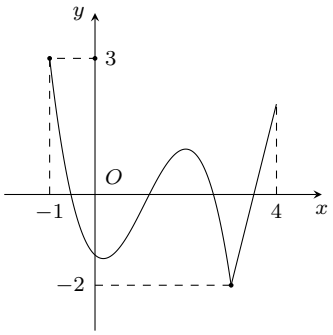
Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3<\dfrac{m}{6}\le 2 \Leftrightarrow -18<m\le 12$.

Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

A) 6. B) 5. C) 7. D) 8.



Lời giải.

Để bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m>0$.

$$|f(x)+m|<2m \Leftrightarrow -2m<f(x)+m<2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>-3m \\ f(x)<m. \end{cases}$$

Bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>-3m \\ f(x)<m \end{cases} \text{ đúng với mọi } x \text{ thuộc đoạn } [-1;4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m<\min\limits_{[-1,4]} f(x) \\ m>\max\limits_{[-1,4]} f(x). \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra $\min\limits_{[-1,4]} f(x)=-2; \max\limits_{[-1,4]} f(x)=3$.

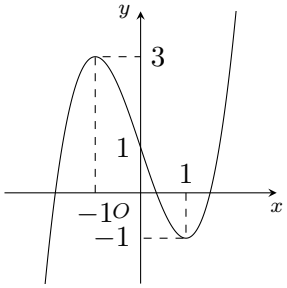
$$\Rightarrow \begin{cases} -3m<\min\limits_{[-1,4]} f(x) \\ m>\max\limits_{[-1,4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m<-2 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{2}{3} \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow m>3.$$

Vậy trên đoạn $[-10;10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

A) 4. B) -1. C) 3. D) 2.



Lời giải.

Đặt $t=\sin x$, với $x\in(0;\pi) \Rightarrow t\in(0;1]$.

Ta được phương trình: $f(t)-2t=m-2 \Leftrightarrow f(t)=2t+m-2$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $r\colon y=2t+m-2$.

Gọi $p\colon y=2x+1$ song song với đường thẳng $\Delta\colon y=2x$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

Gọi $q\colon y=2x-3$ song song với đường thẳng $\Delta\colon y=2x$ và đi qua điểm $B(1;-1)$.

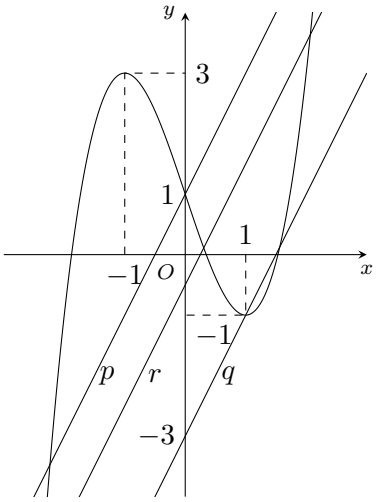
Phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi) \Leftrightarrow$ phương trình $f(t)=2t+m-2$ phải có nghiệm $t\in(0;1]$.

Suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (r có thể trùng với q).

$\Rightarrow -3\le m-2<1 \Leftrightarrow -1\le m<3$.

$\Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\} \Rightarrow S=\{-1;0;1;2\}$.

Do đó tổng các phần tử là: $-1+0+1+2=2$.



Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$?

(A) 1750. (B) 1748. (C) 1747. (D) 1746.

Lời giải.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$, ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.
Do đó hàm số f luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)\Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3+m=0.\quad(1)$
Xét $h(x)=f^3(x)+f(x)+x^3+m$ trên đoạn $[-1;2]$.
Ta có $h'(x)=3f'(x)\cdot f^2(x)+f'(x)+3x^2=f'(x)\left[3f^2(x)+1\right]+3x^2$.
và $f'(x)=3x^2+1>0,\forall x\in[-1;2]\Rightarrow h'(x)>0,\forall x\in[-1;2]$.
Suy ra h

àm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên $\min\limits_{[-1,2]}h(x)=h(-1)=m-1$ và $\max\limits_{[-1,2]}h(x)=h(2)=m+1748$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\min\limits_{[-1,2]}h(x)\cdot\max\limits_{[-1,2]}h(x)\le 0$ $\Leftrightarrow h(-1)\cdot h(2)\le 0$

$\Leftrightarrow (m-1)(1748+m)\le 0$

$\Leftrightarrow -1748\le m\le 1.$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S=\{-1748;-1747;\ldots;0;1\}$.
Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m\cdot f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?

(A) 6. (B) 5. (C) 4. (D) 3.

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4 ↘	3 ↗	$\sqrt{11}$ ↘	2

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[2,4]}f(x)=f(4)=2$ và $\max\limits_{[2;4]}f(x)=f(2)=4$.

Xét hàm số $g(x)=x+2\sqrt{x^2-2x}$, ta có $g'(x)=1+\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}>0,\ \forall x\in[2;4]$.
Suy ra $g(x)=x+2\sqrt{x^2-2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2;4]$.
Suy ra $\min\limits_{[2,4]}g(x)=g(2)=2$ và $\max\limits_{[2,4]}g(x)=g(4)=4+4\sqrt{2}$.

Ta có $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)\Leftrightarrow\dfrac{x+2\sqrt{x^2-2x}}{f(x)}=m\Leftrightarrow\dfrac{g(x)}{f(x)}=m.$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2;4]$.
Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x=2$ nên

$$\min_{[2,4]}h(x)=\frac{\min\limits_{[2,4]}g(x)}{\max\limits_{[2,4]}f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}=h(2)=\frac{1}{2}.$$

Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x=4$ nên

$$\max_{[2,4]}h(x)=\frac{\max\limits_{[2,4]}g(x)}{\min\limits_{[2,4]}f(x)}=\frac{g(4)}{f(4)}=h(4)=2+2\sqrt{2}.$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2}\le m\le 2+2\sqrt{2}$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	2	↘	$1,5$	↘	1	↗	6
	-3								

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2}-4\geq 0 \\ 6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x-m=0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

(A) 9. (B) 11. (C) 10. (D) 8.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{9}{x^2}-4\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9-4x^2}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9-4x^2\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\setminus\{0\}.$

Xét phương trình $6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x-m=0 \Leftrightarrow m=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x.$

Xét hàm số $g\left(x\right)=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$, với $x\in \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Ta có $g'\left(x\right)=-12f'\left(-2x+1\right)-24x^2+6=-6\left[2f'\left(-2x+1\right)+4x^2-1\right]$.

Từ giả thiết ta suy ra

$$f'\left(-2x+1\right)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1\neq 1 \\ -2x+1<2 \\ -2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$f'\left(-2x+1\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<-2x+1<0 \\ 2<-2x+1<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2}<x<-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$ trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(-2x+1)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘	4	↗	9	↗	14	↘	-36
	54								

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm

$$\Leftrightarrow g(x)=0 \text{ có đúng ba nghiệm } x\in \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\setminus\{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<m<14 \\ m\neq 9. \end{cases}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=5;6;7;8;10;11;12;13$. Vậy có 8 số nguyên m.

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. C	4. A	5. B	6. C	7. B	8. A	9. C	10. A
11. B	12. B	13. C	14. D	15. A	16. C	17. D			

CHỦ ĐỀ 7. TIẾP TUYẾN - SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐỒ THỊ

A LÝ THUYẾT

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)\colon y=f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M.

- **Bước 1:** Tính $f'(x)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $f'(x_0)$.
- **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến tại M là $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

- Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.
- Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn $f'(x_0)=k$.
- Giải phương trình trên tìm được x_0. Suy ra $y_0=f(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=k\cdot(x-x_0)+y_0$.

3. Điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị

Cho hai đồ thị $(C)\colon y=f(x)$ và $(C')\colon y=g(x)$. Khi đó (C) và (C') tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}f(x)=g(x)\\ f'(x)=g'(x).\end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình chính là hoành độ tiếp điểm.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A và B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng.

(A) $4+2\sqrt{2}$. (B) 4. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $4+\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $M\left(m+1;1+\dfrac{2}{m}\right)$ là tiếp điểm (với $m>0$) và Δ là tiếp tuyến của (C) tại M.

Khi đó $\Delta\colon y=-\dfrac{2}{m^2}\cdot(x-m-1)+1+\dfrac{2}{m}$.

Ta có tiệm cận đứng: $x=1$ và tiệm cận ngang: $y=1$.

Gọi $A(1;y_A)$ là giao điểm của Δ và tiệm cận đứng.

Suy ra $y_A=-\dfrac{2}{m^2}\cdot(-m)+1+\dfrac{2}{m}=1+\dfrac{4}{m}$.

Gọi $B(x_B;1)$ là giao điểm của Δ và tiệm cận ngang.

Suy ra $1=-\dfrac{2}{m^2}(x_B-m-1)+1+\dfrac{2}{m}\Rightarrow x_B=2m+1$.

Khi đó $\overrightarrow{OA}=\left(1;1+\dfrac{4}{m}\right)$ và $\overrightarrow{OB}=(2m+1;1)$.

Suy ra $S_{OAB} = \frac{1}{2}\left|1-2m-1-\frac{8m+4}{m}\right| = \left|4+m+\frac{2}{m}\right| = 4+m+\frac{2}{m} \geq 4+2\sqrt{m\cdot\frac{2}{m}} = 4+2\sqrt{2}$.
Vậy S_{OAB} đạt GTNN bằng $4+2\sqrt{2}$ khi $m=\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ có đồ thị là (C). Xét hai điểm $A(a;y_A)$; $B(b;y_B)$ thuộc đồ thị sao cho tuyến tuyến của (C) tại A và B song song nhau. Biết đường thẳng AB đi qua điểm $D(5;3)$. Phương trình AB là
(A) $x-y-2=0$. (B) $x+y-8=0$. (C) $x-3y+4=0$. (D) $x-2y+1=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=\frac{3}{2}x^2-3x$.
Do tiếp tuyến tại A và B song song nhau nên

$$\begin{aligned} & y'(a)=y'(b) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{2}a^2-3a=\frac{3}{2}b^2-3b \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)(a+b-2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & a+b-2=0 \text{ (do } a\neq b\text{)}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} y_A+y_B &= \frac{1}{2}(a^3+b^3)-\frac{3}{2}(a^2+b^2)+4 \\ &= \frac{1}{2}\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]-\frac{3}{2}\left[(a+b)^2-2ab\right]+4 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Gọi I là trung điểm AB. Khi đó ta có $\begin{cases} x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=1 \\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=1. \end{cases}$.
Mà AB đi qua $D(5;3)$ nên AB có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{ID}=(4;2)=2(2;1)$. Suy ra $\vec{n}=(1;-2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của AB.
Vậy AB có phương trình $1\cdot(x-1)-2\cdot(y-1)=0\Leftrightarrow x-2y+1=0$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 3. Cho đồ thị $(C)\colon y=\frac{x+2}{x-1}$ và điểm $A(0;a)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in[-2018;2018]$ sao cho từ A có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) đồng thời hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?
(A) 2020. (B) 2018. (C) 2019. (D) 2017.

Lời giải.

Ta có $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$.
Phương trình đường thẳng Δ đi qua A, hệ số góc k có dạng

$$y=k\cdot x+a.$$

Δ tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-1}=kx+a \\ -\frac{3}{(x-1)^2}=k. \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{x+2}{x-1} = -\dfrac{3x}{(x-1)^2} + a \Leftrightarrow (1-a)x^2 + 2(2+a)x - 2 - a = 0$ (với $x \neq 1$). (*)

Từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a \neq 0 \\ \Delta'_{y'} > 0 \\ 1-a+2(2+a)-2-a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ (2+a)^2 + (1-a)(2+a) > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 3a+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-2;+\infty) \setminus \{1\}.$$

Gọi $y_1 = \dfrac{x_1+2}{x_1-1}$ và $y_2 = \dfrac{x_2+2}{x_2-1}$ là hai tung độ của tiếp điểm.

Yêu cầu bài toán

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 < 0 \quad &\Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+2}{x_2-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2-a-4(2+a)+4(1-a)}{-2-a+4+2a+1-a} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-9a-6}{3} < 0 \\ &\Leftrightarrow a > -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

So với điều kiện $a \in (-2;+\infty) \setminus \{1\}$ ta được $a \in \left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right) \setminus \{1\}$.

Mà $a \in \mathbb{Z}$, $a \in [-2018;2018]$ nên $a \in \{0;2;3;4;\ldots;2018\}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 4. Cho parabol $(P)\colon y = x^2 - 2px + q$. Biết rằng qua $A(2;1)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến (P) và tập hợp tất cả các điểm $M(p;q)$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \leq 0$. Biểu thức $T = 3a - 2b^2 + c$ không thể nhận giá trị nào sau đây?

(A) 10. (B) 9. (C) 11. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x - 2p$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(2;1)$ với hệ số góc k. Khi đó $\Delta\colon y = k \cdot (x-2) + 1$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 - 2px + q = k \cdot (x-2) + 1 \\ 2x - 2p = k \end{cases} \\ \Rightarrow \quad &x^2 - 2px + q = (2x-2p) \cdot (x-2) + 1 \\ \Leftrightarrow \quad &x^2 - 4x + 4p - q + 1 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Theo giả thiết, từ A luôn kẻ được tiếp tuyến đến (C) nên $(*)$ luôn có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4p + q - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -4p + q + 3 \geq 0 \text{ với mọi } p, q.$$

Suy ra tập hợp các điểm $M(p;q)$ là miền nghiệm của bất phương trình $4x - y - 3 \leq 0$.

Cho nên

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{-3} \Rightarrow \begin{cases} a = -4b \\ c = 3b. \end{cases}$$

Do đó $T = 3a - 2b^2 + c = 3(-4b) - 2b^2 + 3b = -2b^2 - 9b = -2\left(b + \dfrac{9}{4}\right)^2 + \dfrac{81}{8} \leq \dfrac{81}{8}$.

Vậy T không thể bằng 11.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+4m-m^2$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$ tiếp xúc với Ox.

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2x-4$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Đồ thị của hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$ tiếp xúc với Ox khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f\left[f(x)\right]=0 \\ f'(x)\cdot f'\left[f(x)\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)-4f(x)=m^2-4m \\ \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)-4f(x)=m^2-4m \quad (*) \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=2. \end{array}\right. \end{cases}$$

- Với $x=2$ thì $f(2)=4m-m^2-4$. Khi đó

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (4m-m^2-4)^2-4(4m-m^2-4)=m^2-4m \\ &\Leftrightarrow (4m-m^2-4)^2-3(4m-m^2-4)+4=0 \\ &\Leftrightarrow m\in\varnothing. \end{aligned}$$

- Với $f(x)=2$ thì $(*)\Leftrightarrow m^2-4m+4=0\Leftrightarrow m=2$.
  Thử lại: khi $m=2$ thì $f(x)=2\Leftrightarrow x^2-4x+4=2\Leftrightarrow x^2-4x+2=0$.
  Phương trình này có nghiệm nên nhận $m=2$.

Vậy với $m=2$ thì đồ thị hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$ tiếp xúc với Ox.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là (C) và $A(a;-2)$. Từ A kẻ ít nhất hai tiếp tuyến đến (C). Gọi A là tập hợp tất cả giá trị của a sao cho tổng các hệ số góc bằng 9. Tính tổng các phần tử trong S.

(A) $2\sqrt{6}$. (B) 2. (C) $\sqrt{6}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(a;-2)$ với hệ số góc k. Khi đó $\Delta\colon y=k(x-a)-2$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^3-3x^2+2=k(x-a)-2 \\ 3x^2-6x=k \end{cases} \\ \Rightarrow\ & x^3-3x^2+2=(3x^2-6x)\cdot(x-a)-2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2(x+1)-(x-2)(3x^2-3ax)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)[2x^2-(3a-1)x+2]=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2x^2-(3a-1)x+2=0. \quad (*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Tồn tại ít nhất 2 tiếp tuyến kẻ từ A khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm kép khác 2 hoặc có hai nghiệm phân biệt.

- Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm kép.
  Khi đó $\Delta=(3a-1)^2-16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$
  Với $a=-1$ thì $(*)\Leftrightarrow 2x^2+4x+2\Leftrightarrow x=-1$.
  Tổng hai hệ số góc của hai tiếp tuyến tại hai tiếp điểm là $f'(2)+f'(-1)=9$.
  Suy ra nhận $a=-1$.

Với $a=\dfrac{5}{3}$ thì $(*)\Leftrightarrow 2x^2-4x+2\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó tổng hai hệ số góc của hai tiếp tuyến tại hai tiếp điểm là $f'(2)+f'(1)=-3\neq 9$.

Suy ra loại $a=\dfrac{5}{3}$.

☑ Trường hợp 2: $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ 2\cdot 2^2-(3a-1)\cdot 2+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a<-1 \text{ hay } a>\dfrac{5}{3}\\ a\neq 2.\end{cases} \quad (**)$$

Khi đó tổng các hệ số góc bằng 9

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad f'(2)+f'(x_1)+f'(x_2)=9\\ &\Leftrightarrow \quad 3x_1^2-6x_1+3x_2^2-6x_2=9\\ &\Leftrightarrow \quad 3(x_1+x_2)^2-6(x_1+x_2)-6x_1x_2-9=0\\ &\Leftrightarrow \quad 3\cdot\frac{(3a-1)^2}{4}-6\cdot\frac{3a-1}{2}-6-9=0\\ &\Leftrightarrow \quad 27a^2-54a-45=0\\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}\\ a=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

So với điều kiện $(**)$ ta nhận $a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$.

☑ Trường hợp 3: $(*)$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng 2 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ a=2\end{cases}\Leftrightarrow a=2$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow 2x^2-5x+2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Khi đó tổng các hệ số góc bằng $f'(2)+f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}\neq 2$.

Suy ra loại $a=2$.

Vậy $a=-1$; $a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán và tổng các giá trị của a là $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm $A\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm $M(x_1;y_1)$; $N(x_2;y_2)$ phân biệt khác A sao cho $y_1-y_2=8(x_1-x_2)$?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Gọi $A\left(a;\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2\right)$.

Ta có $y'=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{28}{3}x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại A có dạng $y=\left(\dfrac{4}{3}a^3-\dfrac{28}{3}a\right)\cdot(x-a)+\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\begin{aligned}&\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)\cdot(x-a)+\frac{1}{3}a^4-\frac{14}{3}a^2=\frac{1}{3}x^4-\frac{14}{3}x^2\\ \Leftrightarrow\quad &(x-a)^2\cdot\left(x^2+2ax+3a^2-14\right)=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=a \\ x^2+2ax+3a^2-14=0. \quad (*) \end{bmatrix}$$

Tồn tại hai giao điểm M, N khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ a^2+2a^2+3a^2-14\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a^2+14>0 \\ 6a^2-14\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)\setminus\left\{\pm\frac{\sqrt{21}}{3}\right\}. \quad (**)$$

Ta có

$$\begin{aligned} & y_1-y_2=8(x_1-x_2) \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)\cdot(x_1-x_2)=8(x_1-x_2) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a-8=0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} a=3 \\ a=-1 \\ a=-2. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

So với điều kiện $(**)$ ta được $\begin{bmatrix} a=-1 \\ a=-2. \end{bmatrix}$

Chọn đáp án B □

ĐỀ VDC SỐ 1: BÀI TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN VÀ SỰ TIẾP XÚC

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 2019$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

(A) $y = 8x + 2016$. (B) $y = 8x + 2007$. (C) $y = 8x + 2014$. (D) $y = 8x + 2023$.

Lời giải.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2015$. Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y'(-1) = 8$.
Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có phương trình $y = 8(x + 1) + 2015$ hay $y = 8x + 2023$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x(4 - x)^2$ tại điểm $M_0(1; 9)$ là

(A) $y = 3x + 12$. (B) $y = 3x + 8$. (C) $y = 3x - 3$. (D) $y = 3x + 6$.

Lời giải.

Ta có $y = x(4 - x)^2 = x^3 - 8x^2 + 16x \Rightarrow y' = 3x^2 - 16x + 16$ nên hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm là $y'(1) = 3$.
Tiếp tuyến tại điểm $M_0(1; 4)$ có phương trình $y = 3(x - 1) + 9$ hay $y = 3x + 6$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là

(A) $y = -40x - 80$. (B) $y = -40x - 57$. (C) $y = -40x + 103$. (D) $y = -40x + 25$.

Lời giải.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 23$. Ta có $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(-2) = -40$.
Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là $y = -40(x + 2) + 23$ hay $y = -40x - 57$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 6)$ là

(A) $y = 8x - 2$. (B) $y = 8x + 5$. (C) $y = 8x - 8$. (D) $y = 8x + 14$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4x$.
Với $x_0 = 1 \Rightarrow y'(x_0) = y'(1) = 8$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 6)$ là $y = 8(x - 1) + 6$ hay $y = 8x - 2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là

(A) $y = 3x - 5$. (B) $y = -3x + 13$. (C) $y = 3x + 13$. (D) $y = -3x + 5$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 2$.
Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{x + 1}{x - 2} = 4 \\ \Rightarrow \quad & x + 1 = 4(x - 2) \\ \Leftrightarrow \quad & x = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Ta có: $y' = \dfrac{-3}{(x - 2)^2} \Rightarrow y'(3) = -3$.
Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = -3(x - 3) + 4$ hay $y = -3x + 13$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x - 1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1 tạo với hai trục tọa độ Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) 9. (D) $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.
Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-1} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x-1 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2 \,(\text{thỏa mãn}) \end{aligned}$$

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -1$.
Phương trình tiếp tuyến là $y = -1(x-2)+1$ hay $y = -x+3$.
Tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(3\ 0); B(0\ 3)$.
Do đó diện tích tam giác OAB là $\dfrac{9}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hàm số $y = \ln(x+1) + \ln x$ có đồ thị (C), điểm $M \in (C)$ có tung độ bằng $\ln 2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là
(A) $y = -\dfrac{3}{2}x + 3 + \ln 2$. (B) $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} + \ln 2$. (C) $y = 3x - 1$. (D) $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.
Điều kiện: $x > 0$.
Hoành độ tiếp điểm M là nghiệm phương trình $\ln x + \ln(x+1) = \ln 2 \ (x > 0)$.
Ta có: $\ln x + \ln(x+1) = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.
$y = \ln x + \ln(x+1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{3}{2}$.
Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = \dfrac{3}{2}(x-1) + \ln 2$ hay $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} + \ln 2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hàm số $y = x\ln(x-1)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là
(A) $y = 0$. (B) $y = x - 1$. (C) $y = 2x - 4$. (D) $y = 2x + 4$.

Lời giải.
Điều kiện: $x > 1$. Tung độ tiếp điểm bằng 0.
Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm phương trình

$$\begin{aligned} & x\ln(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \ln(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2. \,(\text{do } x > 1) \end{aligned}$$

Ta có: $y' = \ln(x-1) + \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow y'(2) = 2$.
Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 2(x-2)$ hay $y = 2x - 4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $y_0 = -15$ là
(A) $y = 24x + 9$. (B) $y = 24x + 39$. (C) $y = -15$. (D) $y = 24x - 39$.

Lời giải.
Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, do $y_0 = -15$ nên hoành độ x_0 là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} & y_0 = -15 \\ \Leftrightarrow \quad & x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 + 1 = -15 \\ \Leftrightarrow \quad & x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 + 16 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_0 = -1. \end{aligned}$$

Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 9$ nên $y'(-1) = 24$.
Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 24(x+1) - 15 = 24x + 9$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất tiếp xúc với (C) tại điểm có tung độ bằng
(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{151}{27}$. (C) $\frac{113}{27}$. (D) $\frac{5}{3}$.

Lời giải.
Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên (C). Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc k là

$$k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + 2 = 3\left(x_0^2 - \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{9}\right) + \frac{5}{3} = 3\left(x_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3}.$$

Do đó ta có $\min k = \frac{5}{3}$ đạt được khi $x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{151}{27}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hàm số $y = \log_2 \frac{x+3}{2-x}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $d: y = 2$ là
(A) $y = \frac{5}{4\ln 2}x - \frac{5}{4\ln 2}$. (B) $y = \frac{1}{4\ln 2}x + 2 - \frac{5}{4\ln 2}$.
(C) $y = x + 2 - \frac{5}{4\ln 2}$. (D) $y = \frac{5}{4\ln 2}x + 2 - \frac{5}{4\ln 2}$.

Lời giải.
Gọi $M(a; b)$ là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng d.
Ta có $M \in (C) \Rightarrow b = \log_2 \frac{a+3}{2-a}, (-3 < a < 2)$ và $M \in (d) \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow M(1; 2)$.
Phương trình cần tìm là $y = y'(1) \cdot (x-1) + 2$.
Lại có $y' = \frac{5}{(2-x)(x+3)\ln 2} \Rightarrow y'(1) = \frac{5}{4\ln 2}$.
Vậy $y = \frac{5}{4\ln 2}x + 2 - \frac{5}{4\ln 2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Biết đường thẳng $y = 2\ln 4 \cdot x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = 4^{2x}$ khi đó giá trị tham số m bằng
(A) $2\ln 4 - 1$. (B) 1 hoặc 3. (C) 1. (D) 1 hoặc $2\ln 4 - 1$.

Lời giải.
Đường thẳng $y = 2\ln 4 \cdot x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = 4^{2x}$ khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4 \cdot x + m \\ 2 \cdot 4^{2x} \ln 4 = 2\ln 4 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có $\begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4 \cdot x + m \\ 2 \cdot 4^{2x} \ln 4 = 2\ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4 \cdot x + m \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$?
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.
Ta có: $y' = 3x^2 - 8x + 3$.
Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -2$, hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình

$$3x^2 - 8x + 3 = -2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$

• Với $x=1 \Rightarrow y=-3$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-2(x-1)-3 \Leftrightarrow y=-2x-1$ (loại vì trùng với đường thẳng Δ).
• Với $x=\dfrac{5}{3} \Rightarrow y=-\dfrac{121}{27}$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-2\left(x-\dfrac{5}{3}\right)-\dfrac{121}{27} \Leftrightarrow y=-2x-\dfrac{31}{27}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-7x+2$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc lớn nhất có phương trình là
(A) $y=4x-1$. (B) $y=4x+1$. (C) $y=-4x-1$. (D) $y=-4x+1$.
Lời giải.
Ta có: $y'=-3x^2+6x-7=-3(x-1)^2-4\le -4$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1 \Rightarrow y=-3$.
Do đó, tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc lớn nhất bằng -4 và là tiếp tuyến tại điểm $M(1;-3)$.
Phương trình tiếp tuyến là $y=-4(x-1)-3 \Leftrightarrow y=-4x+1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+23$ tại điểm $A(2;-5)$ vuông góc với đường thẳng $x+4y-2019=0$. Tính $2a+b-4$.
(A) 15. (B) 23. (C) -23. (D) -15.
Lời giải.
Ta có $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$.
Đường thẳng $x+4y-2019=0$ có hệ số góc $k=-\dfrac{1}{4}$.
Suy ra $f'(2)=4 \Leftrightarrow 4(8a+b)=4 \Leftrightarrow 8a+b=1$.
$A(2;-5)$ thuộc đồ thị hàm số nên $16a+4b+23=-5 \Leftrightarrow 4a+b=-7$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 8a+b=1 \\ 4a+b=-7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} a=2 \\ b=-15 \end{cases} \\ \Rightarrow\ &2a+b-4=-15. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): f(x)=x^4-8x^2+35$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tung độ tiếp điểm.
(A) -35. (B) 35. (C) -19. (D) 19.
Lời giải.
Cách 1:
Đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đường cong $(C): f(x)=x^4-8x^2+35$ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4-8x^2-35=m \\ \left(x^4-8x^2-13\right)'=m' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-8x^2-35=m & (1) \\ 4x^3-16x=0. & (2) \end{cases}$$

Từ $(2) \Rightarrow 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2. \end{array}\right.$
• Với $x=0$ thay vào (1) ta được $m=35$.
• Với $x=2$ thay vào (1) ta được $m=19$.
• Với $x=-2$ thay vào (1) ta được $m=19$.
Vì đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đồ thị $(C): f(x)=x^4-8x^2+35$ tại hai điểm phân biệt, tức là phương trình (2) có 2 nghiệm kép. Thử lại, ta có $m=19$ thỏa mãn.

Khi đó, tung độ tiếp điểm là $y = 19$.

Cách 2:

Dựa vào dạng đồ thị của hàm trùng phương ta thấy đường thẳng $y = m$ (song song với trục Ox) tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C) : f(x) = x^4 - 8x^2 + 35$ chỉ có thể tại hai điểm cực tiểu hoặc điểm cực đại. Do đường thẳng $y = m$ tiếp xúc tại hai điểm phân biệt nên $y = m$ đi qua hai điểm cực tiểu.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	19	$\nearrow$	35	$\searrow$	19	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận: Đường thẳng $y = 19$ tiếp xúc với (C) tại hai điểm cực tiểu hay tung độ tiếp điểm là 19.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \ln(2x - 2)$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \ln(2x - 2)$. Điều kiện $x > 1$.

Đường thẳng $y = -x + 2$ có hệ số góc $k_1 = -1$, suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k_2 = 1$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $f'(x) = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x - \frac{1}{x-1} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 \,(\text{do điều kiện } x > 1) \end{aligned}$$

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hàm số $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất là

(A) $y = 0$. (B) $y = 2x + 1$. (C) $y = x + 2$. (D) $y = 2x$.

Lời giải.

Gọi $M(a; \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm M là $y'(a) = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a} \geq 2\sqrt{\mathrm{e}^a \mathrm{e}^{-a}} = 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\mathrm{e}^a = e^{-a} \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy tiếp tuyến tại điểm $M(0; 0)$ có hệ số góc nhỏ nhất $k = 2$.

Khi đó, phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 2x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$.

(A) $y = -\dfrac{33}{4}x + 11$. (B) $y = -\dfrac{33}{4}x + 12$. (C) $y = -\dfrac{33}{4}x + 1$. (D) $y = -\dfrac{33}{4}x + 2$.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; x_0^3+3x_0^2-6x_0+1\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.
Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=(3x_0^2+6x_0-6)(x-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$.
Tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ suy ra

$$\begin{aligned} 1 &= (3x_0^2+6x_0-6)(-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1 \\ &\Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2=0 \\ &\Leftrightarrow x_0=0 \text{ hoặc } x_0=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

- Với $x_0=0$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=-6x+1$.
- Với $x_0=-\frac{3}{2}$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{33}{4}x+1$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\,(1;0)$

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; x_0^3-3x_0^2+2\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y'=3x^2-6x$.
Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=\left(3x_0^2-6x_0\right)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$.
Tiếp tuyến đi qua $A\,(1;0)$ nên

$$\begin{aligned} &\left(3x_0^2-6x_0\right)(1-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2=0 \\ \Leftrightarrow\ &-2x_0^3+6x_0^2-6x_0+2=0 \\ \Leftrightarrow\ &x_0=1 \end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một tiếp tuyến cần tìm.
Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A\,(4;1)$?

A) 1. B) 2. C) 3. D) 0.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$. Gọi $M\left(x_0; \dfrac{x_0^2-x_0-2}{x_0-3}\right)$ là tọa độ tiếp điểm.
Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=\dfrac{x_0^2-6x_0+5}{(x_0-3)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0^2-x_0-2}{x_0-3}$.
Tiếp tuyến đi qua $A\,(4;1)$ nên

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x_0^2-6x_0+5}{(x_0-3)^2}(4-x_0)+\frac{x_0^2-x_0-2}{x_0-3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0\neq 3 \\ 5x_0^2-22x_0+17=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=\dfrac{17}{5}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết rằng có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A\,(0;1)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

A) 1. B) -1. C) -2. D) 2.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$. Gọi $M\left(x_0; \dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0}{x_0+1}$.

Tiếp tuyến đi qua $A(0;1)$ nên

$$\begin{aligned} 1 = & \frac{2}{(x_0+1)^2}(-x_0) + \frac{2x_0}{x_0+1} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ (x_0+1)^2 = -2x_0 + 2x_0(x_0+1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = 1-\sqrt{2} \\ x_0 = 1+\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra tích hệ số góc cần tìm là: $y'\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot y'\left(1+\sqrt{2}\right) = \dfrac{2}{\left(1-\sqrt{2}+1\right)^2}\cdot\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{2}+1\right)^2} = 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - 9x - 9m$ tiếp xúc với trục hoành. Tổng các phần tử của S bằng

A) 1. B) 0. C) 3. D) -3.

Lời giải.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + mx^2 - 9x - 9m = 0 \quad (1) \\ 3x^2 + 2mx - 9 = 0. \qquad (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x+m) = 0.$

- Với $x = 3$, thay vào (2) ta được $m = -3$.
- Với $x = -3$, thay vào (2) ta được $m = 3$.
- Với $x = -m$, thay vào (2) ta được $m = \pm 3$.

Vậy $S = \{-3; 3\}$. Khi đó tổng các phần tử của S bằng 0.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3ax + b$ với a, b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1. Khi đó giá trị lớn nhất của $a^2 - b^2$ bằng

A) 0. B) $\dfrac{3}{2}$. C) -2. D) $\dfrac{-2}{3}$.

Lời giải.

Giả sử $M(x_1\ y_1), N(x_2\ y_2)$.

Ta có $y' = 3x^2 + 3a$ suy ra $3x_1^2 + 3a = 3x_2^2 + 3a = 3 \Rightarrow x_1^2 + a = x_2^2 + a = 1$.

Mặt khác, $y_1 = x_1^3 + 3ax_1 + b = x_1^3 + ax_1 + 2ax_1 + b = x_1\left(x_1^2 + a\right) + 2ax_1 + b = (2a+1)x_1 + b$.

Tương tự $y_2 = (2a+1)x_2 + b$.

Suy ra phương trình đường thẳng MN là $(2a+1)x - y + b = 0$.

Giả thiết có $\mathrm{d}(O, MN) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{\sqrt{(2a+1)^2+1}} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 4a^2 + 4a + 2.$

Vậy $a^2 - b^2 = -3a^2 - 4a - 2 = -3\left(a + \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{2}{3} \leq \dfrac{-2}{3}$.

Giá trị lớn nhất của $a^2 - b^2$ bằng $\dfrac{-2}{3}$ khi $a = \dfrac{-2}{3}, b = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = x - \sqrt{x^2+1}\ \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Giả sử Δ cắt Ox tại điểm A và cắt Oy tại điểm B. Khi đó diện tích của tam giác OAB bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 8.

Lời giải.

Đặt $t = x + \sqrt{x^2+1}$ suy ra $t > 0$ (vì $\sqrt{x^2+1} > |x|$ với mọi x và $|x| + x \geq 0$ với mọi x).

Ta có $\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -1$ suy ra $x - \sqrt{x^2+1} = \dfrac{-1}{t}$.

Vậy $f(t) = \dfrac{-1}{t}$ với $t > 0$ hay $f(x) = \dfrac{-1}{x}$ với $x > 0$.

Có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$ suy ra tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{2}$ là đường thẳng Δ có phương trình: $y = f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4x - 4$.

Khi đó Δ cắt Ox tại điểm $A(1;0)$ và cắt Oy tại điểm $B(0;-4)$ nên diện tích của ΔOAB là

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2}|1||-4| = 2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hàm số: $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$ thỏa mãn phương trình $|x_0| - 2 = 0$ là

(A) $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{1}{9}$, $y = 4x + 14$. (B) $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$, $y = 4x + 1$.

(C) $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{1}{9}$, $y = 4x + 1$. (D) $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$, $y = -4x + 14$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0\ y_0) \in (C), (x_0 \neq 1)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) :

$y = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$ với $y'(x_0) = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}$ và $y_0 = \dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$.

Do $|x_0| - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$, hay $M\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$, $M(2;6)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$ là $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6)$ là $y = -4x + 14$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$, $y = -4x + 14$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho hàm số $y = 4x^2(1-x) + x^4$ (C). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với parabol $(P) : y = x^2$ là

(A) $y = 0$; $y = 1$; $y = 24x - 6$. (B) $y = 9$; $y = 1$; $y = 24x - 6$.

(C) $y = 0$; $y = 5$; $y = 24x - 63$. (D) $y = 0$; $y = 1$; $y = 24x - 63$.

Lời giải.

Ta có: $y = 4x^2(1-x) + x^4 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$.

Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$ là

$$y = \left(4x_0^3 - 12x_0^2 + 8x_0\right)(x - x_0) + x_0^4 - 4x_0^3 + 4x_0.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và parabol (P) là

$$\begin{aligned} & x_0^4 - 4x_0^3 + 4x_0^2 = x_0^2 \\ \Leftrightarrow\ & x_0^2(x_0^2 - 4x_0 + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

• $x_0 = 0$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 0$.
• $x_0 = 1$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$.
• $x_0 = 3$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 24x - 63$
Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Gọi $M(x_0, y_0)$, $x_0 < -3$ là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B thỏa mãn $AI^2 + IB^2 = 40$. Khi đó tích $x_0 y_0$ bằng

(A) -1. (B) -12. (C) 7. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị tại $M(x_0; y_0)$ là $y = \dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0 - 1}{x_0 + 1}$.

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang $y = 2$ là $A(2x_0 + 1; 2)$, $IA = 2|x_0 + 1|$.

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng $x = -1$ là $B\left(-1; \dfrac{2x_0 - 4}{x_0 + 1}\right)$, $IB = \dfrac{6}{|x_0 + 1|}$.

Theo bài ra

$$\begin{aligned}
& AI^2 + IB^2 = 40 \\
\Leftrightarrow\ & 4(x_0+1)^2 + \frac{36}{(x_0+1)^2} = 40 \\
\Leftrightarrow\ & 4(x_0+1)^4 - 40(x_0+1)^2 + 36 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} (x_0+1)^2 = 9 \\ (x_0+1)^2 = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x_0 + 1 = \pm 3 \\ x_0 + 1 = \pm 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x_0 = 2; x_0 = -4 \\ x_0 = 0; x_0 = -2. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Do $x_0 < -3$ nên $x_0 = -4$ suy ra điểm $M(-4; 3)$. Vậy $x_0 y_0 = -12$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (H). Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (H).

(A) $M(0; 1)$. (B) $M_1(0; 1)$ và $M_2(0; -1)$.
(C) Không tồn tại. (D) $M(0; -1)$.

Lời giải.

Ta gọi $M(0; a)$ là điểm cần tìm. Phương trình đường thẳng d đi qua Mcó dạng $y = kx + a$. Đường thẳng d là tiếp tuyến duy nhất của $(H) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = kx + a \quad (1) \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2} = k \qquad (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Thế (2) vào (1) ta có phương trình $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}x + a$. $\quad (*)$.

Điều kiện $x \neq 1$.
Ta có $(*) \Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(a+1)x + a + 1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$. $\quad (**)$
Yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình $(**)$ có một nghiệm $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 1 \\ \Delta=0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}; a=1 \\ \begin{cases} x=0; a=-1 \\ -2\neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}; a=1 \\ x=0; a=-1. \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(0;1)$ và $M_2(0;-1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến này cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại các điểm A, B phân biệt thỏa mãn $AB=\sqrt{82}\cdot OB$.

(A) $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{13}{9}$ và $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{25}{9}$.
(B) $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{25}{9}$.
(C) $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{13}{9}$.
(D) $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{17}{9}$ và $y=\dfrac{1}{9}x+\dfrac{25}{9}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Gọi $M\left(a;\ \dfrac{2a-1}{a-1}\right), (a\neq 1)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y=\dfrac{-1}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{a-1}$.

Tiếp tuyến cắt trục Ox tại $A(2a^2-2a+1;0)$; cắt trục Oy tại $B\left(0;\ \dfrac{2a^2-2a+1}{(a-1)^2}\right)$.

Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2+OB^2=AB^2$.
Mặt khác $AB=\sqrt{82}\cdot OB \Rightarrow OA^2+OB^2=82\cdot OB^2 \Leftrightarrow OA=9OB$. (1)
Từ (1) ta có

$$2a^2-2a+1=9.\frac{2a^2-2a+1}{(a-1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=4. \end{array}\right.$$

Với $a=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{13}{9}$.
Với $a=4$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{25}{9}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ tại điểm có hoành độ x_0 là nghiệm của phương trình $16x^2-2x-8=6\sqrt{2x-1}$ là

(A) $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.
(B) $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{4}$.
(C) $y=\dfrac{9}{2}$.
(D) $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} & 16x^2-2x-8=6\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 16x^2=\left(3+\sqrt{2x-1}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{2x-1}+3-4x\right)\left(\sqrt{2x-1}+3+4x\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{2x-1}=4x-3\ (\text{vì } \sqrt{2x-1}+3+4x>0,\ \forall x\geq\frac{1}{2}) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 16x^2-26x+10=0 \\ x\geq\dfrac{3}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x=1. \end{aligned}$$

Lại có $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Với $x=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ tại $M\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ là

$$y=\frac{3}{4}(x-1)+\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ không nhỏ hơn 3, biết tiếp tuyến cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân.

A $y=x-5$. B $y=-x+5$. C $y=x-1$. D $y=-x+1$.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)(x_0\geq 3)$ có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Do tiếp tuyến cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân nên tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=x$.

Suy ra $\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}=\dfrac{-1}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$ so điều kiện thì ta loại $x_0=1$.

Với $x_0=3$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-x+5$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết $y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến có hoành độ tiếp điểm là số nguyên dương. Tính $2a+b$.

A -2. B 9. C 7. D 5.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Ta có $f'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x_0-1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất mà x_0 phải là số nguyên dương khác 1 nên $x_0=2$ thỏa mãn yêu cầu.

Suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y=-2(x-2)+5 \Leftrightarrow y=-2x+9$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{3-x}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $\Delta: y=-4x+m$. Tính tổng tất cả các giá trị của m thỏa mãn Δ là tiếp tuyến của (C)

A 10. B 3. C -13. D -10.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Đường thẳng $\Delta: y=-4x+m$ là tiếp tuyến của (C) suy ra $f'(x_0)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-4(x-0)+3 \Leftrightarrow y=-4x+3$.

Với $x_0=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-4(x+2)-5 \Leftrightarrow y=-4x-13$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu là $m=3; m=-13$ suy ra tổng các giá trị m là -10.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $y=x^2\left(x^2-2\right)$ có đồ thị (C). Gọi $M(0;b)$ là điểm thuộc trục Oy mà từ đó kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C). Giá trị của b là

A $0<b<1$. B $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$. C $-1<b<1$. D $0<b<\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d qua $M(0;b)$ có hệ số góc k là $d: y = kx + b$.
d là tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 = kx + b \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases} \Rightarrow b = -3x^4 + 2x^2. \ (1)$$

Xét hàm số: $g(x) = -3x^4 + 2x^2$.

$g'(x) = -12x^3 + 4x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = b$ là đường thẳng song song với trục hoành.
Qua $M(0;b)$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C) khi phương trình (1) có 4 nghiệm hay đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm.
Dựa vào bảng biến thiên suy ra yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $0 < b < \dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có hai tiếp tuyến của (C) qua $A(a;2)$ với hệ số góc k_1, k_2 thỏa mãn $k_1 + k_2 + 10k_1^2 \cdot k_2^2 = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 7. (B) $\dfrac{7}{2}$. (C) $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$. (D) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $A(a;2)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-a) + 2$.
(d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} k(x-a) + 2 = \dfrac{x+1}{x-1} \\ k = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2(x-a)}{(x-1)^2} + 2 = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 6x + 2a + 3 = 0. \quad (1) \end{cases}$$

Có 2 tiếp tuyến của (C) qua A suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2a - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3 \\ a \neq 1. \end{cases} \quad (*)$$

Hệ số góc của các tiếp tuyến là $k_1 = \dfrac{-2}{(x_1-1)^2}$, $k_2 = \dfrac{-2}{(x_2-1)^2}$ với x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

Ta có:

$$\begin{aligned} k_1+k_2 &= -2\left[\frac{1}{(x_1-1)^2}+\frac{1}{(x_2-1)^2}\right] \\ &= -2\left[\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)+2}{(x_1x_2-x_1-x_2+1)^2}\right] \\ &= \frac{2a-10}{(a-1)^2}. \\ k_1\cdot k_2 &= \frac{4}{[(x_1-1)(x_2-1)]^2} \\ &= \frac{4}{[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]^2} \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}. \end{aligned}$$

Từ giả thiết:

$$\begin{aligned} & k_1+k_2+10k_1^2\cdot k_2^2=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2a-10}{(a-1)^2}+\frac{10}{(a-1)^4}=0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a\neq 1 \\ 2a^3-14a^2+22a=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=0 \\ a=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được: $a=0$ hoặc $a=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc trục hoành sao cho từ đó có thể kẻ đến (C) duy nhất một tiếp tuyến?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) Vô số.

Lời giải.

Đường thẳng (d) qua $A(a;0)\in Ox$, $a\in\mathbb{Z}$ có hệ số góc k có phương trình là $y=k(x-a)$.
(d) là tiếp tuyến duy nhất với (C) khi hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^3-3x^2+4=k(x-a) \\ 3x^2-6x=k \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} (x-2)\left(x^2-x-2\right)=k(x-a) \\ 3x(x-2)=k \end{cases} \\ \Rightarrow\ & (x-2)\left[2x^2-(3a-1)x+2\right]=0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x-2=0 \\ 2x^2-(3a-1)x+2=0. \qquad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=2$.

Trường hợp 1:

Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow -1<a<\dfrac{5}{3}$. Vì $a\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} a=0 \\ a=1. \end{cases}$

Trường hợp 2:

Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ \dfrac{3a-1}{4}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \\ a=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \varnothing.$

Vậy tồn tại hai điểm có tọa độ nguyên thỏa mãn là $A(0;0)$ hoặc $A(1;0)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm a để từ điểm $A(0;a)$ có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục hoành.

(A) $\begin{cases} a>-2 \\ a \neq 1 \end{cases}$. (B) $\left[\begin{array}{l} a>-\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{array}\right.$. (C) $\begin{cases} a>-\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$. (D) $-2<a<-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D=\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right)$ có phương trình:

$$y=-\frac{3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-1}.$$

Tiếp tuyến đi qua $A(0;a)$ nên

$$\begin{aligned} & \frac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\frac{x_0+2}{x_0-1}=a \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ 3x_0+(x_0+2)(x_0-1)=a(x_0-1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ (a-1)x_0^2-2(a+2)x_0+a+2=0 \ (1). \end{cases} \end{aligned}$$

Để từ $A(0;a)$ kẻ đến (C) hai tiếp tuyến thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ \Delta'=(a+2)^2-(a-1)(a+2)>0 \\ (a-1)-2(a+2)+a+2 \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a \neq 1 \\ a>-2 \end{cases} (*) \end{aligned}$$

Gọi $x_1;x_2$ là các nghiệm của phương trình (1).
Khi đó tọa độ các tiếp điểm là $E\left(x_1;\dfrac{x_1+2}{x_1-1}\right), F\left(x_2;\dfrac{x_2+2}{x_2-1}\right)$.
Để các tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \frac{x_1+2}{x_1-1}\cdot\frac{x_2+2}{x_2-1}<0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\dfrac{a+2}{a-1}+2\dfrac{2(a+2)}{a-1}+4}{\dfrac{a+2}{a-1}-\dfrac{2(a+2)}{a-1}+1}<0 \\ \Leftrightarrow & \frac{9a+6}{-3}<0 \\ \Leftrightarrow & 9a+6>0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad a > -\frac{2}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ suy ra $\begin{cases} a > -\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - x - 4m$ có đồ thị (C_m) và A là điểm cố định có hoành độ âm của (C_m). Giá trị của m để tiếp tuyến tại A của (C_m) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất là

A $m = -6$. B $m = 2$. C $m = -3$. D $m = \dfrac{-7}{2}$.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; y_0)$ với $x_0 < 0$ là điểm cố định cần tìm.Khi đó ta có

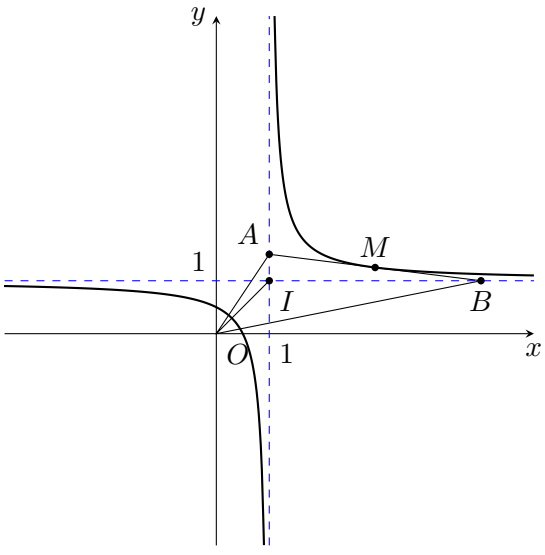
$$\begin{aligned} & y_0 = -x_0^3 + mx_0^2 - x_0 - 4m, \forall m \\ \Leftrightarrow \quad & (x_0^2 - 4)m - x_0^3 - x_0 - y_0 = 0, \forall m \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x_0^2 - 4 = 0 \\ -x_0^3 - x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} x_0 = -2 \ \ (\text{vì } x_0 < 0) \\ y_0 = 10 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & A(-2; 10). \end{aligned}$$

Ta có $y' = -3x^2 + 2mx - 1 \Rightarrow y'(-2) = -4m - 13$.
Phương trình tiếp tuyến Δ của (C_m) tại $A(-2; 10)$ là $y = (-4m-13)(x+2)+10$ hay $y = (-4m-13)x-8m-16$.
Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $d : y = x$.
Vì $\Delta \perp d \Leftrightarrow -4m - 13 = -1 \Leftrightarrow m = -3$.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0; y_0)$ (với $x_0 > 1$) là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S = x_0 + 4y_0$

A $S = 8$. B $S = \dfrac{17}{4}$. C $S = \dfrac{23}{4}$. D $S = 2$.

Lời giải.



Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tiệm cận đứng: $x = 1\,(d_1)$, tiệm cận ngang: $y = 1\,(d_2) \Rightarrow I(1; 1)$.
Ta có $y' = \dfrac{-2}{(2x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng $y=\dfrac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}$.

$A=\Delta\cap d_1\Rightarrow A\left(1;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$; $B=\Delta\cap d_2\Rightarrow B(2x_0-1;1)$; $\overrightarrow{IB}=(2x_0-2;0)$, $\overrightarrow{IA}=\left(0;\dfrac{1}{x_0-1}\right)$.

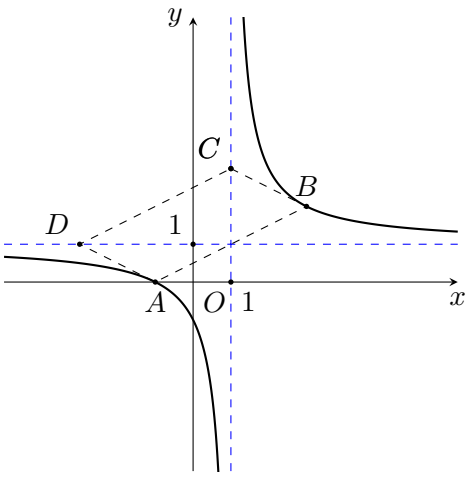
Ta có $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}OI\cdot IB\cdot\sin\widehat{OIB}=8\dfrac{1}{2}OI\cdot IA\cdot\sin\widehat{OIA}\Leftrightarrow IB=8IA$ (vì $\widehat{OIB}=\widehat{OIA}=135^0$)$\Leftrightarrow|2x_0-2|=8\left|\dfrac{1}{x_0-1}\right|\Leftrightarrow(x_0-1)^2=4\Rightarrow x_0=3$ (do $x_0>1$)$\Rightarrow y_0=\dfrac{5}{4}\Rightarrow S=x_0+4y_0=3+4\cdot\dfrac{5}{4}=8$.

Chọn đáp án A □

Câu 41.

Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau ($x_A<x_B$). Tiếp tuyến tại A cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại D, tiếp tuyến tại B cắt đường tiệm cận đứng của (C) tại C (tham khảo hình vẽ bên dưới). Chu vi tứ giác $ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A 16. B 8. C 20. D 12.



Lời giải.

Tiệm cận đứng: $x=1\,(d_1)$, tiệm cận ngang: $y=1\,(d_2)$.

Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là tiếp tuyến của (C) tại A, B. Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

$\Delta_1\parallel\Delta_2\Rightarrow y'(x_A)=y'(x_B)\Leftrightarrow\dfrac{-2}{(x_A-1)^2}=\dfrac{-2}{(x_B-1)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=x_B\ (l)\\x_A+x_B=2\end{array}\right.$.

Đặt $x_A=m$ với $m<1$. Suy ra $A\left(m;\dfrac{m+1}{m-1}\right)$, $B\left(2-m;\dfrac{m-3}{m-1}\right)$.

Tiếp tuyến tại A là Δ_1: $y=\dfrac{-2}{(m-1)^2}(x-m)+\dfrac{m+1}{m-1}$.

Tiếp tuyến tại B là Δ_2: $y=\dfrac{-2}{(m-1)^2}(x+m-2)+\dfrac{m-3}{m-1}$.

$D=\Delta_1\cap d_2\Rightarrow D(2m-1;1)$; $C=\Delta_2\cap d_1\Rightarrow C\left(1;\dfrac{m-5}{m-1}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\left(2-2m;\dfrac{-4}{m-1}\right)\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

$\overrightarrow{BC}=\left(m-1;\dfrac{-2}{m-1}\right)$.

Chu vi P hình bình hành $ABCD$ bằng

$P=2(AB+BC)=2\left(\sqrt{4(m-1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}}+\sqrt{(m-1)^2+\dfrac{4}{(m-1)^2}}\right)=6\sqrt{(m-1)^2+\dfrac{4}{(m-1)^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $(m-1)^2$ và $\dfrac{4}{(m-1)^2}$, ta có:

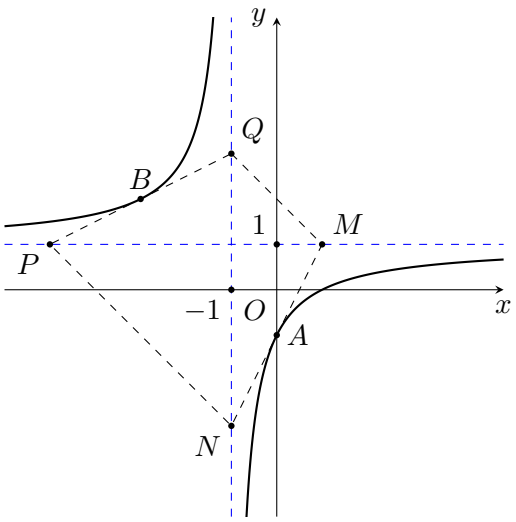
$P\geq6\sqrt{2\sqrt{(m-1)^2\cdot\dfrac{4}{(m-1)^2}}}=12$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow(m-1)^2=\dfrac{4}{(m-1)^2}\Leftrightarrow m=1-\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42.

Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) và các tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của (C) lần lượt tại các điểm M, N, P, Q (tham khảo hình vẽ bên dưới). Diện tích tứ giác $MNPQ$ có giá trị nhỏ nhất bằng

(A) 16. (B) 32. (C) 8. (D) 4.



Lời giải.

Tiệm cận đứng: $x=-1\,(d_1)$, tiệm cận ngang: $y=1\,(d_2)$. Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Xét điểm $A\left(a-1;\dfrac{a-2}{a}\right)\in(C)$, $a>0$.

Tiếp tuyến tại A là $\Delta_1: y=\dfrac{2}{a^2}(x-a+1)+\dfrac{a-2}{a}$.

$M=\Delta_1\cap d_2\Rightarrow M(2a-1;1)$; $N=\Delta_1\cap d_1\Rightarrow N\left(-1;\dfrac{a-4}{a}\right)$.

Xét điểm $B\left(b-1;\dfrac{b-2}{b}\right)\in(C)$, $b<0$.

Tiếp tuyến tại B là Δ_2:$y=\dfrac{2}{b^2}(x-b+1)+\dfrac{b-2}{b}$.

$P=\Delta_2\cap d_2\Rightarrow P(2b-1;1)$; $Q=\Delta_1\cap d_1\Rightarrow Q\left(-1;\dfrac{b-4}{b}\right)$.

$\overrightarrow{MP}=(2b-2a;0)$, $\overrightarrow{NQ}=\left(0;\dfrac{4}{a}-\dfrac{4}{b}\right)$.

Ta có $MP\perp NQ\Rightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}MP\cdot NQ=\dfrac{1}{2}\cdot 2\,|a-b|\cdot 4\left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right|=\dfrac{4(a-b)^2}{-ab}=\dfrac{4\left(a^2+b^2-2ab\right)}{-ab}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a^2 và b^2, ta có:

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=-2ab\Rightarrow S_{MNPQ}\geq\dfrac{4(-4ab)}{-ab}=16$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=-b$

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+3m$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Lời giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$; $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m.\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị đó có hai điểm cực trị (trong bài toán này là hai cực tiểu) thuộc trục hoành.

Khi đó ta có $\begin{cases}m>0\\f\left(\sqrt{m}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m^2-2m^2+3m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m(3-m)=0\end{cases}\Rightarrow m=3$.

Vậy có 1 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành?

(A) 2. (B) 0. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}=0 \\ \dfrac{\left(4x^3-3x^2-2m^2x+m^2\right)\left(x^2+1\right)-\left(x^4-x^3-m^2x^2+m^2x\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}=0 \\ \dfrac{\left(4x^3-3x^2-2m^2x+m^2\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}-\dfrac{\left(x^4-x^3-m^2x^2+m^2x\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-x^3-m^2x^2+m^2x=0 \quad (1) \\ 4x^3-3x^2-2m^2x+m^2=0. \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x\left(x^2-m^2\right)(x-1)=0 \Leftrightarrow x\in\{0;1;\pm m\}$.

∘ Khi $x=0$ thay vào (2) suy ra $m=0$.

∘ Khi $x=1$ thay vào (2) suy ra $m^2=1\Rightarrow m=\pm 1$.

∘ Khi $x=m$ thay vào (2) suy ra $2m^3-2m^2=0\Rightarrow m=1, m=0$.

∘ Khi $x=-m$ thay vào (2) suy ra $-2m^3-2m^2=0\Rightarrow m=-1, m=0$.

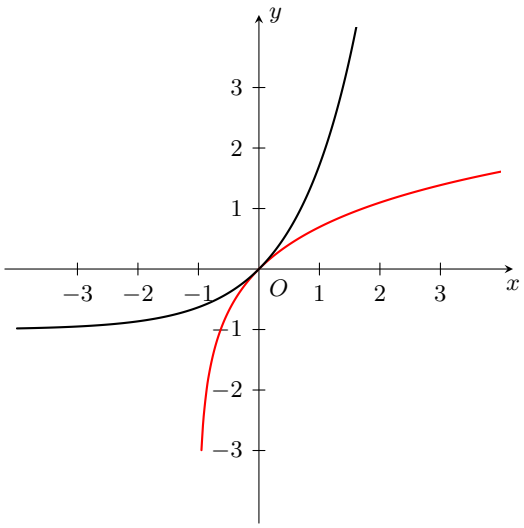
Vậy có ba giá trị của m.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$.

A $m=\mathrm{e}$. B $m=1$. C $m=-\mathrm{e}$. D $m=-1$.

Lời giải.



Đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} \mathrm{e}^x+m=\ln(x+1) \\ \left(\mathrm{e}^x+m\right)'=\left[\ln(x+1)\right]' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^x+m=\ln(x+1) \quad (1) \\ \mathrm{e}^x=\dfrac{1}{x+1}. \quad (2) \end{cases}$

Dễ thấy rằng hàm số $y=\mathrm{e}^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=\dfrac{1}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ và $x=0$ là nghiệm của phương trình (2) nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Thay $x=0$ vào phương trình (1) ta được $m=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Số tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1): y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+4$và $(C_2): y=x^2+4$ là

A 0. B 1. C 4. D 5.

Lời giải.

Gọi phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị là $y=ax+b$, hoành độ tiếp điểm của $(C_1),(C_2)$ lần lượt là x_1,x_2.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{x_1^4}{4}-2x_1^2+4=ax_1+b \quad (1)\\ x_1^3-4x_1=a \quad (2)\\ x_2^2+4=ax_2+b \quad (3)\\ 2x_2=a. \quad (4)\end{cases}$

Từ (4) ta có $x_2=\dfrac{a}{2}$, thế vào (3) suy ra $b=4-\dfrac{a^2}{4}$ (5).

Thế (2) vào (5) ta được $b=4-\dfrac{\left(x_1^3-4x_1\right)^2}{4}$ (6).

Thế (2) và (6) vào (1) ta có

$$\begin{aligned} & \frac{x_1^4}{4}-2x_1^2+4=x_1\left(x_1^3-4x_1\right)+4-\frac{\left(x_1^3-4x_1\right)^2}{4}\\ \Leftrightarrow\ & x_1^2\left(-x_1^2+8+4x_1^2-16-x_1^4+8x_1^2-16\right)=0\\ \Leftrightarrow\ & x_1^2\left(-x_1^4+11x_1^2-24\right)=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x_1=0\\ x_1=\pm\sqrt{3}\\ x_1=\pm\sqrt{8}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Thế vào (2) ta được 5 giá trị của a là $a=0$, $a=\pm\sqrt{3}$, $a=\pm 8\sqrt{2}$. Do vậy hai đồ thị có 5 tiếp tuyến chung.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho hai hàm số $y=x^2$ (C_1) và $y=\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}$ (C_2). Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1),(C_2)$ có hệ số góc dương là

(A) $y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{16}$. (B) $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{16}$. (C) $y=\dfrac{-1}{4}x-\dfrac{1}{16}$. (D) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Gọi d là phương trình tiếp tuyến chung của $(C_1),(C_2)$ và $x_0=a$ là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$.

d tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}=2ax-a^2 \ (1)\\ \dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}}=2a \ (2)\end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta có $\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}=\dfrac{-x^2}{\sqrt{5-x^2}}-\dfrac{x^2}{4(5-x^2)}$. Đặt $t=\sqrt{5-x^2}$ $(t>0)$.

Ta có phương trình:

$$t-\frac{41}{16}=\frac{t^2-5}{t}+\frac{t^2-5}{4t^2}\Leftrightarrow 45t^2-80t-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\dfrac{-2}{9}.\end{array}\right.$$

Do điều kiện: $t>0$ nên nhận $t=2$. Với $t=2$ suy ra $\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1.\end{array}\right.$ thế vào (2) ta có $\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{4}\\ a=\dfrac{-1}{4}.\end{array}\right.$

Do đó $(C_1),(C_2)$ có hai tiếp tuyến chung là $\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{16}\\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}.\end{array}\right.$

Vậy phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1),(C_2)$ có hệ số góc dương là $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$, biết $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$ là đường thẳng nào sau đây?

(A) $3x-7y+6=0$. (B) $x-7y-6=0$. (C) $x+7y+6=0$. (D) $3x+7y+6=0$.

Lời giải.

Ta có: $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)\Leftrightarrow f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$.

Đạo hàm hai vế

$$f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x.$$

Ta có $4f(2x+1)f'(2x+1)-3f^2(1-x)f'(1-x)=1$.

Cho $x=0$ ta được

$$4f(1)f'(1)-3f^2(1)f'(1)=1\Leftrightarrow f(1)f'(1)[4-3f(1)]=1 \quad (1)$$

Từ $f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$.

Cho $x=0$ ta có $f^2(1)+f^3(1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1)=0\\ f(1)=-1.\end{array}\right.$

Nếu $f(1)=0$ thì mâu thuẫn với (1), do đó $f(1)=-1$, khi đó $(1)\Leftrightarrow -f'(1).(4+3)=1\Leftrightarrow f'(1)=-\dfrac{1}{7}$.

Phương trình tiếp tuyến $y=-\dfrac{1}{7}(x-1)-1\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{6}{7}$ hay $x+7y+6=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2\cdot g(x)+36x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

(A) $y=-3x$. (B) $y=2x-4$. (C) $y=-x+2$. (D) $y=x$.

Lời giải.

Ta có $f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2\cdot g(x)+36x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (1)

Vì (1) đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ nên cũng đúng với $x=0\Rightarrow f^3(2)-2f^2(2)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(2)=0\\ f(2)=2.\end{array}\right.$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta có:

$$-3f^2\cdot(2-x)\cdot f'(2-x)-12f(2+3x)\cdot f'(2+3x)+2x\cdot g(x)+x^2\cdot g'(x)+36=0\,,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Cho $x=0\Rightarrow -3f^2(2)\cdot f'(2)-12f(2)\cdot f'(2)+36=0$ (2).

Ta thấy $f(2)=0$ không thỏa mãn (2) nên $f(2)=2$, khi đó $f'(2)=1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)\Leftrightarrow y=x.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm I là giao của hai đường tiệm cận của (C). M là một điểm bất kì trên (C) và tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A,B. Biết chu vi tam giác IAB có giá trị nhỏ nhất bằng $a+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a-b+4=0$. (B) $2a-b<0$. (C) $a^2+b^2=100$. (D) $\log_a b=2$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Giả sử $M(x_0\ y_0)\in(C),(x_0\neq 1)$ suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm M có phương trình

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{x-1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của (C).

Mà $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C), suy ra $I(1;2)$.

Điểm $A\left(1;\dfrac{2x_0}{x_0-1}\right)$ là giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến, điểm $B\left(2x_0-1;2\right)$ là giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến.

Ta có chu vi của tam giác IAB bằng $IA+IB+AB=\dfrac{2}{|x_0-1|}+2\left|x_0-1\right|+\sqrt{4\left(x_0-1\right)^2+\dfrac{4}{\left(x_0-1\right)^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $IA+IB+AB\geq 2\sqrt{4}+\sqrt{4\cdot 2}=4+\sqrt{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x_0=0\\&x_0=2.\end{aligned}\right.$

Vậy chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4+\sqrt{8}$ khi $M\left(0;1\right)$ hoặc $M\left(2;3\right)$.

Suy ra $a=4,b=8$ nên $a-b+4=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+4m$ có đồ thị (C_m). Tìm tham số m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $(d):y=3$ tại hai điểm phân biệt

(A) $\left[\begin{aligned}&m=1\\&m=3\end{aligned}\right.$. (B) $\left[\begin{aligned}&m=1\\&m=16\end{aligned}\right.$. (C) $\left[\begin{aligned}&m=2\\&m=13\end{aligned}\right.$. (D) $\left[\begin{aligned}&m=1\\&m=13\end{aligned}\right.$.

Lời giải.

Ta có (C_m) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}x_0^4-(m+1)x_0^2+4m=3 & (1)\\4x_0^3-2(m+1)x_0=0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Từ phương trình $(2)\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0^2=\dfrac{m+1}{2}$.

⋆ Nếu $x_0=0$ thay vào (1) ta được $m=\dfrac{3}{4}$.

⋆ Nếu $x_0^2=\dfrac{m+1}{2}$ thay vào (1) ta được $\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2-\dfrac{(m+1)^2}{2}+4m=3\Leftrightarrow m^2-14m+13=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=1\\&m=13.\end{aligned}\right.$

Thử lại:

Khi $m=\dfrac{3}{4}$ thì (C_m) tiếp xúc với (d) tại chỉ một điểm $(0;\,3)$ nên $m=\dfrac{3}{4}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Khi $m=1$ thì $x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=\pm1$, suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $(1;\,3)\,;\,(-1;\,3)$.

Khi $m=13$ thì $x_0^2=7\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{7}$, suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $\left(\sqrt{7};\,3\right),\ \left(-\sqrt{7};\,3\right)$.

Vậy các giá trị m cần tìm là $m=1;\ m=13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Giá trị m để đường thẳng $\Delta:y=m(2-x)+2$ cắt đồ thị $(C):y=-x^3+3x^2-2$ tại 3 điểm phân biệt $A(2\,;2),B,C$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất là:

(A) $m=1$. (B) $m=-2$. (C) $m=2$. (D) $m=-1$.

Lời giải.

Ta có: $y=-x^3+3x^2-2;\ y'=-3x^2+6x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C):

$$\begin{aligned}&-x^3+3x^2-2=m(2-x)+2\quad(1)\\\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x=2\quad(y=2)\\&x^2-x-2-m=0.\quad(2)\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2;2)$, B, $C\Leftrightarrow(1)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow(2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ &\begin{cases}\Delta>0\\(2)^2-(2)-2-m\neq0\end{cases}\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}4m+9>0\\-m\neq0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{4} \\ m \neq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Với điều kiện (*), phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_B và x_C.

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_B + x_C = 1 \\ x_B.x_C = -m - 2. \end{cases}$

Tích hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C là

$$\begin{aligned} k_B \cdot k_C &= f'(x_B)f'(x_C) \\ &= (-3x_B^2 + 6x_B)(-3x_C^2 + 6x_C) \\ &= 9(x_B^2 - 2x_B)(x_C^2 - 2x_C) \\ &= 9\left[x_B^2x_C^2 - 2x_Bx_C(x_B + x_C) + 4x_Bx_C\right] \\ &= 9\left[(m+2)^2 - 2(m+2)\right] \\ &= 9\left[(m+1)^2 - 1\right] \\ &= 9(m+1)^2 - 9 \geq -9. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $m = -1$ (thỏa điều kiện (*)).

Vậy $m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Cho hàm số $y = \left(-x^2 - 2x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị (C) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B (với A, B khác O) sao cho $\cos\widehat{ABO} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Từ $\dfrac{1}{\cos^2\widehat{ABO}} = 1 + \tan^2\widehat{ABO} \Leftrightarrow \tan^2\widehat{ABO} = \dfrac{1}{\cos^2\widehat{ABO}} - 1 = \dfrac{26}{25} - 1 = \dfrac{1}{25}$.

$\Rightarrow \tan\widehat{ABO} = \dfrac{1}{5}$ hay $\tan\widehat{OAB} = 5$ (do $\widehat{OAB} + \widehat{ABO} = 90°$).

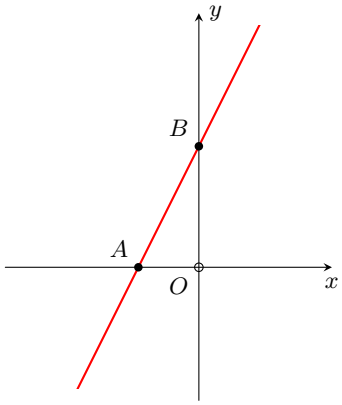
Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \pm\tan\widehat{OAB} = \pm 5$.

Ta có $y' = x^2\mathrm{e}^{-x} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = 5 \Leftrightarrow x^2\mathrm{e}^{-x} = 5$.

Xét hàm số $g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$. Ta có $g'(x) = \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	$-\infty$

Nhận thấy $4 \cdot \mathrm{e}^{-2} < 5$ nên suy ra phương trình $x^2\mathrm{e}^{-x} = 5$ có một nghiệm duy nhất.

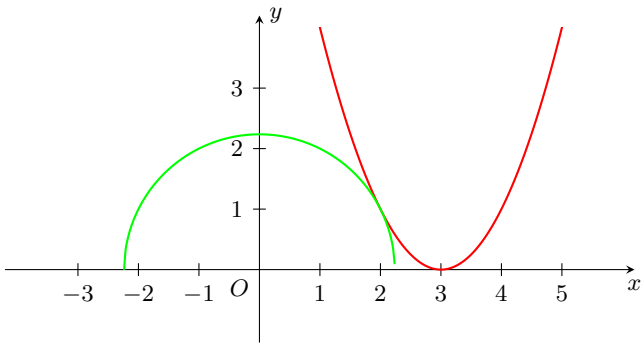
Vậy có duy nhất một tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Biết rằng tồn tại duy nhất một giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \sqrt{5 - x^2}$. Giá trị m thuộc khoảng nào được cho dưới đây?

(A) $(-\infty; -6)$. (B) $(-6; 0)$. (C) $(0; 6)$. (D) $(6; +\infty)$.

Lời giải.



Đồ thị hàm số $y=x^2-6x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x^2}$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{5-x^2}=x^2-6x+m\\ \left(\sqrt{5-x^2}\right)'=\left(x^2-6x+m\right)'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5-x^2}=x^2-6x+m & (1)\\ \dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}}=2x-6 & (2)\end{cases}.$$

Phương trình (2) tương đương với $\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}+2x-6=0$. (3).

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}+2x-6$ xác định, liên tục trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{5}{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^3}+2>0,\forall x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

Suy ra, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Lúc đó, phương trình (3) tương đương với $f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$.

Thay $x=2$ vào phương trình (1) ta được $m=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A $y=-16x-20$. B $y=16x-20$. C $y=16x+20$. D $y=-16x+20$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x\\ \Leftrightarrow\ &xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2\\ \Leftrightarrow\ &(xf(x))'=4x^3+3x^2\\ \Leftrightarrow\ &xf(x)=\int\left(4x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &xf(x)=x^4+x^3+C\end{aligned}$$

Vì $f(1)=2\Rightarrow 1\cdot f(1)=2+C\Leftrightarrow 2=2+C\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $xf(x)=x^4+x^3\Rightarrow f(x)=x^3+x^2$.

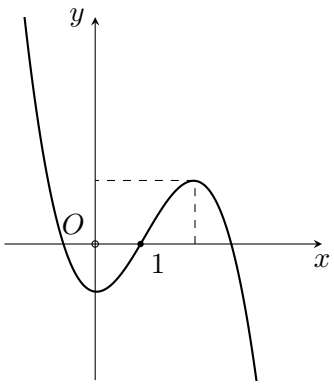
Khi đó: $f'(x)=3x^2+2x$; $f'(2)=16$; $f(2)=12$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$$y=16(x-2)+12\Leftrightarrow y=16x-20.$$

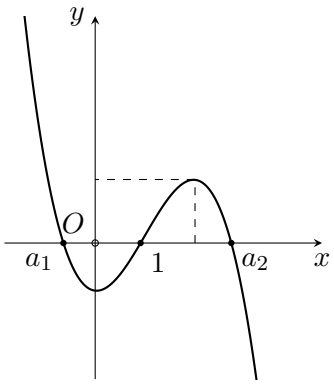
Chọn đáp án B □

Câu 56. Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.



Ta có tiếp tuyến Δ của (C) tại $x=1$ là $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.
Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có $f'(1)=0$.
Vậy $\Delta: y=f(1)$.
Gọi a_1, a_2 là hai nghiệm còn lại của $f'(x)$. Dựa vào đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a_1		1		a_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a_1)$	↘	$f(1)$	↗	$f(a_2)$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Delta: y=f(1)$ và (C) có ba điểm chung
Chọn đáp án (B) □

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là H. Độ dài đoạn OH là
(A) $\sqrt{34}$. (B) $\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{29}$. (D) $\sqrt{58}$.

Lời giải.

Gọi $M(m;1-2m)\in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k, khi đó phương trình đường thẳng $\Delta: y=k(x-m)+1-2m$.

Để Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) thì hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1}=k(x-m)+1-2m\\ -\dfrac{4}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm.

Thay $k=-\dfrac{4}{(x-1)^2}$ vào phương trình $\dfrac{x+3}{x-1}=k(x-m)+1-2m$ ta được $mx^2+2(2-m)x-m-2=0$. $(*)$

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi phương trình $g(x)=mx^2+2(2-m)x-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m\neq 0 \\ \Delta'=(2-m)^2+m(m+2)>0 \\ g(1)=m+4-2m-m-2\neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1. \end{cases}$$

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là hai tiếp điểm, với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_A+x_B=\dfrac{2(m-2)}{m} \\ x_Ax_B=-\dfrac{m+2}{m}. \end{cases}$

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $I\left(\dfrac{m-2}{m};\dfrac{m+3}{m-1}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;\dfrac{2m(x_B-x_A)}{m-1}\right)\Rightarrow$ một vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n}=(2m;1-m)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm AB có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2m;1-m)$ và đi qua điểm $I\left(\dfrac{m-2}{m};\dfrac{m+3}{m-1}\right)$ là $2mx+(1-m)y+7-m=0$.

Gọi $H(x_H;y_H)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB đi qua.

Khi đó, $2mx_H+(1-m)y_H-m+7=0\Leftrightarrow m(2x_H-y_H-1)+y_H+7=0$ với mọi $m\neq 0$ và $m\neq 1$.

Suy ra $\begin{cases} 2x_H-y_H-1=0 \\ y_H+7=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=-3 \\ y_H=-7 \end{cases}\Rightarrow H(-3;-7)$.

Vậy $OH=\sqrt{(-3)^2+(-7)^2}=\sqrt{58}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Cho hàm số $y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa ba điểm A, B, C?

(A) 19. (B) 1. (C) 20. (D) 10.

Lời giải.

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$.

Ta có: A là điểm cố định mà đồ thị (C_m) luôn đi qua nên $A\in(C_m)$, $\forall m$

$$\Leftrightarrow y_A=(m+1)x_A^3-(2m+1)x_A-m+1,\ \forall m$$
$$\Leftrightarrow m\left(x_A^3-2x_A-1\right)+x_A^3-x_A+1-y_A=0,\ \forall m$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A^3-2x_A-1=0 \\ x_A^3-x_A+1-y_A=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A^3-2x_A-1=0 \\ y_A=x_A^3-2x_A-1+x_A+2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A^3-2x_A-1=0 \\ y_A=x_A+2. \end{cases}$$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $y_B=x_B+2$ và $y_C=x_C+2$.

Hay ba điểm A, B, C thuộc đường thẳng $\Delta: y=x+2$.

Ta lại có: $y'=3(m+1)x^2-(2m+1)$ và gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Khi đó để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ thì phương trình $y'(x_o)=\dfrac{-1}{k_\Delta}=-1$ phải có nghiệm $\Leftrightarrow 3(m+1)x_0^2-2m=0$ $(*)$ phải có nghiệm.

• Xét $m=-1$: $(*)\Leftrightarrow 2=0$ (vô lí) nên loại $m=-1$.

• Xét $m\neq -1$: $(*)\Leftrightarrow x_0^2=\dfrac{2m}{3(m+1)}$.

Để $(*)$ có nghiệm thì $\dfrac{2m}{3(m+1)} \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-1) \cup [0;+\infty)$.
So với điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10]$ ta được $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;-1) \cup [0;10]$.
Hay $m \in \{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.
Vậy có 20 số m thỏa yêu cầu bài toán
Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b \in (-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?
A 2. B 9. C 17. D 16.

Lời giải.
Gọi $M_0\left(x_0; x_0^3 - 3x_0^2\right)$ là tiếp điểm.
Tiếp tuyến Δ của (C) tại M_0 có dạng $y = \left(3x_0^2 - 6x_0\right)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2$.
Δ qua $B(0;b) \Leftrightarrow b = \left(3x_0^2 - 6x_0\right)(0 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 \Leftrightarrow -b = 2x_0^3 - 3x_0^2 \quad (*)$.
Có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b) \Leftrightarrow (*)$ có đúng 1 nghiệm x_0.
Đặt $g(x) = 2x^3 - 3x^2$; $g'(x) = 6x^2 - 6x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$
Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -b > 0 \\ -b < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b < 0 \\ b > 1. \end{array}\right.$
Vì b nguyên và $b \in (-10;10)$, suy ra $b \in \{-9;-8;\ldots;-1;2;3;\ldots;9\}$, có 17 giá trị của b.
Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. A	5. B	6. D	7. B	8. C	9. A	10. B
11. D	12. C	13. A	14. D	15. D	16. D	17. B	18. D	19. C	20. A
21. B	22. A	23. B	24. D	25. B	26. D	27. D	28. B	29. B	30. A
31. A	32. B	33. D	34. D	35. D	36. C	37. B	38. C	39. C	40. A
41. D	42. A	43. B	44. D	45. D	46. D	47. D	48. C	49. D	50. A
51. D	52. D	53. B	54. D	55. B	56. B	57. D	58. C	59. C	

CHỦ ĐỀ 8. TOÀN TẬP VỀ PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỤC

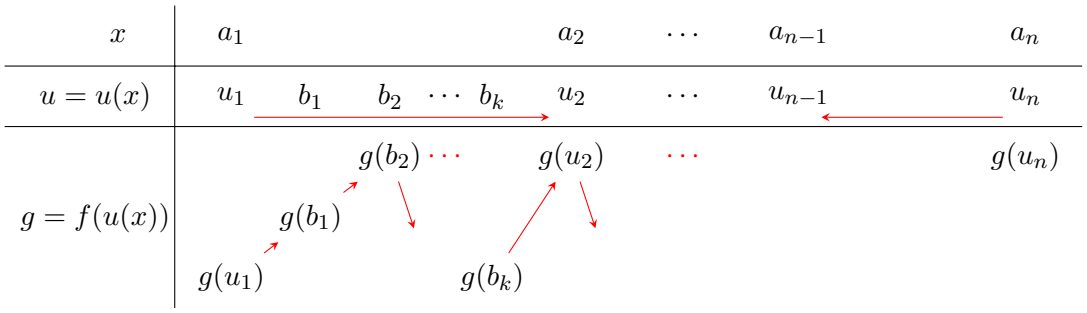
A LÝ THUYẾT

1. Cơ sở của phương pháp ghép trục giải quyết bài toán hàm hợp $g = f(u(x))$

Ta thực hiện theo các bước sau đây:

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm $g = f(u(x))$. Giả sử tập xác định tìm được như sau: $D = (a_1;a_2) \cup (a_3;a_4) \cup \ldots \cup (a_{n-1};a_n)$, ở đây có thể $a_1 \equiv -\infty$; $a_n \equiv +\infty$
- Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm $u = u(x)$ và hàm $y = f(x)$ Lập bảng biến thiên kép, xét sự tương quan giữa $[x; u = u(x)]$ và $[u; g = f(u)]$

(Bảng biến thiên này thường có 3 dòng)



- Dòng 1: Xác định các điểm đặc biệt của hàm $u = u(x)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải, giải sử như sau: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ (xem chú ý số 1).
- Dòng 2: Điền các giá trị $u_i = u(a_i)$, với $\left(i = \overline{1, \ldots, n}\right)$. Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, với $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ cần bổ sung các điểm kì dị $b_1, b_2, \ldots, b_k$ của hàm số $y = f(x)$. Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, với $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$, sắp xếp các điểm $u_i; b_k$ theo thứ tự, chẳng hạn: $u_i < b_1 < b_2 < \ldots < b_k < u_{i+1}$ hoặc $u_i > b_1 > b_2 > \ldots > b_k > u_{i+1}$ (xem chú ý số 2).
- Dòng 3: Xét chiều biến thiên của hàm dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ bằng cách hoán đổi u đóng vai trò của x; $f(u)$ đóng vai trò của $f(x)$.

Sau khi hoàn thiện bảng biến thiên $g = f\left(u(x)\right)$ ta sẽ thấy được hình dạng của đồ thị hàm số này.

- Bước 3: Dùng bẳng biến thiên hàm hợp $g = f\left(u(x)\right)$ để giải quyết các yêu cầu của bài toán và đưa ra kết luận.

2. Một số chú ý quan trọng khi sử dụng phương pháp ghép trục để giải quyết các bài toán về hàm hợp

Chú ý.

- Các điểm đặc biệt của $u = u(x)$ gồm: các điểm biên của tập xác định D, các điểm cực trị của hàm số $u = u(x)$.
- Nếu xét hàm $u = |u(x)|$ thì ở dòng 1 các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $u(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của hàm số $u = u(x)$ với trục Ox).
- Nếu xét hàm $u = u(|x|)$ thì ở dòng 1 các điểm đặc biệt còn có số 0(là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ và trục Oy).

Chú ý.

- Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u = u(x)$.
- Điểm đặc biệt của hàm số $y = f(x)$ gồm: các điểm tại đó $f(x)$ và $f'(x)$ không xác định, các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.
- Nếu xét hàm $g = |f\left(u(x)\right)|$ thì trong dòng 2 các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.
- Nếu xét hàm $g = f\left(u(|x|)\right)$ thì trong dòng 2 các điểm đặc biệt còn có số 0.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ của hàm số $5f\left(\cos^2 x-\cos x\right)=1$ là

(A) 11. (B) 10. (C) 9. (D) 12.

Lời giải.

Tiến hành đặt $u=\cos^2 x-\cos x$. Đạo hàm $u'=-2\cdot\cos x\cdot n\sin x+\sin x=\sin x\left(1-2\cos x\right)$.

Giải phương trình: $u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\Rightarrow x=0;\ \pi;\ 2\pi\\ \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}.\end{array}\right.$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$
u	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0 2 0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0
$f(u)$	2 $\searrow$	-2 $\nearrow$	2 $\searrow$	-2 $\nearrow$	2 $\searrow$ -4 $\nearrow$ 2 $\searrow$	-2 $\nearrow$	2 $\searrow$	-2 $\nearrow$	2

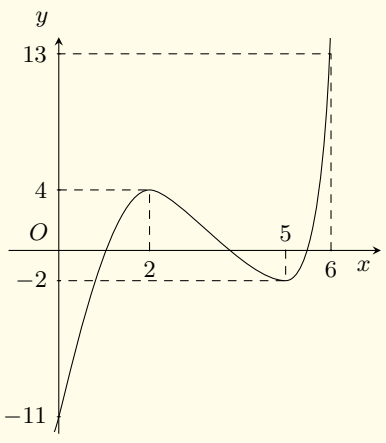
Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f(u)=\frac{1}{5}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 2.

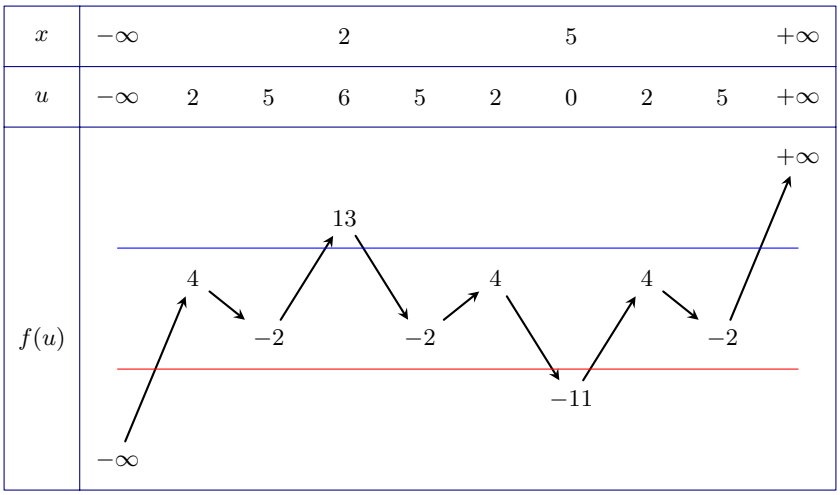
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)+2\right)=\frac{m}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là?

(A) 11. (B) 32. (C) 9. (D) 34.



Lời giải.

Đặt $u = f(x) + 2$. Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 2$ và $x = 5$. Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -11 < \dfrac{m}{2} < -2 \\ 4 < \dfrac{m}{2} < 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8 < m < 26 \\ -22 < m < -4. \end{array}\right.$$

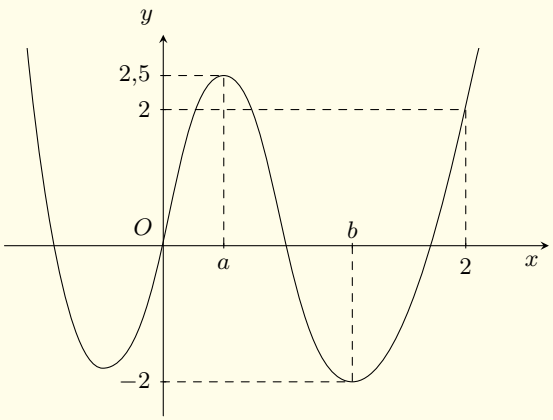
Vậy có 34 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f\left(\left|x^3 - 3x\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc đoạn $[-2; 2]$?

(A) 10. (B) 17. (C) 12. (D) 15.



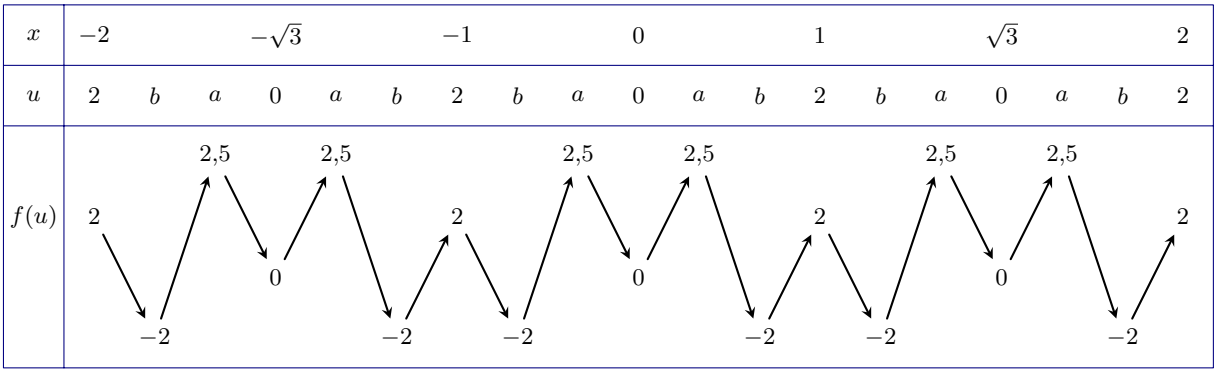
Lời giải.

Đặt $u = \left|x^3 - 3x\right| = \sqrt{(x^3 - 3x)^2} \Rightarrow u' = \dfrac{(x^3 - 3x)(3x^2 - 3)}{\sqrt{(x^3 - 3x)^2}}$.

Giải phương trình đạo hàm

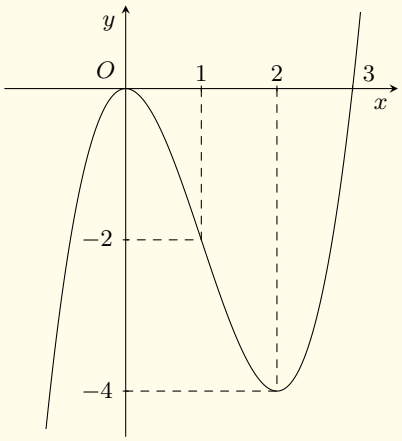
$$u' = \frac{(x^3 - 3x)(3x^2 - 3)}{\sqrt{(x^3 - 3x)^2}} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



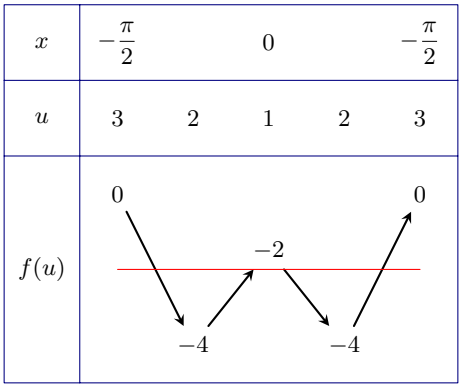
Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $f\left(\left|x^3-3x\right|\right)$ có 17 điểm cực trị.
Chọn đáp án B □

Ví dụ 4.
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=3m-10$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$



(A) 10. (B) 1. (C) 15. (D) 2.

Lời giải.
Phương trình đã cho tương với $f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=\dfrac{3m-10}{7}$.
Đặt $u=5-2\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow u'=\dfrac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}$.
Giải phương trình đạo hàm $u'=\dfrac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}=0\Leftrightarrow x=0$.
Sử dụng phương pháp ghép trục:

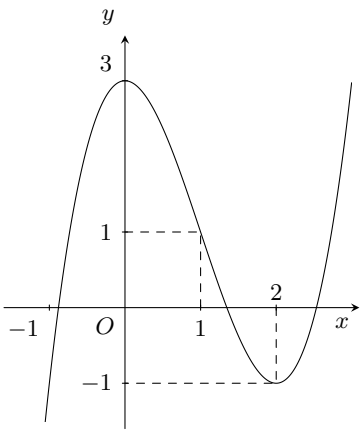


Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{3m-10}{7}=-2\Leftrightarrow m=-\dfrac{4}{3}$. Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f^2(\sin x) - 5\left|f(\sin x)\right| + 6 = 0$ là



(A) 13. (B) 12. (C) 11. (D) 10.

Lời giải.

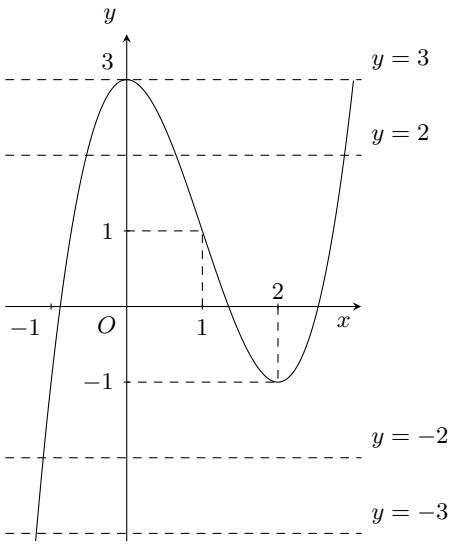
Ta giải phương trình:

$$f^2(\sin x) - 5\left|f(\sin x)\right| + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|f(\sin x)\right| = 3 \\ \left|f(\sin x)\right| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\sin x) = 3 \\ f(\sin x) = -3 \\ f(\sin x) = -2 \\ f(\sin x) = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\sin x$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
			-1				-1										

Kết hợp bảng biến thiên và đồ thị tương giao:



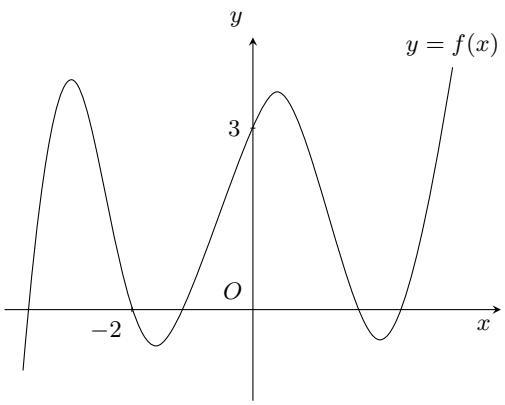
Ta thấy: Với mọi $x \in [-1; 1]$ thì phương trình luôn có 3 nghiệm. Với mọi $x \in [0; 1]$ thì phương trình có duy nhất 1 nghiệm. Vậy số nghiệm của phương trình thuộc khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right)$ là $3 \cdot 4 + 1 = 13$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(|4x+5|-2\right)-3=0$ là

(A) 8. (B) 4. (C) 10. (D) 6.



Lời giải.

Đặt $g(x) = |4x+5| - 2 = \sqrt{(4x+5)^2} - 2 \Rightarrow g'(x) = \dfrac{4(4x+5)}{\sqrt{(4x+5)^2}}$.

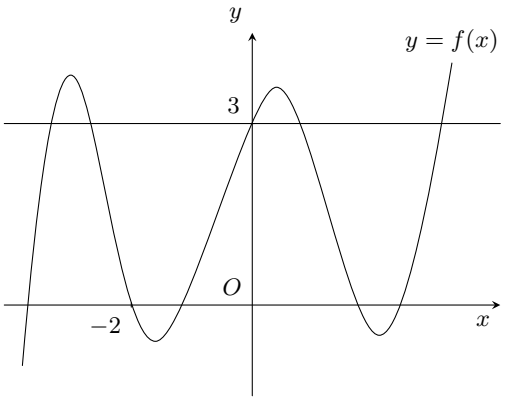
Giải phương trình $g'(x) = \dfrac{4(4x+5)}{\sqrt{(4x+5)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{4}$.

Ta lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Yêu cầu bài toán trở thành: tìm số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(g(x)\right)-3=0$.

Kẻ đường thẳng $y=3$ lên đồ thị như sau:



Từ bảng biến thiên ta thấy, số nghiệm của phương trình thuộc $[-2;+\infty)$ bằng số nghiệm của phương trình thuộc $(-\infty;-2]$. Mà trên $[-2;+\infty)$ phương trình có 3 nghiệm nên trên $(-\infty;-2]$ cũng có 3 nghiệm. Vậy phương trình có $3+3=6$ nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right|=1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 12. (B) 4. (C) 5. (D) 8.

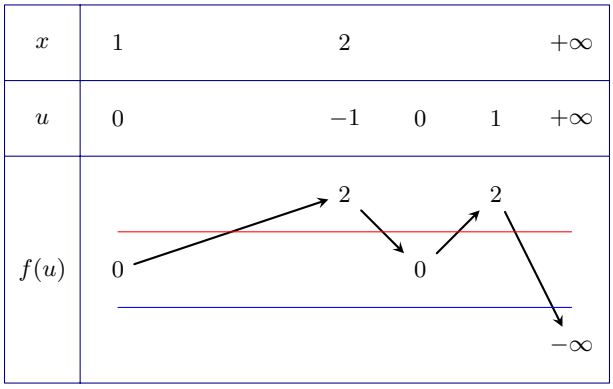
Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq 1$. Ta có:

$$\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)=1 \\ f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)=-1. \end{array}\right.$$

Đặt $u=x-1-2\sqrt{x-1} \Rightarrow u'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=0 \Leftrightarrow x=2$.

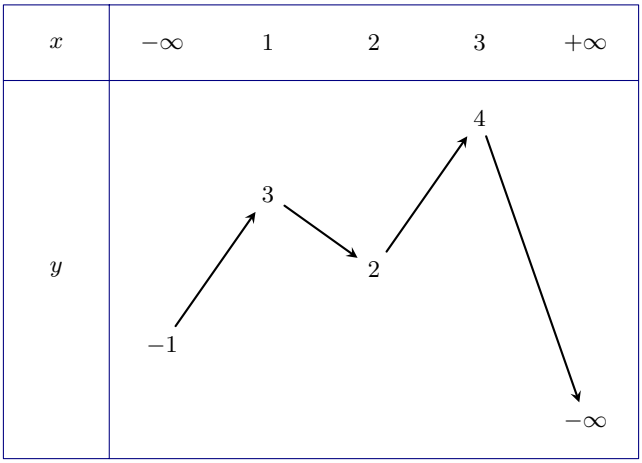
Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 5 nghiệm phân biệt

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho bảng biến thiên hàm số $f\left(5-2x\right)$ như hình vẽ dưới.



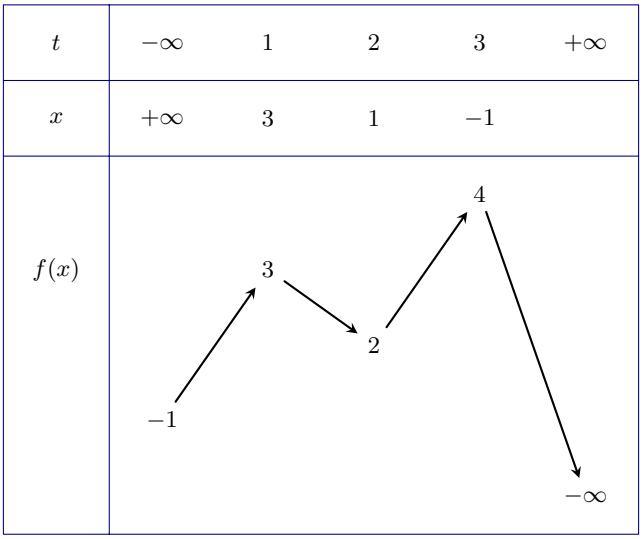
Hỏi phương trình $\left|2f\left(x^2-4x+3\right)-1\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm thực x tương ứng?

(A) 6. (B) 5. (C) 7. (D) 4.

Lời giải.

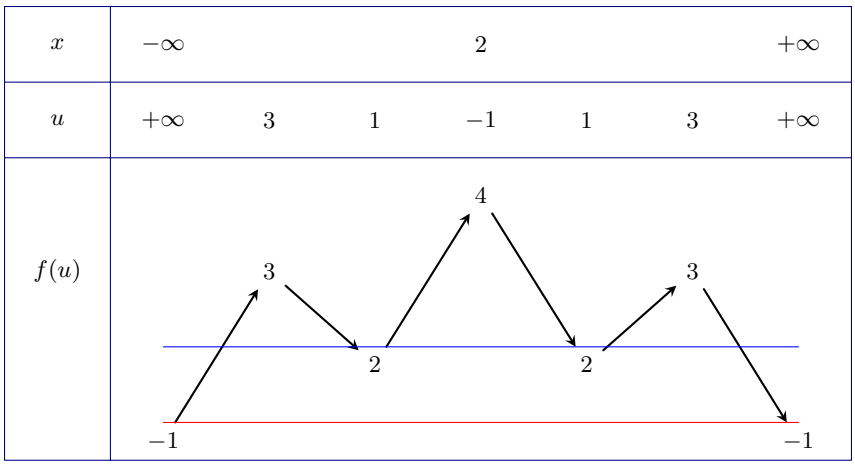
Đặt $x=5-2t$, đưa bảng biến thiên hàm số $f\left(5-2x\right)$ về bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



Đặt $u = x^2 - 4x + 3$, phương trình trở thành $|2f(u) - 1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(u) = 2 \\ f(u) = -1. \end{array}\right.$

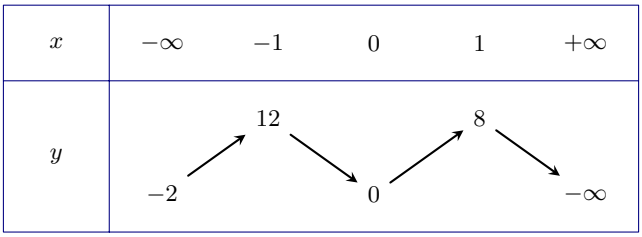
Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình có tất cả 4 nghiệm thực x.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết $f(4) = 3; f(0) = 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x + 2\right) - m\right| = 2$ có nhiều nghiệm nhất?



(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.

Đưa về bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ bằng cách đặt $x = 3 - 2t \Rightarrow f(x) = f(3-2t)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t	$-\infty$	0	1		3	4	5		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow 8$	$\searrow$	0	$\nearrow 3$	$\nearrow 12$	$\searrow$	-2

Đặt $u = x^3 - 3x + 2$ thì phương trình trở thành $|f(u) - m| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(u) = m + 2 \\ f(u) = m - 2. \end{array}\right.$

Sử dụng phương pháp ghép trục

x	$-\infty$			-1			1				$+\infty$
u	$-\infty$	0	1	3	4	3	1	0	1	3	5 $+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow 8$	$\searrow 0$	$\nearrow 3$	$\searrow 0$	$\nearrow 8$	$\searrow 0$	$\nearrow 8$	$\searrow 0$	$\nearrow 12$ $\searrow -2$

Để phương trình có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < m + 2 < 8 \\ 0 < m - 2 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2 < m < 5 \Rightarrow m = \{3; 4\}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) < 2 < f(5)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5} + 2\cos x\right) = 2$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{5\pi}{2}\right)$ là?

(A) 2. (B) 1. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Ta đặt $u = \sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5} + 2\cos x \Rightarrow u' = \sin x \left(\dfrac{-3\cos^2 x - 1}{\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5}} - 2\right) = 0.$

Giải phương trình

$$u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\xrightarrow{\text{với } x\in\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)}x=\pi;2\pi.\\ \dfrac{-3\cos^2 x-1}{\sqrt{2\cos^3(x)+2\cos x+5}}-2=0.\ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$		π			2π		$\frac{5\pi}{2}$
u	5	2	1	-1	1	2	5	$\sqrt{5}$
$f(u)$	$f(5)$	3		0	$f(-1)$	0	3	$f(5)$ $f(\sqrt{5})$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

(A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $u=\cos x\Rightarrow u'=-\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pi\end{array}\right.$ (với $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$).

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$f(u)^2+(3-m)f(u)+2m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(u)=2\\ f(u)=m-5.\end{array}\right.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

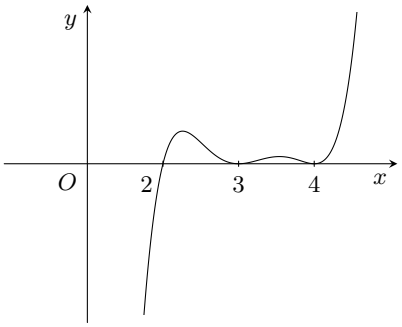
x	$-\frac{\pi}{3}$		0		π
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$f(u)$	2	$\nearrow 4$	$\searrow 2$	$\nearrow 4$	$\searrow -4$

Do phương trình $f(u)=2$ có 3 nghiệm nên yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $f(u)=m-5$ có duy nhất một nghiệm

$$-4\le m-5<2\Leftrightarrow 1\le m<7\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;2;3;4;5;6\}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8.
Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.
Hỏi hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A) 2. B) 5. C) 3. D) 1.

Lời giải.
Đặt $u=x^2+4x+5\Rightarrow u'=2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$.
Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
u	$+\infty$	2	1	2	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow f(2)$	$\nearrow f(1)$	$\searrow f(2)$	$\nearrow +\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.
Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A) $(0;1)$. B) $(1;2)$. C) $(-1;0)$. D) $(-3;-1)$.

Lời giải.
Đặt $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)=f(u), u=4-\sqrt{4-x^2}$, với $x\in[-2;2]$.
Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	-2		0		2
u	4		2		4
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$
Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A $(5;6)$. B $(-1;2)$. C $(2;3)$. D $(3;5)$.

Lời giải.
Đặt: $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)=f(u)$ với $u=-1+\sqrt{7+6x-x^2}$và $x\in[-2;2]$.
Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	-1		$3-\sqrt{7}$		3		$3+\sqrt{7}$		7
u	-1		2		3		2		4
$f(u)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$.
Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. C	4. D	5. D	6. A	7. B	8. C	9. C	10. D

ĐỀ VDC SỐ 1: TOÀN TẬP VỀ GHÉP TRỤC

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

(A) 9. (B) 8. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $u=\left|x^2-1\right|-2 \Rightarrow u'=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$ với $x\neq\pm1$.

Ta có $u'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $u=\left|x^2-1\right|-2$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
u'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ghép trục ta được

x	$-\infty$				-1	0	1				$+\infty$
u	$+\infty$	1	0	-1	-2	-1	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$ $\searrow$ -2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2 $\nearrow$ 7	$\searrow$	-2 $\nearrow$ 7	$\searrow$	-2 $\nearrow$	-1 $\searrow$	-2 $\nearrow$ $+\infty$

$y=m$

Để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thì $-1<m<7$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

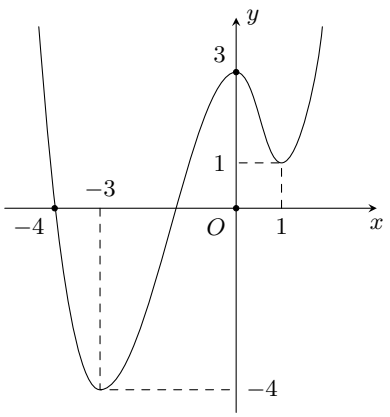
Vậy có tất cả 7 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+3|(x-1)) = \log m$ có ít nhất 5 nghiệm phân biệt?

(A) 990. (B) 991. (C) 989. (D) 913.



Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-4		-3		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $u = |x+3|(x-1) = \sqrt{(x+3)^2} \cdot (x-1)$.

Suy ra $u' = \dfrac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2}} \cdot (x-1) + \sqrt{(x+3)^2} = \dfrac{(x+3)(2x+2)}{\sqrt{(x+3)^2}}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $u = u(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
u'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Ghép trục ta được

x	$-\infty$		-3		-1						$+\infty$
u	$-\infty$	-3		0		-3	-4	-3		0	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(u) = \log m$ có ít nhất 5 nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{bmatrix} -4 < \log m \le 0 \\ 1 \le \log m < 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10^{-4} < m \le 1 \\ 10 \le m < 10^3 \end{bmatrix} \Rightarrow m \in \{1; 10; 11; \ldots; 999\} \text{ (vì } m \in \mathbb{Z}).$$

Vậy có 990 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ trong đó a, b là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases}a+b-2>0\\24+3(3a+b)<0\end{cases}$.
Hỏi phương trình $2f(x)\cdot f''(x)=[f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm?
(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

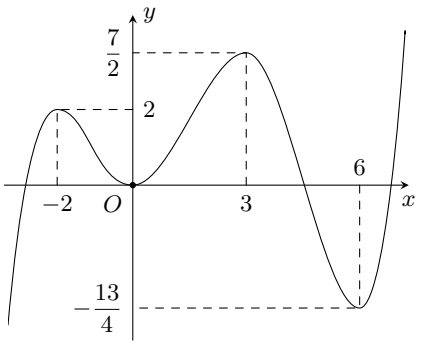
Lời giải.
Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\\f(1)=a+b-2>0\\f(3)=9a+3b+24=24+3(3a+b)<0\\\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\end{cases}$ nên $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2<3<x_3$.
Mặt khác $2f(x)\cdot f''(x)=[f'(x)]^2\Leftrightarrow 2f(x)\cdot f''(x)-[f'(x)]^2=0$.
Xét $g(x)=2f(x)\cdot f''(x)-[f'(x)]^2$.
Ta có $g'(x)=2.f'(x)\cdot f''(x)+2f(x)\cdot f'''(x)-2f'(x)\cdot f''(x)=2f(x)\cdot f'''(x)=12f(x)$.
Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow 12f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-\infty;1)\\x=x_2\in(1;3)\\x=x_3\in(3;+\infty).\end{array}\right.$
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_2)$	$\searrow$	$g(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$y=0$

Do $g(x_2)=2f(x_2)\cdot f''(x_2)-[f'(x_2)]^2=-[f'(x_2)]^2<0$ nên $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án (A) □

Câu 4.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(2x^3-6x+2\right)\right|=2$ là
(A) 15. (B) 14. (C) 12. (D) 13.



Lời giải.
Ta có $\left|f\left(2x^3-6x+2\right)\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(2x^3-6x+2\right)=2 & (1)\\f\left(2x^3-6x+2\right)=-2. & (2)\end{array}\right.$
Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		6		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $t = 2x^3 - 6x + 2$.
Ta có $t' = 6x^2 - 6$ và $t' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng biến thiên của hàm số $t = 2x^3 - 6x + 2$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ghép trục ta được

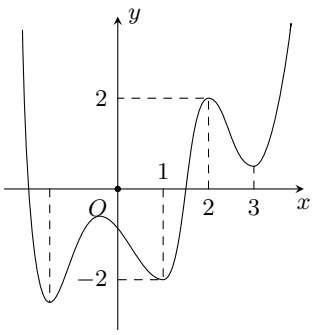
x	$-\infty$		-2		0		3		6		-1		1		$+\infty$
t	$-\infty$		-2		0		3		6		3		0		-2		0		3		6		$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$y = 2$, $y = -2$

Từ đó phương trình (1) có 9 nghiệm và phương trình (2) có 5 nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có tất cả 14 nghiệm.
Chọn đáp án (B) □

Câu 5.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^3+1}{2}\right) - (2m-1)\left(x^4 + 2x^2 + 2019\right)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 8. (B) 9. (C) 11. (D) 10.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = \frac{3}{2}x^2 f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) - (2m-1)\left(4x^3 + 4x\right)$.
Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$g'(x) \geq 0,\ \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) - (2m-1)\left(4x^3 + 4x\right) \geq 0,\ \forall x \in (0; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow 2m - 1 \leq \frac{3x}{8x^2+8} \cdot f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right),\ \forall x \in (0; +\infty).$$

Với $x > 0$ thì $\frac{x^3+1}{2} > 0 \Rightarrow f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) \geq -2$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x^3+1}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
Mặt khác, $0 < \frac{3x}{8x^2+8} = \frac{3}{8\left(x + \frac{1}{x}\right)} \leq \frac{3}{16}$.
Suy ra $\frac{3x}{8x^2+8} \cdot f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) \geq (-2) \cdot \frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{3x}{8x^2+8} \cdot f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) \geq \frac{-3}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Như vậy $2m-1 \le \dfrac{-3}{8} \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{16}$.
Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10]$ nên $m \in \{-10;-9;-8;\ldots;-1;0\}$.
Vậy có 11 giá trị m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0		
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	0	↗		↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là
A 6. B 7. C 8. D 9.

Lời giải.
Xét hàm số $t=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$.
Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
Ta có $t=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3=\begin{cases}2x^2-8x+4 & \text{khi } x\le 1 \text{ hoặc } x\ge 7\\ 8x-10 & \text{khi } 1<x<7.\end{cases}$
Khi đó $t'=\begin{cases}4x-8 & \text{khi } x\le 1 \text{ hoặc } x\ge 7\\ 8 & \text{khi } 1<x<7.\end{cases}$
Bảng biến thiên của hàm số t như sau

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
t'		$-$	‖	$+$	‖	$+$	
t	$+\infty$	↘	-2	↗	46	↗	$+\infty$

Khi đó bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)$ như sau

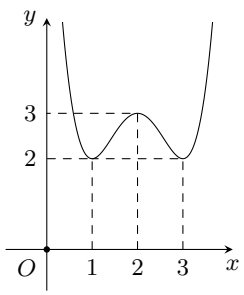
x	$-\infty$				1						$+\infty$
t	$+\infty$	3	2	1	-1	-2	-1	1	2	3	$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	↗	2	↘	-3	↗	0	↘	0	↗	-3	↗	2	↘	$-\infty$

$y=0$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)=|f(t)|$ cho có 7 điểm cực đại.
Chọn đáp án B □

Câu 7.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(\sin x+2)-5=0$ là



(A) 11. (B) 15. (C) 7. (D) 9.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $2f(\sin x+2)-5=0\Leftrightarrow f(\sin x+2)=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x+2=a, & \text{với } 0<a<1 \quad (1)\\ \sin x+2=b, & \text{với } 1<b<2 \quad (2)\\ \sin x+2=c, & \text{với } 2<c<3 \quad (3)\\ \sin x+2=d, & \text{với } 3<d. \quad (4)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $t=\sin x+2$ trên đoạn $\left[-2\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ như sau

x	-2π		$-\dfrac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π		$\dfrac{3\pi}{2}$
t	2	↗	3	↘	2	↘	1	↗	2	↗	3	↘	2	↘	1

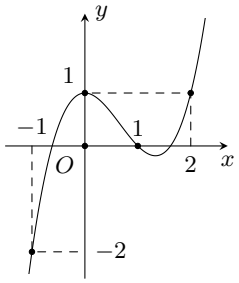
Dựa vào bảng biến thiên, các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm, phương trình (2) có 3 nghiệm, phương trình (3) có 4 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8.

Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+d$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$, biết $f(1)=\dfrac{-1}{2}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=\left|2f(x)-x^2+2x\right|$ đồng biến trên khoảng



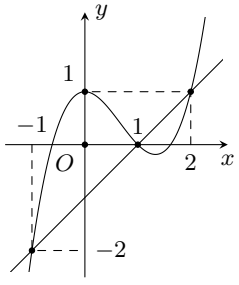
(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-1;1)$. (C) $(1;2)$. (D) $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x)=2f(x)-x^2+2x$.

Ta có $h'(x)=2f'(x)-2x+2$ và $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$. (1)

Vẽ đường thẳng $y=x-1$. Từ đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại 3 điểm. Khi đó



$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ta tính được $h(1)=2f(1)-1^2+2\cdot 1=0$.

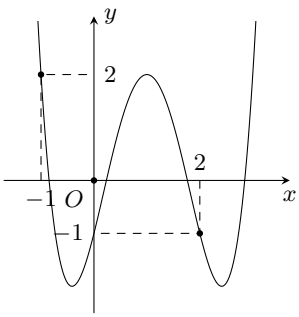
Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ và $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$h(-1)$	↗	0	↘	$h(2)$	↗	
$g(x)$		↘	0	↗	0	↗	0	↗	

Vậy hàm số $g(x) = \left|2f(x) - x^2 + 2x\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'\left(x^2 - 2x\right)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right) + \dfrac{2}{3}x^3 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

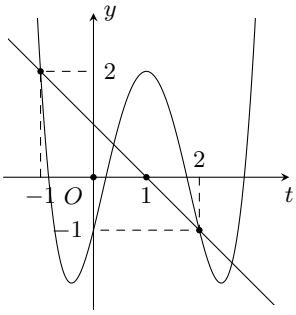


A $(-3;-2)$. B $(1;2)$. C $(-2;-1)$. D $(-1;0)$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 1\right) + \dfrac{2}{3}x^3 + 1$.
Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'\left(x^2 - 1\right) + 2x^2 = 2x\left[f'\left(x^2 - 1\right) + x\right]$.
Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 1\right) = -x. \quad (1) \end{array}\right.$

Đặt $x = t - 1$ thì phương trình (1) trở thành



$$f'\left(t^2 - 2t\right) = -t + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = a, \ (a \in (0;1)) \\ t = 2 \\ t = b, \ (b \in (2;3)). \end{array}\right.$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = a - 1, \ (a - 1 \in (-1;0)) \\ x = 1 \\ x = b - 1, \ (b - 1 \in (1;2)). \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

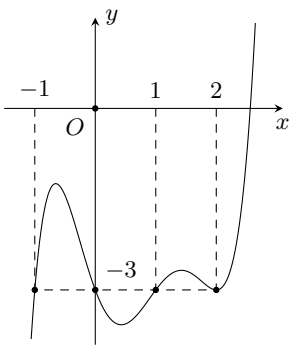
x	$-\infty$		-2		$a-1$		0		1		$b-1$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 10.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên.
Hàm số $g(x)=|f(|x|)+3|x||$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.



Lời giải.

Đặt $h(x)=f(x)+3x \Rightarrow h'(x)=f'(x)-(-3)$.
Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗	$h(0)$	↘		↗	$h(2)$	↗	

Ta có $h(0)=f(0)<0$ nên suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(|x|)$ và $|h(|x|)|$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h(\|x\|)$		↘		↗	$h(0)$	↘		↗	
$\|h(\|x\|)\|$		↘	0	↗	$\|h(0)\|$	↘	0	↗	

Vậy hàm số $g(x)=|f(|x|)+3|x||$ có 3 điểm cực tiểu
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Tìm m để phương trình $f\left(3m+\dfrac{1}{4}\sin x\right)+f\left(\cos^2 x\right)=1$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc $[0;3\pi]$

Lời giải.

Ta có $f(x)+f(1-x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{3}{9^x+3}=1,\ \forall x.$

Do đó $f\left(3m+\dfrac{1}{4}\sin x\right)+f\left(\cos^2 x\right)=1 \Leftrightarrow 3m+\dfrac{1}{4}\sin x+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow 3m=\sin^2 x-\dfrac{1}{4}\sin x.$ (1)

Hàm số $t=sinx$ có bảng biến thiên trên đoạn $[0;3\pi]$ như sau

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{2}$		$\dfrac{5\pi}{2}$		3π
t	0	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	0

Hàm số $g(t)=t^2-\dfrac{1}{4}t$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $g'(t)=2t-\dfrac{1}{4}$ và $g'(x)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{8}$.
Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ như sau

t	$-\infty$		$\frac{1}{8}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{64}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ghép trục ta được

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		3π
t	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	-1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0
$g(t)$	0	$\searrow -\frac{1}{64} \nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow -\frac{1}{64} \nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow -\frac{1}{64} \nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow -\frac{1}{64} \nearrow$	0

Khi đó, phương trình (1) có đúng 8 nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$ khi và chỉ khi $-\dfrac{1}{64} < 3m \leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{192} < m \leq 0$.
□

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ phương trình $f\left[f(\cos x)\right] = 2$ là

(A) 9. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Đặt $u = \cos x$. Bảng biến thiên của hàm số $u = \cos x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ như sau

x	0	π	2π	3π	4π	$\frac{9\pi}{2}$
$u = \cos x$	1	$\searrow -1 \nearrow$	1	$\searrow -1 \nearrow$	1	$\searrow 0$

Đặt $t = f(u)$ thì phương trình đã cho trở thành $f(t) = 2$.
Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

x	0			π			2π			3π			4π		$\frac{9\pi}{2}$
$u=\cos x$	1		0		-1		0		1		0		-1		0		1		0
$t=f(u)$	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0
$f(t)$	2		0	2		2	0	2		2	0	2		2	0	2		2	0

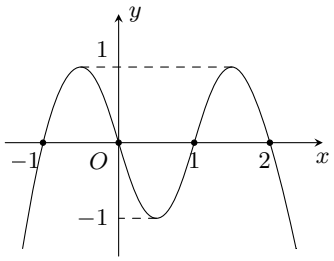
Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f\left[f(\cos x)\right]=2$ có 9 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 13.

Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $a\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $|f(f(x))|=\log_2 m$ (với m là tham số thực dương), có tối đa bao nhiêu nghiệm?

A) 18. B) 3. C) 5. D) 7.



Lời giải.

Đặt $t=f(x)$. Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $t=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$t=f(x)$	$-\infty$		1		-1		1		$-\infty$

trong đó $-1<a<0$, $0<b<1$, $1<c<2$.

Khi đó ta có đồ thị của hàm số $f(t)$ và $|f(t)|$ như sau

x	$-\infty$			a			b			c			$+\infty$
t	$-\infty$	a	b	1	b	a	-1	a	b	1	b	a	$-\infty$
$f(t)$	$-\infty$	1	-1	0	-1	1	0	1	-1	0	-1	1	$-\infty$
$\lvert f(t)\rvert$	$+\infty$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	$+\infty$

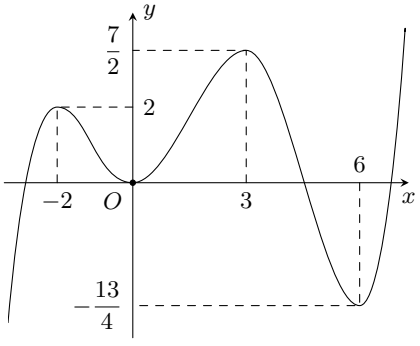
Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(f(x))|=\log_2 m$ có tối đa 18 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 14.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

A) 2. B) 3 . C) 0. D) 1.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		6		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $t=2x^3-6x+2$.
Ta có $t'=6x^2-6$ và $t'=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.
Bảng biến thiên của hàm số $t=2x^3-6x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ như sau

x	-1		1		2
t'		0	$-$	0	$+$
t	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6

Ghép trục ta được

x	-1			1			2
t	6	3	0	-2	0	3	6
$f(t)$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$ $\searrow$ 0		$\nearrow$ 2 $\searrow$ 0		$\frac{7}{2}$ $\searrow$ $-\frac{13}{4}$

$y=2m-1$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

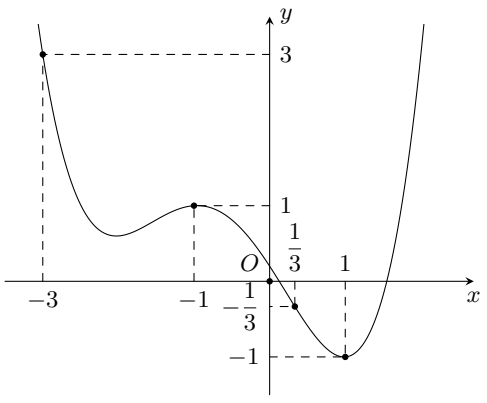
$$0<2m-1<2\Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}.$$

Kết hợp với m nguyên thì $m=1$.
Vậy chỉ có 1 giá trị m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (D) □

Câu 15.

Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$?

(A) 9. (B) 7. (C) 6. (D) 8.



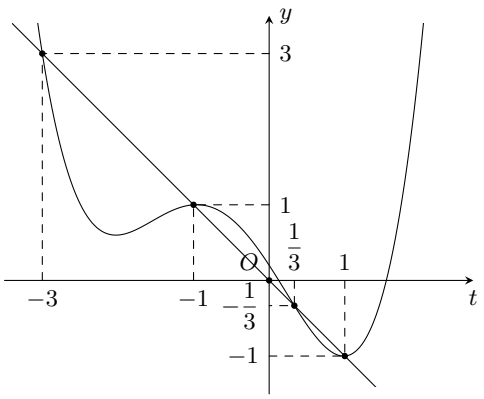
Lời giải.

Đặt $t=\dfrac{5\sin x-1}{2}$ ta có hàm số $h(t)=2f(t)+t^2+3$.

Khi đó $h'(t)=2f'(t)+2t$ và $h'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=-t$.

Vẽ đồ thị hàm số $f'(t)$ và $y=-t$ trên cùng hệ trục tọa độ Oty như hình bên ta thấy

$$f'(t)=-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\pm1\\t=-3\\t=\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$



Bảng biến thiên của hàm số $h(t)$ như sau

t	$-\infty$		-3		-1		$\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$		↗	$g(-3)$	↘	$g(-1)$	↗	$g\left(-\dfrac{1}{3}\right)$	↘	$g(1)$	↗	

Hàm số $t=\dfrac{5\sin x-1}{2}$ có bảng biến thiên trên đoạn $[0;2]$ như dưới đây

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{2}$		2π
t	$-\dfrac{1}{2}$	↗	2	↘	-3	↗	$-\dfrac{1}{2}$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	0			$\dfrac{\pi}{2}$				$\dfrac{3\pi}{2}$			2π
t	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	1	2	1	$\dfrac{1}{3}$	-1	-3	-1	$-\dfrac{1}{2}$	
$g(x)=h(t)$	$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ↗	$g\left(\dfrac{1}{3}\right)$	↘ $g(1)$	↗ $g(2)$	↘ $g(1)$	↗ $g\left(\dfrac{1}{3}\right)$	↘ $g(-1)$	↗ $g(-3)$	↘ $g(-1)$	↗ $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$	

Vậy hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có 8 điểm cực trị trên đoạn $[0;2\pi]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\dfrac{61}{3}$	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 5. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Hàm số $h(x)=f\left(x^3\right)-3x$ có $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)-3$ và $h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{1}{x^2}$, (1) (vì $x=0$ không thỏa mãn $h'(x)=0$).

Đặt $t=x^3\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{t}$. Khi đó (1) trở thành $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\Leftrightarrow t=a$ với $a>0$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$ và $|h(x)|$ như sau

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	0	↘		↗	
$\lvert h(x)\rvert$		↘	0	↗		↘	0 ↗

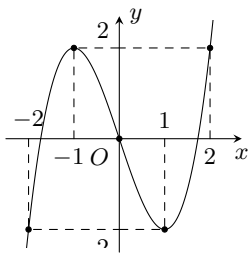
Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=x$ là

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9.



Lời giải.

Xét phương trình $f(f(x))=x$. (1)

Nhận xét

- ☑ $x>2\Rightarrow f(x)>x>2\Rightarrow f(f(x))>f(x)>x\Rightarrow$ (1) không có nghiệm $x>2$.
- ☑ $x<-2\Rightarrow f(x)<x<-2\Rightarrow f(f(x))<f(x)<x\Rightarrow$ (1) không có nghiệm $x<-2$.

Ta có bảng biến thiên của $f(f(x))$ với $-2\le x\le 2$ như sau

x	-2					0					2
$f(x)$	-2	-1	1	2	1	0	-1	-2	-1	1	2
$f(f(x))$	-2 ↗	2 ↘	-2 ↗	2 ↘	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	-2 ↗	2 ↘	-2 ↗	2

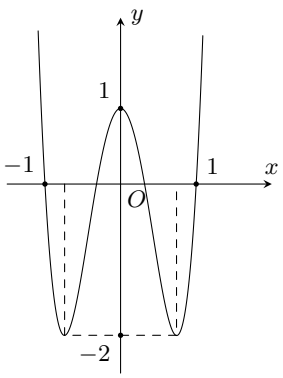
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(f(x))=x$ có 9 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.

Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ biết $g'(x)=x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3$.

(A) 5. (B) 6. (C) 9. (D) 10.



Lời giải.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \ \ (x=0 \ \text{là nghiệm kép, loại}) \\ f\left(x^2-1\right)=0. \end{array}\right.$

Theo đồ thị thì $f\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=-1 \ \ (\text{loại}) \\ x^2-1=a \ \ (-1<a<0) \\ x^2-1=b \ \ (0<b<1) \\ x^2-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{a+1} \\ x=\pm\sqrt{b+1} \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

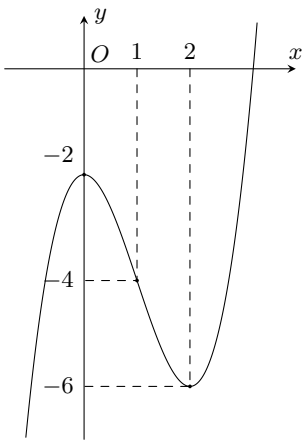
Vậy $g(x)$ có 6 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=|f(1-|x|)+m|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 17.



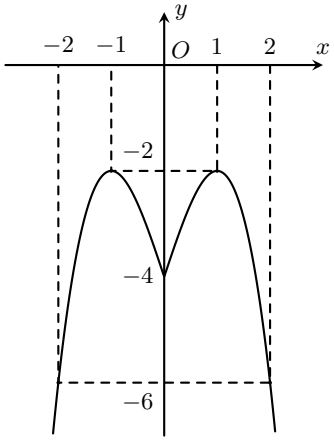
Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có hai cực trị là $x=0, x=2 \Rightarrow f'(x)=ax(x-2) \Rightarrow f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-ax^2+C$.

Vì $f(0)=-2, f(1)=-4 \Rightarrow a=3, c=-2 \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-2$.

Khi đó $f(1-|x|)=\left\{\begin{array}{lll} f(1-x) & \text{khi} & x\geq 0 \\ f(1+x) & \text{khi} & x<0 \end{array}\right. \Rightarrow f(1-|x|)=\left\{\begin{array}{lll} -x^3+3x-4 & \text{khi} & x\geq 0 \\ x^3-3x-4 & \text{khi} & x<0. \end{array}\right.$

Ta có đồ thị của $f(1-|x|)$ như sau

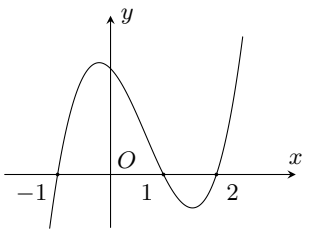


Đặt $h(x)=f(1-|x|)+m$.
Ta có $g(x)=|h(x)|$.
$g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)=0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m\geq 4$.
Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 20.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới bên. Hàm số $g(x)=f\left(|x|+\left|x^2-1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A 3. B 4. C 5. D 7.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x=-1;x=1;x=2$.

Đặt $u(x)=|x|+\left|x^2-1\right|=\begin{cases}x^2+x-1 & \text{khi } x\geq 1\\ -x^2+x+1 & \text{khi } 0\leq x\leq 1\\ -x^2-x+1 & \text{khi } -1\leq x\leq 0\\ x^2-x-1 & \text{khi } x\leq -1.\end{cases}$; $u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên ghép trục

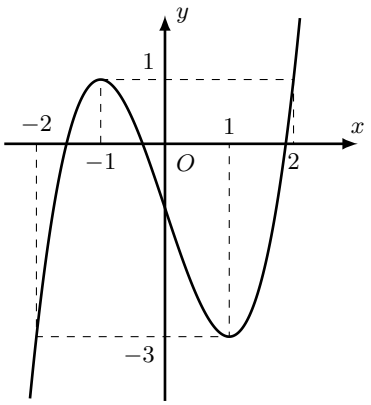
x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	2		1	$\frac{5}{4}$		1		$\frac{5}{4}$		1	2	$+\infty$
$f(u(x))$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Hàm số $g(x)=f(u(x))$ có 3 điểm cực đại và 4 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án D □

Câu 21.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Số giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f(2\sin x)=f(m)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ là

A 1. B 3. C 2. D 0.

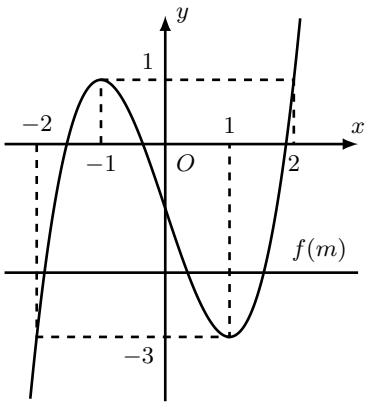


Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy hàm số có các cực trị $x=-1;x=1$.
Đặt $t=2\sin x\Rightarrow t'=2\cos x;\ t'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.
Ta có bảng ghép trục.

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$			$\dfrac{3\pi}{2}$
$t=2\sin x$	0	1	2	1	-1	-2
$f(t)$	$f(0)$	-3	1	-3	1	-3

Phương trình $f\left(2\sin x\right)=f\left(m\right)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ khi$-3<f\left(m\right)\leq f\left(0\right)$.



Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy $-3<f\left(m\right)\leq f\left(0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=a\in(-2;-1)\\m=b\in[0;1)\\m=c\in(1;2)\,.\end{array}\right.$

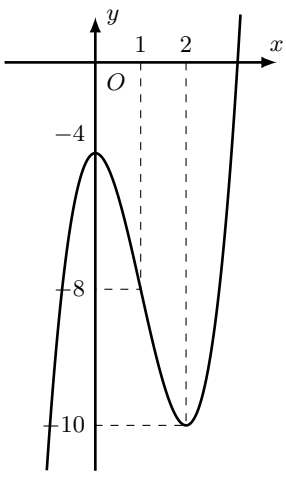
Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 22.

Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(1-\left|x\right|\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

A 14. B 13. C 11. D 12.



Lời giải.

Đặt $t=1-\left|x\right|\Leftrightarrow f\left(1-\left|x\right|\right)=f(t)$.

Bảng ghép trục

t	$-\infty$		0		1		0		$-\infty$
$f(t)$	$-\infty$	↗	-4	↘	-8	↗	-4	↘	$-\infty$

Phương trình $g(x)$ trở thành $g\left(t\right)=\left|f\left(t\right)+m\right|$.
Ycbt trở thành $f(t)+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

t	$-\infty$		0		1		0		$-\infty$
$f(t)$	$-\infty$	↗	-4	↘	-8	↗	-4	↘	$-\infty$

$y=-m$

Để $f\left(t\right)+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt thì $-m\le -8\Leftrightarrow m\ge 8\xrightarrow[m\in[-20;20]]{m\in\mathbb{Z}}$ có 13 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$. Số điểm cực tiểu của hàm số $f\left(\sin 3x-\dfrac{3}{2}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\right)$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{13\pi}{6}\right]$ là

(A) 6. (B) 5. (C) 7. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $y=f\left[-\sin(3x+\pi)-3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=f\left(4\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$				$\frac{7\pi}{6}$						$\frac{13\pi}{6}$
$u=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$			$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$			$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$t=4u^3-6u$	$-\frac{5}{2}$	$-2\sqrt{2}$	-2	$-2\sqrt{2}$	-1	1	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	1	-1	$-2\sqrt{2}$	-2
$y=f(t)$	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	

Vậy hàm số trên có 6 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$,$f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt ?

(A) 9. (B) 8. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $u=\left|x^2-1\right|-2 \Rightarrow u'=\dfrac{2x.\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$.

Ta có bảng biến thiên như sau

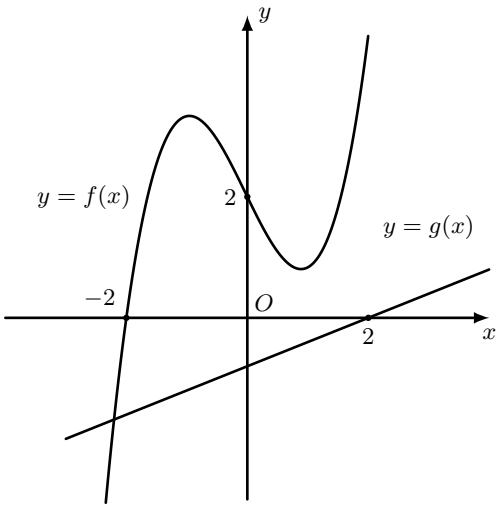
x	$-\infty$					-1		0		1				$+\infty$
u	$+\infty$		1		0		-1	-2	-1		-2		-1	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$				$\nearrow$		$\searrow$				$+\infty$
			-2				-2		-2		-2				-2	

Từ bảng biến thiên để phương trình có đúng 6 nghiệm thực phân biệt khi $-1<m<7$.

Suy ra $m\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ và hàm số bậc nhất $y=g(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số $h(x)=\displaystyle\int_0^{f(x)} g(t)\,dt$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-3;-2)$. (B) $(-2;-1)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(1;3)$.

Lời giải.

Đặt $g(x)=k.(x-2), k>0 \Rightarrow h(x)=\displaystyle\int_0^{f(x)} g(t)\,dt=k\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^{f(x)}=k\left(\frac{f^2(x)}{2}-2f(x)\right)$

$$\Rightarrow h'(x)=k.f'(x)(f(x)-2) \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;0) \\ x=x_2\in(0;2) \\ x=x_3\in(-2;x_1) \\ x=x_4\in(x_2;2). \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		x_3		x_1		0		x_2		x_4		2		$-\infty$
$h'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0		$+$			
$h(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗		↘		↗					

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số h(x) nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.
Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. A	4. B	5. C	6. B	7. C	8. C	9. C	10. B
12. A	13. A	14. D	15. D	16. D	17. D	18. B	19. D	20. D	21. A
22. B	23. A	24. C	25. A						