SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHÙNG KHẮC KHOAN - THẠCH THẤT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
CÁC MÔN VĂN HÓA KHỐI 10, 11
NĂM HỌC 2022-2023
ĐỀ THI MÔN: TOÁN-LỚP 11
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm 2 trang)

Số báo danh:....................Họ và tên...

Câu 1 ***(2,5 điểm)*****:**

Giải phương trình $\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\sin x-1)=0$

Câu 2 ***(4,5 điểm)*****:**

a. Giải phương trình : $\left(x+1\right)\left(x+4\right)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

b. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{5n}, x\neq 0$

biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $3C_{n+1}^2+n.P_2=4A_n^2$

Câu 3 ***(3,0 điểm)*****:**

Từ các chữ số $0,1,3,5,7,8$ có thể lập được bao nhiêu số có tám chữ số mà trong đó chữ số 8 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số khác xuất hiện đúng một lần?

Câu 4 ***(3,0 điểm)*****:**

a. Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2023)\sqrt[3]{1-5x}-2023}{x}$

b. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi: $\begin{cases} u_1=2022;\ u_2=2023 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+u_{n-1}}{3} \end{cases}$ $\left(n\geq 2, n\in\mathbb{N}\right)$

Tính giới hạn của dãy số $\left(u_n\right)$

Câu 5 ***(5,0 điểm)*****:**

1. Cho tứ diện $ABCD$ gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC trên đoạn BD lấy điểm K sao cho $BK=2KD$; Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CD và AD với mặt phẳng $\left(IJK\right)$. Chứng minh rằng FK song song với IJ.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D biết $AD = DC = a$, $AB = 2a$; $SD = b$. Trên đoạn AD lấy điểm M sao cho $AM = x$ $\left(0 < x < a\right)$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ qua M song song với AB và SD cắt BC, SB, SA lần lượt tại N, P, Q.

a. Chứng minh rằng NP luôn song song với một mặt phẳng cố định

b. Khi MN vuông góc với MQ, tìm x để tứ giác $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

Câu 6 ***(2,0 điểm)*****:**

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 3b \le 0$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{(a+1)^2} + \dfrac{4}{(b+2)^2} + \dfrac{8}{(c+3)^2} \ge 1$

------------- HẾT -------------

(Thí sinh không dùng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

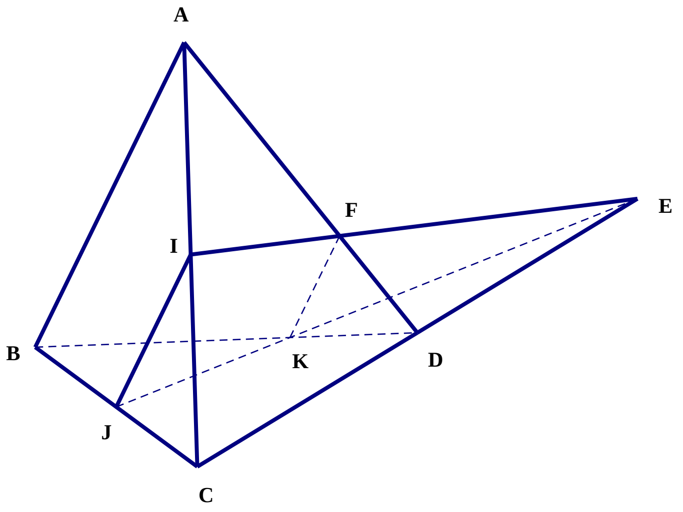
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHÙNG KHẮC KHOAN - THẠCH THẤT

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG CÁC MÔN VĂN HÓA KHỐI 10, 11
NĂM HỌC 2022-2023
ĐÁP ÁN ĐỀ THI MÔN: TOÁN. LỚP 11
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

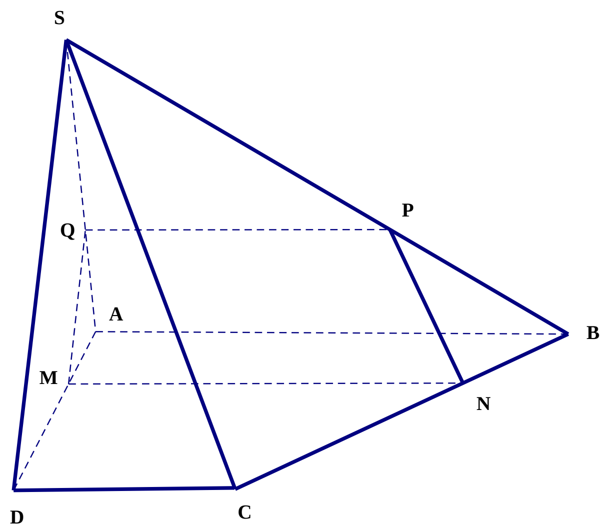
Câu	**Nội dung**	**Điểm**
1	**Giải phương trình sau:** $\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\sin x-1)=0$	**2.5**
	ĐK: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$	0.5
	$\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\sin x-1)=0$ $\Leftrightarrow\dfrac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x}{\cos x+\sin x}+(\sin 2x+\sin x-1)=0$ $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-2\sin x\cos x+2\sin x\cos x+\sin x-1=0$ $\Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0$	1.0
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\end{array}\right.$	0.5
	Kết hợp đk pt có nghiệm: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$	0.5
2.a	**a. Giải phương trình :** $(x+1)(x+4)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$	**2.0**
	$(x+1)(x+4)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6\Leftrightarrow x^2+5x+2-3\sqrt{x^2+5x+2}-4=0$	0.5
	Đặt $t=\sqrt{x^2+5x+2}\quad (t\geq 0)$ Ta được pt: $t^2-3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\,(L)\\ t=4\,(TM)\end{array}\right.$	0.5

	+ Với $t=4\Rightarrow\sqrt{x^2+5x+2}=4\Leftrightarrow x^2+5x-14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-7\end{array}\right.$ KL: PT có 2 nghiệm $x=2;x=-7$	1.0
2b	**Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{5n}$, $x\neq 0$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $3C_{n+1}^2+n.P_2=4A_n^2$**	**2.5**
	ĐK $n\geq 2,n\in\mathbb{N}$ $3C_{n+1}^2+n.P_2=4A_n^2\Leftrightarrow 3.\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!}+2n=4.\dfrac{n!}{(n-2)!}\Leftrightarrow 3.\dfrac{(n+1)}{2}+2=4(n-1)\Leftrightarrow n=3$	1.0
	+Với $n=3$ $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{5n}=\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k x^{3(15-k)}.2^k.x^{-2k}=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k 2^k x^{45-5k}$	0.5
	Số hạng không chứa x tương ứng với $45-5k=0\Leftrightarrow k=9$ Số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{15}^9 2^9$	0.5 0.5
3	**Từ các chữ số $0,1,3,5,7,8$ có thể lập được bao nhiêu số có tám chữ số mà trong đó chữ số 8 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số khác xuất hiện đúng một lần?**	**3.0**
	+ Xét các số có tám chữ số (kể cả chữ số 0 đứng đầu) Có $C_8^3=56$ cách chọn 3 vị trí cho chữ số 8 5 vị trí còn lại có $5!=120$ cách xếp các chữ số $0,1,3,5,7$ Vậy có $56.120=6720$ số	1.0
	+ Xét các số có 8 chữ số có chữ số không đứng đầu Có $C_7^3=35$ cách chọn 3 vị trí cho chữ số 8 4 vị trí còn lại có $4!=24$ cách xếp các chữ số $1,3,5,7$ Vậy có $35.24=840$ số	1.5
	Vậy số các số cần tìm là: $6720-840=5880$ **số**	0.5
4a	**Tính giới hạn** $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2023)\sqrt[3]{1-5x}-2023}{x}$	**1.0**

	$I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt[3]{1-5x}}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2023(\sqrt[3]{1-5x}-1)}{x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt[3]{1-5x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2023(-5x)}{x\left(\sqrt[3]{(1-5x)^2}+\sqrt[3]{1-5x}+1\right)}$ $=0+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2023(-5)}{\left(\sqrt[3]{(1-5x)^2}+\sqrt[3]{1-5x}+1\right)}=-\frac{10115}{3}$	0.5 0.25 0.25
4b	Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=2022;\ u_2=2023\\ u_{n+1}=\frac{2u_n+u_{n-1}}{3}\end{cases}\quad (n\ge 2, n\in\mathbb{N})$ Tính giới hạn của dãy số (u_n)	**2.0**
	+ Với mọi $n\ge 2$ ta có $u_{n+1}=\frac{2u_n+u_{n-1}}{3}\Leftrightarrow 3u_{n+1}=2u_n+u_{n-1}\Leftrightarrow 3u_{n+1}-3u_n=-u_n+u_{n-1}\Leftrightarrow (u_{n+1}-u_n)=-\frac{1}{3}(u_n-u_{n-1})$ (*)	0.5
	Xét dãy số (v_n) với $v_n=u_{n+1}-u_n$ Từ (*) $\Rightarrow$ $v_n=-\frac{1}{3}v_{n-1}\Rightarrow(v_n)$ là một cấp số nhân với $v_1=u_2-u_1=1;\ q=-\frac{1}{3}$ Ta có: $u_n=u_n-u_{n-1}+u_{n-1}-u_{n-2}+...+u_2-u_1+u_1=v_{n-1}+v_{n-2}+...+v_1+u_1$ $=v_1\frac{1-q^{n-1}}{1-q}+u_1=1.\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}}+2022=\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]+2022=\frac{3}{4}+2022-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	1.0
	Ta có $\lim\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$. Vậy $\lim u_n=2022+\frac{3}{4}=\frac{8091}{4}$	0.5
5.1	**Cho tứ diện $ABCD$, gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC,BC trên đoạn BD lấy điểm K sao cho $BK=2KD$; Gọi E,F lần lượt là giao điểm của CD và AD với mặt phẳng (IJK). Chứng minh rằng FK song song với IJ.**	**1.0**

<table>
<tr><td></td><td>Vẽ hình:


Trong (IJK) nối JK cắt CD tại E, nối EI cắt AD tại F.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có:
$IJ \subset (IJK); AB \subset (ABD), IJ // AB, (IJK) \cap (ABD) = FK$; FK, IJ phân biệt
Suy ra $FK // IJ$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AD = DC = a$ biết $AB = 2a$; $SD = b$. Trên đoạn AD lấy điểm M sao cho $AM = x$ $(0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và SD cắt BC, SB, SA lần lượt tại N, P, Q.
a. Chứng minh rằng NP luôn song song với một mặt phẳng cố định
b. Khi MN vuông góc với MQ, tìm x để tứ giác $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.</td><td>4.0</td></tr>
<tr><td>5.2.a</td><td>Chứng minh rằng NP luôn song song với một mặt phẳng cố định</td><td>2.0</td></tr>
</table>

5.2. a	 + Từ M kẻ đường thẳng song song với AB và SD lần lượt cắt BC tại N, SA tại Q + Từ Q kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại P	0.5
	Ta có: $MQ//SD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AQ}{AS}$ $MN//AB \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$ $PQ//AB \Rightarrow \frac{AQ}{AS} = \frac{BP}{BS}$ $\Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{BP}{BS} \Rightarrow NP//SC$ mà $SC \subset (SCD), NP \not\subset (SCD)$. Do đó $NP//(SCD)$ cố định	0.5 1.0
5.2. b	**b. Khi MN vuông góc với MQ, tìm x để tứ giác $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.**	**2.0**
	$\begin{cases} PQ//AB \\ MN//AB \end{cases} \Rightarrow PQ//MN$. Theo giả thiết $MN \perp MQ$. Tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M, Q $S_{MNPQ} = \frac{(MN+PQ)MQ}{2}$	0.5
	$\frac{MQ}{SD} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow MQ = \frac{AM.SD}{AD} = \frac{b.x}{a}$ $\frac{PQ}{AB} = \frac{SQ}{SA} = \frac{DM}{AD} \Rightarrow PQ = \frac{DM.AB}{AD} = \frac{(a-x).2a}{a} = 2(a-x)$ Gọi $I = AD \cap BC$ $\frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow MN = \frac{AB.IM}{IA} = \frac{2a.(2a-x)}{2a} = 2a - x$	0.75

	$S_{MNPQ}=\dfrac{(MN+PQ)MQ}{2}=\dfrac{(2a-x+2a-2x)bx}{2a}=\dfrac{b}{6a}(4a-3x).3x\le\dfrac{b}{6a}\left(\dfrac{4a-3x+3x}{2}\right)^2=\dfrac{2}{3}ab$ Dấu bằng xảy ra khi $4a-3x=3x\Leftrightarrow x=\dfrac{2a}{3}$ Vậy tứ giác MNPQ có diện tích lớn nhất khi $x=\dfrac{2a}{3}$	**0.5** **0.25**
6	**Cho các số thực không âm** a,b,c **thỏa mãn** $a^2+b^2+c^2-3b\le 0$**.** **Chứng minh rằng:** $\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{4}{(b+2)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}\ge 1$	**2.0**
	+ Với 2 số thực dương $x>0, y>0$ **ta có** $\begin{cases} x^2+y^2\ge 2xy \\ (x+y)^2\ge 4xy \end{cases}\Rightarrow (x^2+y^2)(x+y)^2\ge 8xy\Rightarrow \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\ge\dfrac{8}{(x+y)^2}$**.**	**0.5**
	+ Áp dụng: $\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{4}{(b+2)^2}\ge\dfrac{8}{\left(a+1+\dfrac{b}{2}+1\right)^2}=\dfrac{8}{\left(a+\dfrac{b}{2}+2\right)^2}$ $\dfrac{1}{\left(a+\dfrac{b}{2}+2\right)^2}+\dfrac{1}{(c+3)^2}\ge\dfrac{8}{\left(a+\dfrac{b}{2}+c+5\right)^2}$ $P\ge\dfrac{8}{\left(a+\dfrac{b}{2}+2\right)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}\ge 8.\dfrac{8}{\left(a+\dfrac{b}{2}+c+5\right)^2}=\dfrac{16^2}{(2a+b+2c+10)^2}$	**0.75**
	Ta có: $(a-1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 2a+4b+2c-6$ **Theo giả thiết:** $3b\ge a^2+b^2+c^2$ $\Rightarrow 3b\ge 2a+4b+2c-6$ **hay** $2a+b+2c\le 6$ Do $0<2a+b+2c+10\le 16\Rightarrow P\ge 1$ Dấu bằng xảy ra khi $a=1, b=2, c=1$	**0.5** **0.25**

Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.