Contents

I. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Phương pháp chung

- $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B^2 \end{cases}$.
- $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B \end{cases}$.
- $\sqrt{A}>B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A\ge 0 \\ B<0 \end{cases} \\ \begin{cases} B\ge 0 \\ A>B^2 \end{cases} \end{array}\right.$.

- $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \ge 0 \\ A < B^2 \end{cases}$.
- $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B \end{cases}$.

Lưu ý: Đối với những phương trình, bất phương trình căn thức không có dạng chuẩn như trên, ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1. Đặt điều kiện cho căn thức có nghĩa.
- Bước 2. Chuyển vế sao cho hai vế đều không âm.
- Bước 3. Bình phương cả hai vế để khử căn thức.

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0 \quad (1)$ (Khối D – 2006)

Lời giải

Xem đây là phương trình dạng $\sqrt{A}=B.$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=-x^2+3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \ge 0 \\ 2x-1=(-x^2+3x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \ge 0 \\ x^4-6x^3+11x^2-8x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \ge 0 \\ (x-1)^2(x^2-4x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{array} \right.$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1,\ x=2-\sqrt{2}.$

Nhận xét: Phương trình có dạng tổng quát: $\sqrt{mx+n}=ax^2+bx+c,\ (m,\ a \ne 0)$ ta đều giải được theo dạng $\sqrt{A}=B.$ Nếu sau khi lũy thừa ra được nghiệm hữu tỷ thì sẽ tiến hành chia Hoócner để phân tích thành tích số (đầu rơi, nhân tới, cộng chéo). Còn nếu ra nghiệm vô tỷ ta sẽ tiến hành sử dụng chức năng table của máy tính bỏ túi để tìm lượng nhân tử chung bậc hai, sau đó chia đa thức để đưa về dạng tích số bậc hai nhân bậc hai mà dễ dàng tìm được nghiệm.

Bài 2: Giải phương trình: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2} \quad (2)$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \ge -2$.

Ta có: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2} \Rightarrow (x^3-x^2-x-5)^2=(x+4)^2(x+2)$

$\Leftrightarrow x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7=0$

Vậy: $(x^2-3x-1)(x^4+x^3+3x^2+x+7)=0$

Vì $x^4+x^3+3x^2+x+7=x^2(x^2+x+1)+(2x^2+x+7)>0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Rightarrow x^2-3x-1=0$

Với $x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Thử lại nghiệm ta được $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Nhận xét: để phân tích ta dùng máy tính casio

Sử dụng máy tính Casio ta thu được: $x_1 \approx 3.302775638, x_2 \approx -0.3027756377$

Tư duy Viet đảo: $x_1 + x_2 \approx 3, x_1x_2 \approx -1$

Nhân tử thu được: $x^2 - 3x - 1$

Nhập máy tính: $\dfrac{x^6 - 2x^5 - x^4 - 9x^3 + x^2 - 22x - 7}{x^2 - 3x - 1}$ Calc 100

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{7 - x^2 + x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

Lời giải

Phương trình $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x - x^2 \ge 0 \\ 7 - x^2 + x\sqrt{x+5} = 3 - 2x - x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ \sqrt{x+5} = -\dfrac{x+2}{x} \end{cases}$ (do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ -\dfrac{x+2}{x} \ge 0 \\ x^2(x+5)^2 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ -2 \le x < 0 \\ x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \pm 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1.$

Nhận xét: Phương trình có dạng cơ bản: $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \;\; hay \;\; B \ge 0 \\ A = B \end{cases}$, khi đó có 2 phương án chọn $A \ge 0$ hay $B \ge 0$. Dựa vào đặc điểm của bài toán, ta nên chọn phương án nào đơn giản nhất, tức chọn $B = 3 - 2x - x^2 \ge 0$

Bài 4: Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}.$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}\right)^3 = 2x - 3 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}\right) = 0$

$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy các giá trị $x = 1; x = 2; x = \dfrac{3}{2}$ đều thỏa mãn phương trình đã cho.

- Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{1; 2; \dfrac{3}{2}\right\}.$

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{2x+1}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{2x+1}.$

Lời giải

Điều kiện $x > -\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{\dfrac{x^3+8}{2x+1}}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x+2}$

$\Rightarrow \dfrac{x^3+8}{2x+1}-2\sqrt{x^3+8}+(2x+1)=(x^2-2x+4)-2\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}+(x+2)$ $\Leftrightarrow x^3-5x^2+7x-3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho chỉ có giá trị $x=1$.

Bài 6. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+1}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Đáp án: B

Điều kiện $x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+1}\right)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3+1}{x+3}+2\sqrt{x^3+1}+(x+3)=(x^2-x+1)+2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}+(x+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3+1}{x+3}=x^2-x-1 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}.$

- Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$. ‘

Vậy tổng các nghiệm là: $1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}=2$

Bài 7: Cho phương trình $27x^3+18x^2-9x+(27x^2+2x-1)\sqrt{2x-1}-125=0$. Giả sử nghiệm của phương trình có dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{c}$ tối giản. Tính

$S=a+b+c$.

A. $S=46$. **B.** $S=47$. **C.** $S=48$. **D.** $S=49$.

Lời giải

Đáp án: B

Ta có:

$27x^3+18x^2-9x+(27x^2+2x-1)\sqrt{2x-1}-125=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-3x\right)^3=-125$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=3x-5$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{16+\sqrt{22}}{9}$

Suy ra: $a=16, b=22, c=9$

Vậy $S=47$

Bài 8: Biết rằng phương trình $x^3(x+4)+4x+\sqrt{x^2+2x+2020}=2(1009-3x^2)$ có một nghiệm dương duy nhất dạng $x=-a+\sqrt{\dfrac{-b+c\sqrt{d}}{e}}$ trong đó $a,\ b,\ d\in\mathbb{N}$, $c,\ e$ là các số nguyên tố. Khi đó $a+b+c+d+e$ bằng:

A. 901. **B.** 902. **C.** 903. **D.** 904.

Lời giải

Đáp án: C

$$x^3(x+4)+4x+\sqrt{x^2+2x+2020}=2(1009-3x^2)$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^4+\sqrt{(x+1)^2+2019}=2019$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^4+(x+1)^2+\frac{1}{4}=(x+1)^2+2019-\sqrt{(x+1)^2+2019}+\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2+\frac{1}{2}\right]^2=\left[\sqrt{(x+1)^2+2019}-\frac{1}{2}\right]^2$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+\frac{1}{2}=\sqrt{(x+1)^2+2019}-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^4+(x+1)^2-2018=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{-1+3\sqrt{897}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{\dfrac{-1+3\sqrt{897}}{2}} \\ x=-1+\sqrt{\dfrac{-1+3\sqrt{897}}{2}} \end{array}\right.$$

Vậy $a=1,\ b=1,\ c=3,\ d=897,\ e=2 \Rightarrow a+b+c+d+e=904.$

Bài 9: Giả sử phương trình $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ có một nghiệm có dạng $x=a-b\sqrt{c}$ trong đó $a,\ b,\ c\in\mathbb{N}^*$. Khi đó $a+b+c$ có kết quả là

A. 5. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$-(x^2-3x+1)=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1\le 0 \\ (x^2-3x+1)^2=2x-1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1\le 0 \\ x^4-6x^3+11x^2-8x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1\le 0 \\ (x^2-2x+1)(x^2-4x+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\le x\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2\pm\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Vậy $a=2,\ b=1,\ c=2 \Rightarrow a+b+c=5.$

Bài 10: Cho phương trình

$$8\underbrace{\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{\cdots+\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}}}}}}_{2018\ can}=4x^3+5x^2+5x+1 \ (1)$$

Tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng

A. $\frac{25+8\sqrt{5}}{16}$. **B.** $\frac{25-8\sqrt{5}}{16}$. **C.** $\frac{49}{16}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình (1) suy ra $4x^3+5x^2+5x+1=(4x+1)(x^2+x+1)\ge 0\Rightarrow x\ge -\frac{1}{4}$

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow 8\underbrace{\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{\cdots+\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}}}}}}_{2018\,can}=4x^3+5x^2+5x+1$$

$$\Leftrightarrow 8\underbrace{\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{\cdots+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}}}}}_{2017\,can}=4x^3+5x^2+5x+1$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}=4x^3+5x^2+5x+1 \qquad \Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{4}\right)=(4x+1)(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow (4x+1)(x^2+x-1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{4}\\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$$

Do đó tổng bình phương các nghiệm bằng $\frac{25-8\sqrt{5}}{16}$

II. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ THÊM BỚT THÀNH HẰNG ĐẲNG THỨC

Bài 1: Giải phương trình: $4x^2+14x+1=4\sqrt{6x+10}$

Lời giải

$4x^2+14x+1=4\sqrt{6x+10}$

$\Leftrightarrow 4x^2+20x+25=6x+10+4\sqrt{6x+10}+4$

$\Leftrightarrow (2x+5)^2=\left(\sqrt{6x+10}+2\right)^2$

$\Leftrightarrow |2x+5|=\sqrt{6x+10}+2$

Bài 2. $3x^2+6x-3=\sqrt{\frac{x+7}{3}}$

Lời giải

Cách 1: Đặt $t=\sqrt{\frac{x+7}{3}}\ (t\ge 0)$ ta có: $\begin{cases}3x^2+6x-3=t\\ 3t^2-7=x\end{cases}$.

Đặt $y=x+1$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases}3y^2-6=t\\ 3t^2-6=y\end{cases}$.

Cách 2: Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $x^2+6x-3=\sqrt{\dfrac{3x+21}{9}}$

$\Leftrightarrow 9x^2+18x-9=\sqrt{3x+21} \Leftrightarrow 9x^2+21x+\dfrac{49}{4}=3x+21+\sqrt{3x+21}+\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(3x+\dfrac{7}{2}\right)^2=\left(\sqrt{3x+21}+\dfrac{1}{2}\right)^2$

Bài tập tương tự: 1) $7x^2+7x=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$. 2) $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$. 3) $27x^2+18x=\sqrt{x+\dfrac{4}{3}}$.

Bài 3. **[phương pháp nhóm thành hằng đẳng thức]**

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x+\sqrt{y-2}+\sqrt{4-z}=y^2-5z+11 \\ y+\sqrt{z-2}+\sqrt{4-x}=z^2-5x+11 \\ z+\sqrt{x-2}+\sqrt{4-y}=x^2-5y+11 \end{cases}$

Lời giải

ĐK $2\le x\le 4$

Cách 1: Nhân 2 vế của mỗi phương trình với 2 và cộng với vế theo vé, ta có

$2x+2y+2z+2\sqrt{x-2}+2\sqrt{y-2}+2\sqrt{z-2}+2\sqrt{4-x}+2\sqrt{4-y}+2\sqrt{4-z}$

$=2x^2+2y^2+2z^2-10x-10y-10z+66$

[Dạng toán hoặc dạng phương pháp đã ghi chú bằng mực đỏ]

$\Leftrightarrow 2(x-3)^2+2(y-3)^2+2(z-3)^2+\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2+$

$+\left(\sqrt{4-x}-1\right)^2+\left(\sqrt{4-y}-1\right)^2+\left(\sqrt{4-z}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Cách 2: Đánh giá bằng bất đẳng thức

$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{y-2}+\sqrt{4-y}+\sqrt{z-2}+\sqrt{4-z}=x^2-6x+11+y^2-6y+11+z^2-6z+11(*)$

Ta có: $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2\le 2(x-2+4-x)=4 \Rightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$

Suy ra $VT(*)\le 6$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=3$.

Mặt khác, $VP(*)\ge 6$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=3$.

Vậy $x=y=z=3$.

Bài 4: Biết phương trình : $8x^2-8x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1}$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 $(x_1<x_2<x_3)$ Tính $T=x_1+(\sqrt{7}+1)x_2+x_3$?

A. $T=\dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$. **B.** $T=\dfrac{3}{2}$. **C.** $T=3$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Đáp án: C

Điều kiện : $2x^2-3x+1\ge 0$

$Pt \Leftrightarrow 8x^2-8x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1} \Leftrightarrow 4(x-\sqrt{2x^2-3x+1})^2=(2x-1)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2x^2-3x+1}=1 \\ 2\sqrt{2x^2-3x+1}=4x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4} \\ x=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4} \end{array}\right.$$

Vậy $T=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}+\left(\sqrt{7}+1\right)\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}=3$

Bài 5: Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24$ có dạng $x=m+n\sqrt{p}$ (với $m,n\in\mathbb{Z}$ và p là số nguyên tố). Tính giá trị $T=m+n+p$.

A. $T=25$. **B.** $T=27$. **C.** $T=3$. **D.** $T=7$.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện: $-12\le x\le 4$.

Phương trình đã cho tương đương với $2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=2(x-24)$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+6x+9\right)+2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}+\left(-x^2-8x+48\right)=9$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+3)+\sqrt{-x^2-8x+48}\right]^2=9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (x+3)+\sqrt{-x^2-8x+48}=3 & (1) \\ (x+3)+\sqrt{-x^2-8x+48}=-3 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ -2x^2-8x+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2-2\sqrt{7} \\ x=-2+2\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-2-2\sqrt{7} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -6 \\ -2x^2-20x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -6 \\ \left[\begin{array}{l} x=-5-\sqrt{31} \\ x=-5+\sqrt{31} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-5-\sqrt{31} \text{ (thỏa mãn).}$$

Nghiệm nhỏ nhất sẽ là $x=-5-\sqrt{31}$. Do đó $m+n+p=-5-1+31=25$.

[Các Bài phân tích hằng đẳng thức]

Bài 6. $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$. **HD:** PT $\Leftrightarrow x+3+2\sqrt{x+3}+1=9x^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}+1\right)^2=9x^2$.

Bài 7. $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$. **HD:** PT $\Leftrightarrow 3x+10-2\sqrt{3x+10}+1+x^2+6x+9=0$.

Bài 8. $\sqrt{2x-1}=x^2-3x+1$. **HD:** PT $\Leftrightarrow 4(2x-1)+4\sqrt{2x-1}+1=4x^2-4x+1$.

Bài 9. $x^2-x-10\sqrt{1+80x}=10$.

HD: PT $\Leftrightarrow 4x^2-4x-40\sqrt{1+80x}=40 \Leftrightarrow 4x^2-2.2x.19+19^2=1+80x+40\sqrt{1+80x}+400$

$$\Leftrightarrow (2x-19)^2=\left(\sqrt{1+80x}+20\right)^2.$$

Bài 10. $7x^2+7x=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$.

HD: PT $\Leftrightarrow 196x^2+196x=\sqrt{28}.\sqrt{4x+9} \Leftrightarrow 196x^2+196x=2.\sqrt{28x+63}$

$\Leftrightarrow 196x^2+224x+64=28x+63+2.\sqrt{28x+63}+1$

$\Leftrightarrow (14x+8)^2=\left(\sqrt{28x+63}+1\right)^2$.

Bài 11. $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$.

HD: PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 4-3\sqrt{10-3x}=(x-2)^2 \ (*) \end{cases}$.

$+\ (*) \Leftrightarrow -3\sqrt{10-3x}=x^2-4x \Leftrightarrow -12\sqrt{10-3x}=4x^2-16x$

$\Leftrightarrow 4(10-3x)-12\sqrt{10-3x}+9=4x^2-28x+49$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{10-3x}-3\right)^2=(2x-7)^2$.

Bài 12. $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$.

HD: PT $\Leftrightarrow 8(4x-1)\sqrt{x^2+1}=16x^2+16x+8$

$\Leftrightarrow (4x-1)^2-8(4x-1)\sqrt{x^2+1}+16\left(x^2+1\right)=16x^2-24x+9$

$\Leftrightarrow \left(4x-1-4\sqrt{x^2+1}\right)^2=(4x-3)^2$.

Bài 13. **Giải phương trình** $x\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{3x+1}=x^2+x+3\,(1)$**.**

Lời giải

$(1) \Leftrightarrow 2x\sqrt{x^2-x+1}+4\sqrt{3x+1}=2x^2+2x+6$

$\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{x^2-x+1}+x^2-x+1+\left(3x+1-2\sqrt{3x+1}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)^2+\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x^2-x+1}=0 \\ \sqrt{3x+1}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 3x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Hệ thống bài tập tương tự:

1. $2\sqrt{2x-1}=x^2-2x$.
2. $\sqrt{x+1}=x^2+4x+5$.
3. $x^2-2=\sqrt{x+2}$.
4. $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$.
5. $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$.
6. $\sqrt{3x-2}=-4x^2+21x-22$.
7. $x^4+\sqrt{x^2+3}=3$.
8. $1+\sqrt{x+1}=x^2$.

9. $x^2-5x+4=2\sqrt{x-1}$.

10. $8x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$.

11. $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$.

12. $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)}=28-x$.

13. $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

14. $(x+1)\sqrt{x^2-3x+3}=x^2-2x+3$.

15. $(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}=x^2+x-1$.

16. $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$.

17. $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$.

18. $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$.

19. $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$.

20. $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$.

21. $4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$.

22. $1+x-2x^2=4\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}$.

Bài 14: Giải phương trình $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{27\sqrt{2}}{8}(x-1)^2\sqrt{x-1}$

Lời giải

Ý tưởng: *Sử dụng phương pháp phân tích hằng đẳng thức + đặt ẩn phụ.*

Điều kiện: $x\geq 1$.

Nhân 2 vế với $\sqrt{2}$, ta được $\sqrt{x+1+2\sqrt{(x+1)(x-1)}+x-1}=\dfrac{27}{4}(x-1)^2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}=\dfrac{27}{4}(x-1)^2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\dfrac{27}{4}(x-1)^2\sqrt{x-1}$ (1)

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x-1}$, ta được $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1=\dfrac{27}{4}(x-1)^2$ (2).

Đặt $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=t\ (t>0)\Rightarrow t^2=1+\dfrac{2}{x-1}\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4}=\dfrac{1}{\left(t^2-1\right)^2}$.

$$(2) \Rightarrow t+1=\frac{27}{\left(t^2-1\right)^2} \Rightarrow (t-2)\left(t^4+3t^3+4t^2+6t+13\right)=0$$

$$\Rightarrow t=2 \Rightarrow x=\frac{5}{3}.$$

Vậy $S=\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

III.PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp chung

a. Đưa phương trình vô tỷ về dạng phương trình một ẩn $at^2+bt+c=0\,(a\neq 0)$**.**

b. Đưa phương trình vô tỷ về phương trình nhiều ẩn phụ.

Dạng 1. $a.f\ \ x\ \ +b.\sqrt[n]{f\ \ x\ \ }+c=0$

Dạng 2. $a.\sqrt{f\ \ x\ \ }+b.\sqrt{g\ \ x\ \ }+2ab.\sqrt{f\ \ x\ \ .g\ \ x\ \ }=h\ \ x$

Dạng 3. $\alpha\cdot\sqrt[n]{a-f\ \ x\ \ }+\beta\cdot\sqrt[m]{b+f\ \ x\ \ }=c$

Dạng 4. $a\cdot\sqrt[n]{A^2}+b\cdot\sqrt[n]{A.B}+c\cdot\sqrt[n]{B^2}=0$

Dạng 5. $a.f\ \ x\ \ +b.g\ \ x\ \ =c.\sqrt{f\ \ x\ \ .g\ \ x\ \ }$

Dạng 6. $a.f\ \ x\ \ +b.g\ \ x\ \ =c.\sqrt{d.f^2\ \ x\ \ +e.g^2\ \ x\ \ }$

Dạng 7. $\left[f\ \ x\ \ \right]^n+b\ \ x\ \ =a\ \ x\ \ \cdot\sqrt[n]{a\ \ x\ \ \cdot f\ \ x\ \ -b\ \ x\ \ }$

Dạng 8. $ax+b\ \ ^n=p.\sqrt[n]{cx+d}+q.x+r$

Dạng 9. $\sqrt{x+2a\sqrt{x-b}+a^2-b}+\sqrt{x-2a\sqrt{x-b}+a^2-b}=cx+d$

Dạng 10. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

1. ĐẶT ẨN PHỤ HOÀN TOÀN

Bài 1: Giải phương trình: $x^2-4x+2=2\sqrt{x^2-4x+5}$. $S=\left\{2\pm 2\sqrt{2}\right\}$

Bài 2: Giải phương trình: $(x+5)(x-2)-4(x+5)\sqrt{\frac{x-2}{x+5}}+3=0$. $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{53}}{2};\frac{-3+\sqrt{85}}{2}\right\}$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x$.

Đặt $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}$

Bài 4. Giải bất phương trình $\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x+3}\ge 2x+2\ (1)$

ĐK: $x\ge -1$

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1\ (t\ge 0)$

Ta được bất phương trình $2\sqrt{2t^2+1}\le 2t^2-t\Leftrightarrow\begin{cases}2t^2-t\ge 0\\4t^4-4t^3-7t^2-4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\le 0\\t\ge\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\4t^4-4t^3-7t^2-4\ge 0\ (2)\end{cases}$

+Với $t\le 0$. Kết hợp điều kiện thì $t=0$ không thỏa mãn (2)

+Với $t\ge\dfrac{1}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow(t-2)(4t^3+4t^2+t+2)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 2\Leftrightarrow\sqrt{x+1}\ge 2\Leftrightarrow x\ge 3(TMDK)$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[3;+\infty)$

Bài 5: Giải bất phương trình $\sqrt[3]{7x-8}+1\ge\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2\quad(1)$

ĐK: $x\ge\dfrac{1}{2}$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2}\ (t\ge 0)$

Khi đó (1) trở thành $\sqrt[3]{\dfrac{7t^2-9}{2}}+1\ge(t-1)^2$

$\Leftrightarrow\sqrt[3]{\dfrac{7t^2-9}{2}}\ge t^2-2t\Leftrightarrow 7t^2-9\ge 2(t^2-2t)^3$

$\Leftrightarrow(t-1)(t-3)(2t^4-4t^3+2t^2+4t+3)\le 0$

Ta có $2t^4-4t^2+2t^2+4t+3=2(t^2-t)^2+4t+3>0,\forall t\ge 0$.

Từ đó (2) $\Leftrightarrow(t-1)(t-3)\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 3$

$\Rightarrow 1\le\sqrt{2x-1}\le 3\Leftrightarrow 1\le x\le 5$.

Bài 6: $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x\quad(1)$

Điều kiện: $x\ge\dfrac{6}{7}$, khi đó

(1) $\Leftrightarrow 14x-181+\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<0$

$\Leftrightarrow(7x+7)+(7x-6)+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}+\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}-182<0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\right)^2+\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}-182<0$.

Đặt $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=t>0$, khi đó ta có bất phương trình

$t^2+t-182<0\Leftrightarrow -14<t<13\Rightarrow 0<t<13$.

Suy ra $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}-13<0$ vì hàm số vế trái đồng biến nên ta có

$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}-13<0\Leftrightarrow x<6$.

Bài 7: $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\ge 3\sqrt{x}$ (1).

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}0\le x\le 2-\sqrt{3}\\x\ge 2+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Nhận xét: $x=0$ là một nghiệm.

Với $x>0$, chia hai vế cho $\sqrt{x}$, ta được

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x-4+\frac{1}{x}}\ge 3 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}-4}\ge 3\ (2)$.

Đặt $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=t\ (t\ge 2)\Rightarrow x+\frac{1}{x}=t^2-2$.

Từ (2), ta có $\sqrt{t^2-6}\ge 3-t \Leftrightarrow t\ge \frac{5}{2}$.

Suy ra $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge \frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}+2\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}\le \frac{1}{2}\\ \sqrt{x}\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le \frac{1}{4}\\ x\ge 4\end{array}\right.$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left[0;\frac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty)$.

Bài 8: $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\ge 1\quad (1)$.

Điều kiện: $x\ge 0$.

Nhận xét: $\sqrt{2(x^2-x+1)}=\sqrt{(x-1)^2+x^2+1}>1\Rightarrow 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}<0$.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow x-\sqrt{x}\le 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)}<1-x+\sqrt{x}$ (2).

Ta có $x=0$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

Với $x>0$, chia hai vế cho $\sqrt{x}$ ta được

$$\sqrt{2\left(x+\frac{1}{x}\right)-2}\le\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)+1 \qquad (3)$$

Đặt $\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=t\Rightarrow x+\frac{1}{x}=t^2+2$. Khi đó (3) trở thành

$\sqrt{2t^2+2}\le t+1 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Bài 9: Giải bất phương trình $\sqrt{2x^4-6x^3+10x^2-6x+8}-\sqrt{x^3+x}\le\sqrt{x^2+1}(x-2)\qquad (1)$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}2x^4-6x^3+10x^2-6x+8\ge 0\\ x^3+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+1)(2x^2-6x+8)\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x^2+1}\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}(x-2)\le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x}-x+2\le 0 \qquad (2)$

Nhận xét $x=0$ không phải là nghiệm nên chia cho $\sqrt{x}$, ta có:

$\sqrt{2\left(x+\frac{4}{x}\right)-6}-1-\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\le 0 \qquad (3)$

Đặt $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=t\Rightarrow x+\frac{4}{x}=t^2+4$

Ta có $\sqrt{2t^2+2}\le t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ t^2-2t+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=1 \Leftrightarrow x=4$.

2. ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

Bài 1: Giải phương trình: $2012x^2 - 4x + 3 = 2011x\sqrt{4x-3}$.

Đặt $t = \sqrt{4x-3} \Rightarrow 2012x^2 - 2011xt - t^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ x = \dfrac{-t}{2012} \end{array}\right.$

Bài 2: Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$.

Đặt $t = \sqrt{x^2-2x+3} \Rightarrow (x+1)t = x^2+1 \Rightarrow x^2-2x+3-(x+1)t+2(x-1) = 0$

$t^2-(x+1)t+2(x-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = x-2 \end{array}\right.$

3. ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 1: [Đặt ẩn phụ đưa về phương trình tích] Giải phương trình $x = \left(2010+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

Điều kiện: $x \ge 0$.

Đặt $t = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ $(0 \le t \le 1)$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 1-t^2 \Rightarrow x = \left(1-t^2\right)^2$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được

$\left(1-t^2\right)^2 = \left(2011-t^2\right)(1-t)^2$

$\Leftrightarrow 2(1-t)^2\left(t^2+t-1005\right) = 0$

$\Rightarrow (1-t)^2 = 0$ (Vì $0 \le t \le 1$ nên $t^2+t-1005 < 0$)

Bài 2: [Phương trình tích] Giải phương trình $2\left(x^2+2\right) = 5\sqrt{x^3+1}$

Đặt $u = \sqrt{x+1}$; $v = \sqrt{x^2-x+1}$

$\Rightarrow 2\left(u^2+v^2\right) = 5uv \Leftrightarrow (u-2v)(2u-v) = 0$.

Bài 3: [Phương trình tích] Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2$.

Đặt $a = \sqrt[3]{7x+1}$; $b = -\sqrt[3]{x^2-x-8}$; $c = \sqrt[3]{x^2-8x-1}$

$\Rightarrow a+b+c = 2 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 8$

Và $a^3+b^3+c^3 = 8$

$\Rightarrow (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 0$

$\Rightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a)=0$

Bài 4: Giải bất phương trình $2\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4}\le 3x^2+1 \qquad (1)$

Lời giải

Điều kiện $-1\le x\le 1$.

Đặt $\sqrt{x^2+1}=a>0, \sqrt{1-x^2}=b\ge 0$

Suy ra $3x^2+1=2a^2-b^2; \sqrt{1-x^4}=ab$.

Ta có: $2(2a-b)-ab\le 2a^2-b^2 \Leftrightarrow (2a-b)(a+b-2)\ge 0$.

Vì $a\ge b\ge 0 \Rightarrow 2a-b\ge 0$. Do đó $a+b-2\ge 0$

Suy ra $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\ge 2 \Leftrightarrow x=0$.

Bài 5: Giải bất phương trình $\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}}\ge\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}+2-\dfrac{x^2+1}{x} \qquad (1)$

Lời giải

Điều kiện $x>0$

Ta có $(1)\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}.\dfrac{x^2-x+1}{x}}\ge\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}+2-\dfrac{x^2+1}{x^2} \qquad (2)$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}=a>0, \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}}=b>0,$

Khi đó $\dfrac{x^2+1}{x^2}=b^2+1$

$(2)\Leftrightarrow ab\ge a+1-b^2 \Leftrightarrow (b-1)(a+b+1)\ge 0\Rightarrow b\ge 1$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x}}\ge 1\Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$ (đúng)

Vậy nghiệm của bất phương trình là $(0;+\infty)$.

4. ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ

Bài 1. Đặt ẩn phụ đưa về hệ bậc nhất hai ẩn

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{(x+2y+1)^3}+\sqrt{(2x-y+5)^3}=1\\ \dfrac{\sqrt{x+2y+1}+2\sqrt{2x+y+1}}{5x+11}=9x-2y+21\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+2y+1}=a\ge 0\\ \sqrt{2x+y+1}=b\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y+1=a^2\\ 2x+y+1=b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a^2+2b^2-11}{5}\\ y=\dfrac{2a^2-b^2+3}{5}\end{cases} \qquad (1)$

$\Rightarrow 5x+11=a^2+2b^2;\ 9x-2y+21=a^2+4b^2$.

Khi đó hệ đã cho trở thành $\begin{cases} a^3+4b^3=1 \\ \dfrac{a+2b}{a^2+2b^2}=a^2+4b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+4b^3=1 \\ a+2b=\left(a^2+4b^2\right)\left(a^2+2b^2\right) \end{cases}$ (2)

$$\Rightarrow (a+2b)\left(a^3+4b^3\right)=\left(a^2+4b^2\right)\left(a^2+2b^2\right) \Rightarrow ab(a-b)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ a=b \\ a=2b \end{array}\right..$$

TH1: $a=0 \Rightarrow b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ 2x-y+5=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-11\sqrt[3]{2}}{6\sqrt[3]{2}} \\ y=\dfrac{8\sqrt[3]{2}-1}{6\sqrt[3]{2}} \end{cases}$.

TH2: $b=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+1=1 \\ 2x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$.

TH3: $a=b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \\ 2x-y+5=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-11\sqrt[3]{5}}{6\sqrt[3]{5}} \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

TH4: $a=2b=\dfrac{2}{\sqrt[3]{12}} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+1=\dfrac{2}{\sqrt[3]{12}} \\ 2x-y+5=\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4-11\sqrt[3]{12}}{6\sqrt[3]{12}} \\ y=\dfrac{1+4\sqrt[3]{12}}{3} \end{cases}$.

Bài 2. **Đặt ẩn phụ đưa về hệ bậc nhất hai ẩn**

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)\sqrt{x^2+7}+y\sqrt{2y^2+1}=xy+2y^2 \\ 2x\sqrt{x^2+7}+(x+y)\sqrt{2y^2+1}=3xy-x^2 \end{cases}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2+7}=u \\ \sqrt{2y^2+1}=v \end{cases}$.

Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} (x+y)u+yv=xy+2y^2 \\ 2xu+(x+y)v=3xy-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2y \\ v=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+7}=2y \\ \sqrt{2y^2+1}=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7=4y^2 \\ 2y^2+1=x^2 \\ x\le 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=4 \\ x\le 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}.$$

Bài 19. **[Đặt hai ẩn]** Giải phương trình $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$.

Đặt $u=\sqrt[3]{24+x};\ v=\sqrt{12-x}\Rightarrow\begin{cases}u+v=6\\u^2+v^2=36\end{cases}$.

Đáp số: $S=\{-88;-24;3\}$.

Bài 20. **[Đưa về hệ đối xứng loại 2]** Giải phương trình $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}\Rightarrow\begin{cases}x^3+1=2t\\t^3+1=2x\end{cases}$.

Đáp số: $S=\left\{1;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 21. **[Đưa về hệ đối xứng loại 2]** Giải phương trình $x^2-2=2\sqrt{2x-1}$.

Đặt $y-1=\sqrt{2x-1}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x=2(y-1)\\y^2-2y=2(x-1)\end{cases}$.

Đáp số: $S=\{2+\sqrt{2}\}$.

Bài 22. **Bài tập tự luyện**

1) $(x+1)(x+4)=5\sqrt{x^2+5x+28}$.

2) $-4\sqrt{(4-x)(2+x)}=x^2-2x-12$.

3). $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}+4$

4). $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

5). $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}+3=0$.

6). $x^2+\left(3-\sqrt{x^2+2}\right)x=1+2\sqrt{x^2+2}$.

7). $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$.

8). $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$.

9). $x+\sqrt{5+\sqrt{x+1}}=0$.

10). $x^2+\sqrt{x+\dfrac{3}{2}}=\dfrac{9}{4}$.

11). $x(x+5)=3\sqrt[3]{x^2+5x+2}-4$.

12). $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$.

13). $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.

14). $2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}$.

15). $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

16). $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$.

17). $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$.

18). $\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$.

19). $\sqrt[3]{3x^2-x+2011}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2012}-\sqrt[3]{6x-2013}=\sqrt[3]{2012}$.

20). $x.\sqrt[3]{25-x}\left(x+\sqrt[3]{25-x^3}\right)=30$.

21). $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$.

22). $x+\sqrt{2011+\sqrt{x-1}}=2012$.

23). $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1$.

24). $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

25). $x=2011+\sqrt{2011+\sqrt{x}}$.

26). $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$.

27). $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$.

28). $7x^2+7x=\sqrt{\frac{4x+9}{8}}$.

Bài 14. $3x^2+6x-3=\sqrt{\frac{x+7}{3}}$

Lời giải

Cách 1: Đặt $t=\sqrt{\frac{x+7}{3}}\,(t\geq 0)$ ta có: $\begin{cases}3x^2+6x-3=t\\3t^2-7=x\end{cases}$.

Đặt $y=x+1$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases}3y^2-6=t\\3t^2-6=y\end{cases}$.

Cách 2: Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $x^2+6x-3=\sqrt{\frac{3x+21}{9}}$

$\Leftrightarrow 9x^2+18x-9=\sqrt{3x+21}\Leftrightarrow 9x^2+21x+\frac{49}{4}=3x+21+\sqrt{3x+21}+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\left(3x+\frac{7}{2}\right)^2=\left(\sqrt{3x+21}+\frac{1}{2}\right)^2$

Bài tập tương tự: 1) $7x^2+7x=\sqrt{\frac{4x+9}{28}}$. 2) $2x^2+4x=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$. 3) $27x^2+18x=\sqrt{x+\frac{4}{3}}$.

IV. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ NHÂN LIÊN HỢP

1. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ NHÂN LIÊN HỢP TRỰC TIẾP CÁC BIỂU THỨC CÓ SẴN TRONG PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Hướng dẫn giải

Ta có điều kiện xác định: $\begin{cases}2x^2-1\ge 0\\ x^2-3x-2\ge 0\end{cases}$.

Khi đó: $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}\right)+\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x+2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{-2x-4}{\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(-2x-4)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x+2}}\right)=0$$

$\Rightarrow -2x-4=0\Rightarrow x=-2.$

Kết hợp với điều kiện và thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x=-2$.

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

Hướng dẫn giải

Ta có điều kiện xác định: $\begin{cases}2x^2+16x+18\ge 0\\ x^2-1\ge 0\end{cases}$

Khi đó: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

$\sqrt{x^2-1}=2x+4-\sqrt{2x^2+16x+18}\qquad(1)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=\frac{2\left(x^2-1\right)}{2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x^2-1}=0 & (2)\\ 2\sqrt{x^2-1}=2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18} & (3)\end{array}\right.$$

Giải (2): $\sqrt{x^2-1}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Cộng (1) với (3) ta được $3\sqrt{x^2-1}=4x+8\Leftrightarrow\begin{cases}4x+8\ge 0\\ 9\left(x^2-1\right)=\left(4x+8\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 7x^2+64x+73=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-32+3\sqrt{57}}{7}\\ x=\dfrac{-32-3\sqrt{57}}{7}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-32+3\sqrt{57}}{7}.$$

Kết hợp với điều kiện và thử vào phương trình ta được các nghiệm là $x=\pm 1$ và $x=\dfrac{-32+3\sqrt{57}}{7}$.

Bài 3. Giải phương trình: $\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{3x^2+7x+2}+4\right)=4x-2$

Hướng dẫn giải

Ta có điều kiện xác định: $x\ge -\dfrac{1}{3}$

Khi đó:

$$\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{3x^2+7x+2}+4\right)=4x-2$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{3x^2+7x+2}+4\right)=(4x-2)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left[\sqrt{3x^2+7x+2}+4-2\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$ và $x=2$.

Bài 4. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x+2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt[4]{x}}$

Hướng dẫn giải

Ta có điều kiện xác định: $x>0$.
Khi đó phương trình tương đương với:

$$\frac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{2x+1}}{\sqrt[4]{(2x+1)(x+2)}}=\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt[4]{(2x+1)(x+2)}\left(\sqrt[4]{(x+2)^3}+\sqrt[4]{(x+2)^2(2x+1)}+\sqrt[4]{(x+2)(2x+1)^2}+\sqrt[4]{(2x+1)^3}\right)}=\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x+1)(x+2)}\left(\sqrt[4]{(x+2)^3}+\sqrt[4]{(x+2)^2(2x+1)}+\sqrt[4]{(x+2)(2x+1)^2}+\sqrt[4]{(2x+1)^3}\right)}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

Bài 5: Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{2x+2}-\sqrt[3]{5x-14}=\ 3x-16\ \sqrt{x-2}$$

Điều kiện $x\ge 2$

Hướng dẫn nhân chia liên hợp vế trái xuất hiện nhân tử chung $3x-16$

Giải ra nghiệm $x=\dfrac{16}{3}$

Bài 6: Giải phương trình : $\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{x+2}=\dfrac{1}{x}+\sqrt{2x+1}$ đk $\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x\ne 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}$

Hướng dẫn nhân chia liên hợp xuất hiện nhân tử chung $x-1$

Đáp số $x=1$

Bài 7: Giải phương trình : $\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-5}\le 2x-3$

Hướng dẫn nhân chia liên hợp vt xuất hiện nhân tử chung $2x-3$

Đáp số $x\ge\frac{3}{2}$

Bài 8: Giải phương trình: $\frac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2}<x+21$ (1)

Hướng dẫn thấy $\frac{x}{3-\sqrt{9+2x}}=-\frac{3+\sqrt{9+2x}}{2}$ thay vào (1)

Đáp số: $\left[-\frac{9}{2}\ ;\ 0\right)\cup\left(0\ ;\ \frac{7}{2}\right)$

Bài 9: Cho $x\,;y$ thỏa mãn : $\left(x+\sqrt{x^2+2011}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2011}\right)=2011$

Tính $x+y=?$

Ta có:

$x+\sqrt{x^2+2011}=\sqrt{y^2+2011}-y$

$y+\sqrt{y^2+2011}=\sqrt{x^2+2011}-x$

Cộng vế với vế ta có $x+y=0$.

Luyện tập : Giải các phương trình sau :

1) $2\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}+21\sqrt{x+2}$

2) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3-x}=x^2-5x+8$

3) $2+\sqrt{3-8x}=6x+\sqrt{4x-1}$

4) $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$

5) $1+\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{2x^2+x+2}$

6) $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

7) $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$

8) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$

9) $\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{3x^2+x-1}=\sqrt{x^2+4x-3}-\sqrt{2x^2+4x-3}$

10) $\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^2}>x-4$

11) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\ge x$

12) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$

Bài 10: Giải phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4 \end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}-y+\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)\left(y+\sqrt{xy}-2\right)}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0\Leftrightarrow x=y$$

Với $x=y$ .Từ (2) đc : $y+\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}\right)+(x-1)^2+2\ge 2$

Bài 11. **[phương pháp liên hợp]** Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \quad (1) \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6x+1=0 \ (2) \end{cases}$

Lời giải

$$(2)\Leftrightarrow 4y=(x+y-1)^2 \Rightarrow y\ge 0$$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2}=\sqrt[4]{y^4}-\sqrt[4]{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-y^4-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}=\frac{y^4-x+1}{\left(\sqrt{y^4}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt[4]{y^4}+\sqrt[4]{x-1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow y^4-x+1=0\Rightarrow x=y^4+1$$

$$\Rightarrow 4y=\left(y^4+y\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y^7+2y^4+y=4 \end{array}\right.$$

Nếu $0<y<1$ thì $y^7+2y^4+y<4$. Suy ra phương trình vô nghiệm

Nếu $y>1$ thì $y^7+2y^4+y>4$. Suy ra phương trình vô nghiệm

2. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ NHÂN LIÊN HỢP THÊM BỚT HẰNG SỐ

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+5}+3x=\sqrt{x^2+12}+5$.

Lời giải

Ta có: $\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)+(3x-6)+\left(4-\sqrt{x^2+12}\right)=0$

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x^2+9xy+5x-4y+9\sqrt{y}=7 & (1) \\ \sqrt{x-y+2}+1=9(x-y)^2+\sqrt{7x-7y} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $y \ge 0; x-y \ge 0$.

Đặt: $x-y=t \ge 0$. Từ $(2) \Rightarrow \sqrt{t+2}+1=9t^2+\sqrt{7t}$

$\Leftrightarrow 9t^2-1+\dfrac{2(3t-1)}{\sqrt{7t}+\sqrt{t+2}}=0 \Leftrightarrow t=0$ (sử dụng nhân liên hợp).

$\Rightarrow x-y=\dfrac{1}{3} \Rightarrow y=x-\dfrac{1}{3}$ .Thế vào (1) ta có:

$$9x^2+9x\left(x-\frac{1}{3}\right)+5x-4\left(x-\frac{1}{3}\right)+9\sqrt{x-\frac{1}{3}}=7$$

$$\Rightarrow 2x(9x-4)+\frac{2}{3}(9x-4)+\left(\sqrt{9x-3}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (9x-4)\left(2x+\frac{2}{3}+\frac{3}{\sqrt{\sqrt{9x-3}+1}}\right)=0.$$

$\Rightarrow x=\dfrac{4}{9} \Rightarrow y=\dfrac{1}{9}$. Vậy hệ có nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{1}{9}\right)$.

Bài 3. **Giải phương trình bằng phương pháp liên hợp**

Giải phương trình $\sqrt{6-x}+\sqrt{2x+6}+\sqrt{6x-5}=x^2-2x-5$.

Lời giải

Điều kiện $\dfrac{5}{6} \le x \le 6$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\left(\sqrt{6-x}-1\right)+\left(\sqrt{2x+6}-4\right)+\left(\sqrt{6x-5}-5\right)=x^2-2x-15$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1}+\frac{2x-10}{\sqrt{2x+6}+4}+\frac{6x-30}{\sqrt{6x-5}+5}=(x+3)(x-5)$$

$$\Leftrightarrow (5-x)\left[\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}-\frac{2}{\sqrt{2x+6}+4}-\frac{6}{\sqrt{6x-5}+5}+x+3\right]=0 \quad (*)$$

Với $\dfrac{5}{6} \le x \le 6$ ta có $-\dfrac{2}{\sqrt{2x+6}+4}-\dfrac{6}{\sqrt{6x-5}+5}+3 \ge -\dfrac{2}{4}-\dfrac{6}{5}+3>0$.

Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow x=5$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 4: Giải phương trình sau : $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0 (4)$

(trích đề thi đại học khối B-2010)

Lời giải

Điều kiện: $-\dfrac{1}{3} \le x \le 6$

Phương trình (4) $\Leftrightarrow \left(\ \sqrt{3x-1}-4\ \right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+3x^2--14x-5=0$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)(x-5)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1=0 \end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1=0$ vô nghiệm vì

$$\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1>0, \forall x\in\left[-\frac{1}{3};6\right]$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x=5

Bài 5: Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $(x-1)^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}\le 0$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Ta có: $(x-1)^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}\le 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2+2\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}\le 0$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-5x+2\right)+2\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(x+2-2\sqrt{x+2}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)+\frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-2\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)+\frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\sqrt{x+2}(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(2x-1+\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}\right)\le 0.$$

Vì: $2x-1+\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}>0, \forall x\ge 1$. Do đó: $1\le x\le 2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S=[1;2]$.

Bài 6: Cho phương trình: $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$. Gọi S là tổng bình phương các nghiệm thực của phương trình. Tính S.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Đáp án: C

Ta dự đoán được nghiệm $x=\pm 1$, và ta viết lại phương trình như sau:

$$3\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)=\left(\sqrt{x^2+15}-4\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=1 & (1) \\ \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Giải phương trình (2). Vì $\frac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}>0$;

$$\sqrt{x^2+15}>\sqrt{x^2+8}\Rightarrow\sqrt{x^2+15}+4>\sqrt{x^2+8}+3\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

Nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x=1,x=-1$. Suy ra $S=1^2+(-1)^2=2$.

Bài 7: Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $3(x-2)+\sqrt{3x+4}<3\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}$

Được tập nghiệm là $S=[a;b)$. Khi đó $a.b$ có kết quả là.

A. 3. **B.** -3. **C.** 12. **D.** -12.

Lời giải

Đáp án: C

Điều kiện xác định: $x\ge 3$.

Ta có: $3(x-2)+\sqrt{3x+4}<3\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}$

$$\Leftrightarrow 3(x-4)+\left(\sqrt{3x+4}-4\right)-3\left(\sqrt{2x+1}-3\right)-\left(\sqrt{x-3}-1\right)<0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-4)+\frac{3(x-4)}{\sqrt{3x+4}+4}-\frac{6(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3}-\frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}<0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(3+\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4}-\frac{6}{\sqrt{2x+1}+3}-\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4}+2-\frac{6}{\sqrt{2x+1}+3}+1-\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4}+\frac{2\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}+3}+\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}\right)<0\Leftrightarrow 3\le x<4.$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S=[3;4)$.

3. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ NHÂN LIÊN HỢP THÊM BỚT BIỂU THỨC BẬC NHẤT

Bài 1: Giải bất phương trình trên tập số thực: $x^3+3x^2+x+2\ge 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\ge -4$.

Ta có: $x^3+3x^2+x+2\ge 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+x+2-2x^2\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+11}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x+3-2\sqrt{x+4}\right)+\left(x+2-\sqrt{2x+11}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\frac{(x+3)^2-4(x+4)}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{(x+2)^2-(2x+11)}{x+2+\sqrt{2x+11}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\frac{x^2+2x-7}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{x^2+2x-7}{x+2+\sqrt{2x+11}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-7\right)\left(\frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}}\right)\ge 0.$$

Điều kiện có nghiệm: $\begin{cases}x\ge -4\\ x^3+3x^2+x+2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -4\\ x^3+3x^2+x+3>0\end{cases}\Rightarrow x>-3.$

Vì $x>-3\Rightarrow\begin{cases}x+3+2\sqrt{x+4}\ge 2>0\\ x+2+\sqrt{2x+11}\ge -1+\sqrt{5}>0\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}}>0$

Do đó $\begin{cases} x^2+2x-7\geq 0 \\ x>-3 \end{cases} \Rightarrow x\geq -1+2\sqrt{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình $S=\left[-1+2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Nhận xét: Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 1.828427124$.

Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\begin{cases} 2\sqrt{x+4}\approx 4.828427125\approx x+3 \\ \sqrt{2x+11}\approx 3.828427125\approx x+2 \end{cases}$.

Bài 2: Giải phương trình $\sqrt{2x^2-x+3}+x^2-x=\sqrt{21x-17}$ ta được 2 nghiệm x_1,x_2 $(x_1<x_2)$. Khi đó $x_2^2-x_1^2$ có kết quả là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện $x\geq \dfrac{17}{21}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{2x^2-x+3}-x-1\right)+\left(3x-1-\sqrt{21x-17}\right)+x^2-3x+2=0.$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\dfrac{9\left(x^2-3x+2\right)}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+x^2-3x+2=0.$

$\left(x^2-3x+2\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\dfrac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\dfrac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1>0,\forall x\geq \dfrac{17}{21}$.

- Vậy: $x_2^2-x_1^2=2^2-1^1=3$

Nhận xét: Ta nhận đoán được rằng phương trình có hai nghiệm $x=1;\ x=2$. Do vậy phương trình này sẽ có nhân tử $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ khi ta có ý định sử dụng lượng liên hợp để giải bài toán. Điều quan tâm là cách tách - nhóm các đại lượng có trong phương trình.

Giả sử ta sẽ nhóm $\left(\sqrt{2x^2-x+3}-(a_1x+b_1)\right)+\left((a_2x+b_2)-\sqrt{21x-17}\right)$. Thay các giá trị $x=1;\ x=2$ vào các đẳng thức $\begin{cases} \sqrt{2x^2-x+3}-(a_1x+b_1)=0 \\ (a_2x+b_2)-\sqrt{21x-17}=0 \end{cases}$, ta sẽ tìm được $\begin{cases} 2-a_1-b_1=0 \\ 3-2a_1-b_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ b_1=1 \end{cases}$; $\begin{cases} a_2+b_2-2=0 \\ 2a_2+b_2-5=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_2=3 \\ b_2=-1 \end{cases}$.

V. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \\ x+y=8 \end{cases}$

Lời giải

Cách 1:

Trừ 2 vế $\Rightarrow x+y=8$ thế vào (2) $\Rightarrow \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10\ (3)$.

Đặt $t=x-4$ (đặt ẩn phụ khéo léo) $\Rightarrow x=4+t$ và $y=4-t$ thế vào (3) ta có

$\sqrt{t^2+8t+25}+\sqrt{t^2-8t+25}=10\ (4)$

$\Rightarrow \sqrt{\left(t^2+25\right)^2-64t^2}=25-t^2,\ t^2\le 25$.

$\Rightarrow t^4+50t^2+625-64t^2=625-50t^2+t^4 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x=y=4$.

Cách 2: Phương pháp véc tơ

Ta có $\begin{cases}\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10\\ x+y=8\end{cases}$

Đặt $\vec{u}=(x;3)$ $\vec{v}=(y;3) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(8;6)$

$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{x^2+9}$ $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{y^2+9}$

Áp dụng BĐT : $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\ge 10$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}\ ;\ \vec{v}$ cùng phương tức là $\begin{cases}x=y\\ x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=4\end{cases}$.

CÁC BÀI TẬP GIẢI VECTO NHƯ TRÊN

1) $\begin{cases}\sqrt{3x}+\sqrt{3y}=6\\ \sqrt{3x+7}+\sqrt{3y+7}=8\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=4\\ \sqrt{x+6}+\sqrt{y+4}=6\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\\ \sqrt{x+24}+\sqrt{y+24}=14\end{cases}$

Bài 2: Giari phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$ (1).

Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai véc tơ $\begin{cases}\vec{u}=(x-1;2)\\ \vec{v}=(-1-x;3)\end{cases}$.

Khi đó: $\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{x^2-2x+5}\\ |\vec{v}|=\sqrt{x^2+2x+10}\\ \vec{u}+\vec{v}=(-2;5)\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{29}\end{cases}$.

$$\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{x^2-2x+5}\\ |\vec{v}|=\sqrt{x^2+2x+10}\\ \vec{u}+\vec{v}=(-2;5)\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{29}\end{cases}$$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$.

$\Leftrightarrow \vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}=k.\vec{v}\,(k>0)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=k(-1-x)\\ 2=k.3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{2}{3}\\ x-1=\dfrac{2}{3}(-1-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{2}{3}\\ 3x-3=-2x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{2}{3}\\ x=\dfrac{1}{5}\end{cases}.$$

Bài 3: Giari phương trình $\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{4x^2+12x+26}=\sqrt{9x^2+12x+29}$.

Lời giải:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các véc tơ $\begin{cases}\vec{u}=(x-1;1)\\ \vec{v}=(2x+3;4)\end{cases}$.

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(3x+2;5)$ thì $\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{x^2-2x+2}\\ |\vec{v}|=\sqrt{4x^2+12x+25}\\ |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{9x^2+12x+29}\end{cases}$

Suy ra phương trình $(1)\Leftrightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v}\ (k>0)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=k(2x+3)\\ 1=k.4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{4}\\ x-1=\dfrac{1}{4}(2x+3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{4}\\ 4x-4=2x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{4}\\ x=\dfrac{7}{2}\end{cases}$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{7}{2}$.

Bài 4: Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}+x-3\geq\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}\ (1)$

(Bộ đề Tuyển sinh)

Lời giải

Điều kiện $x\geq 1$

Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy các vectơ $\begin{cases}\vec{u}=(x-3;\sqrt{x-1})\\ \vec{v}=(1;1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(x-3)^2+x-1}\\ |\vec{v}|=\sqrt{2}\\ \vec{u}.\vec{v}=\sqrt{x-1}+x-3\end{cases}$.

Suy ra bất phương trình $(1)\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}\geq|\vec{u}||\vec{v}| \Leftrightarrow\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}\Leftrightarrow x-3=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+9=x-1\\ x\geq 3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-7x+10=0\\ x\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right.\\ x\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow x=5$.

Vậy $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Bài 5. $\begin{cases}x+y+\sqrt{xy}=3 & (1)\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 & (2)\end{cases}$

Lời giải

ĐK : $xy\geq 0\,;x\geq -1\,;y\geq -1$

Cách 1

Từ (2) ta có : $x+y+2+2\sqrt{x+y+xy+1}=16 \quad (3)$

Từ (1) ta có : $x+y-\sqrt{xy}=3\Leftrightarrow x+y=3+\sqrt{xy}$ đặt $\sqrt{xy}=t\ (t\geq 0)\Leftrightarrow x+y=3+\sqrt{t}$

Thế vào (3) ta có $2\sqrt{t^2+t+4}=11-t\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=6\\ xy=9\end{cases}\Leftrightarrow x=y=3$.

Cách 2

Dễ thấy $x \ge 0\,;\, y \ge 0$

Áp dụng BĐT cosi ta có $x + y \le \sqrt{xy} + 3 \le \dfrac{x+y}{2} + 3 \Rightarrow x + y \le 6$

Từ (2) ta có : $4 = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \le \sqrt{2\left[(x+1)+(y+1)\right]} = 4$

Đánh giá BĐT $\Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3$.

Các Bài tương tự

1) $\begin{cases} 3x+3y-2\sqrt{xy}=8 \\ \sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (2x+3)\sqrt{4x-1}+(2y+3)\sqrt{4y-1}=2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} \\ x+y=4xy \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ \sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{25-9z^2}=4\sqrt{3} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=2y^3-6y-2 \\ y=-x^3+3x+4 \end{cases}$

Bài 6. Giải phương trình: $x\sqrt{3x+2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2\left(x^2+1\right)(x+3)}$ (2.1).

Lời giải

Điều kiện: $-\dfrac{2}{3} \le x \le 4$.

Đặt $\vec{u} = (x;1)$ và $\vec{v} = \left(\sqrt{3x+2};\sqrt{4-x}\right) \ne \vec{0}$.

Khi đó, $\vec{u}.\vec{v} = x\sqrt{3x+2}+\sqrt{4-x}$

$\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = \sqrt{2\left(x^2+1\right)(x+3)}$

Suy ra, phương trình (2.1) trở thành $\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow \exists k>0 : \vec{u} = k.\vec{v}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\sqrt{3x+2} \\ 1 = k\sqrt{4-x} \end{cases} \Leftrightarrow x\sqrt{4-x} = \sqrt{3x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2(4-x) = 3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^3-4x^2+3x+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \in \left\{2;1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1+\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{2;1+\sqrt{2}\right\}$.

Bài 7. Giải phương trình $\left|\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2-4x+40}\right| = x^2+5x+\dfrac{45}{4}$ (2.2)

Lời giải

Phương trình xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\vec{u} = (x+1;-2)$ và $\vec{v} = (2-x;6)$

Khi đó $\vec{u}+\vec{v} = (3;4) \Rightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right| = 5$

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(x+1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{x^2+2x+5}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(2-x)^2 + 6^2} = \sqrt{x^2-4x+40}$$

$$\left|\left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right|\right| \le \left|\vec{u}+\vec{v}\right| \Leftrightarrow \left|\sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2-4x+40}\right| \le 5$$

Để phương trình (2.2) có nghiệm thì:

$$x^2 + 5x + \frac{45}{4} \le 5 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Thay $x = -\frac{5}{2}$ vào phương trình (2.2) thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình (2.2) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{5}{2}$.

Bài 8. Giải phương trình: $3\sqrt{1+2\sin^4 2x} + 2\sqrt{40 + \left[4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 1\right]^2} = 5\sqrt{11}$ (1).

Lời giải

Đặt $T = 3\sqrt{1+2\sin^4 2x} + 2\sqrt{40 + \left[4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 1\right]^2}$.

Ta có: $4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 1 = 4\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\right] - 1$

$$= 4 - 12\sin^2 x\cos^2 x - 1 = 3\left(1 - \sin^2 2x\right) = 3\cos^2 2x.$$

Khi đó:

$$T = \sqrt{9+18\sin^4 2x} + \sqrt{160+36\cos^4 2x} = \sqrt{9+9\sin^4 2x+9\sin^4 2x} + \sqrt{144+16+36\cos^4 2x}$$

Xét các vectơ $\vec{u} = \left(3;3\sin^2 2x;3\sin^2 2x\right)$ và $\vec{v} = \left(12;4;6\cos^2 2x\right)$.

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{9+9\sin^4 2x+9\sin^4 2x}\ ;\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{144+16+36\cos^4 2x}.$$

$$T = \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u}+\vec{v}\right| \Rightarrow T \ge \sqrt{225 + \left(3\sin^2 2x + 4\right)^2 + \left(3\sin^2 2x + 6\cos^2 2x\right)^2}.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left[\left(3\sin^2 2x+4\right)^2 + \left(3\sin^2 2x + 6\cos^2 2x\right)^2\right]\left(1^2+1^2\right) \ge \left(3\sin^2 2x + 4 + 3\sin^2 2x + 6\cos^2 2x\right)^2 = 100$$

Suy ra: $\left[\left(3\sin^2 2x+4\right)^2 + \left(3\sin^2 2x + 6\cos^2 2x\right)^2\right] \ge 50 \Rightarrow T \ge 5\sqrt{11}$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi: $\begin{cases} \dfrac{3}{12} = \dfrac{3\sin^2 2x}{4} = \dfrac{3\sin^2 2x}{6\cos^2 2x} \\ 3\sin^2 2x + 4 = 3\sin^2 2x + 6\cos^2 2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 + \cos 4x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là: $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 9. **Giải bất phương trình** $\sqrt{x-1} + x - 3 \ge \sqrt{2x^2 - 10x + 16}$ $(*)$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \ge 1 \\ 2x^2 - 10x + 16 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$

Xét $\vec{u}\left(\sqrt{x-1};x-3\right)$ và $\vec{u}(1;1)\neq\vec{0}$.

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=\sqrt{x-1}-3$, $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\sqrt{x-1+(x-3)^2}.\sqrt{2}=\sqrt{2x^2-10x+16}$.

Bất phương trình $(*)$ trở thành: $\vec{u}.\vec{v}\geq\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, mặt khác $\vec{u}.\vec{v}\leq\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ nên ta có

$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow\exists k\geq 0:\vec{u}=k\vec{v}$. Khi đó :

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}=k\\ x-3=k\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=x-3$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\geq 0\\ x-1=(x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=5$$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=5$.

Bài 10: Giải hệ: $$\begin{cases}\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\ldots+\sqrt{1+x_{2008}}=2008\sqrt{\dfrac{2009}{2008}}\\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_{2008}}=2008\sqrt{\dfrac{2007}{2008}}\end{cases}\quad 1$$

Lời giải

Điều kiện: $\left|x_i\right|\leq 1,\forall \mathrm{i}=\overline{1,2008}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét các vec tơ: $\vec{a}_i=\left(\sqrt{1+x_i};\sqrt{1-x_i}\right),i=\overline{1,2008}$.

Khi đó

□ $\left|\vec{a_i}\right|=\sqrt{2},\forall i=\overline{1,2008}\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{2008}\left|\vec{a_i}\right|=2008\sqrt{2}$

□ $\sum\limits_{i=1}^{2008}\vec{a_i}=\left(\sum\limits_{i=1}^{2008}\sqrt{1+x_1};\sum\limits_{i=1}^{2008}\sqrt{1-x_1}\right)$

$$\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{2008}\vec{a_i}\right|=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2008}\sqrt{1+x_i}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{2008}\sqrt{1-x_i}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2008.2009+2008.2007}=2008\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{2008}\left|\vec{a_i}\right|=\left|\sum_{i=1}^{2008}\vec{a_i}\right|\Rightarrow\vec{a_i}\uparrow\uparrow\vec{a_j}.\ \forall i,j=\overline{1,2008}.$$

Hơn nữa: $\left|\vec{a_i}\right|=\left|\vec{a_j}\right|=\sqrt{2},\quad\forall i,j=\overline{1,2008}$

Nên $\vec{a_i}=\vec{a_j},\quad\forall i,j=\overline{1,2008}\Rightarrow x_i=x_j,\quad\forall i,j=\overline{1,2008}$

$$\Rightarrow\sqrt{1+x_i}=\sqrt{\frac{2009}{2008}}\ ,\forall i=\overline{1,2008}\Rightarrow 1+x_i=\frac{2009}{2008}\ ,\forall i=\overline{1,2008}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{2008} \quad ,\forall i = \overline{1,2008}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $x_1 = x_2 = ... = x_{2008} = \dfrac{1}{2008}$

Bài 11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\left(\sqrt{1+x+y}+\sqrt{3-x-y}\right) = 2\sqrt{(x+y)^2+1} \\ x+y \geq 2 \\ x-y = \sqrt{2}-1 \end{cases} \quad (1)$

Lời giải

Trong không gian Oxy ta xét các vec tơ: $\begin{cases} \vec{a} = (x+y;1) \\ \vec{b} = \left(\sqrt{1+x+y};\sqrt{3-x-y}\right) \end{cases}$

(Với điều kiện $-1 \leq x+y \leq 3$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x+y)^2+1} \\ \left|\vec{b}\right| = 2 \\ \vec{a}.\vec{b} = (x+y)\sqrt{1+x+y}+\sqrt{3-x-y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \Leftrightarrow \sqrt{1+x+y} = (x+y)\sqrt{3-x-y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq \sqrt{2} \quad (\text{theo gt}) \\ (x+y)^3 - 3(x+y)^2 + (x+y) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq \sqrt{2} \\ \left[(x+y)-1\right]\left[(x+y)^2 - 2(x+y) - 1\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x+y = \sqrt{2}+1$$

Kết hợp với $x-y = \sqrt{2}-1$ ta giải được $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$.

VI. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ ĐƯA VỀ DẠNG $f(u) = f(v)$

Bài 1: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = (y-1)^3 - 3(y-1)$. Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

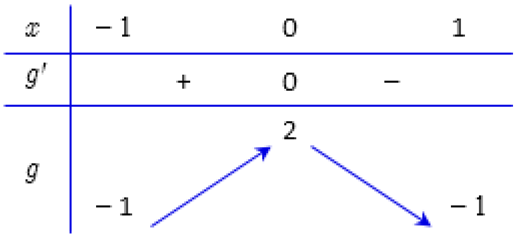
Khi đó phương trình (1) có dạng $f(x) = f(y-1) \Rightarrow x = y-1 \Rightarrow y = x+1$. Thay vào phương trình (2) ta được $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2\sqrt{1-x^2} = m \ (3)$.

Hệ có nghiệm khi phương trình (3) có nghiệm trong đoạn $\left[-1;1\right]$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=-x^2+2\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Ta có:

$$g'\left(x\right)=-2x+\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Rightarrow x=0$$

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu Bài thỏa mãn khi $-1\le m\le 2$.

Bài 2: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-4)\sqrt{4-y}=0 & (1)\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+1}=x^2+6x+13 & (2)\end{cases}$.

Lời giải.

$(1)\Leftrightarrow\left[3(5-x)+2\right]\sqrt{5-x}=\left[3(4-y)+2\right]\sqrt{4-y}$.

Đặt $f\left(t\right)=\left(3t+2\right)\sqrt{t}$, ta có $f\left(t\right)$ đồng biến

$\Rightarrow 5-x=4-y\Rightarrow y=x-1$ thay vào $\left(2\right)$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13$

$\Leftrightarrow\left[2\sqrt{3x+4}-2\left(x+2\right)\right]+\left[3\sqrt{5x+9}-3\left(x+3\right)\right]=x^2+x$

$$\Leftrightarrow x\left(x+1\right)\left[\frac{2}{\sqrt{3x+4}+x+2}+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\left(x+1\right)=0\\ \dfrac{2}{\sqrt{3x+4}+x+2}+\dfrac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3}+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$$

Hệ phương trình có nghiệm: $\left(0;-1\right);\left(-1;-2\right)$

Bài 3. **[Hàm số]** Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1)\\ x^2+2x\left(y-1\right)+y^2-6y+1=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Phương trình $\left(2\right)\Rightarrow\left(x+y-1\right)^2=4y\Rightarrow y\ge 0$.

Phương trình $(1)\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{\left(y^4+1\right)+1}+\sqrt[4]{\left(y^4+1\right)-1}\Rightarrow x=y^4+1$.

Suy ra $\left(y^4+y\right)^2=4y\Rightarrow y\left(y^7+2y^4+y-4\right)=0$.

- Với $y=0\Rightarrow x=1$
- Với $y^7+2y^4+y-4=0$, hàm số đồng biến $\Rightarrow$ có duy nhất nghiệm $y=1$.

Bài 4. Phương trình vô tỉ dạng: $ax^2+bx+c=k\sqrt{dx+e}$ **đưa về dạng:** $u^2+ku=dx+e+k\sqrt{dx+e}$

Bài56: Giải phương trình: $x^2-3x-1=2\sqrt{x+1}$

Lời giải

$x^2-3x-1=2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow(x-2)^2+2(x-2)=x+1+2\sqrt{x+1}$

Đặt $u=x-2;v=\sqrt{x+1}$ ta được: $u^2+2u=v^2+2v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=-v-2\end{array}\right.$ từ đó tìm x

Bài 5: Giải phương trình: $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$

Lời giải

$2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}\Leftrightarrow4x^2+4x+2=2\sqrt{4x+1}\Leftrightarrow(2x+1)^2+2(2x+1)=4x+1+2\sqrt{4x+1}$

Đặt $u=2x+1;v=\sqrt{4x+1}$ ta được: $u^2+2u=v^2+2v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=-v-2\end{array}\right.$ từ đó tìm x

Bài 6: Giải phương trình: $x^2-x-1=\sqrt{8x+1}$

Lời giải

$x^2-x-1=\sqrt{8x+1}\Leftrightarrow4x^2-4x-4=4\sqrt{8x+1}\Leftrightarrow(2x-1)^2+4(2x-1)=8x+1+4\sqrt{8x+1}$

Đặt $u=2x-1;v=\sqrt{8x+1}$ ta được: $u^2+4u=v^2+4v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=-v-4\end{array}\right.$ từ đó tìm x

Bài 7: Giải phương trình: $-4x^2+21x-22=\sqrt{3x-2}$

Lời giải

$-4x^2+21x-22=\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow4x^2-21x+22=\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow(2x-4)^2-(2x-4)=3x-2-\sqrt{3x-2}$

Đặt $u=2x-4;v=\sqrt{3x-2}$ ta được: $u^2-u=v^2-v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=1-v\end{array}\right.$ từ đó tìm x

Bài 8: Giải phương trình: $27x^2+18x=\sqrt{x+\frac{4}{3}}$

Lời giải

$27x^2+18x=\sqrt{x+\frac{4}{3}}\Leftrightarrow81x^2+54x=\sqrt{9x+12}\Leftrightarrow(9x+3)^2+(9x+3)=9x+12+\sqrt{9x+12}$

Bài61: Giải phương trình: $x^4+\sqrt{x^2+3}=3$

Lời giải

$x^4+\sqrt{x^2+3}=3\Leftrightarrow\left(x^2\right)^2+x^2=x^2+3+\sqrt{x^2+3}$ ...

Bài 9. [Dạng toán đưa về $u^3+ku=v^3+kv$]

Giải phương trình: $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$.

Lời giải

$8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3+2x-3=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}$.

Đặt $u=2x-3;\ v=\sqrt[3]{3x-5}$.

$\Rightarrow u^3+u=v^3+v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+1)=0 \Rightarrow u=v$.

$$\Rightarrow 2x-3=\sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$$

Bài 10.[Dạng toán đưa về $u^3+ku=v^3+kv$]

Giải phương trình: $4x^3+6x^2+4x+1=\sqrt[3]{2x+1}$.

Lời giải

$4x^3+6x^2+4x+1=\sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^3+2(2x+1)=2x+1+2\sqrt[3]{2x+1}$.

Đặt $u=2x+1,\ v=\sqrt[3]{2x+1}$.

$\Rightarrow u^3+2u=v^3+2v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0 \Leftrightarrow u=v$.

$$\Rightarrow 2x+1=\sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow 8x^3+12x^2+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Bài 11.[Dạng toán đưa về $u^3+ku=v^3+kv$]

Giải phương trình: $9x^3+9x^2+\dfrac{20}{3}x+1=\sqrt[3]{1-2x}$.

Lời giải

$9x^3+9x^2+\dfrac{20}{3}x+1=\sqrt[3]{1-2x} \Leftrightarrow (3x+1)^3+3(3x+1)=1-2x+3\sqrt[3]{1-2x}$.

Đặt $u=3x+1,\ v=\sqrt[3]{1-2x}$.

$\Rightarrow u^3+3u=v^3+3v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+3)=0 \Leftrightarrow u=v$.

$\Rightarrow 3x+1=\sqrt[3]{1-2x} \Leftrightarrow 27x^3+27x^2+11x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bài 12.[Dạng toán đưa về $u^3+ku=v^3+kv$]

Giải phương trình: $4x^3-18x^2+30x-17=\sqrt[3]{2x-1}$.

Lời giải

$4x^3-18x^2+30x-17=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow (3-2x)^3+2(3-2x)=2x-1+2\sqrt[3]{2x-1}$.

Đặt $u=3-2x,\ v=\sqrt[3]{2x-1}$.

$\Rightarrow u^3+2u=v^3+2v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0 \Leftrightarrow u=v$.

$\Rightarrow 3-2x=\sqrt[3]{2x\text{-}1} \Leftrightarrow 8x^3-36x^2+56x-28=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bài 13. **[Đặt ẩn phụ đưa dạng toán $ax^2+bx+c=k\sqrt{dx+e}$ về dạng $u^2+au=v^2+av$]** $x^2-3x-1=2\sqrt{x+1}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1$.

Đặt $y=\sqrt{x+1}, y\ge 0$.

Phương trình đã cho trở thành hệ $\begin{cases} x^2-3x-1=2y \\ x+1=y^2 \end{cases}$.

Cộng hai vế của hai phương trình trên, ta được

$$x^2-2x=y^2+2y \Leftrightarrow (x+y)(x-y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x \\ y=x-2 \end{array}\right..$$

Thay lần lượt các giá trị y vừa tìm được vào phương trình ban đầu, ta nhận hai nghiệm $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ và $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bài 14. **[Đặt ẩn phụ đưa dạng toán $ax^2+bx+c=k\sqrt{dx+e}$ về dạng $u^2+au=v^2+av$]** $x^2-x-1=\sqrt{8x+1}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{8}$.

Đặt $y=\sqrt{8x+1}, y\ge 0$.

Phương trình đã cho trở thành hệ $\begin{cases} x^2-x-1=y \\ 8x+1=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-4x-4=4y \\ 8x+1=y^2 \end{cases}$.

Cộng hai vế của hai phương trình trên, ta được

$$4x^2+4x-3=y^2+4y \Leftrightarrow (2x+1)^2=(y+2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x-1 \\ y=-2x-3 \end{array}\right..$$

Thay lần lượt các giá trị y vừa tìm được vào phương trình ban đầu, ta nhận nghiệm $x=3$.

Bài 15. **[Đặt ẩn phụ đưa dạng toán $ax^2+bx+c=k\sqrt{dx+e}$ về dạng $u^2+au=v^2+av$]** $27x^2+18x=\sqrt{x+\dfrac{4}{3}}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{4}{3}$.

Đặt $y=\sqrt{x+\dfrac{4}{3}}, y\ge 0$.

Phương trình đã cho trở thành hệ $\begin{cases} 27x^2+18x=y \\ x+\dfrac{4}{3}=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81x^2+54x=3y \\ 9y+12=9y^2 \end{cases}$.

Cộng hai vế của hai phương trình trên, ta được

$81x^2+63x+12=9y^2+3y \Leftrightarrow (9x+3)^2+9x+3=(3y)^2+3y$

$\Leftrightarrow (9x+3-3y)(9x+3y+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x+1 \\ y=-3x-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

Thay lần lượt các giá trị y vừa tìm được vào phương trình ban đầu, ta nhận hai nghiệm $x=\dfrac{-7-\sqrt{33}}{18}$ và $x=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{8}$.

Bài 16.[Đặt ẩn phụ đưa dạng toán $ax^2+bx+c=k\sqrt{dx+e}$ **về dạng** $u^2+au=v^2+av$**]** $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$

Lời giải

Đặt $y=\sqrt[3]{3x-5}$.

Phương trình đã cho trở thành hệ $\begin{cases} 8x^3-36x^2+53x-25=y \\ 3x-5=y^3 \end{cases}$.

Cộng hai vế của hai phương trình trên, ta được

$8x^3-36x^2+56x-30=y^3+y \Leftrightarrow (2x-3)^3+2x-3=y^3+y$

$\Leftrightarrow (2x-3-y)\left[(2x-3)^2+y(2x-3)+y^2+1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x-3 \\ (2x-3)^2+y(2x-3)+y^2+1=0 \end{array}\right.$

Dễ thấy $(2x-3)^2+y(2x-3)+y^2+1>0$.

Thay $y=2x-3$ vào phương trình ban đầu, ta nhận hai nghiệm $x=2$ và $x=\dfrac{5+\sqrt{3}}{4}$.

Bài 17: $8x^3-4x-1=\sqrt[3]{6x-1}$, ta có $\begin{cases} 8x^3-4x-1=y \\ 6x-1=y^3 \end{cases}$

Lời giải

Cộng vế :

$\Rightarrow 8x^3+2x=y^3+y$

$\Leftrightarrow (2x-y)(4x^2+2xy+1+y^2)=0$

$\Rightarrow y=2x$

Do đó : $2x=\sqrt[3]{6x+1} \Leftrightarrow 8x^3-6x-1=0 \Leftrightarrow 4x^3-3x=\cos\dfrac{\pi}{3}$.

$\Rightarrow x=\cos\dfrac{\pi}{9}, x=\cos\dfrac{5\pi}{9}, x=\cos\dfrac{7\pi}{9}$.

BTLT : Giải phương trình :

1) $x^2=4+2\sqrt{2x+4}$

2) $5x^2+1=2\sqrt{\dfrac{2x}{5}+\dfrac{1}{5}}$

3) $4x^2+4x+1=2\sqrt{4x+2}$

4) $49x^2-65x+17=3\sqrt{2x+1}$

5) $75x^2-79x+28=2\sqrt{3x-4}$

6) $x^3+6x^2+10x+13=2\sqrt[3]{4x-1}$

7) $8x^3+12x^2+7x+5=2\sqrt[3]{3x-2}$

8) $128x^3-288x^2+218x+61=\sqrt[3]{x+2}$.

VII. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ SỬ DỤNG BĐT ĐỂ ĐÁNH GIÁ

Bài 1: $\sqrt{x^2+x+9}+\sqrt{7x^2+22x+28}+\sqrt{13x^2+43x+37}=3\sqrt{3}(x+3)$

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2+x+9}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}\ge\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{7x^2+22x+28}=\sqrt{(2x+1)^2+3(x+3)^2}\ge\sqrt{3(x+3)^2}\ge\sqrt{3}(x+3)$$

$$\sqrt{13x^2+43x+37}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(2x+\frac{7}{2}\right)^2}\ge\sqrt{3\left(2x+\frac{7}{2}\right)^2}\ge\sqrt{3}\left(2x+\frac{7}{2}\right)$$

Cộng từng vế ta được $VT\ge VP\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{2}=0\\2x+1=0\\x+3\ge0\\2x+\frac{7}{2}\ge0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Bài 2: Giải phương trình $6(x-1)\sqrt{x+1}+(x^2+2)(\sqrt{x-1}-3)=x(x^2+2)$

Dễ thấy $x=1$ không là nghiệm của phương trình

Nên phương trình đã cho tương đương

$$6(x-1)\sqrt{x+1}=(x^2+2)(x-\sqrt{x-1}+3)$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1)\sqrt{x+1}=(x^2+2)(\sqrt{x-1}-2)^2$$

Nhận xét:

$$(x-\sqrt{x-1}+3)\ge3\sqrt{x-1}$$

$$x^2+2-2\sqrt{x^2-1}>0\Rightarrow x^2+2>2\sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow(x^2+2)(x-\sqrt{x-1}+3)>6\sqrt{x^2-1}\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow(x^2+2)(x-\sqrt{x-1}+3)>6(x-1)\sqrt{x+1}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Bài 3: Giải phương trình $\begin{cases}x+6\sqrt{xy}-y=6\\x+\dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2)}=3\end{cases}$

Nhận xét: $x=0,y=0$ không phải là nghiệm

Nếu $x\le0,y\le0$ thì vế trái của phương trình (2) không thỏa mãn

$\Rightarrow x,y>0$.

Vì $2\sqrt{xy}\le x+y$ nên $(1)\Rightarrow6=x+6\sqrt{xy}-y\le x+3(x+y)-y=4x+2y\Rightarrow2x+y\ge3$ (3).

Mặt khác $xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow x^2+xy+y^2 \le \frac{3(x^2+y^2)}{2} \Rightarrow \frac{3(x^3+y^3)}{x^2+y^2+xy} \ge \frac{2(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ (4).

Ta chứng minh $\frac{2(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \ge \sqrt{2(x^2+y^2)}$ (5).

Ta có $(5) \Leftrightarrow 2(x^3+y^3) \ge (x^2+y^2)^3 \Leftrightarrow x^6+y^6+4x^3y^3 \ge 3x^4y^2+3x^2y^4$.

Dễ thấy $\begin{matrix} x^6+x^3y^3+x^3y^3 \ge 3x^4y^2 \\ y^6+x^3y^3+x^3y^3 \ge 3x^2y^4 \end{matrix} \Rightarrow (5)$.

Kết hợp với (2) và $\sqrt{2(x^2+y^2)} \ge x+y$ ta có

$3 = x + \frac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} - \sqrt{2(x^2+y^2)}$

$\ge x + \sqrt{2(x^2+y^2)} \ge x + (x+y) = 2x+y$ (6).

Từ (3) và (6) $\Rightarrow 2x+y=3$ và $x=y$ $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Bài 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3(x+y) & (1) \\ \sqrt{2x+y+1}+\sqrt[3]{7x+12y+8}=2xy+y+5 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=\sqrt{(2x+y)^2+(x-y)^2}+\sqrt{(x+2y)^2+(x-y)^2}$

$\ge |2x+y|+|x+2y| \ge |3x+3y| \ge 3(x+y)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y\ge 0 \\ x+2y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y\ge 0$.

Thế vào (2) ta có: $\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x+(x+1)-\sqrt{3x+1}+2\left[(x+2)-\sqrt[3]{19x+8}\right]=0$

$\Leftrightarrow 2(x^2-x)+\frac{x^2-x}{(x+1)+\sqrt{3x+1}}+2\frac{(2x+4)(x^2-x)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{matrix}\right.$ (TM). Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm.

Bài 5. **[Đặt ẩn phụ, đánh giá khó]** Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x-\frac{1}{4}}+\sqrt{y-\frac{1}{4}}=\sqrt{3} \\ \sqrt{y-\frac{1}{16}}+\sqrt{z-\frac{1}{16}}=\sqrt{3} \\ \sqrt{z-\frac{9}{16}}+\sqrt{x-\frac{9}{16}}=\sqrt{3} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x,y,z\ge\frac{9}{16}$.

Đặt: $a=x-\frac{9}{12};b=y-\frac{7}{12};c=z-\frac{13}{12}$. Ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{a+\frac{4}{3}}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}=\sqrt{3}\\ \sqrt{b+\frac{25}{48}}+\sqrt{c+\frac{49}{48}}=\sqrt{3}\\ \sqrt{c+\frac{25}{48}}+\sqrt{a+\frac{49}{48}}=\sqrt{3}\end{cases}$$

Do $\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3};\sqrt{\frac{25}{48}}+\sqrt{\frac{49}{48}}=\sqrt{3}$ nên:

- Nếu $a>0,b>0$ thì $\sqrt{a+\frac{4}{3}}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}>\sqrt{3}\Rightarrow$ Vô nghiệm.
- Nếu $a<0,b<0$ thì $\sqrt{a+\frac{4}{3}}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}<\sqrt{3}\Rightarrow$ Vô nghiệm.

Vậy $a.b\le 0$. Tương tự $b.c\le 0;a.c\le 0$. Suy ra $a^2.b^2.c^2\le 0\Rightarrow abc=0$.
Dễ thấy nếu một số bằng 0 thì hai số còn lại cũng bằng $0\Rightarrow a=b=c=0$.

Suy ra $(x;y;z)=\left(\frac{19}{12};\frac{7}{12};\frac{13}{12}\right)$.

Bài 6. **Giải hệ** $\begin{cases}x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=2 & (1)\\ x^3+2y^2\le y^3+2x & (2)\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x\ge 0,\quad y\ge 0$. Bình phương 2 vế của (1), ta có

$\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)^2=4\Leftrightarrow x^3=4-2xy\sqrt{xy}-y^3\quad(3)$.

Thay (3) vào (2) ta được $4-2xy\sqrt{xy}-y^3+2y^2\le y^3+2x$

$\Leftrightarrow y^3+xy\sqrt{xy}+x\ge 2+y^2$

$\Leftrightarrow y\sqrt{y}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)+x\ge 2+y^2$.

Từ (1) suy ra $2y\sqrt{y}+x\ge\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)+y^2\Leftrightarrow x+y\sqrt{y}\ge x\sqrt{x}+y^2$

Ta có $\begin{cases}x+x\sqrt{x}\ge 2x\\ y+y^2\ge 2y\sqrt{y}\end{cases}$

$\Rightarrow\sqrt{x}+y\ge\left(x+y\sqrt{y}\right)+x+y\sqrt{y}-x\sqrt{x}-y^2\ge x+x\sqrt{y}$ do (4).

Do đó $(1+x)+\left(1+y^2\right)\ge 2\sqrt{x}+2y$

$$\ge 2x+2y\sqrt{y}=x+y\sqrt{y}+x+y\sqrt{y}\ge x+y\sqrt{y}+x\sqrt{x}+y^2 \text{ do (4).}$$

$\Rightarrow x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\le 2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=2 \\ x=1 \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Bài 7. $\begin{cases} 4x^2=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2-y^3+3y-2\right) & (1) \\ \left(x^2+y^2\right)^2+1=x^2+2y & (2) \end{cases}$

Lời giải

Từ $(2)\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2+y^2\right)=-(y-1)^2\le 0$

$\Rightarrow 0\le x^2+y^2\le 1$

$\Rightarrow |x|\le 1,\ |y|\le 1.$

Nếu $\sqrt{x^2+1}-1=0\Leftrightarrow x=0$ ta có $y=1\Rightarrow$ hệ có nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

Nếu $\sqrt{x^2+1}-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne 0$, nhân 2 vế của (1) với $\sqrt{x^2+1}-1$ ta có

$(1)\Leftrightarrow\ 4x^2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2\left(x^2-y^3+3y-2\right)$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2+y^3+3y-2\quad (3)$

$\Leftrightarrow x^2+1-4\sqrt{x^2+1}+3=y^3-3y+2$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right).\left(\sqrt{x^2+1}-3\right)=(y+2)(y-1)^2\quad (4)$.

Với $x\ne 0$; $|x|\le 1$; $|y|\le 1$; ta có $\sqrt{x^2+1}-1>0$, $\sqrt{x^2+1}-3<0$, $(y+1)(y-1)^2\ge 0$ nên (4) vô nghiệm.

Bài 8. **[Đánh giá]**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=x^2+xy+y^2\,(1) \\ \sqrt{6x^2y^2-x^4-y^4}=\dfrac{13}{4}(x+y)-2xy-\dfrac{3}{4}\,(2) \end{cases}$

Lời giải

Nhận xét: $x=y=0$ không phải là nghiệm của hệ nên $x^2-xy+y^2>0$

(1) $\Rightarrow x+y=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=3-\dfrac{2(x-y)^2}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2(x+y)^2}{3\left(x^2-xy+y^2\right)}\,(3)$.

Từ (3) $\Rightarrow\dfrac{1}{3}\le x+y\le 3\,(*)$.

Lại có $\sqrt{6x^2y^2-x^4-y^4}=\sqrt{4x^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^2}\le 2|xy|\,(4)$

Từ (2) và (4) $\Rightarrow\dfrac{13}{4}(x+y)-2xy-\dfrac{3}{4}\le 2|xy|\,(5)$

Nếu $xy<0$ thì từ (5) ta có :

$$\frac{13}{4}(x+y)-2xy-\frac{3}{4}\le -2xy\Rightarrow x+y\le\frac{3}{13}<\frac{1}{3}$$ (mâu thuẫn)

$\Rightarrow xy\ge 0$. Từ (5) ta có:

$$\frac{13}{4}(x+y)-2xy-\frac{3}{4}\le 2xy\Leftrightarrow\frac{13(x+y)-3}{4}\le 4xy=(x+y)^2-(x-y)^2\le(x+y)^2$$

$$\Rightarrow(x+y-3)\left(x+y-\frac{1}{4}\right)\ge 0.$$

Do $x+y\ge\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\Rightarrow x+y\ge 3$. Đối chiếu với (*) ta thấy đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}xy>0\\x=y\\x+y=3\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{3}{2}$.

VIII. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ SỬ DỤNG BĐT BUNHIACOPXKI

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=x^2-10x+27\quad(*)$

Lời giải

Điều kiện: $4\le x\le 6$.

Đặt $\begin{cases}f(x)=VT=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\\g(x)=VP=x^2-10x+27\end{cases}$. Ta có:

$f(x)=x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2\quad(1)$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=5$.

$$g(x)=1\sqrt{x-4}+1\sqrt{6-x}\overset{B.C.S}{\le}\sqrt{(1^2+1^2)\left[\left(\sqrt{x-4}\right)^2+\left(\sqrt{6-x}\right)^2\right]}=2\quad(2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{x-4}{1}=\frac{6-x}{1}\Leftrightarrow x=5$.

Nghiệm của phương trình thỏa mãn $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=2\\x^2-10x+27=2\end{cases}$, nghĩa là dấu "=" trong $(1),(2)$ đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=5$.

Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Nhận xét: Do vế phải có bậc lớn hơn vế trái nên rất nhiều khả năng sử dụng bất đẳng thức để giải. Nhận thấy rằng $\begin{cases}x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2\\(x-4)+(6-x)=2\end{cases}$ nên ta nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho vế trái và biến đổi cơ bản ở vế phải.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x+2\quad(1)$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+x-1\ge 0\\x^2-x+1\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\le\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \vee\ x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng BĐT B.C.S cho các số 1; $\sqrt{x^2+x-1}$; 1; $\sqrt{x^2-x+1}$ ta được:

$$VT=\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(x^2+x-1\right)+\left(x^2-x+1\right)\right]}=2\sqrt{x}.$$

Hay $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\le 2\sqrt{x}\quad(2)$

Ta có: $VT-2\sqrt{x}=x^2-x+2-2\sqrt{x}=(x-1)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$

Hay $x^2-x+2\ge 2\sqrt{x}\quad(3)$ \Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=2\sqrt{x}\\ x^2-x+2=2\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow$ Dấu "=" trong

$(2),(3)$ đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x-1}{1}=\dfrac{x^2-x+1}{1}\Leftrightarrow x=1$.

So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét: Để ý rằng VT có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ nên ta nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức B.C.S để tìm giá trị lớn nhất. Rồi sau đó, ta sẽ chứng minh VP lớn hơn hoặc bằng giá trị này.

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|y|\\ 2\sqrt[4]{\dfrac{y^4}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|\end{cases}$$

Lời giải

Nếu $|x|>|y|$ thì $2\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{3}+4}>2\sqrt[4]{\dfrac{y^4}{3}+4}\Rightarrow 1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|y|>1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|\Rightarrow|y|>|x|\Rightarrow$ mâu thuẫn.

Tương tự với $|x|<|y|\Rightarrow$ ta có $|x|=|y|$.

Ta có: $\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|\Leftrightarrow 4.\sqrt{\dfrac{x^4}{3}+4}=1+\dfrac{3}{2}x^2+2.\sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|\quad(2)$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacosky, ta có:

$$4.\sqrt{\frac{x^4}{3}+4}=\sqrt{\left(\frac{x^4}{3}+4\right)\left(\frac{6^2}{3}+4\right)}\ge\frac{6x^2}{3}+4=2x^2+4\quad(3).$$

Từ $(2);(3)\Rightarrow 2x^2+4\le 1+\dfrac{3}{2}x^2+2.\sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|\Rightarrow\left(|x|-\sqrt{6}\right)^2\le 0\Leftrightarrow|x|=\sqrt{6}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}.$

Vậy hệ có hai 4 nghiệm: $(x;y)$ là: $\left(\sqrt{6};\sqrt{6}\right);\left(\sqrt{6};-\sqrt{6}\right);\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right);\left(-\sqrt{6};-\sqrt{6}\right)$.

Bài 4: Giải bất phương trình $\left(\sqrt{13}-\sqrt{2x^2-2x+5}-\sqrt{2x^2-4x+4}\right)\left(x^6-x^3+x^2-x+1\right)\ge 0$

Lời giải

Ý tưởng: *Đánh giá và dùng B.C.S*

Nhận xét $x^6-x^3+x^2-x+1=\left(x^3-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$

Nên bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow\sqrt{13}-\sqrt{2x^2-2x+5}-\sqrt{2x^2-4x+4}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+5}+\sqrt{2x^2-4x+4}\le\sqrt{13}$ (1)

Dễ thấy $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

Nên $\sqrt{2x^2-2x+5}+\sqrt{2x^2-4x+4}=\sqrt{2}\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-x)^2+1^2}\right)$

$$\ge\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{13}.$$

Vậy (1) xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{1-x}{1}\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5}$.

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+x-3=\sqrt{2(x-3)^2+2(x-1)}$ $(*)$

Lời giải

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+x-3=\sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}$ (1)

- Ta có: $1.\sqrt{x-1}+1.(x-3)\overset{B.C.S}{\le}\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{(x-3)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+x-3\le\sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}$ (2)

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi : $\dfrac{\sqrt{x-1}}{1}=\dfrac{x-3}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\ge0\\x-1=x^2-6x+9\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge3\\x^2-7x-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge3\\x=5\vee x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=5$ (3).

- Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt[4]{-x^2+6x-8}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}=x^3+30$ (1)

Nhận xét: Do biểu thức $\sqrt[4]{-x^2+6x-8}=\sqrt[4]{(4-x)(x-2)}=\sqrt{\sqrt{(4-x)(x-2)}}$ giúp ta suy nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy ngược dấu dạng: $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$ và $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}$ có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ nên áp dụng bất đẳng thức B.C.S. Công việc khó khăn hơn là việc tách ghép để áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho biểu thức $6x\sqrt{3x}$ để sau khi áp dụng ta được kết quả dạng $x^3+\alpha$ (do các biểu thức trước khi áp dụng cho hằng số). Cụ thể ta biến đổi $6x\sqrt{3x}=2.\sqrt{27.x^3}$.

Lời giải

- Điều kiện: $2\le x\le4$.
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\sqrt[4]{-x^2+6x-8}=\sqrt{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\le\sqrt{\frac{(4-x)+(x-2)}{2}}=1 \quad (2)$$

$$6x\sqrt{3x}=2.\sqrt{27.x^3}\le 27+x^3 \quad (3)$$

- Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta được:

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=1.\sqrt{\sqrt{x-2}}+1.\sqrt{\sqrt{4-x}}\overset{B.C.S}{\le}\sqrt{(1^2+1^2)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}\le\sqrt{2}\sqrt{1.\sqrt{x-2}+1.\sqrt{4-x}}\le\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(1^2+1^2)(x-2+4-x)}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}\le\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{4}}=2 \quad (4)$$

- Lấy $(2)+(3)+(4)\Rightarrow\sqrt[4]{-x^2+6x-8}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}\le x^3+30 \quad (5)$
- Từ $(1),(5)\Rightarrow$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" trong $(2),(3),(4)$ đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-x=x-2\\27=x^3\\\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{4-x}{1}\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=3$.

Bài 7: Giải phương trình: $13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}=32$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

Ta có:

$$13\sqrt{2x^2-x^4}=\frac{13}{2}\sqrt{x^2(8-4x^2)}\le\frac{13}{2}\frac{8-3x^2}{2}=26-\frac{39x^2}{4} \quad (1)$$

$$9\sqrt{2x^2+x^4}=\frac{3}{2}\sqrt{9x^2(8+4x^2)}\le\frac{3}{2}\frac{8+13x^2}{2}=6+\frac{39x^2}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}\le 32$

Vậy $13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}=32\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=8-4x^2\\9x^2=8+4x^2\end{cases}\Leftrightarrow 5x^2=8\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Ta có $32^2=\left(13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}\right)^2$

$$=x^2.\left(\sqrt{13}\sqrt{26-13x^2}+3\sqrt{3}\sqrt{6+3x^2}\right)^2$$

$$\le x^2.(13+27)\left(26+6-13x^2+3x^2\right)$$

$$=16.5x^2.\left(16-5x^2\right)$$

$\le 16.\dfrac{\left(5x^2+16-5x^2\right)^2}{4}=32^2$

IX. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ SỬ DỤNG BĐT COSI

Bài 1: Giải phương trình: $13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}=32$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

Ta có:

$13\sqrt{2x^2-x^4}=\dfrac{13}{2}\sqrt{x^2(8-4x^2)}\le\dfrac{13}{2}\dfrac{8-3x^2}{2}=26-\dfrac{39x^2}{4}$ (1)

$9\sqrt{2x^2+x^4}=\dfrac{3}{2}\sqrt{9x^2(8+4x^2)}\le\dfrac{3}{2}\dfrac{8+13x^2}{2}=6+\dfrac{39x^2}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}\le 32$

Vậy $13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}=32\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=8-4x^2\\9x^2=8+4x^2\end{cases}\Leftrightarrow 5x^2=8\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Ta có $32^2=\left(13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}\right)^2$

$=x^2.\left(\sqrt{13}\sqrt{26-13x^2}+3\sqrt{3}\sqrt{6+3x^2}\right)^2$

$\le x^2.(13+27)\left(26+6-13x^2+3x^2\right)$

$=16.5x^2.\left(16-5x^2\right)$

$\le 16.\dfrac{\left(5x^2+16-5x^2\right)^2}{4}=32^2$

Bài 2.

Giải phương trình: $4x^3+4x^2-5x+9=4\sqrt[4]{16x+8}$ (1)

Lời giải

Điều kiện: $x\ge\dfrac{-1}{2}$.

Ta có : $4\sqrt[4]{16x+8}=4\sqrt[4]{2.2.2.(2x+1)}\le 2+2+2+(2x+1)=2x+7$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2x+1=2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Từ (1) $\Rightarrow 4x^3+4x^2-5x+9\le 2x+7\Leftrightarrow(x+2)(2x-1)^2\le 0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bài 3: Nghiệm của phương trình: $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$ có dạng $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{2}$ với $\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Khi đó $2a+3b+4c$ có kết quả là

A. 25. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $x \ge 1$.

Ta có: $\left.\begin{cases} \sqrt{x-\frac{1}{x}} = \sqrt{1.\left(x-\frac{1}{x}\right)} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2} \\ \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}(x-1)} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{\frac{1}{x}+(x-1)}{2} \end{cases}\right\rangle \oplus \Rightarrow \sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} \le x \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow$ Dấu $"="$ trong (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \Rightarrow 2a + 3b + 4c = 25 \\ c = 5 \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (1) \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x-3} = 6 - 2x & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $x \ge \dfrac{3}{2}, y \ge 0$

Từ (1) $\Leftrightarrow (x+y)(x^2+y^2+6xy) = 8\sqrt{xy}\sqrt{2xy(x^2+y^2)}$

Theo BĐT Cosi ta có: $0 < \sqrt{2xy(x^2+y^2)} \le \dfrac{2xy+x^2+y^2}{2} = \dfrac{(x+y)^2}{2}$

$x^2 + y^2 + 6xy = 4xy + (x+y)^2 \ge 2\sqrt{4xy(x+y)^2} = 4(x+y)\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+y)^2}{2}(x^2+y^2 6xy) \ge \sqrt{2xy(x^2+y^2)}4(x+y)\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2+y^2+6xy) \ge 8\sqrt{xy}\sqrt{2xy(x^2+y^2)}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ thế vào (2)

$\Rightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6 \Rightarrow (x-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} - 2\right) = 0$

Do $x \ge \dfrac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x \ge \sqrt{\dfrac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} > \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2x-3} + \sqrt{x} > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} - 2\right) < 0$

$\Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=3$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (1) \\ 4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(y-1)\sqrt{2x-2} & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$

Từ $(2) \Rightarrow y \geq 1$ Ta có

$$0<\sqrt{xy}<\frac{x+y}{2}; 0<\sqrt{2xy\left(x^2+y^2\right)} \leq \frac{2xy+x^2+y^2}{2} \leq x^2+y^2 \leq 2\left(x^2+y^2-xy\right)$$

$$\Rightarrow xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \leq (x+y)\left(x^2+y^2-xy\right).$$

Do đó phương trình $(1) \Leftrightarrow (x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)=xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \Leftrightarrow x=y$.

Ta có $2\sqrt{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}=9(x-1)\sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=(9x-11)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{11}{9} \\ 81x^3-279x^2+315x-125=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

Bài 6 . Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1) \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2y}=\frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{2} & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $x, y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ $(*)$.

Ta có $x^2 \leq \frac{1}{4}, y^2 \leq \frac{1}{4}$ suy ra $\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}=\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}>\sqrt{2} \Rightarrow 2xy<1$

Mặt khác, $\forall a,b \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ thì $a.b<1$ $(**)$ và ta có $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$ (3).

Chứng minh (3) : Ta có

$$(3) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right)^2 \leq \frac{4}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{2}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+b^2}}-\frac{4}{1+ab} \leq 0$$

Theo B.C.S. ta có $\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)} \geq 1+ab \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}} \leq \frac{2}{1+ab}$ (4)

Lại có $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{2}{1+ab}=\frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)} \leq 0$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra (3) đúng, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Áp dụng (3) với $a=\sqrt{2}x, b=\sqrt{2}y$ ta có :

$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Thay vào (2) ta có

$\sqrt{x}+\sqrt{1-2x}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2\sqrt{1-2x}=\sqrt{2}+1$. Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x}\ge 0\\ v=\sqrt{1-2x}\ge 0\end{cases}$ ta được hệ phương trình

$\begin{cases}2u+2v=\sqrt{2}+1\\ 2u^2+v^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{2}\\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=\frac{2\sqrt{2}-1}{6}\\ v=\frac{\sqrt{2}+4}{6}\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{1}{4}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=\frac{9-4\sqrt{2}}{36}\\ y=\frac{9-4\sqrt{2}}{36}\end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{2x}-\sqrt{y}=1 & (1)\\ \sqrt[3]{8x^3+y^3}=\sqrt[3]{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right) & (2)\end{cases}$

ĐK: $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức $4\left(x^3+y^3\right)\ge\left(x+y\right)^3\Rightarrow\sqrt[3]{x^3+y^3}\ge\frac{x+y}{\sqrt[3]{4}}$

Bất đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Áp dụng BĐT trên cho vế trái của pt (2) ta được $\sqrt[3]{8x^3+y^3}\ge\frac{2x+y}{\sqrt[3]{4}}$ (*)

Lại có $2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2+\frac{1}{2}>0\Rightarrow 2x+y>2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)$ (**)

Từ (*) (**) ta có : $\sqrt[3]{4\left(8x^3+y^3\right)}>2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)$

$\Rightarrow\sqrt[3]{8x^3+y^3}>\sqrt[3]{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)$

Suy ra (2) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x-3}-\sqrt{y}=2x-6 & (1)\\ x^3+y^3+7\left(x+y\right)xy=8xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ y\ge 0\end{cases}$

Áp dụng BĐT Cô si, ta có:

$x^3+y^3+7\left(x+y\right)xy=\left(x+y\right)^3+4\left(x+y\right)xy\ge 2\sqrt{\left(x+y\right)^3.4\left(x+y\right).xy}$

$=4\left(x+y\right)^2\sqrt{xy}=4\sqrt{xy}\left[x^2+y^2+2xy\right]\ge 4\sqrt{xy}.2\sqrt{\left(x^2+y^2\right).2xy}=8xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Do đó từ (2) $\Rightarrow x=y$. Thay vào (1) ta có

$\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2\left(x-3\right)\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2\right)=0\Leftrightarrow x=3$

(Vì $x\ge\frac{3}{2}$ nên $\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}<2\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2<0$)

Tập nghiệm của hệ phương trình $S=\left\{3\right\}$

X. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Bài 1. **[Tính đơn điệu của hàm số]** $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}$. Đk: $x>-2$

Lời giải

Nhận xét:

Đặt $f(x)=\sqrt{2+x};\ g(x)=\sqrt[3]{6+x}$ thì phương trình có dạng:

$f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)=g\left(g\left(g\left(g(x)\right)\right)\right)$.

Do $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}>0;\ g(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(6+x)^2}}>0\Rightarrow f(x),\ g(x)$ đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

Với $x>2$ thì $f(x)>g(x)>2$

$\Rightarrow f\left(f(x)\right)>f\left(g(x)\right)>g\left(g(x)\right)>2$

$\Rightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right)>f\left(g\left(g(x)\right)\right)>g\left(g\left(g(x)\right)\right)>2$

$\Rightarrow f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)>f\left(g\left(g\left(g(x)\right)\right)\right)>g\left(g\left(g\left(g(x)\right)\right)\right)>2$

$\Rightarrow VT>VP$

Với $-2<x<2$ thì $f(x)<g(x)<2$ lập luận tương tự ta có $VT<VP$.

Nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

$\Rightarrow x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2: $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{2x-1}=4-x^3$

Lời giải

Đk : $x\ge\dfrac{1}{2}$

Phương trình tương đương: $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{2x-1}-4+x^3=0$

Dễ thấy khi x tăng thì VT tăng nên VT là hàm đồng biến.

$\Rightarrow$ Pt có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 3: $\sqrt[5]{x}+\sqrt{3x-1}=4-\sqrt{2x-1}$

Lời giải

Phương trình tương đương: $\sqrt[5]{x}+\sqrt{3x-1}-4+\sqrt{2x-1}=0$ (tương tự $\Rightarrow x=1$ là nghiệm)

Bài 4: $\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[5]{5x-2}=\sqrt{5x-2}-\sqrt{2x-1}$

Lời giải

Phương trình tương đương: $\sqrt[5]{2x-1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt[5]{5x-2}+\sqrt{5x-2}$

Xét $f(t)=\sqrt[5]{t}+\sqrt{t}$ nhận thấy khi t tăng thì $f(t)$ tăng $\Rightarrow f(t)$ đồng biến.

$\Rightarrow 2x-1=5x-2\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$ (loại) $\Rightarrow$ vô nghiệm.

Bài 5: $2x+\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}+\sqrt{1+\sqrt{x+3}}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tương đương: $(2x+1)+\sqrt{2x+1}=\left(\sqrt{x+3}+1\right)+\sqrt{1+\sqrt{x+3}}$

Hàm số $f(t)=t\sqrt{t}$ đồng biến $\Rightarrow 2x+1=\sqrt{x+3}+1\Rightarrow$.......

Bài 6. Giải phương trình

$$x^2-2x+7+\sqrt{x+3}=2\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+\sqrt{1+8x}}$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{8}$

Phương trình tương đương với $(x+3)^2+\sqrt{x+3}=\left(1+\sqrt{1+8x}\right)^2+\sqrt{1+\sqrt{1+8x}}$

Hàm số $f(t)=t^2+\sqrt{t}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $x+3=1+\sqrt{1+8x}$, giải phương trình tìm được $x=1;\ x=3\ (t/m)$

Bài 7. Giải hệ $\begin{cases} x-\sqrt[3]{y^3+y}=y-\sqrt[3]{x^3+x} & (1)\\ x^5+y^5=2 & (2)\end{cases}$

Lời giải

$(1)\Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x^3+x}=y+\sqrt[3]{y^3+y}$. Hàm số $f(t)=t+\sqrt[3]{t^3+t}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x=y$.

Thế $x=y$ vào (2) ta được $x=y=1$.

Bài 8. Giải hệ $\begin{cases} x^5-\sqrt[3]{y}=y^5-\sqrt[3]{x} & (1)\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{3y-2}=3 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$

$(1)\Leftrightarrow x^5+\sqrt[3]{x}=y^5+\sqrt[3]{y}$. Hàm số $f(t)=t^5+\sqrt[3]{t}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x=y$.

Thế $x=y$ vào (2) ta được $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-2}=3\ \ (*)$.

Vế trái của $(*)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất

$x=2(t/m)\Rightarrow y=2$

Bài 9. Giải hệ $\begin{cases} \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=(y-x)(xy+2) & (1)\\ x^2+y^2=2 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Thế $2=x^2+y^2$ vào (1) ta được $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=(y-x)\left(xy+x^2+y^2\right)\Leftrightarrow x^3+\sqrt[4]{x}=y^3+\sqrt[4]{y}$

Hàm số $f(t)=t^3+\sqrt[4]{t}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x=y$.

Thế $x=y$ vào (2) ta được $x=y=1$ (t/m) hoặc $x=y=-1$(loại).

Bài 10. Giải hệ $\begin{cases} x^3+x=2(y+1)\sqrt{2y+1} & (1)\\ x-2\sqrt{2y+1}+1=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y \ge -\frac{1}{2}$.

$(1) \Leftrightarrow x^3 + x = (2y+1)\sqrt{2y+1} + \sqrt{2y+1}$. Hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $x = \sqrt{2y+1}$.

Thế $x = \sqrt{2y+1}$ vào (2) ta được $x = 1 \Rightarrow y = 0\,(t/m)$.

Bài 11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \ (1) \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \ (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1$

$(1) \Rightarrow \sqrt{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + 2} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{y^4+2} + y$

Hàm số $f(t) = \sqrt{t^4+2} + t$ **đồng biến** $t \ge 0$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x-1} = y \Rightarrow x = y^4 + 1$ **và** $y \ge 0$

Thế vào $(2) \Rightarrow y(y-1)\underbrace{\left(y^6 + y^5 + 3y^3 + 3y + 9\right)}_{>0} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ **hoặc** $y = 1$

Bài 12: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \ (1) \\ y + \sqrt{2y^2+1} = 4 + \sqrt{x+4} \ (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $-4 \le x \le 4$

Đặt $\sqrt{1-x} = t \Leftrightarrow 1 - x = t^2$**;** $t \ge 0$

Khi đó: $2x\sqrt{1-x} = 2t - 2t^3$

$(1) \Rightarrow 2y^3 + y = 2t^3 + t \Rightarrow y = t \Rightarrow y = \sqrt{1-x} \Rightarrow y^2 = 1 - x; y \ge 0$

Thế vào (2)**, ta có:**

$\sqrt{1-x} + \sqrt{3-2x} = 4 + \sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3-2x} - 3\right) + \left(\sqrt{1-x} - 2\right) - \left(\sqrt{x+4} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(....) = 0$

$\Rightarrow x = -3...$

Bài 13. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} & (1) \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} & (2) \end{cases}$

***/ Cách thức mà trong thực tế bản thân đã làm:**

- Hãy lựa chọn biến đổi phương trình trong hệ về dạng $f(x) = f(y)$.
- Nhận xét gì về tập giá trị của (x - 1) và của $\sqrt{y+3}$?

- Hàm số có đơn điệu trên tập được xét không ?

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} y^3+3y^2\ge 0 \\ y^2+8y\ge 0 \\ x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge 0 \end{cases} (*)$

Ta có :

$(1)\Leftrightarrow x^3-3x^2=y\sqrt{y+3}\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=\left(\sqrt{y+3}\right)^3-3\left(\sqrt{y+3}\right) \quad (1')$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên tập $[1;+\infty)$

$f'(t)=3t^2-3\ge 0,\forall t\ge 1 \Rightarrow$ *f(t)* là hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Khi đó : $(1')\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y+3}\Leftrightarrow (x-1)^2=y+3$ kết hợp với phương trình (2), ta được :

$\begin{cases} x^2-2x+1=y+3 \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2=y & (1') \\ 9(x-2)=y^2+8y & (2') \end{cases}$

Thế (1') vào (2'), ta được :

$9x-18=\left(x^2-2x-2\right)^2+8\left(x^2-2x-2\right)$

$\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x^2-17x+6=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^3-x^2+5x-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x^3-x^2+5x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2(x-1)+4x+(x-2)=0(\text{VN}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=1(Tm)$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Bài 14. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0 & (1) \\ 4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $x\ge \dfrac{1}{2}$

$(1)\Leftrightarrow \left[4(2x-1)+1\right]\sqrt{2x-1}=y+4y^3\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+\sqrt{2x-1}=4y^3+y \quad (1')$

Xét hàm số : $f(t)=4t^3+t$ trên tập $[0;+\infty)$

$f'(t)=12t^2+1>0,\forall t\ge 0\Rightarrow$ Hàm số *f(t)* đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Khi đó : $(1')\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x-1}\right)=f(y)\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=y\Leftrightarrow y^2+1=2x$ thế vào phương trình (2), ta được :

$\left(y^2+1\right)^2-4\left(y^2+1\right)+2y^3+y^2-2y+3=0$

$$\Leftrightarrow y^4+2y^3-y^2-2y=0 \Leftrightarrow y(y-1)(y+1)(y+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \\ y=-2 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Khi $y=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Khi $y=-1 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Khi $y=-2 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Khi $y=1 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là : $(x;y)=\left\{(1;-1);(1;-1);\left(\dfrac{1}{2};0\right);\left(\dfrac{5}{2};-2\right)\right\}$

Bài 15. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2+8=(y-x)(y^2+xy+x^2+6) & (1) \\ (x+y-13)(\sqrt{3y-14}-\sqrt{x+1})=5 & (2) \end{cases}$$

***/ Cách thức mà trong thực tế bản thân đã làm:**

- Hãy lựa chọn biến đổi phương trình trong hệ về dạng $f(x)=f(y)$.
- Nhận xét gì về tập giá trị của (x + 1) và của (y - 1) ?
- Hàm số có đơn điệu trên tập được xét không ?

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3y-14\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ y\ge \dfrac{14}{3} \end{cases} (*)$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=(y-1)^3+3(y-1) \quad (1')$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t \Rightarrow f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in R$

$\Rightarrow$ Hàm số *f(t)* đồng biến trên *R*

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(x+1)=f(y-1) \Leftrightarrow x+1=y-1 \Leftrightarrow y=x+2$ thế vào phương trình (2), ta được : $(2x-11)(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1})=5 \quad (3)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}=0 \quad (4)$ (Do $x=\dfrac{11}{2}$ không là nghiệm của (3)

Xét hàm số $g(x)=\Leftrightarrow \sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}$ trên $D=\left[\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11}{2};+\infty\right)$

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{10}{(2x-11)^2}$$

$$=\frac{6x+17}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}(3\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-8})}+\frac{10}{(2x-11)^2}>0, \forall x\in\left(\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$$

$\Rightarrow$ Hàm số *g(x)* đồng biến trên $\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{11}{2};+\infty\right)$

- Khi $x \in \left(\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)$: $(4) \Leftrightarrow g(x) = g(3) \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$ (thỏa mãn điều kiện (*))

-Khi $x \in \left(\frac{11}{2};+\infty\right)$: $(4) \Leftrightarrow g(x) = g(8) \Leftrightarrow x = 8 \Rightarrow y = 10$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases}$

Bài 16. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + 3y + 1 = y^2 - \frac{1}{y} + \frac{3x+4}{\sqrt{x+1}} & (1) \\ \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7x+2y+2} = 2y+3 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 9y - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ y \ge \frac{2}{9} \end{cases}$ (*)

Ta có : $(1) \Leftrightarrow y^2 - \frac{1}{y} - 3y = (x+1) - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 3\sqrt{x+1}$ (1')

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{1}{t} - 3t$ trên khoảng $(0;+\infty)$

$$f'(t) = 2t + \frac{1}{t^2} - 3 = \frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2} \ge 0, \forall t \in (0;+\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số *f(t)* đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(y) = f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x+1 = y^2$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$\sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5} = 2y+3$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{9y-2} - (y+2)\right] + \left[\sqrt[3]{7y^2+2y-5} - (y+1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-5y+6}{\sqrt{9y-2}+(y+2)} + \frac{(y+1)(y^2-5y+6)}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + (\sqrt[3]{7y^2+2y-5})^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-5y+6).h(x) = 0$$

Vì $h(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{9y-2}+(y+2)} + \frac{y+1}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + (\sqrt[3]{7y^2+2y-5})^2}\right] > 0$ với

$\forall y \ge \frac{2}{9}$ nên $y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 3 \end{array}\right.$

-Khi $y = 2 \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện (*))

-Khi $y = 3 \Rightarrow x = 8$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$

Bài 17. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5+16.4^{x^2-2y}=\left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} & (1) \\ x^3+17x+10y+17=2\left(x^2+4\right)\sqrt{4y+11} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $t=x^2-2y$ phương trình (1) có dạng

$$5+16.4^t=\left(5+16^t\right).7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{5+4^{2+t}}{7^{2+t}}=\frac{5+4^{2t}}{7^{2t}} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(x)=5.\left(\frac{1}{7}\right)^x+\left(\frac{4}{7}\right)^x \Rightarrow f(x)$ là hàm số nghịch biến trên R

Phương trình (3) có dạng $f(t+2)=f(2t) \Leftrightarrow t+2=2t \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow x^2-2y=2$

Khi đó phương trình (2) có dạng

$$x^3+5x^2+17x+7=2\left(x^2+4\right)\sqrt{2x^2+7}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3+(x+2)^2+(x+2)=\left(2x^2+7\right)\sqrt{2x^2+7}+\left(2x^2+7\right)+\sqrt{2x^2+7}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$

$f'(t)=3t^2+2t+1>0, \forall t>0 \Rightarrow$ *f(t)* là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Phương trình trên có dạng

$$f(x+2)=f\left(\sqrt{2x^2+7}\right) \Leftrightarrow x+2=\sqrt{2x^2+7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Suy ra : Hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (x;y) là: $\left(1;\frac{-1}{2}\right),\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

Bài 18. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y}-1=3x+2\sqrt{1-2x^2y}+\sqrt{1-x^2} \\ 2x^3y-x^2=\sqrt{x^4+x^2}-2x^3y\sqrt{4y^2+1} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện : $-1\le x\le 1$

Ta thấy $(x;y)=(0;a),\ a\in R$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Khi $x\neq 0$, ta có :

$$2x^3y-x^2=\sqrt{x^4+x^2}-2x^3y\sqrt{4y^2+1} \Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \ (*)$$

Xét hàm số : $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$

$$f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t. \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến}$$

Do đó : $(*) \Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}$ thế vào phương trình còn lại của hệ ta có :

$$4\sqrt{1+x}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{1+x}\ge 0 \\ b=\sqrt{1-x}\ge 0 \end{cases}$ ta có : $3x=x-1+2(x+1)-1=2a^2+b^2-1$

Phương trình trở thành :

$2a^2+b^2+ab-4a+2b=0 \Leftrightarrow (2a-b)(a+b-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a=b \\ a+b=2 \end{array}\right.$

Với $2a=b$, ta có : $2\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5} \Rightarrow y=-\dfrac{5}{6}$

Với $a+b=2$, ta có : $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2 \Leftrightarrow x=0$ (loại)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x;y)=\left\{\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{5}{6}\right);(0;a) \mid a\in R\right\}$

Bài 19. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y & (1) \\ x^2+2x(y-2)+y^2-8y+4=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $x\geq 2$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)+5}+\sqrt[4]{x-2}=\sqrt{y^4+5}+y \quad (1')$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^4+5}$ trên $[0;+\infty)$

$f'(t)=1+\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+5}}>0, \forall t\geq 0$ $\Rightarrow$ Hàm số *f(t)* đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó : $f\left(\sqrt[4]{x-2}\right)=f(y) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2}=y \Leftrightarrow x=y^4+2$ thế vào phương trình (2), ta được : $4y=\left(y^4+y\right)^2 \Leftrightarrow y\left(y^7+2y^4+y-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y^7+2y^4+y-4=0 \ (3) \end{array}\right.$

Với $y=0 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện)

Giải (3): Xét hàm số $g(y)=y^7+2y^4+y-4$ trên $[0;+\infty)$

$g'(y)=7y^6+8y^3+1>0, \forall y\geq 0$

$\Rightarrow$ Hàm số *g(y)* đồng biến trên $(0;+\infty)$

Lại có : $(3) \Leftrightarrow g(y)=g(1) \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Bài 20. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 20\sqrt{6-x}-17\sqrt{5-y}-3x\sqrt{6-x}+3y\sqrt{5-y}=0 & (1) \\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} x\leq 6 \\ y\leq 5 \\ 2x+y+5\geq 0 \\ 3x+2y+11\geq 0 \end{cases} \quad (*)$

$(1) \Leftrightarrow (20-3x)\sqrt{6-x}=(17-3y)\sqrt{5-y}$

$\Leftrightarrow (3(6-x)+2)\sqrt{6-x}=(3(5-y)+2)\sqrt{5-y} \quad (3)$

Xét hàm số $f(t)=(3t+2)\sqrt{t}$ trên tập $[0;+\infty)$

$f'(t)=3\sqrt{t}+\dfrac{3t+2}{2\sqrt{t}}>0,\ \forall t>0 \Rightarrow$ Hàm số *f(t)* đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó : $(3)\Leftrightarrow f(6-x)=f(5-y)\Leftrightarrow 6-x=5-y\Leftrightarrow y=x-1$ thế vào phương trình (2), ta được :

$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13$ (Điều kiện : $x\ge -\dfrac{4}{3}$)

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3x+4}-(x+2)\right)+3\left(\sqrt{5x+9}-(x+3)\right)=x^2+x$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x(x+1)}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\dfrac{-3x(x+1)}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}=x^2+x$

$\Leftrightarrow x(x+1)\left(\dfrac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\dfrac{3}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\end{array}\right.$ (vì $\dfrac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\dfrac{3}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}+1>1$ với mọi x thuộc TXĐ)

Với $x=0\Rightarrow y=-1$ (thỏa mãn hệ phương trình)

Với $x=-1\Rightarrow y=-2$ (thỏa mãn hệ phương trình)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x;y)\in\{(0;-1);(-1;-2)\}$

Bài 21. **[pp hàm số]** Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x+\sqrt{x^2+1}=3^y & (1)\\ y+\sqrt{y^2+1}=3^x & (2)\end{cases}$

Lời giải

Trừ theo vế phương trình (1) cho phương trình (2), ta được :

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=3^y-3^x \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}+3^x=y+\sqrt{y^2+1}+3^y$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}+3^t$ trên R

$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}+3^t\ln 3>0,\forall t\in R \Rightarrow$ Hàm số *f(t)* đồng biến trên *R.*

Khi đó : $(3)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thế vào phương trình (2), ta được :

$x+\sqrt{x^2+1}=3^x\Leftrightarrow 1=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ (4)

Xét hàm số $g(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ trên R

$g'(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\ln 3-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0$, do $\sqrt{x^2+1}-x>0$ và $\sqrt{x^2+1}\ge 1$

$\Rightarrow$ Hàm số *g(x)* đồng biến trên *R.*

Khi đó : $(4)\Leftrightarrow g(x)=g(0)\Leftrightarrow \mathrm{x}=0\Rightarrow \mathrm{y}=0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

Bài 22: Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{6-x}+3x^2-12=0.$

Lời giải

Điều kiện: $\frac{2}{3}\le x\le 6$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{3x-2}-\sqrt{6-x}+3x^2-12$ với $x\in\left[\frac{2}{3};6\right]$

$$f^{'}\left(x\right)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}+\frac{2}{2\sqrt{6-x}}+6x>0,\ \forall x\in\left(\frac{2}{3};6\right).$$

Suy ra hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{3x-2}-\sqrt{6-x}+3x^2-12$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{2}{3};6\right)$

Ta có: $f\left(2\right)=\sqrt{3.2-2}-\sqrt{6-2}+3.2^2-12=2-2+12-12=0\Rightarrow x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Từ cách giải trên, ta nhận thấy phương trình có một nghiệm bằng 2 nên có thể dùng cách phân tích để đưa về cách giải sau.

Cách khác: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{6-x}+3x^2-12=0\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{6-x}\right)}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{6-x}}+3\left(x^2-4\right)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{4\left(x-2\right)}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{6-x}}+3\left(x-2\right)\left(x+2\right)=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{6-x}}+3\left(x+2\right)\right)=0\Leftrightarrow x=2$$

Bài 23: . Giải phương trình: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}+2\sqrt{x^2-16}-10=0.$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 4$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}+2\sqrt{x^2-16}-10$ với $x\ge 4$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{2\sqrt{x-4}}+\frac{2x}{\sqrt{x^2-16}}>0,\quad\forall x>4$$

Suy ra: $f\left(x\right)=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}+2\sqrt{x^2-16}-10$ đồng biến trên $\left[4;+\infty\right)$

$$f\left(5\right)=\sqrt{5+4}+\sqrt{5-4}+2\sqrt{5^2-16}-10=3+1+2.3-10=0$$

$\Rightarrow x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 24: . Giải phương trình: $3-x+\sqrt[3]{4-x}=\sqrt{3+x}+\sqrt[3]{1+\sqrt{3+x}}.$ $\left(*\right)$

Lời giải

Xét $f\left(t\right)\ =t+\sqrt[3]{t+1}$ với t $t\in\mathbb{R}$ R.

Có $f'(t)=1+\frac{1}{3\sqrt[3]{(t+1)^2}}>0\ \ \forall t\ne 1\Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Ta có $\left(*\right)\Leftrightarrow f\left(3-x\right)=f(\sqrt{3+x})$. Luôn có $\sqrt{3+x}\ge 0\rangle -1\ \forall x\ge -3$ nên:

- Nếu $3-x>1\Leftrightarrow x<4$ $\left(a\right)$ mà $f\left(t\right)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$ thì:

$$(1)\Leftrightarrow 3-x=\sqrt{3+x}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0\\ x^2-7x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=16\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1\ \text{(thỏa mãn }\left(a\right)\text{)}.$$

- Nếu $3-x\le 1\Rightarrow 4-x\le 0\Rightarrow\sqrt[3]{4-x}\le 0.\Rightarrow VT\left(*\right)\le -1=VT\left(*\right)>0$ (vô lí).

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Bài 25: Giải phương trình $9x^2-28x+21=\sqrt{x-1}$ $\left(*\right)$

Ý tưởng: Ta xây dựng hàm $f(t)=mt^2+nt$ Để ý rằng hạng tử $\sqrt{x-1}$ ở vế phải có bậc thấp nhất nên tương ứng với nt trong $f\left(t\right)$, do đó $n=1$. Ta nhìn nhận $9x^2$ dưới 2 khía cạnh $9x^2=9.x^2$ thì $m=9$ nhưng ta nhìn nhận $9x^2=(3x)^2$ thì $m=1$. Như vậy m=9 hoặc m=1.

Nếu $m=9 \Rightarrow f(t)=9t^2+t$.

Cần đưa $(*)$ về dạng: $9(x-u)^2+x-u=9(x-1)+\sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow 9x^2+x(-18u-8)+u^2-u+9=\sqrt{x-1}$$

Đồng nhất hệ số ta được: $\begin{cases} -18u-u=-28 \\ u^2-u+9=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{10}{9} \\ u\in\{4;-3\} \end{cases} \Rightarrow$ loại

Nếu $m=1 \Rightarrow f(t)=t^2+t$

Cần đưa $(*)$ về dạng $(3x-u)^2+3x-u=(x-1)+\sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow 9x^2+x(-6u+2)+u^2-u+1=\sqrt{x-1}.$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} -6u+2=-28 \\ u^2-u+1=21 \end{cases} \Leftrightarrow u=5$

Đến đây có lẽ Bài đã được giải quyết, nhưng thật ra "chông gai" còn ở phía trước: $(*)$
$\Leftrightarrow 9x^2-30x+25+3x-5=x-1+\sqrt{x-1}$
$\Leftrightarrow f(3x-5)=f(\sqrt{x-1})\ (**)$ với $f(t)=t^2+t$

Lưu ý rằng $f(t)=t^2+t$ chỉ đồng biến trên $(-\frac{1}{2};+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;-\frac{1}{2})$, hơn nữa $\sqrt{x-1}\ge 0>-\frac{1}{2}$

Như vậy ta chỉ có $f(3x-5)=f(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow 3x-5=\sqrt{x-1}$ khi $3x-5\ge-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}$

Còn $1\le x<\frac{3}{2}$ thì sao? Lại để ý rằng hàm số bậc 2 cũng có cái hay của nó, đó là $(-t)^2=t^2$. Ở trên , dựa vào hệ số bậc cao nhất là 9, ta chỉ mới xét
$t=3x-u$ nên bây giờ ta sẽ xét t=u-3x

Cần đưa $(*)$ về dạng $(u-3x)^2+u-3x=x-1+\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 9x^2+x(-6u-4)+u^2+u+1=\sqrt{x-1}$. Đồng nhất hệ số $\begin{cases} -6u-4=-28 \\ u^2+u+1=21 \end{cases} \Leftrightarrow u=4$

Kiểm tra lại: Có $x<\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4-3x>-\frac{1}{2}$ do đó chọn $u=4$

Đến đây Bài mới thực sự được giải quyết.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$

Nếu $x\ge\frac{3}{2} \Rightarrow 3x-5\ge-\frac{1}{2}$

Ta có $(*) \Leftrightarrow (3x-5)^2+3x-5=x-1+\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow f(3x-5)=f(\sqrt{x-1})$ với $f(t)=t^2+t$

$\Leftrightarrow 3x-5=\sqrt{x-1}$ ((do $f(t)$ đồng biến trên $(-\frac{1}{2};+\infty)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5\ge 0 \\ (3x-5)^2=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{5}{3} \\ x\in\{2;\dfrac{13}{9}\} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa ĐKXĐ)}$$

Nếu $1\le x<\frac{3}{2} \Rightarrow 4-3x>-\frac{1}{2}\ (**)$

$(*) \Leftrightarrow (4-3x)^2+4-3x=x-1+\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow f(4-3x)=f(\sqrt{x-1})$ với $f(t)=t^2+t$

$\Leftrightarrow 4-3x=\sqrt{x-1}$ (do $f(t)$ đồng biến trên $(-\frac{1}{2};+\infty)$ và $(**)$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x\ge 0 \\ (4-3x)^2=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{4}{3} \\ x\in\{\frac{25\pm\sqrt{13}}{18}\} \end{cases}$ v

Vậy $(*)$ có tập nghiệm $S=\{2;\frac{25-\sqrt{13}}{18}\}$

Lưu ý: Ta cũng có thể giải Bài trên bằng cách đặt $\sqrt{x-1}=3y-5$ để đưa về hệ đối xứng loại 2.

Bài 26: Giải phương trình $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$.

Lần 3 – THPT Phú Riềng 2016

Lời giải

ĐK: $x\ge -2$

Pt $\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=\frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \frac{x+4}{x^2-2x+3}=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} \quad (1) \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow (x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=(x+1)\left(x^2-2x+3\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+2\right)\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\right]=\left[(x-1)+2\right]\left[(x-1)^2+2\right] \qquad (2)$

Xét pt $=(t+2)(t^2+2)$ có pt $f'(t)=3t^2+4t+2>0\forall t\in\mathbb{R}$

Vậy f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: (2) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=x-1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Vậy pt có nghiệm: x = 2, $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Bài 27: Tổng các nghiệm của phương trình $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$ là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -4.

Lời giải

Đáp án: A

Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$, ta có hệ : $\begin{cases} x^3-4x^2-5x+6=y \\ 7x^2+9x-4=y^3 \end{cases}\Rightarrow y^3+y=(x+1)^3+(x+1)$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+t\Rightarrow f'(t)=3t^2+1$ là hàm đơn điệu tăng.

Từ phương trình $f(y)=f\left[(x+1)\right]\Leftrightarrow y=x+1$

Do đó $(x+1)=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\Leftrightarrow x^3-4x^2-6x+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là : 4

Bài 28: Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\sqrt[3]{6x+5}=x^3-5x-5$ có dạng $\frac{a+b\sqrt{c}}{2}$ với $(a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó $a+b+c$ là:

A. 5. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 23.

Lời giải

Đáp án: C

Ta có $\sqrt[3]{6x+5}=x^3-5x-5 \Leftrightarrow 6x+5+\sqrt[3]{6x+5}=x^3+x$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $(*)$ $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{6x+5}\right)=f(x)$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+5}=x \Leftrightarrow x^3-6x-5=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-5\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1; x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Do đó nghiệm nhỏ nhất $x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=21 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=-21$

Nhận xét: Có thể giải Bài này theo hướng sau:

$\sqrt[3]{6x+5}=x^3-5x-5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+5}+1=x^3-5x-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{6(x+1)}{\sqrt[3]{(6x+5)^2}-\sqrt[3]{6x+5}+1}=(x+1)\left(x^2-x-4\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \dfrac{6}{\sqrt[3]{(6x+5)^2}-\sqrt[3]{6x+5}+1}=x^2-x-4 \end{array}\right.$

Vấn đề đặt ra là giải phương trình còn lại sẽ rất phức tạp.
Vì vậy ta sẽ dùng tính đơn điệu của hàm số

Bài 29: Tổng các của phương trình $x^3-3x^2+2x-1=\sqrt[3]{2x-1}$ là:

A. 3. **B.** -3. **C.** 5. **D.** 23.

Lời giải

Đáp án: B

Cách 1:

Ta có

$x^3-3x^2+2x-1=\sqrt[3]{2x-1}$

$\Leftrightarrow (x-1)^3+(x-1)=(2x-1)+\sqrt[3]{2x-1}$

Xét hàm $f(x)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(x)=3t^2+1>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(x-1)=f(\sqrt[3]{2x-1}) \Rightarrow x-1=\sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow \sqrt[3]{2x-1}$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là: $0+\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}=3$

Cách 2:

Đặt $\sqrt[3]{2x-1}=y-1$. Ta có hệ sau: $\begin{cases} x^3-3x^2+2x=y \\ y^3-3y^2+3y=2x \end{cases}$

Lấy 2 pt trừ cho nhau ta có:

$$x^3-y^3-3(x^2-y^2)+4(x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-3x-3y+4)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}(y-1)^2+1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow x=y$$

Vậy : $\sqrt[3]{2x-1}=x-1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$.

Bài 30: Giải bất phương trình $8x^3+2x<(x+2)\sqrt{x+1}$ $(*)$ có tập ngiệm $S=[a;b)$. Khi đó $a+b$ là:

A. $\frac{-7+\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{-7-\sqrt{7}}{8}$. **C.** $\frac{-7-\sqrt{17}}{8}$. **D.** $\frac{-7+\sqrt{17}}{8}$.

Lời giải

Đáp án: D

Điều kiện: $x\ge -1$.

$$(*)\Leftrightarrow (2x)^3+2x<\left[(x+1)+1\right]\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow (2x)^3+2x<(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow (2x)^3+2x<\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\sqrt{x+1}$$

$\Leftrightarrow f(2x)<f\left(\sqrt{x+1}\right)$ (1) với hàm đặc trưng là $f(t)=t^3+t$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow f(2x) < f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{x+1}$ hay $\sqrt{x+1} > 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 2x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x \ge 0 \\ x+1 > 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x < 0 \vee 0 \le x < \frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x < \frac{1+\sqrt{17}}{8}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-1; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right) \Rightarrow a+b = \frac{-7+\sqrt{17}}{8}$.

Bài 31: Giải bất phương trình $8x^3 + 2x < (x+2)\sqrt{x+1}$ $(*)$ có tập ngiệm $S = \left[\frac{a}{b}; c\right)$ với $\frac{a}{b}$ tối giản $(a,b,c \in \mathbb{Z})$. Khi đó $a+b+c$ là:

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.

Khi đó, phương trình: $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1} - 3\right) \le 4 \quad (2)$

Với $\sqrt{2x-1} - 3 \le 0 \Leftrightarrow x \le 5 \Rightarrow (2):$ luôn đúng.

Với $x > 5$:

Xét hàm số: $f(x) = \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1} - 3\right)$ liên tục trên khoảng $(5; +\infty)$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)\left(\sqrt{2x-1} - 3\right) + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}} > 0; \ \forall x > 5$$

$\Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$ và có $f(7) = 4$.

Do đó: $(2) \Leftrightarrow f(x) \le f(7) \Leftrightarrow x \le 7$.

Kết hợp với điều kiên, tập nghiệm bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; 7\right]$.

Vậy $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \Rightarrow a+b+c = 10 \\ c = 7 \end{cases}$

Bài tập luyện tập

1) $x^3 - 6 = \sqrt[3]{x+6}$

2) $\Rightarrow \sqrt{5-x}-\sqrt{3x+1}=8x^2+16x-24$

3) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{5x-2}=(5x-2)^3-(2x-1)^3$

4) $\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[5]{2x^2+2}=\sqrt[3]{x^2+2}+\sqrt[5]{x+3}$

5) $x+\sqrt{2x}=\frac{1}{x}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}$

6) $4x^3+x-(x+1)\sqrt{2x+1}=0$

7) $\begin{cases} x^3+2x=3(y+1).\sqrt{3y+1} \\ \sqrt{2x-3}+\sqrt{3y-2}=2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3y^3+2y+3x\sqrt{2-x}=8\sqrt{2-x} \\ \sqrt{5-4x}+\sqrt{3y+1}=3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5} \\ x+y+x^2+y^2=44 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^3+12y+x+2=8y^3+8y \\ \sqrt{x^2+8y^3}+2y=5x \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases}$

XI. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ SỬ DỤNG SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG TRÒN ĐƯỜNG THẲNG

Bài 1. Tìm điều kiện của số thực a để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$\sqrt{x-x^2}=a-2x$. (2.4)

Lời giải

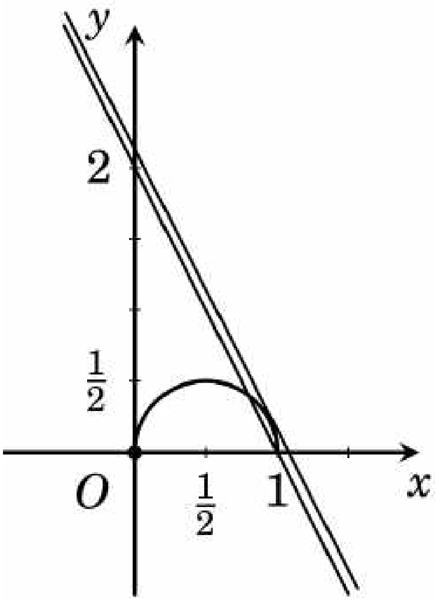
Điều kiện: $x-x^2\ge 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 1$.

Đặt $y=\sqrt{x-x^2}\ge 0$.

Phương trình (2.4) trở thành:

$$\begin{cases} 2x+y=a \\ x^2+y^2-x=0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=a & (1) \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} & (2) \\ y\ge 0 & (3) \end{cases}$$

Trong mặt phẳng tọa độ, phương trình (1) là phương trình đường thẳng $\Delta: 2x+y=a$, phương trình (2) và (3) là phương trình nửa đường tròn có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$, thuộc phần $y\ge 0$.



Số nghiệm của phương trình (2.4) chính là số giao điểm của đường thẳng Δ và nửa đường tròn (I,R). Do đó để phương trình (2.4) có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng Δ cắt nửa đường tròn (I,R). Khi đó

$$\begin{cases} d(I,\Delta)<\frac{1}{2} \\ a\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|1-a|}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2} \\ a\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a-\frac{1}{4}<0 \\ a\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le a<\frac{2+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình (2.4) có hai nghiệm phân biệt khi $2\le a<\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 2: Giải và biện luận theo m phương trình $\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}=11\ (1)$.

Nếu $m<0$ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m=0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Nếu $m>0$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{m+x}\ge 0 \\ v=\sqrt{m-x}\ge 0 \end{cases}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=2m \\ u+v=m \\ u,v\ge 0 \end{cases} \quad (2)$.

Nghiêm của hệ (2) chính là giao điểm của đường thẳng $(d)\ u+v=m$ với cung AB của đường tròn $(C)\ u^2+v^2=2m$.

Do đó (2) có nghiệm

$\Leftrightarrow OH\le d(O,(D))\le R$) Với $R=\sqrt{2m}$ là bán kính của đường tròn (C))

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{2}}\le\frac{m}{\sqrt{2}}\le\sqrt{2m} \Leftrightarrow \sqrt{m}\le\frac{m}{\sqrt{2}}\le\sqrt{2m}.$$

$\Leftrightarrow 2m\le m^2\le 4m \Leftrightarrow 2\le m\le 4$.

Lúc đó: $u^2+(m-u)^2=2m$.

$\Leftrightarrow 2u^2-2mu+m^2-2m=0 \Leftrightarrow 2u^2-2mu+m^2-2m=0$.

$$\Leftrightarrow u_{1,2}=\frac{m\pm\sqrt{4m-m^2}}{2}.$$

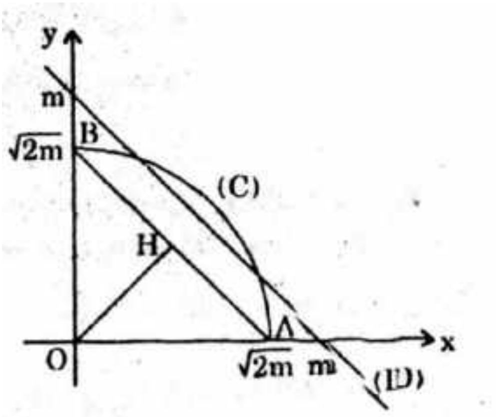
$\Leftrightarrow x_{1,2}=u_{1,2}^2-m=\left(\dfrac{m-\sqrt{4m-m^2}}{2}\right)^2-m$.

Vậy $x_{1,2}=\pm\dfrac{m\sqrt{4m-m^2}}{2}$.

Nếu $m=0$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=0$.

Nếu $2\le m\le 4$ phương trình (1) có nghiệm $x_{1,2}=\pm\dfrac{m\sqrt{4m-m^2}}{2}$.

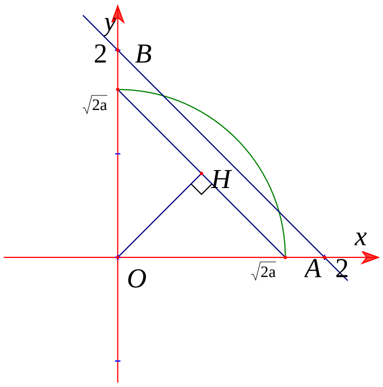
Nếu $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ 0\ne m<2 \end{array}\right.$ phương trình (1) vô nghiệm.



Bài 3: Giải và biện luận theo a bất phương trình: $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\le 2\ \ (1)$.

Lời giải

Ta chỉ xét $a\ge 0$ (vì nếu $a<0$ thì biểu thức $\sqrt{a-\sqrt{x}}$ không có nghĩa)



Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{a+\sqrt{x}} \\ v=\sqrt{a-\sqrt{x}} \end{cases}$ khi đó PT $(1)\Leftrightarrow\begin{cases} u+v\le 2 \\ u^2+v^2=2a \\ u,v\ge 0 \end{cases}\ (2)$.

Từ đây suy ra các điểm $M(u;v)$ thỏa mãn $(2)\Leftrightarrow M(u;v)$ thuộc phần đường tròn $(C):u^2+v^2=2a$ chứa trong tam giác OAB. Do đó

□ Nếu $\sqrt{2a}>2\Leftrightarrow a>2$: Bất phương trình (1) vô nghiệm.

□ Nếu $\sqrt{2a}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow 0\le a\le 1$: Bất phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn $0\le u=\sqrt{a+\sqrt{x}}\le\sqrt{2a}$ $\Leftrightarrow 0\le a+\sqrt{x}\le 2a\Leftrightarrow 0\le x\le a^2$.

□ Nếu $\sqrt{2}<\sqrt{2a}\le 2 \Leftrightarrow 1<a\le 2$: Bất phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} 0\le u=\sqrt{a+\sqrt{x}}\le u_1 \\ u_2\le u=\sqrt{a+\sqrt{x}}\le\sqrt{2a} \end{array}\right.$.

(với $u_1;u_2$ $(u_1<u_2)$ là các nghiệm của phương trình $u^2+(2-u)^2=2a$. (Đã khử v)).

Giải phương trình $u^2+(2-u)^2=2a$

Có $\left[\begin{array}{l} u_1=1-\sqrt{a-1} \\ u_2=1+\sqrt{a-1} \end{array}\right.$ vì vậy $\left[\begin{array}{l} 0\le\sqrt{a+\sqrt{x}}\le u_1=1-\sqrt{a-1} \\ u_2=1+\sqrt{a-1}\le\sqrt{a+\sqrt{x}}\le\sqrt{2a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+\sqrt{x}\le a-2\sqrt{a-1} \\ u_2=1+\sqrt{a-1}\le\sqrt{a+\sqrt{x}}\le\sqrt{2a} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+\sqrt{x}\le a-2\sqrt{a-1} \\ a+2\sqrt{a-1}\le a+\sqrt{x}\le 2a \end{array}\right. \Leftrightarrow 4(a-1)\le x\le a^2$.

Vậy

□ $\left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>2 \end{array}\right.$: Bất phương trình (1) vô nghiệm.

□ $0\le a\le 1$: Bất phương trình (1) có nghiệm $0\le x\le a^2$

□ $1<a\le 2$: Bất phương trình (1) có nghiệm $4(a-1)\le x\le a^2$

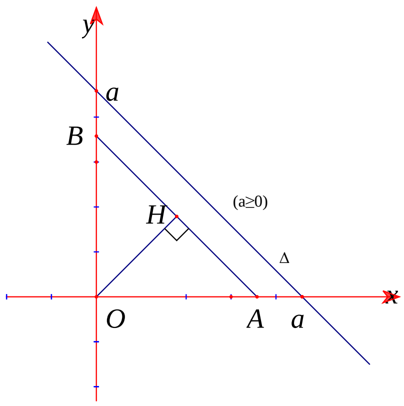
Bài 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a \\ x+y-\sqrt{xy}=a \end{cases}$ (1) với a là tham số

a)Xác định a để hệ có nghiệm.
b)Giải và biện luận theo a.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x}, u\ge 0 \\ y=\sqrt{y}, v\ge 0 \end{cases}$ khi đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ u^2+v^2-uv=a \\ u,v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a & (\Delta) \\ u^2+v^2=\dfrac{2a+a^2}{3} & (C) \\ u,v\ge 0 \end{cases}$ (2).

(vì $uv=\dfrac{(u+v)^2-(u^2+v^2)}{2}=\dfrac{a^2-(u^2+v^2)}{2}$).



Vì vậy hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ OH \leq d(O,\Delta) \leq R \end{cases}$ (với $R=\sqrt{\dfrac{2a+a^2}{3}}$ là bán kính của đường tròn $(C)) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{R}}{2} \leq \dfrac{a}{\sqrt{2}} \leq R \\ a \geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 \leq a^2 \leq 2R^2 \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+a^2 \leq 3a^2 \leq 2(2a+a^2) \\ a \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ 2+a \leq 3a \leq 4+2a \end{cases} \\ a=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ \begin{cases} a>0 \\ 1 \leq a \leq 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ 1 \leq a \leq 4 \end{array}\right..$$

b) Theo kết quả câu (a)

□Khi $a=0$: Hệ (2) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

□Khi $1 \leq a \leq 4$: Ta có $u^2+(a-u)^2=\dfrac{2a+a^2}{3}$ (Đã khử v).

$\Leftrightarrow 6u^2-6au+3a^2=2a+3a^2 \Leftrightarrow 3u^2-3au+a^2-a=0$

$\Leftrightarrow u_{1,2}=\dfrac{3a \pm \sqrt{12a-3a^2}}{6}$ và $v_{1,2}=a-u_{1,2}=u_{2,1}$.

Vậy khi $a=0$ hệ (1) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

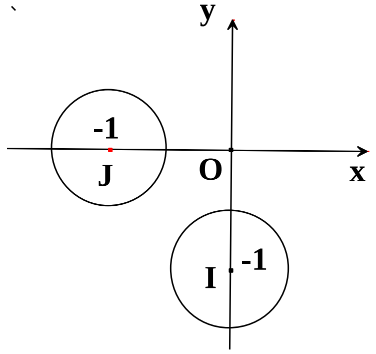
Khi $1 \leq a \leq 4$ hệ (1) có hai nghiệm $\begin{cases} x=u_{1,2}^2 \\ y=u_{2,1}^2 \end{cases}$.

Khi $\begin{cases} a>4 \\ 0 \neq a<1 \end{cases}$ hệ (1) vô nghiệm.

Bài 5: Xác định k để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x^2+(y+1)^2 \leq k & (1) \\ y^2+(x+1)^2 \leq k & (2) \end{cases}$

Lời giải

`



Với $k \leq 0$: Dễ thấy rằng hệ đã cho vô nghiệm, vì vậy ta chỉ xét trường hợp $k<0$ Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

□Xác định hình tròng C_1 tâm $I\;\; 0;-1$ có bán kính $R_1=\sqrt{k}$

□Xác định hình tròn C_2 tâm $J\;\; -1;0$ có bán kính $R_2=\sqrt{k}$

Do đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ C_1 và C_2 tiếp xúc ngoài với nhau

$$\Leftrightarrow R_1+R_2=IJ \Leftrightarrow 2\sqrt{k}=\sqrt{2} \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$$

XII. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

Bài 1. **[Lượng giác hóa]** Giải phương trình $x^3-3x=\sqrt{x+2}$

Lời giải

Điều kiện $x\ge -2$

Nếu $x>2$ ta có $x^3-3x=x+x\left(x^2-4\right)>x>\sqrt{x+2}$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Nếu $-2\le x\le 2$

Đặt $x=2\cos\alpha\ \left(0\le\alpha\le\pi\right)$. Khi đó

$$8\cos^3\alpha-6\cos\alpha=\sqrt{2\cos\alpha+2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3\alpha=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow \cos 3\alpha=\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{k4\pi}{5}\\ \alpha=\dfrac{k4\pi}{7}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Do $0\le\alpha\le\pi$ nên $\alpha=0;\ \alpha=\dfrac{4\pi}{5};\alpha=\dfrac{4\pi}{7}\Rightarrow x=0;x=2\cos\dfrac{4\pi}{5};x=2\cos\dfrac{4\pi}{7}$

Bài 2: Định m để bất phương trình sau có nghiệm $\cos x+\sqrt{2-\cos^2 x}+\cos x.\sqrt{2-\cos^2 x}=m$.

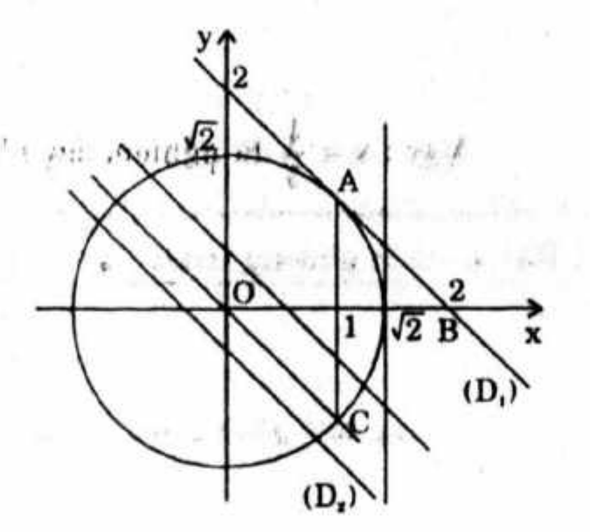
Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{2-\cos^2 x}\\ v=\cos x\end{cases}$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}u+v+uv=m\\ u^2+v^2=2\\ 1\le u\le\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=2\\ u+v+\dfrac{(u+v)^2-\left(u^2+v^2\right)}{2}=m\\ 1\le u\le\sqrt{2}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=2\\ u+v+\dfrac{(u+v)^2-2}{2}=m\\ 1\le u\le\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=2\\ (u+v)^2+2(u+v)-2(m+1)=0\\ 1\le u\le\sqrt{2}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u^2+v^2=2(C) \\ u+v=-1+\sqrt{2m+3}\left(D_1\right) \\ 1\le u\le\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} u^2+v^2=2(C) \\ u+v=-1-\sqrt{2m+3}\left(D_2\right) \\ 1\le u\le\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$



Rõ ràng $(D2)$ không cắt cung ABC.

Do đó phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow (D1)$ cắt cung ABC.

$\Leftrightarrow 0\le -1+\sqrt{2m+3}\le 2$.

$\Leftrightarrow 1\le \sqrt{2m+3}\le 3$.

$\Leftrightarrow -1\le m\le 3$.

XI. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ CÓ THAM SỐ

1. Phương pháp chung

a. Bài toán 1. Tìm m để phương trình $f(x;m)=0$ có nghiệm trên D ?

- Bước 1. Độc lập (tách) m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x)=A(m)$.
- Bước 2. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.
- Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định giá trị của tham số m để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- Bước 4. Kết luận những giá trị cần tìm của m để phương trình $f(x)=A(m)$ có nghiệm trên D.

Lưu ý:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có GTLN và GTNN trên D thì giá trị m cần tìm là những m thỏa mãn:

$\boxed{\min_D f(x)\le A(m)\le \max_D f(x)}$.

- Nếu bài toán yêu cầu tìm tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

b. Bài toán 2. Tìm m để bất phương trình $f(x;m) \geq 0$ hoặc $f(x;m) \leq 0$ có nghiệm trên D

- Bước 1. Độc lập (tách) m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x) \geq A(m)$ hoặc $f(x) \leq A(m)$.
- Bước 2. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.
- Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm:
  + Với bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ đó là những m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm trên đường thẳng $y = A(m)$, tức là $\boxed{A(m) \leq \max\limits_D f(x)}$ $\left(khi\ \max\limits_D f(x)\ \exists\right)$.
  + Với bất phương trình $f(x) \leq A(m)$ đó là những m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm dưới đường thẳng $y = A(m)$, tức là $\boxed{A(m) \geq \min\limits_D f(x)}$ $\left(khi\ \min\limits_D f(x)\ \exists\right)$.

c. Bài toán 3. Tìm tham số m để bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ hoặc $f(x) \leq A(m)$ nghiệm đúng $\forall x \in D$?

- Bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ nghiệm đúng $\boxed{\forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_D f(x) \geq A(m)}$.
- Bất phương trình $f(x) \leq A(m)$ nghiệm đúng $\boxed{\forall x \in D \Leftrightarrow \max\limits_D f(x) \leq A(m)}$.

Lưu ý:

- Các bài toán liên quan hệ phương trình, hệ bất phương trình $\longrightarrow$ ta cần biến đổi chuyển về các phương trình và bất phương trình.
- Khi đổi biến, cần quan tâm đến điều kiện của biến mới.

2. Các ví dụ

Bài 1: Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt : $2\sqrt{x+1} = x + m$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -1$

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{x+1} - x = m$

Xét hàm số $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 = \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-	
$f(x)$		1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt khi $1 \leq m < 2$.

Bài 2: Tìm m để phương trình $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=m$ có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}, \forall x\neq \pm 1$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}=0$$

Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\parallel$	+	0	-	$\parallel$	-	
$f(x)$		0 ↗			2			↘	0

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $0<m\leq 2$.

Bài 3: Chứng minh rằng $\forall m>0$, phương trình sau luôn có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$ ***(K B -2007)***

Lời giải

Do $m>0$ nên $x\geq 2$

(1) $\Leftrightarrow (x-2)(x+4)=\sqrt{m(x-2)} \Leftrightarrow \left[(x-2)(x+4)\right]^2=m(x-2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x-2)(x+4)^2-m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3+6x^2-32-m=0(*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu Bài quy về chứng minh phương trình (*) có một nghiệm trong $(2;+\infty)$

Biến đổi (*) $\Leftrightarrow m=x^3+6x^2-32$.

Xét hàm số $f(x)=x^3+6x^2-32$ với $x>2$.

Ta có $f'(x)=3x^2+12x\geq 0, \forall x>2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\forall m>0$ phương trình (*) có đúng một nghiệm $x>2$.

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\forall m>0$.

Nhận xét: *Sau khi tìm được điều kiện* $x \geq 2$ *việc khảo sát hàm số* $f(x)$ *ở trên là rất dễ dàng chủ yếu là dùng đạo hàm tuy nhiên dùng định nghĩa cũng suy ra tính đồng biến của hàm số* $f(x)$.

Bài 4: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}=m \quad \text{trên} \left[\frac{-1}{2};1\right]$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ trên $\left[\frac{-1}{2};1\right]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-3x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}=-x\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right)$

Xét hàm số $g(x)=x^3+2x^2+1$ trên $\left[\frac{-1}{2};1\right]$. Ta có $g'(x)=3x^2+4x=0 \Leftrightarrow x=0$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x) \geq 1, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$

và $\forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$ ta có $3(-\frac{1}{2})+4 \leq 3x+4 \leq 3.1+4 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq 3x+4 \leq 7$.

Suy ra $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}>0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$

Do đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $-4 \leq m < \dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$ hoặc $m=1$.

Nhận xét :

Việc sử dụng kỹ năng biến đổi từ $\dfrac{-3x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}=-x\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right)$ *là khâu quyết định đến việc xét dấu của đạo hàm, mở đường cho việc sử dụng tính chất của hàm số* .

Bài 5: Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m \quad (K_A-2008).$$

Lời giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 6$

Xét hàm số $f'(x)=\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}$ trên $[0;6]$. Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right]+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)^3\right]+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\left[\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt[4]{2x(6-x)}}+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right]$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}=0\Rightarrow x=2$$

Lập bảng biến thiên:

x	0		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	
	$f(0)$				$f(6)$

với $f(0)=2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6};\ f(2)=6+3\sqrt{2};\ f(6)=2\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cần tìm của m là: $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m<6+3\sqrt{2}$.

Đối với một số Bài không sử dụng được phương pháp hàm số trực tiếp mà phải sau quá trình biến đổi như đặt ẩn phụ thích hợp mới sử dụng được phương pháp hàm số .Ta xét Bài sau :

Bài 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2+3x+1=m\sqrt{x^4+x^2+1}$ có nghiệm dương?

A. 1. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 27.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định của phương trình: $D=(0;+\infty)$.

Ta có: $x^2+3x+1=m\sqrt{x^4+x^2+1}\Leftrightarrow 2\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=m\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-1=m\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\ (1)$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}=\sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}}=\sqrt{1+\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}-1}}$

Do $x>0$ nên $\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}}>1\\ x+\dfrac{1}{x}\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}}>1\\ \sqrt{1+\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}-1}}\le\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow t\in\left(1;\sqrt{3}\right]$

Khi đó phương trình (1) trở thành phương trình $2t^2-mt-1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2t^2-1}{t}=2t-\dfrac{1}{t}(2)$

Để phương trình đã cho có nghiệm dương thì phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(1;\sqrt{3}\right]$

Xét hàm số: $y=2t-\dfrac{1}{t};t\in\left(1;\sqrt{3}\right]$

Với $t_1;t_2 \in \left(1;\sqrt{3}\right];t_1 \ne t_2$ xét tỉ số $\dfrac{\left(2t_2-\dfrac{1}{t_2}\right)-\left(2t_1-\dfrac{1}{t_1}\right)}{t_2-t_1}=\dfrac{2\left(t_2-t_1\right)+\left(\dfrac{t_2-t_1}{t_1.t_2}\right)}{t_2-t_1}=2+\dfrac{1}{t_1.t_2}>0$

Suy ra hàm số $y=2t-\dfrac{1}{t}$ đồng biến trên nửa khoảng $\left(1;\sqrt{3}\right]\Rightarrow y\left(1\right)<2t-\dfrac{1}{t}\le y\left(\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow 1<2t-\dfrac{1}{t}\le\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow 1<m\le\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

Do m là số nguyên nên có duy nhất 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7: Tìm số các giai trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$(\sqrt{x^2+m}-x)^3+(\sqrt{x^2+m}+x)^3+6\left(m-1\right)\sqrt{x^2+m}+4x^2-6+4m=0$ có nghiệm.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+m}-x \\ b=\sqrt{x^2+m}+x \end{cases}\left(a>0,b>0\right)\Rightarrow\begin{cases} a+b=2\sqrt{x^2+m}\Rightarrow(a+b)^2=4x^2+4m \\ ab=(\sqrt{x^2+m}-x)(\sqrt{x^2+m}+x)=m \end{cases}$

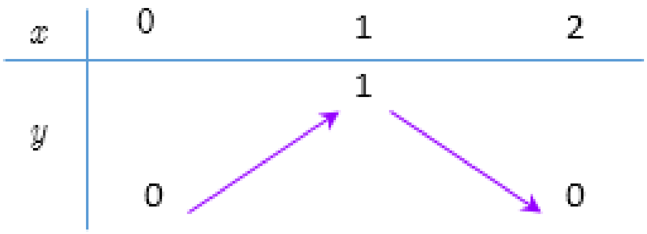
Kết hợp với $(*)$, được hệ phương trình:

$$\begin{cases} ab=m \\ a^3+b^3+3\left(ab-1\right)\left(a+b\right)+(a+b)^2-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} ab=m \\ (a+b)^3+(a+b)^2-3(a+b)-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=2 \\ ab=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2-a \\ a\left(2-a\right)=m \end{cases}\Rightarrow -a^2+2a=m$$

Xét hàm $y=f\left(a\right)=-a^2+2a$ với $0<a<2$ có bảng biến thiên



Vậy $0<m\le 1$ suy ra $m=1$.

Bài 8: Biết rằng phương trình $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$ có nghiệm khi và chỉ khi $a\ge-\dfrac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T=n+m$.

A. $T=2$. **B.** $T=5$. **C.** $T=-3$. **D.** $T=1$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ a+\sqrt{x}\ge 0 \end{cases}$.

Đặt $y = a + \sqrt{x} \geq 0$

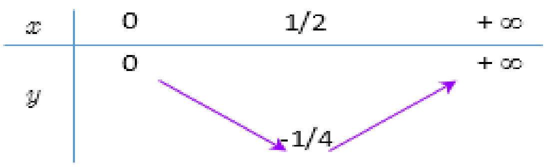
Suy ra: $\begin{cases} x = a + \sqrt{y} \\ y = a + \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x - y + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y$

Nên $x - \sqrt{x} = a$. (Dễ thấy với $x \geq 0$ thì $a + \sqrt{x} \geq 0$).

Đặt $t = \sqrt{x}\,(t \geq 0)$ phương trình đưa về: $t^2 - t = a$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t$ với $t \geq 0$ có bảng biến thiên:



Suy ra $a \geq -\dfrac{1}{4} \Rightarrow T = 5$.

Bài 9: Cho phương trình $m\sqrt{x+1} = -3\sqrt{x-1} + 2\sqrt[4]{x^2-1}$, biết rằng tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm là nửa khoảng $(a;b]$. Tính giá trị biểu thức $S = a^3 + b^3$.

A. $\dfrac{28}{27}$. **B.** $-\dfrac{26}{27}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

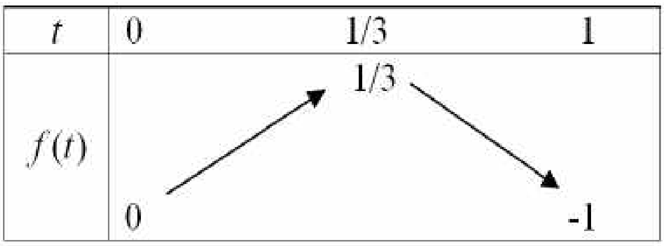
Điều kiện $x \geq 1$, Chia hai vế cho $\sqrt{x+1}$ ta được pt:

$m = -3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \dfrac{2}{x+1}}$

Do $x + 1 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{2}{x+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \dfrac{2}{x+1} < 1 \Rightarrow 0 \leq t < 1$

Ta có phương trình $m = -3t^2 + 2t \quad (*)$.

Bảng biến thiên của hàm $f(t) = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$



Theo bảng biến thiên thì (*) có nghiệm thuộc [0; 1) $\Leftrightarrow -1 < m \leq 1/3$.

Bài 10: Cho phương trình: $m\sqrt{x^2+2} = x + m \quad (1)$ biết rằng tập hợp các tham số thực m để có đúng ba nghiệm thực phân biệt là $(a;b)$. Tính giá trị $a + b$

A. 0 **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{\ }$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow m\sqrt{x^2+2} - m = x \Leftrightarrow m = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-1} = f(x);\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+2}-1\right) - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{2-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}};\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = 2 \Leftrightarrow x^2+2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số có ba nghiệm thực phân biệt thì: $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

Vậy $a+b=0$

XIV. TRẮC NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

TN 1.1: Tổng các nghiệm của phương trình: $2(x^2-x+6) = 5\sqrt{x^3+8}$ là

A. -6. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -3.

Phân tích. Khác với hai ví dụ trên, biểu thức trong căn thức là bậc 3, ta vẫn giải theo công thức $\sqrt{A} = B$, để thu được phương trình bậc bốn. Lúc đó với sự hỗ trợ của máy tính casio, ta sẽ phân tích được thành tích số dạng bậc 2 nhân bậc 2.

Lời giải

Đáp án: C

Điều kiện: $x^3+8 \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2.$

$2(x^2-x+6) = 5\sqrt{x^3+8}$

$(\Leftrightarrow 8.(x^2-x+6)^2 = 25(x^3+8) \Leftrightarrow 8x^4 - 41x^3 + 104x^2 - 96x + 88 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-6x-4)(8x^2-18x+28) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x-4=0 \\ 8x^2-18x+28=0 : VN \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 3 \pm \sqrt{13}.$

TN 1.2: Số nghiệm của phương trình $2x^2-6x-1 = \sqrt{4x+5}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Đáp án: C

Điều kiện xác định: $x \ge -\dfrac{5}{4}$.

Ta có: $2x^2-6x-1 = \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \left(2x^2-6x-1\right)^2 = 4x+5$

$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$

Sử dụng máy tính Casio ta thu được: $\begin{cases} x_1 \approx 2.414213562 \\ x_2 \approx -0.414213562 \\ x_3 \approx 3.732050808 \\ x_4 \approx 0.2679491924 \end{cases}$

Tư duy Viet đảo: $x_1 + x_2 \approx 2, x_1x_2 \approx -1$

Nhân tử thu được: $x^2 - 2\text{x} - 1$

Vậy: $\left(x^2 - 2x - 1\right)\left(x^2 - 4x + 1\right) = 0$

Trường hợp 1: Với $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có $x = 1 - \sqrt{2}$.

Trường hợp 2: Với $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Kết hợp điều kiện ta có $x = 2 + \sqrt{3}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 2 + \sqrt{3}$ và $x = 1 - \sqrt{2}$.

TN 1.3: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$ là

A. $10 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. **B.** $10 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. **C.** $8 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. **D.** $12 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ **Lời giải**

Đáp án: B

Lũy thừa sau khi sử dụng casio tìm được nhân tử $x^2 - 2x - 1$.

$2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geq 0 \\ (2x^2 - 6x - 1)^2 = 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geq 0 \\ x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geq 0 \\ (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3+\sqrt{11}}{2} \vee x \leq \dfrac{3-\sqrt{11}}{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \vee x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết luận: Tổng bình phương các nghiệm là: $\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 10 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

TN 1.4: Nghiệm nhỏ nhất phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với $a, b.c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c$ có kết quả là

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Đáp án: A

Lũy thừa sau khi sử dụng casio tìm được nhân tử $x^2 - 8x + 10$.

$2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 1 \geq 0 \\ (2x^2 + 5x - 1)^2 = 49(x^3 - 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 1 \geq 0 \\ 4x^4 - 29x^3 + 21x^2 - 10x + 50 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 1 \geq 0 \\ (4x^2 + 3x + 5) \cdot (x^2 - 8x + 10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 + \sqrt{6} \\ x = 4 - \sqrt{6} \end{array}\right.$.

Kết luận: Nghiệm nhỏ của phương trình là $x = 4 - \sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 11$

TN 1.5: Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x^2-4x+1}$ có dạng $a-b\sqrt{c}$ với $a,b.c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c$ có kết quả là

A. $\dfrac{2-\sqrt{33}}{3}$. **B.** $\dfrac{2-\sqrt{33}}{4}$. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$. **D.** $\dfrac{1-\sqrt{33}}{4}$

Lời giải

Đáp án: D

Điều kiện: $\begin{cases}2x^2-3x+1\ge 0\\ x^2+x-2\ge 0\\ 3x^2-4x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -2\\ x\ge 1\end{array}\right.$.

$$(*)\Leftrightarrow 3x^2-2x-1+2\sqrt{(x-1)^2(2x-1)(x+2)}=3x^2-4x+1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2(2x-1)(x+2)}=1-x\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\ge 0\\ (x-1)^2(2x-1)(x+2)=(x-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\ (x-1)^2\cdot(2x^2+3x-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=\frac{-3-\sqrt{33}}{4}.$$

Kết luận: Tổng các nghiệm phương trình là $1+\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}=\dfrac{1-\sqrt{33}}{4}$

TN 1.6: Nghiệm phương trình $x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1$ có dạng $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{2}$ với $a,b.c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c$ có kết quả là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện xác định: $x\ge -1$.

Ta có: $x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2-1=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}\Rightarrow\left(x^3+x^2-1\right)^2=\left(x^2+1\right)^2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^6+x^5-4x^3-4x^2-x=0\Leftrightarrow x\left(x^5+x^4-4x^2-4x-1\right)=0\ (*)$$

Sử dụng máy tính Casio ta thu được: $\begin{cases}x_1\approx -0.430159709\\ x_2\approx 1.618033989\\ x_3\approx -0.618033988\end{cases}$

Tư duy Viet đảo: $x_2+x_3=1.0000000001\approx 1, x_2x_3=-0.99999999989\approx -1$

Nhân tử thu được: x^2-x-1

Do đó (*) $\Leftrightarrow x\left(x^2-x-1\right)\left(x^3+2x^2+3x+1\right)=0$ (**)

Điều kiện có nghiệm của phương trình:

$$x^3+x^2-1\ge 0\Rightarrow x^3+x^2-\frac{3}{8}>0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)>0\Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

Vì $x>\dfrac{1}{2}>0\Rightarrow x^3+2x^2+3x+1>0$. Do đó (**) $\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta thấy chỉ có nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=5\end{cases}\Rightarrow a+b+c=7$.

TN 1.7: Tổng bình phương các nghiệm phương trình $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{4-x}$ gần nhất với giá trị nào sau đây

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện $x\le 4$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2+x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2+x+1}\ge 0\\4+x=2\sqrt{(4-x)(x^2+x+1)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-3\le 0\\4x^3-11x^2-4x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\\left[\begin{array}{l}x=0\\4x^2-11x-4=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{11-\sqrt{185}}{8}\end{array}\right.$$

- Kết luận. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình là $\left(\dfrac{11-\sqrt{185}}{8}\right)^2\approx 0.1057445$.

Nhận xét.

- Trường hợp: $a_1+a_3=a_2$ (ví dụ 2) ở trong dạng toán này việc sử dụng hệ điều kiện để biến đổi giúp chúng ta vừa sử dụng được phép biến đổi tương đương cũng vừa sử dụng được phép biến đổi hệ quả.

- Đặc thù của dạng toán này là việc tìm điều kiện $\sqrt{a_3x^2+b_3x+c_3}-\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}\ge 0$ tương đối đơn giản. Nếu trong trường hợp việc tìm điều kiện này là khó khăn, chúng ta hãy ưu tiên cho việc sử dụng phép biến đổi hệ quả.

TN 1.8: Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+11}\ge\sqrt{x-4}+\sqrt{2x-1}$ có là $S=[a,b]$. Khi đó $a+b$ là

A. 6. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Đáp án: D

Điều kiện: $\begin{cases}x+11\ge 0\\x-4\ge 0\\2x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -11\\x\ge 4\\x\ge 0,5\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 4$.

$$\sqrt{x+11}\ge\sqrt{x-4}+\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+11\ge 3x-5+2\sqrt{(x-4)(2x-1)}\Leftrightarrow\sqrt{(x-4)(2x-1)}\le 8-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-8\ge 0\\(x-4)(2x-1)\le(8-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 8\\x^2+7x-60\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -12\le x\le 5.$$

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $S=[4;5]$.

Vậy $\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}\Rightarrow a+b=9$

TN 1.9: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\ge\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$ $(*)$ có là $S=[a,b]\cup\{c\}$. Khi đó $a+b+c$ là

A. -1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Đáp án: D

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{12+x-x^2}\left(\frac{1}{x-11}-\frac{1}{2x-9}\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{12+x-x^2}=0\\ \begin{cases}\sqrt{12+x-x^2}>0\\ \dfrac{1}{x-11}-\dfrac{1}{2x-9}\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\vee x=4\\ \begin{cases}-3<x<4\\ x\ge -2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ -2\le x\le 4\end{array}\right..$$

Vậy: $S=[-2,4]\cup\{-3\}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=4\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-1$

__Lưu ý__: Thông thường thì ta quên đi trường hợp $\sqrt{12+x-x^2}=0,$ và đây là sai lầm thường gặp của học sinh.

TN 2.1: Cho phương trình $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12.$ Số nghiệm của phương trình là

A. 0. **B.** 2. __**C.**__ 1. **D.** 3.

- Phân tích.

- Trước hết ta nhận định phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$ Nếu ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp một cách thông thường, dấu trước các biểu thức là ngược nhau nên có thể dẫn đến việc phải kết hợp với phương pháp đánh giá. Ta sẽ tìm cách khắc phục vấn đề này bằng cách tìm nhóm các biểu thức với sao cho phương trình được đưa về dạng $(x-2).f(x)=0,$ trong đó: $f(x)>0,\forall x\ge -2.$

- Để ý rằng, với điều kiện: $x\ge -2$ thì ta chưa khẳng định được dấu của nhị thức $(x+1)$ vì vậy khi thực hiện phép nhân liên hợp đối với $(x+1)\sqrt{x+2},$ ta cần tạo ra nhân tử: $(x+1)^2(x-2)$ hay ta cần tìm m, n sao cho:

$mx+n-\sqrt{x-2}=0$ khi $x=-1;\ x=2,$ tức ta có hệ: $\begin{cases}-m+n=1\\ 2m+n=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{3}\\ n=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Từ đó nhân cả hai vế của phương trình với 3 cho ta:

$3x^2+21x+36-3(x+1)\sqrt{x+2}-3(x+6)\sqrt{x+7}=0$

Tiến hành việc nhóm nhân tử cho biểu thức $3(x+1)\sqrt{x+2},$ ta sẽ được:

$(x+1)\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+2x^2+16x+32-3(x+6)\sqrt{x+7}=0$

Đối với $(x+6)\sqrt{x+7}$ thì do $x+6\ge 0,\forall x\ge -2$ nên ta sẽ nhóm như sau

$(x+1)\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+(x+6)\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}-3\right)+x^2+3x-10=0$

Lời giải

Đáp án: C

Điều kiện $x\ge -2.$ Phương trình đã cho tương đương với:

$(x+1)\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+(x+6)\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}-3\right)+x^2+3x-10=0.$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2(x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+(x+6)\sqrt{x+7}.\frac{(x-2)}{\sqrt{x+7}+3}+(x-2)(x+5)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+(x+5)\right]=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Do $\dfrac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\dfrac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+(x+5)>0, \forall x\geq -2.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2.$

TN 2.2: Cho phương trình $\sqrt{2x^2-x+3}+x^2-x=\sqrt{21x-17}$. Số nghiệm của phương trình là

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

- Phân tích.

Ta nhận đoán được rằng phương trình có hai nghiệm $x=1;\ x=2$. Do vậy phương trình này sẽ có nhân tử $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ khi ta có ý định sử dụng lượng liên hợp để giải bài toán. Điều quan tâm là cách tách - nhóm các đại lượng có trong phương trình.

Giả sử ta sẽ nhóm $\left(\sqrt{2x^2-x+3}-(a_1x+b_1)\right)+\left((a_2x+b_2)-\sqrt{21x-17}\right)$. Thay các giá trị $x=1;\ x=2$ vào các đẳng thức $\begin{cases}\sqrt{2x^2-x+3}-(a_1x+b_1)=0\\(a_2x+b_2)-\sqrt{21x-17}=0\end{cases}$, ta sẽ tìm được $\begin{cases}2-a_1-b_1=0\\3-2a_1-b_1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1=1\\b_1=1\end{cases};\ \begin{cases}a_2+b_2-2=0\\2a_2+b_2-5=0\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases}a_2=3\\b_2=-1\end{cases}.$

Lời giải

Đáp án: B

Điều kiện $x\geq \dfrac{17}{21}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt{2x^2-x+3}-x-1\right)+\left(3x-1-\sqrt{21x-17}\right)+x^2-3x+2=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9(x^2-3x+2)}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+x^2-3x+2=0.$$

$$(x^2-3x+2)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\dfrac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1>0, \forall x\geq \dfrac{17}{21}.$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{1;2\}$.

TN 2.3: Cho phương trình $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$. Giả sử phương trình có nghiệm dương dạng $x=a-\sqrt{\dfrac{b}{c}}$. trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$

A. 49. **B.** 47. **C.** 30. **D.** 15.

Phân tích. Ta nhận thấy $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)=x,$ tuy nhiên kh sử dụng phép nhân thêm lượng liên hợp ta phải chia thành các trường hợp $\sqrt{1+x}-1=0$ và $\sqrt{1+x}-1\neq 0$. Để tránh những vấn đề vấn đề phức tạp đó nảy sinh, ta có thể xử lý như sau:

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện $x\geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}.$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-1+\sqrt{x}=0 & (1) \\ \sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}+x-1-\sqrt{x}=0 & (2) \end{array}\right.$

Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$

$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)+\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\right)=0\,(*)$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+x-1\ge\sqrt{(x-1)^2}+(x-1)\ge(1-x)+(x-1)=0 \\ \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\ge\sqrt{x}-\sqrt{x}=0 \end{cases}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x=0.$

- Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};0\right\}.$

TN 2.4: Cho phương trình $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=2$. Một nghiệm dương của phương trình có dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$.

Tính tổng $S=a^2-b$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=-5$ **Lời giải**

Đáp án: C

Bước 1. Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ -1\le x<0 \end{array}\right.$.

Bước 2. Ta tìm được nhân tử $\left(x^2-x-1\right)$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)+\left(\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-1\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-1}{\sqrt{x^2-x}+1}+\dfrac{x^2-x-1}{x\left(\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+1\right)}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}+1}+\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+1\right)}\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0 \\ x\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right)+\sqrt{x^2-x}+1=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Bước 3. Trường hợp. $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bước 4. Trường hợp. $x\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right)+\sqrt{x^2-x}+1=0 \ (*)$.

Hướng xử lý 1. **(Sử dụng phương trình hệ quả)**

Thay $\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1=\sqrt{x^2-x}-1$ từ phương trình ban đầu vào phương trình (*) cho ta phương trình hệ quả.

$$x\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)+\left(\sqrt{x^2-x}+1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x\left(x^2-x-1\right)}{\sqrt{x^2-x}+1}+\left(\sqrt{x^2-x}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-x-1\right)+\left(\sqrt{x^2-x}+1\right)^2=0 \Leftrightarrow x^3-2x+1+2\sqrt{x^2-x}=0$$

Với điều kiện $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ -1\le x<0 \end{array}\right.$ thì $x^3-2x+1>0$ hay phương trình hệ quả $x^3-2x+1+2\sqrt{x^2-x}=0$ vô nghiệm, suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Hướng xử lý 2. **(Sử dụng đánh giá trực tiếp trên phương trình)**

+ Nếu $x\ge 1$, phương trình (*) tương đương với $\sqrt{x(x-1)}+x+1+\sqrt{x(x-1)}=0 \ (a)$.

Với $x\ge 1 \Rightarrow VT(a)>0$, tức (a) vô nghiệm.

+ Nếu $-1\le x<0$, phương trình (*) tương đương với

$$(x+1)+\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^3-x}\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)+\frac{x^2(1-x)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^3-x}}=0 \ (b)$$

Với $-1\le x<0 \Rightarrow VT(b)>0$, tức phương trình (b) vô nghiệm.

Từ đó suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

TN 2.5: Cho phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1$. Số nghiệm của phương trình là.

A. 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Đáp án: D

- Phân tích. Nhận thấy

$$\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)=\left(x^2+x-2\right)-(x-1)=x^2-1$$

từ đó ta có lời giải sau:

Điều kiện $x\ge 1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1\right)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0 & (1) \\ \sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1=0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

$(2) \Leftrightarrow x^2-2=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\sqrt{2} \\ x^4-4x^2-4x+8=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\sqrt{2} \\ (x-2)(x^3+2x^2-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Do: $x^3+2x^2-4\ge 2\sqrt{2}+4-4>0, \forall x\ge\sqrt{2}$

- Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $T=\{1;2\}$.

TN 2.6: Cho phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x-3}+3x=2$. Biết một nghiệm của phương trình là $x=a+\dfrac{b}{c}$, trong đó a, b, c là các số nguyên và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính tổng $S=3a+2b+c$.

A. 10. **B.** 7. **C.** -7. **D.** -10.

Phân tích.

Nhận thấy $(x+1)+(2x-3)=3x-2$ và không có giá trị nào của $x\in\mathbb{R}$ làm cho các biểu thức $\sqrt[3]{x+1}$, $\sqrt[3]{2x-3}$ đồng thời bằng 0. Nên ta có thể thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(3x-2)$.

Lời giải

Đáp án: B

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{3x-2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(2x-3)}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}}+3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(2x-3)}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}}+1\right)=0 \quad \Leftrightarrow 3x-2=0 \quad \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

Do $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(2x-3)}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}}+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$

Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}\Rightarrow 3a+2b+c=7$.

TN 2.7: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+5x+5}+x^2=\sqrt{x+2}-3x-2$. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

- **Phân tích.** Nhận thấy $(x^2+5x+5)-(x+2)=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ và $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ đồng thời: $\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}\ne 0$ nên ta có thể thực hiện phép biến đổi: $\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}=\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}$ để làm xuất hiện nhân tử $(x+1)$.

Lời giải

Đáp án: B

Điều kiện $x\ge\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với: $\left(\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}\right)+x^2+3x+2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x^2+3x+2=0 \quad \Leftrightarrow (x+1)\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x+2\right)=0 \quad \Leftrightarrow x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ *Do* $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x+2>0, \forall x\ge\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-1$.

TN 2.8: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+x^2=\sqrt{2(x-1)}+1$. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

- **Phân tích.** Nhận thấy $(x^2+x-2)-(2x-2)=x^2-x=x(x-1)$ vaø $x^2-1=(x-1)(x+1)$, như vậy khi chúng ta thực hiện phép nhân liên hợp sẽ xuất hiện nhân tử: $(x-1)$. Tuy nhiên khi $x=1$, biểu thức $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}=0$ do đó biến đổi $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2(x-1)}=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}$ là một phép biến đổi không có nghĩa. Vì vậy trước khi thực hiện phép nhân liên hợp ta cần chú ý đến biểu thức liên hợp đã khác 0 hay chưa. Để xử lý các dạng toán này ta có thể chia ra các trường hợp của x làm cho $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=0$ và trường hợp $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\neq 0$. Cụ thể, với bài toán này ta có thể xử lý như sau:

Lời giải

Đáp án: C

Điều kiện $x\geq 1$.

+ Nhận thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

+ Với $x>1$, phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2(x-1)}+x^2-1=0 \qquad \Leftrightarrow \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}+(x-1)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}+x+1\right)=0(*)$$

Khi $x>1$ thì $x-1>0$ và $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}+x+1>0$ nên phương trình (*) không có nghiệm $x>1$.

- Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

TN 2.9: Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$ ta được nghiệm có dạng $x=a\pm\sqrt{b}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính tổng $S=a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đáp án: B

Vì $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình tương $\sqrt{x^2-2x+3}=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3}-(x-1)=\frac{x^2+1}{x+1}-(x-1) \;\Leftrightarrow \frac{2}{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x-1\right)}=\frac{2}{x+1} \;\Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \;\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow a=1,\ b=2$. Vậy $S=3$.

Nhận xét:

Vấn đề dặt ra là làm sao nhận ra được để điền số $x-1$ vào hai vế.

Ý tưởng xuất phát từ việc tàm ra số α và β sao cho $\sqrt{x^2-2x+3}-(\alpha x+\beta)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-(\alpha x+\beta)$ với $\alpha>0$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3-(\alpha x+\beta)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+\alpha x+\beta}=\frac{x^2+1-(\alpha x+\beta)(x+1)}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\alpha^2)x^2-2(1+\alpha.\beta)x+(3-\beta^2)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\alpha x+\beta}=\frac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x+1-\beta}{x+1}$$

Đến đây, ta chỉ việc xác định α, β sao cho: $\begin{cases} 1-\alpha^2 = 1-\alpha \\ 2+2\alpha.\beta = \alpha+\beta \\ 3-\beta^2 = 1-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1,\ \beta = -1$.

TN 2.10: Cho phương trình $\sqrt[3]{x^2+3x+1}+x^2=\sqrt[3]{5x+1}+2x$. Số nghiệm của phương trình là

A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 4

- Phân tích. Nhận thấy $(x^2+3x+1)-(5x+1)=x^2-2x$ và không có giá trị nào của $x\in\mathbb{R}$ làm cho các biểu thức $\sqrt[3]{x^2+3x+1}$, $\sqrt[3]{5x+1}$ đồng thời bằng 0. Từ đó ta có thể nhân thêm lượng liên hợp để xuất hiện nhân tử (x^2-2x).

Lời giải

Đáp án: A

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt[3]{x^2+3x+1}-\sqrt[3]{5x+1}\right)+\left(x^2-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{\sqrt[3]{\left(x^2+3x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^2+3x+1\right)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}}+\left(x^2-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Do: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(x^2+3x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^2+3x+1\right)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}}+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$

- Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=0;\ x=2$.

TN 3.1: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2+5x+2+2\sqrt{x^2+5x+10}=0$ là:

A. 13. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 25.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện xác định $x^2+5x+10\ge 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình trở thành: $x^2+5x+10+2\sqrt{x^2+5x+10}-8=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+5x+10}=2 \\ \sqrt{x^2+5x+10}=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+10}=2 \Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=-2 \end{array}\right..$$

Vậy $x_1^2+x_2^2=2^2+3^2=13$.

TN 3.2: Tích các nghiệm của phương trình $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ bằng

A. -10. **B.** -6. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Đáp án: C

Điều kiện xác định $x\ge 1$.

$$pt \Leftrightarrow 3(x-1)+2\left(x^2+x+1\right)=7\sqrt{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3.\frac{x-1}{x^2+x+1}-7\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}=2 \text{ hoặc } \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}=\frac{1}{3}$$

Với $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}}=2 \Leftrightarrow 4x^2+3x+5=0$, phương trình vô nghiệm.

Với $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x^2-8x+10=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{6}$.

Khi đó: Tích các nghiệm của phương trình bằng 10.

TN 3.3: Biết phương trình $\sqrt{-x^2+x+6}+\dfrac{4}{x-1}=x^2+x$ có một nghiệm dạng $x_0=\dfrac{a-\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó tổng $S=a^2+b^2+c^2$ bằng:

A. 14. **B.** 21. **C.** 29. **D.** 30.

Lời giải

Đáp án: D

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 3$ và $x\ne 1$.

pt $\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)(2+x)}+\left(\dfrac{4}{x-1}-2\right)=x^2+x-2$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)(2+x)}+\dfrac{2(3-x)}{x-1}=(x-1)(x+2)$.

Chia hai vế phương trình cho $(x-1)(x+2)$ ta được: $\dfrac{1}{x-1}.\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}+2.\dfrac{1}{(x-1)^2}.\dfrac{3-x}{x+2}=1$

Đặt $t=\dfrac{1}{x-1}.\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$ thì phương trình trở thành $2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=\dfrac{1}{2}$.

Với $t=\dfrac{1}{2}$ ta có $\dfrac{1}{x-1}.\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}1<x\le 3\\ 4.\dfrac{3-x}{x+2}=(x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Với $t=-1$ ta có $\dfrac{1}{x-1}.\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=-1 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le 1\\ \dfrac{3-x}{x+2}=(1-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Khi đó $x_0=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $a=1$; $b=5$; $c=2$.

Vậy $S=a^2+b^2+c^2=30$.

TN 3.4: Biết phương trình $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$ có một nghiệm là $x_0=-\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{c}$ là phân số tối giản . Khi đó tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 19. **B.** 15. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Đặt $t = x + \sqrt{4 - x^2}$ thì $x\sqrt{4 - x^2} = \dfrac{t^2 - 4}{2}$.

$pt \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

Với $t = 2$ suy ra $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Với $t = -\dfrac{4}{3}$ suy ra $\Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = -\dfrac{4}{3} - x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le -\dfrac{4}{3} \\ 9x^2 + 12x - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{2 + \sqrt{14}}{3}$.

$\Rightarrow a = 2;\ b = 14;\ c = 3$.

Khi đó $S = 19$.

TN 3.5: Biết phương trình $\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ có nghiệm duy nhất $x_0 = \dfrac{\sqrt{a}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương . Khi đó giá trị tổng $S = a^2 + b^2$ bằng:

A. 13. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 29.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện xác định: $-1 \le x \le 1$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1 + x} \\ b = \sqrt{1 - x} \end{cases}$, điều kiện $a, b \in [0;1]$.

Ta có hệ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^3 - b^3 = 2 + ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 + 2ab = 2 \\ (a-b)^3 + 3ab(a-b) = 2 + ab \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = 2 - (a-b)^2 \\ (a-b)^3 - (a-b)^2 - 6(a-b) + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = 2 - (a-b)^2 \\ \left[\begin{array}{l} a - b = \pm\sqrt{6} \\ a - b = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a - b = 1$ (Do $ab \ge 0$).

Với $a - b = 1 \Rightarrow ab = \dfrac{1}{2}$. Khi đó a; $(-b)$ là nghiệm của phương trình $X^2 - X - \dfrac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow a = \sqrt{1 + x} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $S = 13$.

Cách 2 : Điều kiện xác định: $-1 \le x \le 1$.

$\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} = 2 + \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(2 + \sqrt{1 - x^2}\right) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1 + x = 1 - x + 2\sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow 2(1-x) + 2\sqrt{1-x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{1-x}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

TN 3.6: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 27.

Lời giải

Đáp án: C

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 4$.

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}$ (đk $t\ge 0$) $\Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=\dfrac{t^2-5}{2}$

PT(1) trở thành: $t+\dfrac{t^2-5}{2}=5 \Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-5\ \text{(l)} \end{array}\right.$

Với $t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=3 \Leftrightarrow 5+2\sqrt{(x+1)(4-x)}=9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=2$

$\Leftrightarrow (x+1)(4-x)=4 \Leftrightarrow -x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S=\{0;3\}$.

TN 3.7: Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}}=1$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Đáp án: B

Đặt $t=\sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}}\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-1}=3-t^2$. Phương trình đã cho trở thành

$3-t^2-t=1 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1(tm) \\ t=-2(loai) \end{array}\right.$

Với $t=1$: $x^2-x-1=4 \Leftrightarrow x^2-x-5=0 \Rightarrow x_1.x_2=-5$

TN 3.8: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình

$2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7$ là

A. 11. **B.** -1. **C.** -9. **D.** $\dfrac{25}{4}$.

Lời giải

Đáp án: A

$2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7 \Leftrightarrow 2x^2+2x-\sqrt{(\sqrt{x^2+x-1}+1)^2}=7 \Leftrightarrow 2x^2+2x-(\sqrt{x^2+x-1}+1)=7$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-\sqrt{x^2+x-1}-8=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2+x-1}\ge 0 \Leftrightarrow 2x^2+2x=2(t^2+1)$. Phương trình trở thành

$2t^2-t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2(tm) \\ t=-\dfrac{3}{2}(loai) \end{array}\right.$.

Với $t=2$: $x^2+x-1=4 \Leftrightarrow x^2+x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} S=-1 \\ P=-5 \end{cases} \Rightarrow x_1^2+x_2^2=S^2-2P=11$

TN 3.9: Phương trình $\sqrt{2-f(x)}=f(x)$ có tập nghiệm nghiệm $A=\{1;2;3\}$, phương trình $\sqrt{2.g(x)-1}+\sqrt[3]{3.g(x)-2}=2.g(x)$ có tập nghiệm $B=\{0;3;4;5\}$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)-1}+\sqrt{g(x)-1}+f(x)+g(x)=f(x).g(x)+1$ có bao nhiêu phần tử ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Đáp án: A

$$\sqrt{2-f(x)}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f^2(x)+f(x)-2=0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$

$$\sqrt{2\cdot g(x)-1}+\sqrt[3]{3.g(x)-2}=2.g(x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(2g(x)-1-2\sqrt{2g(x)-1}+1\right)+\frac{1}{3}\left(3g(x)-2-3\sqrt[3]{3g(x)-2}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\sqrt{2g(x)-1}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{3g(x)-2}+2\right)\left(\sqrt[3]{3g(x)-2}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2g(x)-1}-1=0\\ \sqrt[3]{3g(x)-2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow g(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=4\\x=5\end{array}\right.$$

$$\sqrt{f(x)-1}+\sqrt{g(x)-1}+f(x)+g(x)=f(x).g(x)+1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{f(x)-1}+\sqrt{g(x)-1}=\left[1-f(x)\right]\left[1-g(x)\right]$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=1\\ g(x)=1\end{cases}\Rightarrow x=1$ .Vậy tập nghiệm của phương trình có 1 phần tử.

TN 3.10: Phương trình $\sqrt{2-f(x)}=f(x)$ có tập nghiệm nghiệm $A=\{1;2;3\}$, phương trình $\sqrt{2.g(x)-1}+\sqrt[3]{3.g(x)-2}=2.g(x)$ có tập nghiệm $B=\{0;3;4;5\}$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x).g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ có bao nhiêu phần tử ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Đáp án: C

$$\sqrt{2-f(x)}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f^2(x)+f(x)-2=0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$

$$\sqrt{2\cdot g(x)-1}+\sqrt[3]{3.g(x)-2}=2.g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2g(x)-1-2\sqrt{2g(x)-1}+1\right)+\frac{1}{3}\left(3g(x)-2-3\sqrt[3]{3g(x)-2}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{2g(x)-1}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{3g(x)-2}+2\right)\left(\sqrt[3]{3g(x)-2}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2g(x)-1}-1=0\\ \sqrt[3]{3g(x)-2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow g(x)=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=4\\x=5\end{array}\right.$$

$$\sqrt{f(x).g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{g(x)}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\g(x)=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=3\\x=4\\x=5\end{array}\right.$$ .Vậy tập nghiệm của phương trình có 6 phần tử.

TN 4.1: Biết nghiệm nhỏ nhất của phương trình $3x^3-7x^2+6x+4=3\sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}}$ có dạng $\frac{a-\sqrt{c}}{b}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{N}^*\right),\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^3+c^4$.

A. $S=2428$. **B.** $S=2432$. **C.** $S=2418$. **D.** $S=2453$.

Lời giải

Đáp án: B

Đặt $y=\sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}}$. Ta có hệ $\begin{cases}y^3=\frac{16x^2+6x+2}{3} & (1)\\ y=\frac{3x^3-7x^2+6x+4}{3} & (2)\end{cases}$

Cộng (1) với (2) theo vế ta được $y^3+y=\frac{3x^3+9x^2+12x+6}{3}\Leftrightarrow y^3+y=(x+1)^3+x+1$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,t\in\mathbb{R}$, vì $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(3)\Leftrightarrow f(y)=f(x+1)\Leftrightarrow y=x+1$. Thay vào (2) ta được

$$3x^3-7x^2+3x+1=0\Leftrightarrow(x-1)\left(3x^2-4x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{2+\sqrt{7}}{3}\\x=\frac{2-\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình trên là $x=\frac{2-\sqrt{7}}{3}$ suy ra $a=2,b=3,c=7$.

Vậy $S=a^2+b^3+c^4=2^2+3^3+7^4=2432$.

Đối với học sinh lớp 10, ta chứng minh hàm $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ như sau:

Với mọi $t_1,t_2\in\mathbb{R},t_1\neq t_2$, **ta có**

$$\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}=\frac{t_1^3+t_1-t_2^3-t_2}{t_1-t_2}=t_1^2+t_1t_2+t_2^2+1=\left(t_1+\frac{t_2}{2}\right)^2+\frac{3t_2^2}{4}+1>0$$

Cách 2:

$3x^3-7x^2+6x+4=3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow (3x^3-7x^2+6x+4)+(16x^2+6x+2)=(16x^2+6x+2)+3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow 3(x^3+3x^2+4x+2)=(16x^2+6x+2)+3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+x+1=\dfrac{16x^2+6x+2}{3}+\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, t\in\mathbb{R}$, vì $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}\right)\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$$\Leftrightarrow 3x^3-7x^2+3x+1=0\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-4x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.$$

TN 4.2: Cho phương trình $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ có ba nghiệm phân biệt trong đó nghiệm bé nhất được biểu thị dưới dạng $\dfrac{a-\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên, $b\ge 0, a<0, c<3$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3$?

A. 134. **B.** 132. **C.** 116. **D.** 118.

Lời giải

Đáp án: B

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}\Rightarrow t^3=2x-1$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{cases} x^3+1=2t \\ x^3-t^3=2(t-x)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2t \\ (x-t)\left[\left(x+\dfrac{1}{2}t\right)^2+\dfrac{3}{4}t^2+2\right]=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2t \\ x=t\end{cases}$$

Ta được $x^3+1=2x\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Nghiệm bé nhất của phương trình là $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, do đó $a=-1; b=5; c=2$ và $P=132$.

TN 4.3: Gọi x_0 là nghiệm âm của phương trình: $7x^2-13x+8=2x^2.\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$. Biết x_0 có dạng $-\dfrac{(a+\sqrt{b})}{c}$ với a,b,c là các số tự nhiên , a là số nguyên tố. Hỏi tổng $T=b+2a-c$ chia hết cho số nào sau đây?

A. 17. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Đáp án: B

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm phương trình nên chia 2 vế pt cho x^3 ta được:

$$\frac{7}{x}-\frac{13}{x^2}+\frac{8}{x^3}=2.\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3}$$

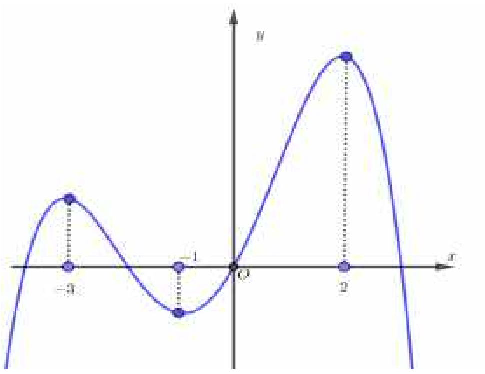
Đưa phương trình về dạng: $\left(\frac{2}{x}-1\right)^3+2.\left(\frac{2}{x}-1\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3}\right)^3+2.\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3}\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ với $t\in\mathbb{R}$, hàm này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3}=\frac{2}{x}-1\Leftrightarrow\frac{8}{x^3}-\frac{13}{x^2}+\frac{3}{x}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}=1\\ \frac{1}{x}=\frac{16}{5\pm\sqrt{89}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{-5+\sqrt{89}}{4}\\ x=-\left(\frac{5+\sqrt{89}}{4}\right)\end{array}\right.$

Vậy $x_0=-\left(\frac{5+\sqrt{89}}{4}\right)\Rightarrow T=89+2.5-4=95\ \vdots\ 19$

TN 4.4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $f\left(\sqrt{1-\sin x}\right)=f\left(\sqrt{1+\cos x}\right)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thuộc $(-3;2)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Đáp án: B

$$x\in(-3;2)\Rightarrow\begin{cases}-1<\sin x<1\\ -1<\cos x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<\sqrt{1-\sin x}<\sqrt{2}\\ 0<\sqrt{1+\cos x}<\sqrt{2}\end{cases}$$

$f\left(\sqrt{1-\sin x}\right)=f\left(\sqrt{1+\cos x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{1-\sin x}=\sqrt{1+\cos x}$ (Vì $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Do $x\in(-3;2)\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}$ thỏa phương trình. Vậy có duy nhất 1 nghiệm.

TN 4.5: Gọi x_0 là nghiệm thực của phương trình $x\sqrt{5x^2+1}+x\sqrt{6x^2+1}-\sqrt{2x^4+2x^2+1}=x^2+1$, biết bình phương của nghiệm x_0 có dạng $x_0^2=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z}),-\frac{a}{b}$ tối giản .Tính $S=a+b+c$

A. $S=26$. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 22.

Lời giải

Đáp án: A

Vì : $x\left(\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{6x^2+1}\right)=\sqrt{2x^4+2x^2+1}+x^2+1>0\Rightarrow x>0$

Điệu kiện : $x>0$

Chia x^2 hai vế : $\left(\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{6+\frac{1}{x^2}}\right)=\sqrt{2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+1+\frac{1}{x^2}$ Đặt : $t=\frac{1}{x^2}>0$

$\sqrt{5+t}+\sqrt{6+t}=\sqrt{2+2t+t^2}+1+t$

$\sqrt{5+t}+\sqrt{\left(\sqrt{5+t}\right)^2+1}=(1+t)+\sqrt{(1+t)^2+1}$

Đặt $u=\sqrt{5+t},v=1+t$. Điều kiện: $u>\sqrt{5},v>1$

Lúc đó $u+\sqrt{u^2+1}=v+\sqrt{v^2+1}$ $\Leftrightarrow f(u)=f(v)$

Cách 1: Xét hàm đặt trưng : $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ Điều kiện : $t>1$

$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ nên ta có u = v

Khi đó $\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow 5+\frac{1}{x^2}=1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\Leftrightarrow\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}-4=0\Leftrightarrow 4x^4-x^2-1=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{1+\sqrt{17}}{8}(n)\\ x^2=\frac{1-\sqrt{17}}{8}(l)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow S=26$

Cách 2: $u+\sqrt{u^2+1}=v+\sqrt{v^2+1}\Leftrightarrow u-v+\left(\sqrt{u^2+1}-\sqrt{v^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow(u-v)\left[1+\frac{u+v}{\sqrt{u^2+1}+\sqrt{v^2+1}}\right]=0$ $\Leftrightarrow u=v$

Khi đó ta có $\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow 5+\frac{1}{x^2}=1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\Leftrightarrow\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}-4=0\Leftrightarrow 4x^4-x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{1+\sqrt{17}}{8}(n)\\ x^2=\frac{1-\sqrt{17}}{8}(l)\end{array}\right.\Leftrightarrow S=26$$

TN 4.6: Cho $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$. Phương trình $\sqrt{f\left(f(x)+1\right)+1}=f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Đáp án: A

Đặt $t=f(x)+1$ $\Rightarrow t=x^3-3x^2-6x+2$.

Khi đó $\sqrt{f\left(f(x)+1\right)+1}=f(x)+2$ trở thành:

$$\sqrt{f(t)+1}=t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ f(t)+1=t^2+2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ t^3-4t^2-8t+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} t=t_1\in(-2;-1) \\ t=t_2\in(-1;1) \\ t=t_3\in(1;6) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_2\in(-1;1) \\ t=t_3\in(5;6) \end{array}\right. .$$

(Vì $g(t)=t^3-4t^2-8t+1$; $g(-2)=-7$; $g(-1)=4$; $g(1)=-10$; $g(6)=25$).

Xét phương trình t $2t=x^3-3x^2-6x+2$, là pt hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-6x+2$ và đường thẳng $y=t$. Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1-\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		$-6+6\sqrt{3}$		$-6-6\sqrt{3}$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

+ Với $t=t_2\in(-1;1)$, ta có d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt, nên phương trình có 3 nghiệm.

+ Với $t=t_3\in(5;6)$, ta có d cắt (C) tại 1 điểm, nên phương trình có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

TN 4.7: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$ (1) là

A. 9. **B.** 5. **C.** 4 . **D.** 8.

Lời giải

Đáp án: C

$$(1)\Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-(x-1)^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}=2(x-1)^4\left[2(x-1)^2-1\right] \quad (2)$$

Điều kiện: $1-(x-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\le 1$.

Đặt $t=(x-1)^2\ge 0 \Rightarrow t\in[0;1]$. Lúc đó:

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-t}}+\sqrt{1-\sqrt{1-t}}=2t^2(2t-1) \qquad (3)$$

Với $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$ thì phương trình (3) có $\begin{cases} VT>0 \\ VP=0 \end{cases} \Rightarrow (3)$ vô nghiệm với $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

Với $t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, bình phương hai vế (3) ta được:

$$(3)\Leftrightarrow 2+2\sqrt{t}=4t^4(2t-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}=2t^3(2t-1)^2 \quad (4)$$ (chia hai vế cho $t\ne 0$).

Nhận thấy $t=1$ là một nghiệm của (4).

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

$f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}<0,\ \forall t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]\Rightarrow f(t)$: nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Xét hàm số $g(t)=2t^3(2t-1)^2$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

$g'(t)=6t^2(2t-1)^2+4t^3(2t-1)>0,\forall t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]\Rightarrow f(t)$: đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Vậy $t=1$ là nghiệm duy nhất của $(4)\Rightarrow t=(x-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các nghiệm: $0^2+2^2=4$.

TN 4.8: Tổng các nghiệm của phương trình $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}\quad(*)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Đáp án: A

$(*)\Leftrightarrow x^3+2x=2x-1+2\sqrt[3]{2x-1}$

$\Leftrightarrow x^3+2x=\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3+2\sqrt[3]{2x-1}$

$\Leftrightarrow f(x)=f\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)\quad(1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\quad(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow f(x)=f\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2x-1}$

$\Leftrightarrow x^3=2x+1$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=1\vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 3.

TN 4.9: Số nghiệm của phương trình $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}\quad(*)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Đáp án: C

$(*)\Leftrightarrow(2x-3)^3+(2x-3)=\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow f(2x-3)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)\quad(1)$ và có hàm đặc trưng là $f(t)=t^3+t$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow t(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\quad(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow f(2x-3)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

Nhận xét: Ta cần đưa hai vế phương trình về dạng $f[g(x)]=f[h(x)]$ trong đó hàm đặc trưng có dạng $f(t)=mt^3+nt$. Ta cần đồng nhất sao cho biểu thức bên vế phải có dạng: $m\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+n\sqrt[3]{3x-5}$ và so với vế phải PT nên ta chọn $n=1$.

Công việc còn lại là tìm những hạng tử ở vế trái sao cho $m(px+u)^3+(px+u)=m\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}$. Dễ thấy $(2x)^3=8x^3$ nên $mp^3=8$ có các trường hợp sau xảy ra $\left[\begin{array}{l} m=1,\ p=2 \\ m=8,\ p=1 \end{array}\right.$.

Nếu $m=1,\ p=2$ thì $f(t)=t^3+t$. Do đó, cần viết phương trình về dạng:

$m(px+u)^3+(px+u)=m\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow (2x+u)^3+(2x+u)=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow 8x^3+(12u)x^2+(6u^2-1)x+u^3+u+5=\sqrt[3]{3x-5}$

Đồng nhất hệ số với vế trái của phương trình, ta được hệ: $\begin{cases} 12u=-36 \\ 6u^2-1=53 \\ u^3+u+5=-15 \end{cases} \Leftrightarrow u=-3$.

Do trường hợp $m=1,\ p=2$ cho kết quả nên ta không xét trường hợp kế tiếp $(m=8,\ p=1)$. Nên ta có lời giải sau:

TN 4.10: Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $x^3-15x^2+78x-141=5\sqrt[3]{2x-9}$ $(*)$ có dạng $\dfrac{a-b\sqrt{c}}{2}$ với $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó $a+b+c$ là

A. 17. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 15.

Lời giải

Đáp án: C

$(*)\Leftrightarrow (x-5)^3+5(x-5)=\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^3+5\sqrt[3]{2x-9}$

$\Leftrightarrow f(x-5)=f\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)$ (1) với hàm đặc trưng $f(t)=t^3+5t$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+5t$ trên $\mathbb{R}$,

$f'(t)=3t^2+5>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow f(x-5)=f\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)\Leftrightarrow x-5=\sqrt[3]{2x-9}$

$\Leftrightarrow x^3-15x^2+75x-125=2x-9$

$\Leftrightarrow x^3-15x^2+73x-116=0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-11x+29)=0 \Leftrightarrow x=4 \vee x=\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm nhỏ nhất là: $x=\dfrac{11-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=11\\ b=1\\ c=5\end{cases}\Rightarrow a+b+c=17$

Nhận xét: Như các thí dụ trên, ta cần phân tích phương trình $(*)$ thành dạng $m(px+u)^3+5(px+u)=m\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^3+5\sqrt[3]{2x-9}$ (1) với hàm đặc trưng: $f(t)=mt^3+5t$.

Do sau khi khai triển $m(px+u)^3$ có hạng tử $(mp^3)x^3\sim x^3$ trong $(*)$ $\Rightarrow mp^3=1$ nên có thể chọn $m=p=1$. Lúc này:

$(1)\Leftrightarrow(x+u)^3+5(x+u)=2x-9+5\sqrt[3]{2x-9}$ (2)

Trong khai triển $(x+u)^3$ có hạng tử $(3u)x^2\sim-15x^2\Rightarrow u=-5$.

Lúc này: $(2)\Leftrightarrow(x-5)^3+5(x-5)=\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^3+5\sqrt[3]{2x-9}$ (3)

Khai triển (3) thì được phương trình $(*)$ nên giá trị $m=p=1$ là đúng hướng.

TN 5.1: Cho phương trình: $2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12}=x^2+6x-1$ $(*)$. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình?

A. 50. **B.** 100. **C.** 53. **D.** 80.

Lời giải

Đáp án: A

$(*)\Leftrightarrow2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)}=x^2+6x-1$ (1)

Điều kiện: $x\ge\dfrac{4}{7}$ $\left(do: x^2-x+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $VT=2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)}\le x^2+6x-1=VP$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow(7x-4)=(x^2-x+3)\Leftrightarrow x^2-8x+7=0\Leftrightarrow x=1\vee x=7$.

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1\vee x=7$.

TN 5.2: Tính tích các nghiệm của phương trình $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$ (1)

A. -2. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đáp án: B

Điều kiện: $x\ge1$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{1.\left(x-\frac{1}{x}\right)}\overset{Cauchy}{\leq}\frac{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2}\\ \sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}(x-1)}\overset{Cauchy}{\leq}\frac{\frac{1}{x}+(x-1)}{2}\end{array}\right\rangle\oplus\Rightarrow\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\leq x\quad(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow$ Dấu $"="$ trong (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1=x-\frac{1}{x}\\ \frac{1}{x}=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \vee\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

TN 5.3: Cho phương trình: $4+4x-x^2=|x-1|+|x-2|+|2x-3|+|4x-14|$. Tính tích các nghiệm của phương trình?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** -9.

Lời giải

Đáp án: C

$VP=|x-1|+|x-2|+|2x-3|+|4x-14|\geq|x-1+x-2+2x-3+4x-14|=8\ (1)$ Dấu $"="$ xảy ra khi $x=2$.

$VT=8-(x-2)^2\leq 8\quad(2)$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=2$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

TN 5.4: Phương trình $\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+4x=3\sqrt{2}-1\quad(1)$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện: $x>-1$.

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+4(x+1)=3\sqrt{2}+3\quad(2)$

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm: $\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}},\ \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}},\ 4(x+1)$ ta được:

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}+\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}+4(x+1)\overset{Cauchy}{\geq}3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}.\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}.4(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+4(x+1)\geq 3.\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+4\left(x+1\right)\geq 3\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+4\left(x+1\right)\geq 3\sqrt{2}+3 \quad (3)$$

Từ $(2),(3)\Rightarrow$ dấu "=" trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}=4(x+1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}=4(x+1)\Leftrightarrow \begin{cases}4(x+1)\geq 0\\ \frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}=\left[4(x+1)\right]^{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ \left[4(x+1)\right]^{3}=\left(\sqrt{2}+1\right)^{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ 4(x+1)=\sqrt{2}+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ x=\frac{-3+\sqrt{2}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{2}}{4}.$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm $x=\frac{-3+\sqrt{2}}{4}$.

TN 5.5: Cho phương trình: $\sqrt{x^8+4}+\sqrt{x^4+9}=\sqrt{x^8+2x^6+x^4+25}$ $(*)$. Phương trình trên có bao nhiêu nghiệm thực dương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: A

$x=0$ là 1 nghiệm của phương trình

Đặt $\begin{cases}\vec{u}=\left(x^4;\ 2\right)\\ \vec{v}=\left(x^2;\ 3\right)\end{cases}$.

Mặt khác: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

TN 5.6: Cho phương trình: $\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}+\sqrt{x^2+y^2+2x-6y+10}=\sqrt{29}$ $(*)$. Cặp $(x;y)$ thỏa mãn phương trình trên. Tính giá trị của $A=5x+100y$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 100. **D.** 25.

Lời giải

Đáp án: A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(2+y)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(3-y)^2}=\sqrt{29}$$

Đặt $\begin{cases} \vec{u}=(x-1;\ 2+y) \\ \vec{v}=(-1-x;\ 3-y) \\ \vec{u}+\vec{v}=(-2;5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|=\sqrt{(x-1)^2+(2+y)^2} \\ |\vec{v}|=\sqrt{(-1-x)^2+(3-y)^2} \\ |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29} \end{cases}$.

Mặt khác: $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$ và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow 5x+2y=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}, y=0.$$

TN 5.7: Cho phương trình: $\sqrt{x^4+4x^2}+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{x^4+11x^2+1}$. Phương trình trên có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đáp án: D

+ $x=0$ là 1 nghiệm của pt

+ $x\ne 0$, Đặt $\begin{cases} \vec{u}=(x^2;\ 2x) \\ \vec{v}=(1;\ x) \end{cases}$

Mặt khác: $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$ và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng phương nên ta tìm được $x=\pm\sqrt{2}$.

TN 5.8: Cho phương trình: $\sqrt{x^4-8x^2+32}+\sqrt{x^4-6x^2+18}=5\sqrt{2}$. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình?

A. $\frac{48}{7}$. **B.** $\frac{48}{5}$. **C.** $\frac{48}{15}$. **D.** $\frac{15}{7}$.

Lời giải

Đáp án: A

Chọn $\begin{cases} A(x^2-4;-4) \\ B(x^2-3;\ 3) \\ O(0;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA=\sqrt{x^4-8x^2+32} \\ OB=\sqrt{x^4-6x^2+18} \\ AB=5\sqrt{2} \end{cases}$

ta có $AO+BO\ge AB$

Dấu bằng xảy ra khi A,B,C thẳng hàng $\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{24}{7}}$.

TN 5.9: Phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x+2 \quad (1)$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ x^2-x+1\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x\le\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng BĐT **BCS** cho các số 1; $\sqrt{x^2+x-1}$; 1; $\sqrt{x^2-x+1}$ ta được:

$$VT=\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\le\sqrt{(1^2+1^2)\left[(x^2+x-1)+(x^2-x+1)\right]}=2\sqrt{x}.$$

Hay $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\le 2\sqrt{x}\quad(2)$

Ta có: $VT-2\sqrt{x}=x^2-x+2-2\sqrt{x}=(x-1)^2+(\sqrt{x}-1)^2\ge 0$

Hay $x^2-x+2\ge 2\sqrt{x}\quad(3)$

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=2\sqrt{x}\\ x^2-x+2=2\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow$ Dấu "=" trong $(2),(3)$ đồng thời xảy ra

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x-1}{1}=\dfrac{x^2-x+1}{1}\Leftrightarrow x=1$.

So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

TN 6.1: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số x_2 để phương trình $x_1<2<x_2$ có nghiệm là

A. $m\ge 5$. **B.** $m<\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}<m<5$. **D.** $\dfrac{8}{3}\le m\le 5$.

Lời giải

Đáp án: C

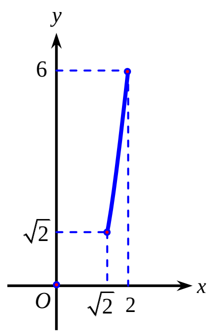
Điều kiện xác định $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x},\sqrt{2}\le t\le 2$ thì phương trình trở thành $2t^2+t-4=m\quad(*)$

Phương trình $(*)$ chính là phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=2t^2+t-4$ và đường thẳng $d: y=m$ cùng phương với trục hoành.

Do đó, số nghiệm của pt $(*)$ chính là số giao điểm của (P) và (d).

Phát họa (P) và (d) lên cùng hệ trục, ta thấy phương trình đã cho có nghiệm khi $\sqrt{2}\le m\le 6$.



TN 6.2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để phương trình $2x^2-5mx+3x\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x}}-6=0$ có nghiệm.

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Đáp án: C

Tập xác định: $D=\left[-\sqrt{3};0\right)\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$

Ta có: $2x^2-5mx+3x\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x}}-6=0\Leftrightarrow 2\left(x^2-3\right)+3x\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x}}=5mx$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{x^2-3}{x}+3\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x}}=5m(1)$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x}}(t\ge 0)$ khi đó phương trình (1) trở thành: $2t^2+3t=5m(2)$

Để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình (2) có nghiệm dương.

Do $t\ge 0\Rightarrow 2t^2+3t\ge 0\Rightarrow m\ge 0$

Do $\begin{cases} m\in[-2018;2018] \\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}$ nên có 2019 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TN 6.3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2+3x+1=m\sqrt{x^4+x^2+1}$ có nghiệm dương?

A. 1. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 27.

Lời giải

Đáp án: A

Tập xác định của phương trình: $D=(0;+\infty)$.

Ta có: $x^2+3x+1=m\sqrt{x^4+x^2+1}\Leftrightarrow 2\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=m\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-1=m\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}(1)$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}=\sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}}=\sqrt{1+\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}-1}}$

Do $x>0$ nên $\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}}>1 \\ x+\dfrac{1}{x}\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}}>1 \\ \sqrt{1+\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}-1}}\le\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow t\in\left(1;\sqrt{3}\right]$

Khi đó phương trình (1) trở thành phương trình $2t^2-mt-1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2t^2-1}{t}=2t-\dfrac{1}{t}(2)$

Để phương trình đã cho có nghiệm dương thì phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(1;\sqrt{3}\right]$

Xét hàm số: $y=2t-\dfrac{1}{t};t\in\left(1;\sqrt{3}\right]$

Với $t_1;t_2\in\left(1;\sqrt{3}\right];t_1\ne t_2$ xét tỉ số $\dfrac{\left(2t_2-\frac{1}{t_2}\right)-\left(2t_1-\frac{1}{t_1}\right)}{t_2-t_1}=\dfrac{2\left(t_2-t_1\right)+\left(\frac{t_2-t_1}{t_1.t_2}\right)}{t_2-t_1}=2+\dfrac{1}{t_1.t_2}>0$

Suy ra hàm số $y=2t-\dfrac{1}{t}$ đồng biến trên nửa khoảng $\left(1;\sqrt{3}\right]\Rightarrow y(1)<2t-\dfrac{1}{t}\le y\left(\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow 1<2t-\dfrac{1}{t}\le\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow 1<m\le\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

Do m là số nguyên nên có duy nhất 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TN 6.4: Tìm số các giai trị nguyên dương của tham số m để phương trình $(\sqrt{x^2+m}-x)^3+(\sqrt{x^2+m}+x)^3+6(m-1)\sqrt{x^2+m}+4x^2-6+4m=0$ có nghiệm.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đáp án: B

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+m}-x \\ b=\sqrt{x^2+m}+x \end{cases}(a>0,b>0) \Rightarrow \begin{cases} a+b=2\sqrt{x^2+m} \Rightarrow (a+b)^2=4x^2+4m \\ ab=(\sqrt{x^2+m}-x)(\sqrt{x^2+m}+x)=m \end{cases}$

Kết hợp với (*), được hệ phương trình:

$$\begin{cases} ab=m \\ a^3+b^3+3(ab-1)(a+b)+(a+b)^2-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=m \\ (a+b)^3+(a+b)^2-3(a+b)-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-a \\ a(2-a)=m \end{cases} \Rightarrow -a^2+2a=m$$

Xét hàm $y=f(a)=-a^2+2a$ với $0<a<2$ có bảng biến thiên

x	0	1	2
y	0	1	0

Vậy $0<m\le 1$ suy ra $m=1$.

TN 6.5: Cho phương trình $m\sqrt{x+1}=-3\sqrt{x-1}+2\sqrt[4]{x^2-1}$, biết rằng tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm là nửa khoảng $(a;b]$. Tính giá trị biểu thức $S=a^3+b^3$.

A. $\frac{28}{27}$. **B.** $-\frac{26}{27}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Đáp án: B

Điều kiện $x\ge 1$, Chia hai vế cho $\sqrt{x+1}$ ta được pt:

$$m=-3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}. \text{ Đặt } t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}}$$

Do $x+1\ge 2 \Rightarrow \frac{2}{x+1}\le 1 \Rightarrow 0\le 1-\frac{2}{x+1}<1 \Rightarrow 0\le t<1$

Ta có phương trình $m=-3t^2+2t$ (*).

Bảng biến thiên của hàm $f(t)=-3t^2+2t$ trên $[0;1)$

t	0	1/3	1
$f(t)$	0	1/3	-1

Theo bảng biến thiên thì (*) có nghiệm thuộc [0; 1) $\Leftrightarrow -1<m\le 1/3$.

TN 6.6: Biết rằng tập hợp các giá trị của m để phương trình : $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m-1=0$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$.

Giá trị của $S=2019b-2020a-172$ là :

A. 1918. **B.** 1819. **C.** 1981. **D.** 2019.

Lời giải

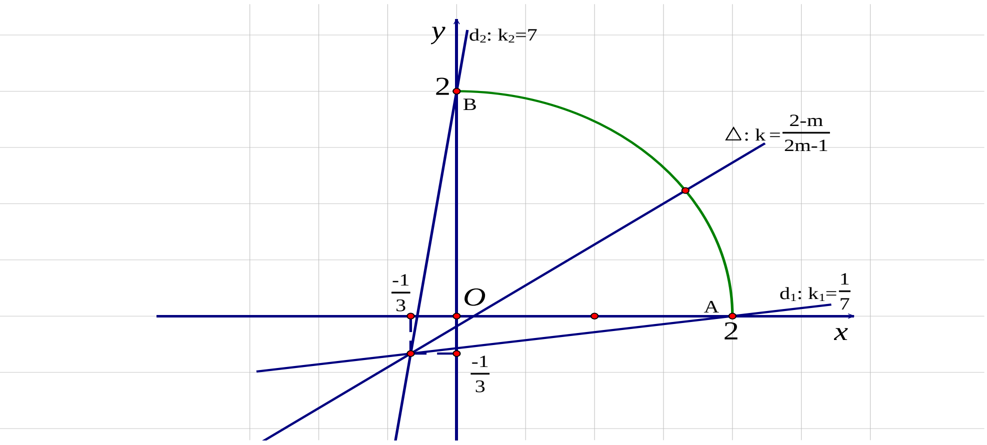
Đáp án: C

+) $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m-1=0$, điều kiện $-3\le x\le 1$

+) Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+3} \\ b=\sqrt{1-x} \end{cases}$, $0\le a,b\le 2$

+) Ta có : $\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ (m-2)a+(2m-1)b+m-1=0 \end{cases}$ (I)``

+) Trong hệ tọa độ Oab, phương trình $a^2+b^2=4$ là phương trình đường tròn tâm O bán kính $R=2$, và phương trình $(m-2)a+(2m-1)b+m-1=0$ là phương trình đường thẳng Δ có hệ số góc $k=\dfrac{2-m}{2m-1}$ (vì với $m=\dfrac{1}{2}$ thì phương trình vô nghiệm).



+) Nhận xét thấy Δ đi qua điểm $I\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ cố định.

+) Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta$ nằm trong miền góc nhọn tạo bởi d_1,d_2

+) $\overrightarrow{IA}\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{1}{3}\right)\Rightarrow d_1$ có hệ số góc $k_1=\dfrac{1}{7}$.

+) $\overrightarrow{IB}\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3}\right)\Rightarrow d_2$ có hệ số góc $k_2=7$.

+) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k_1\le k\le k_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{7}\le\dfrac{2-m}{2m-1}\le 7 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}\le m\le\dfrac{5}{3}\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{5} \\ b=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

$S=2019b-2020a-172=1981.$

TN 6.7: Gọi T là tập các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{16x+m-4}=4x^2-18x+4-m$ có 1 nghiệm.Tính tổng các phần tử của T.

A.0. **B.**20. **C.**-20. **D.**10.

Lời giải

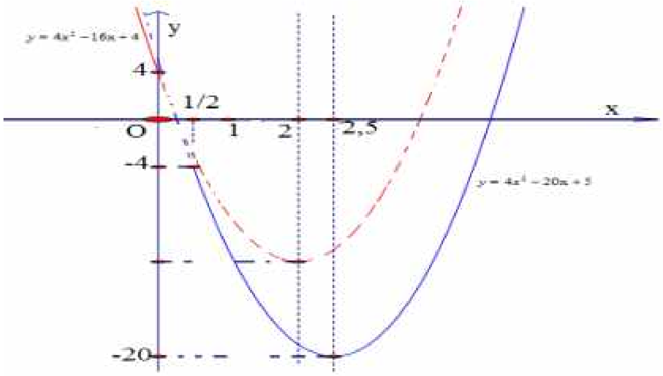
Đáp án: C

Đặt $t=\sqrt{16x+m-4}, t\ge 0$. Ta có $m=t^2-16x+4$

Phương trình trở thành

$(2x+t).(2x-t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2x \\ t=2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{16x+m-4}=-2x \\ \sqrt{16x+m-4}=2x-1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ m = 4x^2 - 16x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ m = 4x^2 - 20x + 5 \end{cases} \end{array}\right.$$



Từ đồ thị, phương trình có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < m < 4 \\ m = -20 \end{array}\right.$

Do m thuộc Z nên $T = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;-20\}$.

TN 6.8: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{x}} + \sqrt{m-\sqrt{x}} = m$ có nghiệm

A. 2 **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Đáp án: C

ĐKXĐ: $\begin{cases} m+\sqrt{x} \ge 0 \\ m-\sqrt{x} \ge 0 \\ m \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ x \ge 0 \\ \sqrt{x} \le m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ 0 \le x \le m^2 \end{cases}$.

+ Khi $m = 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

+ Khi $m > 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow m + \sqrt{x} + m - \sqrt{x} + 2\sqrt{m^2 - x} = m^2$

$$\Leftrightarrow 2m + 2\sqrt{m^2 - x} = m^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - x} = m^2 - 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \ge 0 \\ 4\left(m^2 - x\right) = \left(m^2 - 2m\right)^2 \end{cases} (*)$$

Do điều kiện $m > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 \\ 4\left(m^2 - x\right) = m^4 - 4m^3 + 4m^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 \\ -4x = m^4 - 4m^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 \\ x = \dfrac{m^3(4-m)}{4} \end{cases}.$$

Do điều kiện $0 \le x \le m^2$ nên phương trình có nghiệm khi:

$$\begin{cases} m \ge 2 \\ \dfrac{m^3(4-m)}{4} \ge 0 \\ \dfrac{m^3(4-m)}{4} \le m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 \\ m \le 4 \\ (m-2)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le m \le 4.$$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $m = 0$ hoặc $2 \le m \le 4$. Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

TN 6.9: Tìm giá trị nhỏ nhất của m để phương trình $\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}-3\sqrt[3]{x^2+1}+1-m=0$ có nghiệm.

A. $m=-\frac{3}{4}$.. **B.** $m=-\frac{5}{4}$. **C.** $m=-\frac{7}{4}$. **D.** $m=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Đáp án: B

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1}, t\ge 1 \Rightarrow t^2=\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}$

Ta được phương trình $t^2-3t+1-m=0 \Leftrightarrow t^2-3t+1=m$

Xét hàm số $y=t^2-3t+1, t\ge 1$

Bảng biến thiên

t	1		$\frac{3}{2}$		
y	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $m\ge -\frac{5}{4}$

TN 6.10: Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để phương trình $2\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+m}}}=m$ có các nghiệm đều dương?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2015. **D.** 2014.

Lời giải

Chọn C

Ta chỉ cần xét trường hợp $x>0$ và $m>0$. Khi đó các biểu thức vế trái đều xác định.

Đặt $y=2\sqrt{x+2\sqrt{x+m}}$ và $z=2\sqrt{x+m} \Rightarrow y,z>0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x+y}=m \\ 2\sqrt{x+z}=y \\ 2\sqrt{x+m}=z \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $m\ge y\ge z$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+z}\le 2\sqrt{x+y}\le 2\sqrt{x+m} \Rightarrow y\le m\le z \Rightarrow m=y=z$$

Thay $m=y=z$ vào hệ trên ta được: $2\sqrt{x+m}=m \Leftrightarrow 4x+4m=m^2 \Leftrightarrow x=\frac{m^2-4m}{4}$

Để có $x>0 \Rightarrow m^2-4m>0 \Rightarrow m>4 \Rightarrow m=5,6,7...,2019.$

Như vậy có tất cả 2015 giá trị m thỏa mãn yêu cầu của đề ra**.**