

# Mục lục

|          |                                                                                                                                                                                    |          |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>VECTƠ</b>                                                                                                                                                                       | <b>7</b> |
| 1.       | CÁC ĐỊNH NGHĨA . . . . .                                                                                                                                                           | 7        |
| I.       | Tóm tắt lí thuyết . . . . .                                                                                                                                                        | 7        |
| 1.       | Định nghĩa, sự xác định véc-tơ . . . . .                                                                                                                                           | 7        |
| 2.       | Hai véc-tơ cùng phương, cùng hướng . . . . .                                                                                                                                       | 8        |
| 3.       | Hai véc-tơ bằng nhau . . . . .                                                                                                                                                     | 8        |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                                                                                                            | 8        |
|          | Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ . . . . .                                                                                                  | 8        |
|          | Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau . . . . .                                                                                                                                  | 11       |
| 2.       | TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ . . . . .                                                                                                                                               | 15       |
| I.       | Tóm tắt lí thuyết . . . . .                                                                                                                                                        | 15       |
| 1.       | Định nghĩa tổng và hiệu hai véc-tơ . . . . .                                                                                                                                       | 15       |
| 2.       | Quy tắc hình bình hành . . . . .                                                                                                                                                   | 15       |
| 3.       | Các tính chất của phép cộng, trừ hai véc-tơ . . . . .                                                                                                                              | 15       |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                                                                                                            | 16       |
|          | Dạng 1. Xác định véc-tơ . . . . .                                                                                                                                                  | 16       |
|          | Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước . . . . .                                                                                                                    | 20       |
|          | Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ . . . . .                                                                                                                          | 22       |
|          | Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ . . . . .                                                                                                                                      | 26       |
| 3.       | TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ . . . . .                                                                                                                                            | 35       |
| I.       | Tóm tắt lí thuyết . . . . .                                                                                                                                                        | 35       |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                                                                                                            | 36       |
|          | Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số. . . . .                                                                                      | 36       |
|          | Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương . . . . .                                                                                                           | 38       |
|          | Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số . . . . .                                                                                                   | 43       |
|          | Dạng 4. Chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy . . . . .                                                                                                                             | 50       |
|          | Dạng 5. Xác định $M$ thỏa mãn đẳng thức véc-tơ . . . . .                                                                                                                           | 53       |
| III.     | Bài tập tổng hợp . . . . .                                                                                                                                                         | 57       |
| 4.       | HỆ TRỤC TỌA ĐỘ . . . . .                                                                                                                                                           | 63       |
| I.       | Tóm tắt lí thuyết . . . . .                                                                                                                                                        | 63       |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                                                                                                            | 64       |
|          | Dạng 1. Tìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục $(O; \vec{e})$ .<br>Tìm tọa độ của các véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$ . . . . . | 64       |
|          | Dạng 2. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$ . . . . .                                                                                           | 68       |
|          | Dạng 3. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm . . . . .                                                                                                                               | 70       |
|          | Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường thẳng . . . . .                                                                                                            | 73       |
| III.     | Bài tập tổng hợp . . . . .                                                                                                                                                         | 77       |
| 5.       | ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I . . . . .                                                                                                                                                     | 85       |
| I.       | Đề số 1a . . . . .                                                                                                                                                                 | 85       |
| II.      | Đề số 1b . . . . .                                                                                                                                                                 | 87       |
| III.     | Đề số 2a . . . . .                                                                                                                                                                 | 89       |

|          |                                                                                                                              |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| IV.      | Đề số 2b . . . . .                                                                                                           | 91        |
| V.       | Đề số 3a . . . . .                                                                                                           | 93        |
| VI.      | Đề số 3b . . . . .                                                                                                           | 96        |
| <b>2</b> | <b>TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO</b>                                                                                           | <b>99</b> |
| 1.       | GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$ . . . . .                                                 | 99        |
| I.       | Tóm tắt lý thuyết . . . . .                                                                                                  | 99        |
| 1.       | Giá trị lượng giác của một góc bất kỳ từ $0^\circ$ đến $180^\circ$ . . . . .                                                 | 99        |
| 2.       | Góc giữa hai vec-tơ . . . . .                                                                                                | 100       |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                                                      | 100       |
|          | Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác . . . . .                                                                                | 100       |
|          | Dạng 2. Tính giá trị các biểu thức lượng giác. . . . .                                                                       | 102       |
|          | Dạng 3. Chứng minh đẳng thức lượng giác . . . . .                                                                            | 103       |
| 2.       | TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO . . . . .                                                                                        | 109       |
| 3.       | Tích vô hướng của hai vec-tơ . . . . .                                                                                       | 109       |
| I.       | Tóm tắt lý thuyết . . . . .                                                                                                  | 109       |
| 1.       | Định nghĩa . . . . .                                                                                                         | 109       |
| 2.       | Các tính chất của tích vô hướng . . . . .                                                                                    | 109       |
| 3.       | Biểu thức tọa độ của tích vô hướng . . . . .                                                                                 | 109       |
| 4.       | Ứng dụng . . . . .                                                                                                           | 110       |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                                                      | 110       |
|          | Dạng 1. Các bài toán tính tích vô hướng của hai vec-tơ . . . . .                                                             | 110       |
|          | Dạng 2. Tính góc giữa hai vec-tơ -góc giữa hai đường thẳng-điều kiện vuông góc . . . . .                                     | 114       |
|          | Dạng 3. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc về độ dài. . . . .                                                        | 117       |
|          | Dạng 4. Ứng dụng của biểu thức tọa độ tích vô hướng vào tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước . . . . .                      | 121       |
|          | Dạng 5. Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác - tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng . . . . . | 125       |
| 4.       | HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC . . . . .                                                                      | 129       |
| I.       | Tóm tắt lý thuyết . . . . .                                                                                                  | 129       |
| 1.       | Hệ thức lượng trong tam giác vuông . . . . .                                                                                 | 129       |
| 2.       | Định lý hàm số cosin, công thức trung tuyến. . . . .                                                                         | 130       |
| 3.       | Định lý sin . . . . .                                                                                                        | 130       |
| 4.       | Các công thức diện tích tam giác . . . . .                                                                                   | 130       |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                                                      | 131       |
|          | Dạng 1. Một số bài tập giúp nắm vững lý thuyết . . . . .                                                                     | 131       |
|          | Dạng 2. Xác định các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết một số yếu tố về cạnh và góc của tam giác đó . . . . .         | 138       |
|          | Dạng 3. Diện tích tam giác . . . . .                                                                                         | 142       |
|          | Dạng 4. Chứng minh hệ thức liên quan giữa các yếu tố trong tam giác . . . . .                                                | 143       |
|          | Dạng 5. Nhận dạng tam giác vuông . . . . .                                                                                   | 147       |
|          | Dạng 6. Nhận dạng tam giác cân . . . . .                                                                                     | 150       |
|          | Dạng 7. Nhận dạng tam giác đều. . . . .                                                                                      | 153       |
|          | Dạng 8. Ứng dụng giải tam giác vào đo đạc . . . . .                                                                          | 155       |
| 5.       | ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II . . . . .                                                                                              | 160       |
| I.       | Đề số 1a . . . . .                                                                                                           | 160       |
| II.      | Đề số 1b . . . . .                                                                                                           | 161       |
| III.     | Đề số 2a . . . . .                                                                                                           | 163       |
| IV.      | Đề số 2b . . . . .                                                                                                           | 164       |
| V.       | Đề số 3a . . . . .                                                                                                           | 165       |
| VI.      | Đề số 3b . . . . .                                                                                                           | 168       |

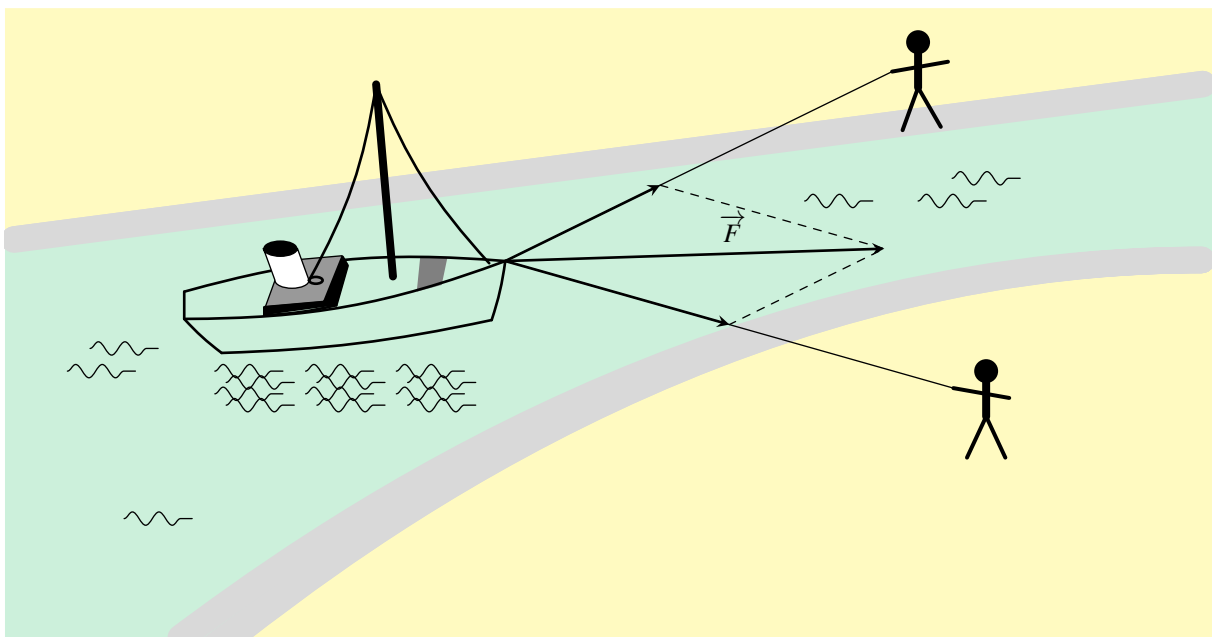
|          |                                                                                                   |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3</b> | <b>TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ</b>                                                                | <b>171</b> |
| 1.       | PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT VÀ PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG                                    | 171        |
| I.       | Tóm tắt lý thuyết . . . . .                                                                       | 171        |
| 1.       | Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng . . . . .                                                       | 171        |
| 2.       | Phương trình tham số của đường thẳng . . . . .                                                    | 171        |
| 3.       | Phương trình chính tắc của đường thẳng . . . . .                                                  | 171        |
| 4.       | Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng . . . . .                                                       | 171        |
| 5.       | Phương trình tổng quát của đường thẳng . . . . .                                                  | 171        |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                           | 172        |
|          | Dạng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng . . . . .                                       | 172        |
|          | Dạng 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng . . . . .                                     | 173        |
|          | Dạng 3. Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng . . . . .                                    | 175        |
|          | Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng . . . . .                                     | 177        |
|          | Dạng 5. Viết phương trình đường phân giác của góc do $\Delta_1$ và $\Delta_2$ tạo thành . . . . . | 180        |
|          | Dạng 6. Phương trình đường thẳng trong tam giác . . . . .                                         | 182        |
| 2.       | PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN . . . . .                                                                 | 189        |
| I.       | Tóm tắt lý thuyết . . . . .                                                                       | 189        |
| 1.       | Phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính . . . . .                                        | 189        |
| 2.       | Dạng khác của phương trình đường tròn . . . . .                                                   | 189        |
| 3.       | Phương trình tiếp tuyến của đường tròn . . . . .                                                  | 189        |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                           | 189        |
|          | Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn. . . . .                                                   | 189        |
|          | Dạng 2. Lập phương trình đường tròn. . . . .                                                      | 191        |
|          | Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm . . . . .                        | 198        |
|          | Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi một điểm . . . . .                         | 200        |
|          | Dạng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước . . . . .        | 205        |
|          | Dạng 6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn . . . . .                                  | 211        |
|          | Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn. . . . .                                              | 215        |
|          | Dạng 8. Phương trình đường thẳng chứa tham số . . . . .                                           | 216        |
|          | Dạng 9. Phương trình đường tròn chứa tham số . . . . .                                            | 218        |
|          | Dạng 10. Tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước . . . . .                               | 222        |
| 3.       | ĐƯỜNG ELIP . . . . .                                                                              | 232        |
| I.       | Tóm tắt lý thuyết . . . . .                                                                       | 232        |
| 1.       | Định nghĩa . . . . .                                                                              | 232        |
| 2.       | Phương trình chính tắc của Elip . . . . .                                                         | 232        |
| 3.       | Hình dạng của elip . . . . .                                                                      | 233        |
| II.      | Các dạng toán . . . . .                                                                           | 233        |
|          | Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip . . . . .                                                    | 233        |
|          | Dạng 2. Viết phương trình đường Elip . . . . .                                                    | 236        |
|          | Dạng 3. Tìm điểm thuộc elip thỏa điều kiện cho trước . . . . .                                    | 239        |
| 4.       | ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 3 . . . . .                                                                    | 248        |
| I.       | Đề số 1a . . . . .                                                                                | 248        |
| II.      | Đề số 1b . . . . .                                                                                | 249        |
| III.     | Đề số 2a . . . . .                                                                                | 250        |
| IV.      | Đề số 2b . . . . .                                                                                | 251        |
| V.       | Đề số 3a . . . . .                                                                                | 253        |
| VI.      | Đề số 3b . . . . .                                                                                | 255        |



# Chương 1

## VECTƠ

### §1. CÁC ĐỊNH NGHĨA



Hình 1.1

## I. Tóm tắt lý thuyết

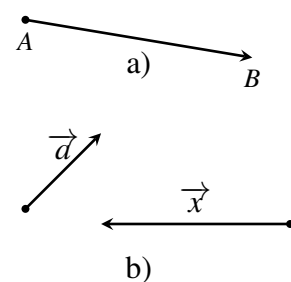
### 1. Định nghĩa, sự xác định véc-tơ

**Định nghĩa 1 (Véc-tơ).** Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.

Véc-tơ có điểm đầu (gốc)  $A$ , điểm cuối (ngọn)  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ . Véc-tơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , ... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

Một véc-tơ hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.

⚠ Với hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$  ta chỉ có một đoạn thẳng ( $AB$  hoặc  $BA$ ), nhưng có hai véc-tơ khác nhau là  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$ .



Hình 1.2

**Định nghĩa 2 (Độ dài véc-tơ).** Độ dài của đoạn thẳng  $AB$  là độ dài (hay mô-đun) của véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ , kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ . Tức là  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ .

Đương nhiên  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ .

**Định nghĩa 3 (Véc-tơ-không).** Véc-tơ-không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Véc-tơ-không được kí hiệu là  $\vec{0}$ .

Ta có  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$

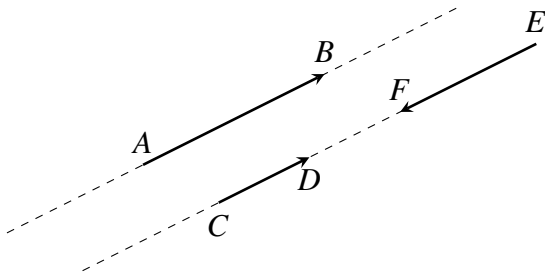
## 2. Hai véc-tơ cùng phương, cùng hướng

**Định nghĩa 4 (Giá véc-tơ).** Giá của một véc-tơ khác  $\vec{0}$  là đường thẳng chứa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

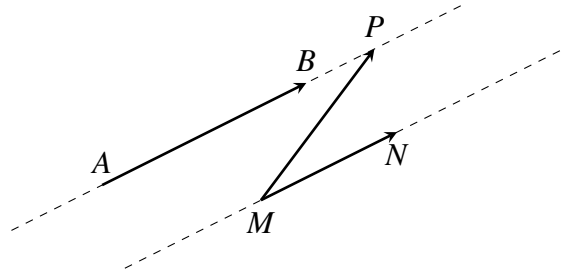
**Định nghĩa 5 (Phương, hướng véc-tơ).** Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Trên hình 1.3a) ta có các véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{EF}$  cùng phương. Trên hình 1.3b) ta có  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MN}$  cùng phương, còn  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MP}$  không cùng phương.

Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Chẳng hạn  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  cùng hướng,  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{EF}$  ngược hướng (hình 1.3a).



Hình 1.3a)



Hình 1.3b)

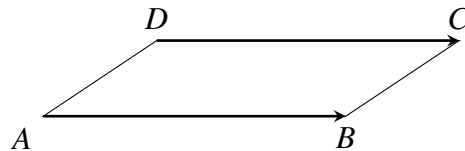
Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

**!** Khi nói hai véc-tơ cùng hướng hay ngược hướng thì chúng đã cùng phương. Véc-tơ  $\vec{0}$  cùng phương, cùng hướng với mọi véc-tơ.

## 3. Hai véc-tơ bằng nhau

**Định nghĩa 6 (Véc-tơ bằng nhau).** Hai véc-tơ gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

Chẳng hạn, nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .



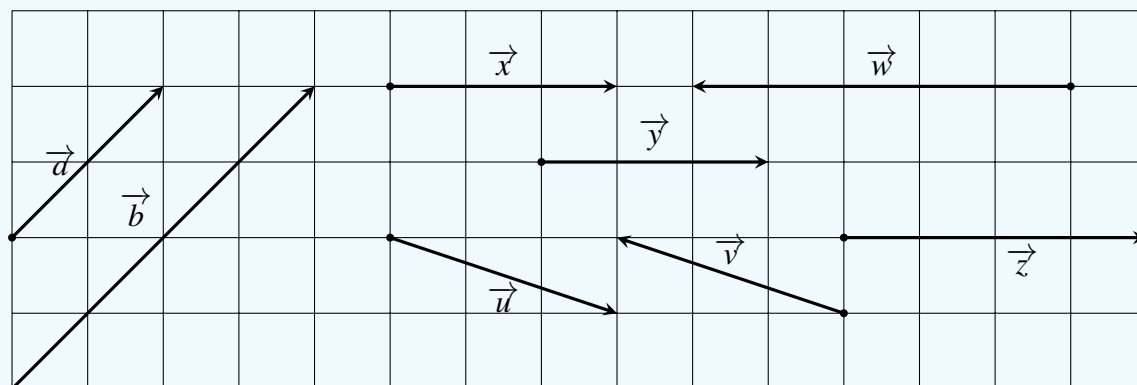
**!** Khi cho trước véc-tơ  $\vec{d}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{d}$ . Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ .

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ

- Xác định một véc-tơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai véc-tơ theo định nghĩa.
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một véc-tơ.

**Ví dụ 1.** Trong hình 1.4, hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các véc-tơ bằng nhau.



Hình 1.4

**Lời giải.**

- + Các véc-tơ cùng phương:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ;  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ ;  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  và  $\vec{w}$ .
- + Các véc-tơ cùng hướng:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ;  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  và  $\vec{z}$ .
- + Các véc-tơ ngược hướng:  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ ;  $\vec{w}$  và  $\vec{x}$ ;  $\vec{w}$  và  $\vec{y}$ ;  $\vec{w}$  và  $\vec{z}$ .
- + Các véc-tơ bằng nhau:  $\vec{x} = \vec{y}$ .

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ .

- a) Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ  $\vec{0}$ , cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$  và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.
- b) Liệt kê các véc-tơ khác véc-tơ  $\vec{0}$ , cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.
- c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ  $\overrightarrow{NP}$  mà có điểm đầu là  $A$  hoặc  $B$ .

**Lời giải.**

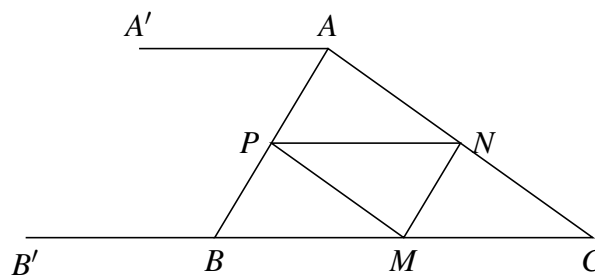
- a) Các véc-tơ khác véc-tơ  $\vec{0}$ , cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$  là  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$ .
- b) Các véc-tơ khác véc-tơ  $\vec{0}$ , cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$ .

- c) Trên tia  $CB$  lấy điểm  $B'$  sao cho  $BB' = NP$ .

Khi đó ta có  $\overrightarrow{BB'}$  là véc-tơ có điểm đầu là  $B$  và bằng véc-tơ  $\overrightarrow{NP}$ .

Qua  $A$  dựng đường thẳng song song với đường thẳng  $NP$ . Trên đường thẳng đó lấy điểm  $A'$  sao cho  $\overrightarrow{AA'}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{NP}$  và  $AA' = NP$ .

Khi đó ta có  $\overrightarrow{AA'}$  là véc-tơ có điểm đầu là  $A$  và bằng véc-tơ  $\overrightarrow{NP}$ .



**Ví dụ 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Hãy tính độ dài của véc-tơ  $\overrightarrow{MD}$  và  $\overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải.**

Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông  $MAD$  ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra  $|\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

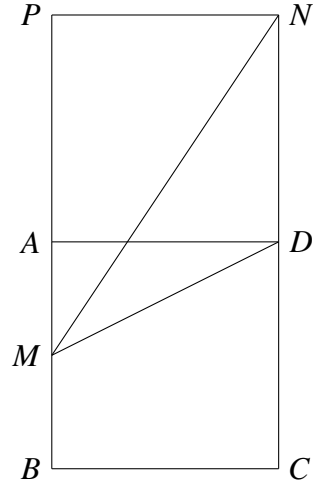
Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $AB$  tại  $P$ .

Khi đó tứ giác  $ADNP$  là hình vuông và  $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$ .

Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông  $NPM$  ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Suy ra  $|\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ .



### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ  $\overrightarrow{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

**Lời giải.** Từ hai điểm phân biệt, chẳng hạn  $A, B$ , ta xác định được hai véc-tơ khác véc-tơ-không là  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ . Mà từ năm đỉnh  $A, B, C, D, E$  của ngũ giác ta có 10 cặp điểm phân biệt, do đó có 20 véc-tơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Tìm các véc-tơ từ 5 điểm  $A, B, C, D, O$

a) Bằng véc-tơ  $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OB}$ .

b) Có độ dài bằng  $|\overrightarrow{OB}|$ .

**Lời giải.**

a)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ .

b)  $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OD}$ .

**Bài 3.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt thẳng hàng.

a) Khi nào thì hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng?

b) Khi nào thì hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  ngược hướng?

**Lời giải.**

a)  $A$  nằm ngoài đoạn  $BC$ .

b)  $A$  nằm trong đoạn  $BC$ .

**Bài 4.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt.

a) Nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$  thì ba điểm  $A, B, C$  có đặc điểm gì?

b) Nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  thì bốn điểm  $A, B, C, D$  có đặc điểm gì?

**Lời giải.**

- a)  $B$  là trung điểm của  $AC$ .
- b)  $A, B, C, D$  thẳng hàng hoặc  $ABCD$  là hình bình hành.

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  và  $G$  là trọng tâm. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AG$ . Tính độ dài của các véc-tơ  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BI}$ .

**Lời giải.** Sử dụng tính chất của trọng tâm và định lý Pythagoras.

**Đáp án:**  $|\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  và  $|\overrightarrow{BI}| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

### Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau

Để chứng minh hai véc-tơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

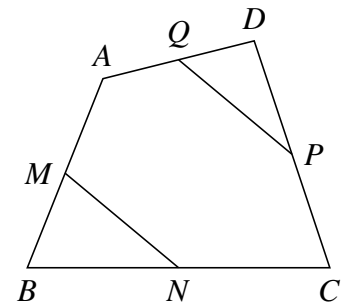
**Ví dụ 4.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .

**Lời giải.**

Do  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$  nên  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  suy ra  $MN \parallel AC$  và  $MN = \frac{1}{2}AC$  (1).

Tương tự,  $QP$  là đường trung bình của tam giác  $ADC$  suy ra  $QP \parallel AC$  và  $QP = \frac{1}{2}AC$  (2).

Từ (1) và (2) kết hợp hình vẽ suy ra  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .



**Ví dụ 5.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Dựng điểm  $B'$  sao cho  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GA}$ .

- a) Chứng minh  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ .
- b) Gọi  $J$  là trung điểm của  $BB'$ . Chứng minh  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$ .

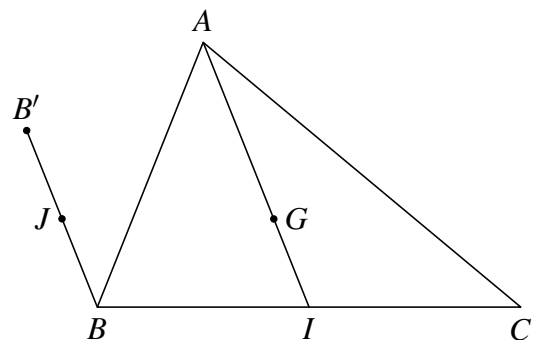
**Lời giải.**

a) Vì  $I$  là trung điểm của  $BC$  nên  $BI = CI$  và  $\overrightarrow{BI}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{IC}$  do đó  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AG}$  suy ra  $BB' = AG$  và  $BB' \parallel AG$ . Do đó  $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{JG}$  cùng hướng (1).

Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên  $IG = \frac{1}{2}AG$ ,  $J$  là trung điểm  $BB'$  suy ra  $BJ = \frac{1}{2}BB'$ . Vì vậy  $BJ = IG$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$ .

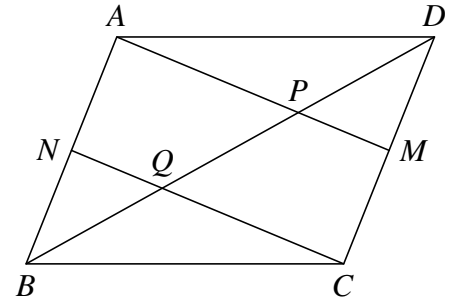


### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 6.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DC, AB$ ;  $P$  là giao điểm của  $AM$  và  $DB$ ;  $Q$  là giao điểm của  $CN$  và  $DB$ . Chứng minh  $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$ .

**Lời giải.**

Chứng minh  $DP = PQ$  dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác  $DQC$  và  $PQ = QB$  dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác  $ABP$ . Suy ra  $DP = PQ = QB$ .

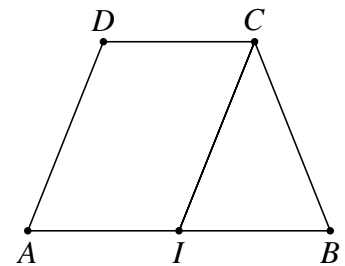


**Bài 7.** Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy là  $AB$  và  $CD$  với  $AB = 2CD$ . Từ  $C$  vẽ  $\vec{CI} = \vec{DA}$ . Chứng minh rằng:

- a)  $\vec{DI} = \vec{CB}$ .  
b)  $\vec{AI} = \vec{IB} = \vec{DC}$ .

**Lời giải.**

- a) Chứng minh  $BICD$  là hình bình hành.  
b) Chứng minh  $I$  là trung điểm  $AB$  và dữ kiện tứ giác  $BICD$  là hình bình hành đã chứng minh ở câu a.



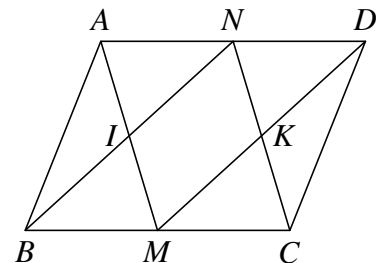
**Bài 8.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Điểm  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $BN$ ,  $K$  là giao điểm của  $DM$  và  $CN$ . Chứng minh  $\vec{DK} = \vec{IB}$ .

**Lời giải.**

Theo giả thiết  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$  nên  $AN = \frac{1}{2}AD$  và  $BM = \frac{1}{2}BC$ . Mà  $AD = BC$  do  $ABCD$  là hình bình hành. Suy ra  $ANMB$  là hình bình hành.

Ta có Điểm  $I$  là giao điểm của hai đường chéo  $AM$  và  $BN$  của hình bình hành  $ANMB$  nên  $I$  là trung điểm của  $BN$ .

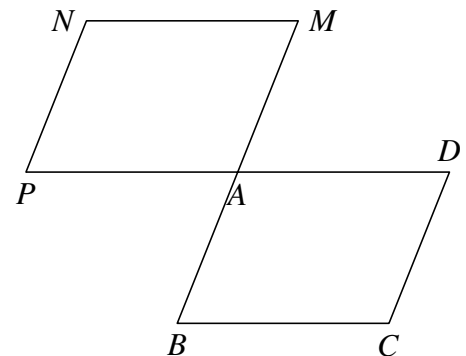
Tương tự, ta cũng chứng minh được  $K$  là trung điểm của  $DM$ . Từ đó dễ dàng chứng minh được  $DKBI$  là hình bình hành, suy ra  $\vec{DK} = \vec{IB}$ .



**Bài 9.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\vec{AM} = \vec{BA}$ ,  $\vec{MN} = \vec{DA}$ ,  $\vec{NP} = \vec{DC}$ ,  $\vec{PQ} = \vec{BC}$ . Chứng minh  $\vec{AQ} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

Chứng minh  $AMNP$  và  $QMNP$  đều là hình bình hành, suy ra  $A \equiv Q$ , suy ra  $\vec{AQ} = \vec{0}$ .

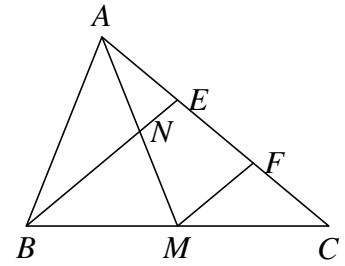


**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy hai điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ;  $BE$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Chứng minh  $\vec{NA} = \vec{MN}$ .

**Lời giải.**

$FM \parallel BE$  vì  $FM$  là đường trung bình của tam giác  $CEB$ .

Ta có  $EA = EF$ . Vậy  $EN$  là đường trung bình của tam giác  $AFM$ . Suy ra  $N$  là trung điểm của  $AM$ . Vậy  $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$ .



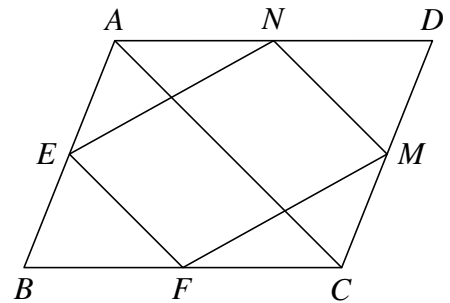
## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 11.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E, F, M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB, BC, CD$  và  $DA$ .

- Chứng tỏ rằng 3 vectơ  $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$  cùng phương;
- Chứng tỏ rằng  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$ . Suy ra tứ giác  $EFMN$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

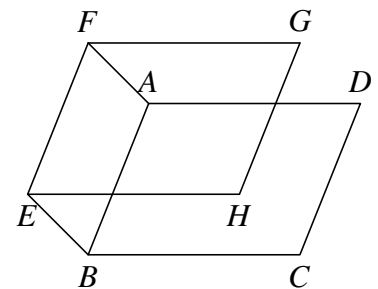
- Dựa vào tính chất đường trung bình, ta suy ra được  $EF \parallel AC \parallel MN \Rightarrow \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$  cùng phương;
- Dựa vào tính chất đường trung bình, ta suy ra được  $EF = MN = \frac{1}{2}AC$  kết hợp với câu a)  $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$ . Suy ra tứ giác  $EFMN$  là hình bình hành.



**Bài 12.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$ . Đặt  $\overrightarrow{EH}$  và  $\overrightarrow{FG}$  bằng  $\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh  $CDGH$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$  nên tứ giác  $EFGH$  là hình bình hành, suy ra  $GH \parallel FE \parallel AB \parallel DC$  và  $GH = FE = AB = DC$  hay tứ giác  $CDGH$  là hình bình hành.



**Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của đoạn  $BC$ , phân giác ngoài góc  $A$  cắt  $BC$  ở  $D$ . Giả sử giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ADM$  với  $AB, AC$  lần lượt là  $E, F$  (khác  $A$ ). Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn  $EF$ . Chứng minh hai véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{AD}$  cùng phương.

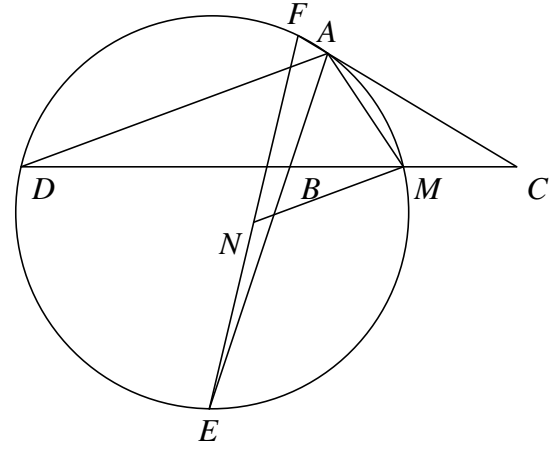
**Lời giải.**

Kẻ đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Gọi  $P$  là điểm chính giữa cung  $BC$  không chứa  $A$ ,  $PA \perp DA$ .  $Q$  là điểm chính giữa cung  $BC$  chứa  $A$ . Ta có  $A, D, Q$  thẳng hàng và  $P, M, O, Q$  cũng thẳng hàng.

Để nhận thấy  $DP$  là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ADM$ . Tam giác  $PEF$  cân tại  $P$  từ đó có  $DP$  là trung trực của  $EF$  nên  $DP \perp EF$  tại  $N$ .

Hai tam giác  $PED$  và  $PCQ$  đồng dạng,  $EN$  và  $CM$  là đường cao nên suy ra  $\frac{PN}{PD} = \frac{PM}{PQ} \Rightarrow MN \parallel DQ$ .

Vậy,  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{AD}$  cùng phương.



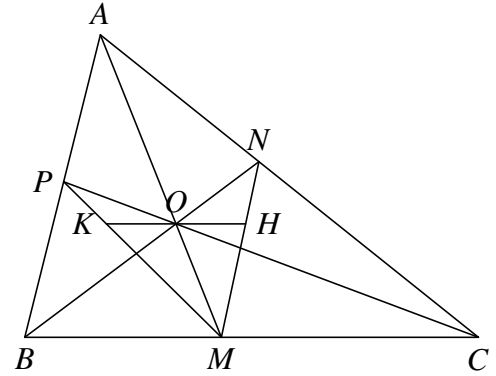
**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  có  $O$  nằm trong tam giác. Các tia  $AO, BO, CO$  cắt các cạnh đối diện lần lượt tại  $M, N, P$ . Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $MN, MP$  tại  $H, K$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$ .

**Lời giải.**

Do  $HK \parallel BC$  nên ta có:  $\frac{OH}{BM} = \frac{ON}{BN} \Rightarrow OH = \frac{ON}{BN} \cdot BM$ ,  $\frac{OK}{CM} = \frac{OP}{CP} \Rightarrow OK = \frac{OP}{CP} \cdot CM$ . (1)

Mặt khác, ta lại có  $\frac{ON}{BN} = \frac{S_{AON}}{S_{ABN}} = \frac{S_{CON}}{S_{CBN}} = \frac{S_{AON} + S_{CON}}{S_{ABN} + S_{CBN}} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}$ ,  
 $\frac{OP}{CP} = \frac{S_{AOP}}{S_{ACP}} = \frac{S_{BOP}}{S_{BCP}} = \frac{S_{AOP} + S_{BOP}}{S_{ACP} + S_{BCP}} = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $OK = OH$ . Vì vậy,  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$ .

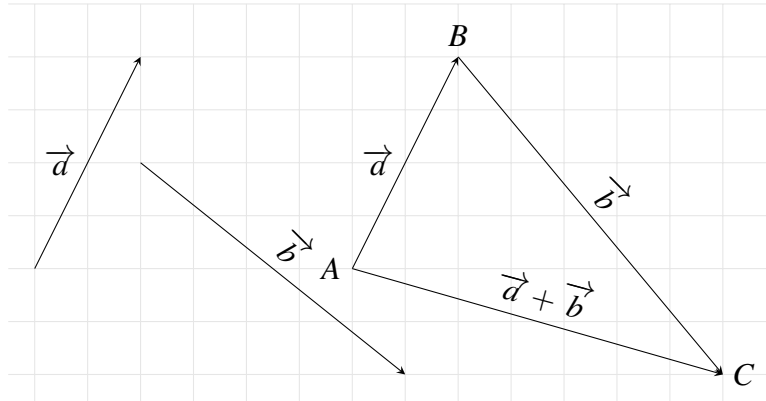


## §2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

### I. Tóm tắt lí thuyết

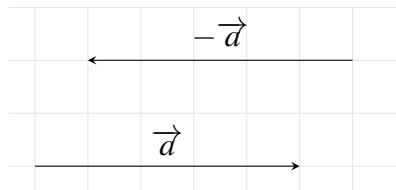
#### 1. Định nghĩa tổng và hiệu hai véc-tơ

**Định nghĩa 1 (Phép cộng).** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Với điểm  $A$  bất kỳ, dựng  $\vec{AB} = \vec{a}$ , dựng  $\vec{BC} = \vec{b}$ . Khi đó, véc-tơ  $\vec{AC}$  được gọi là véc-tơ tổng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
Ta ký hiệu:  $\vec{a} + \vec{b}$ , tức là:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .



Phép toán tìm tổng của hai véc-tơ còn gọi là **phép cộng véc-tơ**.

**Định nghĩa 2 (Véc-tơ đối).** Cho véc-tơ  $\vec{a}$ , véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với  $\vec{a}$  được gọi là véc-tơ đối của  $\vec{a}$ , ký hiệu là  $-\vec{a}$ .

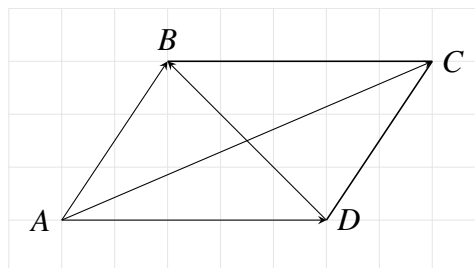


**Định nghĩa 3 (Phép trừ).** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Phép trừ của  $\vec{a}$  với  $\vec{b}$  được định nghĩa là phép cộng của  $\vec{a}$  với  $-\vec{b}$ .  
Ký hiệu  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

#### 2. Quy tắc hình bình hành

Cho hình bình hành  $ABCD$ , khi đó

- $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$
- $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$



#### 3. Các tính chất của phép cộng, trừ hai véc-tơ

**Tính chất 1.** (giao hoán và kết hợp)

a)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ,

b)  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ .

**Tính chất 2.** (véc-tơ đối)

a)  $-\vec{0} = \vec{0}$

b)  $\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$ ,

c)  $-\vec{AB} = \vec{BA}$ .

**Tính chất 3.** (cộng với véc-tơ  $\vec{0}$ )  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .**Tính chất 4.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  ta có:

a)  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  (quy tắc 3 điểm),

b)  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$  (quy tắc trừ).

**Tính chất 5.** a) (quy tắc trung điểm)  $I$  là trung điểm  $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ ,

b) (quy tắc trọng tâm)  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Xác định véc-tơ

Dựa vào quy tắc cộng, trừ, quy tắc 3 điểm, hình bình hành, ta biến đổi và dựng hình để xác định các véc-tơ. Chú ý các quy tắc sau đây.

a)  $-\vec{AB} = \vec{BA}$ .

c)  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$  (quy tắc trừ).

b)  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  (quy tắc 3 điểm).

d)  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$  ( $ABCD$  là hình bình hành).

**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Xác định véc-tơ  $\vec{d} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .

c) Xác định véc-tơ  $\vec{c} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

b) Xác định véc-tơ  $\vec{b} = \vec{AB} - \vec{AC}$ .

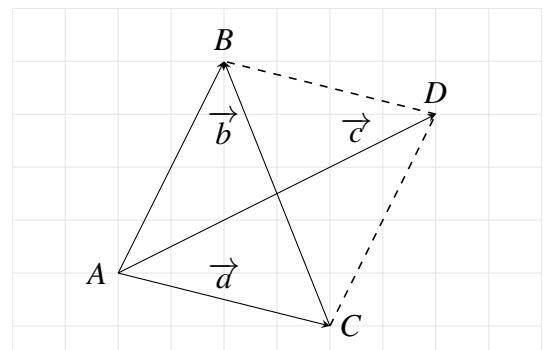
### Lời giải.

Ta có

a)  $\vec{d} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

b)  $\vec{b} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ .

c)  $\vec{c} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ , với  $ABDC$  là hình bình hành.

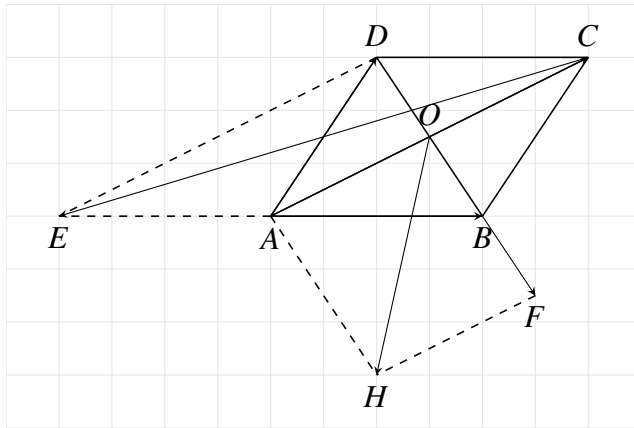
**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , có tâm  $O$ . Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a)  $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .

c)  $\vec{z} = \vec{CD} - \vec{AC}$ .

b)  $\vec{y} = \vec{AO} + \vec{CD}$ .

d)  $\vec{t} = \vec{OA} - \vec{BD}$ .

**Lời giải.**

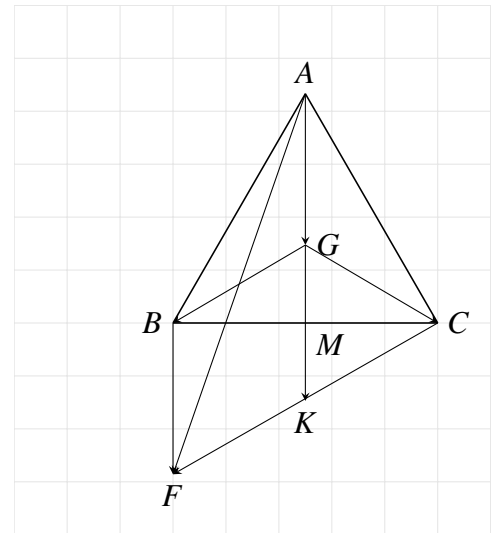
- a) Theo tính chất hình bình hành  $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .  
 b)  $\vec{y} = \vec{AO} + \vec{CB} = \vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB}$ .  
 c)  $\vec{z} = \vec{CD} - \vec{AC} = \vec{CD} + \vec{CA} = \vec{CE}$  (dựng hình bình hành CDEA).  
 d)  $\vec{t} = \vec{OA} - \vec{BD} = \vec{OA} + \vec{DB} = \vec{OA} + \vec{OF} = \vec{OH}$ . Trong đó, ta dựng  $\vec{OF} = \vec{DB}$  và hình bình hành OFHA.

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm và M là trung điểm cạnh BC. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

- a)  $\vec{GB} + \vec{GC}$ .  
 b)  $\vec{AG} + \vec{CB}$ .  
 c)  $\vec{AB} + \vec{MC}$ .  
 d)  $\vec{AB} + \vec{GB} + \vec{GC}$ .

**Lời giải.**

- a)  $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GK}$  (dựng hình bình hành GBKC).  
 b)  $\vec{AG} + \vec{CB} = \vec{BF} + \vec{CB} = \vec{CF}$  (dựng  $\vec{BF} = \vec{AG}$ ).  
 c)  $\vec{AB} + \vec{MC} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AM}$ .  
 d)  $\vec{AB} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AB} + \vec{GK} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF}$ .

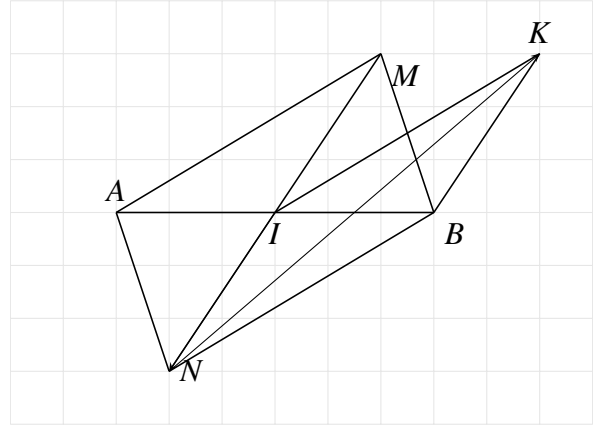


**Ví dụ 4.** Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I. Gọi M là một điểm tùy ý không nằm trên đường thẳng AB. Lấy trên tia MI một điểm N sao cho  $IN = MI$ . Hãy xác định các véc-tơ:

- a)  $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MI}$ .  
 b)  $\vec{AM} + \vec{NI}$ .

**Lời giải.**

- a)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IN}$ .  
 b)  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NK}$ .



### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Xác định các véc-tơ đối của các véc-tơ sau đây:

- a)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}$ .  
 b)  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}$ .

**Lời giải.**

- a)  $-\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, -\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ .  
 b)  $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}, -\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

**Bài 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Xác định các véc-tơ sau đây:

- a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ .  
 b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$ .  
 c)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$ .  
 d)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải.**

- a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .  
 b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CA}$ .  
 c)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ .  
 d)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm véc-tơ  $\vec{x}$  trong các trường hợp:

- a)  $\vec{x} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$ .  
 b)  $\overrightarrow{CA} - \vec{x} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải.**

- a)  $\vec{x} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ .  
 b)  $\vec{x} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$ , với  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$ .

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $BC, AC, AB$ . Xác định các véc-tơ sau đây:

- a)  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NA}$ .  
 b)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{CM}$ .

**Lời giải.**

- a)  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$ .  
 b)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{ND}$  (dựng thêm điểm  $D$  sao cho  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$ ).

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm  $AC$  và  $N$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $M$ . Xác định các véc-tơ sau đây:

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}$ . c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MN}$ .  
 b)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CN}$ . d)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải.** Ta có, tứ giác  $BANC$  là hình bình hành.

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$  (tính chất hình bình hành  $BANC$ ).  
 b)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BE}$  (dựng  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CN}$ ).  
 c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ .  
 d)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{BM}$ .

**Bài 6.** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$ , gọi  $M, N, P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$ . Xác định các véc-tơ sau đây:

- a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD}$ . b)  $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{PS}$ .

**Lời giải.**

- a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0}$ .  
 b)  $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0}$ .

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt nằm trên cạnh  $BC, AC, AB$  sao cho  $BD = \frac{1}{3}BC, CE = \frac{1}{3}CA, AF = \frac{1}{3}AB$ . Xác định các véc-tơ sau đây:

- a)  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$  b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$

**Lời giải.**

- a) Lấy thêm các điểm  $P, Q$  về phía ngoài cạnh  $AB, AC$  sao cho  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{AF}$ . Theo đó, tam giác  $APQ$  đồng dạng tam giác  $ACB$  nên ta có  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BD}$ . Khi đó,  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{0}$ .  
 b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF}) - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$ .

## Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước

Để xác định điểm  $M$  thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước, ta làm như sau:

◦ **HƯỚNG 1:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng  $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$ , trong đó  $A$  là điểm cố định và  $\vec{v}$  là véc-tơ cố định.

– Lấy  $A$  làm điểm gốc, dựng véc-tơ bằng  $\vec{v}$  thì điểm ngọn chính là điểm  $M$  cần tìm.

◦ **HƯỚNG 2:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ , trong đó  $A, B$  là hai điểm cố định.

– Khi đó điểm  $M$  cần tìm trùng với điểm  $B$ .

◦ **HƯỚNG 3:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn đúng với mọi điểm  $M$ .

– Khi đó điểm  $M$  cần tìm là điểm tùy ý.

◦ **HƯỚNG 4:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn sai với mọi điểm  $M$ .

– Khi đó không có điểm  $M$  nào thỏa điều kiện.

◦ **HƯỚNG 5:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng  $|\overrightarrow{IM}| = |\overrightarrow{AB}|$ , trong đó  $I, A, B$  là các điểm cố định.

– Khi đó điểm  $M$  cần tìm thuộc đường tròn tâm  $I$ , bán kính  $AB$ .

◦ **HƯỚNG 6:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ , trong đó  $A, B$  là các điểm cố định phân biệt.

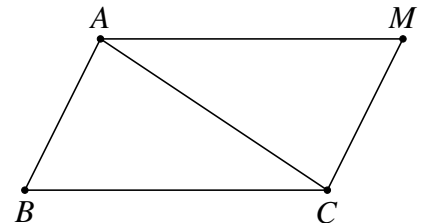
– Khi đó điểm  $M$  cần tìm thuộc đường trung trực của đoạn  $AB$ .

**Ví dụ 5.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$$

$\Rightarrow$  Điểm  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .

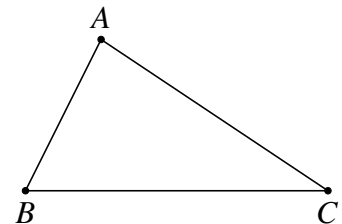


**Ví dụ 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM}$$

$\Rightarrow$  Điểm  $M$  trùng với điểm  $A$ .

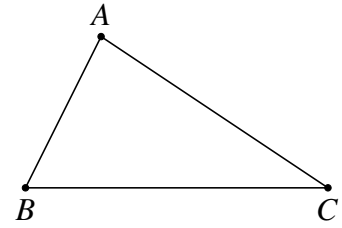


**Ví dụ 7.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow$  không có  $M$  nào thỏa điều kiện bài toán.

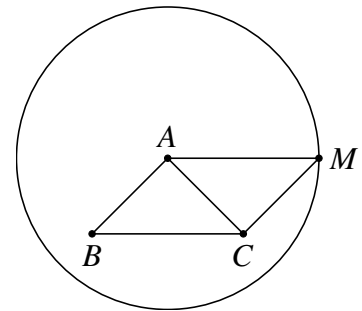


**Ví dụ 8.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ .

**Lời giải.**

$$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MA = CB$$

$\Rightarrow$  Điểm  $M$  thuộc đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $CB$ .



### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$ . Dựng điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \quad (1)$$

**Lời giải.** Ta có (1)  $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$ . Vậy bốn điểm  $A, C, B, M$  tạo thành hình bình hành.

**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AM}$ .

$\Rightarrow$  Điểm  $M$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ACBM$ .

**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $AC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IM}$ .

$\Rightarrow M$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $IABM$ .

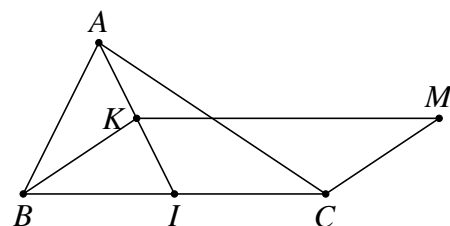
**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $BC, AI$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BK}$$

$\Rightarrow$  Điểm  $M$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $CBKM$ .



**Bài 12.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OM}$ .

**Lời giải.**  $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AM}$ .

$\Rightarrow$  Điểm  $M$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $AODM$ .

**Bài 13.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{CA} - \vec{BM} + \vec{BC} + \vec{AD} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**  $\vec{CA} - \vec{BM} + \vec{BC} + \vec{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{CA} - \vec{CM} + \vec{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MD} = \vec{0}$ .  
 $\Rightarrow$  Điểm  $M$  trùng với điểm  $D$ .

**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{CA} - \vec{CM} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**  $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{CA} - \vec{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} - \vec{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} = \vec{AM}$ .  
 $\Rightarrow$  Điểm  $M$  trùng với điểm  $G$ .

**Bài 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{BA} + \vec{MD} + \vec{DO} = \vec{MA} + \vec{BC}$ .

**Lời giải.**  $\vec{BA} + \vec{MD} + \vec{DO} = \vec{MA} + \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{MA} - \vec{MD} - \vec{DO} = \vec{BA} - \vec{BC}$   
 $\Leftrightarrow \vec{DA} - \vec{DO} = \vec{BA} - \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{OA} = \vec{CA}$ .  
 $\Rightarrow$  Không có điểm  $M$  nào thỏa điều kiện trên.

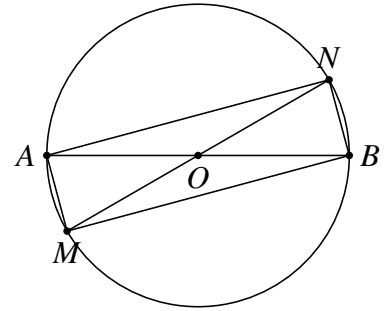
**Bài 16.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$ .

**Lời giải.**  
 $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow MN = BA$ .

Với  $N$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $AMBN$ . Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

$\Rightarrow 2MO = 2OB \Rightarrow MO = OB$ .

$\Rightarrow$  Điểm  $M$  thuộc đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $OB$ .



**Bài 17.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{MA} - \vec{CA}| = |\vec{AC} - \vec{AB}|$ .

**Lời giải.**  $|\vec{MA} - \vec{CA}| = |\vec{AC} - \vec{AB}| \Leftrightarrow |\vec{MC}| = |\vec{BC}| \Leftrightarrow MC = BC$ .  
 $\Rightarrow$  Điểm  $M$  thuộc đường tròn tâm  $C$ , bán kính  $BC$ .

**Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{BA} - \vec{BM}| = |\vec{MA} + \vec{AC}|$ .

**Lời giải.**  $|\vec{BA} - \vec{BM}| = |\vec{MA} + \vec{AC}| \Leftrightarrow MA = MC$ .  
 $\Rightarrow$  Điểm  $M$  thuộc đường trung trực của đoạn thẳng  $AC$ .

**Bài 19.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CM} = \vec{AE} + \vec{BM} + \vec{CD}$ .

**Lời giải.**  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CM} = \vec{AE} + \vec{BM} + \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AD} - \vec{AE} + \vec{BE} - \vec{BM} + \vec{CM} - \vec{CD} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \vec{ED} + \vec{ME} + \vec{DM} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MD} + \vec{DM} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MM} = \vec{0}$ .  
 $\Rightarrow$  Điểm  $M$  là điểm tùy ý.

### Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ

– Độ dài của véc-tơ bằng độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

– Ta thường sử dụng các công thức về cạnh như hệ thức lượng tam giác vuông, định lý Pytago, tính chất tam giác đều, hình chữ nhật, hình vuông,...

**Ví dụ 9.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính  $|\vec{AB} - \vec{AC}|$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$  nên  $|\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = CB = a$ .

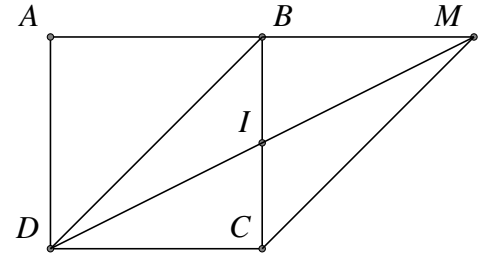
**Ví dụ 10.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $|\vec{DB} + \vec{DC}|$ .

**Lời giải.**

Vẽ hình bình hành  $CDBM$  thì  $DM$  cắt  $BC$  tại trung điểm  $I$  của mỗi đường.

Ta có  $\vec{DB} + \vec{DC} = \vec{DM}$  nên  $|\vec{DB} + \vec{DC}| = DM = 2DI$

Mà  $DI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$  nên  $|\vec{DB} + \vec{DC}| = a\sqrt{5}$ .



**Ví dụ 11.** Chứng minh rằng nếu  $\triangle ABC$  thỏa mãn  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$  thì  $\triangle ABC$  là tam giác vuông.

**Lời giải.**

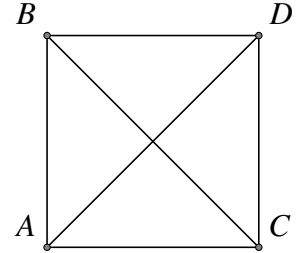
Dựng hình bình hành  $ABDC$ .

Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

Theo quy tắc hiệu hai véc-tơ ta có  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ .

Từ giả thiết suy ra  $|\vec{AD}| = |\vec{CB}|$ , tức là  $AD = BC$ .

Hình bình hành  $ABDC$  có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình chữ nhật, tức là tam giác  $ABC$  vuông.



**Ví dụ 12.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Hãy tính độ dài của véc-tơ sau  $\vec{MD}$ ,  $\vec{MN}$ .

**Lời giải.**

Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông  $MAD$  ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

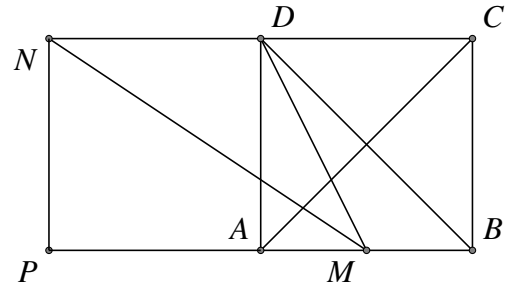
$$\text{Suy ra } |\vec{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $AB$  tại  $P$ .

Khi đó tứ giác  $ADNP$  là hình vuông và  $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$ .

Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông  $NPM$  ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}. \text{ Suy ra } |\vec{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$



**Ví dụ 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ ,  $M$  là một điểm bất kỳ. Tính độ dài véc-tơ  $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}$ .

**Lời giải.** Áp dụng quy tắc trừ ta có

$$\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD} = (\vec{MA} - \vec{MB}) - (\vec{MC} - \vec{MD}) = \vec{BA} - \vec{DC} = \vec{BA} - \vec{DC}$$

Lấy  $B'$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $A$

$$\text{Khi đó } -\vec{DC} = \vec{AB'} \Rightarrow \vec{BA} - \vec{DC} = \vec{BA} + \vec{AB'} = \vec{BB'}$$

$$\text{Suy ra } |\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}| = |\vec{BB'}| = BB' = 2a.$$

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 20.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $5a$ . Tính độ dài các véc-tơ  $\vec{AB} + \vec{BC}$ ,  $\vec{CA} - \vec{CB}$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AC = 5a$ .

Ta có  $\vec{CA} - \vec{CB} = \vec{BA} \Rightarrow |\vec{CA} - \vec{CB}| = |\vec{BA}| = BA = 5a$ .

**Bài 21.** Xét các véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Khi nào thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

**Lời giải.** Từ điểm  $O$  nào đó, ta vẽ  $\vec{OA} = \vec{a}$  và  $\vec{AB} = \vec{b}$ . Khi đó  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ . Như vậy:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{OB}| = |\vec{OA}| + |\vec{AB}| \Leftrightarrow OB = OA + AB.$$

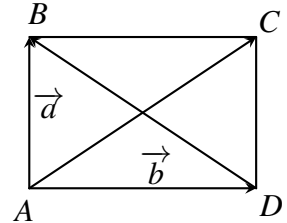
Điều này xảy ra khi và chỉ khi  $O, A, B$  thẳng hàng theo thứ tự này. Hay hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

**Bài 22.** Xét các véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Khi nào thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ .

**Lời giải.**

Từ điểm  $A$  nào đó, ta kẻ  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ . Vẽ điểm  $C$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành ta có:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$ . Theo quy tắc về hiệu véc-tơ ta có:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ . Như vậy:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{AC}| = |\vec{DB}| \Leftrightarrow AC = BD.$$



Điều này xảy ra khi  $ABCD$  là hình chữ nhật. Vậy  $AB$  vuông góc với  $AD$  hay giá của hai véc-tơ vuông góc với nhau.

**Bài 23.** Chứng minh rằng với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương thì

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

**Lời giải.** Gọi  $A, B$  là điểm đầu và điểm cuối của  $\vec{a}$ . Vẽ điểm  $C$  sao cho  $\vec{BC} = \vec{b}$ . Vì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nên ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Ta có:

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| = AB - BC < AC = |\vec{AB} + \vec{BC}| < AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Bài toán được chứng minh xong.

**Bài 24.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AB = a$  và  $BC = 2b$  (với  $a > b > 0$ ). Tính độ dài véc-tơ tổng  $\vec{AB} + \vec{BH}$  và độ dài véc-tơ hiệu  $\vec{AB} - \vec{CA}$ .

**Lời giải.**

Do tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH$  nên  $H$  là trung điểm  $BC$ . Suy ra  $BH = b$ . Trong tam giác vuông  $ABH$ , ta có:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

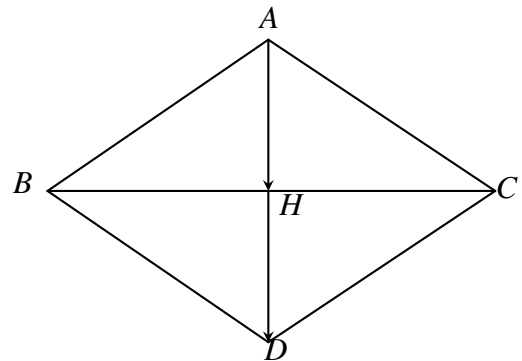
Ta có  $\vec{AB} + \vec{BH} = \vec{AH}$ .

$$\text{Suy ra } |\vec{AB} + \vec{BH}| = |\vec{AH}| = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Vẽ hình bình hành  $ABDC$ . Khi đó:

$$\vec{AB} - \vec{CA} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}.$$

$$\text{Do đó: } |\vec{AB} - \vec{CA}| = |\vec{AD}| = 2AH = 2\sqrt{a^2 - b^2}.$$



**Bài 25.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{5}$ . Tính độ dài các véc-tơ  $\vec{AB} + \vec{BC}$ ,  $\vec{CA} - \vec{CB}$ .

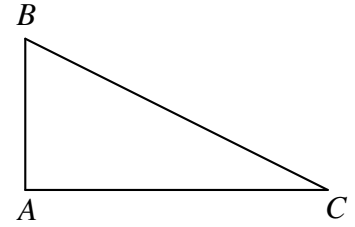
**Lời giải.**

Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$$

$$\text{Ta có } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AC = 2a.$$

$$\text{Ta có } \vec{CA} - \vec{CB} = \vec{BA} \Rightarrow |\vec{CA} - \vec{CB}| = |\vec{BA}| = BA = a.$$



**Bài 26.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , biết  $AB = a$  và  $AC = 3a$ . Tính độ dài véc-tơ tổng  $\vec{AB} + \vec{AC}$  và độ dài véc-tơ hiệu  $\vec{AB} - \vec{AC}$ .

**Lời giải.**

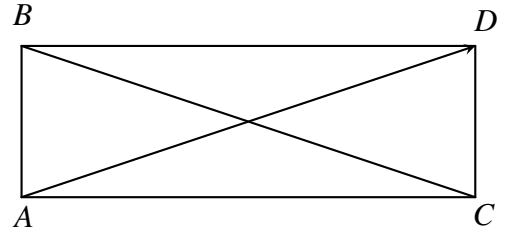
$$\text{Ta có } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}.$$

$$\text{Hay } BC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}.$$

$$\text{Ta có } \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}.$$

$$\text{Do đó } |\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = CB = a\sqrt{10}.$$

Vẽ hình bình hành  $ABDC$ . Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ . Do đó  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = a\sqrt{10}$ .



**Bài 27.** Cho hình thoi  $ABCD$  có tâm  $O$ , cạnh bằng 4 và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tính:

$$|\vec{AB} + \vec{AD}|, |\vec{OC} - \vec{AB}|, |-\vec{OD} + \vec{DB} + \vec{OC}|.$$

**Lời giải.**

Từ giả thiết suy ra  $ABD$  là tam giác đều cạnh bằng 4. Do đó

$$AO = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, AC = 4\sqrt{3}. \text{ Theo quy tắc hình bình hành ta}$$

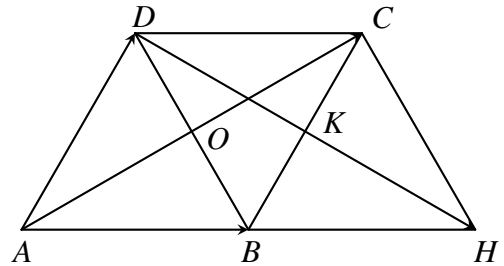
$$\text{có } \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}. \text{ Như vậy } |\vec{AB} + \vec{AD}| = AC = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có: } \vec{OC} - \vec{AB} = \vec{AO} - \vec{AB} = \vec{BO}.$$

$$\text{Suy ra } |\vec{OC} - \vec{AB}| = BO = \frac{1}{2}BD = 2.$$

Vẽ hình bình hành  $BDCH$ . Do  $DB = DC = 4$  nên hình bình hành  $BDCH$  là hình thoi, do đó  $DH = 2DK = 4\sqrt{3}$  ( $K$  là trung điểm của  $BC$ ).

$$\text{Ta có: } |-\vec{OD} + \vec{DB} + \vec{OC}| = |\vec{OC} - \vec{OD} + \vec{DB}| = |\vec{DC} + \vec{DB}| = |\vec{DH}| = 4\sqrt{3}.$$



**Bài 28.** Cho đường thẳng  $d$  và hai điểm  $A, B$  phân biệt, không nằm trên  $d$ . Tìm  $M \in d$  sao cho  $|\vec{MA} + \vec{BA}|$  nhỏ nhất.

**Lời giải.** Gọi  $C$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $A$ . Khi đó  $C$  là điểm cố định và

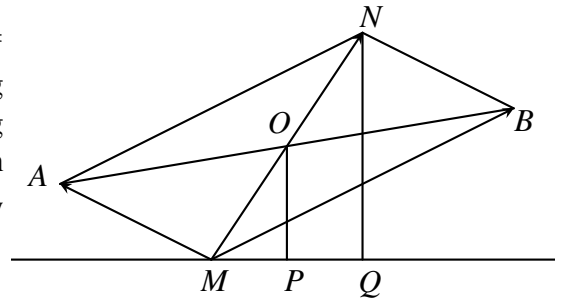
$$\vec{MA} + \vec{BA} = \vec{MA} + \vec{AC} = \vec{MC}.$$

Do đó  $|\vec{MA} + \vec{BA}| = |\vec{MC}| = MC$ . Như vậy  $|\vec{MA} + \vec{BA}|$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $MC$  nhỏ nhất, hay  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên đường thẳng  $d$ .

**Bài 29.** Cho đường thẳng  $d$  và hai điểm  $A, B$  nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng  $d$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|\vec{MA} + \vec{MB}|$ , với  $M \in d$ .

**Lời giải.**

Trong trường hợp  $M, A, B$  không thẳng hàng, ta dựng hình bình hành  $MANB$ . Khi đó  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MN}$ . Suy ra  $|\vec{MA} + \vec{MB}| = MN$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $MN$  và  $AB$ . Khi đó,  $O$  là trung điểm  $AB$  nên  $O$  là điểm cố định. Từ  $O, N$  lần lượt kẻ các đường vuông góc với  $d$ , cắt  $d$  tại  $P, Q$ . Ta có  $MN \geq NQ = 2OP$ . Còn khi  $M, A, B$  thẳng hàng thì hiển nhiên  $|\vec{MA} + \vec{MB}| > 2OP$ . Vậy  $|\vec{MA} + \vec{MB}|$  nhỏ nhất là bằng  $2OP$ , đạt được khi  $M$  trùng  $P$ .



#### Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

- Sử dụng quy tắc ba điểm.
- Sử dụng quy tắc hình bình hành.

**Ví dụ 14.** Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh rằng  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$ .

**Lời giải.** Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & (\vec{AB} - \vec{CB}) + (\vec{CD} - \vec{ED}) + \vec{EA} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \vec{AC} + \vec{CE} + \vec{EA} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \vec{AE} + \vec{EA} = \vec{0} \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

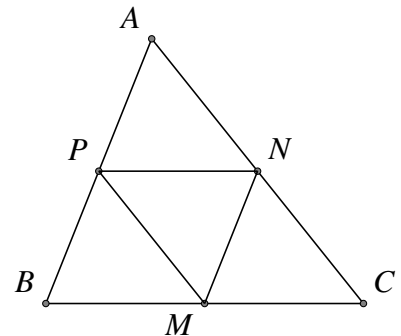
**Ví dụ 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.** Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\vec{BA} = \vec{CD}$   
Đẳng thức cần chứng minh tương đương với  $\vec{CD} + \vec{DC} = \vec{0}$  (luôn đúng)

**Ví dụ 16.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \begin{cases} \vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} \\ \vec{BN} = \vec{BA} + \vec{AN} \\ \vec{CP} = \vec{CB} + \vec{BP} \end{cases} \\ \Rightarrow & \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = (\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BA}) + (\vec{CM} + \vec{BP} + \vec{AN}) \\ & = \vec{0} + \vec{CM} + \vec{BP} + \vec{AN} \\ \text{Lại có } & \begin{cases} \vec{BP} = \vec{MN} \\ \vec{AN} = \vec{NC} \end{cases} \\ \Rightarrow & \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{CM} + \vec{MN} + \vec{NC} = \vec{0} \end{aligned}$$



**Ví dụ 17.** Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh rằng  $\vec{AC} + \vec{DE} - \vec{DC} - \vec{CE} + \vec{CB} = \vec{AB}$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned}\vec{AC} + \vec{DE} - \vec{DC} - \vec{CE} + \vec{CB} &= (\vec{AC} - \vec{DC}) + (\vec{DC} - \vec{CE}) \vec{CB} \\ &= \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB} \\ &= \vec{AB}\end{aligned}$$

**Ví dụ 18.** Chứng minh rằng nếu hai hình bình hành  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  có cùng tâm thì  $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} = \vec{0}$ .

**Lời giải.** Gọi  $O$  là tâm của hai hình bình hành.

Ta có

$$\begin{aligned}\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} &= (\vec{OA'} - \vec{OA}) + (\vec{OB'} - \vec{OB}) + (\vec{OC'} - \vec{OC}) + (\vec{OD'} - \vec{OD}) \\ &= -(\vec{OA} + \vec{OC}) - (\vec{OB} + \vec{OD}) + (\vec{OA'} + \vec{OC'}) + (\vec{OB'} + \vec{OD'}) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 30.** Chứng minh rằng  $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{BD}$ .

**Lời giải.** Ta có sự tương đương:

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{BD} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{BD}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

**Bài 31.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $M$  là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MD} - \vec{MC}.$$

**Lời giải.** Ta có:  $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ ,  $\vec{MD} - \vec{MC} = \vec{CD}$ . Mà  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\vec{BA} = \vec{CD}$ . Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.

**Bài 32.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng với điểm  $M$  bất kì ta luôn có  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned}\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD} &\Leftrightarrow (\vec{MA} - \vec{MB}) + (\vec{MC} - \vec{MD}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0} \quad (\text{luôn đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành}).\end{aligned}$$

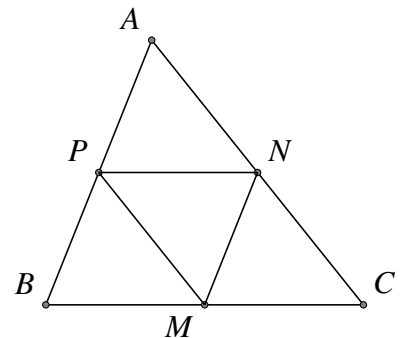
**Bài 33.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng với điểm  $O$  bất kì ta luôn có  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned}\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} \\ \Leftrightarrow (\vec{OA} - \vec{OM}) + (\vec{OB} - \vec{ON}) + (\vec{OC} - \vec{OP}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{NB} + \vec{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} &= \vec{0} \\ \text{Mặt khác } \begin{cases} \vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} \\ \vec{BN} = \vec{BA} + \vec{AN} \\ \vec{CP} = \vec{CB} + \vec{BP} \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} &= (\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BA}) + (\vec{CM} + \vec{BP} + \vec{AN}) \\ &= \vec{CM} + \vec{BP} + \vec{AN}\end{aligned}$$

Lại có  $\begin{cases} \vec{BP} = \vec{MN} \\ \vec{AN} = \vec{NC} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{CM} + \vec{MN} + \vec{NC} = \vec{0}$$



**Bài 34.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Dựng điểm  $B'$  sao cho  $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ . Gọi  $J$  là trung điểm của  $BB'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$ .

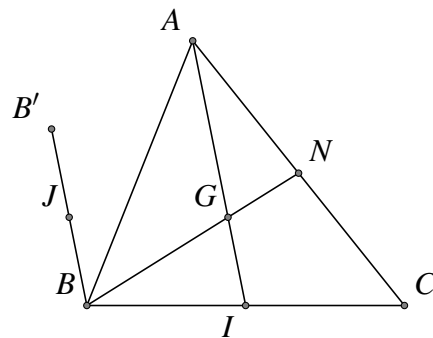
**Lời giải.** Ta có:

$\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow AGBB'$  là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{BJ}$  và  $\overrightarrow{GA}$  cùng hướng.

$\Rightarrow \overrightarrow{BJ}$  và  $\overrightarrow{IG}$  cùng hướng.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} BJ = \frac{1}{2}BB' \\ IG = \frac{1}{2}GA \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$$



**Bài 35.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$ .

**Lời giải.** Ta có: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AC'}) = \vec{0}$$

**Bài 36.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Nối  $AF$  và  $CE$ , hai đường này cắt đường chéo  $BD$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$ .

**Lời giải.** Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

Dễ thấy  $I$  là trung điểm của  $MN$ .

Dễ thấy  $M$  là trọng tâm  $\triangle ADC \Rightarrow DM = 2MI$ .

$N$  là trọng tâm tam giác  $\triangle ABC \Rightarrow BN = 2NI$

$$\Rightarrow DM = MN = NB \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$$

**Bài 37.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên các đoạn thẳng  $DC, AB$  theo thứ tự lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $DM = BN$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AM, DB$  và  $Q$  là giao điểm của  $CN, DB$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$ .

**Lời giải.** Ta có  $AMCN$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$

$$\triangle DPM = \triangle BQN \Rightarrow DP = QB \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$$

**Bài 38.** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  $B'$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $O$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$  và  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\widehat{BCB'} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

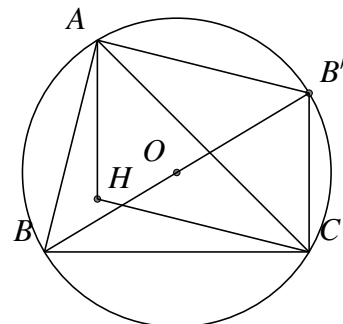
$\Rightarrow AH$  song song với  $B'C$  (cùng vuông góc với  $BC$ )

$\widehat{BAB'} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CH$  song song với  $AB'$  (cùng vuông góc với  $AB$ ).

$\Rightarrow AHCB'$  là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C} \text{ và } \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}.$$



**Bài 39.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = \frac{1}{3}AC$  và  $BE$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Chứng minh  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$ .

**Lời giải.** Gọi  $F$  là trung điểm của  $EC$

$$\Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AF$$

$\Rightarrow MF$  là đường trung bình của  $\triangle BEC$   
 $\Rightarrow MF$  song song với  $BE$ .  
 $\Rightarrow NE$  là đường trung bình của tam giác  $AMF$ .  
 $\Rightarrow N$  là trung điểm của  $AM \Rightarrow \vec{NA} + \vec{NM} = \vec{0}$ .

**Bài 40.** Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  tâm  $O$ . Chứng minh rằng  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$ .

**Lời giải.** Các điểm  $B, E$  đối xứng với nhau qua  $OA \Rightarrow \vec{OB} + \vec{OE}$  có giá là đường thẳng  $OA$ .

Các điểm  $D, C$  đối xứng với nhau qua  $OA \Rightarrow \vec{OC} + \vec{OD}$  có giá là đường thẳng  $OA$ .

$\Rightarrow$  Véc-tơ  $\vec{u} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}$  có giá là đường thẳng  $OA$ .

Tương tự các véc-tơ  $(\vec{OA} + \vec{OC})$  và  $(\vec{OE} + \vec{OD})$  có giá là đường thẳng  $OB$ .

$\Rightarrow$  Véc-tơ  $\vec{u} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}$  có giá là đường thẳng  $OB$ .

Do  $\vec{OA}$  và  $\vec{OB}$  có giá không trùng nhau  $\Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

**Bài 41.** Cho đa giác đều  $A_1A_2 \dots A_n$  với  $n \in \mathbb{N}$  và  $n \geq 3$  có tâm  $O$ . Chứng minh rằng  $\vec{u} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$ .

**Lời giải.** Ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1:  $n$  là số chẵn  $\Rightarrow n = 2k$  với  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ . Khi đó các cặp điểm  $A_i$  và  $A_{k+i}$  với  $i = 1, k$  đối xứng với nhau qua  $O$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{OA_1} + \vec{OA_{k+1}} = \vec{0} \\ \vec{OA_2} + \vec{OA_{k+2}} = \vec{0} \\ \dots \\ \vec{OA_k} + \vec{OA_{2k}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

- Trường hợp 2:  $n$  là số lẻ  $\Rightarrow n = 2k + 1$  với  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ . Khi đó các cặp điểm  $A_i$  và  $A_{2k+3-i}$  với  $i = 2, k + 1$  đối xứng với nhau qua đường thẳng  $OA_1$ .

$\Rightarrow$  Giá của các véc-tơ  $(\vec{OA_i} + \vec{OA_{2k+3-i}})$  là đường thẳng  $OA_1$ .

$\Rightarrow$  Giá của véc-tơ  $\vec{u}$  là đường thẳng  $OA_1$ .

Tương tự, giá của các véc-tơ  $(\vec{OA_1} + \vec{OA_3}), (\vec{OA_{2k}} + \vec{OA_4}) \dots$  là đường thẳng  $OA_2$ .

$\Rightarrow$  Giá của véc-tơ  $\vec{u}$  là đường thẳng  $OA_2$ .

$\Rightarrow \vec{u}$  có giá là các đường thẳng  $OA_1$  và  $OA_2 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

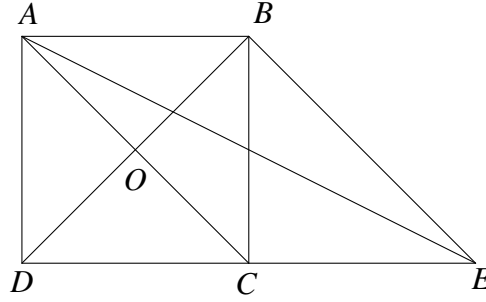
**Bài 42.** Cho  $n$  véc-tơ  $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ . Đặt  $\vec{OA_1} = \vec{a_1}, \vec{A_1A_2} = \vec{a_2}, \dots, \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{a_n}$ . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường gấp khúc  $OA_1A_2 \dots A_n$  khép kín là  $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{0}$ .

**Lời giải.** Đặt  $\vec{OA_1} = \vec{a_1}, \vec{A_1A_2} = \vec{a_2}, \dots, \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{a_n}$ . Khi đó  $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{OA_n}$ . Như vậy đường gấp khúc  $OA_1A_2 \dots A_n$  khép kín khi và chỉ khi  $O$  trùng với  $A_n$  hay  $\vec{OA_n} = \vec{0}$ , tức là  $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{0}$ .

**Bài 43.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh  $a$ . Hãy xác định và tính độ dài các véc-tơ:

$$\vec{AD} + \vec{AB}, \vec{OA} + \vec{OC}, \vec{OB} + \vec{BD}, \vec{AB} + \vec{AC}.$$

**Lời giải.** Trước hết ta có  $AC = BD = a\sqrt{2}$  và  $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



Ta có:  $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC} \Rightarrow |\vec{AD} + \vec{AB}| = |\vec{AC}| = a\sqrt{2}$ .

Vì  $O$  là trung điểm  $AC$  nên  $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$ .

Vậy:  $|\vec{OA} + \vec{OC}| = |\vec{0}| = 0$ .

Theo quy tắc ba điểm:  $\vec{OB} + \vec{BD} = \vec{OD} \Rightarrow |\vec{OB} + \vec{BD}| = |\vec{OD}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Dựng hình bình hành  $BACE$ . Ta có:

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AE} \Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AE}| = AE.$$

Do đó:

$$|\vec{AB} + \vec{AC}| = AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

**Bài 44.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$ ,  $AB = 2a$ ,  $AD = a$ ,  $M$  là trung điểm  $CD$ .

a) Chứng minh  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$ .

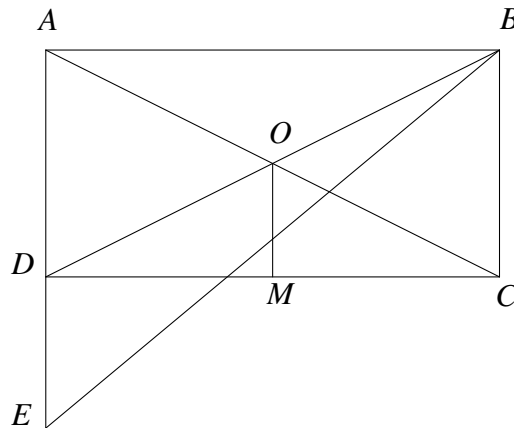
b) Tính  $|\vec{BD} + \vec{OM}|$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ . (1)

Ta có  $\vec{CB} - \vec{CD} = \vec{DB}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$ .



b) Dựng điểm  $E$  sao cho  $OMED$  là hình bình hành. Khi đó

$$\vec{BD} + \vec{OM} = \vec{BD} + \vec{DE} = \vec{BE}.$$

Ta có:

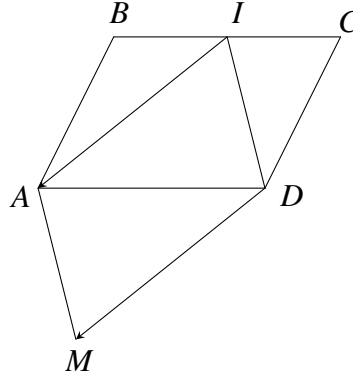
$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{25a^2}{4} \Rightarrow |\vec{BD} + \vec{OM}| = |\vec{BE}| = BE = \frac{5a}{2}.$$

**Bài 45.** Cho hình bình hành  $ABCD$ ,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA}. \quad (*)$$

**Lời giải.** Ta có sự tương đương sau:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DM}. \end{aligned}$$

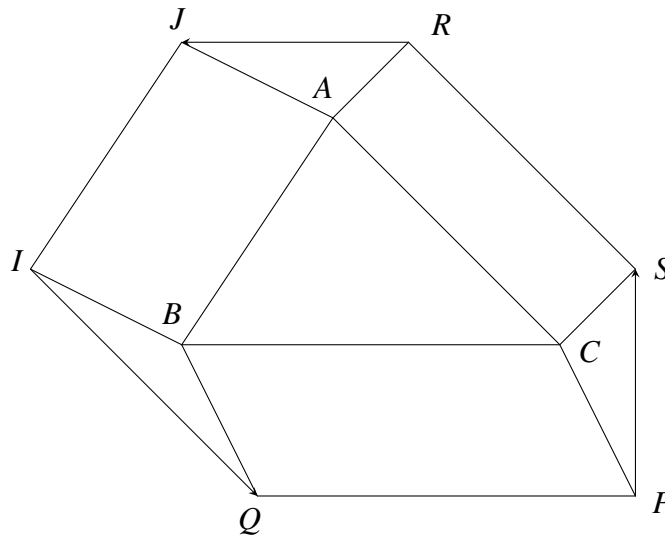


Vậy  $M$  là điểm sao cho  $MDIA$  là hình bình hành.

**Bài 46.** Cho tam giác  $ABC$ . Về phía ngoài tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ$ ,  $BCPQ$ ,  $CARS$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{0}.$$

**Lời giải.**



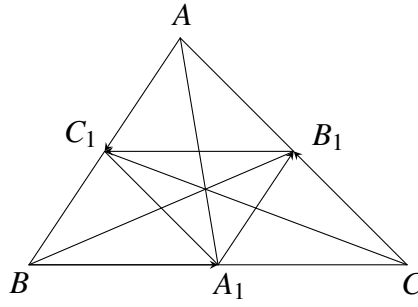
Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} \\ &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$ .

**Lời giải.**



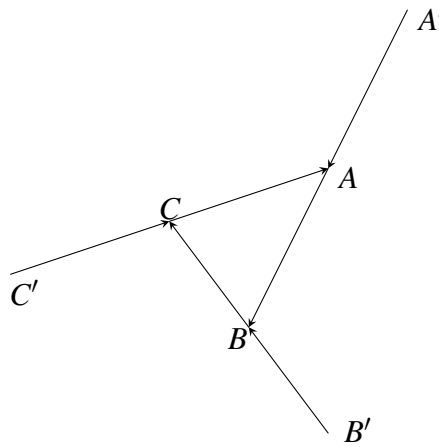
Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} &= (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}) + (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1C_1}) \\ &= (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{B_1C_1}) + (\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{C_1A_1}) \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

**Bài 48.** Cho  $\Delta ABC$ . Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $A$ , gọi  $B'$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $B$ , gọi  $C'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $C$ . Chứng minh rằng với một điểm  $O$  bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.$$

**Lời giải.**



Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C} \\ &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} \\ &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \\ &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.\end{aligned}$$

**Bài 49.** Cho bảy điểm  $A, B, C, D, E, F, H$ . Chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{HF}.$$

**Lời giải.** Ta có:

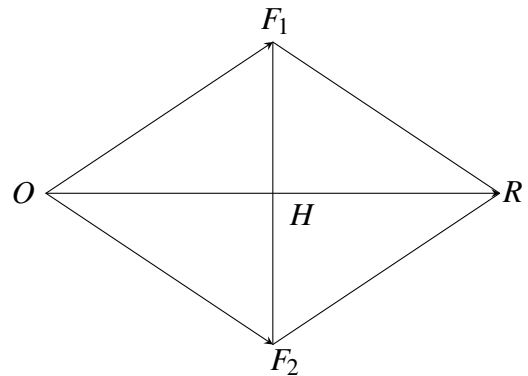
$$\begin{aligned} & \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} + \vec{HA} - (\vec{CB} + \vec{ED} + \vec{HF}) \\ &= \vec{AB} + (\vec{CD} - \vec{CB}) + (\vec{EF} - \vec{ED}) + (\vec{HA} - \vec{HF}) \\ &= \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DF} + \vec{FA} = \vec{AB} + \vec{BF} + \vec{FA} = \vec{AF} + \vec{FA} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Vậy  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} + \vec{HA} = \vec{CB} + \vec{ED} + \vec{HF}$ .

**Bài 50.** Cho hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ là 40 N, có điểm đặt tại  $O$  và hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực này.

**Lời giải.**

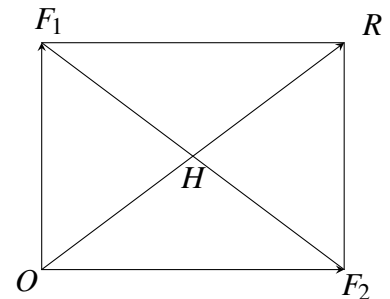
Theo quy tắc hình bình hành thì  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OR}$ . Mà  $OF_1 = OF_2 = 40$  (N) nên  $OF_1RF_2$  là hình thoi có góc  $\widehat{F_1OF_2} = 60^\circ$  và hai đường chéo  $RO, F_1F_2$  vuông góc với nhau tại trung điểm  $H$ . Ta có  $OH = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$  ( $OH$  là đường cao của tam giác đều cạnh bằng 40). Vậy cường độ lực tổng hợp của hai lực đã cho là  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OR}| = 20\sqrt{3}$  (N).



**Bài 51.** Cho hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  lần lượt có cường độ 30 N và 40 N, có điểm đặt  $O$  và vuông góc với nhau. Tính cường độ lực tổng hợp của chúng.

**Lời giải.**

Do hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có cùng điểm đặt  $O$  nên tổng hợp lực  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  là đường chéo  $OR$  của hình bình hành  $OF_1RF_2$ . Do hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  vuông góc với nhau nên hình bình hành  $OF_1RF_2$  trở thành hình chữ nhật. Vậy  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OR}$ . Ta có  $OF_1 = 30, OF_2 = 40$ . Như vậy  $OR = F_1F_2 = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ . Do đó cường độ lực tổng hợp  $\vec{OR}$  là  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OR}| = 50$  (N).



**Bài 52.** Cho 2018 điểm trên mặt phẳng. Bạn Quỳnh kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$ . Bạn Vân kí hiệu chúng là  $B_1, B_2, \dots, B_{2018}$ . Chứng minh rằng:

$$\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}.$$

**Lời giải.** Lấy một điểm  $O$  nào đó. Ta có

$$\begin{aligned} & \vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_{2018}B_{2018}} \\ &= \vec{OB_1} - \vec{OA_1} + \vec{OB_2} - \vec{OA_2} + \dots + \vec{OB_{2018}} - \vec{OA_{2018}} \\ &= (\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \dots + \vec{OB_{2018}}) - (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_{2018}}). \end{aligned}$$

Vì 2018 điểm  $B_1, B_2, \dots, B_{2018}$  cũng là 2018 điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$  nhưng được kí hiệu một cách khác, do đó

$$\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \dots + \vec{OB_{2018}} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_{2018}}.$$

Suy ra  $\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}$ .

**Bài 53.** Cho  $n$ -đa giác đều  $A_1A_2 \dots A_n$  ( $n$  lẻ,  $n > 2$ ) nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

**Lời giải.** Gọi  $d_1$  là đường thẳng đi qua điểm  $O$  và điểm  $A_1$ . Xét các đỉnh của đa giác đã cho mà không nằm trên  $d_1$ . Chúng có thể phân tích thành những cặp đỉnh  $A_i, A_j$  đối xứng nhau qua đường thẳng  $d_1$  (chẳng hạn cặp  $A_2, A_{n-1}$ , cặp  $A_3, A_{n-2}, \dots$ ). Khi đó tổng  $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}$  là một véc-tơ nằm trên đường thẳng  $d_1$ . Từ đó suy ra tổng  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$  cũng là một véc-tơ có giá nằm trên đường thẳng  $d_1$ . Hoàn toàn tương tự, nếu gọi  $d_2$  là đường thẳng đi qua  $O$  và  $A_2$  thì tổng  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$  cũng là một véc-tơ có giá nằm trên đường thẳng  $d_2$ . Vì hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  không trùng nhau nên  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$  có hai phương khác nhau, hay  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ .

### §3. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

#### I. Tóm tắt lí thuyết

##### Định nghĩa

**Định nghĩa 1.** Cho số  $k \neq 0$  và  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của véc-tơ  $\vec{a}$  với số  $k$  là một véc-tơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , được xác định như sau:

- $k\vec{a}$  cùng phương  $\vec{a}$ .
- $k\vec{a}$  cùng hướng  $\vec{a}$  khi  $k > 0$ .
- $k\vec{a}$  ngược hướng  $\vec{a}$  khi  $k < 0$ .
- $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

**Quy ước:**  $0\vec{a} = \vec{0}$ ;  $k\vec{0} = \vec{0}$ .

Phép lấy tích của một véc-tơ với một số gọi là **phép nhân véc-tơ với một số** (hoặc phép nhân một số với một véc-tơ).

##### Tính chất

**Tính chất 1.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  bất kì và  $k, h \in \mathbb{R}$ , khi đó:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;
- $(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$ ;
- $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$ ;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

**Tính chất 2 (Tính chất trung điểm).** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ , với mọi  $M$  ta có:

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}.$$

**Tính chất 3 (Tính chất trọng tâm tam giác).** Cho  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , với mọi  $M$  ta có:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}.$$

##### Điều kiện để hai véc-tơ cùng phương

$\forall \vec{a}, \vec{b}$  ta có:  $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ )  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$ .

##### Phân tích (biểu diễn) một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Cho hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương. Khi đó  $\forall \vec{x}$  ta luôn tìm được duy nhất cặp số  $m, n$  sao cho  $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số.

Phương pháp giải: Áp dụng định nghĩa và các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số để giải các bài tập.

**Ví dụ 1.** Cho  $\vec{u} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ . Tìm véc-tơ đối của  $\vec{u}$ .

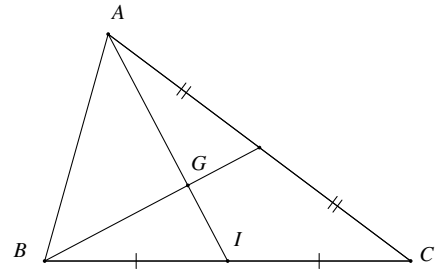
**Lời giải.** Véc-tơ đối của véc-tơ  $\vec{u} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$  là:  $\vec{v} = -(-2\vec{a} + 5\vec{b}) = 2\vec{a} - 5\vec{b}$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy tính:

- $\vec{BC}$  theo  $\vec{IB}$ .
- $\vec{BC}$  theo  $\vec{IC}$ .
- $\vec{AG}$  theo  $\vec{IA}$ .

**Lời giải.**

- Do  $\vec{BC}$  ngược hướng và có độ dài gấp đôi  $\vec{IB}$  nên  $\vec{BC} = -2\vec{IB}$ .
- Do  $\vec{BC}$  cùng hướng và có độ dài gấp đôi  $\vec{IC}$  nên  $\vec{BC} = 2\vec{IC}$ .
- Do  $\vec{AG}$  ngược hướng và có độ dài bằng  $\frac{2}{3}$  véc-tơ  $\vec{IA}$  nên  $\vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{IA}$ .

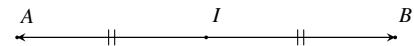


**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng  $I$  là trung điểm của  $AB$  khi và chỉ khi  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

( $\Rightarrow$ )  $I$  là trung điểm của  $AB$  nên  $\vec{IA}$  và  $\vec{IB}$  ngược hướng và có cùng độ dài. Do đó  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .

( $\Leftarrow$ )  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$  suy ra hai véc-tơ  $\vec{IA}$  và  $\vec{IB}$  đối nhau. Do đó  $I$  là trung điểm của  $AB$ .



### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Tìm các véc-tơ đối của các véc-tơ sau:

- $\vec{u} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ .
- $\vec{v} = (\sqrt{3} + 1)\vec{a} + 4\vec{b}$ .
- $\vec{x} = (-2\sqrt{2})(3\vec{a} - 2\vec{b})$ .

**Lời giải.**

- Véc-tơ đối của  $\vec{u}$  là:  $\vec{u}' = -7\vec{a} + 5\vec{b}$ .
- Véc-tơ đối của  $\vec{v}$  là:  $\vec{v}' = -(\sqrt{3} + 1)\vec{a} - 4\vec{b}$ .

c) Véc-tơ đối của  $\vec{x}$  là:  $\vec{x}' = (6\sqrt{2})3\vec{a} - 4\sqrt{2}\vec{b}$ .

**Bài 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ .

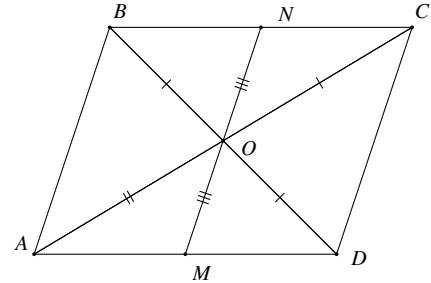
a) Tìm  $x, y$  biết  $\vec{AB} = x\vec{OM}, \vec{BD} = y\vec{OB}$ .

b) Tìm tất cả các véc-tơ  $\vec{u}$  thỏa mãn  $\vec{u} = 2\vec{ON}$ .

**Lời giải.**

- a) - Do  $\vec{AB}$  cùng hướng với  $\vec{OM}$  và có độ dài gấp đôi  $\vec{OM}$  nên suy ra  $x = 2$   
 - Do  $\vec{BD}$  ngược hướng với  $\vec{OB}$  và có độ dài gấp đôi  $\vec{OB}$  nên suy ra  $y = -2$

b) Tất cả các véc-tơ  $\vec{u}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là:  $\vec{AB}, \vec{MN}, \vec{DC}$



**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  vuông,  $AB = AC = 2$ . Hãy dựng các véc-tơ sau đây và tính độ dài của chúng.

a)  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

b)  $\vec{v} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ .

**Lời giải.**

a) Dựng hình chữ nhật  $ABCD$  như hình vẽ.

Khi đó ta có  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ .

Suy ra  $|\vec{u}| = |\vec{AD}| = 2\sqrt{2}$ .

b) - Trên đường thẳng  $AB$  lấy  $M$  sao cho  $AM = 3AB$ , và  $\vec{AM}, \vec{AB}$  cùng hướng.

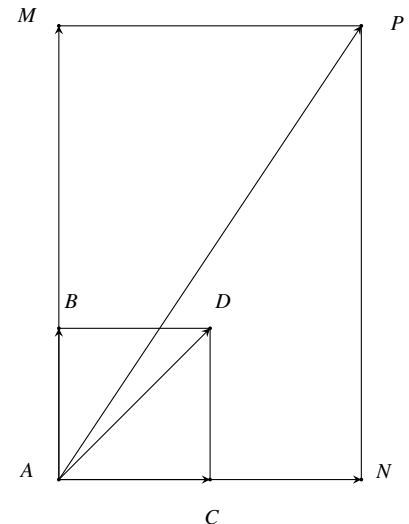
- Trên đường thẳng  $AC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = 2AC$  và  $\vec{AN}, \vec{AC}$  cùng hướng.

- Dựng hình chữ nhật  $AMNP$  như hình vẽ.

Khi đó  $3\vec{AB} = \vec{AM}, 2\vec{AC} = \vec{AN}$ .

$\Rightarrow \vec{v} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AP}$ .

$\Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{AP}| = 2\sqrt{13}$ .



**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh 4 cm. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy dựng và tính độ dài véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{AM}$ .

**Lời giải.**

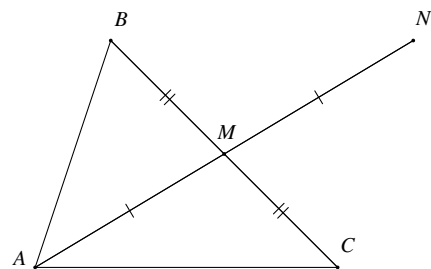
- Lấy  $N$  đối xứng với  $A$  qua  $M$ .

Khi đó  $\vec{AN}$  cùng hướng với  $\vec{AM}$  và có độ dài gấp đôi  $\vec{AM}$   
 $\Rightarrow \vec{AN} = 2\vec{AM} = \vec{u}$ .

- Mặt khác  $\triangle ABC$  là tam giác đều cạnh 4 cm nên trung tuyến  $AM$  đồng thời là đường cao.

$\Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$ .

$\Rightarrow |\vec{u}| = 2|\vec{AM}| = 4\sqrt{3}$ .



**Bài 5.** Cho đường tròn tâm  $O$  và hai dây cung  $AB, CD$  vuông góc với nhau và cắt nhau tại  $E$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $OIEJ$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $CD, AB$

$$\Rightarrow \vec{OP} = \frac{\vec{OD} + \vec{OC}}{2}; \vec{OQ} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

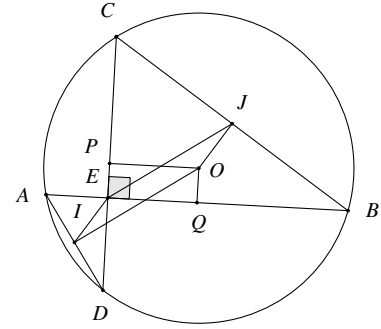
Do  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$

$$\Rightarrow \vec{EI} = \frac{\vec{EA} + \vec{ED}}{2}; \vec{OJ} = \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{2}. \text{ Khi đó:}$$

$$\begin{aligned} \vec{OJ} - \vec{IE} &= \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{2} + \frac{\vec{EA} + \vec{ED}}{2} \\ &= \frac{(\vec{OC} + \vec{OD}) + (\vec{OA} + \vec{OB})}{2} + \vec{EO} \\ &= \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{EO} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{OJ} = \vec{IE}.$$

Suy ra tứ giác  $OIEJ$  là hình bình hành. (đpcm)



## Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Dùng các quy tắc về véc-tơ để phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương.

Lý thuyết cần nhớ

- Cho 2 véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Khi đó, với mọi  $\vec{x}$ , tồn tại duy nhất cặp số  $h, k$  sao cho  $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$ .

- Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $xAM = yBM$  ( $x, y > 0$ ) thì  $\vec{AM} = \frac{y}{x+y}\vec{AB}$

- Quy tắc 3 điểm:  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$ .

- Quy tắc hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành thì  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .

- Hiệu của hai véc-tơ:  $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ .

- Trung điểm của đoạn thẳng

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB &\Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} \\ &\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}, \forall M \text{ bất kỳ} \end{aligned}$$

- Trọng tâm của tam giác

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC &\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}, \forall M \text{ bất kỳ} \end{aligned}$$

**Ví dụ 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Phân tích véc-tơ  $\vec{AG}$  theo 2 véc-tơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .

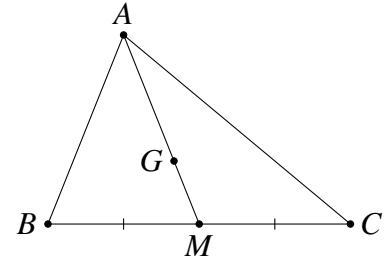
**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

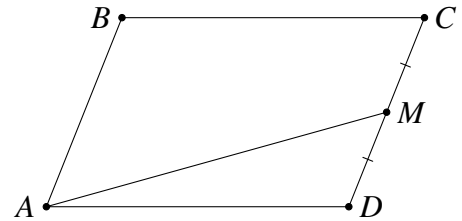
$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$



**Ví dụ 5.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $CD$ . Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  theo 2 véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Vì } M \text{ là trung điểm của } CD \text{ nên } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (Vì } ABCD \text{ là hình bình hành)} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$



**Ví dụ 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $H, K$  lần lượt thuộc 2 cạnh  $AB$  và  $AC$  sao cho  $3AH = 2AB, 3AK = AC$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $4BM = 3MC$ . Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{BM}$  theo 2 véc-tơ  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{AK}$ .

**Lời giải.**

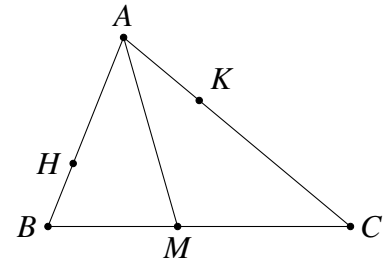
$$\text{Ta có } 3AH = 2AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}.$$

$$3AK = AC \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AK}.$$

$$4BM = 3MC \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{BM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{9}{7}\overrightarrow{AK} - \frac{9}{14}\overrightarrow{AH}.$$



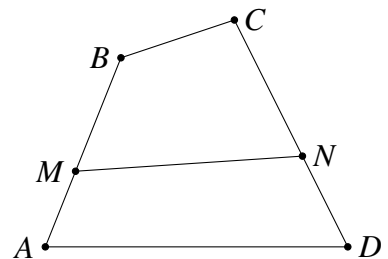
**Ví dụ 7.** Cho tứ giác  $ABCD$  ( $AD$  và  $BC$  không song song). Trên cạnh  $AB$  và  $CD$  lần lượt lấy 2 điểm  $M, N$  sao cho  $AM = kAB$  và  $DN = kDC$  ( $0 < k < 1$ ). Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  theo 2 véc-tơ  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Với mọi điểm } O \text{ bất kỳ, ta có: } \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{ON} = (1-k)\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OC}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= (1-k)\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OC} - [(1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}] \\ &= (1-k)(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$



### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

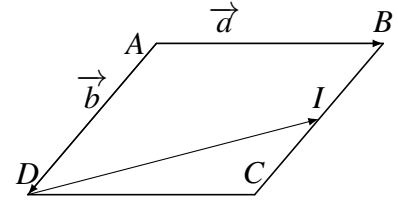
**Bài 6.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Hãy biểu diễn các véc-tơ sao đây theo véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ .

a)  $\overrightarrow{DI}$  với  $I$  là trung điểm  $BC$ .

b)  $\overrightarrow{AG}$  với  $G$  là trọng tâm của tam giác  $CDI$ .

**Lời giải.**

a) Ta có: 
$$\begin{cases} \vec{DI} = \vec{DC} + \vec{CI} \\ \vec{DC} = \vec{a}; \vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{CB} = -\frac{1}{2}\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{b} \end{cases}$$
  
Do đó  $\vec{DI} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .



b) Ta có  $\vec{AG}$  với  $G$  là trọng tâm của tam giác  $CDI$ .  
Theo tính chất của trọng tâm tam giác  $CDI$ , ta có:  
$$\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AI}).$$

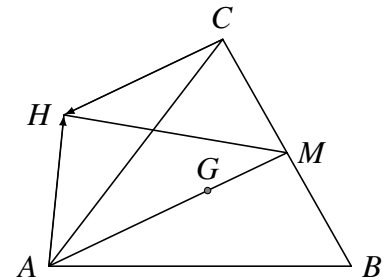
Bên cạnh đó,  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$  (qui tắc hình bình hành)  
và  $\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$   
$$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.$$

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ .  $H$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ .

- a) Tính  $\vec{AH}$  và  $\vec{CH}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .  
b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
Chứng minh rằng:  $\vec{MH} = \frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{5}{6}\vec{AB}$ .

**Lời giải.**

a) Tính  $\vec{AH}$  và  $\vec{CH}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .  
Ta có:  $\vec{AH} + \vec{AB} = 2\vec{AG}$  (qui tắc trung điểm)  
$$= \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) \quad (\text{vì } \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM})$$
  
$$\Rightarrow \vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}.$$
  
Tương tự:  $\vec{CH} = \frac{2}{3}\vec{CA} - \frac{1}{3}\vec{CB} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{AB})$   
$$= \frac{1}{3}\vec{CA} - \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$$



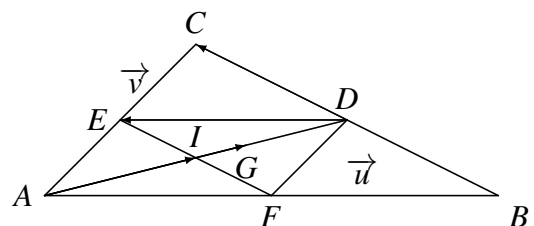
b) Ta có:  $\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CH} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{CH} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$   
(do câu a).  
Vậy  $\vec{MH} = \frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}.$

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \vec{AE}$ ,  $\vec{v} = \vec{AF}$ . Hãy phân tích các vec-tơ  $\vec{AI}$ ,  $\vec{AG}$ ,  $\vec{DE}$ ,  $\vec{DC}$  theo hai vec-tơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ .

**Lời giải.**

Vì tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành nên  $\vec{AD} = \vec{AE} + \vec{AF} = \vec{u} + \vec{v}$   
và  $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AD}.$

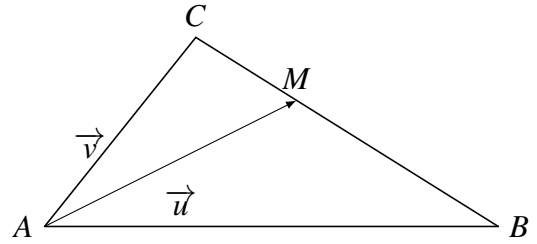
Ta có:  $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$   
$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AD} = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}.$$
  
$$\vec{DE} = \vec{FA} = -\vec{AF} = -1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{u}$$
  
$$\vec{DC} = \vec{FE} = \vec{AE} - \vec{AF} = \vec{u} - \vec{v}.$$



**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Hãy phân tích vec-tơ  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ \text{Vậy: } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{v}.\end{aligned}$$



**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  và  $N$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Hãy phân tích các vec-tơ  $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

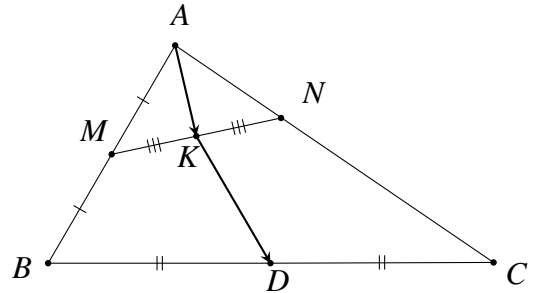
+) Phân tích  $\overrightarrow{AK}$  hai vec-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

+) Phân tích  $\overrightarrow{KD}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AK} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  trung điểm của  $AB$  và  $N$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho:  $AN = 2NC$ .

a) Gọi  $K$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy phân tích vec-tơ  $\overrightarrow{AK}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AN}$ .

b) Gọi  $H$  là trung điểm của  $MN$ . Hãy phân tích vec-tơ  $\overrightarrow{AH}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.** a) Từ giả thiết ta có:  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$ .

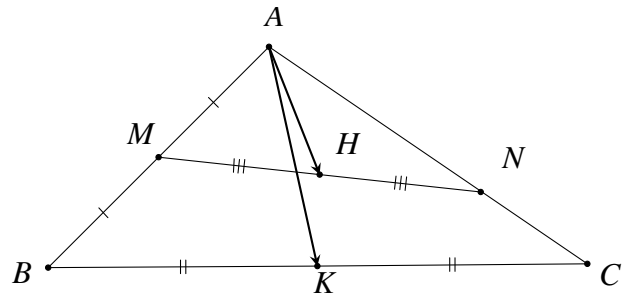
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AN}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AN}.$$

b) Ta có:  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



$$\text{Vậy } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

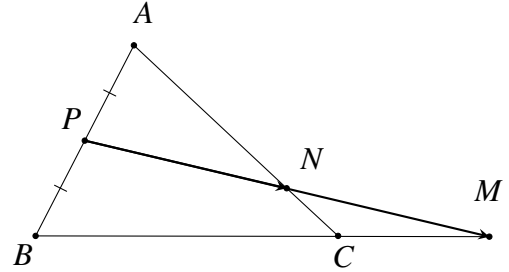
**Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi các điểm  $M, N, P$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ . Hãy phân tích các véc-tơ  $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.** Từ giả thiết ta có:  $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{MB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN} = 3(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

**Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $I$  thuộc tia đối của tia  $CB$  kéo dài sao cho  $IB = 3IC$ , điểm  $J$  thuộc tia đối của tia  $CA$  sao cho  $JA = 2JC$ , điểm  $K$  thuộc tia đối của tia  $AB$  sao cho  $KB = 3KA$ .

a) Phân tích các véc-tơ  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{JK}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

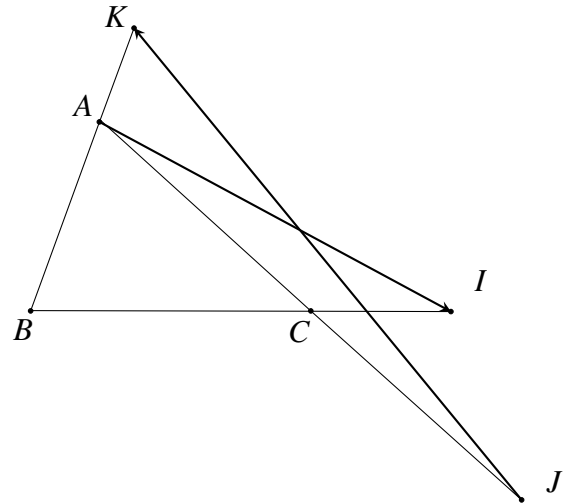
b) Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{BC}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{JK}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



$$\text{Vậy } \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

b) Từ câu a) ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = -\frac{8}{7}\overrightarrow{AI} - \frac{6}{7}\overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AI} - \frac{2}{7}\overrightarrow{JK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AI} + \frac{4}{7}\overrightarrow{JK}.$$

$$\text{Vậy ta có } \overrightarrow{BC} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AI} + \frac{4}{7}\overrightarrow{JK}.$$

**Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số****Phương pháp giải:**

- *Hướng 1.* Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó:
  - Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
  - Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích véc-tơ.
- *Hướng 2.* Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.
- *Hướng 3.* Biến đổi một đẳng thức véc-tơ đã biết luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

**Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý:**

- *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm  $A, B, C$  bất kì ta luôn có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ .
- *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành  $ABCD$  ta luôn có:  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .
- *Quy tắc trừ:* Với ba điểm  $A, B, O$  bất kì ta luôn có:  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .
- *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Với điểm  $M$  tùy ý và  $I$  là trung điểm của  $AB$  ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} &= \vec{0}. \\ \overrightarrow{MI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).\end{aligned}$$

- *Tính chất trọng tâm tam giác:* Với điểm  $M$  tùy ý và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \vec{0}. \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= 3\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

- *Các tính chất của phép cộng, trừ véc-tơ và phép nhân một số với một véc-tơ.*

**Ví dụ 8.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}.$$

**Lời giải.** Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ .  
Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

**Ví dụ 9.** Cho tam giác  $ABC$  với trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}$ .

**Lời giải.** Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}.$$

**Ví dụ 10.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng:  $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{MN}$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NC}, \\ \vec{BD} &= \vec{BM} + \vec{MN} + \vec{ND}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}\vec{AC} + \vec{BD} &= 2\vec{MN} + (\vec{AM} + \vec{BM}) + (\vec{NC} + \vec{ND}) \\ &= 2\vec{MN}.\end{aligned}$$

(Vì  $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$  và  $\vec{NC} + \vec{ND} = \vec{0}$ ).

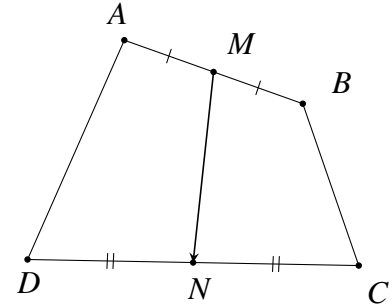
Cách 2. Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN}, \\ \vec{MN} &= \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{DN}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}2\vec{MN} &= (\vec{AM} + \vec{BM}) + (\vec{NC} + \vec{ND}) + \vec{AC} + \vec{BD} \\ &= \vec{AC} + \vec{BD}.\end{aligned}$$

(Vì  $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$  và  $\vec{NC} + \vec{ND} = \vec{0}$ ).

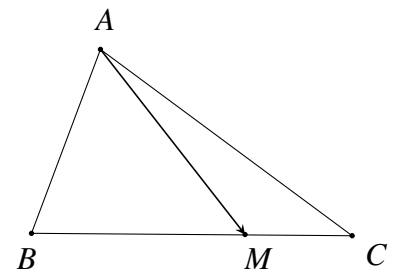


**Ví dụ 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Chứng minh rằng:  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}.\end{aligned}$$



**Ví dụ 12.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, CD$  sao cho  $MB = 2MA$  và  $NC = 2ND$ . Chứng minh rằng:

$$\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{BC}.$$

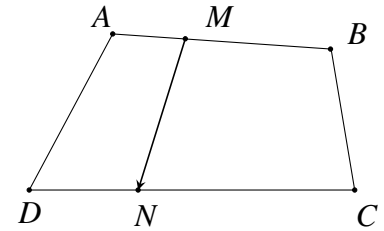
**Lời giải.**

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}).$$



Vì  $M, N$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, CD$  sao cho  $MB = 2MA$  và  $NC = 2ND$  nên ta có:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0},$$

$$2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}.$$

$$\text{Vậy } 3\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

**Ví dụ 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Lần lượt lấy các điểm  $M, N, P$  trên các đoạn thẳng  $AB, BC$  và  $CA$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB, BN = \frac{1}{3}BC, CP = \frac{1}{3}CA$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

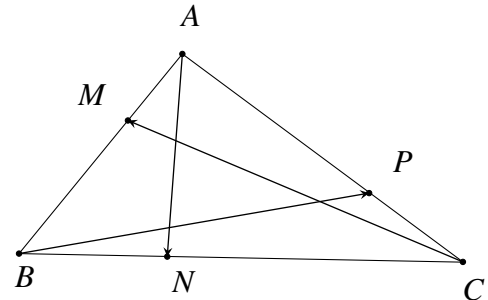
**Lời giải.**

Ta có:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad (1.1)$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad (1.2)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad (1.3)$$



Từ (1), (2), (3) ta suy ra:

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{4}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

**Ví dụ 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Gọi  $M$  là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$

b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$

**Lời giải.**

a) Vì  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$  nên ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Theo ý a) ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

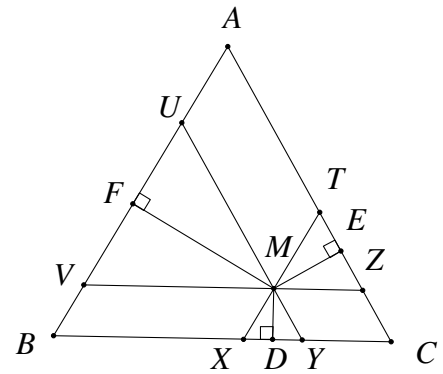
$$\text{Vậy } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

**Ví dụ 15.** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ .  $M$  là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ .

**Lời giải.**

Qua điểm  $M$  dựng:

- đường thẳng song song với  $BC$ , cắt các cặp đường thẳng  $AB, AC$  tại  $V, Z$ .
- đường thẳng song song với  $AB$ , cắt các cặp đường thẳng  $AC, BC$  tại  $T, X$ .
- đường thẳng song song với  $BC$ , cắt các cặp đường thẳng  $AB, AC$  tại  $V, Z$ .



Ta dễ dàng chứng minh được  $MTAU, MVBX, MYCZ$  là các hình bình hành và các điểm  $D, E, F$  tương ứng là trung điểm của  $XY, ZT, UV$ .

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MZ} + \overrightarrow{MT}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MU}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MX}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MZ}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

**Lời giải.** Ta có:  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}$ .

**Bài 15.** Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

**Lời giải.** Theo quy tắc cộng ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GA'} \\ \overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GB'} \\ \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GC'}\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}).$$

Vì  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  nên ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} &= \vec{0}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

**Bài 16.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải.** Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$  nên ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} &= 2\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = 2\overrightarrow{MN}.$$

**Bài 17.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$  và  $MN$ . Chứng minh rằng:

- a)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ .  
b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$  (với  $O$  là điểm bất kì).

**Lời giải.**

a) Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$  nên ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} &= 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} &= 2\overrightarrow{IN}\end{aligned}$$

Suy ra

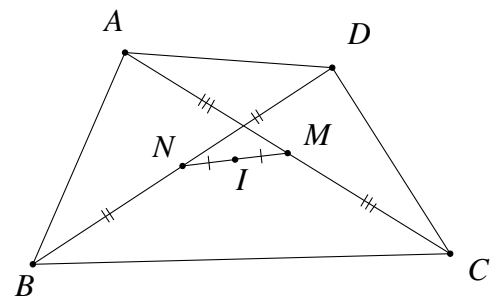
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} &= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}) \\ &= 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}).\end{aligned}$$

Mặt khác  $I$  là trung điểm của  $MN$  nên  $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$ .

$$\text{Vậy } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2 \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

b) Với điểm  $O$  bất kì ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} &= 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{ON} \\ \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} &= 2\overrightarrow{OI}\end{aligned}$$



Do đó:

$$\begin{aligned}\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} &= (\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{OB} + \vec{OD}) \\ &= 2\vec{OM} + 2\vec{ON} \\ &= 2(\vec{OM} + \vec{ON}) \\ &= 4\vec{OI}.\end{aligned}$$

**Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  và  $H$  là trực tâm. Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ . Chứng minh rằng:

a)  $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$ .

b)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có:

$BH \perp AC$  (vì  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ ).

$DC \perp AC$  (vì  $AD$  là đường kính).

Do đó  $BH \parallel DC$  (vì cùng vuông góc với  $AC$ ).

Chứng minh tương tự ta có:  $CH \parallel BD$  (vì cùng vuông góc với  $AB$ ).

Suy ra  $BHCD$  là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành, ta có:  $\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{HD}$ .

$BC$  và  $HD$  là hai đường chéo của hình bình hành nên cắt nhau tại trung điểm  $M$ .

Trong tam giác  $AHD$ ,  $O$  là trung điểm của  $AD$  nên ta có:  $\vec{HA} + \vec{HD} = 2\vec{HO}$ .

Vậy  $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{HA} + \vec{HD} = 2\vec{HO}$ .

b) Theo quy tắc ba điểm ta có:

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= \vec{OH} + \vec{HA} \\ \vec{OB} &= \vec{OH} + \vec{HB} \\ \vec{OC} &= \vec{OH} + \vec{HC}\end{aligned}$$

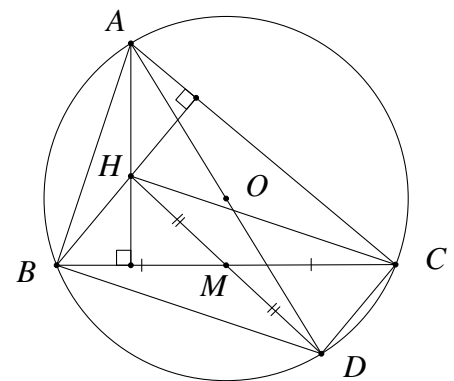
Suy ra  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OH} + (\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC})$ .

Mặt khác theo kết quả ý a) ta có:  $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$ .

Vậy  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OH} + 2\vec{HO} = \vec{OH}$ .

**Bài 19.** Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác  $ABC$  có  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Chứng minh rằng:  $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**



Qua  $C$  dựng đường thẳng song song với  $IA$ , cắt đường thẳng  $BI$  tại  $E$ .

Qua  $C$  dựng đường thẳng song song với  $IB$ , cắt đường thẳng  $AI$  tại  $F$ .

$IECF$  là hình bình hành nên  $\vec{IC} = \vec{IE} + \vec{IF}$  (1).

Gọi  $D$  là giao điểm của  $AI$  và  $BC$ . Vì  $ID \parallel CE$  và  $AD$  là đường phân giác nên ta có:

$$\frac{BI}{IE} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \vec{IE} = -\frac{b}{c}\vec{IB} \quad (2)$$

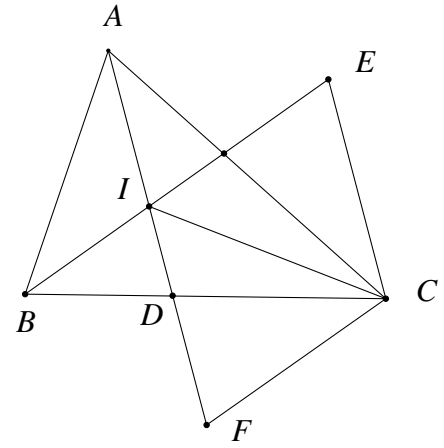
$$\text{Tương tự ta chứng minh được } \vec{IF} = -\frac{a}{c}\vec{IA} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\vec{IC} = -\frac{b}{c}\vec{IB} - \frac{a}{c}\vec{IA} \Leftrightarrow a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}.$$

**Bài tập tương tự:** Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:

$$\sin A \cdot \vec{IA} + \sin B \cdot \vec{IB} + \sin C \cdot \vec{IC} = \vec{0}.$$



**Bài 20.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  bất kì nằm trong tam giác  $ABC$ . Đặt  $S_{MBC} = S_a$ ,  $S_{MCA} = S_b$ ,  $S_{MAB} = S_c$ . Chứng minh rằng:

$$S_a \vec{MA} + S_b \vec{MB} + S_c \vec{MC} = \vec{0}.$$

**Lời giải.**

Gọi  $A'$  là giao điểm của đường thẳng  $MA$  với  $BC$ .

$$\text{Ta có: } \vec{MA'} = \frac{A'C}{BC} \vec{MB} + \frac{A'B}{BC} \vec{MC}$$

$$\text{Mà } \frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \\ \frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_c + S_b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{MA'} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \vec{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c} \vec{MC}. (*)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{MA'}{MA} = \frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \frac{S_{MA'B} + S_{MA'C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

$$\Rightarrow \vec{MA'} = \frac{-S_a}{S_b + S_c} \vec{MA}.$$

Thay vào (\*) ta được:

$$-S_a \vec{MA} = S_b \vec{MB} + S_c \vec{MC} \Leftrightarrow S_a \vec{MA} + S_b \vec{MB} + S_c \vec{MC} = \vec{0}. \quad \text{Nhận xét:}$$

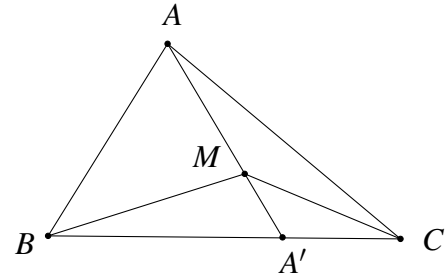
- Cho  $M$  trùng với trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ , ta được kết quả:  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .
- Cho  $M$  trùng với tâm đường tròn nội tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ , ta được kết quả:

$$a \cdot \vec{IA} + b \cdot \vec{IB} + c \cdot \vec{IC} = \vec{0}.$$

- Nếu tam giác  $ABC$  đều thì với điểm  $M$  bất kì trong tam giác, ta có:

$$x \cdot \vec{MA} + y \cdot \vec{MB} + z \cdot \vec{MC} = \vec{0},$$

trong đó  $x, y, z$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$ .



• Khi  $M$  nằm ngoài tam giác  $ABC$ , ta có các kết quả như sau:

- Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{BAC}$  và góc đối đỉnh của nó thì:  $-S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .
- Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{ABC}$  và góc đối đỉnh của nó thì:  $S_a \cdot \overrightarrow{MA} - S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .
- Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{ACB}$  và góc đối đỉnh của nó thì:  $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} - S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

#### Dạng 4. Chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy

Phương pháp giải:

- Sử dụng nhận xét: ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .
- Sử dụng kết quả: Cho tam giác  $ABC$ . Khi đó  $M, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + (1 - \alpha)\overrightarrow{AC}$ .
- Sử dụng các định lý về tính thẳng hàng, đồng quy như Menelaus, Ceva.

### Lý thuyết cần nhớ

**Định lý 1.** Điều kiện cần và đủ để hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương là tồn tại số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

**Định lý 2.** Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số  $k$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

**Định lý 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Khi đó điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $BC$  khi và chỉ khi tồn tại số  $\alpha$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + (1 - \alpha)\overrightarrow{AC}$ .

**Định lý 4 (Định lý Menelaus dạng véc-tơ).** Cho tam giác  $ABC$  và ba điểm  $M, N, P$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{NA}$ ,  $\overrightarrow{PA} = \gamma\overrightarrow{PB}$ . Khi đó  $M, N, P$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\alpha\beta\gamma = 1$ .

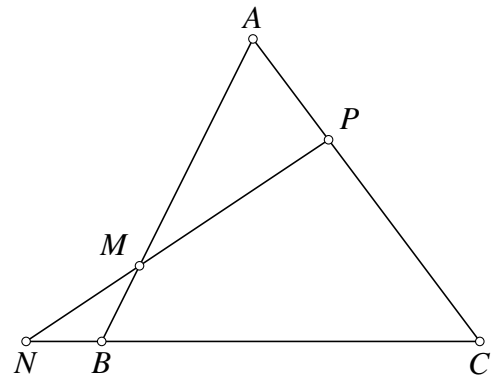
**Định lý 5 (Định lý Ceva dạng véc-tơ).** Cho tam giác  $ABC$  và ba điểm  $M, N, P$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{NA}$ ,  $\overrightarrow{PA} = \gamma\overrightarrow{PB}$ . Khi đó các đường thẳng  $AM, BN, CP$  đôi một song song hoặc đồng quy khi và chỉ khi  $\alpha\beta\gamma = -1$ .

**Ví dụ 16.** Trên các cạnh của tam giác  $ABC$  lấy các điểm  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$ . Chứng minh ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

**Cách 1.** Theo giả thiết ta có  $\overrightarrow{NC} = 6\overrightarrow{NB}$ , suy ra  $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}}{-5} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AP} + \frac{8}{5}\overrightarrow{AM}$ . Do  $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{8}{5} = 1$  nên ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Cách 2.** Theo giả thiết ta có  $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{NB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{NC}$ ,  $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PA}$ . Do  $(-3) \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2) = 1$  nên theo định lý Menelaus ta có ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.



**Ví dụ 17.** Cho tam giác  $ABC$  có  $O, H, G$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác đó. Chứng minh rằng ba điểm  $O, H, G$  thẳng hàng.

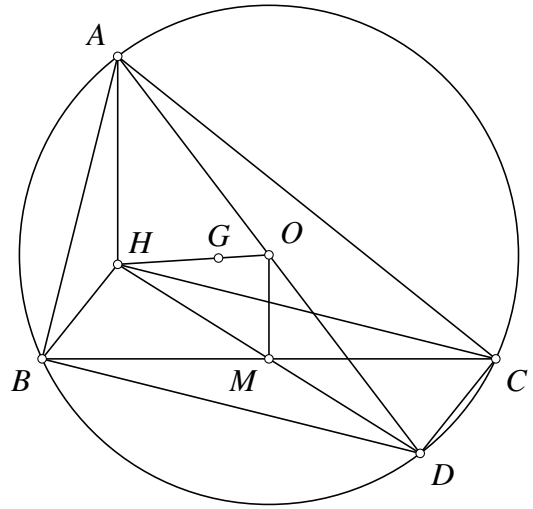
**Lời giải.**

Ta chỉ xét trường hợp ba điểm  $O, H, G$  phân biệt.

Lấy điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $O$ , khi đó  $D$  thuộc đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Suy ra  $DB, DC$  lần lượt vuông góc với  $AB, AC$ . Từ tính chất của trực tâm  $H$  ta có  $CH, BH$  lần lượt vuông góc với  $AB, AC$ . Do đó  $HBDC$  là hình bình hành. Khi đó  $HD$  cắt  $BC$  tại trung điểm  $M$  của mỗi đường. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm  $O, H, G$  thẳng hàng.

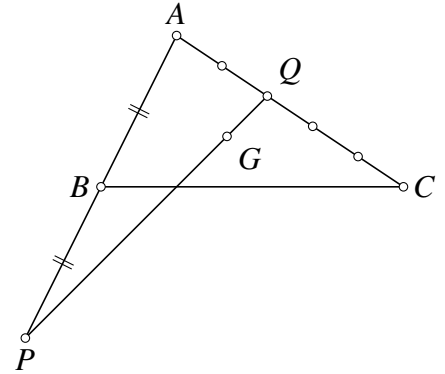


### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 21.** Cho tam giác  $ABC$  và các điểm  $P, Q$  thỏa mãn  $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$ ,  $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $PQ$  đi qua trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết ta có  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AQ}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ , ta có  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$ . Chú ý rằng  $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$  nên ba điểm  $P, Q, G$  thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.



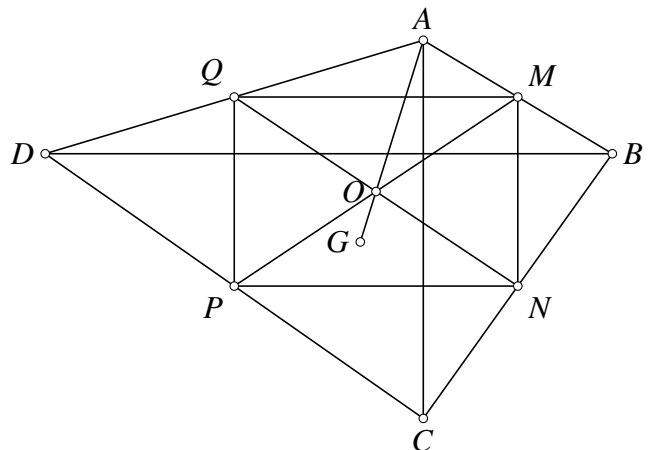
**Bài 22.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường thẳng  $MP, NQ$ ;  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, O, G$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Để thấy  $MN$  và  $PQ$  lần lượt là đường trung bình ứng với cạnh  $AC$  của tam giác  $ABC$  và  $DAC$ . Suy ra  $MN$  và  $PQ$  cùng song song và bằng một nửa  $AC$  hay tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành. Do đó  $O$  là trung điểm của  $MP$  và  $NQ$ . Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} = \vec{0} \\ \Rightarrow 3\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm  $A, O, G$  thẳng hàng.



**Bài 23.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Lấy các điểm  $I$  và  $J$  sao cho  $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ . Chứng minh rằng  $O, I, J$  thẳng hàng.

**Lời giải.** Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 3\vec{OI} &= 3\vec{OA} + 2\vec{OC} - 2\vec{OD} = \vec{OA} + 2\vec{OB} \\ \vec{OJ} &= \vec{OA} - 2\vec{OB} + 2\vec{OC} = -\vec{OA} - 2\vec{OB}. \end{aligned}$$

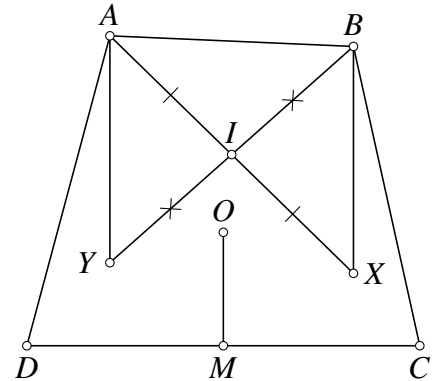
Từ đó ta có  $\vec{OJ} = -3\vec{OI}$  hay ba điểm  $O, I, J$  thẳng hàng.

**Bài 24.** Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $X, Y, Z, T$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Chứng minh rằng  $AX, BY, CZ, DT$  đồng quy.

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Theo Ví dụ 17, ta có  $\vec{BX} = 2\vec{OM}$  và  $\vec{AY} = 2\vec{OM}$ . Suy ra  $\vec{AY} = \vec{BX}$  hay tứ giác  $ABXY$  là hình bình hành. Do đó  $AX$  và  $BY$  cắt nhau tại trung điểm  $I$  của mỗi đường.

Chứng minh tương tự, ta được  $AX, BY, CZ, DT$  đồng quy tại trung điểm  $I$  của mỗi đường.



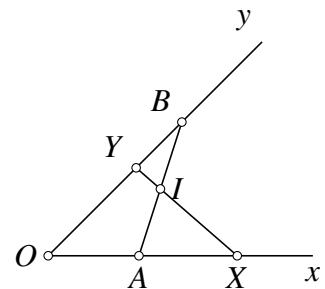
**Bài 25.** Cho góc  $xOy$  và hai điểm  $A, B$  thay đổi lần lượt trên tia  $Ox, Oy$  và hai số dương  $a, b$  sao cho  $aOA + bOB = 1$ . Chứng minh rằng trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  luôn thuộc vào một đường thẳng cố định.

**Lời giải.**

Chọn hai điểm  $X, Y$  lần lượt nằm trên tia  $Ox, Oy$  sao cho  $OX = \frac{1}{2a}$  và  $OY = \frac{1}{2b}$ .

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= \frac{\vec{OA}}{2} + \frac{\vec{OB}}{2} = \frac{OA}{2OX} \vec{OX} + \frac{OB}{2OY} \vec{OY} \\ &= aOA \vec{OX} + bOB \vec{OY}. \end{aligned}$$



Do  $aOA + bOB = 1$  nên  $I, X, Y$  thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

### Dạng 5. Xác định $M$ thỏa mãn đẳng thức véc-tơ

Phương pháp: Biến đổi đẳng thức véc-tơ về một trong các dạng sau:

$\vec{OM} = \vec{v}$  ( $O$  cố định và  $\vec{v}$  đã biết)  $\Rightarrow M$  xác định duy nhất.

Những điểm cần chú ý:

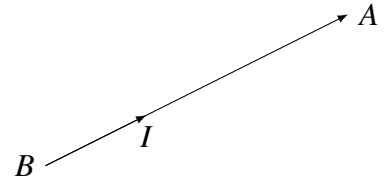
- Áp dụng các qui tắc để biến đổi như: qui tắc 3 điểm, qui tắc hình bình hành, qui tắc hiệu.
- Biến đổi đẳng thức véc-tơ sao cho có duy nhất một véc-tơ có chứa điểm cuối là điểm cần tìm qua các véc-tơ đã xác định.
- Vẽ hình để xác định điểm hoặc mô tả điểm cần tìm ở vị trí nào so với các điểm cố định mà đề bài đã cho.

**Ví dụ 18.** Cho hai điểm  $A, B$ . Tìm  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & \vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & \vec{IB} + \vec{BA} + 2\vec{IB} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & 3\vec{IB} + \vec{BA} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & \vec{BI} = -\frac{1}{3}\vec{BA}.
 \end{aligned}$$

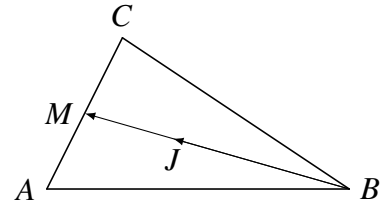
Vậy  $I$  nằm trên đoạn  $AB$  cách  $B$  một đoạn  $\frac{1}{3}BA$ .



**Ví dụ 19.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm  $J$  thỏa mãn  $\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{CB}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & \vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{CB} \\
 \Leftrightarrow & \vec{JB} + \vec{BA} + 2\vec{JB} = \vec{CB} \\
 \Leftrightarrow & 3\vec{JB} = \vec{CB} - \vec{BA} \\
 \Leftrightarrow & 3\vec{JB} = \vec{CB} - \vec{BA} \\
 \Leftrightarrow & \vec{BJ} = -\frac{1}{3}(\vec{CB} - \vec{BA}) \\
 \Leftrightarrow & \vec{BJ} = \frac{1}{3}(\vec{BC} + \vec{BA}) \\
 \Leftrightarrow & \vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BM} \text{ (Với } M \text{ là trung điểm của cạnh } AC).
 \end{aligned}$$



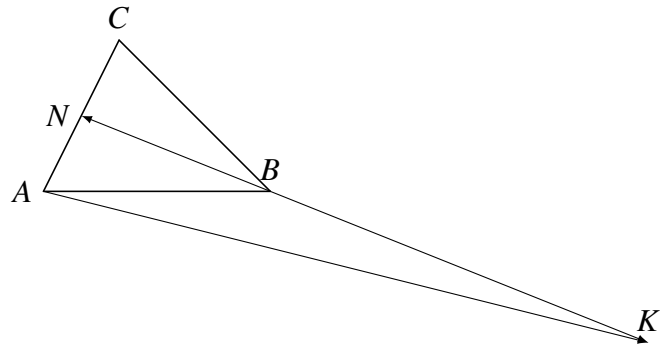
Vậy  $J$  nằm trên đoạn  $BM$  (với  $M$  là trung điểm  $AC$ ) cách  $B$  một đoạn  $\frac{2}{3}BM$ .

**Ví dụ 20.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm  $K$  thỏa mãn:  $\vec{KA} - 3\vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & \vec{KA} - 3\vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & \vec{KB} + \vec{BA} - 3\vec{KB} + \vec{KB} + \vec{BC} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & \vec{BA} - \vec{KB} + \vec{BC} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & -\vec{KB} + \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & \vec{BK} = \vec{BA} + \vec{BC} \\
 \Leftrightarrow & \vec{BK} = 2\vec{BN} \text{ (Với } N \text{ là trung điểm của } AC).
 \end{aligned}$$

Vậy:  $K$  nằm trên đường thẳng  $BN$  (với  $N$  là trung điểm  $AC$  ngược hướng của  $N$  và cách  $B$  một đoạn  $2BN$ ).

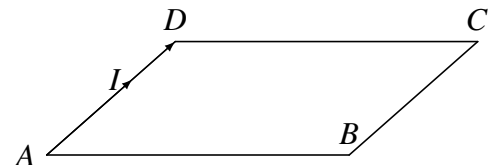


**Ví dụ 21.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Xác định điểm  $I$  thỏa mãn  $3\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{DA}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & 3\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{DA} \\
 \Leftrightarrow & 3\vec{IA} + \vec{CB} = \vec{DA} \\
 \Leftrightarrow & 3\vec{IA} = \vec{DA} - \vec{CB} \\
 \Leftrightarrow & 3\vec{IA} = \vec{DA} + \vec{BC} \text{ (Vì } ABCD \text{ là hình bình hành)} \\
 \Leftrightarrow & 3\vec{IA} = 2\vec{DA} \\
 \Leftrightarrow & \vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AD}.
 \end{aligned}$$

Vậy:  $I$  nằm trên cạnh  $AD$  cách  $A$  một đoạn  $\frac{2}{3}AD$ .



**Ví dụ 22.** Cho trước hai điểm  $A, B$  và hai số thực  $\alpha + \beta \neq 0$ . Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm  $I$  thỏa mãn  $\alpha\vec{IA} + \beta\vec{IB} = \vec{0}$ .

**Lời giải.** Ta có:  $\alpha \cdot \vec{IA} + \beta \vec{IB} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \alpha \vec{IA} + \beta (\vec{IA} + \vec{AB}) = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow (\alpha + \beta) \vec{IA} + \beta \vec{AB} = \vec{0}$  (Vì  $\alpha + \beta \neq 0$ ).  
 $\Leftrightarrow \vec{IA} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$ .

Vậy tồn tại duy nhất điểm  $I$  thỏa mãn điều kiện đề bài.

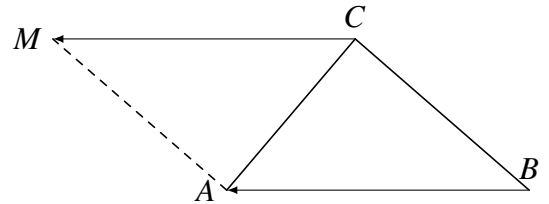
### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 26.** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy xác định điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện:  $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \vec{MA} - (\vec{MA} + \vec{AB}) + \vec{MC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow -\vec{AB} + \vec{MC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \vec{MC} = \vec{AB}$   
 $\Leftrightarrow \vec{CM} = \vec{BA}$ .

Vậy  $M$  xác định duy nhất thỏa ( $\vec{CM} = \vec{BA}$ ).

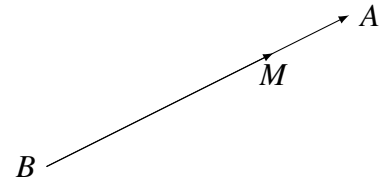


**Bài 27.** Cho hai điểm  $A, B$  phân biệt. Xác định điểm  $M$  thỏa  $\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \vec{MA} + 3(\vec{MA} + \vec{AB}) = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 4\vec{MA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ .

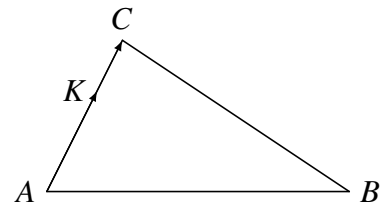
Vậy:  $M$  nằm trên đoạn  $AB$  cách  $B$  một đoạn  $\frac{3}{4}AB$ .



**Bài 28.** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định điểm  $K$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{CB}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\vec{KA} + (\vec{KA} + \vec{AB}) + (\vec{KA} + \vec{AC}) = \vec{CB}$   
 $\Leftrightarrow 3\vec{KA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{CB}$   
 $\Leftrightarrow 3\vec{KA} = \vec{CB} - \vec{AB} - \vec{AC}$   
 $\Leftrightarrow 3\vec{KA} = \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{CA}$   
 $\Leftrightarrow 3\vec{KA} = 2\vec{CA}$   
 $\Leftrightarrow \vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AC}$  Vậy  $K$  nằm trên đoạn  $AC$  và cách  $A$  một đoạn là  $\frac{2}{3}AC$

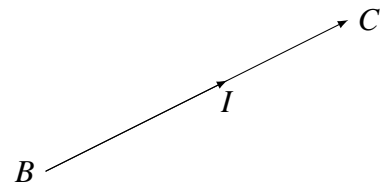


**Bài 29.** Cho hai điểm  $B, C$ . Xác định điểm  $I$  thỏa mãn  $2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 2\vec{IB} + 3(\vec{IB} + \vec{BC}) = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 5\vec{IB} + 3\vec{BC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \vec{BI} = \frac{3}{5}\vec{BC}$ .

Vậy:  $I$  nằm trên đoạn  $BC$  và cách  $B$  một đoạn là  $\frac{3}{5}BC$

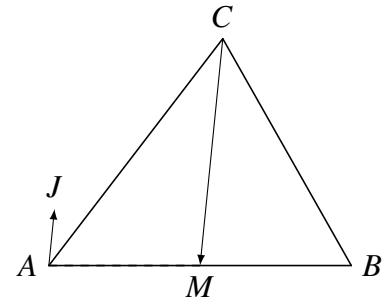


**Bài 30.** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định điểm  $J$  thỏa mãn  $2\vec{JA} + \vec{JC} - \vec{JB} = \vec{CA}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & 2\vec{JA} + \vec{JC} - \vec{JB} = \vec{CA} \\
\Leftrightarrow & 2\vec{JA} + \vec{JA} + \vec{AC} - (\vec{JA} + \vec{AB}) = \vec{CA} \\
\Leftrightarrow & 2\vec{JA} + \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{CA} \\
\Leftrightarrow & 2\vec{JA} + \vec{BC} = \vec{CA} \\
\Leftrightarrow & 2\vec{JA} = \vec{CA} - \vec{BC} \\
\Leftrightarrow & 2\vec{JA} = \vec{CA} + \vec{CB} \\
\Leftrightarrow & \vec{AJ} = -\frac{1}{4}\vec{CM} \text{ (Với } M \text{ là trung điểm } AB).
\end{aligned}$$

Vậy:  $J$  xác định duy nhất thoả  $(\vec{AJ} = -\frac{1}{4}\vec{CM})$  với  $M$  là trung điểm  $AB$

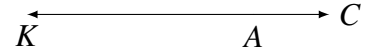


**Bài 31.** Cho hai điểm  $A, C$ . Xác định điểm  $K$  thoả mãn  $2\vec{KA} + \vec{KC} = 2\vec{AC}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & 2\vec{KA} + \vec{KC} = 2\vec{AC} \\
\Leftrightarrow & \vec{KA} + \vec{KA} - \vec{KC} = 2\vec{AC} \\
\Leftrightarrow & \vec{KA} + \vec{CA} = 2\vec{AC} \\
\Leftrightarrow & \vec{KA} = 2\vec{AC} - \vec{CA} \\
\Leftrightarrow & \vec{KA} = 3\vec{AC} \\
\Leftrightarrow & \vec{AK} = -3\vec{AC}.
\end{aligned}$$

Vậy:  $K$  nằm trên đường  $AC$  và cách  $A$  một đoạn là  $3AC$  ngược hướng với  $C$

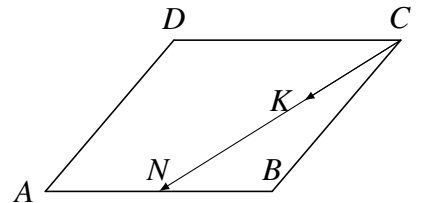


**Bài 32.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tìm  $K$  thoả mãn:  $3\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & 3\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{KC} + 3\vec{CA} + \vec{KB} + \vec{CB} + \vec{KC} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow & 5\vec{KC} + \vec{CA} + \vec{CB} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow & 5\vec{KC} + 2\vec{CN} = \vec{0} \text{ (Với } N \text{ là trung điểm của } AB). \\
\Leftrightarrow & \vec{CK} = -\frac{2}{5}\vec{CN}.
\end{aligned}$$

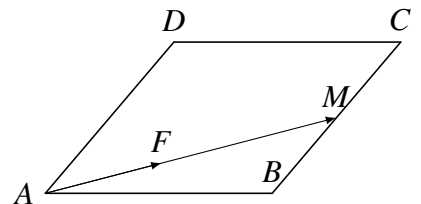
Vậy:  $K$  nằm trên đoạn  $CN$  và cách  $C$  một đoạn là  $\frac{2}{5}CN$  với  $N$  là trung điểm  $AB$ .



**Bài 33.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Xác định điểm  $F$  thoả mãn  $3\vec{FA} + 2\vec{FB} + \vec{FC} = \vec{CD} + \vec{CB}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & 3\vec{FA} + 2\vec{FB} + \vec{FC} = \vec{CD} + \vec{CB} \\
\Leftrightarrow & 3\vec{FA} + 2\vec{FA} + 2\vec{AB} + \vec{FA} + \vec{AC} = \vec{CD} + \vec{CB} \\
\Leftrightarrow & 6\vec{FA} + 2\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{CA} \text{ (Vì } ABCD \text{ là hình bình hành)} \\
\Leftrightarrow & 6\vec{FA} = \vec{CA} - 2\vec{AB} - \vec{AC} \\
\Leftrightarrow & 6\vec{FA} = \vec{CA} + 2\vec{BA} + \vec{CA} \\
\Leftrightarrow & 6\vec{FA} = 2\vec{CA} + 2\vec{BA} \\
\Leftrightarrow & 3\vec{FA} = \vec{CA} + \vec{BA} \\
\Leftrightarrow & 3\vec{FA} = 2\vec{AM} \text{ (Với } M \text{ là trung điểm } BC) \\
\Leftrightarrow & \vec{AF} = -\frac{2}{3}\vec{AM}.
\end{aligned}$$



Vậy điểm  $F$  cần tìm thoả mãn đẳng thức vec tơ  $\vec{AF} = -\frac{2}{3}\vec{AM}$ .

**Bài 34.** Cho trước ba điểm  $A, B, C$  và ba số thực  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ . Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm  $I$  thoả mãn  $\alpha\vec{IA} + \beta\vec{IB} + \gamma\vec{IC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & \alpha\vec{IA} + \beta\vec{IB} + \gamma\vec{IC} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow & \alpha\vec{IA} + \beta(\vec{IA} + \vec{AB}) + \gamma(\vec{IA} + \vec{AC}) = \vec{0} \\
\Leftrightarrow & (\alpha + \beta + \gamma)\vec{IA} + \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} = \vec{0} \text{ (Vì } \alpha + \beta + \gamma \neq 0). \\
\Leftrightarrow & \vec{IA} = -\frac{\beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}}{\alpha + \beta + \gamma}.
\end{aligned}$$

Vậy: Tồn tại duy nhất điểm  $I$  thoả mãn điều kiện đề bài.

### III. Bài tập tổng hợp

**Bài 35.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt thay đổi trên các cạnh  $AB$  và  $CD$  sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$ .

Tìm tập hợp các điểm  $I$  là trung điểm của đoạn  $MN$ .

**Lời giải.**

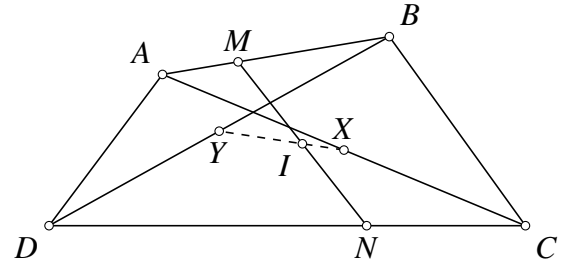
Giả sử  $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = k$ . Gọi  $X, Y$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$ . Ta có

$$\begin{aligned} 2\vec{IX} &= (\vec{IM} + \vec{MA} + \vec{AX}) + (\vec{IN} + \vec{NC} + \vec{CX}) \\ &= \vec{MA} + \vec{NC}. \end{aligned}$$

Tương tự  $2\vec{IY} = \vec{MB} + \vec{ND}$ . Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} (1-k)\vec{MA} + k\vec{MB} &= \vec{0} \\ (1-k)\vec{NC} + k\vec{ND} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

suy ra  $(1-k)\vec{IX} + k\vec{IY} = \vec{0}$ . Chú ý rằng  $0 \leq k \leq 1$  nên tập các điểm  $I$  là đoạn thẳng  $XY$ .



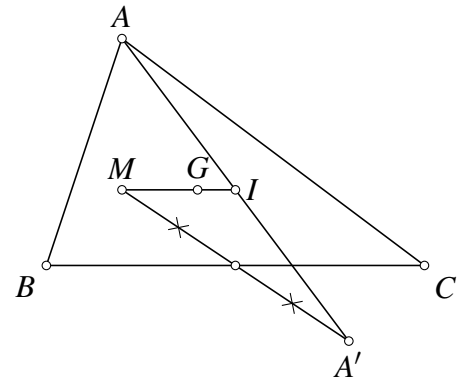
**Bài 36.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và điểm  $M$ . Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là điểm đối xứng với  $M$  qua trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng bốn đường thẳng  $AA', BB', CC'$  và  $MG$  đồng quy.

**Lời giải.**

Để thấy  $MBA'C$  là hình bình hành nên  $\vec{A'B} + \vec{A'C} - \vec{A'M} = \vec{0}$ . Tương tự  $\vec{B'C} + \vec{B'A} - \vec{B'M} = \vec{0}$ . Trừ hai vế của hai đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{A'B} - \vec{B'A} + \vec{A'C} - \vec{B'C} - \vec{A'M} + \vec{B'M} \\ &= \vec{A'B} + \vec{B'A}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có  $ABA'B'$  là hình bình hành, do đó  $AA'$  và  $BB'$  cắt nhau tại trung điểm  $I$  của mỗi đường. Chứng minh tương tự, ta có  $AA', BB', CC'$  đồng quy tại trung điểm  $I$  của mỗi đường.



Ta có  $\vec{MI} = \frac{\vec{MA} + \vec{MA'}}{2} = \frac{\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}}{2} = \frac{3}{2}\vec{MG}$ . Vậy  $MG$  đi qua  $I$ , ta được điều phải chứng minh.

**Bài 37.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm là  $I$ . Điểm  $M$  là tùy ý không nằm trên đường thẳng  $AB$ . Trên  $MI$  kéo dài lấy một điểm  $N$  sao cho  $IN = MI$ .

a) Chứng minh:  $\vec{BN} - \vec{BA} = \vec{MB}$ .

b) Tìm các điểm  $D, C$  sao cho:  $\vec{NA} + \vec{NI} = \vec{ND}$  và  $\vec{MN} - \vec{BN} = \vec{CN}$ .

**Lời giải.**

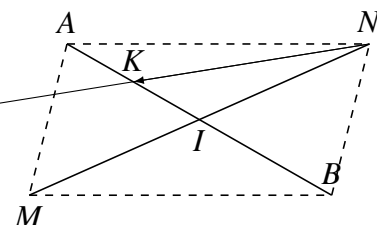
a) Xét:  $\vec{BN} - \vec{BA} - \vec{MB}$   
 $= \vec{AN} - \vec{MB}$   
 $= \vec{AI} + \vec{IN} - \vec{MI} - \vec{IB}$   
 $= \vec{AI} + \vec{IN} + \vec{IM} + \vec{BI}$   
 $= \vec{AI} + \vec{BI} + \vec{IN} + \vec{IM} = \vec{0}$  (Điều phải chứng minh).

b) Tìm  $D$ 

Ta có:  $\vec{NA} + \vec{NI} = \vec{ND}$

$\Leftrightarrow \vec{ND} = 2\vec{NK}$  (với  $K$  là trung điểm của  $AI$ ).

Vậy:  $D$  nằm trên đường  $NK$  và cách  $N$  một đoạn  $2NK$  cùng hướng với  $K$ .



Tìm  $C$

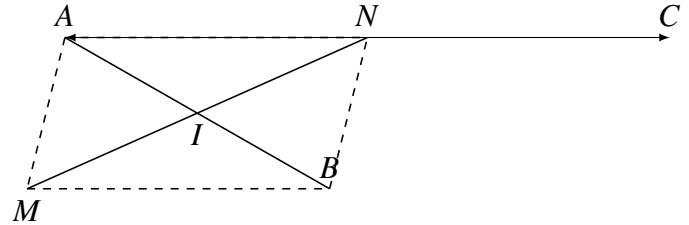
Ta có:  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NA}$ .

Vậy:  $C$  xác định duy nhất thoả  $\overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NA}$ .



**Bài 38.** Cho hình bình hành  $ABCD$ .

a) Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ .

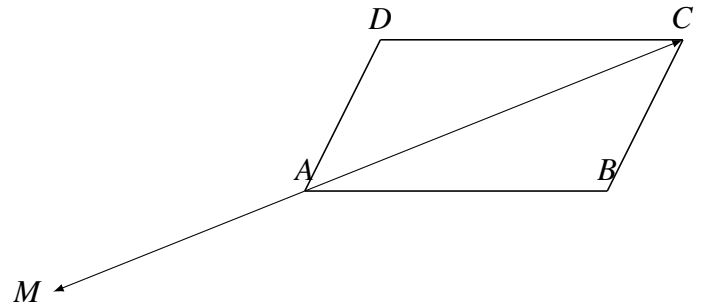
b) Xác định điểm  $M$  thoả mãn điều kiện:  $3\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải.**

a) Xét:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$   
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$  (Vì  $ABCD$  là hình bình hành)  
 $= 2\overrightarrow{AC}$  (Điều phải chứng minh).

b) Ta có:  $3\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$   
 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AC}$  (Theo chứng minh câu a)  
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Vậy:  $M$  xác định duy nhất  $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .



**Bài 39.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ .

a) Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ .

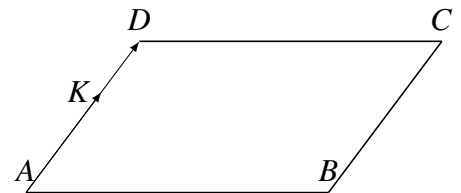
b) Xác định điểm  $K$  thoả mãn điều kiện:  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$  (Vì  $ABCD$  là hình bình hành).  
 Vì vậy:  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$   
 Nên:  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ .  
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ . (Điều phải chứng minh).

b) Ta có:  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .  
 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$   
 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AD}$  (Vì  $ABCD$  là hình bình hành)  
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ .

Vậy:  $K$  xác định duy nhất  $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ .



**Bài 40.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $A', B', C', D'$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $BCD, CDA, ABD$  và  $ABC$ .

a) Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$ .

b) Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$  và  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{ID'} = \vec{0}.$$

**Lời giải.** a) Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có:

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$$

$$\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} &= \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \frac{1}{3} \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

b) Theo kết quả đã biết ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'A}) + (\overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'B}) + (\overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'C}) + (\overrightarrow{ID'} + \overrightarrow{D'D}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{ID'} - (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{ID'} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

(Vì theo kết quả ý a) ta có:  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$ ).

**Bài 41.** Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác  $ABC$ , tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $M, N, P$ . Chứng minh rằng:  $a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

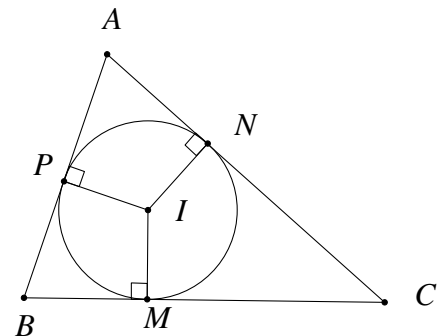
Gọi  $p$  là nửa chu vi tam giác  $ABC$ , ta có:

$$\begin{cases} AP = AN = p - a \\ BM = BP = p - b \\ CN = CM = p - c \end{cases}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} MC \cdot \overrightarrow{MB} + MB \cdot \overrightarrow{MC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (p - c) (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}) + (p - b) (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (2p - b - c) \overrightarrow{IM} &= (p - c) \overrightarrow{IB} + (p - b) \overrightarrow{IC} \\ \Leftrightarrow a\overrightarrow{IM} &= (p - c) \overrightarrow{IB} + (p - b) \overrightarrow{IC} \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự, ta chứng minh được 
$$\begin{cases} b\overrightarrow{IN} = (p - a) \overrightarrow{IC} + (p - c) \overrightarrow{IA} & (2) \\ c\overrightarrow{IP} = (p - b) \overrightarrow{IA} + (p - a) \overrightarrow{IB} & (3) \end{cases}$$



Cộng từng vế các đẳng thức (1), (2), (3) thu được

$$\begin{aligned} a\vec{IM} + b\vec{IN} + c\vec{IP} &= (2p - b - c)\vec{IA} + (2p - a - c)\vec{IB} + (2p - a - b)\vec{IC} \\ &= a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

**Bài 42.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có  $H$  là trực tâm. Chứng minh rằng:

$$\tan A \cdot \vec{HA} + \tan B \cdot \vec{HB} + \tan C \cdot \vec{HC} = \vec{0}.$$

**Lời giải.** Qua điểm  $C$  dựng: đường thẳng song song với  $AH$ , cắt  $BH$  tại  $B'$ ; đường thẳng song song với  $BH$ , cắt  $AH$  tại  $A'$ . Khi đó  $A'HB'C$  là hình bình hành.

Gọi  $D$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ . Áp dụng định lý Ta - lét ta có:

$$\frac{HB'}{HB} = \frac{DC}{DB} = \frac{\frac{AD}{BD}}{\frac{AD}{DC}} = \frac{\tan B}{\tan C}.$$

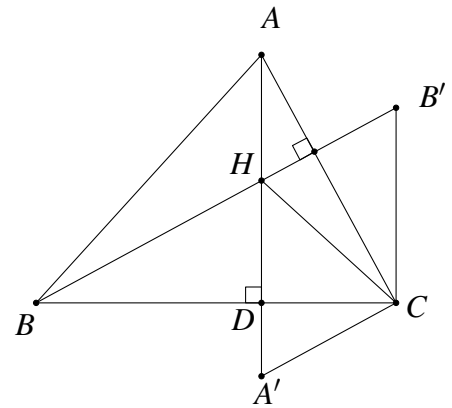
$$\Rightarrow \vec{HB'} = -\frac{\tan B}{\tan C} \cdot \vec{HB} \text{ (Do } \vec{HB'} \text{ và } \vec{HB} \text{ ngược hướng).}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \Rightarrow \vec{HA'} = -\frac{\tan A}{\tan C} \cdot \vec{HA}.$$

Vì  $AHB'C$  là hình bình hành nên ta có:

$$\vec{HC} = \vec{HA'} + \vec{HB'} = -\frac{\tan A}{\tan C} \cdot \vec{HA} - \frac{\tan B}{\tan C} \cdot \vec{HB}.$$

$$\Rightarrow \tan A \cdot \vec{HA} + \tan B \cdot \vec{HB} + \tan C \cdot \vec{HC} = \vec{0}.$$



**Bài 43.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Lấy  $M, N$  sao cho  $\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ ,  $\vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{CD}$ . Gọi  $I, J$  là hai điểm thỏa mãn  $\vec{CI} = \alpha\vec{CD}$ ,  $\vec{BJ} = \beta\vec{BI}$ . Xác định  $\alpha, \beta$  để  $J$  là trọng tâm tam giác  $AMN$ .

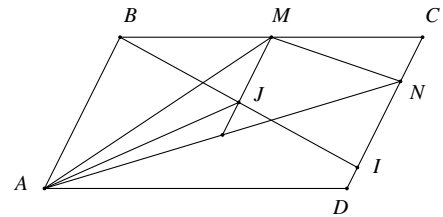
**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} \vec{JA} + \vec{JM} + \vec{JN} &= \vec{BA} - \vec{BJ} + \vec{JB} + \vec{BM} + \vec{JI} + \vec{IN} \\ &= \vec{BA} - 2\vec{BJ} + \frac{\vec{BC}}{2} + \vec{BI} - \vec{BJ} + \vec{CN} - \vec{CI} \\ &= \vec{BA} + \frac{\vec{BC}}{2} + (-3\beta + 1)\vec{BI} + \vec{CN} - \vec{CI} \\ &= \vec{BA} + \frac{\vec{BC}}{2} + (-3\beta + 1)(\vec{BC} + \vec{CI}) + \vec{CN} - \vec{CI} \\ &= \vec{BA} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)(\vec{AC} - \vec{AB}) + \vec{CN} - 3\beta\vec{CI} \\ &= \vec{BA} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)(\vec{AC} - \vec{AB}) + \frac{1}{3}\vec{CD} - 3\alpha\beta\vec{CD} \\ &= \vec{BA} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)(\vec{AC} - \vec{AB}) + \left(\frac{1}{3} - 3\alpha\beta\right)\vec{BA} \\ &= \left(-\frac{17}{6} + 3\beta + 3\alpha\beta\right)\vec{AB} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)\vec{AC}. \end{aligned}$$

Để  $J$  là trọng tâm  $\triangle AMN$  thì  $\vec{JA} + \vec{JM} + \vec{JN} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{17}{6} + 3\beta + 3\alpha\beta\right)\vec{AB} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)\vec{AC} = \vec{0}.$$



Mặt khác, do  $\vec{AB}, \vec{AC}$  không cùng phương nên suy ra:

$$\begin{cases} -\frac{17}{6} + 3\beta + 3\alpha\beta = 0 \\ \frac{3}{2} - 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{8}{9} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy với  $\alpha = \frac{8}{9}, \beta = \frac{1}{2}$  thì  $J$  là trọng tâm  $\triangle AMN$ .

**Bài 44.** Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $M, N$  lần lượt là các điểm thỏa mãn:  $\vec{BM} = 2\vec{BC} - \vec{AB}$ ,  $\vec{CN} = k\vec{AC} - \vec{BC}$  với  $k \in \mathbb{R}$ .

a) Tìm  $k$  để  $M, N$  đi qua trung điểm  $I$  của  $AC$ .

b) Tính  $\frac{IM}{IN}$ .

**Lời giải.**

a) Do  $I$  là trung điểm của  $AC$  nên ta có

$$\vec{BI} = \frac{\vec{BA} + \vec{BC}}{2}. \text{ Khi đó:}$$

$$\vec{MI} = \vec{BI} - \vec{BM} = \frac{\vec{BA} + \vec{BC}}{2} - 2\vec{BC} + \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC} - 2\vec{BC},$$

$$\vec{NI} = \vec{CI} - \vec{CN} = -\frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{BC} = \left(-\frac{1}{2} - k\right)\vec{AC} + \vec{BC}.$$

Mặt khác  $MN$  đi qua  $I$  nên suy ra  $\exists t$  sao cho:

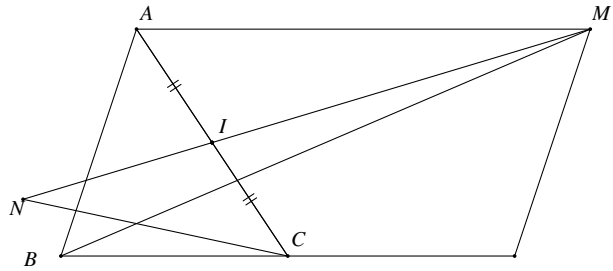
$$\vec{MI} = t\vec{NI}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{AC} - 2\vec{BC} = t\left(-\frac{1}{2} - k\right)\vec{AC} + t\vec{BC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = t\left(-\frac{1}{2} - k\right) \\ -2 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ k = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

b) Với  $t = -2 \Rightarrow \frac{IM}{IN} = 2$ .



## §4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

### I. Tóm tắt lí thuyết

#### Trục và độ dài đại số trên trục

*Trục tọa độ* (còn gọi là *trục*) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm  $O$  cố định và véc-tơ đơn vị  $\vec{i}$  (véc-tơ có độ dài bằng 1).

Điểm  $O$  gọi là *gốc tọa độ*.

Hướng của véc-tơ đơn vị là *hướng của trục*.

Trục tọa độ như vậy ký hiệu là  $(O; \vec{i})$ .

Cho điểm tùy ý  $M$  nằm trên trục  $(O; \vec{i})$ . Khi đó, có duy nhất một số  $k$  xác định sao cho  $\overrightarrow{OM} = k \cdot \vec{i}$ .

Số  $k$  được gọi là *tọa độ* của điểm  $M$  đối với trục  $(O; \vec{i})$ .

Cho véc-tơ  $\vec{a}$  nằm trên trục  $(O; \vec{i})$ . Khi đó có duy nhất số  $t$  xác định sao cho  $\vec{a} = t \cdot \vec{i}$ . Số  $t$  được gọi là *tọa độ* của véc-tơ  $\vec{a}$  đối với trục  $(O; \vec{i})$ .

Như vậy tọa độ của điểm  $M$  là tọa độ của véc-tơ  $\overrightarrow{OM}$ .

Nếu hai điểm  $A, B$  nằm trên trục  $Ox$ . Khi đó có duy nhất một số  $t$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = t \cdot \vec{i}$ . Ta gọi số  $t$  đó là *độ dài* của véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  đối với trục đã cho, ký hiệu là  $\overline{AB}$ . Như vậy  $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$ .

⚠ Nếu  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng với  $\vec{i}$  thì  $\overline{AB} = AB$ .

Nếu  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng với  $\vec{i}$  thì  $\overline{AB} = -AB$ .

Nếu hai điểm  $A, B$  trên trục  $(O; \vec{i})$  có tọa độ lần lượt là  $a, b$  thì  $\overline{AB} = b - a$ .

#### Định lí 1. Trên trục số

Với ba điểm bất kỳ trên trục, ta có  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

Hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  bằng nhau khi và chỉ khi  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

#### Hệ trục tọa độ

Hệ trục tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  gồm hai trục  $(O; \vec{i})$  và  $(O; \vec{j})$  vuông góc với nhau, trong đó

Điểm  $O$  gọi là *gốc tọa độ*.

Trục  $(O; \vec{i})$  gọi là *trục hoành*, ký hiệu là  $Ox$ .

Trục  $(O; \vec{j})$  gọi là *trục tung*, ký hiệu là  $Oy$ .

Các véc-tơ  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$  là các véc-tơ đơn vị trên trục  $Ox$  và  $Oy$ .

Hệ trục tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  còn được ký hiệu là  $Oxy$ .

⚠ Mặt phẳng trên đó đã chọn một hệ trục tọa độ  $Oxy$  được gọi là *mặt phẳng tọa độ  $Oxy$*  hay *mặt phẳng  $Oxy$* .

#### Tọa độ của véc-tơ đối với hệ trục tọa độ

Đối với hệ trục tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  nếu  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  thì cặp số  $(x; y)$  được gọi là *tọa độ* của véc-tơ  $\vec{u}$ , ký hiệu  $\vec{u} = (x; y)$  hay  $\vec{u}(x; y)$ .

Số  $x$  gọi là *hoành độ*,  $y$  gọi là *tung độ* của véc-tơ  $\vec{u}$ .

**Định lí 2.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (x; y)$ ,  $\vec{b} = (x'; y')$  và số thực  $k$ . khi đó

$$(i) \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$(ii) \vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y') \text{ và } \vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$$

$$(iii) k\vec{a} = (kx; ky)$$

$$(iv) \vec{a} \text{ cùng phương với } \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$$

## Tọa độ của điểm

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tọa độ của véc-tơ  $\overrightarrow{OM}$  được gọi là *tọa độ* của điểm  $M$ . Như vậy,  $(x; y)$  là tọa độ của điểm  $M$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ , ký hiệu  $M(x; y)$  hay  $M = (x; y)$ .

Số  $x$  được gọi là *hoành độ*, số  $y$  được gọi là *tung độ* của điểm  $M$ .

⚠ Nếu gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $Ox$  và  $Oy$  thì

$$M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}.$$

Như vậy  $\overrightarrow{OH} = x \vec{i}$  hay  $x = \overrightarrow{OH}$  và  $\overrightarrow{OK} = y \vec{j}$  hay  $y = \overrightarrow{OK}$ .

**Định lý 3.** Với hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

## Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm của tam giác

**Định lý 4.** Cho hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$ . Khi đó trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  có tọa độ  $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

**Định lý 5.** Cho ba điểm  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  và  $C(x_C; y_C)$ . Khi đó trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ  $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

## II. Các dạng toán

**Dạng 1. Tìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục  $(O; \vec{e})$ . Tìm tọa độ của các véc-tơ  $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$**

Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của điểm, độ dài đại số của véc-tơ và các công thức tọa độ của véc-tơ  $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$ .

- Điểm  $M$  có tọa độ  $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a \cdot \vec{e}$  với  $O$  là điểm gốc.
- Véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  có độ dài đại số là  $m = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m \vec{e}$ .
- Nếu  $A$  và  $B$  có tọa độ lần lượt là  $a$  và  $b$  thì  $\overrightarrow{AB} = b - a$ .
- Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn  $AB$ :  $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ .
- Nếu  $\vec{u} = (u_1; u_2), \vec{v} = (v_1; v_2)$  thì  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2); \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2); k\vec{u} = (ku_1; ku_2), k \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 1.** Trên trục tọa độ  $(O; \vec{e})$ , cho ba điểm  $A, B, C$  với:  $\overrightarrow{OA} = 4,5\vec{e}, \overrightarrow{OB} = -7,2\vec{e}, \overrightarrow{OC} = -3,6\vec{e}$ .

- Xác định tọa độ các điểm  $A, B, C$ .
- Tìm tọa độ các trung điểm  $M, N, P$  theo thứ tự của các đoạn thẳng  $AB, BC, CA$ .
- Tính độ dài các đoạn thẳng  $AB, BC, CA$ .

**Lời giải.**



a.  $A(4, 5), B(-7, 2), C(-3, 6)$ .

b. Vì  $M$  là trung điểm  $AB \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -1,35 \Rightarrow M(-1, 35)$ . Tương tự ta được  $N(-5, 4), P(0, 45)$ .

c.  $\overline{AB} = 11,7, \overline{BC} = 3,6, \overline{CA} = 8,1$ .

**Ví dụ 2.** Trên trục tọa độ  $(O, \vec{e})$ , cho ba điểm  $A(1), B(-2), C(7)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $\overline{AM} + 3\overline{BM} = 2\overline{CM}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $M(x)$ , ta có  $\overline{AM} = x - 1, \overline{BM} = x + 2, \overline{CM} = x - 7$ .

Theo giả thiết ta suy ra  $x - 1 + 3(x + 2) = 3(x - 7) \Leftrightarrow x = -26$ .

**Ví dụ 3.** Trên trục tọa độ  $(O, \vec{e})$ , cho các điểm  $A(2), B(-3), C(-6)$ . Tìm tọa độ của  $D(x)$  sao cho  $\overline{DA} + 4\overline{DB} \leq 3\overline{DC}$ .

**Lời giải.**



Ta có:  $\overline{DA} = 2 - x, 4\overline{DB} = -12 - 4x, 3\overline{DC} = -18 - 3x$ .

Theo giả thiết ta suy ra  $2 - x - 12 - 4x \leq -18 - 3x \Rightarrow x \geq 4$ .

**Ví dụ 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-4; 2), \vec{b} = (5; 8)$ . Tính tọa độ của các véc-tơ  $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a}, 5\vec{a} + 2\vec{b}, -(5\vec{a} - 2\vec{b})$ .

**Lời giải.**  $\vec{a} + \vec{b} = (1; 10), \vec{a} - \vec{b} = (-9; -6), 3\vec{a} = (-12; 6)$ .

Ta có:  $5\vec{a} = (-20; 10), 2\vec{b} = (10; 16)$

Nên  $5\vec{a} + 2\vec{b} = (-10; 26)$  và  $-(5\vec{a} - 2\vec{b}) = (30; 6)$ .

**Ví dụ 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các véc-tơ  $\vec{a} = (4; -2), \vec{b} = (-1; -1), \vec{c} = (2; 5)$ . Hãy phân tích véc-tơ  $\vec{b}$  theo hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$ .

**Lời giải.** Giả sử  $\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4m + 2n \\ -1 = -2m + 5n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{8} \\ n = -\frac{1}{4} \end{cases}$ .

Vậy  $\vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}$ .

**Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (x; 2), \vec{b} = (-5; \frac{1}{3}), \vec{c} = (x; 7)$ . Tìm véc-tơ  $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ .

**Lời giải.** Ta có:  $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4x - 3 \cdot (-5) \\ 7 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -5.$

**Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a}(1; -2)$ ;  $\vec{b}(-3; 0)$ ;  $\vec{c}(4; 1)$ . Tìm tọa độ của  $\vec{t} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ .

**Lời giải.** Ta có  $2\vec{a} = (2; -4)$ ;  $-3\vec{b} = (9; 0)$ .  
Mà  $\vec{t} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (15; -3) \Rightarrow \vec{t}(15; -3).$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 1)$ ,  $\vec{b} = (3; 4)$ ,  $\vec{c} = (7; 2)$ .

- Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ .
- Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{v}$  sao cho  $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ .
- Tìm các số  $k, h$  để  $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ .

**Lời giải.**

- $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (4; 2) - (9; 12) + (7; 2) = (2; -8).$
- $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (-6; 1).$
- $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2k + 7h \\ 2 = k + 4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{22}{5} \\ h = -\frac{3}{5} \end{cases}.$  Suy ra  $\vec{c} = \frac{22}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}.$

**Bài 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-1; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 5)$ ,  $\vec{c} = (5; -2)$ . Tính tọa độ của các véc-tơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  định bởi:

- $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}.$
- $4\vec{a} + 2\vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{c}.$

**Lời giải.**

- Ta có:  $2\vec{a} = (-2; 6)$ ,  $3\vec{b} = (0; 15)$ ,  $4\vec{c} = (20; -8)$ ,  $2\vec{a} + 3\vec{b} = (-2; 21)$ .  
 $\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} = (-22; 29).$
- Ta có:  $4\vec{a} + 2\vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{c} \Rightarrow \vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}.$   
mà  $-2\vec{a} = (2; -6)$ ,  $\frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{15}{2}; -3\right)$ ,  $-2\vec{a} + \vec{b} = (2; -1).$   
 $\Rightarrow \vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{11}{2}; 2\right).$

**Bài 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (x; 2)$ ,  $\vec{b} = (-5; 1)$ ,  $\vec{c} = (x; 7)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}.$

**Lời giải.** Ta có:  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 3 \cdot (-5) \\ 7 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 15.$

**Bài 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 1)$ ,  $\vec{b} = (3; 4)$ ,  $\vec{c} = (7; 2)$ . Tìm tọa độ  $\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$ .

**Lời giải.** Ta có:  $\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2m + 3n \\ 2 = m + 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{22}{5} \\ n = -\frac{3}{5} \end{cases}$ .

**Bài 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-2; 1)$ ,  $\vec{b} = (3; 4)$  và  $\vec{c} = (0; 8)$ . Tìm tọa độ  $\vec{x}$  thỏa  $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = -(-2; 1) + (3; 4) - (0; 8) \Leftrightarrow \vec{x} = -(-2; 1) + (3; 4) - (0; 8) \Leftrightarrow \vec{x} = (5; -5)$ .

**Bài 6.** Cho  $\vec{a} = (0; 1)$ ,  $\vec{b} = (-1; 2)$ ,  $\vec{c} = (-3; -2)$ . Tìm tọa độ của  $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$ .

**Lời giải.** Ta có:  $3\vec{a} = (0; 3)$ ,  $2\vec{b} = (-2; 4)$ ,  $-4\vec{c} = (12; 8)$  nên  $\vec{u} = (10; 15)$ .

**Bài 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 1)$ ,  $\vec{b} = (3; 4)$ ,  $\vec{c} = (7; 2)$ . Tìm  $m$  và  $n$  để  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

**Lời giải.** Ta có:  $m\vec{a} + n\vec{b} = (2m + 3n; m + 4n)$ .

Mà:  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3n = 7 \\ m + 4n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{22}{5} \\ n = -\frac{3}{5} \end{cases}$ .

**Bài 8.** Trên trục  $Ox$  cho các điểm  $A(2)$ ,  $B(-2)$ . Tìm điểm  $M(x)$  thỏa mãn điều kiện  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} \leq \overline{AB}^2$ .

**Lời giải.** Ta có:  $\overline{MA} = 2 - x$ ,  $\overline{MB} = -2 - x$ ,  $\overline{AB} = -4$ .

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} \leq \overline{AB}^2 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) \geq -16 \Leftrightarrow x^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{5}.$$

**Bài 9.** Trên trục tọa độ  $(O; \vec{e})$ , cho ba điểm  $A(-4)$ ,  $B(9)$ ,  $C(-3)$ .

a. Tìm điểm  $M(x)$  thỏa mãn điều kiện  $\overline{AB} = 2\overline{CM}$ .

b. Tìm điểm  $P(x)$  thỏa mãn điều kiện  $\overline{PA} + 2\overline{PB} + 3\overline{PC} \leq 0$ .

c. Tìm điểm  $Q(x)$  thỏa mãn điều kiện  $\overline{QA} \cdot \overline{QB} \leq \overline{QC}^2$ .

**Lời giải.**

a.  $\overline{AB} = 13$ ,  $2\overline{CM} = 2x + 6$ . Theo giả thiết ta suy ra  $13 = 2x + 6 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ .

b.  $\overline{PA} = -4 - x$ ,  $2\overline{PB} = 18 - 2x$ ,  $3\overline{PC} = -9 - 3x$ .

Theo giả thiết ta suy ra  $-4 - x + 18 - 2x - 9 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{6}$ .

c.  $\overline{QA} = -4 - x$ ,  $\overline{QB} = 9 - x$ ,  $\overline{QC} = -3 - x$ .

Theo giả thiết ta suy ra  $(-4 - x)(9 - x) \leq (-3 - x)^2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{45}{11}$ .

**Bài 10.** Trên trục tọa độ  $x'Ox$  cho ba điểm  $A, B, C$  có tọa độ lần lượt là 9, -6, 2. Tìm các điểm đối xứng với điểm  $A$  và  $B$  qua  $C$ .

**Lời giải.** Gọi  $A', B'$  lần lượt là điểm đối xứng với điểm  $A$  và  $B$  qua  $C$ .

Vì  $C$  là trung điểm của đoạn  $AA'$  nên  $x_C = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_C - x_A = 4 - 9 = -5$ .

Tương tự ta suy ra  $x_{B'} = 4 + 6 = 10$ .

**Dạng 2. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$** 

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , với điểm  $M$  tùy ý, luôn tồn tại duy nhất hai số thực  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Bộ hai số thực  $(x; y)$  được gọi là *tọa độ* của véc-tơ  $\overrightarrow{OM}$ , ký hiệu  $\overrightarrow{OM} = (x; y)$  hay  $\overrightarrow{OM}(x; y)$ .



- Tọa độ của véc-tơ đơn vị  $\vec{i}$  là  $(1; 0)$ , tức là  $\vec{i} = (1; 0)$ .
- Tọa độ của véc-tơ đơn vị  $\vec{j}$  là  $(0; 1)$ , tức là  $\vec{j} = (0; 1)$ .
- Tọa độ của véc-tơ-không là  $(0; 0)$ , tức là  $\vec{0} = (0; 0)$ .

Nếu biết tọa độ của hai điểm  $A, B$  thì ta tính tọa độ của véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  theo công thức

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

**Ví dụ 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(3; 2), B(2; -1), C(-2; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$ .

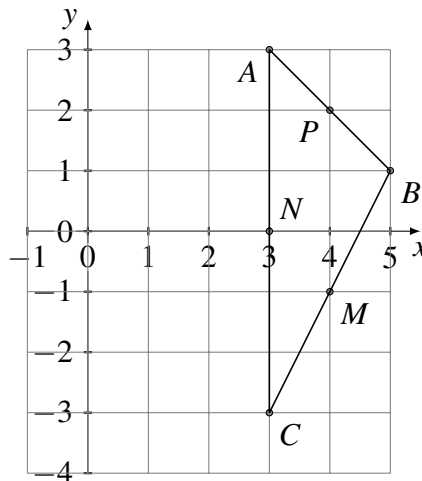
**Lời giải.** Gọi  $D(x; y)$ . Ta có  $\overrightarrow{AD} = (x - 3; y - 2), \overrightarrow{BC} = (-4; -1)$ .

$$\text{Vì } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ nên } \begin{cases} x - 3 = -4 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm  $D$  là  $(-1; 1)$ .

**Ví dụ 9.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M(4; -1), N(3; 0)$  và  $P(4; 2)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**



Ta có  $\overrightarrow{NA} = (x_A - 3; y_A), \overrightarrow{MP} = (0; 3)$ .

Vì  $NAPM$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$

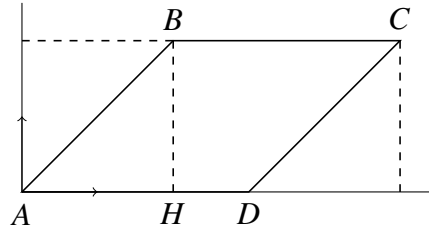
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 3 = 0 \\ y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ y_A = 3. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm  $A$  là  $(3; 3)$ .

Tương tự, từ  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$  ta tính được  $B(5; 1), C(3; -3)$ .

**Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AD = 3$  và chiều cao ứng với cạnh  $AD$  bằng 2 góc  $\widehat{BAD} = 30^\circ$ . Chọn hệ trục tọa độ  $(A; \vec{i}, \vec{j})$  sao cho  $\vec{i}$  và  $\vec{AD}$  cùng hướng. Tìm tọa độ của các véc-tơ  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$  và  $\vec{AC}$ .

**Lời giải.**



Kẻ  $BH \perp AD$ . Ta có  $BH = 2$ ,  $AB = 4$ ,  $AH = 2\sqrt{3}$ .

Do đó ta có  $A(0; 0)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(5; 2)$ ,  $D(3; 0)$ .

Suy ra  $\vec{AB} = (2; 2)$ ,  $\vec{BC} = (3; 0)$ ,  $\vec{CD} = (-2; -2)$ ,  $\vec{AC} = (5; 2)$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 11.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 4)$ ,  $B(2; 6)$ ,  $C(1; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

**Lời giải.** Gọi  $D(x; y)$ . Ta có  $\vec{AD} = (x + 1; y - 4)$ ,  $\vec{BC} = (-1; -5)$ .

$$\text{Vì } \vec{AD} = \vec{BC} \text{ nên } \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ điểm  $D$  là  $(-2; -1)$ .

**Bài 12.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(1; -1)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(1; -5)$ ,  $D(3; 1)$ . Chứng minh rằng hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song với nhau.

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AB} = (1; 3)$ ,  $\vec{CD} = (2; 6)$ .

Suy ra  $\vec{CD} = 2\vec{AB}$ . Do đó hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song hoặc trùng nhau.

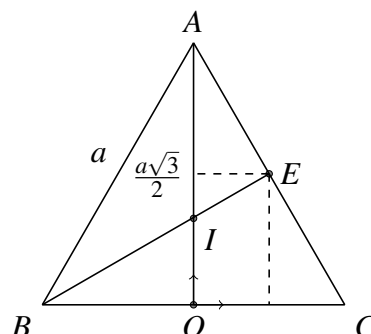
Ta có  $\vec{AC} = (0; -4)$  và  $\vec{AB} = (1; 3)$  không cùng phương vì  $\frac{0}{1} \neq \frac{-4}{3}$ .

Vậy  $AB \parallel CD$ .

**Bài 13.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Chọn hệ trục tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , trong đó  $O$  là trung điểm của cạnh  $BC$ ,  $\vec{i}$  cùng hướng với  $\vec{OC}$ ,  $\vec{j}$  cùng hướng với  $\vec{OA}$ .

- Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$ ;
- Tìm tọa độ trung điểm  $E$  của cạnh  $AC$ ;
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**



a) Ta có  $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right), C\left(0; \frac{a}{2}\right)$ .

Vì  $\triangle ABC$  là tam giác đều nên  $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Suy ra  $A\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ .

b)  $E\left(\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ .

c) Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

Ta có  $OI = \frac{1}{3}OA = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

Suy ra  $I\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ .

### Dạng 3. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm

Phương pháp giải, kinh nghiệm giải.

$M$  là trung điểm  $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ .

$G$  là trọng tâm tam giác  $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$ .

**Ví dụ 11.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1;4), B(-2;6)$ . Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

**Lời giải.** Gọi  $M(x_M; y_M)$  là trung điểm  $AB$ , khi đó:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1-2}{2} \\ y_M = \frac{4+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\frac{1}{2} \\ y_M = 5 \end{cases}$$

Vậy  $M\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$ .

**Ví dụ 12.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-1;2), B(1;4), C(-1;-2)$ . Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Gọi  $G(x_G; y_G)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ , khi đó:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1+1-1}{3} \\ y_G = \frac{2+4-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = -\frac{1}{3} \\ y_G = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy  $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

**Ví dụ 13.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(3;1), B(2;2), G(2;-1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  biết  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Gọi  $C(x_C; y_C)$ .

Ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{3 + 2 + x_C}{3} \\ -1 = \frac{1 + 2 + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -6. \end{cases}$$

Vậy  $C(1; -6)$ .

**Ví dụ 14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; -4)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ , tìm tọa độ trọng tâm tam giác  $OBM$ .

**Lời giải.** Gọi  $G(x_G; y_G)$  là trọng tâm tam giác  $OBM$ ,  $M(x_M; y_M)$  là trung điểm  $AB$ .

Ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_O + x_B + x_M}{3} \\ y_G = \frac{y_O + y_B + y_M}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1}{3} \\ y_G = \frac{-4 - 2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1}{3} \\ y_G = -2. \end{cases}$$

Vậy  $G\left(\frac{-1}{3}; -2\right)$ .

**Ví dụ 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(1; 5)$ ,  $B(-4; -3)$ ,  $C(2; -1)$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ , tìm tọa độ điểm  $G'$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $B$ .

**Lời giải.** Gọi  $G(x_G; y_G)$ ,  $G'(x'_G; y'_G)$ . Ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1 - 4 + 2}{3} \\ y_G = \frac{5 - 3 - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1}{3} \\ y_G = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vì  $G'$  là ảnh đối xứng của  $G$  qua  $B$  nên  $B$  là trung điểm của  $GG'$ . Ta có:

$$\begin{cases} x_{G'} = 2x_B - x_G \\ y_{G'} = 2y_B - y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = 2 \cdot (-4) - \frac{-1}{3} \\ y_{G'} = 2 \cdot (-3) - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = \frac{-23}{3} \\ y_{G'} = \frac{-19}{3}. \end{cases}$$

Vậy  $G\left(\frac{-23}{3}; \frac{-19}{3}\right)$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(0; 2)$ ,  $B(-3; -2)$ . Tìm tọa độ trung điểm của  $AB$ .

**Lời giải.** Gọi  $M(x_M; y_M)$  là trung điểm  $AB$ , khi đó:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{0 - 3}{2} \\ y_M = \frac{2 - 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{-3}{2} \\ y_M = 0. \end{cases}$$

Vậy  $M\left(\frac{-3}{2}; 0\right)$ .

**Bài 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-1; 2)$ ,  $B(5; -2)$ ,  $C(-2; 1)$ . Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Gọi  $G(x_G; y_G)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ , khi đó:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1 + 5 - 2}{3} \\ y_G = \frac{2 - 2 + 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

**Bài 16.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-1; 1)$ ,  $D\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ .

- Tìm tọa độ điểm  $B$  biết  $D$  là trung điểm đoạn  $AB$ .
- Tìm tọa độ điểm  $M$  đối xứng với  $A$  qua  $B$ .

**Lời giải.**

- a) Gọi  $B(x_B; y_B)$ .

Ta có:

$$\begin{cases} x_D = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ \frac{5}{2} = \frac{1 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 4. \end{cases}$$

Vậy  $B(-1; 4)$ .

- b) Gọi  $M(x_M; y_M)$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$ , khi đó  $B$  là trung điểm của  $MA$ .

Ta có:

$$\begin{cases} x_M = 2x_B - x_A \\ y_M = 2y_B - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \cdot (-1) - (-1) \\ y_M = 2 \cdot 4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = 7. \end{cases}$$

Vậy  $M(-1; 7)$ .

**Bài 17.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(-3; 2)$ ,  $B(4; 3)$  và điểm  $C$  nằm trên trục  $Ox$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  và điểm  $C$ , biết  $G$  nằm trên trục  $Oy$ .

**Lời giải.** Gọi  $G(0; y_G)$ ,  $C(x_C; 0)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{-3 + 4 + x_C}{3} \\ y_G = \frac{2 + 3 + 0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_G = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy  $G\left(0; \frac{5}{3}\right)$ ,  $C(-1; 0)$ .

**Bài 18.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tìm tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$ , biết trung điểm của các cạnh  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  lần lượt là  $M(2; 1)$ ,  $N(2; 4)$ ,  $P(-3; 0)$ .

**Lời giải.** Gọi  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$ ,  $C(x_C; y_C)$  là tọa độ ba đỉnh của tam giác  $ABC$ .

$G(x_G; y_G)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = x_M \\ \frac{x_B + x_C}{2} = x_N \\ \frac{x_A + x_C}{2} = x_P \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = y_M \\ \frac{y_B + y_C}{2} = y_N \\ \frac{y_A + y_C}{2} = y_P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = x_M + x_N + x_P \\ y_A + y_B + y_C = y_M + y_N + y_P. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} \\ y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2 + 2 + (-3)}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{1 + 4 + 0}{3} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy  $G\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

**Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường thẳng**

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau:

- Hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .
- Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  cùng phương.
- Điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $AB$  khi và chỉ khi ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng.

**Ví dụ 16.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-1; 1), B(1; 3), C(2; 4)$ .

- Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- Đường thẳng  $AB$  cắt trục  $Ox$  tại điểm  $M$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ .

**Lời giải.**

a) Ta có:  $\vec{AB} = (2; 2)$  và  $\vec{AC} = (3; 3) \Rightarrow \vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ .

Suy ra hai véc-tơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  cùng phương. Do đó, ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

- b) Vì Đường thẳng  $AB$  cắt trục  $Ox$  tại điểm  $M$  nên ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AM}$  cùng phương.

Gọi  $M(x; 0)$  thuộc trục  $Ox$ . Ta có:  $\vec{AB} = (2; 2)$  và  $\vec{AM} = (x + 1; -1)$ .

$$\vec{AB} \text{ và } \vec{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy  $M(-2; 0)$ .

**Ví dụ 17.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba véc-tơ  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (-3; 1)$  và  $\vec{c} = (6; 5)$ . Tìm  $m$  để véc-tơ  $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b} = (m - 3; 2m + 1)$ .

Suy ra:  $\vec{u}$  cùng phương với  $\vec{c} \Leftrightarrow \frac{m-3}{6} = \frac{2m+1}{5} \Leftrightarrow m = -3$ .

Vậy  $m = -3$ .

**Ví dụ 18.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(5; 5), B(6; -2), C(-2; 4)$ .

- Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.
- Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

a) Ta có:  $\vec{AB} = (1; -7)$  và  $\vec{AC} = (-7; -1)$ .

Vì  $\frac{1}{-7} \neq \frac{-7}{-1}$  nên hai véc-tơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  không cùng phương.

Suy ra ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Do đó  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi  $D(x; y)$ . Ta có:  $\vec{AD} = (x - 5; y - 5)$  và  $\vec{BC} = (-8; 6)$ .

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = -8 \\ y - 5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 11 \end{cases}$$

Vậy  $D(-3; 11)$ .

**Ví dụ 19.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-2; 1)$  và  $B(-4; 5)$ .

- a) Tìm trên trục  $Ox$  điểm  $C$  sao cho  $ABCO$  là hình thang có cạnh đáy là  $AO$ .  
b) Tìm tọa độ giao điểm  $I$  của hai đường chéo của hình thang  $ABCO$ .

**Lời giải.**

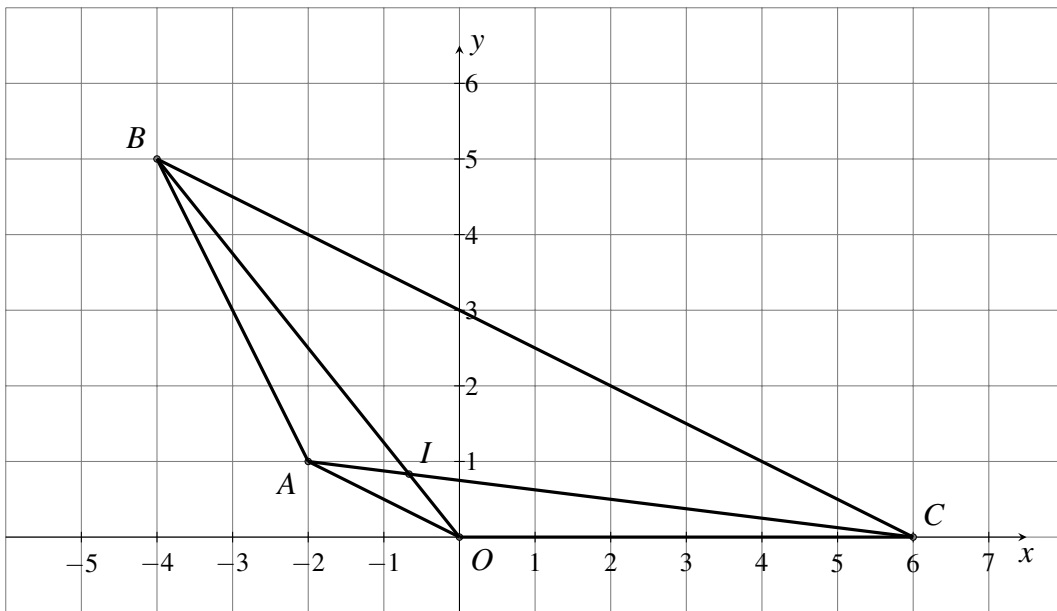
- a) Gọi  $C(x; 0)$  thuộc trục  $Ox$ . Vì  $ABCO$  là hình thang có cạnh đáy là  $AO$  nên  $AO \parallel BC$ . Suy ra hai véc-tơ  $\vec{AO}$  và  $\vec{BC}$  cùng phương.

Ta có:  $\vec{AO} = (2; -1)$  và  $\vec{BC} = (x+4; -5)$ .

$\vec{AO}$  và  $\vec{BC}$  cùng phương  $\Leftrightarrow \frac{x+4}{2} = \frac{-5}{-1} \Leftrightarrow x = 6$ .

Vậy  $C(6; 0)$ .

- b) Gọi  $I(x; y)$  là giao điểm hai đường chéo  $OB$  và  $AC$  của hình thang  $ABCO$ .



Ta có:  $\vec{OI} = (x; y)$ ,  $\vec{OB} = (-4; 5)$ ,  $\vec{AI} = (x+2; y-1)$ ,  $\vec{AC} = (8; -1)$ .

Ta có:  $O, I, B$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \vec{OI}$  và  $\vec{OB}$  cùng phương  $\frac{x}{-4} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow 5x + 4y = 0$  (1).

Lại có:  $A, I, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \vec{AI}$  và  $\vec{AC}$  cùng phương  $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{-1} \Leftrightarrow x + 8y = 6$  (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ x + 8y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Vậy  $I\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 19.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm phân biệt  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$ . Ta nói điểm  $M$  chia đoạn thẳng  $AB$  theo tỉ số  $k \neq 1$  nếu  $\vec{MA} = k\vec{MB}$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}$$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}.$$

$$\text{Khi } k = -1 \text{ thì } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}, M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB.$$

**Bài 20.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(0; 2)$ ,  $B(1; 1)$  và  $C(-1; -2)$ . Các điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  lần lượt chia các đoạn thẳng  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  theo các tỉ số  $\frac{1}{2}$ ,  $-2$ ,  $-1$ .

- a) Tìm tọa độ các điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .  
b) Chứng minh ba điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

a) Ta có:

$$\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C} \Rightarrow A'(3; 4).$$

$$\overrightarrow{B'C} = -2\overrightarrow{B'A} \Rightarrow B'\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{C'A} = -\overrightarrow{C'B} \Rightarrow C'\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

b) Ta có:  $\overrightarrow{A'B'} = \left(-\frac{10}{3}; -\frac{10}{3}\right)$  và  $\overrightarrow{A'C'} = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{A'C'}$ .

Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{A'B'}$  và  $\overrightarrow{A'C'}$  cùng phương. Do đó, ba điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  thẳng hàng.

**Bài 21.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(5; 0)$ ,  $B(3; -2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt trục  $Oy$  tại điểm  $M$ . Trong ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $M$ , điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

**Lời giải.**

Vì Đường thẳng  $AB$  cắt trục  $Oy$  tại điểm  $M$  nên ba điểm  $M$ ,  $A$ ,  $B$  thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương.

Gọi  $M(0; m)$  thuộc trục  $Oy$ . Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-2; -2)$  và  $\overrightarrow{AM} = (-5; m)$ .

$$\overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{-5}{-2} = \frac{m}{-2} \Leftrightarrow m = -5.$$

Suy ra  $M(-2; 0)$ . Khi đó, ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-2; -2)$  và  $\overrightarrow{AM} = (-5; -5)$ , suy ra  $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM}$ .

Vậy điểm  $B$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $M$ .

**Bài 22.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(6; 4)$ ,  $B(3; -2)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .

- a) Tìm trên trục hoành điểm  $M$  sao cho  $MA + MB$  đạt giá trị nhỏ nhất.  
b) Tìm trên trục hoành điểm  $N$  sao cho  $NA + NC$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

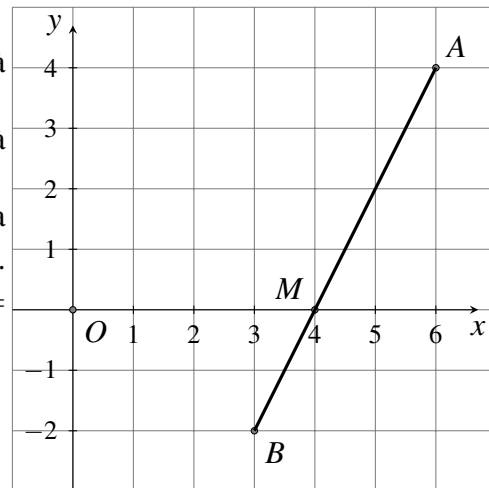
- a) Ta có hai điểm  $A$  và  $B$  nằm về hai phía đối với trục hoành.

Với mọi  $M \in Ox$ , ta có  $MA + MB \geq AB$  và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm  $A, M, B$  thẳng hàng.

Vậy  $MA + MB$  có giá trị nhỏ nhất là bằng  $AB$ , đạt được khi  $M$  là giao điểm của của đường thẳng  $AB$  và trục hoành.

Vì  $M$  là giao điểm của của đường thẳng  $AB$  và trục hoành nên ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương.

Gọi  $M(x; 0)$  thuộc trục  $Ox$ . Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (x - 6; -4)$  và  $\overrightarrow{AB} = (-3; -6)$ .



$$\overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-6}{-3} = \frac{-4}{-6} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy  $M(4; 0)$ .

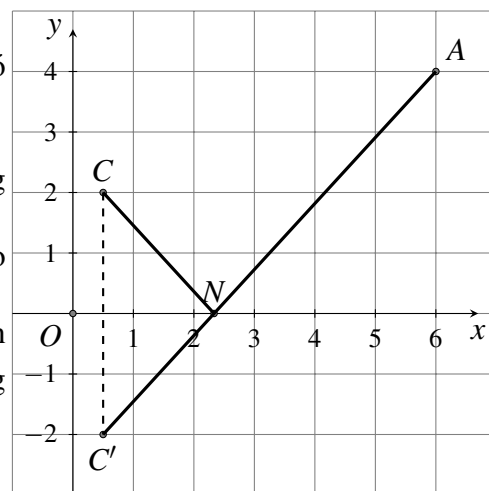
- b) Ta có hai điểm  $A$  và  $C$  nằm về một phía đối với trục hoành.

Gọi  $C'$  là điểm đối xứng với  $C$  qua trục hoành. Khi đó, ta có  $C'(\frac{1}{2}; -2)$ .

Với mọi  $N \in Ox$ , ta có  $NA + NC = NA + NC' \geq AC'$  và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm  $A, N, C'$  thẳng hàng.

Vậy  $NA + NC$  có giá trị nhỏ nhất là bằng  $AC'$ , đạt được khi  $N$  là giao điểm của của đường thẳng  $AC'$  và trục hoành.

Vì  $N$  là giao điểm của của đường thẳng  $AC'$  và trục hoành nên ba điểm  $N, A, C'$  thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{AC'}$  cùng phương.



Gọi  $N(x; 0)$  thuộc trục  $Ox$ . Ta có:  $\overrightarrow{AN} = (x - 6; -4)$  và  $\overrightarrow{AC'} = (-\frac{11}{2}; -6)$ .

$$\overrightarrow{AN} \text{ và } \overrightarrow{AC'} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{-2(x-6)}{11} = \frac{-4}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Vậy  $N(\frac{7}{3}; 0)$ .

**Bài 23.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(6; 4)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(-2; 1)$ .

- a) Tìm trên trục tung điểm  $M$  sao cho  $|MA - MB|$  đạt giá trị lớn nhất.

- b) Tìm trên trục tung điểm  $N$  sao cho  $|NA - NC|$  đạt giá trị lớn nhất.

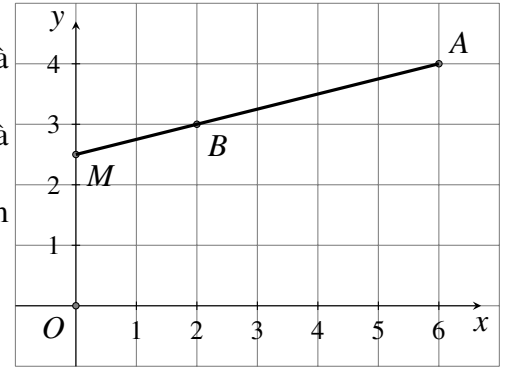
**Lời giải.**

- a) Ta có hai điểm  $A$  và  $B$  nằm về một phía đối với trục tung.

Với mọi  $M \in Oy$ , ta có  $|MA - MB| \leq AB$  và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm  $A, M, B$  thẳng hàng.

Vậy  $|MA - MB|$  có giá trị lớn nhất là bằng  $AB$ , đạt được khi  $M$  là giao điểm của của đường thẳng  $AB$  và trục tung.

Vì  $M$  là giao điểm của của đường thẳng  $AB$  và trục tung nên ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương.



Gọi  $M(0; y)$  thuộc trục  $Oy$ . Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (-6; y - 4)$  và  $\overrightarrow{AB} = (-4; -1)$ .

$$\overrightarrow{AM} \text{ và } \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{-6}{-4} = \frac{y-4}{-1} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}.$$

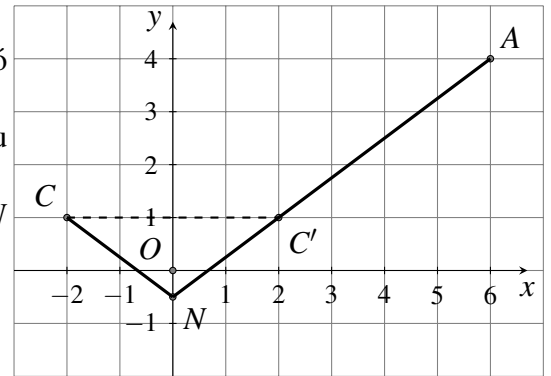
$$\text{Vậy } M\left(0; \frac{5}{2}\right).$$

- b) Ta có hai điểm  $A$  và  $C$  nằm về hai phía đối với trục hoành.

Gọi  $C'$  là điểm đối xứng với  $C$  qua trục tung. Khi đó, ta có  $C'(2; 1)$ .

Với mọi  $N \in Oy$ , ta có  $|NA - NC| = |NA - NC'| \leq AC'$  và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm  $A, N, C'$  thẳng hàng.

Vậy  $|NA - NC|$  có giá trị lớn nhất là bằng  $AC'$ , đạt được khi  $N$  là giao điểm của của đường thẳng  $AC'$  và trục tung.



Vì  $N$  là giao điểm của của đường thẳng  $AC'$  và trục tung nên ba điểm  $N, A, C'$  thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{AC'}$  cùng phương.

Gọi  $N(0; y)$  thuộc trục  $Oy$ . Ta có:  $\overrightarrow{AN} = (-6; y - 4)$  và  $\overrightarrow{AC'} = (-4; -3)$ .

$$\overrightarrow{AN} \text{ và } \overrightarrow{AC'} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{-6}{-4} = \frac{y-4}{-3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } N\left(0; -\frac{1}{2}\right).$$

### III. Bài tập tổng hợp

**Bài 24.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tìm tọa độ của các véc-tơ sau:

- $\vec{a} = -5\vec{i}$ ;
- $\vec{b} = 7\vec{j}$ ;
- $\vec{c} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$ ;
- $\vec{d} = 0,5\vec{i} - \sqrt{11}\vec{j}$ .

**Lời giải.** a)  $\vec{a} = -5\vec{i} = (-5; 0)$ ;

b)  $\vec{b} = 7\vec{j} = (0; 7)$ ;

c)  $\vec{c} = -3\vec{i} + 8\vec{j} = (-3; 8)$ ;

d)  $\vec{d} = 0,5\vec{i} - \sqrt{11}\vec{j} = (0,5; -\sqrt{11})$ .

**Bài 25.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-3; -1)$ ,  $B(1; 1)$  và  $C(7; 4)$ .

- Tìm tọa độ của  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ . Chứng minh  $A, B, C$  thẳng hàng.
- Chứng minh  $A, B, O$  không thẳng hàng. Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABO$ .
- Tìm tọa độ điểm  $D$  trên trục hoành để  $A, B, D$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; 2), \overrightarrow{BC} = (6; 3)$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ .

Do đó hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  cùng phương.

Vậy  $A, B, C$  thẳng hàng.

b) Ta có  $\overrightarrow{AO} = (3; 1)$ . Suy ra  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AO}$  là hai véc-tơ không cùng phương.

Do đó  $A, B, O$  không thẳng hàng.

Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABO$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_O}{3} = \frac{-3 + 1 + 0}{3} = \frac{-2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_O}{3} = \frac{-1 + 1 + 0}{3} = 0. \end{cases}$$

Vậy  $G\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ .

c) Vì  $D \in Ox$  nên  $D(x; 0)$  và  $\overrightarrow{AD} = (x + 3; 1)$

Do  $A, B, D$  thẳng hàng nên  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$  cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy  $D(-1; 0)$ .

**Bài 26.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-2; 3)$ ,  $B(2; 4)$  và  $C(1; -2)$ .

a) Chứng minh  $A, B, C$  là ba đỉnh của tam giác.

b) Tính tọa độ véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

c) Tính tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; 1)$  và  $\overrightarrow{AC} = (3; -5)$ .

Vì  $\frac{4}{3} \neq \frac{1}{-5}$  nên  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương.

Suy ra  $A, B, C$  không thẳng hàng.

Vậy  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi  $M(x; y)$  là trung điểm của  $BC$ . Ta có

$$\begin{cases} x = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{4-2}{2} = 1. \end{cases}$$

Do đó  $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ .

Vậy  $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{7}{2}; -2\right)$ .

c) Gọi  $G(x; y)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Ta có

$$\begin{cases} x = \frac{-2+2+1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{3+4-2}{3} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy  $G\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

**Bài 27.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; 2)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(5; 1)$ .

a) Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của  $AC$ .

b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

a) Gọi  $I(x; y)$  là trung điểm của  $AC$ . Ta có

$$\begin{cases} x = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy  $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

b) Vì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $I$  là trung điểm của  $BD$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{x_D + 1}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{y_D + 4}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = 3 \\ y_D + 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -1. \end{cases}$$

Vậy  $D(2; -1)$ .

**Bài 28.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; -1)$ ,  $B(-3; 5)$ ,  $C(4; -7)$ .

a) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $BGCD$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

a) Gọi  $G(x; y)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Ta có

$$\begin{cases} x = \frac{2 - 3 + 4}{3} = 1 \\ y = \frac{-1 + 5 - 7}{3} = -1 \end{cases}.$$

Vậy  $G(1; -1)$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{CD} = (x_D - 4; y_D + 7)$ ,  $\overrightarrow{GB} = (-4; 6)$ .

Vì  $BGCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 4 = -4 \\ y_D + 7 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -1. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm  $D$  là  $(0; -1)$ .

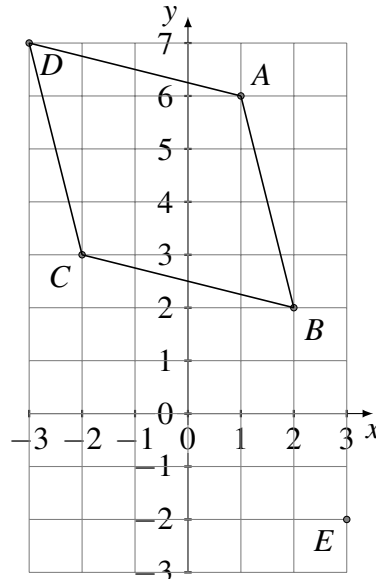
**Bài 29.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $A(1; 6)$ ,  $B(2; 2)$  và  $C(-2; 3)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  tạo thành một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là một hình bình hành.

c) Tìm tọa độ điểm  $E(x; -2)$  sao cho  $A, B, E$  thẳng hàng.

**Lời giải.**



a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; -4)$  và  $\overrightarrow{AC} = (-3; -3)$ .

Vì  $\frac{1}{-3} \neq \frac{-4}{-3}$  nên  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương.

Suy ra  $A, B, C$  không thẳng hàng.

Vậy  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi  $D(x; y)$ . Ta có  $\overrightarrow{CD} = (x + 2; y - 3)$ ,  $\overrightarrow{BA} = (-1; 4)$ .

Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-1 \\ y-3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=7. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm  $D$  là  $(-3; 7)$ .

c) Ta có  $\overrightarrow{AE} = (x-1; -8), \overrightarrow{AB} = (1; -4)$ .

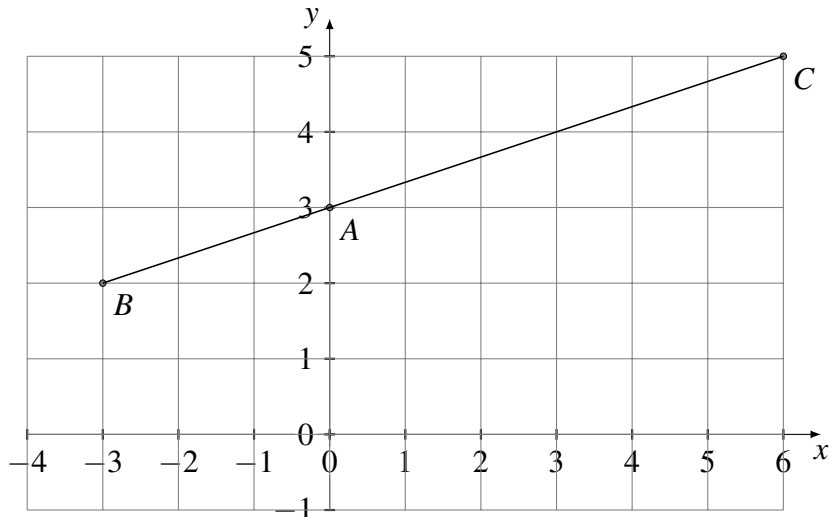
Vì  $A, B, E$  thẳng hàng nên  $\frac{x-1}{1} = \frac{-8}{-4}$ .

Suy ra  $x = 3$ .

Vậy  $E(3; -2)$ .

**Bài 30.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $B(-3; 2)$  và  $C(6; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $A$  thuộc trục tung sao cho  $AB + AC$  bé nhất.

**Lời giải.**



Vì  $A$  thuộc trục tung nên  $A(0; y)$ .

Ta có  $\overrightarrow{BA} = (3; y-2), \overrightarrow{BC} = (9; 3)$ .

Vì  $x_B = -3 < 0$  và  $x_C = 6 > 0$  nên  $B$  và  $C$  nằm về hai phía đối với trục tung.

Do đó  $AB + AC$  bé nhất khi và chỉ khi  $A, B, C$  thẳng hàng.

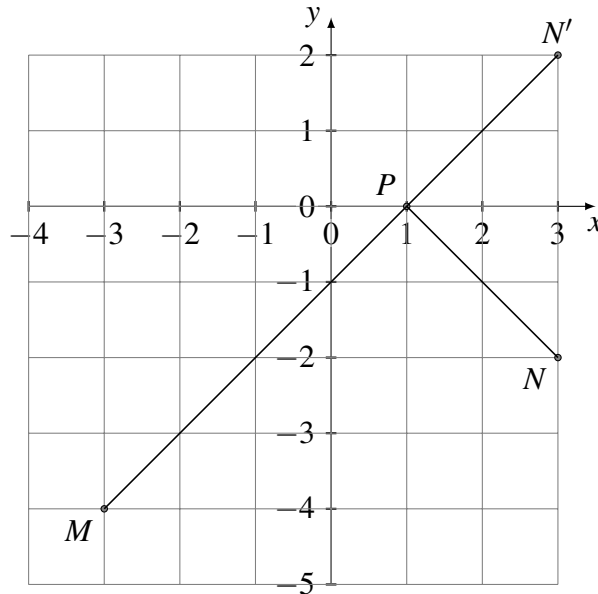
Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$  cùng phương.

Tức là  $\frac{3}{9} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow y = 3$ .

Vậy  $A(0; 3)$ .

**Bài 31.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $M(-3; -4)$  và  $N(3; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $P$  thuộc trục  $Ox$  sao cho  $PM + PN$  bé nhất.

**Lời giải.**



Vì  $P \in Ox$  nên  $P(x; 0)$ .

Vì  $y_M = -4 < 0$  và  $y_N = -2 < 0$  nên  $M, N$  nằm cùng phía đối với  $Ox$ .

Gọi  $N'$  là điểm đối xứng với  $N$  qua  $Ox$ .

Suy ra  $N'(3; 2)$  và  $\overrightarrow{MN'} = (6; 6)$ ,  $\overrightarrow{MP} = (x + 3; 4)$ .

Ta có  $PM + PN = PM + PN'$ . Do đó  $PM + PN$  bé nhất khi và chỉ khi  $PM + PN'$  bé nhất.

$PM + PN'$  bé nhất

$\Leftrightarrow P, M, N'$  thẳng hàng

$\Leftrightarrow$  Hai véc-tơ  $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN'}$  cùng phương

$\Leftrightarrow \frac{x+3}{6} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow x = 1$ .

Vậy  $P(1; 0)$ .

**Bài 32.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1; -2)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(3; 2)$ . Tìm điểm  $D$  sao cho  $D \in Ox$  và  $ABCD$  là hình thang đáy là  $AB$ .

**Lời giải.** Gọi  $D(x_D; 0)$  là điểm cần tìm.

Để  $ABCD$  là hình thang thì  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$  ( $k > 0$ )  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_D) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 1 = 3k - k.x_D \\ 4 - (-2) = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ x_D = \frac{10}{3} \end{cases}$  (nhậ

Vậy  $D\left(\frac{10}{3}; 0\right)$ .

**Bài 33.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G, I, H$  lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác  $ABC$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  biết  $I(0; 2)$ ,  $H(3; 5)$ .

**Lời giải.**

Kéo dài  $AI$  cắt đường tròn tại  $D$ .

Ta có:  $\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AC$  mà  $BH \perp AC \Rightarrow BH$  song song  $CD$ .

Tương tự ta cũng có  $BD$  song song  $HC$ .

$\Rightarrow HCDB$  là hình bình hành.

Ta có:  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

Chèn điểm  $H$  vào ta suy ra  $3\vec{GH} + \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}$ .

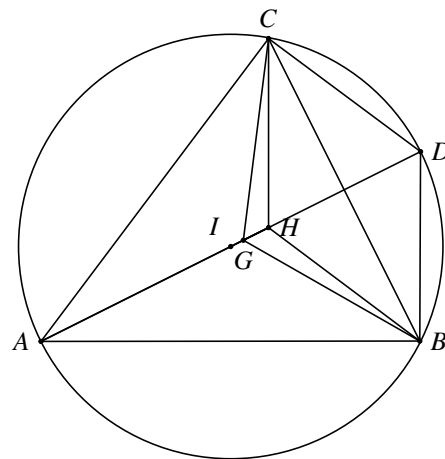
Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{HD}$ .

Ta suy ra được  $3\vec{GH} + \vec{HA} + \vec{HD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{GH} = 2\vec{HI}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_H - x_G) = 2(x_I - x_H) \\ 3(y_H - y_G) = 2(x_I - x_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 5 \\ y_G = 7. \end{cases}$$

Vậy  $G(5; 7)$ .



**Bài 34.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(5; 3)$ ,  $B(2; -3)$ ,  $C(-2; 1)$ .

a) Chứng minh rằng  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm trên trục hoành điểm  $M$  sao cho  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm trên trục tung điểm  $N$  sao cho  $|\vec{NA} - 4\vec{NB} + 9\vec{NC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

a) Ta có:  $\vec{AB} = (-3; -6)$  và  $\vec{AC} = (-7; -2)$ .

Vì  $\frac{-3}{-7} \neq \frac{-6}{-2}$  nên hai véc-tơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  không cùng phương.

Suy ra ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Do đó  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ , ta có:  $G\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

Ta có:  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |3\vec{MG}| = 3MG$ .

Do đó,  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MG$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M$  là hình chiếu của  $G$  trên trục hoành.

Suy ra  $M\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ .

c) Gọi  $I$  là điểm thỏa mãn  $\vec{IA} - 4\vec{IB} + 9\vec{IC} = \vec{0}$ .

Gọi  $I(x; y)$ , ta có:

$$\vec{IA} - 4\vec{IB} + 9\vec{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 - 4(x - 2) + 9(x + 2) = 0 \\ y - 3 - 4(y + 3) + 9(y - 1) = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 21 = 0 \\ 6y - 24 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{3} \\ y = 4. \end{cases}$$

Suy ra  $I\left(-\frac{7}{3}; 4\right)$ .

Ta có:

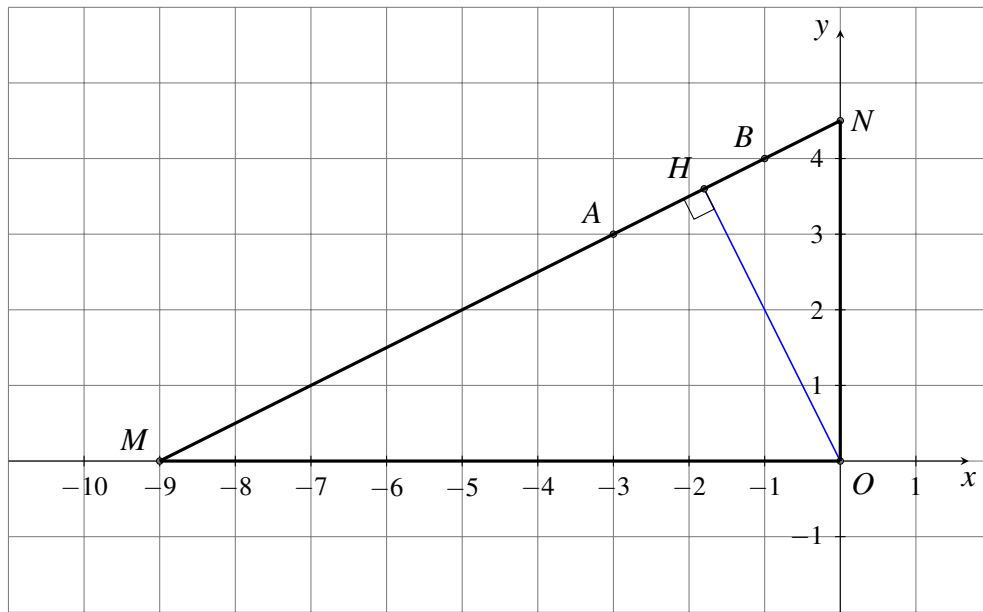
$$\begin{aligned}
& \left| \overrightarrow{NA} - 4\overrightarrow{NB} + 9\overrightarrow{MC} \right| \\
&= \left| \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA} - 4(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB}) + 9(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \right| \\
&= \left| 6\overrightarrow{NI} + (\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 9\overrightarrow{IC}) \right| \\
&= \left| 6\overrightarrow{NI} \right| = 6NI.
\end{aligned}$$

Do đó,  $\left| \overrightarrow{NA} - 4\overrightarrow{NB} + 9\overrightarrow{MC} \right|$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow NI$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow N$  là hình chiếu của  $I$  trên trục tung.

Suy ra  $N(0; 4)$ .

**Bài 35.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-3; 3)$ ,  $B(-1; 4)$ . Đường thẳng đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  cắt trục hoành tại  $M$  và cắt trục tung tại  $N$ . Tính diện tích tam giác  $OMN$  và độ dài đường cao của tam giác  $OMN$  kẻ từ  $O$ .

**Lời giải.**



Vì Đường thẳng  $AB$  cắt trục  $Ox$  tại điểm  $M$  nên ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương.

Gọi  $M(x; 0)$  thuộc trục  $Ox$ . Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (x + 3; -3)$  và  $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$ .

$\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương  $\Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{-3}{1} \Leftrightarrow x = -9$ .

Vậy  $M(-9; 0)$ .

Vì Đường thẳng  $AB$  cắt trục  $Oy$  tại điểm  $N$  nên ba điểm  $N, A, B$  thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ  $\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương.

Gọi  $N(0; y)$  thuộc trục  $Oy$ . Ta có:  $\overrightarrow{AN} = (3; y - 3)$  và  $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$ .

$\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương  $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{y-3}{1} \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}$ .

Vậy  $N\left(0; \frac{9}{2}\right)$ .

Vì tam giác  $OMN$  vuông tại  $O$  nên tam giác  $OMN$  có diện tích là:

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4}.$$

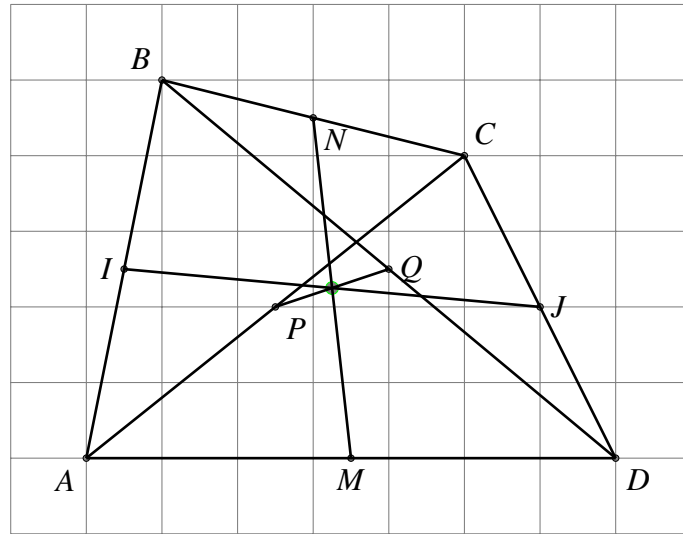
Gọi  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $O$  của tam giác vuông  $OMN$ . Khi đó, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{81} + \frac{4}{91} = \frac{5}{81}.$$

Do đó, ta có:  $OH^2 = \frac{81}{5} \Rightarrow OH = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ .

**Bài 36.** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$ ;  $P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AC$  và  $BD$ ;  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh rằng ba đoạn thẳng  $IJ, PQ$  và  $MN$  có cùng trung điểm.

**Lời giải.**



Xét mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Giả sử  $A(a_1; a_2)$ ,  $B(b_1; b_2)$ ,  $C(c_1; c_2)$  và  $D(d_1; d_2)$ . Ta có:

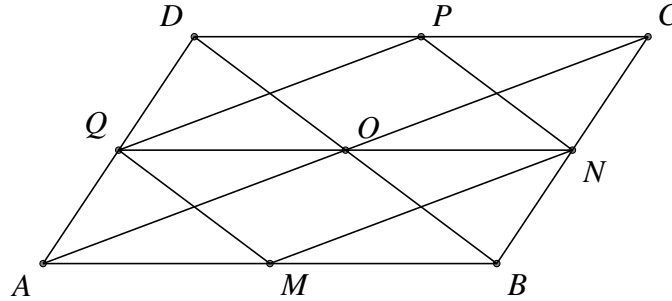
- $I\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$ ,  $J\left(\frac{c_1 + d_1}{2}; \frac{c_2 + d_2}{2}\right)$ . Suy ra trung điểm của đoạn thẳng  $IJ$  có tọa độ là  $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)$  (1).
- $P\left(\frac{a_1 + c_1}{2}; \frac{a_2 + c_2}{2}\right)$ ,  $Q\left(\frac{b_1 + d_1}{2}; \frac{b_2 + d_2}{2}\right)$ . Suy ra trung điểm của đoạn thẳng  $PQ$  có tọa độ là  $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)$  (2).
- $M\left(\frac{a_1 + d_1}{2}; \frac{a_2 + d_2}{2}\right)$ ,  $N\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right)$ . Suy ra trung điểm của đoạn thẳng  $MN$  có tọa độ là  $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)$  (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra ba đoạn thẳng  $IJ, PQ$  và  $MN$  có cùng trung điểm.

## §5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

### I. Đề số 1a

**Câu 1.** (1 điểm) Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  (hình vẽ).



a) Từ hình vẽ, hãy chỉ ra tất cả các véc-tơ đối của véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ .

b) Từ hình vẽ, chỉ ra tất cả các véc-tơ bằng véc-tơ  $\overrightarrow{OA}$ .

**Lời giải.**

a) Các véc-tơ đối của véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{CD}$ . ..... 0,5 điểm.

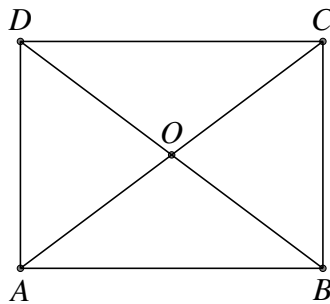
b) Các véc-tơ bằng véc-tơ  $\overrightarrow{OA}$  là  $\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{NM}$ . ..... 0,5 điểm.

**Câu 2.** (1 điểm) Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8$  cm,  $BC = 6$  cm.

a) Chứng minh rằng, với mọi điểm  $M$ , ta luôn có  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$ .

b) Tính độ dài véc-tơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.** Hình vẽ



a) Vì  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC}$  (đúng với mọi  $M$ ) nên ta có đẳng thức cần chứng minh. .... 0,5 điểm.

b) Vì  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  nên  $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . ..... 0,25 điểm.  
Do đó  $|\vec{u}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$  cm. .... 0,25 điểm.

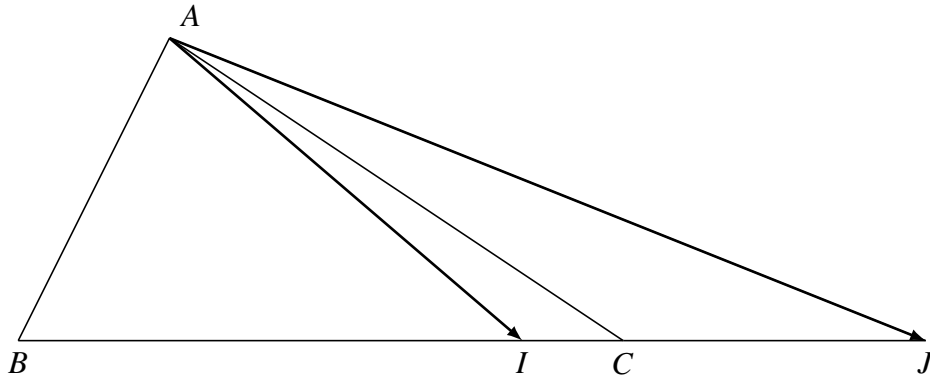
**Câu 3.** (2 điểm) Cho tam giác  $ABC$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện

$$3|\overrightarrow{MA}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$$

**Lời giải.** Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ , ta có  $\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MI}$ . ..... 0,5 điểm.  
 Suy ra  $|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}| = |2\vec{MA} - 2\vec{MI}| = 2|\vec{IA}|$  ..... 0,5 điểm.  
 Do đó  $3|\vec{MA}| = |2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}| \Leftrightarrow AM = \frac{2}{3}AI$ . ..... 0,5 điểm.  
 Vậy, quỹ tích các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $r = \frac{2}{3}AI$ . ..... 0,5 điểm.

**Câu 4.** (2 điểm) Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là các điểm sao cho  $\vec{IB} + 5\vec{IC} = \vec{0}$  và  $\vec{JB} - 3\vec{JC} = \vec{0}$ .  
 Hãy phân tích các véc-tơ  $\vec{AI}$  và  $\vec{AJ}$  theo hai véc-tơ  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

**Lời giải.** Hình vẽ.



Ta có  $\vec{IB} + 5\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{IA} + \vec{AB}) + 5(\vec{IA} + \vec{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC}$ . ..... 1 điểm.  
 $\vec{JB} - 3\vec{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{JA} + \vec{AB}) - 3(\vec{JA} + \vec{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$ . ..... 1 điểm.

**Câu 5.** (4 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $M(-3;4)$ ,  $P(1;1)$  và điểm  $N$  sao cho  $\vec{ON} = 2\vec{i} - \vec{j}$ .

- Chứng minh rằng  $M, N, P$  không thẳng hàng. Xác định điểm  $Q$  sao cho  $MPNQ$  là hình bình hành.
- Xác định điểm  $I$  trên trục  $Oy$  sao cho  $|\vec{IN} + \vec{IP} + 4\vec{IM}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

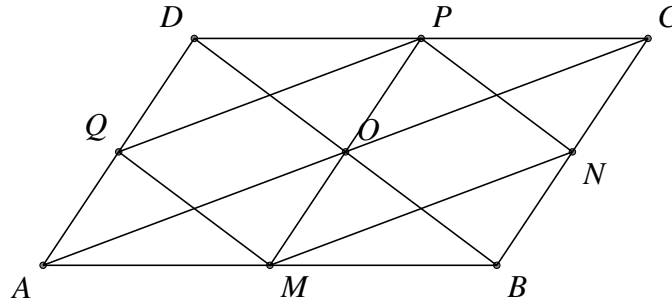
**Lời giải.**

- Từ  $\vec{ON} = 2\vec{i} - \vec{j}$  suy ra  $N(2; -1)$ . ..... 0,25 điểm.  
 Ta có  $\vec{MN} = (5; -5)$ ,  $\vec{MP} = (4; -3)$  và  $\frac{5}{4} \neq \frac{-5}{-3}$  nên  $M, N, P$  không thẳng hàng. .... 0,5 điểm.  
 Giả sử  $Q(x; y)$ . Ta có  $\vec{MP} = (4; -3)$  và  $\vec{QN} = (2 - x; -1 - y)$ . ..... 0,5 điểm.  
 $MPNQ$  là hình bình hành khi  $\vec{MP} = \vec{QN} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2 - x \\ -3 = -1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$  ..... 0,5 điểm.  
 Vậy  $Q(-2; 2)$ . ..... 0,25 điểm.

- Gọi  $K(a; b)$  là điểm sao cho  $\vec{KN} + \vec{KP} + 4\vec{KM} = \vec{0}$ . ..... 0,5 điểm.  
 Ta có  $\vec{KN} = (2 - a; -1 - b)$ ,  $\vec{KP} = (1 - a; 1 - b)$ ,  $\vec{KM} = (-3 - a; 4 - b)$ . ..... 0,5 điểm.  
 Do đó  $\vec{KN} + \vec{KP} + 4\vec{KM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}$ . Suy ra  $K\left(-\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right)$  ..... 0,5 điểm.  
 Vì  $I \in Oy$  nên  $|\vec{IN} + \vec{IP} + 4\vec{IM}| = |6\vec{IK}| = 6.IK$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $K$  lên  $Oy$ . Suy ra  $I\left(0; \frac{8}{3}\right)$ . ..... 0,5 điểm.

## II. Đề số 1b

**Câu 1.** (1 điểm) Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  (hình vẽ).



- a) Từ hình vẽ, hãy chỉ ra tất cả các véc-tơ đối của véc-tơ  $\overrightarrow{BC}$ .
- b) Từ hình vẽ, chỉ ra tất cả các véc-tơ bằng véc-tơ  $\overrightarrow{OB}$ .

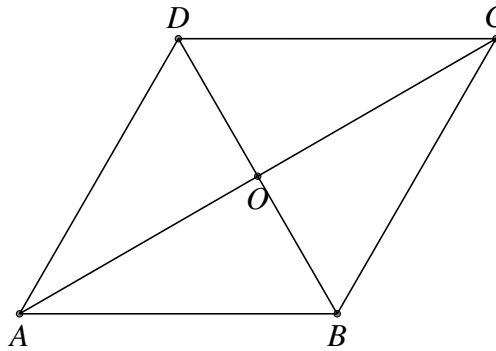
**Lời giải.**

- a) Các véc-tơ đối của véc-tơ  $\overrightarrow{BC}$  là  $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{PM}$ . ..... 0,5 điểm.
- b) Các véc-tơ bằng véc-tơ  $\overrightarrow{OB}$  là  $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{QM}, \overrightarrow{PN}$ . ..... 0,5 điểm.

**Câu 2.** (1 điểm) Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AB = 6$  cm,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ .

- a) Chứng minh rằng, với mọi điểm  $M$ , ta luôn có  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$ .
- b) Tính độ dài véc-tơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.** Hình vẽ



- a) Vì  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC}$  (đúng với mọi  $M$ ) nên ta có đẳng thức cần chứng minh. .... 0,5 điểm.
- b) Vì  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  nên  $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . ..... 0,25 điểm.  
Do đó  $|\vec{u}| = |\overrightarrow{AC}| = 2AO = 6\sqrt{3}$  cm. .... 0,25 điểm.

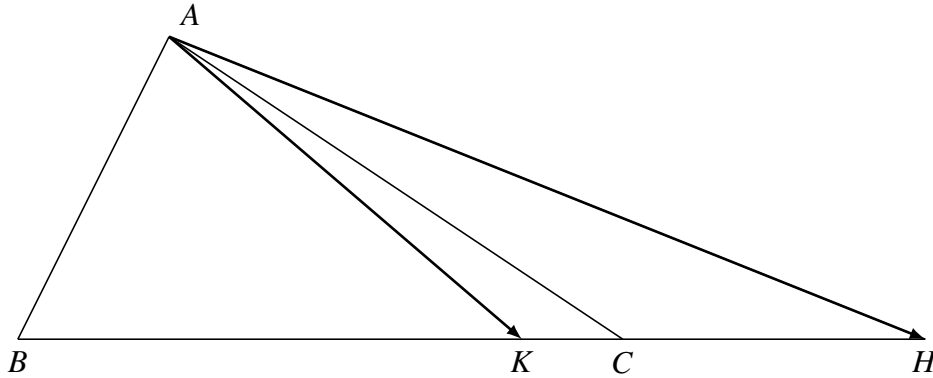
**Câu 3.** (2 điểm) Cho tam giác  $ABC$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện

$$|\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|.$$

**Lời giải.** Gọi  $I$  là trung điểm  $AB$ . Ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$  ..... 0,5 điểm.  
Suy ra  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MC}| = 2|CI|$ . ..... 0,5 điểm.  
Do đó  $|\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow BM = 2IC$ . ..... 0,5 điểm.  
Vậy, quỹ tích các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $B$ , bán kính  $r = 2IC$ . ..... 0,5 điểm.

**Câu 4.** (2 điểm) Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $K$  và  $H$  lần lượt là các điểm sao cho  $\overrightarrow{KB} + 5\overrightarrow{KC} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{HB} - 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ . Hãy phân tích các véc-tơ  $\overrightarrow{AK}$  và  $\overrightarrow{AH}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.** Hình vẽ.



Ta có  $\overrightarrow{KB} + 5\overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) + 5(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ . .... 1 điểm.

Ta có  $\overrightarrow{HB} - 3\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ . .... 1 điểm.

**Câu 5.** (4 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $N(2; -1), P(1; 1)$  và điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ .

a) Chứng minh rằng  $M, N, P$  không thẳng hàng. Xác định điểm  $Q$  sao cho  $MNPQ$  là hình bình hành.

b) Xác định điểm  $I$  trên trục  $Ox$  sao cho  $|\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP} + 4\overrightarrow{IM}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

a) Từ  $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$  suy ra  $M(-3; 4)$ . .... 0,25 điểm.

Ta có  $\overrightarrow{MN} = (5; -5), \overrightarrow{MP} = (4; -3)$  và  $\frac{5}{4} \neq \frac{-5}{-3}$  nên  $M, N, P$  không thẳng hàng. .... 0,5 điểm.

Giả sử  $Q(x; y)$ . Ta có  $\overrightarrow{MP} = (4; -3)$  và  $\overrightarrow{QN} = (x - 2; y + 1)$ . .... 0,5 điểm.

$MNPQ$  là hình bình hành khi  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x - 2 \\ -3 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$ . .... 0,5 điểm.

Vậy  $Q(6; -4)$ . .... 0,25 điểm.

b) Gọi  $K(a; b)$  là điểm sao cho  $\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KP} + 4\overrightarrow{KM} = \vec{0}$ . .... 0,5 điểm.

Ta có  $\overrightarrow{KN} = (2 - a; -1 - b), \overrightarrow{KP} = (1 - a; 1 - b), \overrightarrow{KM} = (-3 - a; 4 - b)$ . .... 0,5 điểm.

Do đó  $\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KP} + 4\overrightarrow{KM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}$ . Suy ra  $K\left(-\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right)$ . .... 0,5 điểm.

Vì  $I \in Ox$  nên  $|\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP} + 4\overrightarrow{IM}| = |6\overrightarrow{IK}| = 6.IK$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $K$  lên  $Ox$ . Suy ra  $I\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ . .... 0,5 điểm.

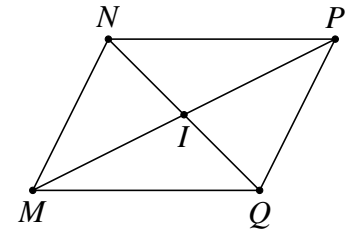
### III. Đề số 2a

**Câu 1.** (2 điểm) Cho hình bình hành  $MNPQ$  có  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Xét các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là một trong các điểm  $M, N, P, Q, I$ .

- Tìm véc-tơ bằng  $\overrightarrow{MI}$ .
- Tìm tất cả các véc-tơ đối của  $\overrightarrow{QI}$ .
- Chứng minh:  $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{QI} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

- Véc-tơ bằng  $\overrightarrow{MI}$  là  $\overrightarrow{IP}$  ..... 0,5
- Tất cả các véc-tơ đối của  $\overrightarrow{QI}$  là  $\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{NI}$  ..... 0,5
- Vì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IP}, \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{IQ}$  ..... 0,5  
 Do đó:  
 $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{QI} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{QI} = \vec{0}$  ..... 0,5

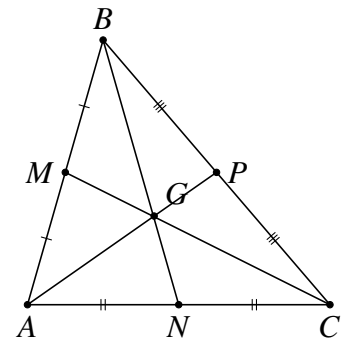


**Câu 2.** (2 điểm) Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

- Tìm  $x, y$  biết  $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{AG} = y\overrightarrow{AP}$ .
- Phân tích  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

- Do  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $BC = 2MN$ .  
 Suy ra:  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .  
 Vậy  $x = \frac{1}{2}$  ..... 0,5  
 Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $AG = \frac{2}{3}AP$ .  
 Suy ra:  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$ .  
 Vậy  $y = \frac{2}{3}$  ..... 0,5



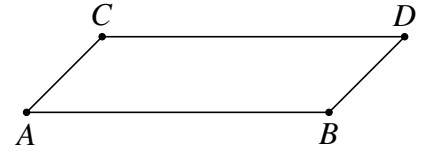
- Do  $P$  là trung điểm của  $BC$  nên  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  ..... 0,5  
 Mà  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$   
 Do đó:  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  ..... 0,5

**Câu 3.** (2 điểm) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 3 điểm  $A(1;2), B(5;2) C(2;3)$ .

- Chứng minh 3 điểm  $A, B, C$  tạo thành 3 đỉnh của một tam giác.
- Tìm điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

- a) Ta có  $\vec{AB} = (4; 0)$ ,  $\vec{AC} = (1; 1)$  ..... 0,5  
 Suy ra:  $\vec{AB} \neq k\vec{AC}, \forall k \in \mathbb{R}$ .  
 Do đó, hai véc-tơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  không cùng phương.  
 Suy ra, 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.  
 Vậy, 3 điểm  $A, B, C$  tạo thành 3 đỉnh của một tam giác ..... 0,5



- b) Gọi  $D(x; y)$ . Ta có  $\vec{CD} = (x - 2; y - 3)$ .  
 Tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$  ..... 0,5  
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$   
 Vậy  $D = (6; 3)$  ..... 0,5

**Câu 4.** (2 điểm) Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $2\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

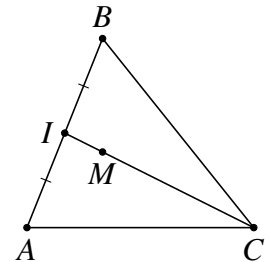
Ta có  $2\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2(\vec{MA} + \vec{MB}) + \vec{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\vec{MI} + \vec{MC} = \vec{0} \text{ ..... 1,0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MC} = -4\vec{MI}$$

Vậy, điểm  $M$  nằm giữa 2 điểm  $C$  và  $I$  sao cho  $MC = 4MI$  ..... 1,0



**Câu 5.** (2 điểm) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 2 điểm  $A(1; 2)$  và  $B(3; 1)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $Ox$  sao cho  $|\vec{MA}| + |\vec{MB}|$  nhỏ nhất.

**Lời giải.**

Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với điểm  $A$  qua trục  $Ox$ . Suy ra  $A'(1; -2)$  và  $AM = A'M$ .

Gọi  $M(x; 0)$ . Khi đó:  $\vec{A'M} = (x - 1; 2)$ ,  $\vec{A'B} = (2; 3)$  ..... 0,5

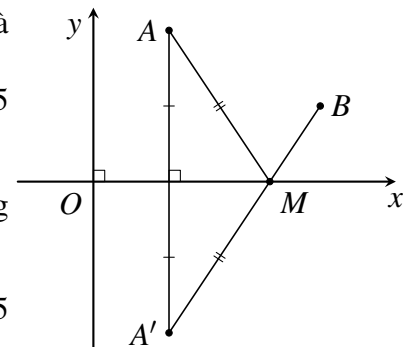
Ta có  $|\vec{MA}| + |\vec{MB}| = MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ .

Do đó,  $|\vec{MA}| + |\vec{MB}|$  nhỏ nhất khi và chỉ khi 3 điểm  $A', M, B$  thẳng hàng  
 0,5

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, \vec{A'M} = k\vec{A'B} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2k \\ 2 = 3k \end{cases} \text{ ..... 0,5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy  $M = (\frac{7}{3}; 0)$  ..... 0,5



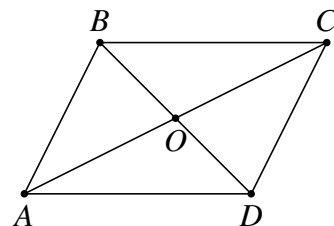
#### IV. Đề số 2b

**Câu 1.** (2 điểm) Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Xét các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là một trong các điểm  $A, B, C, D, O$ .

- Tìm véc-tơ bằng  $\overrightarrow{CO}$ .
- Tìm tất cả các véc-tơ đối của  $\overrightarrow{OA}$ .
- Chứng minh:  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

- Véc-tơ bằng  $\overrightarrow{CO}$  là  $\overrightarrow{OA}$  ..... 0,5
- Tất cả các véc-tơ đối của  $\overrightarrow{OA}$  là  $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$  ..... 0,5
- Vì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  ..... 0,5  
 Do đó:  
 $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}$  ..... 0,5

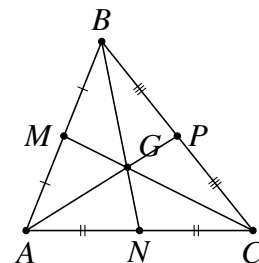


**Câu 2.** (2 điểm) Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

- Tìm  $x, y$  biết  $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{PM}$  và  $\overrightarrow{CG} = y\overrightarrow{MG}$ .
- Phân tích  $\overrightarrow{BG}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.**

- Do  $MP$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $AC = 2MP$ .  
 Suy ra:  $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{PM}$ .  
 Vậy  $x = -2$  ..... 0,5  
 Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $CG = 2MG$ .  
 Suy ra:  $\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{MG}$ .  
 Vậy  $y = -2$  ..... 0,5



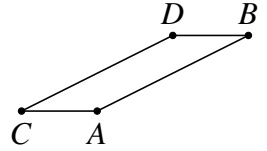
- Do  $N$  là trung điểm của  $AC$  nên  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .  
 $\Rightarrow \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  ..... 0,5  
 Mà  $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$   
 Do đó:  $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$  ..... 0,5

**Câu 3.** (2 điểm) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 3 điểm  $A(1;3), B(3;4) C(0;3)$ .

- Chứng minh 3 điểm  $A, B, C$  tạo thành 3 đỉnh của một tam giác.
- Tìm điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

- a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; 0)$  ..... 0,5  
 Suy ra:  $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}, \forall k \in \mathbb{R}$ .  
 Do đó, hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương.  
 Suy ra, 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.  
 Vậy, 3 điểm  $A, B, C$  tạo thành 3 đỉnh của một tam giác ..... 0,5



- b) Gọi  $D(x; y)$ . Ta có  $\overrightarrow{CD} = (x; y - 3)$ .  
 Tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  ..... 0,5  
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$   
 Vậy  $D = (2; 4)$  ..... 0,5

**Câu 4.** (2 điểm) Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

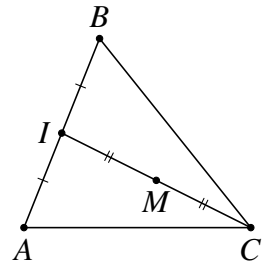
Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

Ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  ..... 1,0

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MI}$

Vậy, điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MI$  ..... 1,0



**Câu 5.** (2 điểm) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 2 điểm  $A(1; 2)$  và  $B(3; 1)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $Oy$  sao cho  $|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB}|$  nhỏ nhất.

**Lời giải.**

Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với điểm  $A$  qua trục  $Oy$ . Suy ra  $A'(-1; 2)$  và  $AM = A'M$ .

Gọi  $M(0; y)$ . Khi đó:  $\overrightarrow{A'M} = (1; y - 2)$ ,  $\overrightarrow{A'B} = (4; -1)$  ..... 0,5

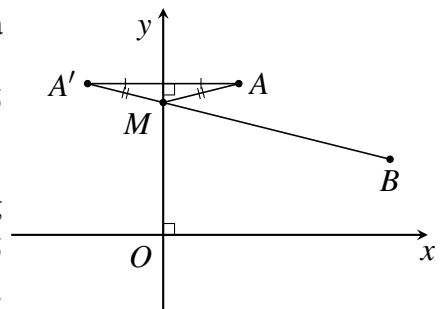
Ta có  $|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB}| = MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ .

Do đó,  $|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB}|$  nhỏ nhất khi và chỉ khi 3 điểm  $A', M, B$  thẳng hàng ..... 0,5

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 1 \\ y - 2 = -k \end{cases}$  ..... 0,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ y = \frac{7}{4} \end{cases}$

Vậy  $M = (0; \frac{7}{4})$  ..... 0,5



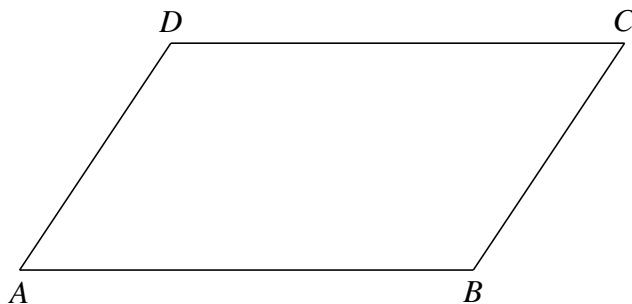
**V. Đề số 3a**

**Câu 1.** (2 điểm) Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chỉ xét các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình bình hành  $ABCD$ .

a) Hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương với véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ .

b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải.**

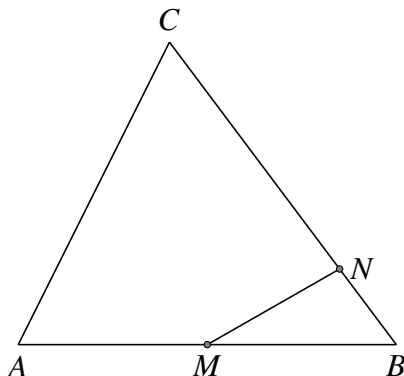


a)  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với  $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}$  ..... 1,0

b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$  ..... 1,0

**Câu 2.** (1 điểm) Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{NC} + 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$ . Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1,0$$

**Câu 3.** Cho ba véc-tơ  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (-3; 3)$ ,  $\vec{c} = (5; -2)$ .

a) Tìm tọa độ véc-tơ  $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ .

b) Phân tích véc-tơ  $\vec{a}$  theo hai véc-tơ  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có:  $2\vec{a} = (2; 4)$ ,  $3\vec{b} = (-9; 9)$ ,  $2\vec{c} = (10; -4)$ . Vậy  $\vec{x} = (21; -9)$  ..... 1,0

b) Giả sử  $\vec{d} = m\vec{b} + n\vec{c}$ .

Ta có hệ  $\begin{cases} -3m + 5n = 1 \\ 3m - 2n = 2 \end{cases}$ . Giải hệ ta được  $m = \frac{4}{3}, n = 1$ .

Vậy  $\vec{d} = \frac{4}{3}\vec{b} + \vec{c}$  ..... 1,0

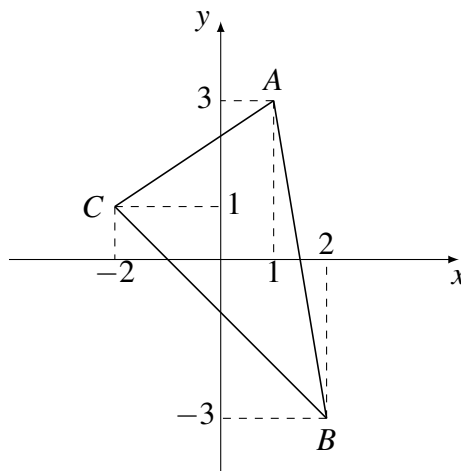
**Câu 4.** (3 điểm) Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1;3), B(2;-3), C(-2;1)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  tạo thành ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $C$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$

c) Tìm tọa độ điểm  $I$  trên trục  $Ox$  sao cho ba điểm  $A, I, B$  thẳng hàng.

**Lời giải.**



a) Ta có:  $\vec{AB} = (1; -6), \vec{AC} = (-3; -2)$ , do đó  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  không cùng phương. Vì vậy, ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng hay ba điểm đó tạo thành 3 đỉnh của một tam giác ..... 1,0

b) Gọi  $D(a, b)$  là điểm sao cho  $C$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ .

Ta có:  $\begin{cases} -2 = \frac{a+1+2}{3} \\ 1 = \frac{b+3-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 3 \end{cases}$ . Vậy  $D(-9; 3)$  ..... 1,0

c) Giả sử đường thẳng qua  $A$  và  $B$  có phương trình dạng  $y = ax + b$ .

Ta có hệ phương trình  $\begin{cases} 3 = a \cdot 1 + b \\ -3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases}$ . Do đó, phương trình đường thẳng đi qua  $A$  và  $B$  là  $y = -6x + 9$ .

Giao điểm của đường thẳng  $AB$  với trục  $Ox$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} y = 0 \\ y = -6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ . Vậy,  $I\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

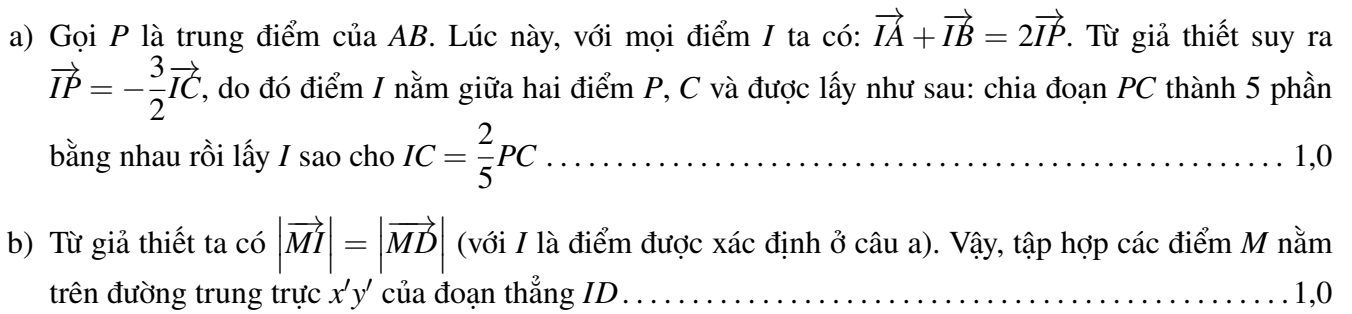
1,0

**Câu 5.** (2 điểm) Cho tứ giác  $ABCD$ .

a) Xác định điểm  $I$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$ ;

b) Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $|\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC}| = 5|\vec{MD}|$ .

**Lời giải.**

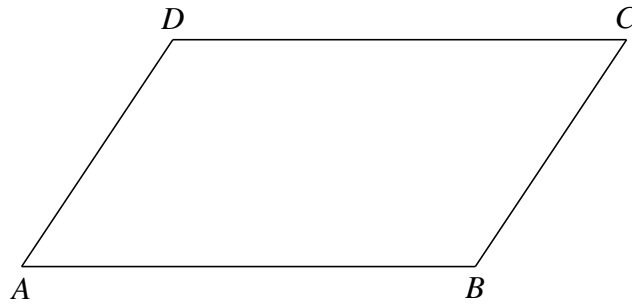


## VI. Đề số 3b

**Câu 1.** (2 điểm) Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chỉ xét các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình bình hành  $ABCD$ .

- a) Hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương với véc-tơ  $\overrightarrow{AD}$ .
- b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ .

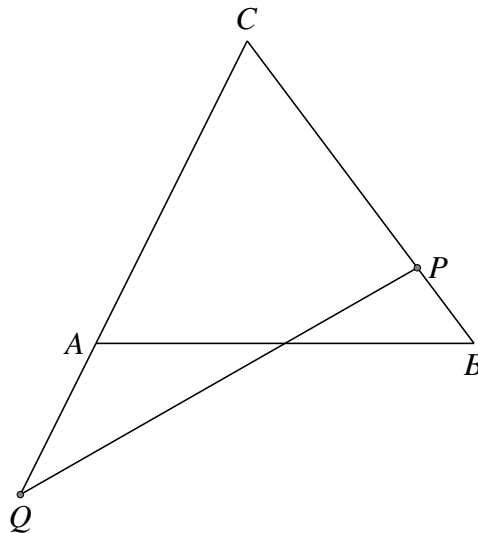
**Lời giải.**



- a)  $\overrightarrow{AD}$  cùng phương với  $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}$  ..... 1,0
- b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$  ..... 1,0

**Câu 2.** (1 điểm) Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $P, Q$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{QC} - 3\overrightarrow{QA} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{PC} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0}$ . Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{PQ}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1,0$$

**Câu 3.** (2 điểm) Cho ba véc-tơ  $\vec{a} = (-1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; -3)$ ,  $\vec{c} = (5; -2)$ .

- a) Tìm tọa độ véc-tơ  $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .
- b) Phân tích véc-tơ  $\vec{a}$  theo hai véc-tơ  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có:  $2\vec{a} = (-2; 4)$ ,  $3\vec{b} = (9; -9)$ ,  $2\vec{c} = (10; -4)$ . Vậy,  $\vec{x} = (-3; -1)$  ..... 1,0

b) Giả sử  $\vec{d} = m\vec{b} + n\vec{c}$ . Ta có hệ  $\begin{cases} 3m + 5n = -1 \\ -3m - 2n = 2 \end{cases}$ . Giải hệ ta được  $m = -\frac{8}{9}$ ,  $n = \frac{1}{3}$ .

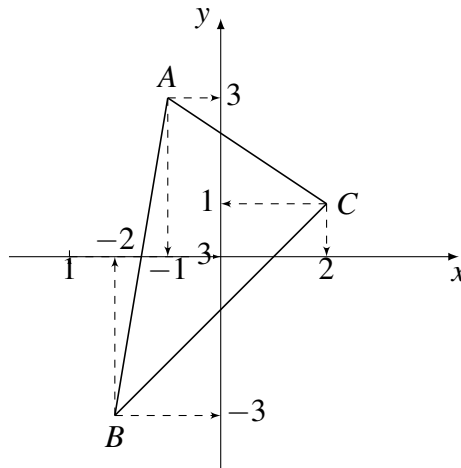
Vậy  $\vec{d} = -\frac{8}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$  ..... 1,0

**Câu 4.** (3 điểm) Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-1; 3)$ ,  $B(-2; -3)$ ,  $C(2; 1)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  tạo thành ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $C$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$

c) Tìm tọa độ điểm  $I$  trên trục  $Ox$  sao cho ba điểm  $A, I, B$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

a) Ta có:  $\vec{AB} = (-1; -6)$ ,  $\vec{AC} = (3; -2)$ , do đó  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  không cùng phương. Vì vậy, ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng hay ba điểm đó tạo thành 3 đỉnh của một tam giác ..... 1,0

b) Gọi  $D(a, b)$  là điểm sao cho  $C$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . Ta có:  $\begin{cases} 2 = \frac{a-1-2}{3} \\ 1 = \frac{b+3-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 3 \end{cases}$ . Vậy

$D(9; 3)$  ..... 1,0

c) Giả sử đường thẳng qua  $A$  và  $B$  có phương trình dạng  $y = ax + b$ .

Ta có hệ  $\begin{cases} 3 = -a \cdot 1 + b \\ -3 = -a \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 9 \end{cases}$ . Do đó, phương trình đường thẳng đi qua  $A$  và  $B$  là  $y = 6x + 9$ .

Giao điểm của đường thẳng  $AB$  với trục  $Ox$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} y = 0 \\ y = 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ .

Vậy,  $I\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$  ..... 1,0

**Câu 5.** (2 điểm) Cho tứ giác  $ABCD$ .

a) Xác định điểm  $I$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{IA} + \vec{IB} + 2\vec{IC} = \vec{0}$ ;

b) Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}| = 4|\vec{MD}|$ .

**Lời giải.**



## Chương 2

# TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

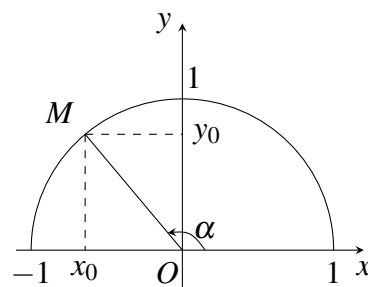
### §1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$

#### I. Tóm tắt lý thuyết

##### 1. Giá trị lượng giác của một góc bất kỳ từ $0^\circ$ đến $180^\circ$

###### Định nghĩa 1.

Với mỗi góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ), ta xác định một điểm  $M$  trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$  và giả sử điểm  $M$  có tọa độ  $M(x_0; y_0)$ . Khi đó ta định nghĩa:



- **sin** của góc  $\alpha$  là  $y_0$ , ký hiệu  $\sin \alpha = y_0$ ;
- **cô-sin** của góc  $\alpha$  là  $x_0$ , ký hiệu  $\cos \alpha = x_0$ ;
- **tang** của góc  $\alpha$  là  $\frac{y_0}{x_0}$  ( $x_0 \neq 0$ ), ký hiệu  $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$ ;
- **cô-tang** của góc  $\alpha$  là  $\frac{x_0}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ), ký hiệu  $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$ .

Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là các *giá trị lượng giác của góc  $\alpha$* .

###### **Chú ý.**

- Nếu  $\alpha$  là góc tù thì  $\cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$ .
- $\tan \alpha$  chỉ xác định khi  $\alpha \neq 90^\circ$ .
- $\cot \alpha$  chỉ xác định khi  $\alpha \neq 0^\circ$  và  $\alpha \neq 180^\circ$ .

##### Tính chất 1. Về dấu của các giá trị lượng giác.

- $\sin \alpha > 0$  với  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ .
- $\cos \alpha > 0$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  và  $\cos \alpha < 0$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .
- $\tan \alpha > 0$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  và  $\tan \alpha < 0$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .
- $\cot \alpha > 0$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  và  $\cot \alpha < 0$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

Như vậy,  $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  luôn cùng dấu với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  và  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

##### Tính chất 2. Mối quan hệ giữa hai góc bù nhau.

- $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ .
- $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ .
- $\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$  với  $\alpha \neq 90^\circ$ .
- $\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$  với  $\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$ .

**Tính chất 3.** Mỗi quan hệ giữa hai góc phụ nhau (với  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ).

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$  với  $\alpha \neq 0^\circ$ .
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$  với  $\alpha \neq 90^\circ$ .

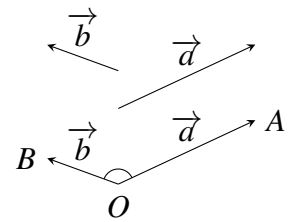
**Tính chất 4.** Các công thức cơ bản.

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ .
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ .

## 2. Góc giữa hai vec-tơ

**Định nghĩa 2.**

Cho hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vec-tơ  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kỳ, ta vẽ  $\vec{OA} = \vec{a}$  và  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là góc giữa hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta ký hiệu góc giữa hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, ký hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$  hoặc  $\vec{b} \perp \vec{a}$ .



**!** Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .

**Tính chất 5.** Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ .

**Tính chất 6.** Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng thì  $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ .

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác

Sử dụng các công thức cơ bản ở phần lý thuyết để tính ra các giá trị lượng giác.

**!** Cần chú ý dấu của các giá trị lượng giác khi tính.

**Ví dụ 1.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Tính  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  biết  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

**Lời giải.** Ta có  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ .

Với  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  thì  $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ .

Vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  nên  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

Từ đó suy ra  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ ,  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{15}$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc  $\alpha$ .

**Lời giải.** Ta có  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ .

$$\text{Với } \cos \alpha = -\frac{1}{3} \text{ thì } \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Vì } \sin \alpha \text{ luôn dương nên } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2\sqrt{2}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**Ví dụ 3.** Cho  $\tan x = 2$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$ .

**Lời giải.** Trước hết, ta có  $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Mặt khác, } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Vì } \tan x \text{ và } \cos x \text{ cùng dấu nên } \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Áp dụng công thức } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}. \text{ Từ đó suy ra } \sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

**Ví dụ 4.** Cho  $\cot x = -3$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$ .

**Lời giải.** Trước hết ta có  $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = -\frac{1}{3}$ .

$$\text{Mặt khác } 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{1 + (-3)^2} = \frac{1}{10}. \text{ Suy ra } \sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Do } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \sin x \cdot \cot x = \frac{-3\sqrt{10}}{10}.$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc  $\alpha$ .

**Lời giải.** Đáp số:  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $\cot \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**Bài 2.** Cho  $\sin x = \frac{3}{4}$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết  $90^\circ < x < 180^\circ$ .

**Lời giải.** Đáp số:  $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\tan x = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ,  $\cot x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

**Bài 3.** Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc  $\alpha$ .

**Lời giải.** Đáp số:  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Bài 4.** Cho  $\cot \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc  $\beta$ .

**Lời giải.** Đáp số:  $\tan \beta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sin \beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ,  $\cos \beta = -\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

**Bài 5.** Cho  $\tan(180^\circ - a) = -\frac{1}{2}$ . Tính các giá trị lượng giác của góc  $a$ .

**Lời giải.** Đáp số:  $\tan a = \frac{1}{2}$ ,  $\cot a = 2$ ,  $\cos a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\sin a = \frac{5}{5}$ .

**Bài 6.** Cho  $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . Tính các giá trị còn lại của góc  $\alpha$ .

**Lời giải.** Đáp số:  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

**Bài 7.** Cho  $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ .

**Lời giải.** Đáp số:  $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ ,  $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$ ,  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$ .

### Dạng 2. Tính giá trị các biểu thức lượng giác.

Từ giả thiết đề cho (thường là giá trị của góc hay một giá trị lượng giác) định hướng biến đổi biểu thức về dạng chỉ xuất hiện giá trị đã cho của giả thiết để tính.

 Cần chú ý điều kiện áp dụng (nếu có).

**Ví dụ 5.** Tính  $A = a \cos 60^\circ + 2a \tan 45^\circ - 3a \sin 30^\circ$ .

**Lời giải.** Ta có  $A = \frac{1}{2}a + 2a - \frac{1}{2} \cdot 3a = a$ .

**Ví dụ 6.** Cho  $x = 30^\circ$ . Tính  $A = \sin 2x - 3 \cos x$ .

**Lời giải.**  $A = \sin 2 \cdot (30^\circ) - 3 \cos 30^\circ = \sin 60^\circ - 3 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ .

**Ví dụ 7.** Cho  $\cos x = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 4 \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

**Lời giải.** Ta có  $P = 4(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = 4 - 3 \cos^2 x = 4 - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3}$ .

**Ví dụ 8.** Cho  $\tan x = 2$ . Tính  $A = \frac{3 \sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ .

**Lời giải.** Ta có  $A = \frac{3 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{3 \tan x + 1}{\tan x - 1} = 7$ .

**Ví dụ 9.** Cho  $\sin x = \frac{2}{3}$ . Tính  $B = \frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x}$ .

**Lời giải.** Ta có  $B = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}} = 2 \sin^2 x - 1 = -\frac{1}{9}$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 8.** Tính

a.  $A = 5 - \cos^2 0^\circ + 2 \sin^2 30^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$ .

b.  $B = 2 \cos 2x + 3 \sin 3x$  với  $x = 45^\circ$ .

**Bài 9.** Tính

a.  $A = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \dots \tan 80^\circ$ .

b.  $B = \cot 20^\circ + \cot 40^\circ + \dots + \cot 140^\circ + \cot 160^\circ$ .

**Lời giải.** Hướng dẫn:a. Ta có:  $\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$ ,  $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$ ,  $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$ ,  $\tan 40^\circ = \cot 50^\circ$ . Do đó, ta tính được  $A = 1$ .b. Ta có:  $\cot 20^\circ = -\cot 160^\circ$ ,  $\cot 40^\circ = -\cot 140^\circ$ , ... nên ta tính được  $B = 0$ .**Bài 10.** Cho  $\cot a = -3$ . Tính  $A = \frac{\sin a - 2 \cos a}{3 \cos a + 2 \sin a}$ .**Lời giải.** Đáp số:  $A = -1$ .**Bài 11.** Biết  $\tan a = 2$ . Tính  $B = \frac{\sin^3 a + 2 \cos^2 a \cdot \sin a}{\cot a \cdot \sin^3 a - 2 \cos a}$ .**Lời giải.** Đáp số:  $B = 6$ **Bài 12.** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ . Tính  $C = \frac{2 \tan \alpha + \cot \alpha}{4 \tan \alpha - 3 \cot \alpha}$ .**Lời giải.** Đáp số:  $C = 23$ **Bài 13.** Biết  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ . Tính  $D = \sin x \cdot \cos x$ .**Lời giải.** Hướng dẫn: Ta có  $\frac{1}{9} = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin x \cos x$ . Từ đó suy ra  $\sin x \cdot \cos x = -\frac{4}{9}$ .**Dạng 3. Chứng minh đẳng thức lượng giác**

Sử dụng linh hoạt các công thức cơ bản, các phép biến đổi đại số và sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để rút gọn và chứng minh.

**Ví dụ 10.** Cho  $\begin{cases} a = \sin x \\ b = \cos x \sin x \\ c = \cos x \cos y \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ **Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + c^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x (1 - \cos^2 y) + \cos^2 x \cos^2 y \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \cos^2 y \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 11.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ .

b)  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ .

c)  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$ .

d)  $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$ .

**Lời giải.**

- a) Ta có  $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$   
Do  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  nên ta suy ra  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ .
- b)  $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$   
Do  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  nên  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$   
Tương tự ta có  $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ .
- c)  $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \sin^2 x$
- d) Ta có  $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = \frac{1 + \tan x + 1 + \cot x}{(1 + \tan x)(1 + \cot x)}$ .  
Mặt khác  $(1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + \tan x \cot x + \tan x + \cot x = 2 + \tan x + \cot x$ .  
Từ đó suy ra  $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = \frac{2 + \tan x + \cot x}{2 + \tan x + \cot x} = 1$ .

**Ví dụ 12.** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

- a)  $\sin(A + B) = \sin C$ .
- b)  $\cos(A + B) + \cos C = 0$ .
- c)  $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$ .
- d)  $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$ .

**Lời giải.** Do  $A, B, C$  là các góc của tam giác nên ta có  $A + B + C = 180^\circ$ .

- a) Ta có  $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$ .  
Từ đó suy ra  $\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$ .
- b) Ta có  $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$ .  
Từ đó suy ra  $\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C) = -\cos C \Rightarrow \cos(A + B) + \cos C = 0$ .
- c) Ta có  $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$ .  
Từ đó suy ra  $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \left( 90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$ .
- d) Ta có  $\tan(A - B + C) = \tan(A + B + C - 2B) = \tan(180^\circ - 2B) = -\tan 2B$ .

**Ví dụ 13.** Chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào  $x$ .

- a)  $A = \sin^8 x + \sin^6 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$
- b)  $B = \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}$

**Lời giải.**

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \sin^8 x + \sin^6 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^6 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^4 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x = 1.
 \end{aligned}$$

b) Điều kiện  $\cos x \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{(1 - \sin^2 x)^3 + 3 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{(\cos^2 x)^3 + 3 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{\cos^6 x}{\cos^6 x} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 14.** Tìm  $m$  để biểu thức  $P = \sin^6 x + \cos^6 x - m(\sin^4 x + \cos^4 x)$  có giá trị không phụ thuộc vào  $x$ .

**Lời giải.** Ta có:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x - m(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - m + (2m - 3) \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\text{Do đó } P \text{ có giá trị không phụ thuộc vào } x \text{ khi và chỉ khi } 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

**Ví dụ 15.** Cho  $a, b$  là các số dương và thỏa mãn hệ thức  $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ . Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^{2018} x}{a^{1008}} + \frac{\cos^{2012} x}{b^{1008}} = \frac{1}{(a+b)^{1008}}.$$

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} &= \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow (a+b) \left( \frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow (a+b) \left( \frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} \right) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cos^4 x + \frac{b}{a} \sin^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( \sqrt{\frac{b}{a}} \cos^2 x - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin^2 x \right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} \cos^2 x = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin^2 x \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra  $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = \frac{1}{a+b} > 0$ .

Đặt  $t = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = at \\ \cos^2 x = bt \end{cases}$ , do đó ta có  $\begin{cases} \sin^{2018} x = a^{1009} t^{1009} \\ \cos^{2018} x = b^{1009} t^{1009} \end{cases}$ .

Vậy  $\frac{\sin^{2018} x}{a^{1008}} + \frac{\cos^{2018} x}{b^{1008}} = \frac{a^{1009} t^{1009}}{a^{1008}} + \frac{b^{1009} t^{1009}}{b^{1008}} = (a+b)t^{1009} = \frac{1}{(a+b)^{1008}}$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 14.** Cho  $A = \sin \alpha, B = \cos \alpha \sin \beta, C = \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma, D = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ . Chứng minh rằng  $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$ .

**Bài 15.** Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

a)  $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$ .

b)  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{1}{\cos x}$ .

c)  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$ .

**Bài 16.** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$

a)  $A = \sin^4 x (3 - \sin^2 x) + \cos^4 x (3 - 2 \cos^2 x)$ .

b)  $B = 3 (\sin^8 x - \cos^8 x) + 4 (\cos^6 x - \sin^6 x) + 6 \sin^4 x$ .

c)  $C = \sin^8 x + \cos^8 x + 6 \sin^4 x \cos^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x)$ .

**Bài 17.** Tìm  $m$  để biểu thức  $P = \sin^6 x + \cos^6 x + m (\sin^6 x + \cos^6 x) + 2 \sin^2 2x$  không phụ thuộc vào  $x$

**Lời giải.** Sử dụng các hằng đẳng thức rút gọn biểu thức  $P$  ta được  $P = 1 + m + \frac{5-m}{4} \sin^2 2x$

Từ đó suy ra  $P$  không phụ thuộc vào  $x$  khi và chỉ khi  $m = 5$ .

**Bài 18.** Cho  $f(x) = \sin^6 x + \frac{3}{4} \sin^2 2x + \cos^6 x$ . Tính  $f\left(\frac{\pi}{2017}\right)$ .

**Lời giải.** Rút gọn  $f(x)$  ta có  $f(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ , từ đó suy ra  $f\left(\frac{\pi}{2017}\right) = 1$ .

**BÀI TẬP TỔNG HỢP**

**Bài 19.** Cho  $\cos a + 2\sin a = 0$ . Tính các giá trị lượng giác của góc  $a$ .

**Lời giải.** Hướng dẫn:  $\cos \alpha + 2\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2}$ . Từ đó ta được

$$\text{Đáp số: } \tan a = -\frac{1}{2}, \cot a = -2, \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin a = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Bài 20.** Cho  $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{7}{8}$ . Tính các giá trị lượng giác của góc  $x$  biết  $x$  là góc tù.

**Lời giải.** Hướng dẫn:  $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{7}{8}$  (1). Ta lại có  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (2). Giải hệ phương trình gồm (1) và (2) ta tìm được các giá trị  $\sin x$  và  $\cos x$ .

$$\text{Đáp số: } \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \sin x = \frac{1}{4}, \tan x = -\frac{\sqrt{15}}{15}, \cot x = -\sqrt{15}.$$

**Bài 21.** Tính  $C = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ$ .

**Lời giải.** Hướng dẫn:  $\sin 10^\circ = \sin 170^\circ, \sin 20^\circ = \sin 160^\circ, \dots$ , suy ra  $C = 2(\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ) + \sin^2 90^\circ$ . Mặt khác ta có  $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ, \sin 70^\circ = \cos 20^\circ, \dots$ , có 4 cặp như vậy nên ta tính được  $C = 5$ .

**Bài 22.** Cho  $\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$ . Tính  $\sin^4 x + \cos^4 x$ .

**Lời giải.** Trước hết ta có  $\frac{9}{16} = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$ , suy ra  $\sin x \cos x = \frac{-7}{32}$ .

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{-7}{32}\right)^2 = \frac{463}{512} \end{aligned}$$

**Bài 23.** Cho  $\sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{7}{4}$ . Tính  $\cos^4 x + 3\sin^4 x$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} \sin^4 x + 3\cos^4 x &= \frac{7}{4} \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)^2 + 3\cos^4 x = \frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow 4\cos^4 x - 2\cos^2 x - \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

từ đó ta được

$$\begin{aligned} \cos^4 x + 3\sin^4 x &= \cos^4 x + 3(1 - \cos^2 x)^2 \\ &= \frac{9}{16} + 3\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**Bài 24.** Cho  $2\sin x \sin y - 3\cos x \cos y = 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} + \frac{1}{2\sin^2 y + 3\cos^2 y} = \frac{5}{6}.$$

**Lời giải.** Từ giả thiết suy ra  $2\tan x = 3\cot y \Leftrightarrow \tan y = \frac{3}{2\tan x}$ .

Biến đổi về trái đẳng thức cần chứng minh theo  $\tan x, \tan y$  ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 25.** Cho  $6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0$ . Biết  $A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = a + b \tan \alpha$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính giá trị của biểu thức  $a + b$ .

**Lời giải.** Điều kiện  $2\cos \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos \alpha \neq \frac{1}{2}$ .

$$\text{Ta có } 6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Do  $\cos \alpha \neq \frac{1}{2}$  nên  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .

$$\text{Mặt khác } A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2}{3} \tan \alpha$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{2}{3}.$$

## §2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

### §3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ

#### I. Tóm tắt lý thuyết

##### 1. Định nghĩa

**Định nghĩa 1.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ . Tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Trường hợp ít nhất một trong hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng véc-tơ  $\vec{0}$  ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .



a) Với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác véc-tơ  $\vec{0}$  ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .

b) Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và số này được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ  $\vec{a}$ .

$$\text{Ta có: } \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

##### 2. Các tính chất của tích vô hướng

**Tính chất 1.** Với ba véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$  ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (tính chất phân phối);
- $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$ ;
- $\vec{a}^2 \geq 0$ ,  $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ .

**Nhận xét:** Từ các tính chất của tích vô hướng hai véc-tơ ta suy ra

- $(\vec{a} + \vec{a})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ .

##### 3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng tọa độ  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ .

**Nhận xét:**

Hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  đều khác véc-tơ  $\vec{0}$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ .

#### 4. Ứng dụng

a) Độ dài véc-tơ:

Độ dài của véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  được xác định bởi công thức:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

b) Góc giữa hai véc-tơ:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

c) Khoảng cách giữa hai điểm:

Khoảng cách giữa hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

## II. Các dạng toán

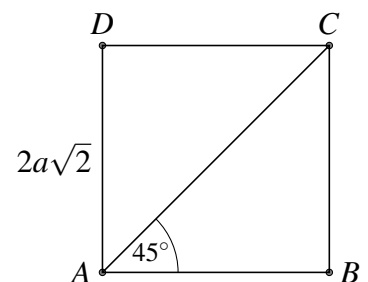
### Dạng 1. Các bài toán tính tích vô hướng của hai véc-tơ

- Áp dụng công thức của định nghĩa:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .
- Sử dụng tính chất phân phối:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .
- Hai véc-tơ  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

**Ví dụ 1.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $2a\sqrt{2}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$ . Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2a\sqrt{2})^2 + (2a\sqrt{2})^2 = 16a^2$   
 $\Rightarrow AC = 4a$ . Suy ra  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2a\sqrt{2} \cdot 4a \cdot \cos 45^\circ = 8a^2$ .



**Ví dụ 2.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $AD = 2a$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ .

- Phân tích  $\vec{BK}$ ,  $\vec{AC}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AD}$ .
- Tính tích vô hướng  $\vec{BK} \cdot \vec{AC}$ .

**Lời giải.**

a) Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

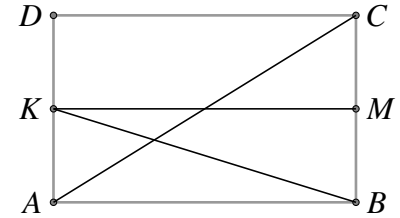
b) Ta có:  $AB = a\sqrt{2}, AC = BD = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= -2a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(2a)^2 = 0.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$



**Ví dụ 3.** Cho hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$ . Tính cosin của góc giữa hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$ .

**Lời giải.**

Dựng tam giác  $ABC$  có  $AB = 5, BC = 12, AC = 13$ .

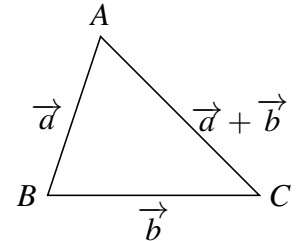
Ta có:  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12, |\vec{a} + \vec{b}| = 13$

và  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Khi đó:  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(13^2 + 5^2 - 12^2) = 25.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{25}{5 \cdot 13} = \frac{5}{13}.$$



**Ví dụ 4.** Cho hình vuông  $ABCD$  có  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  và  $N$  là điểm thuộc đoạn  $AC$  sao cho  $AN = 3NC$ .

a) Phân tích  $\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{MN}$  theo 2 vec-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .

b) Chứng minh rằng  $DN \perp MN$ .

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

Mặt khác

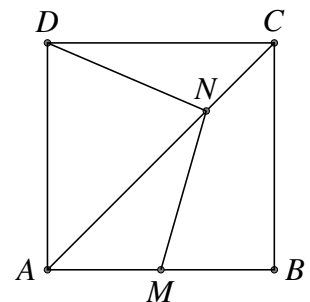
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

b) Để chứng minh  $DN \perp MN$  thì ta chứng minh  $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{3}{16}AB^2 - \frac{3}{16}AD^2 = 0 \text{ (vì } AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{DN} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow DN \perp MN.$$



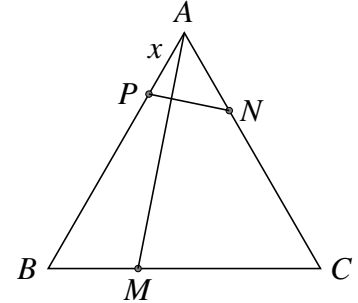
**Ví dụ 5.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $3a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = a, CN = 2a, AP = x (x > 0)$ .

- a) Phân tích  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NP}$  theo 2 vec-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .  
 b) Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$ .

**Lời giải.**

a) Ta có:  $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})$   
 $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

Mặt khác:  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .



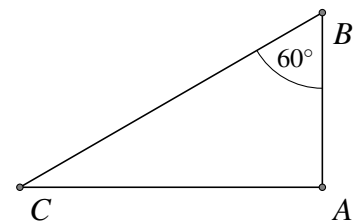
b) Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{9a^2}{2}$ .  
 Để  $AM \perp NP$  thì  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$   
 $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{2x}{9a}AB^2 - \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{x}{9a}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{9}AC^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{2x}{9a} \cdot (3a)^2 - \frac{2}{9} \cdot \frac{9a^2}{2} + \frac{x}{9a} \cdot \frac{9a^2}{2} - \frac{1}{9} \cdot (3a)^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{4a}{5}$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{B} = 60^\circ, AB = a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB}$   
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = -3a^2$ .

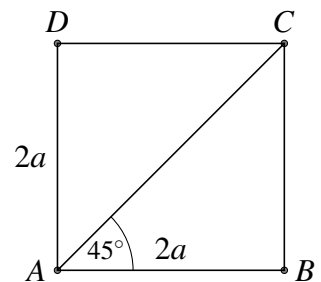


**Bài 2.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

Vì  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $2a$  nên  $AC = 2a\sqrt{2}$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = 2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4a^2$ .



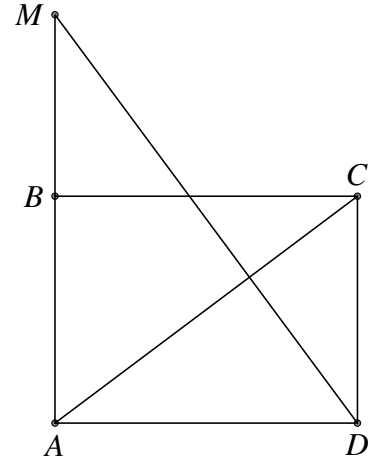
**Bài 3.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 3, AD = 4$ . Gọi  $M$  là điểm thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ . Tìm  $k$  để  $AC$  vuông góc với  $DM$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{DM} &= (\vec{BC} - \vec{BA}) \cdot (\vec{AM} - \vec{AD}) \\ &= \vec{AM} \cdot (\vec{BC} - \vec{BA}) - \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{BA} \cdot \vec{AD} \\ &= \vec{AM} \cdot \vec{AC} - \vec{BC} \cdot \vec{AD} = -16 + 9k.\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } AC \perp DM \Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{DM} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{16}{9}.$$

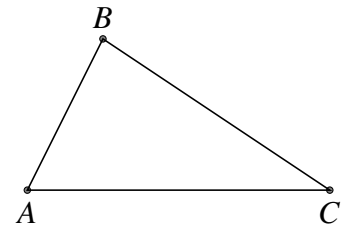


**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5, AC = 8, BC = 7$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}.$$

$$\text{Suy ra } \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{\vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - \vec{BC}^2}{2} = 20.$$



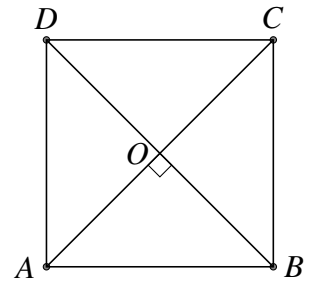
**Bài 5.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2.$$

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 3MD^2 \\ \Leftrightarrow \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 &= 3\vec{MD}^2 \\ \Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 + (\vec{MO} + \vec{OC})^2 &= 3(\vec{MO} + \vec{OD})^2 \\ \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OD}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot (\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot \vec{DB} &= 0 \text{ (vì } \vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}). \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MO} = \vec{0} \\ MO \perp DB \end{cases} &\text{ . Vậy tập hợp các điểm } M \text{ là đường thẳng } AC.\end{aligned}$$



**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(C)$  tâm  $O$ . Tìm vị trí điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  để  $P = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$  đạt GTLN, GTNN.

**Lời giải.**

Gọi  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ACBD$ ,  $R$  là bán kính của đường tròn  $(C)$ .

Khi đó:  $\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{CD}$ ;  $OA = OB = OC = R$ .

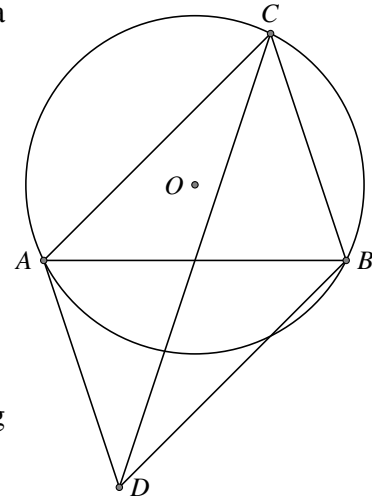
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= MA^2 + MB^2 - 2MC^2 \\ &= (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 - 2(\vec{MO} + \vec{OC})^2 \\ &= 2\vec{MO}(\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}) + OA^2 + OB^2 - 2OC^2 \\ &= 2\vec{MO}(\vec{CA} + \vec{CB}) = 2\vec{MO} \cdot \vec{CD} = 2R \cdot CD \cdot \cos(\vec{MO}, \vec{CD}) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$-1 \leq \cos(\vec{MO}, \vec{CD}) \leq 1 \Leftrightarrow -2R \cdot CD \leq P \leq 2R \cdot CD.$$

Vậy  $\min P = -2R \cdot CD$  khi  $\cos(\vec{MO}, \vec{CD}) = -1$  tức là  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  sao cho  $\vec{MO}, \vec{CD}$  ngược hướng.

$\max P = 2R \cdot CD$  khi  $\cos(\vec{MO}, \vec{CD}) = 1$  tức là  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  sao cho  $\vec{MO}, \vec{CD}$  cùng hướng.



### Dạng 2. Tính góc giữa hai véc-tơ -góc giữa hai đường thẳng-điều kiện vuông góc

Để tính góc giữa hai vectơ, ta sử dụng định nghĩa tích vô hướng kết hợp các kĩ thuật tính tích vô hướng.

Để tính góc giữa hai đường thẳng, ta tính góc giữa hai véc-tơ có giá là hai đường thẳng đã cho rồi suy ra góc giữa hai đường thẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ta chứng minh góc giữa hai đường thẳng bằng  $90^\circ$ .

**Ví dụ 6.** Cho các véc-tơ  $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ . Tìm góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**Lời giải.** Ta có  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Do đó góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$  mà  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

**Ví dụ 7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, BC = 4, CA = 3$ . Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  và  $\cos A$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - (\vec{AB} - \vec{AC})^2}{2} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = -\frac{3}{2}.$

Lại có  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A$  nên  $\cos A = -\frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}.$

**Ví dụ 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(1;3)$  và  $B(3;-1)$ . Tính góc giữa đường thẳng  $OA$  và  $AB$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AO} = (-1; -3)$  và  $\vec{AB} = (2; -4).$

Ta có  $\cos(\vec{AO}, \vec{AB}) = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AB}}{AO \cdot AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Góc giữa véc-tơ  $\vec{AO}$  và  $\vec{AB}$  bằng góc  $\widehat{BAO} = 45^\circ$ . Do đó góc giữa đường thẳng  $OA$  và đường thẳng  $AB$  bằng  $45^\circ$ .

**Ví dụ 9.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau,  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$ . Chứng minh rằng hai véc-tơ  $2\vec{a} - \vec{b}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với nhau.

**Lời giải.** Ta có  $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Do đó hai véc-tơ  $2\vec{a} - \vec{b}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với nhau.

**Ví dụ 10.** Cho hình vuông  $ABCD$  có  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $DM \perp AN$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned}\vec{AN} \cdot \vec{DM} &= \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}\right) \cdot \left(\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB}^2 + \frac{1}{2}\vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{AB} \cdot \vec{DA} + \frac{1}{4}\vec{BC} \cdot \vec{AB} \\ &= 0\end{aligned}$$

Từ đó suy ra  $DM \perp AN$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 7.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và véc-tơ  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$  vuông góc với véc-tơ  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ . Tính góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}.$$

Từ đó suy ra góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $60^\circ$ .

**Bài 8.** Cho các véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Tính góc giữa véc-tơ  $\vec{a}$  và véc-tơ  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$  nên  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .

$$\text{Lại có } \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3.$$

$$\text{Do đó } |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{c}) = 3 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Từ đó tính được góc giữa véc-tơ } \vec{a} \text{ và } \vec{c} \text{ là } 30^\circ.$$

**Bài 9.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BD$ .

**Lời giải.** Từ giả thiết suy ra:

$$\begin{aligned}AB^2 + CD^2 &= BC^2 + AD^2 \\ \Leftrightarrow \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 &= \vec{BC}^2 + \vec{AD}^2 \\ \Leftrightarrow \vec{AB}^2 - \vec{AD}^2 + \vec{CD}^2 - \vec{BC}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{AB} - \vec{AD})(\vec{AB} + \vec{AD}) + (\vec{CD} - \vec{BC})(\vec{CD} + \vec{BC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{DB}(\vec{AB} + \vec{AD}) + (\vec{CD} - \vec{BC})\vec{BD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{DB}(\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{CD} + \vec{BC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{DB}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{DC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{DB} \cdot 2\vec{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow DB \perp AC.\end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BD$  bằng  $90^\circ$ .

**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a; AC = 2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và điểm  $D$  bất kì thuộc cạnh  $AC$ . Tính  $AD$  theo  $a$  để  $BD \perp AM$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$AM \perp BD$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) \vec{BD} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AB} + \vec{AC}) (\vec{AD} - \vec{AB}) = 0$$

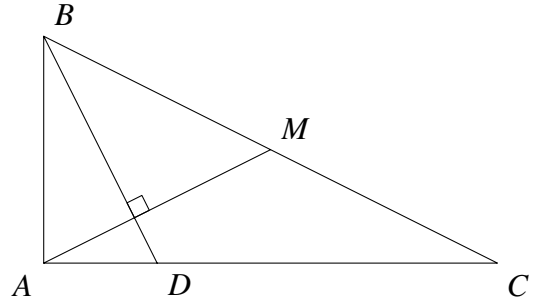
$$\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB}^2 + \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - a^2 + \vec{AC} \cdot \vec{AD} - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{AD} = a^2$$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{a}{2}.$$



**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $H$  là trung điểm  $BC$ ,  $K$  là hình chiếu của  $H$  trên  $AC$  và  $M$  là trung điểm của  $HK$ . Chứng minh rằng  $AM \perp BK$ .

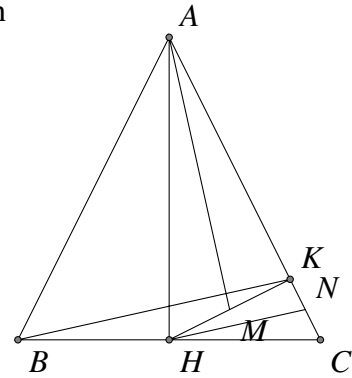
**Lời giải.**

Gọi  $N$  là trung điểm của  $KC$ . Khi đó  $HN \parallel BK$  nên cần chứng minh  $AM \perp HN$ .

Ta có  $2\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{AK}$ ;  $2\vec{HN} = \vec{HK} + \vec{HC}$ . Do đó

$$\begin{aligned} 4\vec{AM} \cdot \vec{HN} &= (\vec{AH} + \vec{AK}) \cdot (\vec{HK} + \vec{HC}) \\ &= \vec{AH} \cdot \vec{HK} + \vec{AH} \cdot \vec{HC} + \vec{AK} \cdot \vec{HK} + \vec{AK} \cdot \vec{HC} \\ &= \vec{AH} \cdot \vec{HK} + \vec{AK} \cdot \vec{HC} \\ &= AH \cdot HK \cdot \cos(\vec{AH}, \vec{HK}) + AK \cdot HC \cdot \cos(\vec{AK}, \vec{HC}) \\ &= -AH \cdot HK \cdot \cos \widehat{AHK} + AK \cdot HC \cdot \cos \widehat{ACH}. \quad (*) \end{aligned}$$

Để thấy tam giác  $AHK$  và  $HCK$  đồng dạng nên  $AH \cdot HK = AK \cdot HC$  và  $\widehat{AHK} = \widehat{ACH}$  nên từ (\*) có  $\vec{AM} \cdot \vec{HN} = 0$  hay  $AM \perp HK$ .



### Dạng 3. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc về độ dài.

Liên quan đến đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài ta có hai bài toán tiêu biểu:

- Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài. Đối với dạng này ta thường sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các tính chất của véc tơ để biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức luôn đúng hoặc biến đổi về này thành về kia hoặc biến đổi cả 2 về cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Bài toán 2: Tìm điểm hoặc tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn một đẳng thức véc tơ hoặc độ dài. Thông thường ta biến đổi đẳng thức ban đầu về dạng  $IM = R$  trong đó  $I$  cố định,  $R$  không đổi hoặc  $\vec{IM} \cdot \vec{u} = 0$  trong đó  $I$  cố định và  $\vec{u}$  là một véc tơ xác định.

**Ví dụ 11.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  bất kì. Chứng minh rằng:

$$\vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} + \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0.$$

**Lời giải.** Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0. \end{aligned}$$

**Ví dụ 12.** Cho tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $S$ . Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 \cdot \sin^2 A = \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 A) \\ &= \frac{1}{4} [AB^2 \cdot AC^2 - (AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))^2] \\ &= \frac{1}{4} [AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2] \end{aligned}$$

Vậy ta được  $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ .

**Ví dụ 13.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$  và trung điểm cạnh  $BC$  là  $M$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$ .

**Lời giải.** Ta có  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$  và  $\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$  nên

$$\begin{aligned} 4 \cdot \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} &= 4 \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = CB^2. \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$ .

**Ví dụ 14.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$ . Tìm tập hợp tất cả các điểm  $M$  sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}$$

**Lời giải.**  $\oplus$  **Phân thuận.** Giả sử ta có điểm  $M$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi  $O$  là tâm của tam giác  $ABC$ , ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$ , suy ra

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9OM^2 \\ \Leftrightarrow & MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9MO^2 \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{MO} \\ &= 3MO^2 + a^2 \end{aligned}$$

Như vậy, ta được

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 3MO^2 - \frac{a^2}{2}$$

Do đó

$$3OM^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow OM = \frac{a}{2}$$

⊕ **Phần đảo.** Giả sử ta có điểm  $M$  thuộc đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R = \frac{a}{2}$ . Bằng cách biến đổi tương tự phần thuận ta được  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}$ .  
Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R = \frac{a}{2}$ .

**Ví dụ 15.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$ .

**Lời giải.** ⊕ **Phần thuận:** Gọi  $I$  là trung điểm  $AB$ . Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 &= (\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2) + (\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2) \\ &= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CI} \\ &= 2\overrightarrow{BA} (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{CI}). \end{aligned}$$

Dựng véc tơ  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CI}$ , kết hợp với giả thiết ta được

$$0 = \overrightarrow{BA} (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MJ}$$

Do đó  $M$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $J$  và vuông góc với  $AB$ .

⊕ **Phần đảo:** Giả sử  $M \in \Delta$ , biến đổi ngược lại so với phần thuận ta được  $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$ .  
Vậy tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng đi qua  $J$  và vuông góc với  $AB$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 12.** Cho hai điểm  $A, B$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Gọi  $M$  là một điểm tùy ý Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 \\ &= OM^2 - OA^2. \end{aligned}$$

**Bài 13.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})^2 \\ &= AD^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AD} + DB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}) \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

Do đó  $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ .

**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh rằng  $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 &= (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MA})^2 \\ &= MH^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= MH^2 + MA^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}BC^2 \text{ (Xem Ví dụ 13)} \end{aligned}$$

Do đó  $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$

**Bài 15.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp tất cả các điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

**Lời giải.** Từ giả thiết ta có  $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  Do đó  $M$  thuộc đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

**Bài 16.** Cho hai điểm  $A, B$  có  $AB = a$  và một số thực  $k > 0$ . Tùy theo  $k$ , tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $MA^2 + MB^2 = k$ .

**Lời giải.** Gọi  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= 2MO^2 + 2OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= 2MO^2 + 2OA^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Suy ra  $OM^2 = \frac{1}{2} \left( k - \frac{a^2}{2} \right)$ .

- Nếu  $k > \frac{a^2}{2}$  thì  $OM = \sqrt{\frac{1}{2} \left( k - \frac{a^2}{2} \right)}$  nên tập hợp  $M$  là đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R = \sqrt{\frac{1}{2} \left( k - \frac{a^2}{2} \right)}$ .
- Nếu  $k = \frac{a^2}{2}$  thì  $OM = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$  nên tập hợp điểm  $M$  là  $\{O\}$ .
- Nếu  $k < \frac{a^2}{2}$  thì không tồn tại  $M$  nên tập hợp điểm  $M$  là tập  $\emptyset$ .

**Bài 17.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp tất cả các điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = BC^2 - MB^2 + MC^2$ .

**Lời giải.** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) - MB^2 - MC^2 \\ &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Gọi  $M_0, G_0$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  và  $G$  trên  $BC$  thì đẳng thức trên tương đương với

$$3M_0G_0 \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M_0G_0 = \frac{BC}{3}$$

do đó  $M_0$  cố định. Vậy  $M$  thuộc đường thẳng đi qua  $M_0$  và vuông góc với  $BC$ .

**Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm là  $G$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$  ta có  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ . Từ đó tìm vị trí của  $M$  để tổng  $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$  có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra  $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $MG = 0 \Leftrightarrow M \equiv G$ .

**Bài 19 (Định lý Stewart).** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$ . Chứng minh rằng  $c^2 \cdot CM^2 = a^2 \cdot AM^2 + b^2 \cdot BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2)AM \cdot BM$ . Từ đó tính độ dài đường phân giác góc  $C$  theo độ dài ba cạnh của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Do  $M$  thuộc cạnh  $AB$  nên

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{AM}{BM} \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{AM}{AB} \overrightarrow{CB} + \frac{BM}{AB} \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow c \cdot \overrightarrow{CM} = AM \cdot \overrightarrow{CB} + BM \cdot \overrightarrow{CA}$$

Do đó

$$\begin{aligned} c^2 \cdot CM^2 &= AM^2 \cdot CB^2 + BM^2 \cdot CA^2 + 2AM \cdot BM \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= a^2 \cdot AM^2 + b^2 \cdot BM^2 + 2AM \cdot BM \cdot CA \cdot CB \cdot \cos C \\ &= a^2 \cdot AM^2 + b^2 \cdot BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2)AM \cdot BM. \end{aligned}$$

Nếu  $D$  là chân đường phân giác của góc  $C$  thì dựa vào tính chất đường phân giác ta tính được

$$CD = \sqrt{\frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$$

trong đó  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

#### Dạng 4. Ứng dụng của biểu thức tọa độ tích vô hướng vào tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải, kinh nghiệm: Phương pháp chung của dạng bài này là tọa độ hoá các điểm và thay vào các điều kiện để tìm điểm. Đa số các bài chỉ cần thay tọa độ và áp dụng các công thức là tính được, tuy nhiên một số bài có các tính chất đặc biệt mà nhờ nó, ta sẽ giảm đáng kể lượng công việc.

**Ví dụ 16.** Cho ba điểm  $A(2;3), B(1;4), C(5;2)$ . Chứng minh ba điểm trên tạo thành một tam giác.

**Lời giải.** Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-1; 1), \overrightarrow{AC} = (3; -1) \Rightarrow \frac{-1}{3} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow A, B, C$  không thẳng hàng, tạo thành một tam giác.

**Ví dụ 17.** Cho  $A(3;1), B(7;2)$ , tìm  $C(x;y)$  thuộc trục  $Ox$  sao cho  $C$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ .

**Lời giải.** Ta có:  $C \in Ox \Rightarrow C(x;0)$ .

$$C \in (O; \frac{AB}{2}) \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0$$

$$\vec{CA} = (3-x;1), \vec{CB} = (7-x,2) \Rightarrow (3-x)(-x+7)+2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + \sqrt{2} \Rightarrow C(5 + \sqrt{2}; 0) \\ x = 5 - \sqrt{2} \Rightarrow C(5 - \sqrt{2}; 0) \end{cases}$$

**Ví dụ 18.** Cho điểm  $A(0,2)$  và điểm  $B(x;y) \in (d) : y = 2x - 2$  có hoành độ  $x = 1$ . Tìm trên  $(d)$  điểm  $C$  sao cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ .

**Lời giải.** Vì  $C \in (d) \Rightarrow C(x, 2x-2); B(1,y) \in (d) \Rightarrow B(1;0)$

Ta có ngay  $\vec{AB} = (1; -2), \vec{AC} = (x; 2x-4)$ .

$$\text{Tam giác } ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{AC}| \Rightarrow 5 = x^2 + (2x-4)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow B(1;0) \\ x = \frac{11}{5} \Rightarrow C(\frac{11}{5}; \frac{12}{5}) \end{cases}$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 20.** Cho ba điểm  $A(6;3), B(4;1); C(9;0)$ . Chứng minh ba điểm trên không thẳng hàng. Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AB} = (-2; -2), \vec{AC} = (3; -3) \Rightarrow \frac{-2}{3} \neq \frac{-3}{-2} \Rightarrow A, B, C$  tạo thành một tam giác. Lại có  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6 + 6 = 0 \Rightarrow$  tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{8} \sqrt{18} = 24$

**Bài 21.** Cho  $A(11;4), B(8;2), C(13;y)$ . Tìm  $y$  để tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AB} = (-3; -2), \vec{AC} = (2; y-4)$ .

$A, B, C$  không thẳng hàng  $\Rightarrow \frac{-3}{-2} \neq \frac{2}{y-4} \Rightarrow y \neq \frac{16}{3}$ .

$$\text{Tam giác cân tại } A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow 13 = 4 + (y-4)^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow C(2;1) \\ y = 7 \Rightarrow C(2;7) \end{cases}$$

**Bài 22.** Cho  $A(3,4)$ , Tìm hai điểm  $B, C$  trên trục  $Ox$  sao cho tam giác  $ABC$  đều.

**Lời giải.** Ta có  $B, C \in Ox \Rightarrow B(x_b; 0), C(x_c; 0)$ .  $\vec{AB} = (x_b-3; -4), \vec{AC} = (x_c-3; -4), \vec{CB} = (x_b-x_c; 0)$ .

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_b-3)^2 = (x_c-3)^2 \\ (x_b-x_c)^2 = (x_b-3)^2 + 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_b + x_c - 6 = 0 \\ (x_b-x_c)^2 = (x_b-3)^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = 6 - x_b \\ 3(x_b-3)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_b = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_c = 3 - \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow B(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}; 0), C(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}; 0) \\ x_b = 3 - \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_c = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow B(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}; 0), C(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}; 0) \end{cases}$$

**Bài 23.** Cho  $A(2;1), C(5;0)$ , tìm  $M \in (d) : y = \frac{1}{2}x + 2$  sao cho  $MA = \sqrt{13}, MB = \sqrt{17}$ .

**Lời giải.**  $M \in (d) \Rightarrow M(x; \frac{1}{2}x + 2)$

$$\begin{cases} MA = \sqrt{13} \\ MB = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (\frac{1}{2}x+2)^2 = 13 \\ (x-5)^2 + (\frac{1}{2}x+2)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x^2 - 3x - 8 = 0 \\ \frac{5}{4}x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow C(5;4)$$

**Bài 24.** Cho ba điểm  $A(3;4), B(1,2), C(-1,5)$ .

- a/ Chứng minh ba điểm trên tạo thành một tam giác.  
 b/ Tìm tọa độ trực tâm và chân đường cao hạ từ các đỉnh.  
 c/ Tìm tọa độ chân đường phân giác trong hạ từ A .  
 d/ Tìm tọa độ của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

**Lời giải.**

a/ Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-2; -2), \overrightarrow{AC} = (-4; 1), \overrightarrow{BC} = (-2; 3) \Rightarrow \frac{-2}{-2} \neq \frac{-4}{1} \Rightarrow$  ba điểm  $A, B, C$  tạo thành một tam giác.

b/ Gọi  $H(x; y)$  là tọa độ trực tâm của tam giác. Ta có  $\overrightarrow{AH} = (x-3; y-4), \overrightarrow{BH} = (x-1; y-2)$ ,  $H$  là trực tâm  $\Rightarrow AH \perp BC, BH \perp AC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-3) + 3(y-4) = 0 \\ -4(x-1) + (y-2) = 0 \end{cases}$   

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases} \Leftrightarrow H(\frac{6}{5}; \frac{14}{5})$$

c/ Gọi  $E(x; y)$  là chân đường phân giác trong của góc A. Ta có  $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{8}{17}}$ .

$$\overrightarrow{BE} = (x-1; y-2), \overrightarrow{EC} = (-1-x; 5-y).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \sqrt{\frac{8}{17}} \overrightarrow{EC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{\frac{8}{17}}(-1-x) \\ y-2 = \sqrt{\frac{8}{17}}(5-y) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{\frac{8}{17}}}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}; \quad y = \frac{5\sqrt{\frac{8}{17}} + 2}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{8}{17}}}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}; \frac{5\sqrt{\frac{8}{17}} + 2}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}\right)$$

d/ Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $O(x; y)$ .

Ta có trung điểm các cạnh  $AB, AC, BC$  lần lượt là  $D, I, F \Rightarrow D(2; 3), I(1; \frac{9}{2}), F(0; \frac{7}{2})$

$$\overrightarrow{DO} = (x-2; y-3), \overrightarrow{IO} = (x-1; y-\frac{9}{2}), \overrightarrow{FO} = (x; y-\frac{7}{2})$$

$$DO, IO \text{ lần lượt vuông góc với } AB, AC \Rightarrow \begin{cases} -2(x-2) - 2(y-3) = 0 \\ -4(x-1) + (y-\frac{9}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{10} \\ y = \frac{41}{10} \end{cases} \Rightarrow O(\frac{9}{10}; \frac{41}{10})$$

**Bài 25.** Cho  $A(-2;0), B(4;0), C(3;5)$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh  $A, B, C$ . Tìm tọa độ của  $D, E, F$  và tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $DEF$ .

**Lời giải.** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (6;0), \overrightarrow{AC} = (5;5), \overrightarrow{BC} = (-1;5)$ .  $E(x; y)$  là chân đường vuông góc hạ từ  $B$  xuống  $AC \Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow 5(x-5) + 5(y) = 0$  (1)

$$\overrightarrow{AE} = (x+2; y), \text{ ba điểm } A, C, E \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{x+2}{y} = \frac{5}{5} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow E(1; 3)$$

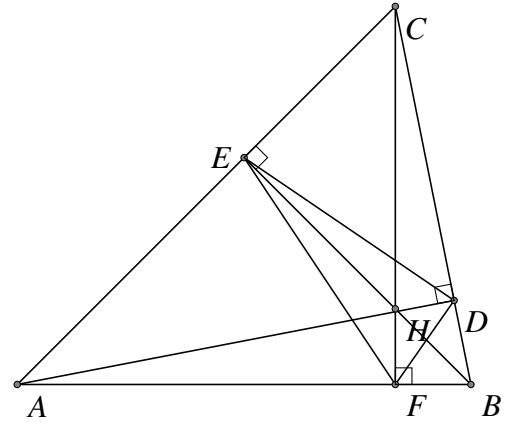
$$\text{Tương tự ta có } D\left(\frac{49}{13}; \frac{15}{13}\right), F(0; 3)$$

Trục tâm của tam giác  $ABC$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $DEF$ !

$$H(x; y) \text{ là trục tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

Với  $\overrightarrow{AH} = (x + 2; y)$ ,  $\overrightarrow{BH} = (x - 4; y)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-1; 5)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (5; 5)$ , ta tìm được  $H(3; 1)$ .

Chứng minh  $H$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $DEF$ .  
 Dễ dàng chứng minh được rằng các tứ giác  $CDF A, ABDE, CBFE$  nội tiếp.  $\Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{EBA} = \widehat{ACF} = \widehat{ADF} \Rightarrow AD$  là tia phân giác của  $\widehat{EDF}$ . Chứng minh tương tự ta được  $H$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $DEF$ .



### Bài tập tổng hợp

**Bài 26.** Cho ba điểm  $A(-2;3), B(\frac{1}{4};0), C(2;0)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**  $AB = \frac{15}{4}, AC = 5, k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{3}{4}$

Gọi  $D$  là giao điểm của phân giác trong góc  $\widehat{A}$  và  $BC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - x = -\frac{3}{4}(2 - x) \\ -y = -\frac{3}{4}(0 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(1;0).$$

$$BA = \frac{15}{4}, BD = \frac{3}{4} \Rightarrow k' = -5$$

Gọi  $J$  là giao điểm của phân giác trong góc  $B$  và  $AD$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{JA} = -5\overrightarrow{JD} \Rightarrow \begin{cases} -2 - x = -5(1 - x) \\ 3 - y = -5(0 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

**Bài 27.** Cho ba điểm  $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Làm tương tự câu trên ta thu được  $J(-2; \frac{2}{3})$ .

**Dạng 5. Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác - tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng**

- Trục tâm tam giác
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác
- Hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng

### PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  với  $A(x_A, y_A); B(x_B, y_B)$  và  $C(x_C, y_C)$

- a) Tìm tọa độ trục tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

Gọi tọa độ  $H(x, y)$ . Khi đó

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

Ta thu được hệ 2 phương trình 2 ẩn  $x, y$ . Giải hệ ta được tọa độ điểm  $H$ .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$

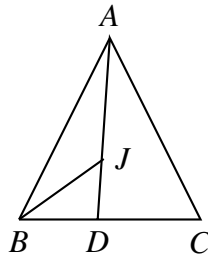
Gọi  $I(x, y)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khi đó  $IA = IB$  và  $IA = IC$ . Do đó, ta có

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = 0$$

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = 0$$

Giải hệ phương trình ta được tọa độ điểm  $I$ .

c) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$



\* Cách 1:

+) Gọi tọa độ điểm  $D(x, y)$ . Ta tính độ dài cạnh  $AB$  và  $AC$ .

Ta có  $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$ , suy ra  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} := k$

Do đó  $\overrightarrow{DB} = -k\overrightarrow{DC}$ , ta được hệ phương trình ẩn  $x, y$ , giải hệ ta được tọa độ điểm  $D$ .

+) Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  là  $J(x, y)$ . Tính độ dài đoạn  $BD$ .

Ta có  $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$  suy ra  $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} := l$ .

Do đó  $\overrightarrow{JD} = -l\overrightarrow{JA}$ , ta được hệ phương trình ẩn  $x, y$ , giải hệ ta được tọa độ điểm  $J$ .

\* Cách 2:

Áp dụng đẳng thức sau

$$a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

với  $AB = c, BC = a, AC = b$ .

d) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên đường thẳng  $BC$  Gọi tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên đường thẳng  $BC$  là  $M(x, y)$ , ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC}$  Ta thu được hệ 2 phương trình 2 ẩn, giải hệ ta được tọa độ điểm  $M$ .

**Ví dụ 19.** Cho  $A(4, 3); B(2, 7); C(-3, -8)$ .

a) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên đường thẳng  $BC$

**Lời giải.**

a) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

Gọi  $H(x, y)$ . Ta có  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  và  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ , suy ra  $7x + 11y = 91$  và  $x + 3y = 13$ , giải hệ phương trình ta được  $H(13, 0)$ .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$

Gọi  $I(x, y)$ . Khi đó  $IA = IB$  và  $IA = IC$ . Do đó, ta có

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-7)^2$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (x+3)^2 + (y+8)^2$$

giải hệ phương trình ta được  $I(-5, 1)$ .

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên đường thẳng  $BC$

Gọi  $M(x, y)$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên cạnh  $BC$ . Ta có  $\overrightarrow{AM} = (x-4, y-3)$  và  $\overrightarrow{BC} = (-5, -15)$ ;  $\overrightarrow{BM} = (x-2, y-7)$

Khi đó ta có  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  và  $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC}$ .

Suy ra  $t = \frac{2}{7}$  và  $M(\frac{4}{7}, \frac{19}{7})$

**Ví dụ 20.** Cho  $A(2, 6)$ ;  $B(-3, -4)$ ;  $C(5, 0)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-5, -10)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (3, -6)$ , suy ra  $AB = 5\sqrt{5}$ ;  $AC = 3\sqrt{5}$ ;

Gọi tọa độ điểm  $D(x, y)$ . Ta có  $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$ , suy ra  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} := \frac{5}{3}$

Do đó  $\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$ , ta được hệ phương trình ẩn  $x, y$ , giải hệ ta được tọa độ điểm  $D(2, -3)$ .

Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  là  $J(x, y)$ .

Ta có độ dài đoạn  $BD = 5\sqrt{5}$ .

Khi đó  $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$  suy ra  $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{3}$ .

Do đó  $\overrightarrow{JD} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{JA}$ , ta được hệ phương trình ẩn  $x, y$ , giải hệ ta được tọa độ điểm  $J(2, 1)$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 28.** Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp  $J$  của tam giác  $ABC$  trong các trường hợp sau:

a)  $A(1, 5)$ ;  $B(4, -1)$ ;  $C(-4, -5)$ .

b)  $A(0, -4)$ ;  $B(-5, 6)$ ;  $C(3, 2)$

**Lời giải.** ĐS: 1)  $J(1, \frac{10}{3})$ ; 2)  $J(0, 1)$ .

**Bài 29.** Cho  $A(-1, 4)$ ;  $B(-4, 0)$  và  $C(2, -2)$ .

a) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc  $M$  của điểm  $I$  lên đường thẳng  $BC$

**Lời giải.** ĐS:  $H(-2, 1)$ ;  $I(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ;  $M(\frac{-5}{8}, \frac{-9}{8})$ .

**Bài 30.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  với  $A(-1, -3)$ ;  $B(2, 5)$  và  $C(4, 0)$ . Xác định trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** ĐS:  $H(\frac{164}{31}, \frac{15}{31})$

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 31.** Cho tứ giác  $ABCD$  với  $A(3,4)$ ;  $B(4,1)$ ;  $C(2,-3)$ ;  $D(-1,6)$ . Chứng minh tứ giác  $ABCD$  nội tiếp được trong một đường tròn.

**Lời giải.** HD: Tìm tâm  $I$  của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  ta được  $I(-1;1)$ . Và chứng minh  $IA = ID$ .

**Bài 32.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho hai điểm  $A(-2,-2)$ ;  $B(5,-4)$ .

- Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho trọng tâm của tam giác  $ABC$  là điểm  $G(2,0)$ .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc  $H$  của điểm  $G$  lên đường thẳng  $BC$ .

**Lời giải.** ĐS:  $C(3,6)$ ;  $I(\frac{169}{66}, \frac{47}{33})$ ;  $H(\frac{60}{52}, \frac{21}{52})$

**Bài 33.** Cho  $A(-2,2)$ ;  $B(6,6)$ ;  $C(2,-2)$ .

- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ ; tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ , tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .
- Chứng minh  $\vec{IH} = -3\vec{IG}$
- $AD$  là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $BHCD$  là một hình bình hành.

**Lời giải.**

- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ ; tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ , tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

Gọi  $H(x,y)$ . Ta có  $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$  và  $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$ , suy ra  $x+2y=2$  và  $x-y=0$ , giải hệ phương trình ta được  $H(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .

Gọi  $I(x,y)$  là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khi đó  $IA = IB$  và  $IA = IC$ . Do đó, ta có

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + (y-2)^2 &= (x-6)^2 + (y-6)^2 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 &= (x-2)^2 + (y+2)^2\end{aligned}$$

giải hệ phương trình ta được  $I(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$ .

Gọi  $G(x,y)$  là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Ta có

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 3, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3$$

- Chứng minh  $\vec{IH} = 3\vec{IG}$

Ta có  $\vec{IH} = (2,2)$ ;  $\vec{IG} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$  suy ra  $\vec{IH} = -3\vec{IG}$

- $AD$  là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $BHCD$  là một hình bình hành.

Ta có  $\vec{BH} = (\frac{16}{3}, \frac{16}{3})$ ;  $\vec{AC} = (4,-4)$ ;  $D = (\frac{22}{3}, \frac{10}{3})$ ;  $\vec{BH} = (\frac{-16}{3}, \frac{-16}{3})$ ;

suy ra  
 $\vec{DC} \cdot \vec{AC} = 0$  và  $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$ ,

do đó

$BH \parallel CD$  và  $BH = CD$ .

## §4. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

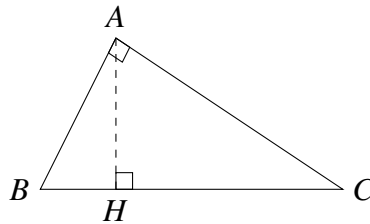
### I. Tóm tắt lý thuyết

Cho tam giác  $ABC$ , ta quy ước các kí hiệu sau.

- $BC = a, CA = b, AB = c$ .
- $p = \frac{a+b+c}{2}$  gọi là nửa chu vi của tam giác  $ABC$ .
- $m_a, m_b, m_c$  là độ dài đường trung tuyến tương ứng kẻ từ đỉnh  $A, B, C$  của tam giác  $ABC$ .
- $h_a, h_b, h_c$  là độ dài đường cao tương ứng kẻ từ đỉnh  $A, B, C$  của tam giác  $ABC$ .
- $l_a, l_b, l_c$  là độ dài đường phân giác trong tương ứng kẻ từ đỉnh  $A, B, C$  của tam giác  $ABC$ .
- $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
- $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

#### 1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .



- Định lí Pitago:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- Nếu biết 2 cạnh góc vuông thì có thể tính được đường cao  $AH$  bởi công thức:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

- Tích 2 cạnh góc vuông bằng tích cạnh huyền với đường cao tương ứng:

$$AB.AC = BC.AH$$

- Nếu biết 1 cạnh góc vuông và cạnh huyền thì có thể tính được hình chiếu của cạnh góc vuông đó lên cạnh huyền nhờ công thức:

$$AB^2 = BH.BC; \quad AC^2 = CH.BC$$

## 2. Định lý hàm số cosin, công thức trung tuyến.

Định lý hàm số cosin được phát minh bởi nhà toán học Al Kashi (1380 - 1429). Đây là một mở rộng của định lý Pythagore. Định lý hàm số cosin đưa ra một phương pháp giúp ta tìm được một cạnh của tam giác bất kì khi biết độ dài hai cạnh còn lại và số đo của góc xen giữa hai cạnh đó, từ đó cũng cho chúng ta tính được số đo của các góc còn lại của tam giác. Định lý được phát biểu như sau:

**Định lý 1.** Trong một tam giác bất kỳ, bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại trừ đi hai lần tích của chúng với cosin của góc xen giữa hai cạnh đó.

Nếu ký hiệu  $a, b, c$  lần lượt là độ dài các cạnh  $BC, CA, AB$  của tam giác  $ABC$  thì ta có:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

Từ định lý hàm số cosin ta cũng suy ra công thức tính cosin các góc của tam giác theo độ dài các cạnh của tam giác như sau:

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Mặt khác, sử dụng định lý hàm số cosin có thể giúp ta tìm được độ dài các đường trung tuyến theo ba cạnh của một tam giác. Cụ thể, nếu ký hiệu  $m_a, m_b, m_c$  là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh  $A, B, C$  thì:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{cases}$$

## 3. Định lý sin

**Định lý 2.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Đặt  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

## 4. Các công thức diện tích tam giác

Diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  được tính bởi một trong các công thức

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Một số bài tập giúp nắm vững lý thuyết

Mục này đưa ra một số bài tập mà việc giải quyết chỉ dùng đến các kiến thức về tích vô hướng của hai véc-tơ ở bài trước, chưa dùng đến các công thức về hệ thức lượng ở bài 3. Kết quả của các bài tập này sẽ dùng vào việc giới thiệu các công thức mới về hệ thức lượng trong tam giác.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$

- Tính  $\vec{BC}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .
- Tính  $\vec{BC} \cdot \vec{BC}$  từ đó tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  theo độ dài các cạnh của tam giác.
- Chứng minh rằng  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$ .

**Lời giải.**

$$a) \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}.$$

$$b) \vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}.$$

c) Theo câu trên ta có

$$\begin{aligned} AB \cdot AC \cdot \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AM$  là trung tuyến.

- Tính  $\vec{BC}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .
- Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  theo độ dài các cạnh của tam giác.
- Tính  $\vec{AM}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .
- Chứng minh  $AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$ .

**Lời giải.**

a) Như bài trên.

b) Như bài trên.

$$c) \vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{AB^2 + AC^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{4} \\ &= \frac{AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2}{4} \\ &= \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} \end{aligned}$$

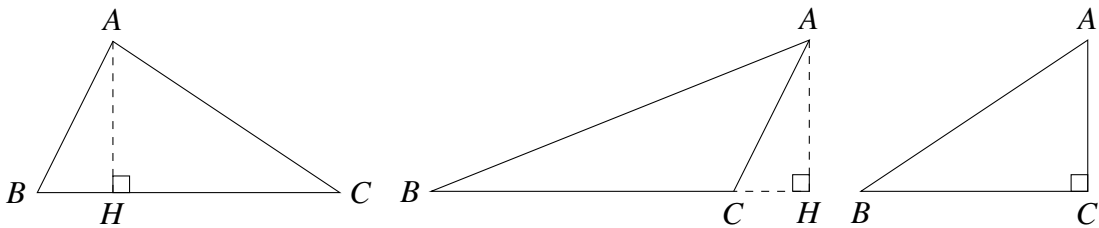
**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$ , đặt  $AB = c$ ,  $CA = b$ ,  $BC = a$ . Gọi  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ  $A, B, C$  của tam giác  $ABC$ .

a) Chứng minh rằng  $h_a = b \sin C = c \sin B$ ;  $h_b = c \sin A = a \sin C$ ;  $h_c = a \sin B = b \sin A$ .

b) Gọi  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$ , chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

**Lời giải.**



a) Trong cả ba trường hợp  $\widehat{C}$  nhọn, vuông, tù, ta đều có  $\sin B = \frac{h_a}{AB}$ . Suy ra  $h_a = c \sin B$ . Tương tự ta cũng có  $h_a = b \sin C$ . Thay đổi vai trò  $A, B, C$  ta được

$$h_a = b \sin C = c \sin B; h_b = c \sin A = a \sin C; h_c = a \sin B = b \sin A$$

b) Ta có  $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}a \cdot b \sin C$ , còn lại tương tự.

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng diện tích tam giác  $ABC$  được tính bởi công thức  $S = \frac{abc}{4R}$ .

**Lời giải.** Theo định lý sin, ta có  $\frac{c}{\sin C} = 2R$ . Suy ra  $\sin C = \frac{c}{2R}$ . Từ đó

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

**Ví dụ 5.** Cho đường tròn tâm  $I$  bán kính  $r$  nội tiếp tam giác  $ABC$  và tiếp xúc với các cạnh  $AB, BC, CA$  của tam giác tại  $K, L, M$ . Gọi  $p$  là nửa chu vi tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $S = p \cdot r$ .

**Lời giải.**

Ta có  $r = IK = IM = IL$ .

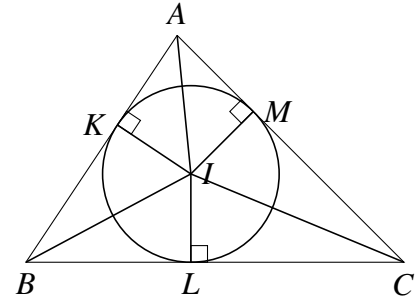
Theo tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát tại một điểm ta có  $AM = AK, BK = BL, CL = CM$ . Chu vi tam giác là

$$2p = AM + AK + BK + BL + CL + CM = 2(AK + BL + CK)$$

Suy ra  $p = AK + BL + CM$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{AKI} + S_{BLI} + S_{CMI}) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}AK \cdot r + \frac{1}{2}BL \cdot r + \frac{1}{2}CM \cdot r\right) \\ &= (AK + BL + CM) \cdot r \\ &= pr \end{aligned}$$



**Ví dụ 6.** Cho tam giác  $ABC$  diện tích  $S$ . Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \end{aligned}$$

**Ví dụ 7.** Chứng minh công thức tính diện tích sau (công thức Hê-rông)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

với  $p$  là nửa chu vi tam giác,  $a = BC, b = AC, c = AB$  là độ dài các cạnh.

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ .

Dùng kết quả bài trên, ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 - \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]} \\
 &= \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2}} \\
 &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 8.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $a = (a_1; a_2)$ ,  $b = (b_1; b_2)$ . Chứng minh rằng

$$Q = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
 &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2
 \end{aligned}$$

Suy ra  $Q = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ .

**Ví dụ 9.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  có  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$ ,  $C(x_C; y_C)$ . Chứng minh rằng diện tích tam giác  $ABC$  là

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$$

trong đó, người ta đặt  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  (định thức cấp 2).

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A) \\
 \vec{AC} &= (x_C - x_A; y_C - y_A)
 \end{aligned}$$

Ta đã biết  $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ . Kết quả tính toán về tọa độ của bài trên ta được

$$S = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

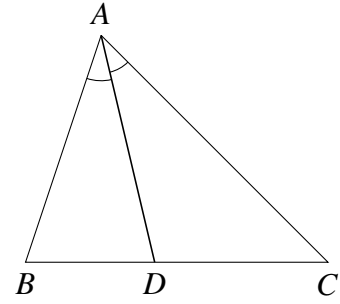
**Ví dụ 10.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $l_a$  là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .

Chứng minh rằng  $l_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}$ .

**Lời giải.**

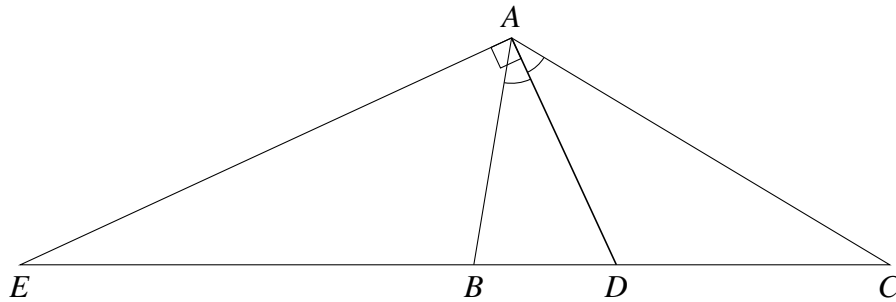
Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ . Ta có  $l_a = AD$ . Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{ACD} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A &= \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow cb \sin A &= l_a(c + b) \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow l_a &= \frac{bc \sin A}{(b + c) \sin \frac{A}{2}} \end{aligned}$$



**Ví dụ 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB < AC$  (hay  $c < b$ ), gọi  $l'_a$  là độ dài đường phân **ngoài** kẻ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $l'_a = \frac{bc \sin A}{(b - c) \cos \frac{A}{2}}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $E$  là chân đường phân giác ngoài kẻ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ . Ta có  $l'_a = AE$ . Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ACE} - S_{ABE} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A &= \frac{1}{2}AC \cdot AE \cdot \sin \left( 90^\circ + \frac{A}{2} \right) - \frac{1}{2}AB \cdot AE \cdot \sin \left( 90^\circ - \frac{A}{2} \right) \\ \Leftrightarrow cb \sin A &= l'_a(b - c) \cos \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow l'_a &= \frac{bc \sin A}{(b - c) \cos \frac{A}{2}} \end{aligned}$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

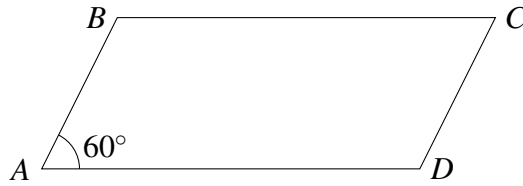
**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 1$ ,  $AC = \sqrt{3}$ ,  $\hat{A} = 60^\circ$ .

- Tính  $\overrightarrow{BC}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .
- Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- Tính độ dài  $BC$ .

**Lời giải.**

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - \sqrt{3}$ . Suy ra  $BC = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$ .

**Bài 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $AD = 2a$  và  $\widehat{DAB} = 60^\circ$ .

a) Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ c) Tính  $AC$ b) Tính  $\vec{AC}$  theo hai vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AD}$ .d) Tính  $BD$ **Lời giải.**

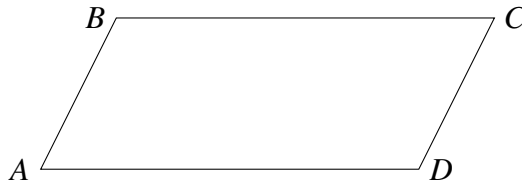
$$a) \vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{DAB} = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2.$$

$$b) \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}.$$

$$c) AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2. \text{ Suy ra } AC = a\sqrt{7}.$$

$$d) \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}. \text{ Suy ra } BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 3a^2. \text{ Suy ra } BD = a\sqrt{3}.$$

**Bài 3.** Chứng minh rằng tổng bình phương các đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh.

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ . Suy ra  $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ .

Tương tự  $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$ . Suy ra  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ .

Từ đó suy ra  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ .

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 5, BC = 4$ . Tính các tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{BA} \cdot \vec{BC}, \vec{CA} \cdot \vec{CB}$ .

**Lời giải.**

$$\bullet \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{4 + 25 - 16}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\bullet \vec{BA} \cdot \vec{BC} = -\frac{5}{2}$$

$$\bullet \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{37}{2}$$

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ ,  $M$  là điểm bất kì. Chứng minh rằng

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

**Lời giải.** Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

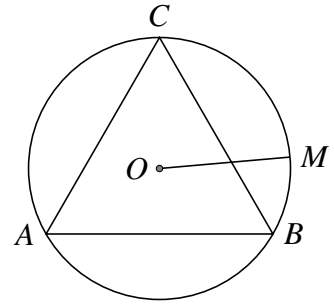
$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\vec{MG} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

**Bài 6.** Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ ,  $M$  là một điểm thay đổi trên đường tròn. Chứng minh rằng  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  không đổi.

**Lời giải.**

Gọi  $R$  là bán kính của đường tròn. Áp dụng bài trên ta có

$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 \\ &= 3R^2 + R^2 + R^2 + R^2 \\ &= 6R^2 \end{aligned}$$



### Dạng 2. Xác định các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết một số yếu tố về cạnh và góc của tam giác đó

Ở dạng toán này, chúng ta áp dụng trực tiếp định lý hàm số cosin hoặc hệ quả của định lý hàm số cosin để tìm các yếu tố còn lại của tam giác đã cho.

**Ví dụ 12.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 5, c = 7$  và  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính cạnh  $a$  và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{32 + 49 - 25}{56\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{32 + 25 - 49}{40\sqrt{2}} = \frac{8}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 13.** Một người đứng trên ngọn hải đăng  $A$  ở bờ biển quan sát hai chiếc tàu ở hai điểm  $B$  và  $C$ . Khoảng cách từ người đó tới chiếc tàu ở điểm  $B$  và  $C$  lần lượt là 5 km và 6 km. Góc tạo bởi hai hướng nhìn  $AB$  và  $AC$  là  $60^\circ$ . Tính khoảng cách  $d$  giữa hai chiếc tàu.

**Lời giải.** Xét tam giác  $ABC$  với  $AC = 6$  km,  $AB = 5$  km,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Áp dụng định lý cos ta có

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAC}$$

Từ đó suy ra  $BC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 31 \Rightarrow BC = \sqrt{31}$ .

Vậy khoảng cách giữa hai chiếc tàu là  $d = \sqrt{31}$  km.

**Ví dụ 14.** Cho  $x$  là số thực lớn hơn 1 và  $\begin{cases} a = x^2 + x + 1 \\ b = 2x + 1 \\ c = x^2 - 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác và tính số đo của góc đối diện với cạnh  $a$ .

**Lời giải.** Do  $x > 1$  nên dễ dàng chứng minh được:  $\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a, \\ c + a > b \end{cases}$  từ đó suy ra  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Gọi  $A$  là góc đối diện với cạnh  $a$ , khi đó:  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ b^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ c^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \\ bc = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra  $b^2 + c^2 - a^2 = -bc \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$ .

**Ví dụ 15.** Cho  $\Delta ABC$  có các cạnh  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Biết rằng tồn tại số tự nhiên  $n > 2$  sao cho  $a^n = b^n + c^n$ . Chứng minh rằng  $A$  là góc có số đo lớn nhất của tam giác, từ đó suy ra  $\Delta ABC$  có 3 góc nhọn.

**Lời giải.** Từ giả thiết suy ra  $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$ , do đó  $\begin{cases} A > B \\ A > C \end{cases}$ . Vậy  $A$  là góc lớn nhất của  $\Delta ABC$ .

$$\text{Ta có } a^n = b^n + c^n \Leftrightarrow a^2 = b^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + c^2 \left(\frac{c}{a}\right)^{n-2}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \frac{b}{a} < 1 \\ \frac{c}{a} < 1 \end{cases}. \text{ Từ đó suy ra } a^2 < b^2 + c^2 \text{ hay } b^2 + c^2 - a^2 > 0.$$

Mà  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  nên suy ra  $\cos A > 0$  hay  $A$  là góc nhọn, do đó  $B, C$  cũng là các góc nhọn.

**Ví dụ 16.** Cho tam giác  $ABC$  có  $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ . Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

**Lời giải.** Ta có  $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c \Rightarrow m_c^2 = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$ .

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3b^2 \\ 2(c^2 + a^2) - b^2 = 3a^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4m_a^2 = 3b^2 \\ 4m_b^2 = 3a^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \\ &\Rightarrow m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c) \end{aligned}$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 10$  cm,  $BC = 16$  cm và  $C = 120^\circ$ , tính độ dài cạnh  $AB$ .

**Lời giải.** Áp dụng định lý hàm số cosin ta có  $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cos C$  ta suy ra  $AB = \sqrt{516}$  cm

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 3, CA = 4$  và  $AB = 6$ , Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

**Lời giải.** Do  $AB > AC > BC$  nên  $C > B > A$ .

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có  $\cos C = -\frac{11}{24}$ .

**Bài 9.** Cho  $a^2, b^2, c^2$  là độ dài các cạnh của một tam giác nào đó và  $a, b, c$  là độ dài các cạnh của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn.

**Lời giải.** Do  $a^2, b^2, c^2$  là độ dài các cạnh của một tam giác nên

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 > 0 \\ b^2 + c^2 - a^2 > 0 \\ c^2 + a^2 - b^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos A, \cos B, \cos C > 0.$$

**Bài 10.** Cho tứ giác nội tiếp  $ABCD$  có  $AB = CD = a, AD = b, BC = c$ . Chứng minh rằng  $\cos A = \frac{b-c}{2a}$ .

**Lời giải.** Áp dụng định lý hàm số cosin cho hai tam giác  $BAD, BCD$  và chú ý  $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$  ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $m_a = 15, m_b = 18, m_c = 27$ .

- Tính diện tích của tam giác  $ABC$ .
- Tính độ dài các cạnh của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

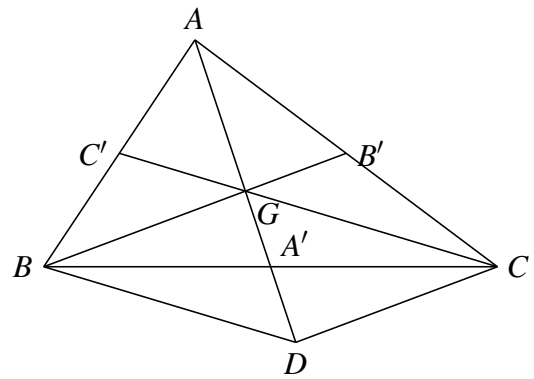
- Gọi  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ ;  $A', B', C'$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $G$ . Khi đó ta có  $BGCD$  là hình bình hành.

$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta GBC} = \frac{1}{2}S_{\Delta BGD} = S_{\Delta BGD}.$$

Tam giác  $BGD$  có độ dài các cạnh lần lượt là 10, 12, 18 nên  $S_{\Delta BGD} = \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 2} = 40\sqrt{2}$ .

$$\text{Vậy } S_{\Delta ABC} = 120\sqrt{2}.$$

- Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta tính được  $a = 2\sqrt{209}, b = 8\sqrt{11}, c = 2\sqrt{41}$ .



**Bài 12.** Cho  $\Delta ABC$  có các cạnh  $BC = a, CA = b, AB = c$  thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng  $B = 60^\circ$ .

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} &= \frac{3}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} = 3 \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 1 \\ &\Leftrightarrow c(b+c) + a(a+b) = (a+b)(b+c) \\ &\Leftrightarrow c^2 + bc + a^2 + ab = ab + b^2 + ac + bc \\ &\Leftrightarrow c^2 + a^2 - b^2 = ac \\ &\Leftrightarrow \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow B = 60^\circ. \end{aligned}$$

### BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 10$ .  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $2IB = 3IC$ . Đường tròn tâm  $I$  bán kính 3 tiếp xúc với các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại các điểm  $M, N$ . Tính độ dài các cạnh  $AB, AC$ .

**Lời giải.** Trước hết ta có 
$$\begin{cases} \sin B = \frac{IM}{BI} = \frac{1}{2} \\ \sin C = \frac{IN}{CI} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Từ đó suy ra 
$$\begin{cases} \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \text{ (Do } B, C \text{ là các góc nhọn).}$$

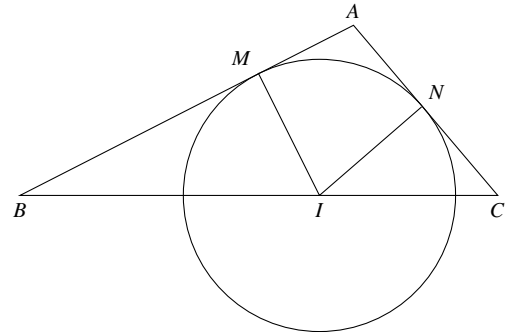
Đặt  $AB = c, AC = b$ . Do  $AI$  là phân giác góc  $A$  nên  $\frac{c}{b} = \frac{6}{4} \Rightarrow 2c = 3b$ .

Mặt khác, theo định lý cosin trong tam giác  $ABC$  ta có

$$\begin{cases} c^2 = b^2 + BC^2 - 2b \cdot BC \cdot \cos C \\ b^2 = c^2 + BC^2 - 2c \cdot BC \cdot \cos B \end{cases}$$

Thay số vào ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2c = 3b \\ c^2 = b^2 + 100 - 5\sqrt{7} \cdot b \\ b^2 = c^2 + 100 - 10\sqrt{3} \cdot c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \\ c = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \end{cases}$$



**Bài 14.** Cho  $\Delta ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$  và có diện tích  $S$ . Chứng minh rằng:

a)  $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ .

b) Nếu  $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$  thì  $\cot B + \cot C = 2\cot A$ , ở đó  $m_b, m_c$  là độ dài các trung tuyến xuất phát từ  $B, C$ .

**Lời giải.**

a) Theo định lý hàm số cosin ta có:  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$ .

Mặt khác,  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  nên ta có

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{2bc \cos A}{2bc \sin A} = \cot A$$

b) Ta có  $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ .

Từ đó suy ra  $2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 \Rightarrow 2a^2(c^2 - b^2) = c^4 - b^4 = (c^2 + b^2)(c^2 - b^2)$ .

Do  $b \neq c$  nên  $c^2 - b^2 \neq 0$ , do đó  $b^2 + c^2 = 2a^2$ .

Từ 
$$\begin{cases} \cot B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} \\ \cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \end{cases} \Rightarrow \cot B + \cot C = \frac{2a^2}{4S} \quad (1)$$

Mặt khác  $2\cot A = 2 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{2a^2}{4S} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

### Dạng 3. Diện tích tam giác

Dạng này thường sử dụng các công thức về diện tích sau

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

**Bài 15.** Cho  $A(1, 5); B(4, -1); C(-4, -5)$ . Tính diện tích của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{AB} = (3, -6); \vec{BC} = (-8, -4)$ , nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

Do đó,  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 30$  (đvdt).

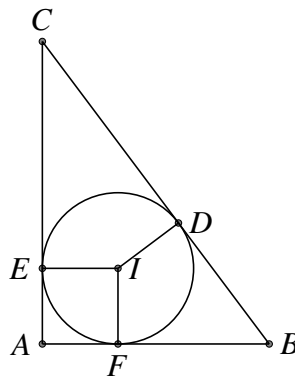
**Bài 16.** Tính diện tích tam giác  $ABC$ , biết chu vi tam giác bằng  $2p$ , các góc  $\hat{A} = \alpha^\circ, \hat{B} = \beta^\circ$ .

**Lời giải.** Ta có  $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$ . Theo định lý hàm sin ta có  $abc = 8R^3 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ , suy ra  $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ .

và  $R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - \alpha - \beta)}$ . Vậy  $S = 2 \left( \frac{2p}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)} \right)^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$ .

**Bài 17.** Cho  $\Delta ABC$  có  $\hat{A} = 90^\circ$ , bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R = 7$  và bán kính đường tròn nội tiếp là  $r = 3$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác.

**Lời giải.**



Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp của  $\Delta ABC$ .

Gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ( $I$ ) với các cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $D, E, F$ .

Vì  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  nên  $BC = 2R = 14$  và  $AE = AF = r = 3$ .

Ta có  $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = AE + BC = 14 + 3 = 17$

Vậy  $S = pr = 17 \times 3 = 51$

**Bài 18.** Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, 3)$ . Biết rằng  $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$ . Tính diện tích  $S$  của  $\Delta ABC$

**Lời giải.** Áp dụng định lý sin trong  $\Delta ABC$  ta có:

$$BC = 2R \sin A = 6 \sin 30^\circ = 3 \text{ và } AC = 2R \sin B = 6 \sin 30^\circ = 3$$

Ta có  $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ .

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2}BC.AC.\sin\widehat{C} = \frac{3^2}{2}\sin 120^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

**Bài 19.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2Rr}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2Rr} = \frac{1}{2 \cdot \frac{abc}{4s} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{2p}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

$$\text{Bất đẳng thức ban đầu} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \end{aligned}$$

**Bài 20.** Cho hình vuông MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$S_{ABC} \geq 2S_{MNPQ}.$$

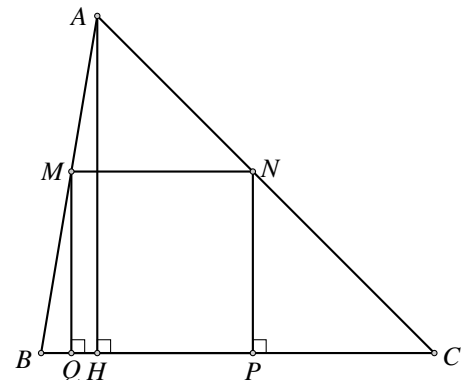
**Lời giải.**

Ta thấy:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &\geq 2S_{MNPQ} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.AH &\geq 2MN.PQ \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} &\geq \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH} \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH} &= \frac{AM}{AB} \cdot \frac{BM}{AB} = \frac{1}{AB^2} \cdot AM \cdot BM \\ &\leq \frac{1}{AB^2} \left( \frac{AM+BM}{2} \right)^2 = \frac{1}{AB^2} \cdot \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



#### Dạng 4. Chứng minh hệ thức liên quan giữa các yếu tố trong tam giác

- Dùng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia hoặc chứng minh cả hai vế cũng bằng một hệ thức đã biết là đúng.
- Khi chứng minh cần khai thác các giả thiết và kết luận để tìm đúng các hệ thức thích hợp làm trung gian cho quá trình biến đổi.

**Ví dụ 17.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ .  $p$  là nửa chu vi tam giác. Chứng minh rằng:

$$abc.(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c).$$

**Lời giải.** Áp dụng định lý cos trong  $\Delta ABC$ , ta có:

$$\begin{aligned} VT &= abc \cdot \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \\ &= a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}(b + c - a) + \frac{b^2}{2}(a + c - b) + \frac{c^2}{2}(a + b - c) \\ &= a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c) = VP. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

**Ví dụ 18.** Cho  $\Delta ABC$  có trung tuyến  $AM$ ,  $\widehat{AMB} = \alpha$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $S$  là diện tích  $\Delta ABC$ . Với  $0 < \alpha < 90^\circ$ . Chứng minh:  $\cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $BC = a$ .

Gọi  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  đến  $BC$ .

$$\text{Có } \Delta AHM \text{ vuông} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{HM}{AH} = \frac{MB - BH}{AH} = \frac{BC}{2AH} - \frac{BH}{AH}.$$

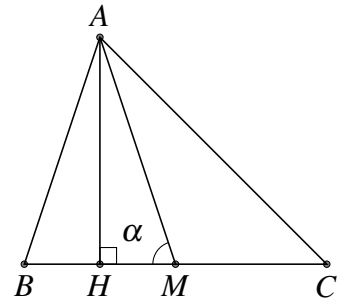
$$\text{Hay } \cot \alpha = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý cos và công thức tính diện tích:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - c^2}{4S} &= \frac{(a^2 + c^2 - 2ac \cos B) - c^2}{2AH \cdot a} \\ &= \frac{a^2 - 2ac \cos B}{2AH \cdot a} = \frac{a}{2AH} - \frac{c \cdot \cos B}{AH}. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \frac{b^2 - c^2}{4S} = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}.$$



**Ví dụ 19.** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $\widehat{GAB} = \alpha$ ,  $\widehat{GBC} = \beta$ ,  $\widehat{GCA} = \gamma$ . Đặt  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$  và  $S$  là diện tích  $\Delta ABC$ . Chứng minh:

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}.$$

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Kẻ  $MH \perp AB$ .

$$\Delta AMH \text{ vuông} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AH}{AM}.$$

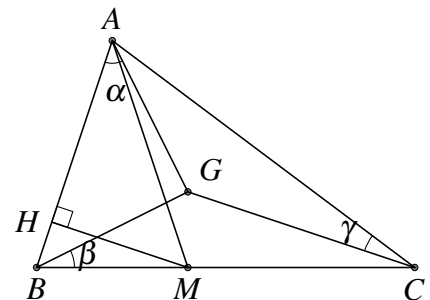
$$\Delta BHM \text{ vuông} \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{MB} = \frac{2BH}{a}.$$

$$\text{Ta có } AB = HA + HB \Rightarrow c = AM \cdot \cos \alpha + \frac{a}{2} \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{AM} \left( c - \frac{a}{2} \cos B \right) \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý hàm số sin cho  $\Delta AMB$ :

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{MA}{\sin B} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{AM} \cdot MB \sin B = \frac{a}{2AM} \sin B \quad (2)$$



Từ (1) và (2) ta được:

$$\cot \alpha = \frac{c - \frac{a}{2} \cos B}{\frac{a}{2} \sin B} = \frac{2c - a \cos B}{a \cdot \frac{b}{2R}} = \frac{R(4c - 2a \cos B)}{ab} = \frac{4c^2 - 2ac \cos B}{\frac{abc}{R}} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S}.$$

$$\text{Tương tự: } \cot \beta = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S}; \cot \gamma = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}.$$

$$\text{Do đó, } \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} + \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}.$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ .  $R$  là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh rằng:  $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R$ .

**Lời giải.** Áp dụng định lý cos và sin, ta được:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \cdot \frac{a}{2R}} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) R}{abc}.$$

Tương tự với  $\cot B$  và  $\cot C$ , cộng về theo về được đpcm.

**Bài 22.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ ,  $R$  là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$3 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = \frac{3}{4R^2} (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

**Lời giải.** Áp dụng công thức trung tuyến, ta được  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

Áp dụng định lý sin:  $a = 2R \sin A$ ;  $b = 2R \sin B$ ;  $c = 2R \sin C$ .

$$\text{Suy ra } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 3R^2 (3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \quad (1)$$

$$\text{Theo tính chất trọng tâm, có } m_a = \frac{3}{2}GA, m_b = \frac{3}{2}GB, m_c = \frac{3}{2}GC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thu được đẳng thức cần chứng minh.

**Bài 23.** Cho  $\triangle ABC$  có  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ  $A, B, C$ ;  $p$  là nửa chu vi.  $R, r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$p^2 = \frac{R}{2r^2} h_a h_b h_c$$

**Lời giải.** Ta có  $ah_a = bh_b = ch_c = 2S \Rightarrow h_a h_b h_c = \frac{2S}{abc}$ .

$$\text{Lại có } S = pr \Rightarrow \frac{2p^2 r^2}{h_a h_b h_c} = \frac{abc}{4S} = R.$$

**Bài 24.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A$ . Chứng minh  $\cos A \geq \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.** Áp dụng định lý sin, có:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A \Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = 2 \frac{a^2}{4R^2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2.$$

Áp dụng định lý cos, có:

$$b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2}{4bc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:  $b^2 + c^2 \geq 2bc$ . Suy ra  $\cos A \geq \frac{1}{2}$ .

**Bài 25.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ ;  $l_a, l_b, l_c$  lần lượt là độ dài đường phân giác xuất phát từ  $A, B, C$ . Chứng minh:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$ .

**Lời giải.** Gọi  $D$  là chân đường phân giác kẻ từ  $A$ . Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b.l_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}c.l_a \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

Vì  $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$  nên  $0 < \cos \frac{A}{2} < 1$ .

$$\text{Suy ra } l_a < \frac{2bc}{b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Tương tự với  $l_b$  và  $l_c$ . Cộng vế theo vế ta được đpcm.

**Bài 26.** Cho  $\Delta ABC$  diện tích  $S$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Chứng minh  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ .

**Lời giải.** Theo công thức Hê-rông:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

Ta có  $\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2}$ . Tương tự có  $\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}$ ;  $\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{b}{2}$ .

$$\text{Do đó } S^2 \leq p \cdot \frac{abc}{8} = \frac{(a+b+c)abc}{16}.$$

$$\text{Lại có } (a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3abc(a+b+c) \geq 3 \cdot 16 \cdot S^2.$$

Suy ra đpcm.

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 27.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ ; trọng tâm  $G$  và tâm đường tròn nội tiếp  $I$ . Biết  $GI$  vuông góc với đường phân giác trong của  $\widehat{BCA}$ . Chứng minh:  $\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$ .

**Lời giải.** Vẽ  $GH \perp AC, GK \perp BC, ID \perp AC$ .

Gọi  $L$  và  $N$  lần lượt là giao điểm của  $IG$  với  $AC$  và  $BC$ .

$$\text{Ta có: } S_{\Delta CLN} = 2S_{\Delta LIC} = ID \cdot IC = r \cdot LC \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } S_{\Delta CLN} = S_{\Delta GLC} + S_{\Delta GCN} = \frac{1}{2}(GH \cdot LC + GK \cdot CN) \quad (2)$$

$$\text{Do } \Delta CLN \text{ cân nên } LC = CN \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } r \cdot LC = \frac{1}{2}LC(GH + GK) \Leftrightarrow 2r = GH + GK.$$

Gọi  $h_a, h_b$  lần lượt là độ dài đường cao của  $\Delta ABC$  xuất phát từ  $A$  và  $B$ .

$$\text{Ta có: } \frac{GK}{h_a} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}; \frac{GH}{h_b} = \frac{1}{3}. \text{ Do đó } 2r = \frac{1}{3}(h_a + h_b).$$

$$\text{Mà } S_{\Delta ABC} = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow h_a = \frac{2pr}{a}; h_b = \frac{2pr}{b}.$$

$$\text{Suy ra } 2r = \frac{2}{3}pr \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}p \left( \frac{a+b}{ab} \right) \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b+c}{3}.$$

**Bài 28.** Cho  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp với  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$  và  $p$  là nửa chu vi,  $S$  là diện tích tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}.$$

**Lời giải.** Áp dụng định lý hàm số cos trong các tam giác  $ABD, CBD$  ta có:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$$

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos A - 2bc \cos C. \quad (1)$$

Bình phương hai vế của (1) ta có:

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad \cos A - 2bc \cos C)^2. (2)$$

Ta có:

$$S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C.$$

$$16S^2 = 4(ad \sin A + bc \sin C)^2. (3)$$

Cộng từng vế (2),(3) ta được:

$$\begin{aligned} (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 16S^2 &= 4 \left[ a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A \cos C - \sin A \sin C) \right] \\ &= 4 \left[ a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos(A+C)) \right] \\ &= 4 \left[ a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \left( 2 \frac{\cos^2(A+C)}{2} - 1 \right) \right] \\ &= 4 \left[ (ad+bc)^2 - 4abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2} \right]. (4) \end{aligned}$$

Từ (4) suy ra

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4(ad+bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) - 16abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= [(a+d)^2 - (b-c)^2] [(b+c)^2 - (a-d)^2] - 16abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= (2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a) - 16abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2}. (5) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \cos^2 \frac{B+D}{2} = \cos^2 \frac{A+C}{2}$$

nên từ (5) suy ra

$$\begin{aligned} S^2 &= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}. \\ \Rightarrow S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}. \end{aligned}$$

#### Dạng 5. Nhận dạng tam giác vuông

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

**Ví dụ 20.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn điều kiện

$$\sin 2A + \sin 2B = \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B}.$$

Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin 2A + \sin 2B &= \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B} \\
 \Leftrightarrow 2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B &= \frac{2 \sin A \cos A \cdot 2 \sin B \cos B}{\cos A \cos B} \\
 \Leftrightarrow \sin A \cos A + \sin B \cos B &= 2 \sin A \sin B \\
 \Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B &= 4 \sin A \sin B \\
 \Leftrightarrow 2 \sin(A+B) \cos(A-B) &= 2[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\
 \Leftrightarrow \sin C \cdot \cos(A-B) &= \cos(A-B) + \cos C \\
 \Leftrightarrow \cos(A-B) \cdot \cos C(1 - \sin C) + \cos^2 C &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos(A-B) \cdot \cos C(1 - \sin C) + 1 - \sin^2 C &= 0 \\
 \Leftrightarrow (1 - \sin C)(\cos(A-B) \cos C + 1 + \sin C) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 1 - \sin C &= 0 \\
 \Leftrightarrow C &= \frac{\pi}{2} \\
 \Leftrightarrow \triangle ABC &\text{ vuông tại } C.
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 21.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + \sin 2C \cos 2C = 0$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  vuông.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 &\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= \sin 4A + \sin 4B + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= 2 \sin 2(A+B) \cos 2(A-B) + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= -2 \sin 2C \cos 2(A-B) + 2 \sin 2C \cos 2(A+B) \\
 &= -2 \sin 2C [\cos 2(A-B) - \cos 2(A+B)] \\
 &= -4 \sin 2C \sin 2A \sin 2B.
 \end{aligned}$$

Do đó  $\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + \sin 2C \cos 2C = 0 \Leftrightarrow -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2A = 0 \\ \sin 2B = 0 \\ \sin 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = \pi \\ 2B = \pi \\ 2C = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông.}$$

**Ví dụ 22.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2017]{\sin C}$  và các góc A, B nhọn. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

**Lời giải.** Ta có:  $\sin C \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt[2017]{\sin C} = \sin^{2017} C \geq \sin^2 C \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B \geq \sin^2 C$   
 $\Leftrightarrow 4R^2[\sin^2 A + \sin^2 B] \geq 4R^2 \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$ .

Theo định lý hàm số cosin ta có:  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \geq 0$ .

Ta thấy:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 A + \sin^2 B &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} \\
 &= 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} \\
 &= 1 - \cos(A+B) \cos(A-B) \\
 &= 1 + \cos C \cos(A-B) \geq 1.
 \end{aligned}$$

Mặt khác:  $\sqrt[2017]{\sin C} \leq \sqrt[2017]{1} = 1$ .

Do đó:  $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2017]{\sin C}$  khi  $\begin{cases} \cos C \cos(A-B) = 0 \\ \sin C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông.}$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 29.** Cho  $A, B$  là hai góc nhọn của tam giác  $ABC$  thỏa mãn:

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 1.$$

Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(A+B) \cos(A-B) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos C \cos(A-B) &= 0. \end{aligned}$$

Mà  $A, B$  là hai góc nhọn nên  $\cos(A-B) \neq 0$ .

Do đó  $\cos C \cdot \cos(A-B) = 0 \Leftrightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC$  vuông tại  $C$ .

**Bài 30.** Cho tam giác  $ABC$  có các góc thỏa mãn đẳng thức :

$$\sin C = \sin A \cos B.$$

Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)] \\ \Rightarrow 2 \sin C &= \sin C + \sin(A-B) \\ \Rightarrow \sin C &= \sin(A-B) \\ \Rightarrow \sin(A+B) &= \sin(A-B) \\ \Rightarrow \sin A \cos B + \sin B \cos A &= \sin A \cos B - \sin B \cos A \\ \Rightarrow \sin B \cos A &= 0 \\ \Rightarrow \cos A &= 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \triangle ABC &\text{ vuông tại } A. \end{aligned}$$

**Bài 31.** Cho tam giác  $ABC$  có  $C < B$  và  $b, c$  là các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  vuông nếu có:

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} &= \frac{\sin B \cos C - \sin C \cos B}{\sin B \sin C + \sin C \sin B} \\ &= \frac{\frac{b}{2R} \cos C - \frac{c}{2R} \cos B}{\frac{b}{2R} \cos C + \frac{c}{2R} \cos B} \\ &= \frac{2ab \cos C - 2ac \cos B}{2ab \cos C + 2ac \cos B} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 + c^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 - c^2) + (a^2 + c^2 - b^2)} \\ &= \frac{b^2 - c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A.$$

**Bài 32.** Cho tam giác  $ABC$  có:  $5(\sin A + 3 \cos B) + 9(\sin B + 3 \cos A) = 20$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  vuông.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}&4(\sin A + 3 \cos B) + 3(\cos A + 3 \sin B) \\ &= (3 \cos A + 4 \sin A) + (9 \sin B + 12 \cos B) \\ &\leq \sqrt{(4^2 + 3^2)(\sin^2 A + \cos^2 A)} + \sqrt{(9^2 + 12^2)(\sin^2 B + \cos^2 B)} \\ &= 5 + 15 = 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Dấu bằng xảy ra} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4} \\ \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{9}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \tan A = \cot B = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \tan A &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} - B \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } C.\end{aligned}$$

### Dạng 6. Nhận dạng tam giác cân

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

**Ví dụ 1.** Chứng tỏ rằng tam giác  $ABC$  cân nếu  $\tan B + \tan C = 2 \tan \frac{B+C}{2}$

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 \tan B + \tan C &= 2 \tan \frac{B+C}{2} \\
 \Leftrightarrow \tan B - \tan \frac{B+C}{2} + \tan C - \tan \frac{B+C}{2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos B \cos \frac{B+C}{2}} + \frac{\sin \frac{C-B}{2}}{\cos C \cos \frac{B+C}{2}} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} \left( \frac{1}{\cos B \cos \frac{B+C}{2}} - \frac{1}{\cos C \cos \frac{B+C}{2}} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{B-C}{3} = 0 \\
 \Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A.
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$  thỏa mãn hệ thức:  $\sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2} \cos^3 \frac{B}{2}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  cân.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2} &= \sin \frac{C}{2} \cos^3 \frac{B}{2} \\
 \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} &= \tan \frac{C}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \\
 \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} (1 + \tan^2 \frac{B}{2}) &= \tan \frac{C}{2} (1 + \tan^2 \frac{C}{2}).
 \end{aligned}$$

Đặt  $x = \tan \frac{B}{2}$ ;  $y = \tan \frac{C}{2}$  khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
 x(1+x^2) &= y(1+y^2) \\
 \Leftrightarrow x^3 - y^3 + x - y &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x &= y.
 \end{aligned}$$

Do đó ta có:  $\tan \frac{B}{2} = \tan \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{B}{2} = \frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC$  cân tại  $A$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  thỏa mãn:  $\frac{c}{b \sin A} = 2 \tan A$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  cân.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b \sin A} &= 2 \tan A \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin C}{\sin B} &= 2 \cos A \\
 \Leftrightarrow \sin C &= 2 \sin B \cos A \\
 \Leftrightarrow \sin C &= \sin(B+A) + \sin(B-A) \\
 \Leftrightarrow \sin C &= \sin C + \sin(B-A) \\
 \Leftrightarrow \sin(B-A) &= 0 \Rightarrow B-A=0 \Leftrightarrow B=A \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } C.
 \end{aligned}$$

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có đường cao  $AH = h_a$  thỏa mãn hệ thức :  $h_a^2 = bc \cos^2 \frac{A}{2}$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  cân.

**Lời giải.** Ta có:  $h_a = c \sin B = b \sin C \Rightarrow h_a^2 = bc \sin B \sin C$ .

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin B \sin C &= \cos^2 \frac{A}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B-C) - \cos(B+C) &= 1 + \cos A \\
 \Leftrightarrow \cos(B-C) + \cos A &= 1 + \cos A \\
 \Leftrightarrow \cos(B-C) &= 1 \\
 \Rightarrow B-C &= 0 \\
 \Leftrightarrow B &= C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.}
 \end{aligned}$$

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{4 - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} = (\cot B + \cot C)^2 - 2 \cot B \cdot \cot C.$$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \frac{4 - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} &= (\cot B + \cot C)^2 - 2 \cot B \cdot \cot C \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 B + \sin^2 C} - 2 &= \cot^2 B + \cot^2 C \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 B + \sin^2 C} - 2 &= \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} - 2 \\
 \Leftrightarrow (\sin^2 B + \sin^2 C) \left( \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \right) &= 4 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 B} - 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left( \frac{\sin B}{\sin C} - \frac{\sin C}{\sin B} \right)^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin B &= \sin C \\
 \Leftrightarrow B &= C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.}
 \end{aligned}$$

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức:  $\sin \frac{B}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  cân.

**Lời giải.**  $\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{2} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac}.$

Mà:  $\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{b^2}{4ac}.$

Do đó:  $\frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac} = \frac{b^2}{4ac} \Leftrightarrow b^2 - (a - c)^2 = b^2 \Leftrightarrow a - c = 0 \Leftrightarrow a = c \Rightarrow \triangle ABC$  cân.

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có:  $\frac{1 + \cos A}{\sin A} = \frac{2b + c}{\sqrt{4b^2 - c^2}}.$

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos A}{\sin A} &= \frac{2b + c}{\sqrt{4b^2 - c^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos A)^2}{\sin^2 A} &= \frac{(2b + c)^2}{4b^2 - c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} &= \frac{2b + c}{2b - c} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} &= \frac{2 \sin B + \sin C}{2 \sin B - \sin C} \\ \Leftrightarrow 2 \sin B + 2 \cos A \sin B - \sin C - \cos A \sin C &= 2 \sin B - 2 \sin B \cos A + \sin C - \sin C \cos A \\ \Leftrightarrow 4 \sin A \cos B - 2 \sin C &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(A + B) + \sin(A - C) &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin C + \sin(A - B) &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin(A - B) &= 0 \\ \Leftrightarrow A - B &= 0 \\ \Leftrightarrow A = B &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \end{aligned}$$

### Dạng 7. Nhận dạng tam giác đều.

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác. Ngoài ra đối với các bất đẳng thức đối xứng với ba góc  $A, B, C$  hoặc ba cạnh  $a, b, c$  đều xảy ra dấu bằng tại trạng thái  $A = B = C = 60^\circ$  hoặc  $a = b = c$  để chứng minh tam giác  $ABC$  đều.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có:

$$\begin{cases} \sin B \sin C = \frac{3}{4} \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  đều.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \\
 \Leftrightarrow a^2(a - b - c) &= a^3 - b^3 - c^3 \\
 \Leftrightarrow a^2(b + c) &= (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\
 \Leftrightarrow a^2 &= b^2 - bc + c^2 \\
 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 &= bc \\
 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
 \sin B \sin C &= \frac{3}{4} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos(B + C) &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) + \cos A &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) &= 1 \\
 \Rightarrow B - C = 0 &\Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\triangle ABC$  đều.

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$  có:  $\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} = 9$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  đều.

**Lời giải.** Theo định lý hàm số cos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \geq 2bc - 2bc \cos A = 4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{4bc}{a^2} \Rightarrow \cot^2 \frac{A}{2} \geq \frac{4bc}{a^2} - 1.$$

Chứng minh tương tự ta có:  $\cot^2 \frac{B}{2} \geq \frac{4ac}{b^2} - 1$ ;  $\cot^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4ab}{c^2} - 1$ .

$$\text{Do đó: } \cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4bc}{a^2} + \frac{4ac}{b^2} + \frac{4ab}{c^2} - 3 \geq 3\sqrt{\frac{4bc}{a^2} \cdot \frac{4ac}{b^2} \cdot \frac{4ab}{c^2}} - 3 = 9.$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow \triangle ABC$  đều.

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  có:

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \cos B + \cos C = 2 \cos A \end{cases}.$$

Chứng minh tam giác  $ABC$  đều.

**Lời giải.** Ta có:  $(\sin B + \sin C)^2 + (\cos B + \cos C)^2 = (2 \sin A)^2 + (2 \cos A)^2$   
 $\Leftrightarrow 2(\sin B \sin C + \cos B \cos C) + 2 = 4 \Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$

Khi đó:  $\begin{cases} B = C \\ 2 \cos B = 2 \cos A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ B = A \end{cases} \Rightarrow A = B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều.}$

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  có:

$$\frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  đều.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} &= \frac{a(2R \sin A) \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} \\ &= 2aR \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2aR \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= aR (\sin B + \sin C) = \frac{a(b+c)}{2} \end{aligned}$$

Tương tự và suy ra ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} &= \frac{a(b+c)}{2} + \frac{b(c+a)}{2} + \frac{c(a+b)}{2} = ab + bc + ca \\ &\leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c \Leftrightarrow \triangle ABC$  đều.

#### Dạng 8. Ứng dụng giải tam giác vào đo đạc

Sử dụng định lý sin và định lý cos để giải.

**Ví dụ 3.** Tính khoảng cách từ một điểm trên bờ sông đến một gốc cây trên một cù lao giữa sông.

**Lời giải.**

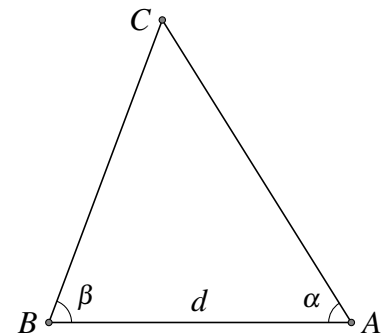
Để đo khoảng cách từ một điểm  $A$  trên bờ sông đến gốc cây  $C$  trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm  $B$  cùng ở trên bờ với  $A$  sao cho từ  $A$  và  $B$  có thể nhìn thấy điểm  $C$ . Ta đo khoảng cách  $AB = d$ , góc  $\widehat{CAB} = \alpha$  và  $\widehat{CBA} = \beta$ .

Khi đó, khoảng cách  $AC$  được tính như sau:

Áp dụng định lý sin vào tam giác  $ABC$ , ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



**Ví dụ 4.** Trong một buổi gặp nhau cuối tuần nghệ sĩ hài Xuân Bắc đặt ra một tình huống đối với giáo sư Cù Trọng Xoay như sau: “Một người có chiều cao từ chân đến mắt là  $l$ m. Với hai dụng cụ đo là thước dây và giác kế, người đó muốn đo chiều cao của một cái cây cao. Vậy làm thế nào để đo được chiều cao của cây”.

Nếu được ở vị trí của giáo sư Cù Trọng Xoay em làm cách nào để đo được chiều cao của cây? Hãy minh họa bằng một kết quả cụ thể.

**Lời giải.**

Chọn vị trí đứng là điểm  $C$ , gọi  $A$  là vị trí mắt người đó đứng tại  $C$ ,  $O$  là vị trí gốc cây,  $B$  là vị trí đỉnh cây.

Các yếu tố có thể đo được bằng thước dây và giác kế là  $\widehat{CAB}, \widehat{AOB}, CO$ .

Dùng thước dây đo độ dài  $CO = d$ , áp dụng vào tam giác  $AOC$  để tính  $AO$  và góc  $\widehat{AOC}$ .

Dùng giác kế đo được góc  $BAO$ , từ đó áp dụng định lý sin để tính  $BO$ .

Ta có:  $AO = \sqrt{AC^2 + CO^2} = \sqrt{l^2 + d^2}$  và  $\cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA}$ , suy ra được góc  $\widehat{AOC}$ .

Để thấy  $\beta = 90^\circ - \widehat{AOC}$ . Áp dụng định lý sin cho tam giác  $ABO$  ta có:

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin \widehat{ABO}} \Rightarrow OB = \frac{OA \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{l^2 + d^2} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

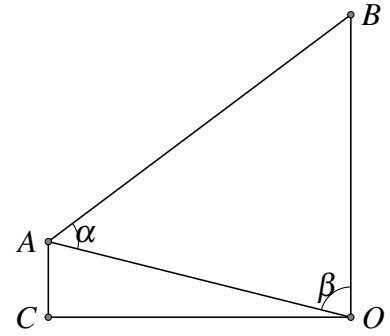
Giả sử người đó cao 1,6m, đứng cách cây 10m và nhìn ngọn cây và gốc cây một góc  $30^\circ$ .

$$\text{Ta có: } OA = \sqrt{1,6^2 + 10^2} = \frac{2\sqrt{641}}{5} \text{ và } \cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA} = \frac{50}{2\sqrt{641}} \Rightarrow$$

$$\widehat{AOC} \approx 9,1^\circ.$$

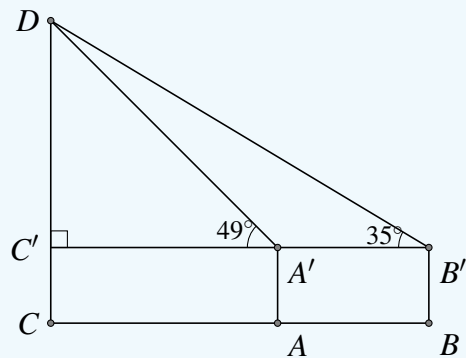
$$\text{Suy ra } \beta = 90 - 9,1 = 80,9^\circ.$$

$$\text{Khi đó chiều cao của cây là: } OB = \frac{\sqrt{1,6^2 + 10^2} \sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + 80,9^\circ)} \approx 5,42\text{m}$$



### Ví dụ 5.

Muốn đo chiều cao của tháp Chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm  $A, B$  trên mặt đất có khoảng cách  $AB = 12\text{m}$  cùng thẳng hàng với chân  $C$  của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao  $h = 1,3\text{m}$ . Gọi  $D$  là đỉnh tháp và hai điểm  $A', B'$  cùng thẳng hàng với điểm  $C'$  thuộc chiều cao  $CD$  của tháp. Người ta đo được góc  $\widehat{DA'C'} = 49^\circ$  và góc  $\widehat{DB'C'} = 35^\circ$ . Hãy tính chiều cao  $CD = C'D + C'C$  của tháp đó.



**Lời giải.** Ta có  $CC' = 1,3\text{m}$ .

Áp dụng định lý sin trong  $\triangle A'B'D$  ta được  $\frac{B'D}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D})} = \frac{A'B'}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D} - 35^\circ)} \Leftrightarrow \frac{B'D}{\sin 131^\circ} =$

$$\frac{12}{\sin 14^\circ} \Leftrightarrow B'D = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ}{\sin 14^\circ}.$$

$$\text{Xét } \triangle B'C'D \text{ có } C'D = B'D \cos 35^\circ = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 30,7\text{m}.$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

**Bài 3.** Bạn Tèo chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài và bạn ấy muốn đo bán kính của đường tròn lớn của tượng đài ở công viên Sông Ray (tâm của đường tròn lớn này bị che khuất bởi tượng cây đuốc). Bạn Tèo đang loay hoay không biết làm cách nào để đo được bán kính của đường tròn này. Hãy tìm cách giúp bạn Tèo hoàn thành công việc.

**Lời giải.**

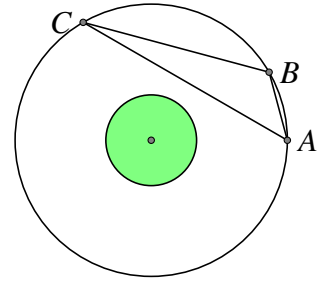
Lấy ba điểm  $A, B, C$  khác nhau thuộc đường tròn.

Đo độ dài các đoạn thẳng  $BC = a, AC = b, AB = c$ .

Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác  $ABC$ :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Suy ra bán kính của đường tròn là: } R = \frac{abc}{4S}.$$

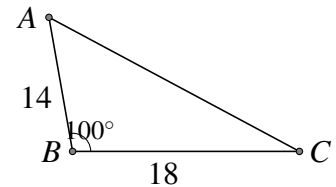


**Bài 4.** Một ô tô đi từ  $A$  đến  $C$  nhưng ở giữa  $A$  và  $C$  là một ngọn núi cao nên ô tô phải chạy thành hai đoạn đường từ  $A$  đến  $B$  và từ  $B$  đến  $C$ , các đoạn đường này tạo thành tam giác  $ABC$  có  $AB = 14\text{km}$ ,  $BC = 18\text{km}$  và góc  $\widehat{B} = 100^\circ$ , biết rằng cứ  $1\text{km}$  đường ô tô phải tốn  $0,1$  lít xăng.

- Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ  $A$  đến  $C$  mà phải qua  $B$ .
- Giả sử không có ngọn núi và có con đường thẳng từ  $A$  đến  $C$  thì ô tô chạy hết con đường này tốn bao nhiêu lít xăng?

**Lời giải.**

- Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ  $A$  đến  $C$  mà phải qua  $B$ .  
Tổng đoạn đường xe đi từ  $A$  đến  $C$  là  $AB + BC = 14 + 18 = 32\text{km}$ .  
Do đó số xăng mà xe tiêu thụ là  $32 \cdot 0,1 = 3,2\text{lit}$ .



- Áp dụng định lý côsin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC}) = 14^2 + 18^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos 100^\circ =$$

**Bài 5.** Người ta dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông tương đối rộng và chảy xiết. Trong một đợt khảo sát người ta muốn đo khoảng cách giữa hai điểm  $A$  và  $B$  ở hai bên bờ sông. Khó khăn là người ta không thể qua sông bằng bất kì phương tiện gì. Em hãy đặt mình vào vị trí của người khảo sát để giải quyết tình huống này. Biết rằng em có dụng cụ ngắm đo góc và thước dây.

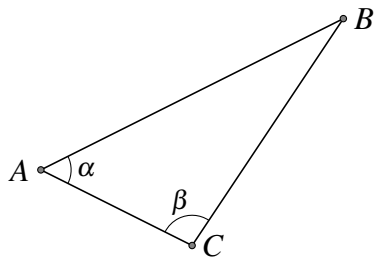
**Lời giải.**

Để tính được chiều dài đoạn  $AB$  ta sẽ tạo một tam giác mà có  $AB$  là một cạnh. Ta chọn một điểm  $C$  nằm trên bờ (có thể cùng phía với  $A$  hoặc với  $B$ ) và ta xem trong tam giác này ba yếu tố nào ta đo được bằng các dụng cụ đã có.

Giả sử điểm  $C$  nằm cùng bờ với điểm  $A$  như hình vẽ. Các yếu tố đo được là cạnh  $AC$  và hai góc  $\widehat{BAC} = \alpha$  và  $\widehat{ACB} = \beta$ .

Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ABC$ , ta có:

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} \Leftrightarrow AB = \frac{AC \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



**Bài 6.** Một cây cột điện cao  $20\text{m}$  được đóng trên một triền dốc thẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc  $17^\circ$ . Người ta nối một dây cáp từ đỉnh cột điện đến cuối dốc. Tìm chiều dài của dây cáp biết rằng đoạn đường từ đáy cột đến cuối dốc bằng  $72\text{m}$ .

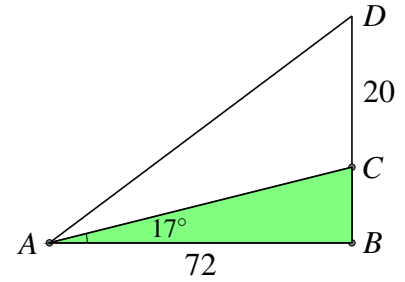
**Lời giải.**

Ta có  $\widehat{ACD} = 180^\circ - (90^\circ - 17^\circ) = 107^\circ$ .

Trong tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  có  $AC = \frac{AB}{\cos 17^\circ} \approx 75,3\text{m}$ .

Áp dụng định lý cos trong tam giác  $ACD$ , ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2.AC.CD.\cos\widehat{ACD} = 75,3^2 + 20^2 - 2.75,3.20.\cos 107^\circ \approx 6950,7 \Rightarrow AD \approx 83,4\text{m}.$$



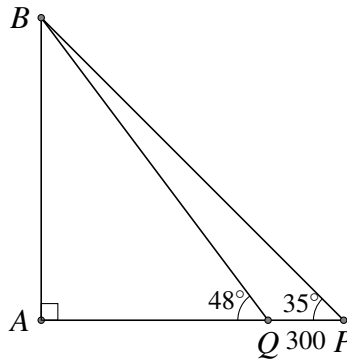
**Bài 7.** Hai chiếc tàu thủy  $P$  và  $Q$  cách nhau 300m. Từ  $P$  và  $Q$  thẳng hàng với chân  $A$  của tháp hải đăng  $AB$  ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao  $AB$  của tháp dưới các góc  $\widehat{BPA} = 35^\circ$ ,  $\widehat{BQA} = 48^\circ$ . Tính chiều cao của tháp.

**Lời giải.** Ta có:  $AQ = AB \cot 48^\circ$ .

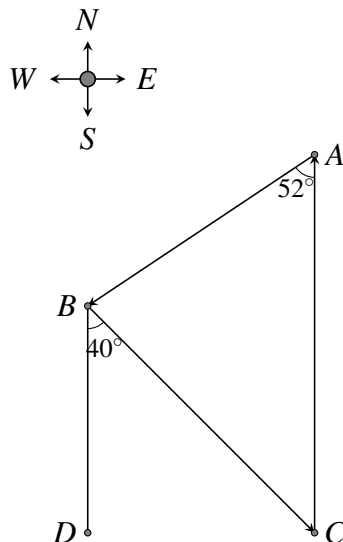
$$AP = AB \cot 35^\circ.$$

$$PQ = AP - AQ = AB(\cot 35^\circ - \cot 48^\circ)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{PQ}{\cot 35^\circ - \cot 48^\circ} \approx 568,5\text{m}.$$



**Bài 8.** Một cuộc đua thuyền xuất phát từ điểm  $A$  như hình vẽ bên và di chuyển theo hướng tây nam một góc  $52^\circ$  tới điểm  $B$ , sau đó di chuyển theo hướng đông nam  $40^\circ$  tới điểm  $C$ , cuối cùng quay trở lại điểm  $A$ . Điểm  $C$  cách điểm  $A$  một khoảng 8km. Tính gần đúng tổng khoảng cách của đường đua.



**Lời giải.** Vì đường thẳng  $BD$  và  $AC$  song song, suy ra  $\widehat{BCA} = \widehat{CBD} = 40^\circ$ . Do đó,  $\widehat{ABC} = 180^\circ - (52^\circ + 40^\circ) = 88^\circ$ .

Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ABC$ , ta được:  $\frac{a}{\sin 52^\circ} = \frac{b}{\sin 88^\circ} = \frac{c}{\sin 40^\circ}$ .

$$\text{Vì } b = 8 \text{ theo đề, nên: } a = \frac{8 \sin 52^\circ}{\sin 88^\circ} \approx 6,308\text{km và } c = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 88^\circ} \approx 5,145\text{km}.$$

Tổng khoảng cách của đường đua là:  $8 + 6,308 + 5,145 = 19,453\text{km}$ .

**Bài 9.** Hai lực  $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \alpha$ . Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực  $\vec{s}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\vec{AB} = \vec{f}_1, \vec{AD} = \vec{f}_2$  và vẽ hình bình hành  $ABCD$ .

Khi đó  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{s}$ .

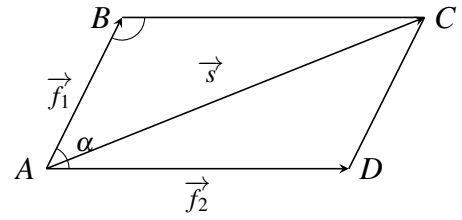
Vậy  $|\vec{s}| = |\vec{AC}| = |\vec{f}_1 + \vec{f}_2|$ .

Theo định lí côsin đối với tam giác  $ABC$ , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B, \text{ hay } |\vec{s}|^2 = |\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 -$$

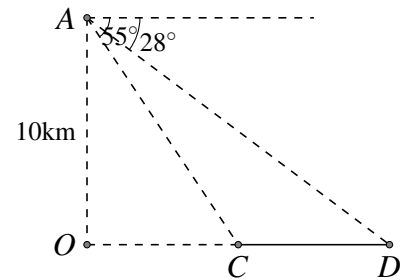
$$2 |\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos(180^\circ - \alpha).$$

$$\text{Do đó: } |\vec{s}| = \sqrt{|\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 + 2 |\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos \alpha}.$$



**Bài 10.**

Một hành khách ngồi trong một máy bay, bay ở độ cao 10km nhìn xuống hai thị trấn dưới mặt đất. Góc hợp bởi phương ngang và hai thị trấn lần lượt là  $28^\circ$  và  $55^\circ$  (hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai thị trấn.



**Lời giải.** Ta có  $\widehat{CAD} = 55^\circ - 28^\circ = 27^\circ$ .

Xét tam giác  $ACO$  có  $\widehat{OAC} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$  và  $\cos \widehat{OAC} = \frac{AO}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{10}{\cos 35^\circ} \approx 12,2\text{km}$ .

Trong tam giác  $ACD$  có  $\widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{OCA} = 125^\circ$  và  $\widehat{ADC} = 180^\circ - (125^\circ + 27^\circ) = 28^\circ$ .

Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ACD$ , ta có

$$\frac{CD}{\sin 27^\circ} = \frac{AC}{\sin 28^\circ} \Leftrightarrow CD = \frac{12,2 \sin 27^\circ}{\sin 28^\circ} \approx 11,79\text{km}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai thị trấn khoảng 11,9km.

## §5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

### I. Đề số 1a

**Bài 1.** Cho  $A(1, 5); B(4, -1); C(-4, -5)$ .

- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên đường thẳng  $BC$ .

**Lời giải.**

- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ . Ta có  $\vec{AB} = (3, -6); \vec{BC} = (-8, -4)$ , suy ra  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ , nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Vậy trực tâm  $H(x, y)$  là điểm  $B(4, -1)$ .  
..... 1,0 điểm
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  
Gọi  $I(x, y)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, do đó  $I$  là trung điểm của  $AC$ , có tọa độ  $I\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ .  
..... 1,0 điểm
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên đường thẳng  $BC$ .  
Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  nên hình chiếu của  $A$  lên  $BC$  là  $B(4, -1)$ .  
..... 1,0 điểm

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6, AC = 8; \hat{A} = 120^\circ$ .

- Tính diện tích tam giác  $ABC$ .
- Tính độ dài cạnh  $BC$  và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

- Tính diện tích tam giác  $ABC$ .  
Ta có  $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 12\sqrt{3}$  (đvdt) ..... 1,0 điểm
- Tính độ dài cạnh  $BC$  và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  
Áp dụng định lý cô sin ta có  
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{-1}{2} = 148$ , suy ra  $BC = 2\sqrt{37}$   
..... 0,5 điểm  
Ta có  $R = \frac{4S}{abc} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{37}}$   
..... 0,5 điểm

**Bài 3.** Tính giá trị của biểu thức sau  $P = \tan 6^\circ \cdot \tan 12^\circ \cdot \tan 18^\circ \dots \tan 78^\circ \cdot \tan 84^\circ$ .

**Lời giải.** Ta có  $\tan 6^\circ \cdot \tan 84^\circ = \tan 12^\circ \cdot \tan 78^\circ = \tan 18^\circ \cdot \tan 72^\circ = \dots = \tan 42^\circ \cdot \tan 48^\circ$ .

Suy ra  $P = 1$  ..... 1,0 điểm

**Bài 4.** Chứng minh rằng nếu  $m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$  thì  $a^2 = S \cdot \cot t$ , trong đó  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là các trung tuyến ứng với các cạnh  $a, b, c$  và  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Từ điều kiện bài toán ta có

$$b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2} + a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$$

Suy ra  $b^2 + c^2 = 5a^2$ .

..... 1,0 điểm

Theo định lí hàm cosin ta có  $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A$ . Do đó  $2a^2 = bc \cdot \cos A \Rightarrow \frac{2S}{\sin A} \cdot \cos A = 2a^2 \Rightarrow S \cdot \cot A = a^2$  ..... 1,0 điểm

**Bài 5.** Cho  $A(2, 6); B(-3, -4); C(5, 0)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-5, -10); \overrightarrow{AC} = (3, -6)$ , suy ra  $AB = 5\sqrt{5}; AC = 3\sqrt{5}$ ;

..... 0,5 điểm

Gọi tọa độ điểm  $D(x, y)$ . Ta có  $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$ , suy ra  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$

Do đó  $\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$ , ta được hệ phương trình ẩn  $x, y$ , giải hệ ta được tọa độ điểm  $D(2, -3)$ .

..... 0,5 điểm

Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  là  $J(x, y)$ .

Ta có độ dài đoạn  $BD = 5\sqrt{5}$ .

Khi đó  $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$  suy ra  $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{3}$ .

..... 0,5 điểm

Do đó  $\overrightarrow{JD} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{JA}$ , ta được hệ phương trình ẩn  $x, y$ , giải hệ ta được tọa độ điểm  $J(2, 1)$ .

..... 0,5 điểm

## II. Đề số 1b

**Bài 1.** Cho  $A(-5, 6); B(-4, -1); C(4, 3)$ .

- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên đường thẳng  $BC$

**Lời giải.**

- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

Gọi  $H(x, y)$ . Ta có  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  và  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ , suy ra  $2x + y = -4$  và  $x - 3y = -11$ , giải hệ phương trình ta được  $H(-3, 2)$ .

..... 1,0 điểm

- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$

Gọi  $I(x, y)$ . Khi đó  $IA = IB$  và  $IA = IC$ . Do đó, ta có

$$(x+5)^2 + (y-6)^2 = (x+4)^2 + (y+1)^2$$

$$(x+5)^2 + (y-6)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2$$

suy ra  $3x - y = 6$  và  $x - 7y = 22$ , giải hệ phương trình ta được  $I(\frac{-16}{5}, \frac{-18}{5})$ .

..... 1,0 điểm

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên đường thẳng  $BC$

Gọi  $M(x, y)$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên cạnh  $BC$ . Ta có  $\overrightarrow{AM} = (x+5, y-6)$  và  $\overrightarrow{BC} = (8, 4)$ ;  $\overrightarrow{BM} = (x+4, y+1)$

Khi đó ta có  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  và  $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC}$ .

Suy ra  $t = \frac{2}{7}$  và  $M(-2, 0)$

..... 1,0 điểm

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, AC = 4; \hat{A} = 60^\circ$ .

a) Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

b) Tính độ dài cạnh  $BC$  và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

a) Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

Ta có  $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$  (đvdt) ..... 1,0 điểm

b) Tính độ dài cạnh  $BC$  và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Áp dụng định lý cô sin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13, \text{ suy ra } BC = \sqrt{13}$$

..... 0,5 điểm

$$\text{Ta có } R = \frac{4S}{abc} = \frac{\sqrt{39}}{13}$$

..... 0,5 điểm

**Bài 3.** Biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$

**Lời giải.** Ta có  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{-3}{8}$ .

..... 0,5 điểm

Ta lại có  $P = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{49}{6}$  ..... 0,5 điểm

**Bài 4.** Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác  $ABC$  thỏa mãn điều kiện  $\sin B = 2 \sin A \cdot \cos C$ , thì tam giác đó cân.

**Lời giải.** Từ điều kiện bài toán, áp dụng định lý sin  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ , ta có

$$b = 2 \cdot a \cdot \cos C = 2a \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b}$$

Suy ra  $c^2 = 5a^2 \Rightarrow a = c$ .

..... 1,0 điểm

Theo định lý hàm cosin ta có  $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A$ . Do đó  $2a^2 = bc \cdot \cos A \Rightarrow \frac{2S}{\sin A} \cdot \cos A = 2a^2 \Rightarrow S \cdot \cot A = a^2$  ..... 1,0 điểm

**Bài 5.** Cho  $A(2, 5); B(-3, -5); C(5, -1)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-5, -10); \overrightarrow{AC} = (3, -6)$ , suy ra  $AB = 5\sqrt{5}; AC = 3\sqrt{5}$ ;

..... 0,5 điểm

Gọi tọa độ điểm  $D(x, y)$ . Ta có  $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$ , suy ra  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$

Do đó  $\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$ , ta được hệ phương trình ẩn  $x, y$ , giải hệ ta được tọa độ điểm  $D(2, -\frac{5}{2})$ .

..... 0,5 điểm  
Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  là  $J(x, y)$ .

Ta có độ dài đoạn  $BD = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ .

Khi đó  $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$  suy ra  $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$ .

..... 0,5 điểm  
Do đó  $\overrightarrow{JD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}$ , ta được hệ phương trình ẩn  $x, y$ , giải hệ ta được tọa độ điểm  $J(2, \frac{10}{3})$ .

..... 0,5 điểm

### III. Đề số 2a

**Bài 1.** (1,5 điểm) Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, BC = 4$ . Tính diện tích  $S$  của  $\Delta ABC$ ?

**Lời giải.**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow p-a = \frac{1}{2}, p-b = \frac{3}{2}, p-c = \frac{5}{2}$

Vậy  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ .

**Bài 2.** (1,5 điểm) Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, BC = 4$ . Tính đường cao  $h_a$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow p-a = \frac{1}{2}, p-b = \frac{3}{2}, p-c = \frac{5}{2}$

Vậy  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ . Ta có:  $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$ .

**Bài 3.** (1 điểm) Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, BC = 4$ . Tính bán kính  $R$  đường tròn ngoại tiếp tam giác.

**Lời giải.**

Ta có  $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{8\sqrt{15}}{5}$ .

**Bài 4.** (1 điểm) Tính giá trị của biểu thức  $A = 4\sin^4 135^\circ + \sqrt{3}\cos^3 150^\circ - 3\cot^2 120^\circ$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sin 135^\circ = \sin^4 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$\cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Vậy ta có  $A = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{9}{8}$ .

**Bài 5.** (3 điểm) Cho  $\Delta ABC$  biết  $A(1;2), B(-1;1), C(5;-1)$ .

a) Tìm tọa độ chân đường cao  $A_1$  hạ từ đỉnh  $A$  của  $\Delta ABC$ .

b) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của  $\Delta ABC$ .

**Lời giải.**

a) Gọi  $A_1(x; y)$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của  $\Delta ABC$ .

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA_1} \parallel \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA_1} \parallel \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2(y-2) = 0 \\ \frac{x+1}{6} = \frac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$ .

Vậy tọa độ  $A_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ .

b) Gọi  $H(x; y)$  là trực tâm của  $\Delta ABC$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ  $H(2; 5)$ .

**Bài 6.** (2 điểm) Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Có  $AC, BD$  là hai dây cung thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại  $E$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1).$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2.$$

#### IV. Đề số 2b

**Bài 1.** (1,5 điểm) Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = \sqrt{3} + 1, AC = 2, BC = \sqrt{6}$ . Tính góc  $A$  của  $\Delta ABC$ ?

**Lời giải.**

$$\text{Theo định lý cos trong tam giác ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^\circ.$$

**Bài 2.** (1,5 điểm) Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a, b, c$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1) ta được:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2).$$

**Bài 3.** (1 điểm) Tính tổng  $S = \cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 150^\circ + \cos 170^\circ$ .

**Lời giải.**

Ta viết lại  $S$  dưới dạng:

$$\begin{aligned} S &= (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + (\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) + (\cos 50^\circ + \cos 130^\circ) + (\cos 70^\circ + \cos 110^\circ) + \cos 90^\circ \\ &= (\cos 10^\circ - \cos 10^\circ) + (\cos 30^\circ - \cos 30^\circ) + (\cos 50^\circ - \cos 50^\circ) + (\cos 70^\circ - \cos 70^\circ) = 0. \end{aligned}$$

**Bài 4.** (1 điểm) Cho  $\Delta ABC$  biết  $AB = 2, BC = 3, CA = 4$  và đường cao  $AD$ . Tính độ dài đoạn  $CD$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Trong } \Delta ACD \text{ ta có: } CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \frac{7}{2}.$$

**Bài 5.** (2 điểm) Chứng minh rằng  $\left( \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} \right)^2 = 4 \tan^2 \alpha$ .

**Lời giải.**

Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\begin{aligned} VT &= \left[ \frac{(\sqrt{1-\cos \alpha})^2 - (\sqrt{1+\cos \alpha})^2}{\sqrt{(\sqrt{1+\cos \alpha})(\sqrt{1-\cos \alpha})}} \right]^2 = \left[ \frac{-2\cos \alpha}{\sqrt{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}} \right] = \left[ \frac{-2\cos \alpha}{|\sin \alpha|} \right] \\ &= \frac{4\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 4 \tan^2 \alpha \quad (\text{ĐPCM}). \end{aligned}$$

**Bài 6.** (3 điểm) Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $AC = b, BC = a$  và  $AB = c$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a, b, c$ .

b) Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ . Tính độ dài  $AM$  và  $AG$ .

c) Tính  $\cos$  góc tạo bởi  $AG$  và  $BC$  theo  $a, b, c$ .

**Lời giải.**

a) Ta có :  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$  (1).

Bình phương hai vế (1) ta được:

$$\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.\vec{AC}.\vec{AB}.$$

$$\text{Vậy ta có: } \vec{AC}.\vec{AB} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - a^2).$$

b) Theo đẳng thức vectơ về trung điểm ta có:  $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB})$ . (2)

Bình phương hai vế (2) ta được:

$$\begin{aligned} \vec{AM}^2 &= \frac{1}{4}(\vec{AC} + \vec{AB})^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + AB^2 + 2.\vec{AC}.\vec{AB}) \\ &= \frac{1}{4}\left[c^2 + b^2 + 2.\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)\right] = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} (*).$$

$$\text{Suy ra : } AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

c) Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi  $AG$  và  $BC$ .

$$\text{Khi đó } |\vec{AG}.\vec{BC}| = |\vec{AG}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{AG}.\vec{BC}|}{|\vec{AG}| \cdot |\vec{BC}|}. (3)$$

$$\text{Ta có } \vec{AG}.\vec{BC} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{3}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{3}(b^2 - c^2) (4).$$

$$\text{Thế (4) vào (3) ta được: } \cos \alpha = \frac{\frac{1}{3}|b^2 - c^2|}{\frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.a} = \frac{|b^2 - c^2|}{a\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}.$$

## V. Đề số 3a

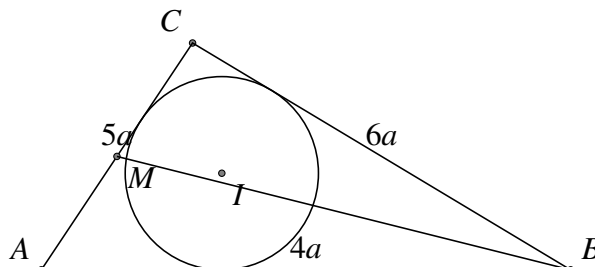
**Bài 1. (2,5đ)** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4a$ ,  $AC = 5a$ ,  $BC = 6a$ .

a) Tính  $\cos \hat{A}$ .

b) Tính độ dài đường trung tuyến hạ từ  $B$ .

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**



$$\text{a) } \cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{(4a)^2 + (5a)^2 - (6a)^2}{2.4a.5a} = \frac{1}{8}. \quad (0,25 \times 2)$$

b) Trung tuyến hạ từ đỉnh  $B$ :

$$m_b^2 = \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{2[(4a)^2 + (6a)^2] - (5a)^2}{4} = \frac{79a^2}{4} \quad (0,25 \times 2).$$

$$\Rightarrow m_b = \frac{a\sqrt{79}}{2}. \quad (0,25)$$

c) Nửa chu vi tam giác  $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{15a}{2}$ . (0,25)

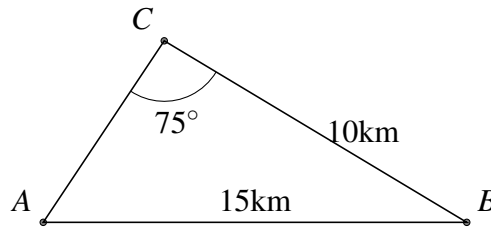
Diện tích tam giác  $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{15\sqrt{7}a^2}{4}$ . (0,25 × 2)

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ :

$$S = p \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{15\sqrt{7}a^2}{4}}{\frac{15a}{2}} = \frac{\sqrt{7}a}{2}. \quad (0,25 \times 2)$$

**Bài 2. (1đ)** Lắp một đường dây cao thế từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  phải tránh một ngọn núi, do đó người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí  $A$  đến vị trí  $C$  dài 15km rồi từ vị trí  $C$  nối thẳng đến vị trí  $B$  dài 10km. Góc tạo bởi hai đoạn dây  $AC$  và  $CB$  là  $75^\circ$ . Hỏi việc nối thẳng từ  $A$  đến  $B$  người ta đã tốn thêm bao nhiêu km dây?

**Lời giải.**



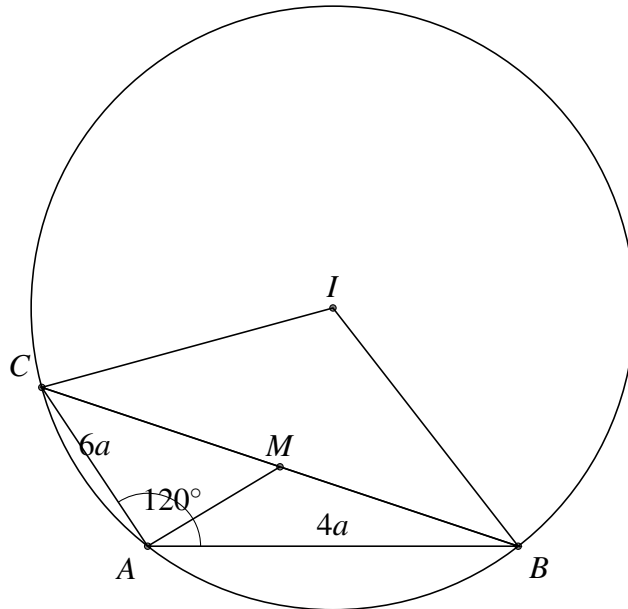
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 75^\circ \approx 247,4. \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow AB \approx 15,73 \text{ km}. \quad (0,25)$$

Như vậy so với việc nối thẳng từ  $A$  đến  $B$  người ta tốn thêm  $25 - 15,73 \approx 9,27$  km dây. (0,25)

**Bài 3. (2,5đ)** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4a$ ,  $AC = 6a$  và góc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ , đường trung tuyến  $AM$ , diện tích tam giác  $IBC$  ( $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ ).

**Lời giải.**



Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = (4a)^2 + (6a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 6a \cdot \cos 120^\circ = 76a^2. \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow BC = 2a\sqrt{19}. \quad (0,25)$$

Đường trung tuyến  $AM$ :

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{2((4a)^2 + (6a)^2) - 76a^2}{4} = 7a^2. \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow AM = a\sqrt{7}. \quad (0,25)$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ :

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{2a\sqrt{19}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{3} = IB. \quad (0,25 \times 2)$$

Diện tích tam giác  $IBC$  bằng:

$$S_{IBC} = \frac{1}{2}IB \cdot IC \cdot \sin \widehat{BIC} = \frac{1}{2}IB^2 \sin 120^\circ. \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow S_{IBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{76a^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19a^2\sqrt{3}}{3}. \quad (0,25)$$

**Bài 4. (2đ)** Tính góc  $A$  của  $\Delta ABC$  biết  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ .

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} b(b^2 - a^2) &= c(a^2 - c^2) \\ \Leftrightarrow b(b^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos A) &= c(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A - c^2) \quad (0,25 \times 2) \\ \Leftrightarrow -bc^2 + 2b^2c \cdot \cos A &= cb^2 - 2bc^2 \cdot \cos A \\ \Leftrightarrow bc^2(2\cos A - 1) + cb^2(2\cos A - 1) &= 0 \quad (0,25 \times 2) \\ \Leftrightarrow (2\cos A - 1)(bc^2 + cb^2) &= 0 \quad (0,25) \\ \Leftrightarrow (2\cos A - 1) &= 0 \quad (0,25) \quad (\text{Do } bc^2 + cb^2 > 0) \\ \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} &= 60^\circ \quad (0,25 \times 2) \end{aligned}$$

**Bài 5. (2đ)** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\frac{\sin A}{m_a} = \frac{\sin B}{m_b} = \frac{\sin C}{m_c}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  đều.

**Lời giải.** Xét  $\frac{\sin A}{m_a} = \frac{\sin B}{m_b}$ .

Ta có  $\sin A = \frac{a}{2R}$  và  $\sin B = \frac{b}{2R}$ .

$$\Rightarrow \frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} \Rightarrow m_a = \frac{a \cdot m_b}{b}. \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow m_a^2 = \left( \frac{a \cdot m_b}{b} \right)^2.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} &= \frac{a^2 \cdot m_b^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} &= \frac{a^2(2(a^2 + c^2) - b^2)}{4b^2} \quad (0,25 \times 2) \\ \Leftrightarrow 2b^2(b^2 + c^2) - a^2b^2 &= 2a^2(a^2 + c^2) - a^2b^2 \\ \Leftrightarrow 4b^4 - 4a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - a^2)[2(b^2 + c^2) + c^2] &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - c^2 &= 0 \quad (0,25) \\ \Leftrightarrow b &= c. \quad (0,25) \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự với  $\frac{\sin B}{m_b} = \frac{\sin C}{m_c}$   $(0,25)$ .

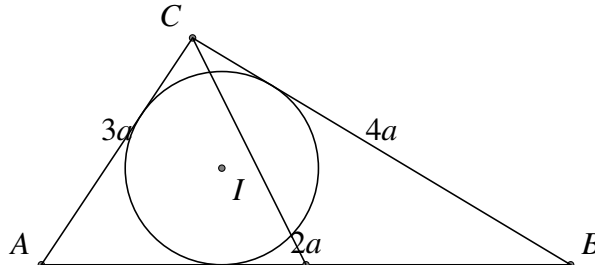
Ta được  $a = b = c$  suy ra tam giác  $ABC$  đều.  $(0,25)$

## VI. Đề số 3b

**Bài 1. (2,5đ)** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a$ ,  $AC = 3a$ ,  $BC = 4a$ .

- Tính  $\cos \hat{A}$
- Tính độ dài đường trung tuyến hạ từ  $C$ .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**



$$\text{a) } \cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(2a)^2 + (3a)^2 - (4a)^2}{2 \cdot 2a \cdot 3a} = -\frac{1}{4} \quad (0,25 \times 2)$$

b) Trung tuyến hạ từ đỉnh  $C$ :

$$m_c^2 = \frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4} = \frac{2[(3a)^2 + (4a)^2] - (2a)^2}{4} = \frac{23a^2}{4} \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow m_c = \frac{a\sqrt{23}}{2} \quad (0,25)$$

$$\text{c) } \text{Nửa chu vi tam giác } p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{9a}{2} \quad (0,25)$$

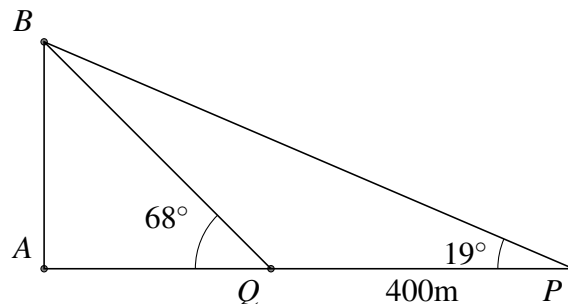
$$\text{Diện tích tam giác } S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{3\sqrt{15}a^2}{4} \quad (0,25 \times 2)$$

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ :

$$S = p \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{3\sqrt{15}a^2}{4}}{\frac{9a}{2}} = \frac{\sqrt{15}a}{6} \quad (0,25 \times 2)$$

**Bài 2. (1đ)** Hai chiếc tàu thủy  $P$  và  $Q$  cách nhau 400m đồng thời thẳng hàng với chân  $A$  của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ  $P$  và  $Q$ , người ta nhìn chiều cao  $AB$  của tháp dưới các góc  $\widehat{BPA} = 19^\circ$  và  $\widehat{BQA} = 68^\circ$ . Tính chiều cao  $AB$  của tháp hải đăng?

**Lời giải.**



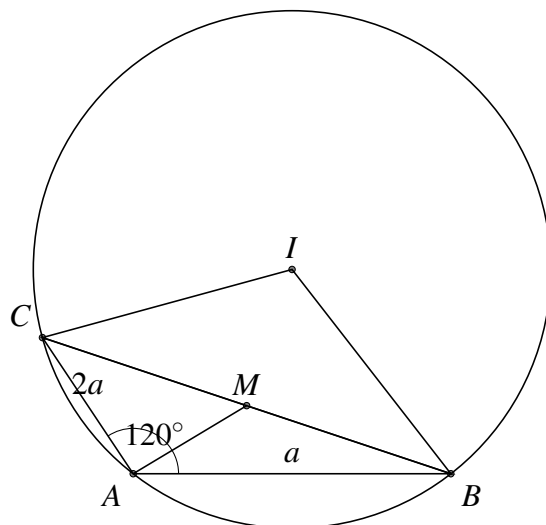
$$\text{Ta có: } AP = AB \cot 19^\circ \quad (0,25);$$

$$AQ = AB \cot 68^\circ \quad (0,25) \text{ mà } AP - AQ = PQ = 400\text{m}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{400}{\cot 19^\circ - \cot 68^\circ} \approx 90,68\text{m.} \quad (0,5)$$

**Bài 3. (2đ)** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = a$ ,  $AC = 2a$  và góc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ , đường trung tuyến  $AM$ , diện tích tam giác  $IBC$  ( $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ )

**Lời giải.**



Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = (a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = 7a.$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{7} \quad (0,25 \times 2)$$

Đường trung tuyến  $AM$ :

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{2((a)^2 + (2a)^2) - 7}{4} = \frac{3a^2}{4} \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (0,25)$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ :

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a\sqrt{7}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{21}}{3} = IB \quad (0,25)$$

Diện tích tam giác  $IBC$  bằng:

$$S_{IBC} = \frac{1}{2} IB \cdot IC \cdot \sin \widehat{BIC} = \frac{1}{2} IB^2 \sin 120^\circ \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow S_{IBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{21}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{7}}{4} \quad (0,25)$$

**Bài 4. (2đ)** Tính góc  $A$  của  $\Delta ABC$  biết  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$ .

**Lời giải.** Ta có:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+b+c}{(a+b)(a+c)} = \frac{3}{a+b+c} \quad (0,25)$$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(a+b+c) = 3(a+b)(a+c) \quad (0,25)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 3ab + 3ac + 2bc + b^2 + c^2 = 3a^2 + 3ab + 3bc + 3ac \quad (0,25)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ. \quad (0,25)$$

**Bài 5. (2đ)** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\begin{cases} \frac{1+\cos C}{1-\cos C} = \frac{2b+a}{2b-a} \\ \frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \end{cases}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  đều.

**Lời giải.** Xét  $\frac{1+\cos C}{1-\cos C} = \frac{2b+a}{2b-a}$

Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1+\cos C}{1-\cos C} \\ &= \frac{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} = \frac{(a+b)^2-c^2}{c^2+(a-b)^2} \quad (0,25) \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2-c^2}{c^2-(a-b)^2} &= \frac{2b+a}{2b-a} \\ \Leftrightarrow ((a+b)^2-c^2)(2b-a) &= (2b+a)(c^2+(a-b)^2) \\ \Leftrightarrow 2b(a+b)^2+2b(a-b)^2-4bc^2-a(a+b)^2+a(a-b)^2 &= 0 \quad (0,25) \\ \Leftrightarrow 2b[(a+b)^2+(a-b)^2]-4bc^2-a[(a+b)^2-(a-b)^2] &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2b+4b^3-4bc^2-4a^2b &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2-a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2=c^2 \Rightarrow b=c &\quad (0,25) \end{aligned}$$

Xét  $\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} &= a^2 \\ \Leftrightarrow b^3-c^3-a^3 &= a^2(b+c-a) \\ \Leftrightarrow b^3-c^3 &= a^2b+a^2c \\ \Leftrightarrow b^3-c^3 &= (b^2+c^2-2bc\cos A)b+(b^2+c^2-2bc\cos A)c \quad (0,25 \times 2) \\ \Leftrightarrow c^2b-2b^2c\cos A+b^2c-2bc^2\cos A &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-2\cos A)(b^2c+bc^2) &= 0 \quad (0,25) \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow A &= 60^\circ \quad (0,25) \end{aligned}$$

Do đó, tam giác  $ABC$  có 2 cạnh kề bằng nhau và 1 góc bằng  $60^\circ$  suy ra tam giác  $ABC$  đều. (0,25)

## Chương 3

# TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

### §1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT VÀ PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

#### I. Tóm tắt lý thuyết

##### 1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

**Định nghĩa 1.** Véc-tơ  $\vec{u}$  gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  nếu  $\vec{u} \neq \vec{0}$  và giá của  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với  $\Delta$ .

##### 2. Phương trình tham số của đường thẳng

**Định nghĩa 2.** Cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M_0(x_0; y_0)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$ . Phương trình tham số của  $\Delta$ :  $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (1) \quad (t \text{ là tham số}).$

 **Nhận xét:**  $M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

##### 3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

**Định nghĩa 3.** Cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M_0(x_0; y_0)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$ , trong đó  $u_1$  và  $u_2 \neq 0$ . Phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$  là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

##### 4. Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng

**Định nghĩa 4.** Véc-tơ  $\vec{n}$  gọi là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng  $\Delta$  nếu  $\vec{n} \neq \vec{0}$  và giá của  $\vec{n}$  vuông góc với  $\Delta$ .

##### 5. Phương trình tổng quát của đường thẳng

**Định nghĩa 5.** Phương trình  $Ax + By + C = 0$  (với  $A^2 + B^2 \neq 0$ ) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

 **Nhận xét:**

- Nếu đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $Ax + By = C$  thì đường thẳng  $\Delta$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B)$ , véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (B; -A)$  hoặc  $\vec{u}' = (-B; A)$ .

- Nếu đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M(x_0; y_0)$  và có một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B)$  thì phương trình đường thẳng  $\Delta: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ .
- Đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(a; 0), B(0; b)$  (với  $a, b \neq 0$ ) thì phương trình đường thẳng  $\Delta$  có dạng:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ . Đây gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.
- Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  và có hệ số góc  $k$  thì phương trình đường thẳng  $\Delta$  là:  $y - y_0 = k(x - x_0)$ . Đây là phương trình đường thẳng theo hệ số góc.
- Nếu đường thẳng  $\Delta$  có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  thì nó có hệ số góc là  $k = \frac{u_2}{u_1}$ . Ngược lại, nếu đường thẳng  $\Delta$  có hệ số góc  $k = \frac{a}{b}$  thì một véc-tơ chỉ phương của nó là  $\vec{u} = (1; k)$ .

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng

Để lập phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  ta cần xác định một điểm  $M(x_0; y_0) \in \Delta$  và một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$ .

Vậy phương trình tham số đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

**Ví dụ 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tham số đường thẳng  $\Delta$  biết  $\Delta$  đi qua  $M(1; 2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (-1; 3)$ .

**Lời giải.** Phương trình tham số đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ .

**Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường thẳng  $d$  đi qua  $A(1; 2), B(3; 1)$ . Viết phương trình tham số đường thẳng  $d$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $d$  qua  $A(1; 2)$  và nhận  $\vec{AB} = (2; -1)$  làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy phương trình tham số đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$ .

**Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường thẳng  $d$  đi qua  $M(-2; 3)$  và song song với đường thẳng  $EF$ . Biết  $E(0; -1), F(-3; 0)$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$ .

**Lời giải.**  $\vec{EF} = (-3; 1)$ .

Phương trình tham số đường thẳng  $d: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$ .

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $A(3; -4), B(0; 6)$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng  $AB$ .

**Lời giải.** Ta có:  $\vec{AB} = (-3; 10)$ .

Đường thẳng  $(AB)$  qua  $A(3; -4)$  và nhận  $\vec{AB} = (-3; 10)$  làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy phương trình đường thẳng  $(AB): \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$ .

**Bài 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(1; -4)$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (5; 1)$ .

**Lời giải.** Phương trình đường thẳng  $(d)$ :  $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -4 + t \end{cases}$ .

**Bài 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1; -1)$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (0; 1)$ .

**Lời giải.** Phương trình đường thẳng  $(d)$ :  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \end{cases}$ .

**Bài 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tham số đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(0; -4)$  và song song với đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 2017 + 2t \\ y = 2018 - t \end{cases}$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $\Delta$ : có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; -1)$ .

Vì đường thẳng  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta$  nên  $d$  nhận  $\vec{u} = (2; -1)$  làm véc-tơ chỉ phương.

Lại có  $d$  đi qua điểm  $A(0; -4)$  nên phương trình tham số đường thẳng  $d$ :  $\begin{cases} x = 2m \\ y = -4 - m \end{cases}$

## Dạng 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  ta cần xác định một điểm  $M(x_0; y_0) \in \Delta$  và một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B)$ .

Vậy phương trình đường thẳng  $\Delta$ :  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ .

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng  $\Delta$ :  $Ax + By = C$  với  $C = -(Ax_0 + By_0)$ .

**Ví dụ 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tổng quát đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(-1; 5)$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (-2; 3)$ .

**Lời giải.** Phương trình đường thẳng  $\Delta$ :  $-2(x + 1) + 3(y - 5) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y - 17 = 0$ .

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng  $\Delta$ :  $-2x + 3y - 17 = 0$ .

**Ví dụ 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tổng quát đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $N(2; 3)$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$  với  $A(1; 3)$ ,  $B(2; 1)$ .

**Lời giải.** Ta có:  $\vec{AB} = (1; -2)$ .

Đường thẳng  $\Delta$  qua  $N(2; 3)$  và nhận  $\vec{AB} = (1; -2)$  làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng  $\Delta$ :  $(x - 2) - 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$ .

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng  $\Delta$ :  $x - 2y + 4 = 0$ .

**Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  đi qua  $A(-1; 2)$  và vuông góc với đường thẳng  $\Delta$ :  $2x - y + 4 = 0$ .

**Lời giải.**

**Cách 1:**

Phương trình đường thẳng  $d$  có dạng:  $x + 2y + C = 0$ .

Vì  $d$  đi qua  $A(-1; 2)$  nên ta có phương trình:  $-1 + 2 \cdot 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3$ . Vậy phương trình tổng quát đường thẳng của đường thẳng  $d$ :  $x + 2y - 3 = 0$ .

**Cách 2:**

Đường thẳng  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 2)$ .

Vì  $d$  vuông góc với  $\Delta$  nên  $d$  nhận  $\vec{u} = (1; 2)$  làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng  $d$ :  $(x + 1) + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$ .

**Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+t \end{cases}$  và  $\Delta': \begin{cases} x = -2-t' \\ y = t' \end{cases}$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đối xứng với  $\Delta'$  qua  $\Delta$ .

A.  $d: \begin{cases} x = l \\ y = 22 - 7l \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = 22 - 7l \\ y = l \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = -6 + 3l \\ y = 4 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = -6 + 7l \\ y = 4 + l \end{cases}$ .

**Lời giải.** Chọn đáp án (B)

Gọi  $M = \Delta \cap \Delta' \Rightarrow M(-6; 4)$

Có  $A(-2; 0) \in \Delta'$  khác  $M$ .

Tìm tọa độ hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$  là  $H\left(-\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$ .

Tọa độ điểm đối xứng của  $A$  qua  $\Delta$  là  $A'\left(-\frac{2}{5}; \frac{16}{5}\right)$ .

Vậy đường thẳng cần tìm là  $\begin{cases} x = 22 - 7l \\ y = l \end{cases}$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 5.** Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số:  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$ .

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$ .

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $l$  đi qua điểm  $N(4; 2)$  và vuông góc với  $\Delta$ .

**Lời giải.** a) Đường thẳng  $\Delta$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (2; -1)$  nên có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; 2)$ .

Chọn tham số  $t = 0$  ta có ngay điểm  $A(1; -3)$  nằm trên  $\Delta$ .

Phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  là:

1.  $(x - 1) + 2 \cdot [y - (-3)] = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$

b) Đường thẳng  $l$  vuông góc với  $\Delta$  nên có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}_l = (2; -1)$ . Phương trình tổng quát của đường thẳng  $l$  là:  $2(x - 4) - 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 6 = 0$

**Bài 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$  có hệ số góc bằng  $-3$  và  $A(1; 2)$  nằm trên  $d$ . Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $d$  có hệ số góc bằng  $-3$  nên có vectơ pháp tuyến là  $(3; 1)$ .

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(1; 2)$  và có vectơ pháp tuyến là  $(3; 1)$  nên có phương trình tổng quát là:

$3(x - 1) + 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0$

**Bài 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  đi qua  $A(2; -5)$  và nó tạo với trục  $Ox$  một góc  $60^\circ$ .

**Lời giải.** Hệ số góc của đường thẳng  $d$  là  $k = \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Phương trình đường thẳng  $d$  là:  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) - 5 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 15 - 2\sqrt{3} = 0$

**Bài 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: y = 2x + 1$ , viết phương trình đường thẳng  $d'$  đi qua điểm  $B$  là điểm đối xứng của điểm  $A(0; -5)$  qua đường thẳng  $d$  và song song với đường thẳng  $y = -3x + 2$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $AB$  vuông góc với đường thẳng  $d$  nên ta có:  $k_{AB} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow k_{AB} = -\frac{1}{2}$ .

Phương trình đường thẳng  $AB$  là:  $y = -\frac{1}{2}(x - 0) - 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 5$ .

Vì  $A$  và  $B$  đối xứng nhau qua đường thẳng  $d$  nên trung điểm  $N$  của chúng sẽ là giao điểm của hai đường thẳng  $d$  và  $AB$ .

Suy ra tọa độ của điểm  $N$  là nghiệm của hệ phương trình:  $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x - 5 \end{cases} \Rightarrow N\left(-\frac{12}{5}; -\frac{19}{5}\right)$ . Từ đó ta tính

được  $A\left(-\frac{24}{5}; -\frac{13}{5}\right)$ . Đường thẳng  $d'$  song song với đường thẳng  $y = -3x + 2$  nên  $k_{d'} = -3$ .

Phương trình đường thẳng  $d'$  là:  $y = -3\left(x + \frac{24}{5}\right) - \frac{13}{5} \Leftrightarrow y = -3x - 17$

**Bài 9.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 2x - 3y + 1 = 0$  và điểm  $A(-1; 3)$ . Viết phương trình đường thẳng  $d'$  đi qua  $A$  và cách điểm  $B(2; 5)$  khoảng cách bằng 3.

**Lời giải.** Phương trình  $d'$  có dạng:  $ax + by + c = 0$ . Do  $A \in d'$  nên:  $(-1)a + 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = a - 3b$  (1).

Hơn nữa  $d(B, d') = 3 \Leftrightarrow \frac{|2a + 5b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3$  (2).

Thay (1) vào (2) ta có:  $\frac{|3a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow 5b^2 - 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{12a}{5} \end{cases}$

Với  $b = 0$  thay vào (1) ta có  $c = a \Rightarrow d': ax + a = 0 \Leftrightarrow d': x + 1 = 0$

Với  $b = \frac{12a}{5}$  ta chọn  $a = 5, b = 12$  thay vào (1) ta được:  $c = 5 - 3 \cdot 12 = -31 \Rightarrow d': 5x + 12y - 31 = 0$

**Bài 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $M(2; 5)$  và cách đều  $A(-1; 2)$  và  $B(5; 4)$ .

**Lời giải.** Gọi phương trình đường thẳng  $d$  cần tìm là  $ax + by + c = 0$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ) (1).

Do  $M(2; 5) \in d$  nên ta có:  $2a + 5b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - 5b$ . Thay  $c = -2a - 5b$  vào (1) ta có phương trình đường thẳng  $d$  trở thành:  $ax + by - 2a - 5b = 0$  (2).

Vì  $d$  cách đều hai điểm  $A$  và  $B$  nên:

$$\frac{|(-1)a + 2b - 2a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5a + 4b - 2a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow |3a + 3b| = |3a - b| \Leftrightarrow 9a^2 + 18ab + 9b^2 = 9a^2 - 6ab +$$

$$b^2 \Leftrightarrow 8b^2 + 24ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -3a \end{cases}$$

Trường hợp 1: Với  $b = 0$  thay vào (2) ta được phương trình đường thẳng  $d$  là:

$$ax + 0y - 2a - 5 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow ax - 2a = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$$

Trường hợp 2: Với  $b = -3a$  ta chọn  $a = 1, b = -3$  thay vào (2) ta được phương trình đường thẳng  $d$  là:

$$1x - 3y - 2 - 5 \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 13 = 0$$

### Dạng 3. Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng

Cho các đường thẳng  $\Delta: Ax + By + C = 0$  và  $\Delta': A'x + B'y + C' = 0$ . Khi đó ta có  $\vec{n} = (A, B)$  và  $\vec{n'} = (A', B')$  lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$  và  $\Delta'$ .

a) Để xét vị trí tương đối của  $\Delta$  và  $\Delta'$  trước hết ta dựa vào các véc-tơ  $\vec{n}$  và  $\vec{n'}$ . Nếu các véc-tơ  $\vec{n}$  và  $\vec{n'}$  không cộng tuyến thì  $\Delta$  và  $\Delta'$  cắt nhau. Nếu véc-tơ  $\vec{n}$  và  $\vec{n'}$  cộng tuyến, nghĩa là  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$  thì  $\Delta$  và  $\Delta'$  là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. Cụ thể ta có:

$\Delta$  cắt  $\Delta'$  khi và chỉ khi  $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ , hơn nữa nếu  $AA' + BB' = 0$  thì  $\Delta \perp \Delta'$ .

$\Delta \equiv \Delta'$  khi và chỉ khi  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ .

$\Delta \parallel \Delta'$  khi và chỉ khi  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ .

b) Nếu  $\Delta$  cắt  $\Delta'$  và gọi  $\varphi$  là góc giữa các đường thẳng  $\Delta, \Delta'$  thì  $\cos \varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n'})|$

Chú ý rằng việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng cũng được xét qua số điểm chung của  $\Delta$  và  $\Delta'$ . Việc xét vị trí tương đối và tính góc giữa hai đường thẳng cắt nhau cũng được thực hiện qua các véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$  và  $\Delta'$ .

**Ví dụ 8.** Cho ba đường thẳng:  $d_1 : 2x + y - 1 = 0$ ,  $d_2 : x + 2y + 1 = 0$ ,  $d_3 : mx - y - 7 = 0$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $d_1, d_2$  cắt nhau và tìm giá trị của tham số  $m$  để ba đường thẳng trên đồng quy.

**Lời giải.** Ta có  $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ .

Từ đó suy ra  $d_1, d_2$  cắt nhau tại điểm  $A(1; -1)$ .

Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi  $d_3$  cũng đi qua điểm  $A$ , hay  $A \in d_3$ , suy ra

$$m \cdot 1 - (-1) - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

**Ví dụ 9.** Cho các đường thẳng  $\Delta : 2x + 3y - 5 = 0$ ,  $\Delta' : 3x - 2y - 1 = 0$  và điểm  $M(2; 3)$ .

a) Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$ .

b) Biết  $d$  là đường thẳng đi qua điểm  $M$  và tạo với các đường thẳng  $\Delta, \Delta'$  một tam giác cân. Tính góc giữa các đường thẳng  $\Delta$  và  $d$ .

**Lời giải.** a) Ta có  $\vec{n} = (2, 3)$  và  $\vec{n'} = (3, -2)$  là các véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$  và  $\Delta'$ .

Ta thấy  $\vec{n}$  và  $\vec{n'}$  không cùng phương vì  $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-2}$ , từ đó suy ra  $\Delta$  và  $\Delta'$  là các đường thẳng cắt nhau.

b) Ta có  $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0$ , do đó  $\Delta$  và  $\Delta'$  là các đường thẳng vuông góc với nhau.

Gọi  $A = \Delta \cap \Delta'$ ,  $B = \Delta \cap d$ ,  $C = d \cap \Delta'$ . Khi đó tam giác  $ABC$  là vuông tại  $A$  do đó nếu tam giác  $ABC$  cân thì  $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\pi}{4}$ .

Từ đó suy ra góc giữa các đường thẳng  $\Delta$  và  $d$  bằng  $\frac{\pi}{4}$ .

**Ví dụ 10.** Cho hai đường thẳng  $\Delta : (m + 3)x + 3y - 2m + 3 = 0$  và  $\Delta' : 2x + 2y + 2 - 3m = 0$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để

a) Đường thẳng  $\Delta$  song song với  $\Delta'$ .

b) Đường thẳng  $\Delta$  cắt đường thẳng  $\Delta'$ .

**Lời giải.** a)  $\Delta$  cắt  $\Delta'$  khi và chỉ khi  $\frac{m+3}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \neq 0$ .

b) Theo câu a), để  $\Delta$  song song với  $\Delta'$  thì trước hết ta phải có  $m = 0$ .

Với  $m = 0$ , khi đó dễ dàng nhận thấy  $\Delta \equiv \Delta'$ .

Vậy không tồn tại  $m$  để  $\Delta \parallel \Delta'$ .

Chú ý: Ta có thể làm theo cách sau:  $\Delta$  song song với  $\Delta'$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{m+3}{2} = \frac{3}{2} \neq \frac{-2m+3}{2-3m} \\ 2-3m \neq 0 \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm, do đó không tồn tại  $m$  để  $\Delta \parallel \Delta'$ .

**Ví dụ 11.** Tìm các giá trị của  $k$  để góc giữa các đường thẳng  $\Delta : kx - y + 1 = 0$  và  $\Delta' : x - y = 0$  bằng  $60^\circ$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{n} = (k; 1)$  và  $\vec{n'} = (1; -1)$  là véc-tơ pháp tuyến của các đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$ .

Theo bài ra ta có  $\cos 60^\circ = |\cos(\vec{n}, \vec{n'})| \Leftrightarrow \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(k+1)^2 = k^2 + 1$ . Giải phương trình trên

ta được  $\begin{cases} k = -2 + \sqrt{3} \\ k = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$ .

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 11.** Tìm  $m$  sao cho hai đường thẳng  $\Delta: x + 5my - 4 = 0$  và  $\Delta': 2x + 3y - 2 = 0$  song song với nhau.

**Lời giải.**  $\Delta \parallel \Delta' \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{5m}{3} \Leftrightarrow m = \frac{3}{10}$ .

**Bài 12.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho 3 đường thẳng  $d_1: 2x + y - 4 = 0$ ,  $d_2: 5x - 2y + 3 = 0$ ,  $d_3: mx + 3y - 2 = 0$ . a) Xét vị trí tương đối giữa  $d_1$  và  $d_2$ .

b) Tìm giá trị của tham số  $m$  để 3 đường thẳng trên đồng quy.

**Lời giải.** a) Nhận thấy  $\frac{2}{5} \neq \frac{1}{-2}$ , từ đó suy ra các đường thẳng  $d_1, d_2$  cắt nhau.

b) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 5x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{26}{9} \end{cases}.$$

Vậy  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau tại điểm  $M\left(\frac{5}{9}; \frac{26}{9}\right)$ .

Vì  $d_1, d_2, d_3$  đồng quy nên  $M \in d_3$ , ta có:  $m \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{26}{9} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -12$

**Bài 13.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho các đường thẳng  $\Delta_1: x + 2y - \sqrt{2} = 0$  và  $\Delta_2: x - y = 0$ . Tính cosin của góc giữa các đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{n} = (1; 2)$  và  $\vec{n}' = (1; -1)$  là véc-tơ pháp tuyến của các đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa các đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$ . Khi đó

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

**Bài 14.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho các đường thẳng  $\Delta: 3x + 5y + 15 = 0$  và  $\Delta': \begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$ .

Tính góc  $\varphi$  giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

**Lời giải.** Ta có  $\vec{n} = (3; 5)$  là một véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$ .

$\vec{u}' = (-3; 5)$  là một véc-tơ chỉ phương của  $\Delta'$ , suy ra  $\Delta'$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}' = (5; 3)$ .

Do  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Rightarrow \Delta \perp \Delta'$ .

**Bài 15.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho 2 đường thẳng  $\Delta: x + 2y - 5 = 0$ ,  $\Delta': 3x + my - 1 = 0$ . Tìm  $m$  để góc giữa hai đường thẳng  $\Delta, \Delta'$  bằng  $45^\circ$ .

**Lời giải.**  $\Delta: x + 2y - 5 = 0$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1; 2)$ ,

$\Delta': 3x + my - 1 = 0$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}' = (3; m)$ .

Theo bài ra ta có:  $\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|3 + 2m|}{\sqrt{5}\sqrt{3^2 + m^2}}$ .

Từ đó suy ra  $\begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}$

## Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm  $M(x_0; y_0)$  và đường thẳng  $\Delta: Ax + By + C = 0$ . Khi đó, khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $\Delta$  được tính theo công thức

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Ví dụ 12.** Tìm khoảng cách từ điểm  $M(1;2)$  đến đường thẳng  $(D): 4x + 3y - 2 = 0$ .

**Lời giải.** Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có

$$d(M, D) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{5}.$$

**Ví dụ 13.** Tìm những điểm nằm trên đường thẳng  $\Delta: 2x + y - 1 = 0$  và có khoảng cách đến  $(D): 4x + 3y - 10 = 0$  bằng 2.

**Lời giải.** Giả sử có điểm  $M \in \Delta$ , khi đó  $M(m; 1 - 2m)$ .

$$\text{Theo đề } d(M, \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|4m + 3(1 - 2m) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |-2m - 7| = 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 7 = 10 \\ 2m + 7 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{17}{2} \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn điều kiện là  $M_1\left(\frac{3}{2}; -2\right)$  và  $M_2\left(-\frac{17}{2}; 18\right)$ .

**Ví dụ 14.** Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm  $A(1, -3)$  và có khoảng cách đến điểm  $M_0(2, 4)$  bằng 1.

**Lời giải.** Giả sử đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A(1; -3)$  có hệ số góc  $k$ . Khi đó phương trình  $\Delta$  có dạng:

$$y + 3 = k(x - 1) \Leftrightarrow kx - y - k - 3 = 0.$$

$$\text{Theo đề ta có } d(M_0, \Delta) = \frac{|2k - 4 - k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |k - 7| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow (k - 7)^2 = k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 14k + 49 = k^2 + 1 \Leftrightarrow 14k = 48 \Leftrightarrow k = \frac{24}{7}.$$

Vậy phương trình  $\Delta: 24x - 7y - 45 = 0$ .

**Ví dụ 15.** Viết phương trình của đường thẳng  $(D)$  song song với  $(D'): 3x + 4y - 1 = 0$  và cách  $(D')$  một đoạn bằng 2.

**Lời giải.** Đường thẳng  $(D) \parallel (D')$  nên phương trình đường thẳng  $(D): 3x + 4y + c = 0$ .

Lấy điểm  $M(-1; 1) \in (D')$ , theo đề ta có:

$$d(D, D') = d(M, D) = 2 \Leftrightarrow \frac{|-3 + 4 + c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |c + 1| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \\ c = -11 \end{cases}.$$

Với  $c = 9$  ta có  $D: 3x + 4y + 9 = 0$ .

Với  $c = -11$  ta có  $D: 3x + 4y - 11 = 0$ .

**Ví dụ 16.** Cho điểm  $A(-1, 2)$  và hai đường  $(\Delta): x - y - 1 = 0, (\Delta'): x + 2y - 5 = 0$ . Tìm trên đường thẳng  $(\Delta)$  một điểm  $M$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $(\Delta')$  bằng  $AM$ .

**Lời giải.** Ta có  $M \in \Delta$ , suy ra  $M(m, m - 1)$ .

$$\overrightarrow{AM} = (m + 1; m - 3) \Rightarrow AM = \sqrt{(m + 1)^2 + (m - 3)^2} = \sqrt{2m^2 - 4m + 10}.$$

$$\text{Theo đề } \frac{|m + 2(m - 1) - 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{2m^2 - 4m + 10} \Leftrightarrow |3m - 7| = \sqrt{5(2m^2 - 4m + 10)}$$

$$\Leftrightarrow (3m - 7)^2 = 10m^2 - 20m + 50 \Leftrightarrow m^2 + 22m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -11 \pm 2\sqrt{30}.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là  $M_1(-11 - 2\sqrt{30}; -12 - 2\sqrt{30})$  và  $M_2(-11 + 2\sqrt{30}; -12 + 2\sqrt{30})$ .

**Ví dụ 17.** Tìm phương trình của đường thẳng cách điểm  $M(1, 1)$  một khoảng bằng 2 và cách điểm  $M'(2, 3)$  một khoảng bằng 4.

**Lời giải.** Giả sử phương trình cần tìm là  $\Delta: Ax + By + C = 0$ .

Theo đề ta có:

$$d(M, \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|A + B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow |A + B + C| = 2\sqrt{A^2 + B^2} \quad (1)$$

$$d(M', \Delta) = 4 \Leftrightarrow \frac{|2A + 3B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 4 \Leftrightarrow |2A + 3B + C| = 4\sqrt{A^2 + B^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } |2A + 3B + C| = 2|A + B + C| \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + 3B + C = 2(A + B + C) \\ 2A + 3B + C = -2(A + B + C) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B - C = 0 \\ 4A + 5B + 3C = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Thay } B = C \text{ và (1) ta được } |A + 2B| = 2\sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow 3A^2 - 4BA = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = \frac{4}{3}B \end{cases}.$$

Với  $A = 0$ , chọn  $B = C = 1$ , ta được đường thẳng  $\Delta_1: y + 1 = 0$ .

Với  $A = \frac{4}{3}B$ , chọn  $B = 3 \Rightarrow A = 4, C = 3$ . Ta có đường thẳng  $\Delta_2: 4x + 3y + 3 = 0$ .

Từ  $4A + 5B + 3C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}(4A + 5B)$  và (1) ta được

$$|A + 2B| = 6\sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow 35A^2 - 4BA + 32B^2 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai theo ẩn  $A$ , ta có

$$\Delta' = 4B^2 - 1020B^2 = -1016B^2 \leq 0.$$

Trường hợp  $B = 0$ , ta có  $\Delta' = 0$ , phương trình có nghiệm kép  $A = 0$ , vô lý.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu.

**Dạng 5. Viết phương trình đường phân giác của góc do  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  tạo thành**

Cho đường thẳng  $\Delta: ax + by + c = 0$  và hai điểm  $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N) \notin \Delta$ . Khi đó:

- a)  $M, N$  nằm cùng phía so với  $\Delta$  khi và chỉ khi  $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$ .  
 b)  $M, N$  nằm khác phía so với  $\Delta$  khi và chỉ khi  $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$ .

Để viết phương trình đường phân giác trong của góc  $\widehat{BAC}$  ta có nhiều cách. Dưới đây là 3 cách thường sử dụng:

**Cách 1:**

Dựa vào tính chất đường phân giác là tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng  $AB: ax + by + c = 0$  và  $AC: mx + ny + p = 0$ , ta có:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|mx + ny + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Hai đường thu được là phân giác trong và phân giác ngoài của góc  $\widehat{ABC}$ .

Sau đó, ta cần dựa vào vị trí tương đối của hai điểm  $B, C$  với hai đường vừa tìm được để phân biệt phân giác trong, phân giác ngoài. Cụ thể, nếu  $B, C$  ở cùng một phía thì đó là phân giác ngoài, ở khác phía thì là phân giác trong.

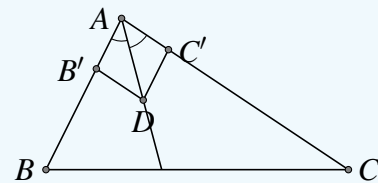
**Cách 2:**

Lấy  $B', C'$  lần lượt thuộc  $AB, AC$  sao cho:

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Giả sử  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$  Khi đó tứ giác  $AB'DC'$  là hình thoi.

Do đó,  $\overrightarrow{AD}$  là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

**Cách 3:**

Giả sử  $\vec{u} = (a; b)$  là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \vec{u}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

**Ví dụ 18.** Viết phương trình đường phân giác trong góc A của tam giác ABC biết  $A(1; 1), B(4; 5), C(-4; -11)$ .

**Lời giải.** **Cách 1.** Ta có phương trình các cạnh:

$$AB: 4x - 3y - 1 = 0; AC: 12x - 5y - 7 = 0$$

Phương trình hai đường phân giác góc A là:

$$\begin{cases} \frac{4x - 3y - 1}{5} = \frac{12x - 5y - 7}{13} \\ \frac{4x - 3y - 1}{5} = -\frac{12x - 5y - 7}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 7y - 11 = 0 (d_1) \\ 56x - 32y - 24 = 0 (d_2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(4x_C + 7y_C - 11)(4x_B + 7y_B - 11) < 0$$

Do đó  $B, C$  khác phía so với  $(d_1)$  hay  $(d_1)$  là đường phân giác cần tìm.

**Cách 2.** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3; 4); AB = 5; \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

$$\overrightarrow{AC} = (-5; -12); AC = 13; \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{13}\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \left(\frac{14}{65}; -\frac{8}{65}\right).$$

Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là:  $\vec{u} = (7; -4)$ . Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x-1) + 7(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 11 = 0$$

**Cách 3.** Giả sử  $\vec{u} = (a; b)$  là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

$$\text{Ta có } \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{AC}|} \Leftrightarrow \frac{3a+4b}{5} = \frac{-5a-12b}{13} \Leftrightarrow a = -\frac{7}{4}b.$$

Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là:  $\vec{u} = (7; -4)$ . Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x-1) + 7(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 11 = 0$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

**Bài 16.** Tính khoảng cách từ điểm  $M(3; 5)$  đến đường thẳng  $\Delta: x + y + 1 = 0$ .

**Lời giải.** Ta có  $d(M, \Delta) = \frac{|3+5+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ .

**Bài 17.** Tính khoảng cách từ điểm  $M(4; -5)$  đến đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ .

**Lời giải.** Viết phương trình dưới dạng tổng quát  $\Delta: 3x - 2y + 4 = 0$ .

$$\text{Khi đó } d(M, \Delta) = \frac{|3 \cdot 4 - 2 \cdot (-5) + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

**Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ , với:  $A(-2; 14), B(4; -2), C(5; -4)$ .

**Lời giải.** Ta có  $\overrightarrow{BC} = (1; -2) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$ . Phương trình đường thẳng  $BC$  đi qua  $B$  có dạng  $2(x-4) + 1(y+2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$ .

$$\text{Đường cao } AH \text{ của tam giác } ABC: AH = \frac{|2(-2) + 14 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{10} = 2(\text{đvdt})$$

**Bài 19.** Viết phương trình đường thẳng  $(D)$  song song với đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  và cách đường thẳng  $\Delta$  một khoảng bằng 3.

**Lời giải.** Vì  $(D) \parallel \Delta$  nên phương trình đường thẳng  $(D)$  có dạng:

$$(D): 4x - 3y + c = 0.$$

Chọn điểm  $M(0; 2) \in \Delta$ , theo đề ta có

$$d(M, \Delta) = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + c|}{5} = 3 \Leftrightarrow |c - 6| = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 21 \\ c = -9 \end{cases}.$$

Vậy có hai phương trình thỏa mãn là  $(D_1): 4x - 3y + 21 = 0$  và  $(D_2): 4x - 3y - 9 = 0$ .

**Bài 20.** Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(1; 3)$  và cách điểm  $B(-2; 1)$  một khoảng bằng 3.

**Lời giải.** Giả sử  $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 > 0)$  là vectơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm. Phương trình đường thẳng có dạng:

$$a(x-1) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a - 3b = 0$$

Khi đó:

$$d_{(B; \Delta)} = 3 \Leftrightarrow \frac{|-2a + b - a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow 5a^2 - 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{12}{5}a \end{cases}$$

- $b = 0$ , chọn  $a = 1$  ta có  $\Delta_1 : x - 1 = 0$ .
- $b = \frac{12}{5}a$ , chọn  $a = 5, b = 12$  ta có  $\Delta_2 : 5x + 12y - 41 = 0$ .

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là:  $\Delta_1 : x - 1 = 0; \Delta_2 : 5x + 12y - 41 = 0$ .

**Bài 21.** Cho đường thẳng  $\Delta : 5x - 12y + 32 = 0$  và hai điểm  $A(1; -1), B(5; -3)$ . Tìm một điểm  $M$  cách  $\Delta$  một khoảng bằng 4 và cách đều hai điểm  $A, B$ .

**Lời giải.** Gọi  $M(x_0; y_0)$  là điểm cần tìm, ta có hệ

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 = (x_0 - 5)^2 + (y_0 + 3)^2 \\ \frac{|5x_0 - 12y_0 + 32|}{13} = 4 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được  $29x_0 - 64 = \pm 52$  cho ta hai điểm  $M(4; 0)$  và  $M'(\frac{12}{29}; \frac{108}{29})$

**Bài 22.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(4; -13), B(4; 12), C(-8; 3)$ . Viết phương trình đường phân giác trong góc  $B$ .

**Lời giải.** Phương trình cạnh  $BC$  là  $3(x - 4) - 4(y - 12) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 36 = 0$ .

Phương trình cạnh  $BA$  là  $x - 4 = 0$ .

Phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc  $B$  là

$$\frac{|3x - 4y + 36|}{5} = \frac{|x - 4|}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 36 = x - 4 \\ 3x - 4y + 36 = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 20 = 0 (d_1) \\ x - y + 8 = 0 (d_2) \end{cases}$$

Ta thấy  $A$  và  $C$  nằm khác phía so với  $(d_2)$ , suy ra đường phân giác trong góc  $B$  là đường  $x - y + 8 = 0$ .

### Dạng 6. Phương trình đường thẳng trong tam giác

Ta có công thức viết nhanh phương trình đường thẳng qua hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  là:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Chú ý: Công thức phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua  $M(x_0; y_0)$  và vuông góc với đường thẳng  $d: Ax + By + C = 0$  là:  $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$ .

**Ví dụ 19.** Cho tam giác  $ABC$  có đỉnh  $A(3; -4)$  và hai đường cao  $BH$  và  $CH$  có phương trình:  $7x - 2y - 1 = 0$  và  $2x - 7y - 6 = 0$ . Hãy tìm phương trình hai cạnh  $AB$  và  $AC$ .

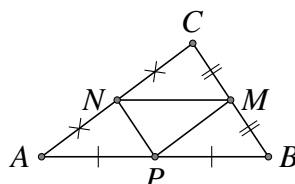
**Lời giải.** Cạnh  $AC$ : là đường thẳng đi qua  $A(3; -4)$  và vuông góc với  $BH: 7x - 2y - 1 = 0$  nên có phương trình:  $2(x - 3) + 7(y + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 7y + 22 = 0$ .

Cạnh  $AB$ : là đường thẳng qua  $A(3; -4)$  và vuông góc với  $CH: 2x - 7y - 6 = 0$  nên có phương trình:  $7(x - 3) + 2(y + 4) = 0 \Leftrightarrow 7x + 2y - 73 = 0$ .

**Ví dụ 20.** Cho tam giác  $ABC$ , biết trung điểm các cạnh là  $M(-1; -1), N(1; 9), P(9; 1)$ .

- Lập phương trình các cạnh của tam giác  $ABC$ .
- Lập phương trình các đường trung trực của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**



- a) Cạnh  $AB$  qua điểm  $P(9; 1)$  và song song với  $MN$  nên nhận véc-tơ  $\overrightarrow{MN} = (2; 10)$  làm véc-tơ chỉ phương.  
 Phương trình cạnh  $AB$  là:  $\frac{x-9}{2} = \frac{y-1}{10} \Leftrightarrow 5x - y - 44 = 0$ .  
 Tương tự, ta có phương trình cạnh  $BC$  là:  $x + y - 2 = 0$ .  
 Phương trình cạnh  $AC$  là:  $x - 5y + 44 = 0$ .
- b) Gọi các đường trung trực kẻ từ  $M, N, P$  theo thứ tự là  $(d_M), (d_N), (d_P)$ .  
 Đường thẳng  $(d_M)$  qua điểm  $M(-1; -1)$  và vuông góc với  $PN$  nên nhận véc-tơ  $\overrightarrow{PN} = (8; -8)$  làm véc-tơ pháp tuyến.  
 Ta có phương trình đường thẳng  $(d_M)$  là:  $x - y = 0$ .  
 Tương tự,  $(d_N): 5x + y - 14 = 0$ .  
 $(d_P): x + 5y - 14 = 0$ .

**Ví dụ 21.** Cho tam giác  $ABC$ , biết đỉnh  $A(2; 2)$ , các đường cao xuất phát từ các đỉnh  $B, C$  có phương trình lần lượt là  $x + y - 2 = 0$  và  $9x - 3y - 4 = 0$ . Hãy lập phương trình các cạnh của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Theo giả thiết ta có phương trình các đường cao:  $BH: x + y - 2 = 0$ ,  $CK: 9x - 3y - 4 = 0$ .

- Lập phương trình cạnh  $AC$ .  
 Cạnh  $AC$  là đường thẳng qua  $A$  và vuông góc với  $BH$  nên phương trình  $AC$  có dạng:  $x - y + c = 0$ .  
 Do  $A(2; 2) \in AC$  nên  $2 - 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$ .  
 Vậy phương trình  $AC$  là:  $x - y = 0$ .
- Phương trình cạnh  $AB$ .  
 Cạnh  $AB$  vuông góc với  $CK$  nên phương trình cạnh  $AB$  có dạng:  $3x + 9y + m = 0$ .  
 Do  $A(2; 2) \in AB \Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -24$ .  
 Phương trình cạnh  $AB$  là:  $3x + 9y - 24 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0$ .
- Phương trình cạnh  $BC$ :  
 Ta có  $C = CK \cap AC$  nên tọa độ điểm  $C$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 9x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Lại có:  $B = AB \cap BH$  nên tọa độ điểm  $B$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 3).$$

Phương trình cạnh  $BC$  qua hai điểm  $B$  và  $C$  nên có phương trình:

$$\frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C} \Leftrightarrow \frac{x + 1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{y - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 3} \Leftrightarrow 7x + 5y - 8 = 0.$$

**Ví dụ 22.** Tam giác  $ABC$  có phương trình cạnh  $AB$  là  $5x - 3y + 2 = 0$ , các đường cao qua đỉnh  $A$  và  $B$  lần lượt là  $4x - 3y + 1 = 0$ ;  $7x + 2y - 22 = 0$ . Lập phương trình hai cạnh  $AC, BC$  và đường cao thứ ba.

**Lời giải.** Tọa độ điểm  $A$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 & (AB) \\ 4x - 3y + 1 = 0 & (AH) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1)$$

Cạnh  $AC$  qua  $A(-1; -1)$  và vuông góc với  $BH: 7x + 2y - 11 = 0$  có phương trình:

$$2(x+1) - 7(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7y - 5 = 0 \quad (AC)$$

Tọa độ điểm  $B$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 \\ 7x + 2y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(2; 4)$$

Cạnh  $BC$  qua  $B(2; 4)$  và vuông góc với  $AH: 4x - 3y + 1 = 0$  có phương trình:

$$3(x-2) + 4(y-6) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 22 = 0 \quad (BC)$$

Tọa độ điểm  $C$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 7y - 5 = 0 \\ 3x + 4y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow C(6; 1)$$

Đường cao  $CH$  qua  $C(6; 1)$  và vuông góc với  $AB: 5x - 3y + 2 = 0$  có phương trình:

$$3(x-6) + 5(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y - 23 = 0$$

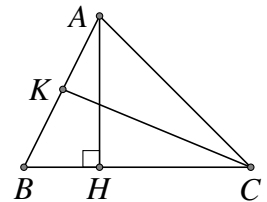
**Ví dụ 23.** Lập phương trình các cạnh của tam giác  $ABC$  biết  $B(2; -1)$ , đường cao và phân giác trong qua hai đỉnh  $A, C$  lần lượt là  $3x - 4y + 27 = 0$  và  $x + 2y - 5 = 0$ .

### Lời giải.

Cạnh  $BC$  là đường thẳng qua  $B(2; -1)$  và vuông góc với phân giác  $3x - 4y + 27 = 0$  nên có phương trình:  $4(x-2) + 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$ .

Tọa độ điểm  $C$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(-1; 3)$$



Đường phân giác ứng với phương trình  $x + 2y - 5 = 0$  có véc-tơ chỉ phương:  $\vec{v} = (2; -1)$ .

Ta có:  $\tan(\vec{CB}, \vec{v}) = \tan(\vec{v}, \vec{CA}) \quad (1)$

Biết  $\vec{CB} = (-3; 4)$ ,  $\vec{CA} = (x_A + 1; y_A - 3)$ .

Do đó  $(1) \Leftrightarrow \frac{3-8}{-6-4} = \frac{2(y_A-3) + (x_A+1)}{2(x_A+1) - (y_A-3)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x_A + 2y_A - 5}{2x_A - y_A + 5} \Leftrightarrow y_A = 3$ .

Ta có:  $y_A - y_C = 3$ . Vậy phương trình đường  $AC$  là  $y = 3$ .

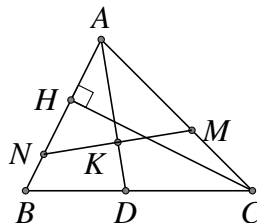
Thay  $y_A = 3$  vào  $3x - 4y + 27 = 0$ , ta có:  $A(-5; 3)$ .

Suy ra  $\vec{AB} = (7; -4)$ .

Phương trình cạnh  $AB$  là:  $4(x+5) + 7(y-3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 1 = 0$ .

**Ví dụ 24.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có đường phân giác trong  $(AD): x - y = 0$ , đường cao  $(CH): 2x + y + 3 = 0$ , cạnh  $AC$  qua  $M(0; -1)$ ,  $AB = 2AM$ . Viết phương trình ba cạnh của tam giác  $ABC$ .

### Lời giải.



Gọi  $N$  là điểm đối xứng của  $M$  qua  $AD$  (theo tính chất của đường phân giác trong), suy ra  $N$  nằm trên tia  $AB$ .

Mặt khác ta có:  $AN = AM \Rightarrow AB = 2AN$ . Suy ra  $N$  là trung điểm của  $AB$ . Do  $MN \perp AD$  nên phương trình  $MN$  là:  $x + y + m_1 = 0$ ;

$M(0; -1) \in MN \Rightarrow -1 + m_1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1$ . Suy ra  $(MN): x + y + 1 = 0$ .

Gọi  $K = MN \cap AD$ , tọa độ  $K$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Vì  $K$  là trung điểm của  $MN$  nên  $\begin{cases} x_N = 2x_K - x_M = -1 \\ y_N = 2y_K - y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow N(-1; 0)$ .

Do  $AB \perp CH$  nên phương trình  $AB$  là:  $2 - 2y + m_2 = 0$ ;

$N(-1; 0) \in AB \Leftrightarrow -1 + m_2 = 0 \Leftrightarrow m_2 = 1$ .

Suy ra  $AB: x - 2y + 1 = 0$ .

Vì  $A = AB \cap AD$  nên tọa độ  $A$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$$

Suy ra:  $AC: 2x - y - 1 = 0$ .

Vì  $C = AC \cap CH$  nên tọa độ  $C$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$$

Do  $N$  là trung điểm của  $AB$  nên  $\begin{cases} x_B = 2x_N - x_A = -2 \\ y_B = 2y_N - y_A = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -1)$ .

Phương trình đường thẳng  $BC$  qua hai điểm  $B(-2; -1)$  và  $C\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$  là:

$$\frac{x+3}{-\frac{1}{2}+3} = \frac{y+1}{-2+1} \Leftrightarrow 2x + 5y + 11 = 0$$

Vậy  $BC: 2x + 5y + 11 = 0$ .

**Ví dụ 25.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có đỉnh  $A(-1; 2)$ . Trung tuyến  $CM: 5x + 7y - 20 = 0$  và đường cao  $BH: 5x - 2y - 4 = 0$ . Viết phương trình các cạnh  $AC$  và  $BC$ .

**Lời giải.** Do  $AC \perp BH$  nên phương trình  $AC$  có dạng:  $2x + 5y + m = 0$ .

Do  $A(-1; 2) \in AC \Leftrightarrow -2 + 10 + m = 0 \Leftrightarrow m = -8$ .

Suy ra  $AC: 2x + 5y - 8 = 0$ .

Do  $C = AC \cap CM$  nên tọa độ  $C$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; 0)$$

Đặt  $B(a; b)$ . Do  $B \in BH$  nên  $5a - 2b - 4 = 0$ .

Vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên tọa độ  $M$  là  $M\left(\frac{-1+a}{2}; \frac{2+b}{2}\right) \in CM \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{-1+a}{2} + 7 \cdot \frac{2+b}{2} - 20 = 0 \Leftrightarrow$

$$5a + 7b - 31 = 0$$

Tọa độ  $M$  là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} 5a - 2b = 4 \\ 5a + 7b = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow B(2; 3)$$

Phương trình cạnh  $BC$  là  $BC: 3x + 2y - 12 = 0.$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 23.** Lập phương trình các cạnh của tam giác  $ABC$  nếu cho  $B(-4; -5)$  và hai đường cao có phương trình là:  $5x + 3y - 4 = 0$  và  $3x + 8y + 13 = 0$ .

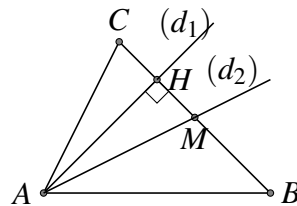
**Lời giải.** Đáp số:  $AB: 3x - 5y - 13 = 0$ ;

$$BC: 8x - 3y + 17 = 0;$$

$$AC: 5x + 2y - 1 = 0.$$

**Bài 24.** Cho  $\triangle ABC$ , biết đỉnh  $C(4; -1)$ , đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh  $A$  có phương trình tương ứng là  $(d_1): 2x - 3y + 12 = 0$  và  $(d_2): 2x + 3y = 0$ . Lập phương trình các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Lời giải.**



- Lập phương trình cạnh  $BC$ .

Vì  $BC \perp (d_1)$  nên phương trình  $(BC)$  có dạng:  $-3x - 2y + c = 0 \quad (1)$

Vì  $C \in (BC)$  nên:  $(-3) \cdot 4 - 2 \cdot (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = 10.$

Thay  $c = 10$  vào (1) ta được phương trình  $(BC): 3x + 2y - 10 = 0.$

- Lập phương trình cạnh  $AC$ .

Ta có điểm  $A = (d_1) \cap (d_2)$  nên tọa độ điểm  $A$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 2)$$

Phương trình đường thẳng  $(AC)$  qua hai điểm  $A(-3; 2)$  và  $C(4; 1)$  là:

$$\frac{x+3}{4+3} = \frac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow (AC): 3x + 7y - 5 = 0.$$

- Lập phương trình cạnh  $AB$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , khi đó điểm  $M = (d_2) \cap (BC).$

Tọa độ điểm  $M$  là nghiệm của hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(6; 4).$$

Tọa độ điểm  $B$  được xác định bởi:

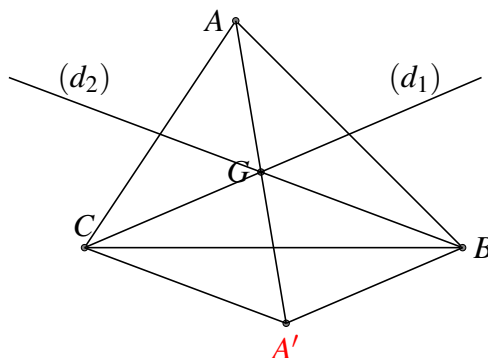
$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C \\ y_B = 2y_M - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 8 \\ y_B = -7 \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng  $(AB)$  qua hai điểm  $A(-3; 2)$  và  $B(8; -7)$  là:

$$\frac{x-8}{-3-8} = \frac{y+7}{2+7} \Leftrightarrow 9x + 11y + 5 = 0$$

**Bài 25.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1; 3)$  và hai trung tuyến có phương trình là  $x - 2y + 1 = 0$  và  $y - 1 = 0$ . Lập phương trình các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Lời giải.**



Để có được phương trình các cạnh của  $\triangle ABC$  ta đi xác định tọa độ điểm  $B, C$ .

Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$ , khi đó: 
$$\begin{cases} A'B \parallel (d_1) \\ A'C \parallel (d_2) \end{cases}.$$

Suy ra: Điểm  $B$  là giao điểm của  $(A'B)$  và  $(d_2)$ .

Điểm  $(C)$  là giao điểm của  $(A'C)$  và  $(d_1)$ .

Vậy ta lần lượt thực hiện theo các bước sau:

- Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , khi đó tọa độ của  $G$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1; 1).$$

- Điểm  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $G$ , tọa độ của  $A'$  được cho bởi:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_G - x_A \\ y_{A'} = 2y_G - y_A \end{cases} \Rightarrow A'(1; -1)$$

- Tìm tọa độ điểm  $B$ .

Đường thẳng  $A'B$  qua điểm  $A'(1; -1)$  và song song với đường thẳng  $d_1$  nên nhận véc-tơ  $\overrightarrow{CG} = (2; 1)$  làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng  $A'B$  là:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$ .

Điểm  $B = A'B \cap d_2$ , tọa độ điểm  $B$  là nghiệm hệ: 
$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5; 1).$$

- Tương tự, ta có  $C(-3; -1)$ .
- Phương trình đường thẳng  $AC$  qua hai điểm  $A(1; 3)$  và  $C(-3; -1)$  là:

$$\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

- Tương tự ta có: phương trình cạnh  $AB$  là:  $x + 2y - 7 = 0$ ;  
Phương trình cạnh  $BC$  là:  $x - 4y - 1 = 0$ .

**Bài 26.** Cho tam giác  $ABC$  có phân giác của góc  $A$  có phương trình là:  $d_1: x + y + 2 = 0$ ; đường cao vẽ từ  $B$  có phương trình là  $d_2: 2x - y + 1 = 0$ , cạnh  $AB$  qua  $M(1; -1)$ . Tìm phương trình cạnh  $AC$  của tam giác.

**Bài 27.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , hãy xác định tọa độ đỉnh  $C$  của tam giác  $ABC$  biết rằng hình chiếu vuông góc của  $C$  trên đường thẳng  $AB$  là điểm  $H(-1; -1)$ , đường phân giác trong của góc  $A$  có phương trình  $x - y + 2 = 0$  và đường cao kẻ từ  $B$  có phương trình  $4x + 3y - 1 = 0$ .

**Lời giải.** Phương trình đường thẳng  $d$  qua  $H(-1; -1)$  và vuông góc với  $\Delta: x - y + 2 = 0$  có dạng  $1(x + 1) + 1(y + 1) = 0$ .

Giao điểm  $I$  của  $d$  và  $\Delta$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 0)$$

Gọi  $K$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $\Delta$  thì  $K(-3; 1)$ .

$AC$  qua  $K$  và vuông góc với đường cao:  $4x + 3y - 1 = 0$ .

Phương trình  $AC$ :  $3(x + 3) - 4(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 13 = 0$ .

Tọa độ điểm  $A$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(5; 7)$$

$CH$  qua  $H$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\overrightarrow{HA} = 2\vec{n}$  với  $\vec{n} = (3; 4)$ .

Phương trình  $CH$ :  $3(x + 1) + 4(y + 1) = 0$ .

Tọa độ  $C$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 7 = 0 \\ 3x - 4y + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$$

## §2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

### I. Tóm tắt lý thuyết

#### 1. Phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , phương trình đường tròn nhận điểm  $I(a; b)$  làm tâm và có bán kính  $R$  là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

#### 2. Dạng khác của phương trình đường tròn

Phương trình dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2 + b^2 - c > 0$$

Khi đó, tâm là  $I(a; b)$ , bán kính là  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

#### 3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Sau đây, ta có 2 công thức phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm thuộc đường tròn (công thức tách đôi).

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc đường tròn là

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2.$$

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc đường tròn là

$$x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + c = 0.$$

Không dùng công thức tách đôi này, ta vẫn có thể viết được phương trình tiếp tuyến bằng cách tìm tọa độ vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến này là  $\overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b)$ .

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn.

#### Phương pháp giải:

- **Cách 1.** Đưa phương trình về dạng:  $(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  (1). Xét dấu biểu thức  $P = a^2 + b^2 - c$ .
  - Nếu  $P > 0$  thì (1) là phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(a; b)$  và bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .
  - Nếu  $P \leq 0$  thì (1) không phải là phương trình đường tròn.
- **Cách 2.** Đưa phương trình về dạng:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = P$  (2).
  - Nếu  $P > 0$  thì (2) là phương trình đường tròn có tâm  $I(a; b)$  và bán kính  $R = \sqrt{P}$ .
  - Nếu  $P \leq 0$  thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

**Ví dụ 1.** Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

- a)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$  (1).
- b)  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$  (2).
- c)  $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$  (3).
- d)  $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$  (4).

**Lời giải.**

a) Phương trình (1) có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  với  $a = -1; b = 2; c = 9$ .

Ta có  $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 9 < 0$ .

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có:  $a^2 + b^2 - c = 9 + 4 - 13 = 0$ .

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có:  $(3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2}$ .

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm  $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$  bán kính  $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$ .

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của  $x^2$  và  $y^2$  khác nhau.

**Ví dụ 2.** Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

- a)  $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$  (1).
- b)  $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 14 = 0$  (2).

**Lời giải.**

a) Ta có: 
$$\begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = -6 \\ c = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -15 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - c = 25 > 0.$$

Vậy phương trình (1) là phương trình của đường tròn (C) có tâm  $I(-1; 3)$  và bán kính  $R = 5$ .

b) Ta có:  $(2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = 4 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - c = -2 < 0.$

Vậy phương trình (2) không là phương trình của đường tròn.

**Ví dụ 3.** Cho phương trình  $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$  (1). Tìm điều kiện của  $m$  để (1) là phương trình đường tròn.

**Lời giải.** Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi  $a^2 + b^2 - c > 0$ , với  $a = m; b = 2(m-2); c = 6 - m$ .

Hay  $m^2 + 4(m-2)^2 - 6 + m > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}.$

**Dạng 2. Lập phương trình đường tròn.****Phương pháp giải:**• **Cách 1.**

- Tìm tọa độ tâm  $I(a; b)$  của đường tròn  $(C)$
- Tìm bán kính  $R$  của đường tròn  $(C)$
- Viết phương trình của  $(C)$  theo dạng  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ .

• **Cách 2.**

- Giả sử phương trình đường tròn  $(C)$  là:  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  (hoặc  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ ).
- Từ điều kiện của đề bài thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là  $a, b, c$ .
- Giải hệ để tìm  $a, b, c$ , từ đó tìm được phương trình đường tròn  $(C)$ .

**Chú ý:**

- Cho đường tròn  $(C)$  có tâm  $I$  và bán kính  $R$ .  $A \in (C) \Leftrightarrow IA = R$ .
- $(C)$  tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta$  tại  $A \Leftrightarrow IA = d(I; \Delta) = R$ .
- $(C)$  tiếp xúc với hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I; \Delta_1) = d(I; \Delta_2) = R$ .
- $(C)$  cắt đường thẳng  $\Delta_3$  theo dây cung có độ dài  $a \Leftrightarrow (d(I; \Delta_3))^2 + \frac{a^2}{4} = R^2$ .

**Ví dụ 4.** Lập phương trình đường tròn có tâm  $I(3; -5)$  bán kính  $R = 2$ .

**Lời giải.** Ta có phương trình đường tròn là  $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ .

**Ví dụ 5.** Lập phương trình đường tròn đường kính  $AB$  với  $A(1; 6), B(-3; 2)$ .

**Lời giải.** Đường tròn đường kính  $AB$  có:

- Tâm  $I(-1; 4)$  là trung điểm  $AB$ .
- Bán kính  $R = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$ .

Do đó phương trình đường tròn là:

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0.$$

**Ví dụ 6.** Viết phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-1; 2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta: x - 2y + 7 = 0$ .

**Lời giải.** Bán kính đường tròn  $(C)$  chính là khoảng cách từ  $I$  tới đường thẳng  $\Delta$  nên

$$R = d(I; \Delta) = \frac{|-1 - 4 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy phương trình đường tròn  $(C)$  là:  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}$ .

**Ví dụ 7.** Viết phương trình đường tròn tâm  $I(-2; 1)$ , cắt đường thẳng  $\Delta: x - 2y + 3 = 0$  tại hai điểm  $A, B$  thỏa mãn  $AB = 2$ .

**Lời giải.** Gọi  $h$  là khoảng cách từ  $I$  đến đường thẳng  $\Delta$ . Ta có:

$$h = d(I, \Delta) = \frac{|-2 - 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Gọi  $R$  là bán kính đường tròn, từ giả thiết suy ra:

$$R = \sqrt{h^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{2^2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Vậy phương trình đường tròn là:  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{6}{5}$ .

**Ví dụ 8.** Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm:  $M(-2; 4), N(5; 5), P(6; -2)$ .

**Lời giải.**

- *Cách 1.* Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là:  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ .  
Do đường tròn đi qua ba điểm  $M, N, P$  nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 + 16 + 4a - 8b + c = 0 \\ 25 + 25 - 10a - 10b + c = 0 \\ 36 + 4 - 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ .

- *Cách 2.* Gọi  $I(x; y)$  và  $R$  là tâm và bán kính đường tròn cần tìm. Ta suy ra:

$$IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases}.$$

nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = (x - 5)^2 + (y - 5)^2 \\ (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Suy ra  $I(2; 1)$ , bán kính  $IA = 5$ .

Vậy phương trình đường tròn cần tìm (C):  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ .

**Ví dụ 9.** Cho hai điểm  $A(8; 0)$  và  $B(0; 6)$ .

- Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OAB$ .
- Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB$ .

**Lời giải.**

- Ta có tam giác  $OAB$  vuông ở  $O$  nên tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền  $AB$  suy ra  $I(4; 3)$  và bán kính  $R = IA = \sqrt{(8 - 4)^2 + (0 - 3)^2} = 5$ .  
Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OAB$  là:  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

b) Ta có  $OA = 8; OB = 6; AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ .

Mặt khác  $\frac{1}{2}OA \cdot OB = pr$  (vì cùng bằng diện tích tam giác  $AOB$ ).

$$\text{Suy ra } r = \frac{OA \cdot OB}{OA + OB + AB} = 2.$$

Để thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là  $(2; 2)$ .

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB$  là  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .

**Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d : 2x - y - 5 = 0$  và hai điểm  $A(1; 2), B(4; 1)$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm thuộc  $d$  và đi qua hai điểm  $A, B$ .

**Lời giải.**

- **Cách 1.** Gọi  $I$  là tâm của  $(C)$ . Do  $I \in d$  nên  $I(t; 2t - 5)$ .

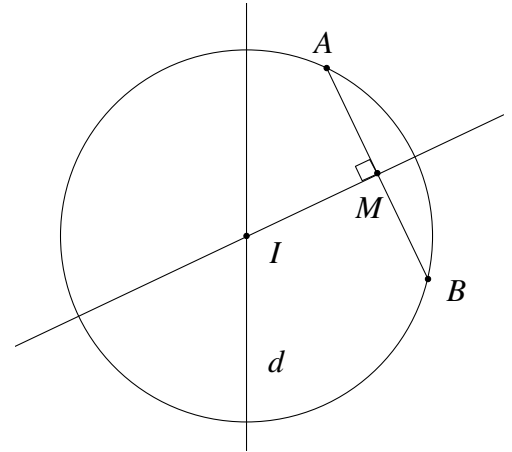
Hai điểm  $A, B$  cùng thuộc  $(C)$  nên

$$\begin{aligned} IA = IB &\Leftrightarrow (1 - t)^2 + (7 - 2t)^2 = (4 - t)^2 + (6 - 2t)^2 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \end{aligned}$$

Suy ra  $I(1; -3)$  và bán kính  $R = IA = 5$ .

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$(C) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$



- **Cách 2.** Gọi  $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$  là trung điểm  $AB$ . Đường trung trực của đoạn  $AB$  đi qua  $M$  và nhận  $\vec{AB} = (3; -1)$  làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình  $\Delta : 3x - y - 6 = 0$ .

Tọa độ tâm  $I$  của  $(C)$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; -3)$ .

Bán kính của đường tròn bằng  $R = IA = 5$ .

Vậy phương trình đường tròn cần tìm  $(C) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ .

**Ví dụ 11.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $d_1 : x + 3y + 8 = 0, d_2 : 3x - 4y + 10 = 0$  và điểm  $A(-2; 1)$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm thuộc  $d_1$ , đi qua điểm  $A$  và tiếp xúc với  $d_2$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I$  là tâm của  $(C)$ . Do  $I \in d_1$  nên  $I(-3t - 8; t)$ .

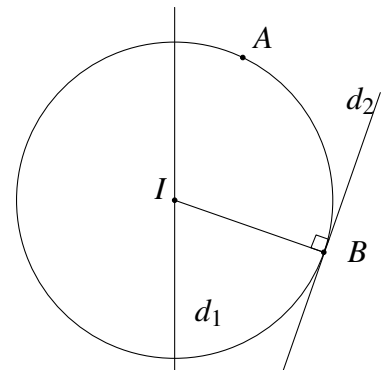
Theo giả thiết bài toán, ta có

$$\begin{aligned} d(I, d_2) = IA &\Leftrightarrow \frac{|3(-3t - 8) - 4t + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{(-3t - 8 + 2)^2 + (t - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow t = -3. \end{aligned}$$

Suy ra  $I(1; -3)$  và bán kính  $R = IA = 5$ .

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$$(C) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

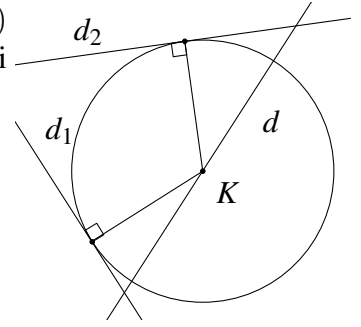


**Ví dụ 12.** Viết phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm nằm trên đường thẳng  $d : x - 6y - 10 = 0$  và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình  $d_1 : 3x + 4y + 5 = 0$  và  $d_2 : 4x - 3y - 5 = 0$ .

**Lời giải.**

Vì đường tròn cần tìm có tâm  $K$  nằm trên đường thẳng  $d$  nên gọi  $K(6a+10; a)$ . Mặt khác đường tròn tiếp xúc với  $d_1, d_2$  nên khoảng cách từ tâm  $K$  đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính  $R$  suy ra

$$\begin{aligned} \frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} &= \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5} \\ \Leftrightarrow |22a+35| &= |21a+35| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=\frac{-70}{43} \end{cases} \end{aligned}$$



- Với  $a=0$  thì  $K(10;0)$  và  $R=7$  suy ra  $(C): (x-10)^2 + y^2 = 49$
- Với  $a=\frac{-70}{43}$  thì  $K\left(\frac{10}{43}; \frac{-70}{43}\right)$  và  $R=\frac{7}{43}$  suy ra  $(C): \left(x-\frac{10}{43}\right)^2 + \left(y+\frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$$(C): (x-10)^2 + y^2 = 49 \text{ và } (C): \left(x-\frac{10}{43}\right)^2 + \left(y+\frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2.$$

**Ví dụ 13.** Viết phương trình đường tròn tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $d_1: x-y+1=0$ , bán kính  $R=2$  và cắt đường thẳng  $d_2: 3x-4y=0$  tại hai điểm  $A, B$  thỏa mãn  $AB=2\sqrt{3}$ .

**Lời giải.** Tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $d_1$  nên suy ra  $I(a; a+1)$ .

$$d(I, d_2) = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{4 - \frac{12}{4}} = 1.$$

Do đó

$$\frac{|3a-4(a+1)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 1 \Leftrightarrow |-a-4| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-9 \end{cases}$$

- Với  $a=1$  ta có  $I(1;2)$ , phương trình đường tròn là:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ .
- Với  $a=-9$  ta có  $I(-9; -8)$ , phương trình đường tròn là:  $(x+9)^2 + (y+8)^2 = 4$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm  $A(-1;3)$ ,  $B(1;4)$ ,  $C(3;2)$ .

**Lời giải.** Gọi phương trình đường tròn là  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ . Do đường tròn qua  $A(-1;3)$ ,  $B(1;4)$ ,  $C(3;2)$  nên ta có

$$\begin{cases} (-1)^2 + 3^2 - 2(-1)a - 2.3.b + c = 0 \\ 1^2 + 4^2 - 2.1.a - 2.4.b + c = 0 \\ 3^2 + 2^2 - 2.3.a - 2.2.b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 6b + c = -10 \\ -2a - 8b + c = -17 \\ -6a - 4b + c = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = \frac{11}{6} \\ c = \frac{-2}{3} \end{cases}.$$

Phương trình đường tròn là  $x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3} = 0$ .

**Bài 2.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 2x - y - 4 = 0$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng  $d$ .

**Lời giải.** Gọi  $I(m; 2m - 4) \in d$  là tâm đường tròn  $(C)$ . Theo giả thiết bài toán, ta có

$$d(I, Ox) = d(I, Oy) \Leftrightarrow |2m - 4| = |m| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

- Với  $m = \frac{4}{3}$ , suy ra  $I\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ . Bán kính đường tròn  $R = d(I, Oy) = |m| = \frac{4}{3}$ .

Vậy phương trình đường tròn  $(C): \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ .

- Với  $m = 4$ , suy ra  $I(4; 4)$ . Bán kính đường tròn  $R = d(I, Oy) = |m| = 4$ .

Vậy phương trình đường tròn  $(C): (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$ .

**Bài 3.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-1; 1)$ ,  $B(3; 3)$  và đường thẳng  $d: 3x - 4y + 8 = 0$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  đi qua hai điểm  $A, B$  và tiếp xúc với  $d$ .

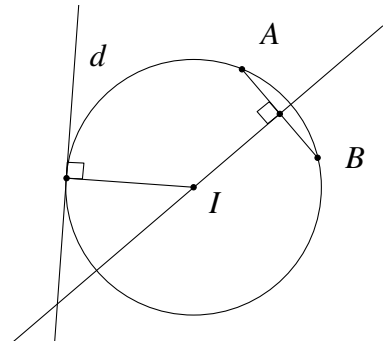
**Lời giải.**

Đường trung trực  $\Delta$  đi qua  $M(1; 2)$  là trung điểm  $AB$  và nhận  $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$  làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình  $\Delta: 2x + y - 4 = 0$ .

Do  $(C)$  đi qua hai điểm  $A, B$  nên tâm  $I$  của  $(C)$  thuộc trung trực  $\Delta$  nên  $I(t; 4 - 2t)$ .

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$\begin{aligned} IA = d(I, d) &\Leftrightarrow \sqrt{(-1 - t)^2 + (2t - 3)^2} = \frac{|3t - 4(4 - 2t) + 8|}{\sqrt{9 + 16}} \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{5t^2 - 10t + 10} = |11t - 8| \Leftrightarrow 2t^2 - 37t + 93 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{31}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



- Với  $t = 3$ , suy ra  $I(3; -2)$ . Bán kính  $R = IA = 5$ . Khi đó phương trình đường tròn cần tìm là

$$(C): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

- Với  $t = \frac{31}{2}$ , suy ra  $I\left(\frac{31}{2}; -27\right)$ . Bán kính  $R = IA = \frac{65}{2}$ . Khi đó phương trình đường tròn cần tìm là

$$(C): \left(x - \frac{31}{2}\right)^2 + (y + 27)^2 = \frac{4225}{4}.$$

**Bài 4.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $d: x + 2y - 3 = 0$  và  $\Delta: x + 3y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  có bán kính bằng  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ , có tâm thuộc  $d$  và tiếp xúc với  $\Delta$ .

**Lời giải.** Gọi  $I(-2t + 3; t) \in d$  là tâm của  $(C)$ . Theo giả thiết bài toán, ta có

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}$$

- Với  $a = 6$ , suy ra  $I(-9; 6)$ . Phương trình đường tròn  $(C): (x + 9)^2 + (y - 6)^2 = \frac{8}{5}$ .

- Với  $a = -2$ , suy ra  $I(7; -2)$ . Phương trình đường tròn  $(C) : (x-7)^2 + (y+2)^2 = \frac{8}{5}$ .

**Bài 5.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $d_1 : \sqrt{3}x + y = 0$  và  $d_2 : \sqrt{3}x - y = 0$ . Gọi  $(C)$  là đường tròn tiếp xúc với  $d_1$  tại  $A$ , cắt  $d_2$  tại hai điểm  $B, C$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Viết phương trình của  $(C)$ , biết tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  và điểm  $A$  có hoành độ dương.

**Lời giải.**

Vì  $A \in d_1 \Rightarrow A(a; -\sqrt{3}a), a > 0; B, C \in d_2 \Rightarrow B(b; \sqrt{3}b), C(c; \sqrt{3}c)$ .

Suy ra  $\vec{AB}(b-a; \sqrt{3}(a+b)), \vec{AC}(c-a; \sqrt{3}(c+a))$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  do đó  $AC$  là đường kính của đường tròn  $(C)$ .

Do đó

$$\begin{aligned} AC \perp d_1 &\Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ &\Rightarrow -1.(c-a) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}(a+c) = 0 \\ &\Rightarrow 2a+c=0(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB \perp d_2 &\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ &\Rightarrow 1.(b-a) + 3(a+b) = 0 \\ &\Rightarrow 2b+a=0(2) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}d(A; d_2) \cdot BC \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|2\sqrt{3}a|}{2} \sqrt{(c-b)^2 + 3(c-b)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2a|c-b| = 1(3)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } 2(c-b) = -3a \text{ thế vào (3) ta được } a|-3a| = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó } b = -\frac{\sqrt{3}}{6}, c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -1\right), C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -2\right).$$

$$\text{Suy ra (C) nhận } I\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{3}{2}\right) \text{ là trung điểm của } AC \text{ làm tâm và bán kính là } R = \frac{AC}{2} = 1.$$

$$\text{Vậy phương trình đường tròn cần tìm là (C) : } \left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

**Bài 6.** Cho ba đường thẳng  $d_1 : x - y + 1 = 0, d_2 : 3x - 4y = 0, d_3 : 4x - 3y - 3 = 0$ . Viết phương trình đường tròn tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $d_1$ , cắt đường thẳng  $d_2$  tại hai điểm  $A, B$  và cắt đường thẳng  $d_3$  tại hai điểm  $C, D$  sao cho  $AB = CD = 2\sqrt{3}$ .

**Lời giải.** Tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $d_1$  nên suy ra  $I(a; a+1)$ .

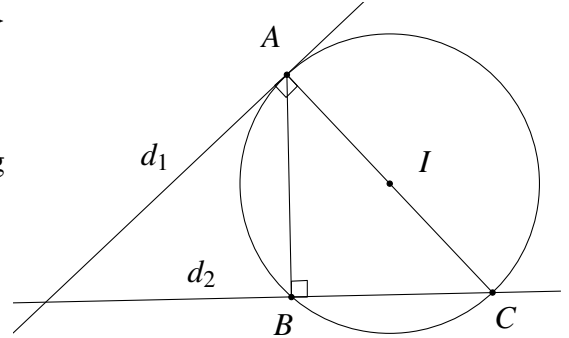
$$d(I, d_2) = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{R^2 - 3}$$

$$d(I, d_3) = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{R^2 - 3}$$

Suy ra

$$d(I, d_2) = d(I, d_3) \Rightarrow \frac{|-a-4|}{5} = \frac{|a-6|}{5} \Rightarrow a = 1.$$

Với  $a = 1$  ta có  $I(1; 2)$  và  $R = 2$ , phương trình đường tròn là:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ .

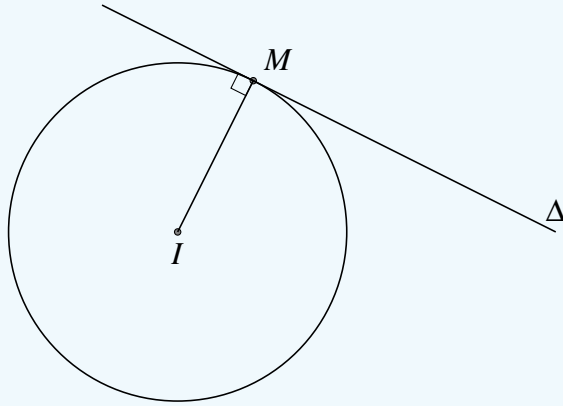


**Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm**

Viết phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  của đường tròn  $(C)$  tâm  $I(a, b)$ , tại điểm  $M(x_0, y_0) \in (C)$ .

Ta có  $\overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b)$  là véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$ .

Do đó  $\Delta$  có phương trình là  $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$ .



**Ví dụ 14.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C) : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$  tại điểm  $M(3; -1)$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2; -3)$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(3; -1)$  là:

$$\begin{aligned} (3 - 2)(x - 3) + (-1 + 3)(y + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 2y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(3; -1)$  là  $x + 2y - 1 = 0$ .

**Ví dụ 15.** Cho đường tròn  $(C_m) : x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2my - 4 = 0$ . Biết rằng khi  $m$  thay đổi, đường tròn  $(C_m)$  luôn đi qua điểm  $I$  cố định có hoành độ dương. Tìm giá trị của  $m$  sao cho tiếp tuyến của đường tròn  $(C_m)$  tại  $I$  song song với  $(d) : x - 2y - 1 = 0$ .

**Lời giải.** Giả sử đường tròn  $(C_m)$  luôn đi qua điểm  $I(x_0; y_0)$  cố định khi  $m$  thay đổi.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + 2(m - 1)x_0 - 2my_0 - 4 &= 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow m(2x_0 - 2y_0) + x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4 &= 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ 2x_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 = -1 \\ x_0 = y_0 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ta có điểm  $I(2; 2)$ .

Đường tròn  $(C_m)$  có tâm  $J(1 - m; m)$ . Véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến của  $(C_m)$  tại  $I$  là  $\overrightarrow{IJ} = (-m - 1; m - 2)$ .

Để tiếp tuyến tại  $I$  song song với  $(d) : x - 2y - 1 = 0$  thì tồn tại  $k$  sao cho:

$$\overrightarrow{IJ} = k(1; -2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 = k \\ m - 2 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ k = 3. \end{cases}$$

Vậy  $m = -4$  thỏa mãn yêu cầu đề bài.

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 7.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C) : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$  tại điểm  $M(-1;1)$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-2;3)$ .

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$  tại điểm  $M(-1;1)$  là  $1(x+1) - 2(y-1) = 0$  hay  $x - 2y + 3 = 0$ .

**Bài 8.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x = 0$  tại điểm  $M(1;1)$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1;0)$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(1;1)$  là  $y = 1$ .

**Bài 9.** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$  và đường thẳng  $(\Delta) : y - x + 1 = 0$ . Gọi  $M, N$  là giao điểm của  $(C)$  và  $(\Delta)$ . Tìm tọa độ giao điểm của tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$  kẻ tại  $M, N$ .

**Lời giải.** Tọa độ  $M, N$  là giao điểm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 0 \\ x = 3; y = 2. \end{cases}$$

Không mất tổng quát, ta giả sử  $M(1;0)$  và  $N(3;2)$ . Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1;2)$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  là  $y = 0$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $N$  là  $x = 3$ .

Tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ .

Vậy tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến là  $A(3;0)$ .

**Bài 10.** Cho hai đường tròn  $(C_1) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$  và  $(C_2) : x^2 + y^2 - 4x - 14y + 33 = 0$ .

a) Chứng minh rằng  $(C_1)$  và  $(C_2)$  tiếp xúc với nhau.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại tiếp điểm.

**Lời giải.**

a) Đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I(-1;1)$  và bán kính  $R_1 = \sqrt{5}$ .

Đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $J(2;7)$  và bán kính  $R_2 = 2\sqrt{5}$ .

Ta có  $IJ = \sqrt{(2+1)^2 + (7-1)^2} = 3\sqrt{5} = R_1 + R_2$ . Do đó  $(C_1)$  tiếp xúc ngoài với  $(C_2)$ .

b) Gọi  $M$  là tiếp điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

Khi đó ta có  $\vec{IJ} = 3\vec{IM} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OJ} + \frac{2}{3}\vec{OI}$ .

Suy ra  $M(0;3) \Rightarrow \vec{IM} = (1;2)$ .

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại  $M$  là  $x + 2(y-3) = 0$  hay  $x + 2y - 6 = 0$ .

**Bài 11.** Cho đường tròn  $(C_m) : x^2 + y^2 - (m-2)x + 2my - 1 = 0$ .

a) Chứng minh rằng khi  $m$  thay đổi, đường tròn  $(C_m)$  luôn đi qua điểm cố định.

b) Gọi  $I$  là điểm cố định ở câu trên sao cho  $I$  có hoành độ âm. Tìm  $m$  sao cho tiếp tuyến của đường tròn  $(C_m)$  tại  $I$  song song với đường thẳng  $(d) : x + 2y = 0$ .

**Lời giải.**

a) Giả sử  $I(x_0; y_0)$  là điểm cố định thuộc đường tròn  $(C_m)$  khi  $m$  thay đổi. Khi đó ta có

$$x_0^2 + y_0^2 - (m-2)x_0 + 2my_0 - 1 = 0 \text{ với mọi } m.$$

Điều này tương đương với

$$(2y_0 - x_0)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \text{ với mọi } m.$$

Do đó  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} 2y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 + 4y - 1 = 0. \end{cases}$

Giải hệ trên ta được hai nghiệm  $(-2; -1)$  và  $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$ .

Vậy  $(C_m)$  luôn đi hai điểm cố định là  $(-2; -1)$  và  $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$  khi  $m$  thay đổi.

b) Vì  $x_I < 0$  nên  $I(-2; -1)$ . Đường tròn  $(C_m)$  có tâm  $J\left(\frac{m-2}{2}; -m\right)$ .

Véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến tại  $I$  là  $\vec{IJ} = \left(\frac{m+2}{2}; -m+1\right)$ .

Để tiếp tuyến tại  $I$  song song với  $(d): x+2y=0$  thì  $\vec{IJ}$  cùng phương với  $\vec{n} = (1; 2)$ , điều này tương đương với

$$\frac{m+2}{2} = \frac{-m+1}{2} \Leftrightarrow m+2 = -m+1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

#### Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi một điểm

Cho đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(a, b)$  và bán kính  $R$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  đi qua điểm  $M(x_0, y_0)$ .

a) Nếu  $IM < R$  thì không có tiếp tuyến nào đi qua  $M$ .

b) Nếu  $IM = R$  thì ta giải theo dạng 1.

c) Nếu  $IM > R$  thì ta thực hiện theo các bước bên dưới.

- Gọi phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  của  $(C)$  đi qua  $M$  có dạng  $m(x - x_0) + n(y - y_0) = 0$ , trong đó  $m^2 + n^2 \neq 0$ .
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với đường tròn ta có  $d(I, \Delta) = R$ . Giải phương trình trên ta tìm được quan hệ giữa  $a, b$ .

**Ví dụ 16.** Viết phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  của đường tròn  $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$  biết tiếp tuyến đi qua điểm  $M(3; -2)$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; 2)$  và bán kính  $R = \sqrt{8}$ .

Ta có  $IM = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$ .

Gọi phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  của  $(C)$  và đi qua  $M(3; -2)$  là  $a(x-3) + b(y+2) = 0$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ).

Ta có  $d(I, \Delta) = \frac{|a(1-3) + b(2+2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \frac{|-2a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{8}$ .

Phương trình trên tương đương với

$$\begin{aligned} | -2a + 4b | &= \sqrt{8a^2 + 8b^2} \\ \Leftrightarrow (2a - 4b)^2 &= 8a^2 + 8b^2 \\ \Leftrightarrow 8b^2 - 16ab - 4a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2b^2 - 4ab - a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}a \\ b = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}a. \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu  $b = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}a$  thì ta chọn  $a = 2 \Rightarrow b = 2 + \sqrt{6}$ .

Khi đó phương trình của tiếp tuyến  $(\Delta)$  là:

$$2(x - 3) + (2 + \sqrt{6})(y + 2) = 0 \text{ hay } 2x + (2 + \sqrt{6})y + 2\sqrt{6} - 2 = 0.$$

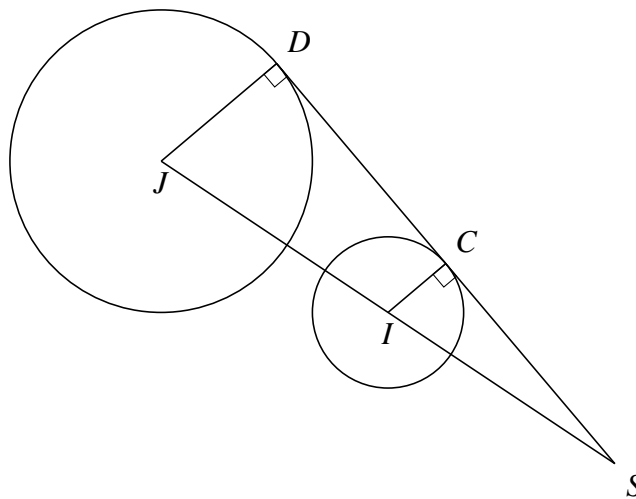
- Nếu  $b = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}a$  thì ta chọn  $a = 2 \Rightarrow b = 2 - \sqrt{6}$ .

Khi đó phương trình của tiếp tuyến  $(\Delta)$  là:

$$2(x - 3) + (2 - \sqrt{6})(y + 2) = 0 \text{ hay } 2x + (2 - \sqrt{6})y - 2\sqrt{6} - 2 = 0.$$

**Ví dụ 17.** Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$  và  $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$  sao cho  $(C_1)$  và  $(C_2)$  nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến đó (tiếp tuyến này được gọi là tiếp tuyến chung ngoài).

**Lời giải.** Đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I(1; -1)$  và bán kính  $R_1 = 1$ . Đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $J(-2; 1)$  và bán kính  $R_2 = 2$ .



Gọi  $S$  là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và  $IJ$ . Gọi  $C, D$  lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

Theo định lý Thales ta có  $\frac{SI}{SJ} = \frac{CI}{DJ} = \frac{1}{2}$ .

Vì vậy ta có  $\vec{SJ} = 2\vec{SI}$ . Do đó  $\vec{OS} = 2\vec{OI} - \vec{OJ} \Rightarrow S(4; -3)$ .

Gọi phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  tiếp xúc với  $(C_1), (C_2)$  và đi qua  $S$  là  $a(x - 4) + b(y + 3) = 0$  trong đó

$$a^2 + b^2 > 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) &= \frac{|2b - 3a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \Rightarrow |2b - 3a| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\Rightarrow 8a^2 - 12ab + 3b^2 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}b \\ a = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}b. \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu  $a = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}b$  thì ta chọn  $b = 4 \Rightarrow a = 3 + \sqrt{3}$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  là

$$(3 + \sqrt{3})x + 4y - 4\sqrt{3} = 0.$$

Nếu  $a = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}b$  thì ta chọn  $b = 4 \Rightarrow a = 3 - \sqrt{3}$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  là

$$(3 - \sqrt{3})x + 4y + 4\sqrt{3} = 0.$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 12.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C) : (x - 3)^2 + y^2 = 9$  biết tiếp tuyến đi qua điểm  $M(3; 5)$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3; 0)$  và bán kính  $R = 3$ .

Ta có  $IM = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5 > R = 3$ .

Gọi tiếp tuyến  $(\Delta)$  của đường tròn  $(C)$  và đi qua  $M$  là  $a(x - 3) + b(y - 5) = 0$  với  $a^2 + b^2 > 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) &= R \Rightarrow \frac{|-5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \\ &\Rightarrow |5b| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \\ &\Rightarrow b = \pm \frac{3}{4}a. \end{aligned}$$

Nếu  $b = -\frac{3}{4}a$  thì ta chọn  $a = 4, b = -3$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  là  $4x - 3y + 3 = 0$ .

Nếu  $b = \frac{3}{4}a$  thì ta chọn  $a = 4, b = 3$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  là  $4x + 3y - 27 = 0$ .

**Bài 13.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$  biết tiếp tuyến đi qua điểm  $M(-2; 5)$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-1; 2)$  và bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

Gọi phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  đi qua điểm  $M(-2; 5)$  là  $a(x + 2) + b(y - 5) = 0$  với  $a^2 + b^2 > 0$ .

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) &= \frac{|a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a - 3b| = \sqrt{2a^2 + 2b^2} \\ &\Leftrightarrow a^2 - 6ab + 9b^2 = 2a^2 + 2b^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 6ab - 7b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -7b. \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu  $a = b$  thì ta chọn  $a = b = 1$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  là  $x + y - 3 = 0$ .

Nếu  $a = -7b$  thì ta chọn  $a = 7; b = -1$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  là  $7x - y + 19 = 0$ .

**Bài 14.** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ . Qua điểm  $A(1; 2)$  kẻ hai tiếp tuyến đến đường tròn  $(C)$ . Gọi tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó là  $M, N$ . Tính  $MN$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-1; 1)$  và bán kính  $R = 2$ .

Gọi tiếp tuyến  $(\Delta)$  đi qua  $A(1, 2)$  của đường tròn  $(C)$  là  $a(x - 1) + b(y - 2) = 0$  với  $a^2 + b^2 > 0$ .

Ta có

$$d(I, \Delta) = \frac{|-2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Rightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 4a^2 + 4b^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4a = 3b. \end{cases}$$

- Nếu  $b = 0$  thì ta chọn  $a = 1$ . Khi đó phương trình  $(\Delta_1)$  là  $x = 1$ .

Tiếp điểm của  $(\Delta_1)$  và  $(C)$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, y = 1.$$

- Nếu  $4a = 3b$  thì ta chọn  $a = 3, b = 4$ . Khi đó phương trình của  $(\Delta_2)$  là  $3x + 4y - 11 = 0$ .

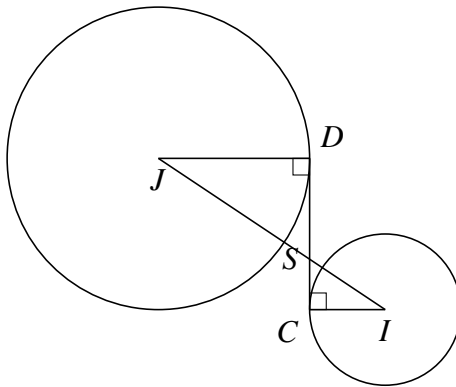
Tiếp điểm của  $(\Delta_2)$  và  $(C)$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 4y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11 - 4y}{3} \\ \frac{25y^2}{9} - \frac{130y}{9} + \frac{169}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } MN = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{13}{5}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

**Bài 15.** Viết phương trình tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn  $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$  và  $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I(1; -1)$  và bán kính  $R_1 = 1$ . Đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $J(-2; 1)$  và bán kính  $R_2 = 2$ .



Gọi  $S$  là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và  $IJ$ .  $C, D$  lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

Theo định lý Thales ta có  $\frac{SI}{SJ} = \frac{CI}{DJ} = \frac{1}{2}$ .

Vì vậy ta có  $\vec{SJ} = -2\vec{SI}$ . Do đó  $\vec{OS} = 2\vec{OI} + \vec{OJ} \Rightarrow S\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ .

Gọi phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  tiếp xúc với  $(C_1), (C_2)$  và đi qua  $S$  là  $ax + b\left(y + \frac{1}{3}\right) = 0$  trong đó  $a^2 + b^2 >$

0.

Ta có

$$\begin{aligned}
 d(I, \Delta) = \frac{|a - \frac{2}{3}b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 &\Leftrightarrow |2b - 3a| = \sqrt{9a^2 + 9b^2} \\
 &\Leftrightarrow 5b^2 + 12ab = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 5b = -12a. \end{cases}
 \end{aligned}$$

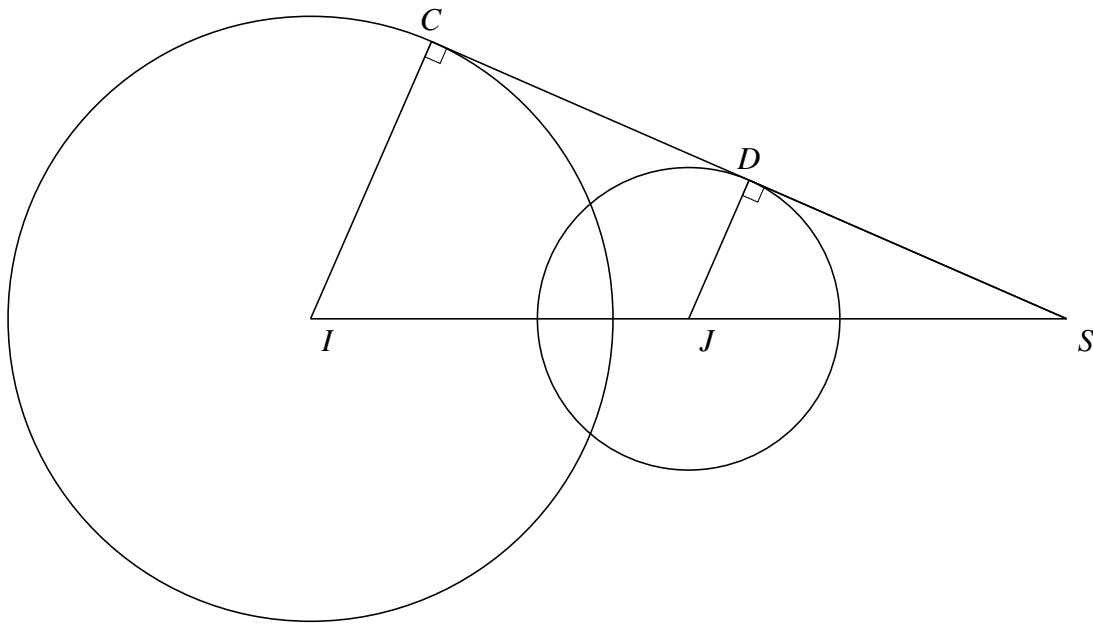
- Nếu  $b = 0$  thì ta chọn  $a = 1$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  là  $x = 0$ .
- Nếu  $5b = -12a$  thì ta chọn  $b = -12; a = 5$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  là

$$5x - 12\left(y + \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 5x - 12y - 4 = 0.$$

**Bài 16.** Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$  và  $(C_2): (x - 2)^2 + y^2 = 4$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I(-3; 0)$  và bán kính  $R_1 = 4$ . Đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $J(2; 0)$  và bán kính  $R_2 = 2$ .

Ta có  $IJ = 5 < R_1 + R_2$  nên hai đường tròn cắt nhau. Do đó chúng chỉ có hai tiếp tuyến chung ngoài.



Gọi  $S$  là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và  $IJ$ .  $C, D$  lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

Theo định lý Thales ta có  $\frac{SI}{SJ} = \frac{CI}{DJ} = 2$ .

Vì vậy ta có  $\vec{SI} = 2\vec{SJ}$ . Do đó  $\vec{OS} = 2\vec{OJ} - \vec{OI} \Rightarrow S(7; 0)$ .

Gọi phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  tiếp xúc với  $(C_1), (C_2)$  và đi qua  $S$  là  $a(x - 7) + by = 0$  trong đó  $a^2 + b^2 > 0$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 d(I, \Delta) = \frac{|-10a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 &\Leftrightarrow 100a^2 = 16a^2 + 16b^2 \\
 &\Leftrightarrow 84a^2 = 16b^2 \\
 &\Leftrightarrow b = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}a.
 \end{aligned}$$

- Nếu  $b = \frac{\sqrt{21}}{2}a$  thì ta chọn  $a = 2; b = \sqrt{21}$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến ( $\Delta$ ) là  $2x + \sqrt{21}y - 14 = 0$ .
- Nếu  $b = -\frac{\sqrt{21}}{2}a$  thì ta chọn  $a = 2; b = -\sqrt{21}$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến ( $\Delta$ ) là  $2x - \sqrt{21}y - 14 = 0$ .

### Dạng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước

Cho đường tròn ( $C$ ) có tâm  $I(a, b)$  và bán kính  $R$ . Viết phương trình tiếp tuyến ( $\Delta$ ) của ( $C$ ) có phương xác định trước.

- Viết dạng phương trình tổng quát của  $\Delta$ .
- Sử dụng điều kiện cho trước và  $d(I, \Delta) = R$  để tìm phương trình tổng quát của  $\Delta$ .

**Ví dụ 18.** Tìm điều kiện của tham số  $a$  để đường thẳng ( $\Delta$ ):  $x + (a - 1)y - a = 0$  tiếp xúc với đường tròn ( $C$ ):  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ .

**Lời giải.** Đường tròn ( $C$ ) có tâm  $I(1; -2)$  và bán kính  $R = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2} = \sqrt{3}$ .

Để đường thẳng ( $\Delta$ ) là tiếp tuyến của đường tròn ( $C$ ) thì

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) = R &\Leftrightarrow \frac{|1 - 2(a - 1) - a|}{\sqrt{1 + (a - 1)^2}} = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{|3 - 3a|}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}} = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow |3 - 3a| = \sqrt{3a^2 - 6a + 6} \\ &\Leftrightarrow (3 - 3a)^2 = 3a^2 - 6a + 6 \\ &\Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$  hoặc  $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$  thỏa mãn đề bài.

**Ví dụ 19.** Viết phương trình tiếp tuyến ( $\Delta$ ) của đường tròn ( $C$ ):  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$  biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $x + 2y + 5 = 0$ .

**Lời giải.** Đường tròn ( $C$ ) có tâm  $I(1; -2)$  và bán kính  $R = 1$ .

Vì  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng  $x + 2y + 5 = 0$  nên phương trình  $\Delta$  có dạng  $2x - y + m = 0$ .

Vì  $\Delta$  là tiếp tuyến của ( $C$ ) nên ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) = R &\Leftrightarrow \frac{|2 + 2 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow |4 + m| = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{5} - 4 \\ m = -\sqrt{5} - 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu  $m = \sqrt{5} - 4$  thì phương trình của  $\Delta$  là  $2x - y + \sqrt{5} - 4 = 0$ .

Nếu  $m = -\sqrt{5} - 4$  thì phương trình của  $\Delta$  là  $2x - y - \sqrt{5} - 4 = 0$ .

**Ví dụ 20.** Viết phương trình tiếp tuyến ( $\Delta$ ) của đường tròn ( $C$ ) :  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  biết rằng tiếp tuyến hợp với đường thẳng ( $d$ ) :  $x + y - 5 = 0$  một góc  $45^\circ$ .

**Lời giải.** Đường tròn ( $C$ ) có tâm  $I(1;2)$  và bán kính  $R = \sqrt{1^2 + 2^2 - 4} = 1$ .

Gọi véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$  là  $\vec{n}_1 = (a; b)$  trong đó  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Véc-tơ pháp tuyến của  $d$  là  $\vec{n}_2 = (1; 1)$ .

Vì ( $\Delta$ ) tạo với  $d$  một góc  $60^\circ$  nên ta có

$$\begin{aligned} |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| &= \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow |a+b| = \sqrt{a^2+b^2} \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2 \\ &\Leftrightarrow ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- Với  $a = 0$ , phương trình  $\Delta$  có dạng  $y + m = 0$ .

$$\text{Có } d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2+m|}{1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3. \end{cases}$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  là  $y - 1 = 0$  hoặc  $y - 3 = 0$ .

- Với  $b = 0$ , phương trình  $\Delta$  có dạng  $x + m = 0$ .

$$\text{Có } d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|1+m|}{1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2. \end{cases}$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  là  $x = 0$  hoặc  $x - 2 = 0$ .

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm  $\Delta$  là  $y - 1 = 0$  hoặc  $y - 3 = 0$  hoặc  $x = 0$  hoặc  $x - 2 = 0$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 17.** Tìm giá trị của tham số  $m$  sao cho đường thẳng ( $\Delta$ ) :  $(m-1)y + mx - 2 = 0$  là tiếp tuyến của đường tròn ( $C$ ) :  $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ .

**Lời giải.** Đường tròn ( $C$ ) có tâm  $I(3;0)$  và bán kính  $R = 2$ .

Để ( $\Delta$ ) là tiếp tuyến của đường tròn ( $C$ ) thì ta phải có

$$d(I, \Delta) = \frac{|3m-2|}{\sqrt{(m-1)^2+m^2}} = 2 \Leftrightarrow 4(2m^2-2m+1) = 9m^2-12m+4 \Leftrightarrow m^2-4m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=4. \end{cases}$$

**Bài 18.** Cho đường tròn ( $C$ ):  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$  và đường thẳng  $d$  :  $3x + 4y - 6 = 0$ . Viết phương trình tiếp tuyến của ( $C$ ) thỏa mãn:

- Song song với đường thẳng  $d$ .
- Vuông góc với đường thẳng  $d$ .

**Lời giải.** ( $C$ ) có tâm  $I(2;3)$ , bán kính  $R = 5$ .

- Phương trình đường thẳng  $\Delta_1$  song song với  $d$  có dạng:  $3x + 4y + c_1 = 0$ .

$\Delta_1$  tiếp xúc với ( $C$ ) nên  $d(I, \Delta_1) = R$ .

$$\text{Hay } \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + c_1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \Leftrightarrow |c_1 + 18| = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 18 = 25 \\ c_1 + 18 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 7 \\ c_1 = -43. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của ( $C$ ) song song với  $d$  là  $3x + 4y + 7 = 0$  hoặc  $3x + 4y - 43 = 0$ .

b) Phương trình đường thẳng  $\Delta_2$  song song với  $d$  có dạng:  $4x - 3y + c_2 = 0$ .

$\Delta_2$  tiếp xúc với  $(C)$  nên  $d(I, \Delta_2) = R$ .

$$\text{Hay } \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + c_2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5 \Leftrightarrow |c_2 - 1| = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 - 1 = 25 \\ c_2 - 1 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 26 \\ c_2 = -24. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  vuông góc với  $d$  là  $4x - 3y + 26 = 0$  hoặc  $4x - 3y - 24 = 0$ .

**Bài 19.** Cho đường tròn  $(C) : (x - 1)^2 + y^2 = 9$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$  biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng  $y = 2x - 1$ .

**Lời giải.** Gọi phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  song song với  $y = 2x - 1$  là  $y - 2x + n = 0$ .

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; 0)$  và bán kính  $R = 3$ .

Ta có

$$d(I, \Delta) = \frac{|n - 2|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 - 3\sqrt{5} \\ n = 2 + 3\sqrt{5}. \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  là  $y - 2x + 2 - 3\sqrt{5} = 0$  hoặc  $y - 2x + 2 + 3\sqrt{5} = 0$ .

**Bài 20.** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 = 25$ . Viết phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  của đường tròn  $(C)$  biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền và cạnh góc vuông nằm trên  $Ox$  lớn hơn cạnh góc vuông nằm trên  $Oy$ .

**Lời giải.** Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền và cạnh góc vuông nằm trên  $Ox$  lớn hơn cạnh góc vuông nằm trên  $Oy$  nên ta suy ra tiếp tuyến tạo với trục  $Ox$  góc  $30^\circ$ .

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $O(0; 0)$  và bán kính  $R = 5$ .

Gọi véc-tơ pháp tuyến của  $(\Delta)$  là  $\vec{n} = (a, b)$  với  $a^2 + b^2 > 0$ .

$$\text{Ta có } \cos(\Delta, Ox) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}b.$$

- Nếu  $a = \sqrt{3}b$  thì ta chọn  $a = \sqrt{3}; b = 1$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  có dạng  $\sqrt{3}x + y + m = 0$ .  
Ta có

$$d(O; \Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{3+1}} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -10. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  trong trường hợp này là  $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$  hoặc  $\sqrt{3}x + y + 10 = 0$ .

- Nếu  $a = -\sqrt{3}b$  thì ta chọn  $a = -\sqrt{3}; b = 1$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  có dạng  $-\sqrt{3}x + y + m = 0$ .  
Ta có

$$d(O; \Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{3+1}} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -10. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  trong trường hợp này là  $-\sqrt{3}x + y - 10 = 0$  hoặc  $-\sqrt{3}x + y + 10 = 0$ .

**Bài 21.** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác cân.

**Lời giải.** Phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; 2)$  và bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

Để tiếp tuyến cùng với các trục tọa độ tạo thành tam giác cân thì tiếp tuyến phải có hệ số góc là 1 hoặc -1.

- Nếu tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 thì ta có thể giả sử phương trình tiếp tuyến  $(\Delta)$  là  $x + y + m = 0$ .  
Ta có

$$d(I, \Delta) = \frac{|m + 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 - \sqrt{10} \\ m = -3 + \sqrt{10}. \end{cases}$$

Do đó phương trình tiếp tuyến là  $x + y - 3 - \sqrt{10} = 0$  hoặc  $x + y - 3 + \sqrt{10} = 0$ .

- b) Nếu tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1 thì ta có thể giả sử phương trình tiếp tuyến ( $\Delta$ ) là  $x - y + m = 0$ .  
Ta có

$$d(I, \Delta) = \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 - \sqrt{10} \\ m = 1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

Do đó phương trình tiếp tuyến là  $x - y + 1 - \sqrt{10} = 0$  hoặc  $x - y + 1 + \sqrt{10} = 0$ .

**Bài 22.** Cho đường tròn ( $C_1$ ):  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$  và đường tròn ( $C_2$ ):  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ . Viết phương trình tiếp tuyến chung của ( $C_1$ ) và ( $C_2$ ).

**Lời giải.**

( $C_1$ ) có tâm  $I_1(3; 4)$ , bán kính  $R_1 = 6$ .

( $C_2$ ) có tâm  $I_2(1; 3)$ , bán kính  $R_2 = 4$

Có  $2 = |R_1 - R_2| < I_1I_2 = \sqrt{(1-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5} < R_1 + R_2 = 10$ .

Do đó ( $C_1$ ) và ( $C_2$ ) cắt nhau và có 2 tiếp tuyến chung.

Phương trình tiếp tuyến chung  $\Delta$  có dạng  $ax + by + c = 0$ , ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ) (\*).

$\Delta$  tiếp xúc với ( $C_1$ ) và ( $C_2$ ) khi và chỉ khi  $\begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases}$

$$\text{Hay } \begin{cases} \frac{|3a+4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 6 & (1) \\ \frac{|a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2|3a+4b+c| = 3|a+3b+c|$$

$$\Leftrightarrow 2(3a+4b+c) = \pm 3(a+3b+c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3a - b \\ c = -\frac{9a+17b}{5} \end{cases}$$

+ Thế  $c = 3a - b$  vào (2) ta được  $|4a+2b| = 4\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow b(3b-4a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{4}{3}a \end{cases}$$

Với  $b = 0$  thì  $c = 3a$ , (\*) trở thành  $ax + 3a = 0$  hay  $x + 3 = 0$ .

Với  $b = \frac{4}{3}a$  thì  $c = \frac{5}{3}a$ , (\*) trở thành  $ax + \frac{4}{3}ay + \frac{5}{3}a = 0$  hay  $3x + 4y + 5 = 0$ .

+ Thế  $c = -\frac{9a+17b}{5}$  vào (2) ta được  $|-4a-2b| = 20\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 100(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 96a^2 - 4ab + 99b^2 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy ( $C_1$ ) và ( $C_2$ ) có tiếp tuyến chung là  $x + 3 = 0$  và  $3x + 4y + 5 = 0$ .

**Bài 23.** Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn ( $C_1$ ):  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$  và ( $C_2$ ):  $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 48 = 0$  sao cho 2 đường tròn nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến chung đó..

**Lời giải.** Đường tròn ( $C_1$ ) có tâm  $I_1(-1; 1)$  và bán kính  $R_1 = \sqrt{5}$ .

Đường tròn ( $C_2$ ) có tâm  $I_2(2; 7)$  và bán kính  $R_2 = \sqrt{5}$ .

Do đó tiếp tuyến chung cần tìm của hai đường tròn song song với đường thẳng  $I_1I_2$ .

Ta có  $\overrightarrow{I_1I_2} = (3; 6)$ . Suy ra véc-tơ pháp tuyến của  $I_1I_2$  là  $\vec{n} = (2; -1)$ .

Do đó phương trình tiếp tuyến chung cần tìm ( $\Delta$ ) của ( $C_1$ ); ( $C_2$ ) có dạng  $2x - y + m = 0$ .

Ta có

$$d(I_1; \Delta) = \frac{|-3+m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m-3| = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 8 \end{cases}$$

Vì vậy phương trình tiếp tuyến chung cần tìm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$  là  $2x - y - 2 = 0$  hoặc  $2x - y + 8 = 0$ .

### BÀI TẬP TỔNG HỢP

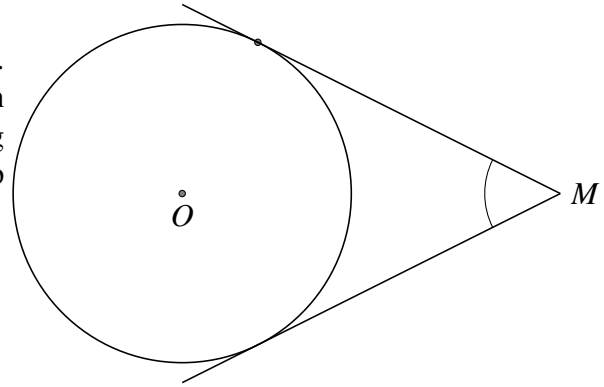
**Bài 24.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 4x = 0$ . Tìm những điểm trên đường thẳng  $x = 4$  mà từ những điểm đó kẻ được đến  $(C)$  hai tiếp tuyến hợp với nhau góc  $30^\circ$ .

**Lời giải.**

Gọi điểm  $M(4; b)$  thuộc đường thẳng  $x = 4$ ,  $(b \in \mathbb{R})$ .

$(C) : (x-2)^2 + y^2 = 4$ ,  $(C)$  có tâm  $I(2; 0)$ , bán kính  $R = 2$ .

Vì đường thẳng  $x = 4$  là một tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$ , nên yêu cầu bài toán là tìm những điểm trên đường thẳng  $x = 4$  sao cho kẻ được qua các điểm đó các tiếp tuyến đến  $(C)$  có hệ số góc là  $k = \pm \tan 60^\circ = \pm \sqrt{3}$ .



- $k = \sqrt{3}$ :  $d$  là đường thẳng qua  $M$  có hệ số góc  $k = \sqrt{3}$  có phương trình:

$$y = \sqrt{3}(x - 4) + b \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3} + b = 0.$$

$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow d(I, d) = R \Leftrightarrow |b - 2\sqrt{3}| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 + 2\sqrt{3} \\ b = -4 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

- $k = -\sqrt{3}$ :  $d'$  là đường thẳng qua  $M$  có hệ số góc  $k = -\sqrt{3}$  có phương trình:

$$y = -\sqrt{3}(x - 4) + b \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y - 4\sqrt{3} - b = 0.$$

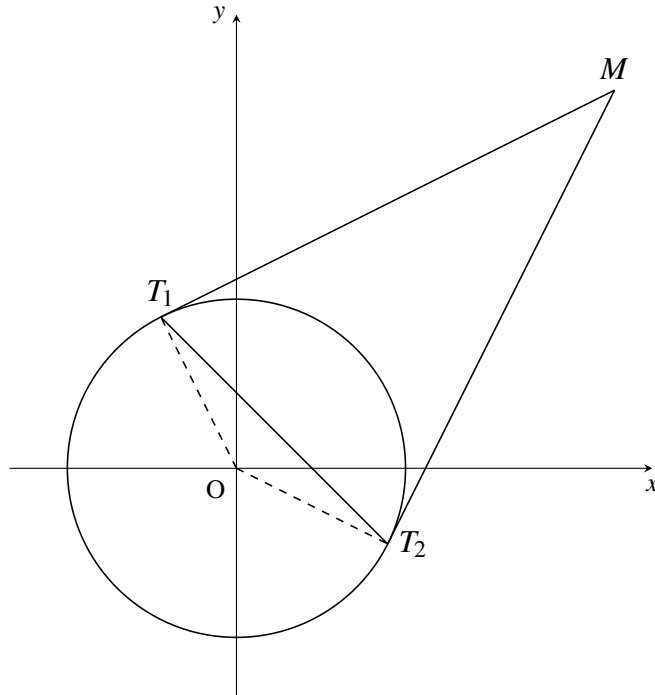
$$d' \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow d(I, d') = R \Leftrightarrow |-b - 2\sqrt{3}| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 - 2\sqrt{3} \\ b = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn:  $(4; 4 + 2\sqrt{3})$ ,  $(4; -4 + 2\sqrt{3})$ ,  $(4; 4 - 2\sqrt{3})$ ,  $(4; -4 - 2\sqrt{3})$ .

**Bài 25.** Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 = R^2$  và điểm  $M(x_0; y_0)$  nằm ngoài  $(C)$ . Từ  $M$  kẻ hai tiếp tuyến  $MT_1$  và  $MT_2$  tới  $(C)$  ( $T_1, T_2$  là các tiếp điểm).

a) Viết phương trình đường thẳng  $T_1T_2$ .

b) Giả sử  $M$  chạy trên một đường thẳng  $d$  cố định không cắt  $(C)$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $T_1T_2$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải.**

a) Giả sử  $T_1 = (x_1; y_1), T_2 = (x_2; y_2)$ .

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $O(0;0)$ , bán kính  $R$ .

Tiếp tuyến  $MT_1$  đi qua điểm  $T_1$ , có véc tơ pháp tuyến  $\overrightarrow{OT_1} = (x_1; y_1)$  có phương trình:

$$x_1x + y_1y = R^2.$$

Và tiếp tuyến  $MT_2$  có phương trình:  $x_2x + y_2y = R^2$ .

$$\text{Có: } M \in MT_1, M \in MT_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1x_0 + y_1y_0 = R^2 \\ x_2x_0 + y_2y_0 = R^2. \end{cases}$$

Suy ra  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$  là các nghiệm của phương trình  $x_0x + y_0y = R^2$ . (1)

Vì  $M$  nằm ngoài  $(C)$  nên  $x_0^2 + y_0^2 > 0$ , do đó (1) là phương trình đường thẳng.

Vậy phương trình đường thẳng  $T_1T_2$  là:  $x_0x + y_0y - R^2 = 0$ .

b) • Xét trường hợp đường thẳng cố định  $d$  có phương trình dạng:  $x = a, (|a| > R)$ .

Khi đó:  $M = (a; y_0)$  và phương trình  $T_1T_2$  là  $ax + y_0y - R^2 = 0$ .

Vậy đường thẳng  $T_1T_2$  luôn đi qua điểm cố định  $\left(\frac{R^2}{a}; 0\right)$ .

• Xét trường hợp đường thẳng cố định  $d$  có phương trình dạng:  $y = kx + m$ .

Do  $d$  không cắt  $(C)$  nên  $m \neq 0$ . Ta có  $M = (x_0; kx_0 + m)$ .

Phương trình đường thẳng  $T_1T_2$  là:

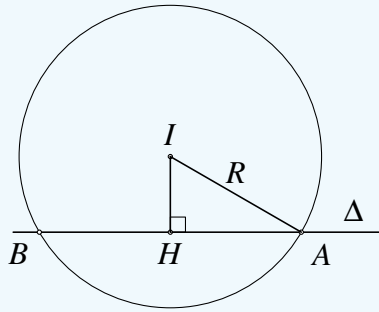
$$x_0x + (kx_0 + m)y - R^2 = 0 \text{ hay } x_0(x + ky) + my - R^2 = 0.$$

Vậy điểm cố định mà đường thẳng  $T_1T_2$  luôn đi qua là  $\left(\frac{-kR^2}{m}; \frac{R^2}{m}\right)$ .

### Dạng 6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng  $\Delta: ax + by + c = 0$  và đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(x_0; y_0)$ , bán kính  $R$ . Đường thẳng  $\Delta$  và đường tròn  $(\mathcal{C})$  có ba vị trí tương đối.

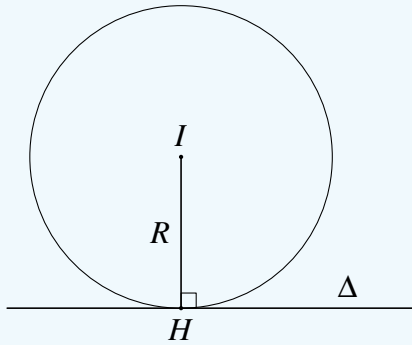
- Đường thẳng  $\Delta$  và đường tròn  $(\mathcal{C})$  có hai điểm chung, ta nói  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  cắt nhau.



⚠ Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn  $(\mathcal{C})$  đến đường thẳng  $\Delta$ :

$$d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < R.$$

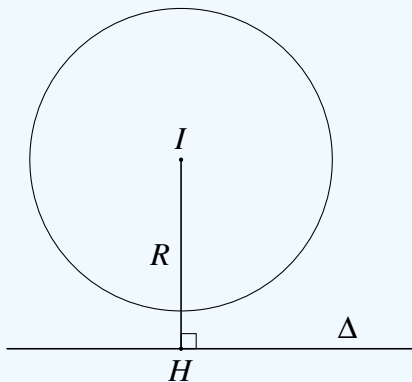
- Đường thẳng  $\Delta$  và đường tròn  $(\mathcal{C})$  có một điểm chung, ta nói  $\Delta$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$ . Đường thẳng  $\Delta$  còn được gọi là tiếp tuyến của đường tròn  $(\mathcal{C})$ .



⚠ Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn  $(\mathcal{C})$  đến đường thẳng  $\Delta$ :

$$d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R.$$

- Đường thẳng  $\Delta$  và đường tròn  $(\mathcal{C})$  không có điểm chung nào, ta nói  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  không cắt nhau.



⚠ Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn  $(\mathcal{C})$  đến đường thẳng  $\Delta$ :

$$d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R.$$

⚠ Khi đường thẳng  $\Delta$  cho bởi phương trình tham số  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ . Để xét vị trí tương đối với đường tròn  $(\mathcal{C})$  ta có thể làm hai cách:

- Từ phương trình tham số chuyển về phương trình tổng quát, xét vị trí tương đối giống như trên.
  - Thế phương trình tham số vào phương trình của đường tròn  $(\mathcal{C})$  ta được phương trình bậc hai có ẩn  $t$ , kí hiệu phương trình (\*).
- Phương trình (\*) vô nghiệm. Ta nói  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  không cắt nhau.
  - Phương trình (\*) có một nghiệm. Ta nói  $\Delta$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$ .
  - Phương trình (\*) có hai nghiệm. Ta nói  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  cắt nhau.

⚠ Khi đường thẳng  $\Delta$  cho bởi phương trình tổng quát  $\Delta: ax + by + c = 0$ , để xét vị trí tương đối

**Ví dụ 21 (Lê Quốc Hiệp).** [0H3B2] Cho đường thẳng  $\Delta : x - 2y + 5 = 0$  và đường tròn  $(\mathcal{C}) : (x - 2)^2 + y^2 = 4$ . Xét vị trí tương đối của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$ .

**Lời giải.**  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(2;0)$  và bán kính  $R = 2$ .

$$\text{Ta có: } d(I, \Delta) = \frac{|2 - 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} > 2.$$

Vậy  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  không cắt nhau.

**Ví dụ 22.** Cho đường thẳng  $\Delta : \begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = t \end{cases}$  và đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ . Xét vị trí tương đối của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$ .

**Lời giải.** Thế phương trình của  $\Delta$  vào phương trình  $(\mathcal{C})$  ta được phương trình:

$$(-5 - 2t)^2 + t^2 - 4(-5 - 2t) + 2t = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 30t + 45 = 0 \Leftrightarrow t = -3.$$

Vậy  $\Delta$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$ .

**Ví dụ 23.** Cho đường thẳng  $\Delta : \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$  và đường tròn  $(\mathcal{C}) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$ . Xét vị trí tương đối của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$ , tìm tọa độ giao điểm nếu có.

**Lời giải.** Thế phương trình của  $\Delta$  vào phương trình  $(\mathcal{C})$  ta được phương trình:

$$20t^2 - 20t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1. \end{cases}$$

Vậy  $\Delta$  cắt  $(\mathcal{C})$ .

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ và } t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  là:  $A(0;2), B(4;4)$ .

**Ví dụ 24.** Cho đường thẳng  $\Delta : 6x + 8y - 1 = 0$  và đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2mx + 4y + m^2 - 5 = 0$ . Tìm  $m$  để  $\Delta$  cắt  $(\mathcal{C})$ .

**Lời giải.**  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(m; -2)$  và bán kính  $R = 3$ .

Để  $\Delta$  cắt  $(\mathcal{C})$  thì  $d(I, \Delta) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|6m + 8 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{36 + 64}} < 3 \Leftrightarrow |6m - 17| < 30 \Leftrightarrow -30 < 6m - 17 < 30 \Leftrightarrow -\frac{13}{6} < m < \frac{47}{6}.$$

$$\text{Vậy } -\frac{13}{6} < m < \frac{47}{6}.$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 26.** Cho đường thẳng  $\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$  và đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ . Xét vị trí tương đối của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$ .

**Lời giải.**  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(3;4)$  và bán kính  $R = 5$ .

$$\text{Ta có: } d(I, \Delta) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 = R.$$

Vậy  $\Delta$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$ .

**Bài 27.** Cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + t \end{cases}$  và đường tròn  $(\mathcal{C}): (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$ . Xét vị trí tương đối của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$ .

**Lời giải.** Thế phương trình của  $\Delta$  vào phương trình  $(\mathcal{C})$  ta được phương trình:

$$(4-4t)^2 + (1+t)^2 = 2 \Leftrightarrow 17t^2 - 30t + 15 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy  $\Delta$  không cắt  $(\mathcal{C})$ .

**Bài 28.** Cho đường thẳng  $\Delta: x - y + 5 = 0$  và đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$ . Tìm tọa độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$ .

**Lời giải.** Tọa độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ (y-5)^2 + y^2 + 6(y-5) - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ 2y^2 - 6y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ y = 4 \text{ hoặc } y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  là:  $A(-1; 4), B(-6; -1)$ .

**Bài 29.** Cho đường thẳng  $\Delta: x - 2y + m = 0$  và đường tròn  $(\mathcal{C}): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ . Tìm  $m$  để  $\Delta$  không cắt  $(\mathcal{C})$ .

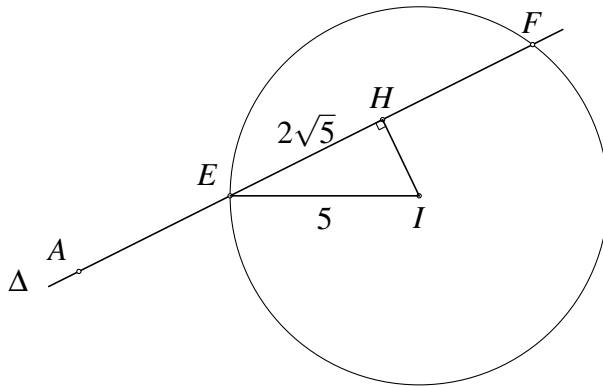
**Lời giải.**  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(1; 2)$  và bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

Để  $\Delta$  không cắt  $(\mathcal{C})$  thì  $d(I, \Delta) > R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 2 + m|}{\sqrt{1 + 4}} > \sqrt{5} \Leftrightarrow |m - 3| > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 > 5 \\ m - 3 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \\ m < -2 \end{cases}.$$

Vậy  $m < -2$  hoặc  $m > 8$ .

**Bài 30.** Cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(-6; 0)$  và đường tròn  $(\mathcal{C}): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$ , biết  $\Delta$  cắt  $(\mathcal{C})$  tại hai điểm  $E, F$  sao cho  $EF = 4\sqrt{5}$ .



**Lời giải.**

$(\mathcal{C})$  có tâm  $I(3; 2)$  và bán kính  $R = 5$ .

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(-6; 0)$  có phương trình  $a(x+6) + by = 0$  ( $a^2 + b^2 > 0$ ).

Gọi  $H$  là trung điểm của  $EF$ , xét tam giác  $IEH$  vuông tại  $H$ , ta có:  $IH = \sqrt{IE^2 - EH^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$ . Theo đề ta có:

$$d(I, \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|a(3+6) + b \cdot 2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |9a + 2b| = \sqrt{5(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow 76a^2 + 36ab - 1b^2 = 0 (*).$$

Do  $b = 0$  không là nghiệm của  $(*)$ ,  $(*) \Leftrightarrow 76\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 36\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$  hoặc  $\frac{a}{b} = \frac{1}{38}$ .

Chọn  $a = 1 \Rightarrow b = -2$  hoặc  $b = 38$ .

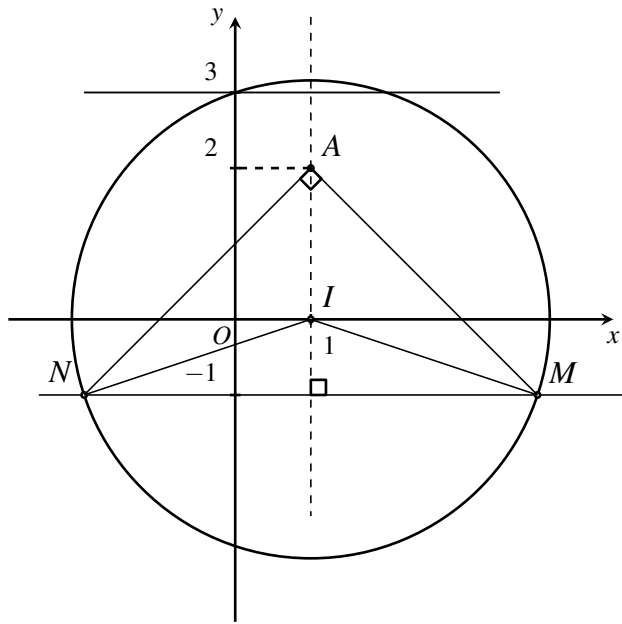
Với  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \Delta: x - 2y + 6 = 0$ .

Với  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 38 \end{cases} \Rightarrow \Delta: x + 38y + 6 = 0$ .

Vậy  $\Delta: x - 2y + 6 = 0, \Delta: x + 38y + 6 = 0$ .

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 31.** Cho điểm  $A(1;2)$  và đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(\mathcal{C})$  tại hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho tam giác  $AMN$  vuông cân tại  $A$ .

**Lời giải.**

Đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(1;0)$  và bán kính  $R = \sqrt{10}$ .

Ta có  $IM = IN$  và  $AM = AN \Rightarrow AI \perp MN$ , suy ra phương trình  $\Delta$  có dạng  $y = m$ .

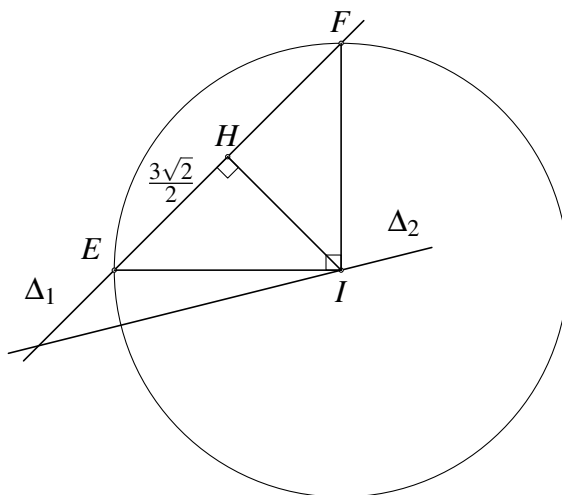
Hoành độ  $M, N$  là nghiệm phương trình:  $x^2 - 2x + m^2 - 9 = 0$  (1).

(1) có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$ , khi và chỉ khi:  $m^2 - 10 < 0$  (\*). Khi đó ta có  $M(x_1; m)$  và  $N(x_2; m)$ .

$AM \perp AN \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AN} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + m^2 - 4m + 5 = 0$ . Áp dụng Viét đối với (1), suy ra:  $2m^2 - 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -1$  hoặc  $m = 3$ , thỏa mãn (\*).

Vậy phương trình  $\Delta$ :  $y = -1$  hoặc  $y = 3$ .

**Bài 32.** Cho đường thẳng  $\Delta_1 : x - y + 4 = 0$  và  $\Delta_2 : x - 4y + 7 = 0$  Viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I$  thuộc  $\Delta_2$ , cắt  $\Delta_1$  tại hai điểm  $E, F$  sao cho tam giác  $IEF$  vuông cân tại  $I$  và  $EF = 3\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I(4t - 7; t)$  thuộc  $\Delta_2$ .

Gọi  $H$  là trung điểm của  $EF$ , do tam giác  $IEF$  vuông cân tại  $I$  nên  $IH = \frac{1}{2}EF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  và  $IE = R = \sqrt{IE^2 + IH^2} = 9$ .

Ta có:  $d(I, \Delta_1) = IH \Leftrightarrow \frac{|4t - 7 - t + 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |3t - 3| = 3 \Leftrightarrow t = 0$  hoặc  $t = 2$ .

Với  $t = 0 \Rightarrow I(-7; 0) \Rightarrow (\mathcal{C}) : (x + 7)^2 + y^2 = 9$ .

Với  $t = 2 \Rightarrow I(1; 2) \Rightarrow (\mathcal{C}) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ .

Vậy  $(\mathcal{C}) : (x+7)^2 + y^2 = 9$  hoặc  $(\mathcal{C}) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ .

### Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

**Phương pháp giải:** Cho đường tròn  $(C)$  có tâm  $I$ , bán kính  $R$  và đường tròn  $(C')$  có tâm  $I'$ , bán kính  $R'$ .

- Nếu  $II' > R + R'$  suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu  $II' < |R - R'|$  suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau.
- Nếu  $II' = |R - R'|$  suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu  $|R - R'| < II' < R + R'$  suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

**Ví dụ 25.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$  và  $(C') : x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$ . Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A, B$ .

#### Lời giải.

- Cách 1.  $(C)$  có tâm  $I(1; 3)$  và bán kính  $R = 5$ ,  $(C')$  có tâm  $I'(3; 1)$  và bán kính  $R' = \sqrt{13}$ .  
Ta có  $II' = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$ .  
Ta thấy  $|R_1 - R_2| < I_1 I_2 < |R_1 + R_2|$  suy ra hai đường tròn cắt nhau.

- Cách 2. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2 + y^2 - 2(y+3) - 6y - 15 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 3 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là  $A(1; -2)$  và  $B(6; 3)$ .

**Ví dụ 26.** Cho hai đường tròn:  $(C) : x^2 + y^2 = 1$  và  $(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$ . Xác định  $m$  để  $(C_m)$  tiếp xúc với  $(C)$ .

**Lời giải.** Dễ thấy  $(C)$  có tâm  $O(0; 0)$  và bán kính  $R = 1$ .

$(C_m)$  có tâm  $I(m+1; -2m)$  và bán kính  $R' = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}$ .

Ta thấy  $OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} < R'$  điểm  $O$  nằm trong đường tròn tâm  $I$  suy ra  $(C)$  và  $(C_m)$  chỉ có thể tiếp xúc trong nhau.

Điều kiện để hai đường tròn tiếp xúc trong là

$$R' - R = OI \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5} - 1 = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}.$$

Giải phương trình ta được  $m = -1$  hoặc  $m = \frac{3}{5}$ .

**Ví dụ 27.** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  có tâm  $I$  và đường thẳng  $\Delta : \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$ .

- Tìm  $m$  để đường thẳng  $\Delta$  cắt đường tròn  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ .
- Tìm  $m$  để diện tích tam giác  $IAB$  là lớn nhất.

#### Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm  $I(1; -2)$ , bán kính  $R = 3$

$\Delta$  cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < 3. \Leftrightarrow 5m^2 + 5m + 17 > 0 \text{ (đúng với mọi } m).$$

b) Ta có  $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{9}{2} \sin \widehat{AIB} \leq \frac{9}{2}$ .

Suy  $\max S_{IAB} = \frac{9}{2}$  khi và chỉ khi  $\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên  $\Delta$  khi đó  $\widehat{AIH} = 45^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \cos 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}$ .

Ta có  $d(I; \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{2 + m^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4$ .

Vậy với  $m = -4$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

### Dạng 8. Phương trình đường thẳng chứa tham số

Đối với bài toán tìm  $m$ : Ta dựa vào điều kiện bài ra đưa về phương trình ẩn  $m$ .

**Ví dụ 28.** Tìm  $m$  biết đường thẳng  $d: (m+1)x - my + 2m - 1 = 0$  đi qua điểm  $A(-1; 2)$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(-1; 2)$  khi và chỉ khi

$$-(m+1) - 2m + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

**Ví dụ 29.** Tìm  $m$  biết đường thẳng  $d: mx - (m-2)y + 3 = 0$  song song với đường thẳng  $\Delta: 2x + 3y - 1 = 0$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta$  khi và chỉ khi

$$\frac{m}{2} = \frac{-m+2}{3} \neq \frac{3}{-1} \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}.$$

**Ví dụ 30.** Tìm  $m$  biết đường thẳng  $d: x + (2m+1)y + m$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: x - y + 1 = 0$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $d$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_d = (1; 2m+1)$ . Đường thẳng  $\Delta$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\Delta = (1; -1)$ .

Đường thẳng  $d$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta$  khi và chỉ khi

$$\vec{n}_d \cdot \vec{n}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + (2m+1)(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

**Ví dụ 31.** Tìm  $m$  biết đường thẳng  $d: 2x - my + 2 = 0$  tạo với đường thẳng  $\Delta: x + y + 1 = 0$  một góc  $60^\circ$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $d$  và  $\Delta$  có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_d = (2; -m)$  và  $\vec{n}_\Delta = (1; 1)$ . Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{|\vec{n}_d \cdot \vec{n}_\Delta|}{|\vec{n}_d| \cdot |\vec{n}_\Delta|} = \frac{|2 - m|}{\sqrt{2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 2|2 - m| \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 + 4) = 4(4 - 4m + m^2)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \pm 2\sqrt{3}.$$

**Ví dụ 32.** Tìm  $m$  để đường thẳng  $d_m : mx + (m-3)y + m^2 - 3m = 0$  tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

**Lời giải.** Điều kiện để đường thẳng  $d_m$  cắt hai trục tọa độ là  $m(m-3) \neq 0$ .

Tọa độ giao điểm của đường thẳng  $d_m$  với  $Ox$  và  $Oy$  lần lượt là  $A(3-m; 0)$  và  $B(0; -m)$ .

Ta có

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}\sqrt{(3-m)^2} \cdot \sqrt{(-m)^2} = \frac{|3m-m^2|}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |m^2 - 3m| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 - 3m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ m = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

**Ví dụ 33.** Tìm điểm cố định của họ đường thẳng  $d_m : (2m-1)x - (m+1)y + 3 - m = 0$ .

**Lời giải.** Gọi  $A(x_0; y_0)$  là điểm cố định của họ đường thẳng, khi đó ta có

$$(2m-1)x_0 - (m+1)y_0 + 3 - m = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (2x_0 - y_0 - 1)m + (3 - x_0 - y_0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{4}{3} \\ y_0 = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy  $A\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 33.** Cho họ đường thẳng  $d_m : (2m-3)x + my - 2 = 0$ . Tìm điều kiện của tham số  $m$  biết đường thẳng  $d_m$  đi qua  $A(2; 3)$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $d_m$  đi qua  $A(2; 3)$  khi và chỉ khi

$$(2m-3)2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow 7m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{7}.$$

**Bài 34.** Cho họ đường thẳng  $d_m : (2m-3)x + my - 2 = 0$ . Tìm điều kiện của tham số  $m$  biết đường thẳng  $d_m$  song song với đường thẳng  $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.** Ta có phương trình tổng quát của  $\Delta : x - 2y - 1 = 0$ .

Đường thẳng  $d_m$  song song với  $\Delta$  khi và chỉ khi  $\frac{2m-3}{1} = \frac{m}{-2} \neq \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow m = \frac{6}{5}$ .

**Bài 35.** Cho họ đường thẳng  $d_m : (2m-3)x + my - 2 = 0$ . Tìm điều kiện của tham số  $m$  biết đường thẳng  $d_m$  vuông góc với đường thẳng  $3x - 4y + 5 = 0$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $d_m$  và  $\Delta$  lần lượt có véc tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_d = (2m-3; m)$  và  $\vec{n}_\Delta = (3; -4)$ .  
Để  $d_m \perp \Delta$  khi và chỉ khi  $\vec{n}_d \cdot \vec{n}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 3(2m-3) - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$ .

**Bài 36.** Tìm điểm cố định của họ đường thẳng  $d_m : (2m-3)x + my - 2 = 0$ .

**Lời giải.** Gọi điểm cố định của họ đường thẳng là  $A(x_0; y_0)$ . Khi đó ta có

$$(2m-3)x_0 + my_0 - 2 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (2x_0 + y_0)m - (3x_0 + 2) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -\frac{2}{3}, y_0 = \frac{4}{3}.$$

Vậy  $A\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

### Dạng 9. Phương trình đường tròn chứa tham số

Dựa theo điều kiện bài toán, ta đưa về phương trình theo tham số nào đó, từ đó giải ra tìm được điều kiện của tham số.

**Ví dụ 34.** Cho đường tròn  $(C_m) : x^2 + y^2 - (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$ .

- Chứng minh rằng  $(C_m)$  luôn là đường tròn với mọi giá trị của tham số  $m$ .
- Tìm  $m$  để đường tròn  $(C_m)$  đi qua điểm  $A(2; -3)$ .
- Tìm tập hợp tâm các đường tròn  $(C_m)$  khi  $m$  thay đổi.
- Chứng minh rằng khi  $m$  thay đổi, họ các đường tròn  $(C_m)$  luôn đi qua hai điểm cố định.
- Tìm những điểm trong mặt phẳng tọa độ mà họ  $(C_m)$  không đi qua với mọi giá trị của tham số  $m$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $a^2 + b^2 - c = \frac{(m+2)^2}{4} + \frac{(m+4)^2}{4} - m - 1 = \frac{2m^2 + 8m + 16}{4} = \frac{m^2 + (m+4)^2}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ .  
Điều đó chứng tỏ  $(C_m)$  luôn là phương trình đường tròn.

b) Để  $(C_m)$  đi qua điểm  $A(2; -3)$  khi và chỉ khi

$$2^2 + (-3)^2 - 2(m+2) - (m+4)(-3) + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m + 22 = 0 \Leftrightarrow m = -11.$$

c) Tọa độ tâm của họ đường tròn  $(C_m)$  là  $I\left(\frac{m+2}{2}; \frac{m+4}{2}\right)$ .

Đặt  $x = \frac{m+2}{2}; y = \frac{m+4}{2} \Rightarrow y = x + 1$ . Vậy quỹ tích tâm  $I$  là đường thẳng  $y = x + 1$ .

d) Giả sử  $A(x_0; y_0)$  là điểm cố định của họ  $(C_m)$ , khi đó ta có

$$x_0^2 + y_0^2 - (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_0 - y_0)m + (x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 - y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \\ x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

e) Giả sử  $A(x_0; y_0)$  là điểm mà họ  $(C_m)$  không đi qua với mọi  $m$ , khi đó ta có

$$x_0^2 + y_0^2 - (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 \neq 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_0 - y_0)m + (x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1) \neq 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 - y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Điều đó tương đương với họ  $(C_m)$  không đi qua mọi điểm nằm trong hình tròn  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$  trừ hai điểm  $A_1(-1; 2)$  và  $A_2(1; 0)$ .

**Ví dụ 35.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$  có tâm  $I$  và đường thẳng  $\Delta: mx + 4y = 0$  (ở đó  $m$  là tham số). Tìm  $m$  biết đường thẳng  $\Delta$  cắt đường tròn  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  thỏa mãn diện tích tam giác  $IAB$  bằng 12.

**Lời giải.**

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; m)$ , bán kính  $R = 5$ . Gọi  $H$  là trung điểm của dây cung  $AB$ . Ta có  $IH$  là đường cao của tam giác  $IAB$  và

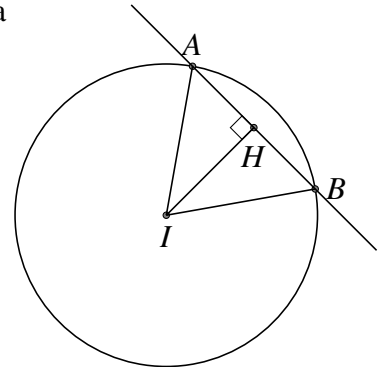
$$IH = d(I, \Delta) = \frac{|m + 4m|}{\sqrt{m^2 + 16}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 16}}$$

$$AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25 - \frac{(5m)^2}{m^2 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{m^2 + 16}}.$$

Theo bài ra ta có

$$S_{\triangle IAB} = 12 \Leftrightarrow 2S_{\triangle IAH} = 12$$

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) \cdot AH = 12 \Leftrightarrow 25|m| = 3(m^2 + 16) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 3 \\ m = \pm \frac{16}{3} \end{cases}.$$



**Ví dụ 36.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số  $\alpha$  là  $d_\alpha$  có phương trình:  $(x+1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0$ . Chứng minh rằng họ đường thẳng đã cho luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**Lời giải.** Lấy  $A(-1; 1)$ , ta có  $d(A; d_\alpha) = \frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = 1$ . Vậy họ đường thẳng luôn tiếp xúc với đường tròn  $(A; R = 1)$  cố định.

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 37.** Cho họ đường tròn  $(C_m)$  có phương trình  $x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2}$ .

- a) Tìm tập hợp tâm của  $(C_m)$  khi  $m$  thay đổi.  
 b) Chứng minh rằng  $(C_m)$  luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.  
 c) Tìm  $m$  để  $(C_m)$  tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : x + y - 2$ .

**Lời giải.**

- a) Quỹ tích tâm là đường thẳng  $x - 2y = 0$ .

- b) Họ đường tròn  $(C_m)$  có tâm  $I(2m; m)$  và bán kính  $R = \frac{|m+1|\sqrt{2}}{2}$ .

Giả sử đường thẳng cố định cần tìm là  $d : Ax + By + C = 0$ . Suy ra  $d(I; d) = R, \forall m$ .

Điều đó tương đương với

$$\frac{|2Am + Bm + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|m+1|\sqrt{2}}{2}, \forall m$$

Giải ra ta được  $\begin{cases} A = 1, B = -1, C = 1 \\ A = 1, B = -7, C = -5 \end{cases}$ .

- c) Để đường thẳng  $\Delta$  tiếp xúc với  $(C_m)$  thì  $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2m + m - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|m+1|\sqrt{2}}{2}$ .

Giải ra ta được  $m = \frac{3}{2}$  và  $m = \frac{1}{4}$ .

**Bài 38.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ . Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đường thẳng  $\Delta : x + (m-1)y + m = 0$  tiếp xúc với đường tròn  $(C)$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2; -4)$  và bán kính  $R = \sqrt{2^2 + (-4)^2 - (-5)} = 5$ .

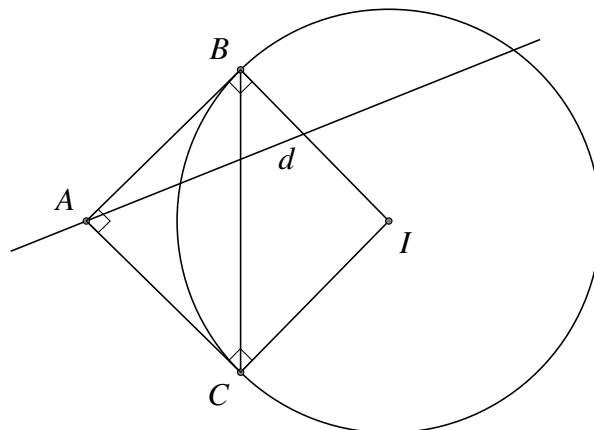
Để đường thẳng  $\Delta$  tiếp xúc với  $(C)$  khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2 - 4(m-1) + m|}{\sqrt{1 + (m-1)^2}} = 5$$

$$\Leftrightarrow (6 - 3m)^2 = 25(2 - 2m + m^2) \Leftrightarrow 8m^2 - 7m + 7 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy đường thẳng  $\Delta$  không thể tiếp xúc đường tròn.

**Bài 39.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$  và đường thẳng  $d : x + y + m = 0$ . Tìm  $m$  để trên đường thẳng  $d$  có duy nhất một điểm  $A$  mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến  $AB, AC$  tới đường tròn  $(C)$  ( $B, C$  là hai tiếp điểm) sao cho tam giác  $ABC$  vuông.

**Lời giải.**

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; -2)$  và bán kính  $R = 3$ . Nếu tam giác  $ABC$  vuông góc tại  $A$  thì khi đó tứ giác  $ABIC$  là hình vuông. Theo tính chất hình vuông ta có  $IA = IB\sqrt{2}$ . (1)

Nếu  $A$  nằm trên  $d$  thì  $A(t; -m-t)$  suy ra  $IA = \sqrt{(t-1)^2 + (t-2+m)^2}$ . Thay vào (1) ta có

$$\sqrt{(t-1)^2 + (t-2+m)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 2(m-1)t + m^2 - 4m - 13 = 0. (2)$$

Để trên  $d$  có đúng một điểm  $A$  thì (2) có đúng một nghiệm  $t$ , từ đó ta có

$$\Delta = -(m^2 + 10m + 25) = 0 \Leftrightarrow -(m+5)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -5.$$

Khi đó (2) có nghiệm kép là  $t_1 = t_2 = t_0 = \frac{m-1}{2} = \frac{-5-1}{2} = -3 \Rightarrow A(-3; 8)$ .

**Bài 40.** Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho họ đường tròn  $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 2(m+2)y + 6m + 7 = 0$  (với  $m$  là tham số). Xác định tọa độ tâm đường tròn thuộc họ đã cho tiếp xúc với trục tung.

**Lời giải.** Họ đường tròn  $(C_m)$  có tâm  $I(m+1; m+2)$  và bán kính

$$R = \sqrt{(m+1)^2 + (m+2)^2 - 6m - 7} = \sqrt{2m^2 - 2}.$$

Để  $(C_m)$  tiếp xúc với trục tung thì

$$|m+1| = \sqrt{2m^2 - 2} \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Thử lại ta được  $m = 3$  thỏa mãn, từ đó ta được  $I(4; 5)$ .

**Bài 41.** Cho đường tròn  $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$  và đường thẳng  $\Delta: (m+1)x + my - 1 = 0$ , với  $m$  là tham số.

- Chứng minh rằng đường thẳng  $\Delta$  luôn cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ .
- Tìm  $m$  để độ dài đoạn thẳng  $AB$  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

- Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2; 1)$  và bán kính  $R = 3$ .

$$\text{Ta có } d(I; \Delta) = \frac{|(m+1)2 + m - 1|}{\sqrt{(m+1)^2 + m^2}} = \frac{|3m+1|}{\sqrt{(m+1)^2 + m^2}}.$$

$$\text{Xét } d^2(I; \Delta) - R^2 = \frac{(3m+1)^2}{2m^2 + 2m + 1} - 9 = \frac{-9m^2 - 12m - 8}{(m+1)^2 + m^2} = \frac{-(3m+2)^2 - 4}{(m+1)^2 + m^2} < 0, \forall m.$$

Vậy  $d(I; \Delta) < R, \forall m$ , suy ra đường thẳng  $\Delta$  luôn cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt  $A, B$ .

- Gọi  $M$  là trung điểm của dây  $AB$  suy ra

$$AB^2 = 4MA^2 = 4(R^2 - d^2(I; \Delta)) = 4 \frac{9m^2 + 12m + 8}{2m^2 + 2m + 1} = 4y.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} 9m^2 + 12m + 8 &= 2ym^2 + 2ym + y \\ \Leftrightarrow (2y-9)m^2 + (2y-12)m + (y-8) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Để tồn tại  $m$  thì phương trình  $(*)$  phải có nghiệm.

Khi  $y = \frac{9}{2}$  thì ta có phương trình  $-3m - \frac{7}{2} = 0$  có nghiệm.

Khi  $y \neq \frac{9}{2}$  ta xét  $\Delta' = (y-6)^2 - (2y-9)(y-8) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{19 - \sqrt{217}}{2} \leq y \leq \frac{19 + \sqrt{217}}{2}.$

**Bài 42.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $a$  để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}.$$

**Lời giải.** Phương trình thứ hai tương đương với  $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$ .

Nhận thấy  $d_1: x+y-2=0$  và  $d_2: x+y+2=0$  là hai đường thẳng đối xứng nhau qua gốc tọa độ, mặt khác đường tròn  $(C): x^2+y^2=2(1+a)$  ( $a > -1$ ) cũng đối xứng qua gốc tọa độ. Vì vậy để hệ có đúng hai nghiệm thì đường tròn  $(C)$  phải tiếp xúc với  $d_1$ . Từ đó ta có

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2(1+a)} \Leftrightarrow 1+a=1 \Leftrightarrow a=0.$$

**Bài 43.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho họ đường tròn  $(C_m): x^2+y^2-2mx-2(1-m)y+2m^2-2m-3=0$ . Tìm quỹ tích tâm của họ đường tròn  $(C_m)$ .

**Lời giải.** Quỹ tích tâm đường tròn  $(C_m)$  là đường thẳng  $y=1-x$ .

#### Dạng 10. Tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước

Ở đây, ta xét bài toán tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước về độ dài, về góc, về khoảng cách, diện tích, liên quan đến đường tròn, tạo hình vuông, tam giác đều, ...

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , xét đường tròn  $(\mathcal{C}): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ .

Tìm điểm  $M \in (\mathcal{C})$ , ta làm như sau:

##### Cách 1

- Gọi  $M(x_0; y_0) \in (\mathcal{C})$ , ta có:  $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$ .
- Dựa vào điều kiện cho trước ta có thêm hệ thức liên hệ giữa  $x_0$  và  $y_0$ . Từ đó tìm được tọa độ của điểm  $M$ .

##### Cách 2

- Chuyển phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  về dạng tham số:  $\begin{cases} x=a+R\sin t \\ y=b+R\cos t \end{cases}$  với  $t \in [0; 360^\circ)$ .
- Gọi  $M(x_0; y_0) \in (\mathcal{C})$ , ta có:  $\begin{cases} x_0=a+R\sin t \\ y_0=b+R\cos t \end{cases}$  với  $t \in [0; 360^\circ)$ .
- Sử dụng điều kiện cho trước để xác định  $\sin t$  và  $\cos t$ . Từ đó tìm được tọa độ của điểm  $M$ .

**Ví dụ 37.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Biết  $M(1; -1)$  là trung điểm cạnh  $BC$  và  $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $A, B, C$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$  nên ta có  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow A(0; 2)$ .

Vì tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  nên  $AM \perp BC$  và  $MA = MB = MC$ .

Phương trình đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $M(1; -1)$  và nhận  $\overrightarrow{AM} = (1; -3)$  làm véc-tơ pháp tuyến là:  $1(x-1)-3(y+1)=0$  hay  $x-3y-4=0$ .

Vì  $MA = MB = MC = \sqrt{10}$  nên hai điểm  $B, C$  thuộc đường tròn  $(\mathcal{C}): (x-1)^2+(y+1)^2=10$ .

Do đó, tọa độ hai điểm  $B, C$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y-4=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Vậy  $A(0; 2), B(4; 0), C(-2; -2)$  hoặc  $A(0; 2), B(-2; -2), C(4; 0)$ .

**Ví dụ 38.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ .

- Tìm các điểm thuộc  $(\mathcal{C})$  có tọa độ nguyên.
- Xác định tọa độ các đỉnh  $B, C$  của tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(\mathcal{C})$ , biết điểm  $A(4; 5)$ .

**Lời giải.**

- Ta xem phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  đã cho là phương trình bậc hai với ẩn số là  $y$ :  

$$y^2 - 6y + x^2 - 4x + 5 = 0. \quad (1)$$
 Phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 2 + 2\sqrt{2}. \quad (2)$ 
 Từ (2) suy ra các điểm thuộc  $(\mathcal{C})$  có hoành độ nguyên là: 0; 1; 2; 3; 4. (3)  
 Lần lượt thay các hoành độ nguyên ở (3) vào (1) ta tìm được các điểm thuộc  $(\mathcal{C})$  có tọa độ nguyên là: (0; 1), (0; 5), (4; 1), (4; 5).
- Đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(2; 3)$  và bán kính  $R = 2\sqrt{2}$ .  
 Vì tam giác  $ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(\mathcal{C})$  nên tâm  $I$  của  $(\mathcal{C})$  là trọng tâm, đồng thời là trực tâm của tam giác  $ABC$ .  
 Gọi  $H(x; y)$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên cạnh  $BC$ , ta có:

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IH} \Rightarrow H(1; 2).$$

Phương trình đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $H(1; 2)$  và nhận  $\overrightarrow{AI} = (-2; -2) = -2(1; 1)$  làm véc-tơ pháp tuyến có dạng:  $x + y - 3 = 0$ .

Do đó, tọa độ hai điểm  $B, C$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ 2y^2 - 8y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy  $B(1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ ,  $C(1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$  hoặc  $B(1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ ,  $C(1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ .

**Ví dụ 39.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$  và đường thẳng  $(d) : x + y - 2 = 0$ .

- Chứng minh rằng  $(d)$  luôn cắt  $(\mathcal{C})$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .
- Tìm điểm  $C$  thuộc  $(\mathcal{C})$  sao cho tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất.

**Lời giải.**

- Xét hệ phương trình:  

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$
 Hệ phương trình trên có hai nghiệm (2; 0) và (0; 2) nên suy ra  $(d)$  luôn cắt  $(\mathcal{C})$  tại hai điểm phân biệt  $A(2; 0)$ ,  $B(0; 2)$ .  
 Ta có:  $AB = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .
- Ta có  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .  
 Phương trình của  $(\mathcal{C})$  được viết dưới dạng tham số là:  $\begin{cases} x = 2 + 2\sin t \\ y = 2 + 2\cos t \end{cases}$  với  $t \in [0; 360^\circ)$ .  
 Vì  $C \in (\mathcal{C})$  nên suy ra  $C(2 + 2\sin t; 2 + 2\cos t)$ .  
 Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  lên  $AB$ , ta có:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = CH\sqrt{2}$ .  
 Suy ra tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi  $CH$  có độ dài lớn nhất.

$$\text{Ta có } CH = d(C, (d)) = \frac{|2 + 2\sin t + 2 + 2\cos t - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\sqrt{2}\sin(t + 45^\circ) + 1|.$$

Do đó,  $CH$  lớn nhất  $\Leftrightarrow \sin(t + 45^\circ) = 1 \Leftrightarrow t = 45^\circ$ .

Vậy  $C(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ .

**Ví dụ 40.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$  và đường thẳng  $(d) : x - y - 2 = 0$ .

- Tìm trên  $(\mathcal{C})$  điểm  $P$  sao cho khoảng cách từ  $P$  đến đường thẳng  $(d)$  đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.
- Tìm điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc  $(\mathcal{C})$  sao cho  $x_0 + y_0$  đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

### Lời giải.

- a) Đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(2; 3)$  và bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

$$\text{Ta có } d(I, (d)) = \frac{|2 - 3 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2} = R \Rightarrow (d) \text{ không cắt } (\mathcal{C}).$$

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua tâm  $I$  của  $(\mathcal{C})$  và vuông góc với  $(d)$ . Khi đó phương trình đường thẳng  $\Delta$  là:  $1(x - 2) + 1(y - 3) = 0$  hay  $x + y - 5 = 0$ .

Tọa độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(\mathcal{C})$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y^2 - 6y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Suy ra  $\Delta$  cắt  $(\mathcal{C})$  tại hai điểm phân biệt  $P_1(1; 4)$  và  $P_2(3; 2)$ .

Ta có:

$$\begin{aligned} d(P_1, (d)) &= \frac{|1 - 4 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}. \\ d(P_2, (d)) &= \frac{|3 - 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy khi  $P \equiv P_1$  thì khoảng cách từ  $P$  đến đường thẳng  $(d)$  đạt giá trị lớn nhất và khi  $P \equiv P_2$  thì khoảng cách từ  $P$  đến đường thẳng  $(d)$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- b) Phương trình của  $(\mathcal{C})$  được viết dưới dạng tham số là:  $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}\sin t \\ y = 3 + \sqrt{2}\cos t \end{cases}$  với  $t \in [0; 360^\circ)$ .

$$\text{Vì } M(x_0; y_0) \in (\mathcal{C}) \text{ nên suy ra } \begin{cases} x_0 = 2 + \sqrt{2}\sin t \\ y_0 = 3 + \sqrt{2}\cos t. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_0 + y_0 = 5 + \sqrt{2}(\sin t + \cos t) = 5 + 2\sin(t + 45^\circ).$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 \text{ đạt giá trị lớn nhất} &\Leftrightarrow \sin(t + 45^\circ) = 1 \Leftrightarrow t = 45^\circ \Rightarrow M(1; 2). \\ x_0 + y_0 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất} &\Leftrightarrow \sin(t + 45^\circ) = -1 \Leftrightarrow t = 225^\circ \Rightarrow M(3; 4). \end{aligned}$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 44.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 = 4$  và hai điểm  $A\left(1; -\frac{8}{3}\right)$ ,  $B(3; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $(\mathcal{C})$  sao cho tam giác  $MAB$  có diện tích bằng  $\frac{20}{3}$ .

**Lời giải.** Ta có  $AB = \sqrt{(3-1)^2 + \left(0 + \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$ .

Phương trình đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $B(3;0)$  và nhận  $\vec{AB} = \left(2; \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}(3;4)$  làm véc-tơ chỉ phương có dạng:  $4(x-3) - 3(y-0) = 0$  hay  $4x - 3y - 12 = 0$ .

Gọi  $M(x;y)$ . Ta có:  $S_{\triangle MAB} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(M, AB) \cdot AB = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|4x-3y-12|}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow |4x-3y-12| = 20$ . (1)

Lại có  $M \in (\mathcal{C}) \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ . (2)

Từ (1) & (2), ta có hệ phương trình:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ |4x - 3y - 12| = 20 \end{cases}$ .

Giải hệ phương trình trên, ta tìm được  $M(-2;0)$  hoặc  $M\left(-\frac{14}{25}; \frac{48}{75}\right)$ .

**Bài 45.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: x + y + 2 = 0$  và đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ . Gọi  $I$  là tâm của đường tròn  $(\mathcal{C})$  và  $M$  là một điểm thuộc đường thẳng  $\Delta$ . Qua  $M$ , kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn  $(\mathcal{C})$  ( $A, B$  là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho tứ giác  $MAIB$  có diện tích bằng 10.

**Lời giải.** Đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(2;1)$  và bán kính  $R = \sqrt{5} \Rightarrow AI = \sqrt{5}$ .

Ta có  $S_{MAIB} = 10 \Leftrightarrow S_{\triangle MAI} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AI = 5 \Leftrightarrow AM = 2\sqrt{5}$ .

Suy ra  $IM^2 = IA^2 + AM^2 = 5 + 20 = 25$ .

Ta có  $M \in \Delta \Rightarrow M(m; -m-2)$ . Do đó, ta có:

$$IM^2 = 20 \Leftrightarrow (m-2)^2 + (m+3)^2 = 20 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy  $M(2; -3)$  hoặc  $M(-3; 1)$ .

**Bài 46.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(\mathcal{C}): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$  và điểm  $A(2;3)$ .

- Tìm các điểm thuộc  $(\mathcal{C})$  có tọa độ nguyên.
- Tìm điểm  $M$  thuộc  $(\mathcal{C})$  sao cho  $MA$  đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

**Lời giải.**

- Ta xem phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  đã cho là phương trình bậc hai với ẩn số là  $y$ :

$$y^2 - 4y + x^2 - 6x + 5 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) suy ra các điểm thuộc } (\mathcal{C}) \text{ có hoành độ nguyên là: } 1; 2; 3; 4; 5. \quad (3)$$

Lần lượt thay các hoành độ nguyên ở (3) vào (1) ta tìm được các điểm thuộc  $(\mathcal{C})$  có tọa độ nguyên là:  $(1;0), (1;4), (5;0), (5;4)$ .

- Phương trình của  $(\mathcal{C})$  được viết dưới dạng tham số là:  $\begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{2}\sin t \\ y = 2 + 2\sqrt{2}\cos t \end{cases}$  với  $t \in [0; 360^\circ)$ .

Vì  $M \in (\mathcal{C})$  nên suy ra  $M(3 + 2\sqrt{2}\sin t; 2 + 2\sqrt{2}\cos t)$ .

$$\text{Ta có } MA^2 = (2\sqrt{2}\sin t + 1)^2 + (2\sqrt{2}\cos t - 1)^2 = 10 + 8\sin(t - 45^\circ).$$

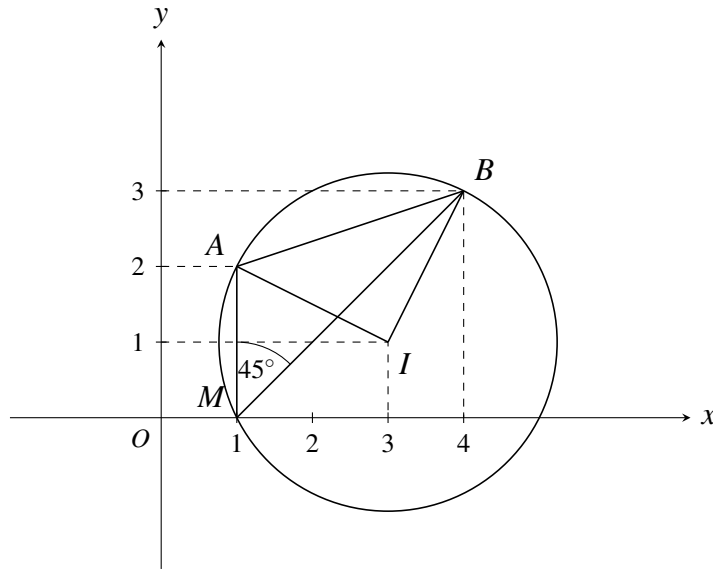
$$\text{Suy ra } 2 \leq MA^2 \leq 18 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq MA \leq 3\sqrt{2}.$$

Do đó, ta có:

- $MA$  đạt giá trị lớn nhất  $\Leftrightarrow \sin(t - 45^\circ) = 1 \Leftrightarrow t = 135^\circ \Rightarrow M(1;4)$ .
- $MA$  đạt giá trị nhỏ nhất  $\Leftrightarrow \sin(t - 45^\circ) = -1 \Leftrightarrow t = 315^\circ \Rightarrow M(5;0)$ .

**Bài 47.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1;2), B(4;3)$ . Tìm trên trục hoành điểm  $M$  sao cho  $\widehat{AMB} = 45^\circ$ .

**Lời giải.**



Giả sử đã tìm được điểm  $M \in Ox$  sao cho  $\widehat{AMB} = 45^\circ$ . Vẽ đường tròn tâm  $I(x; y)$  qua ba điểm  $A, B, M$ . Khi đó, ta có tam giác  $ABI$  vuông cân tại  $I$ . Do đó, ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ \vec{AI} \cdot \vec{BI} = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \\ (x-1)(x-4) + (y-2)(y-3) = 0 \\ 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy  $I(3; 1)$  hoặc  $I(2; 4)$ .

Trong cả hai trường hợp này ta đều có  $IA = \sqrt{5}$ .

Đường tròn tâm  $I(2; 4)$ , bán kính  $\sqrt{5}$  không cắt trục hoành.

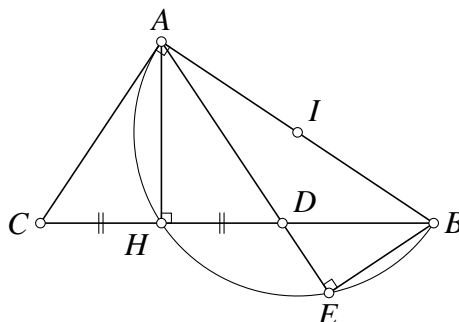
Đường tròn tâm  $I(3; 1)$ , bán kính  $\sqrt{5}$  có phương trình  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ , nó cắt trục hoành tại hai điểm  $(1; 0)$  và  $(5; 0)$ .

Vậy  $M(1; 0)$  hay  $M(5; 0)$ .

### BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 48.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A(2; 4)$  có  $AB > AC$  và  $B(8; 0)$ . Gọi  $H$  là chân đường vuông góc kẻ từ  $A$ , điểm  $D$  nằm trên đường thẳng  $BC$  sao cho  $H$  là trung điểm  $CD$ . Gọi  $E$  là điểm nằm trên đường thẳng  $AD$  sao cho  $BC$  là phân giác góc  $ABE$ . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABE$ .

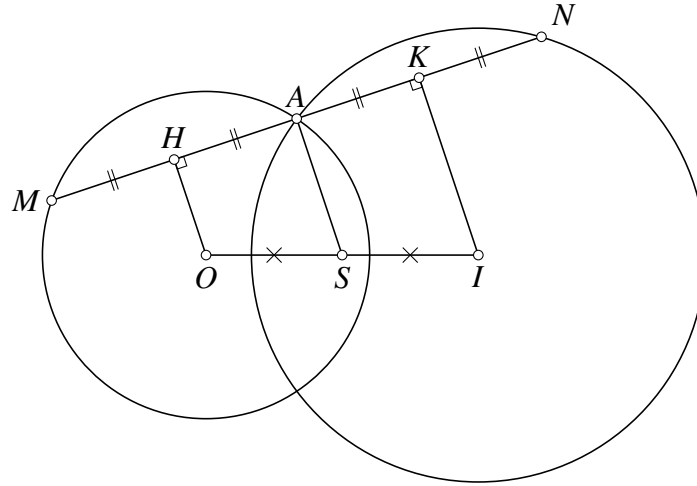
**Lời giải.**



Để thấy tam giác  $ACD$  cân tại  $A$  có  $AH$  là đường cao nên  $\widehat{CAH} = \widehat{DAH}$ . Ta có  $\widehat{EBD} = \widehat{ABD} = \widehat{CAH} = \widehat{DAH}$  nên tứ giác  $AHEB$  nội tiếp. Mà  $\widehat{AHB} = 90^\circ$  nên tam giác  $ABE$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AB$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có  $I(5;2)$  và  $IA = \sqrt{13}$ . Vậy phương trình đường tròn cần tìm là  $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 13$ .

**Bài 49.** Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , cho hai đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 = 13$  và  $(C_2): (x-6)^2 + y^2 = 25$ . Gọi  $A$  là giao điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$  sao cho  $A$  có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng đi qua  $A$  cắt  $(C_1)$  và  $(C_2)$  theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

**Lời giải.**

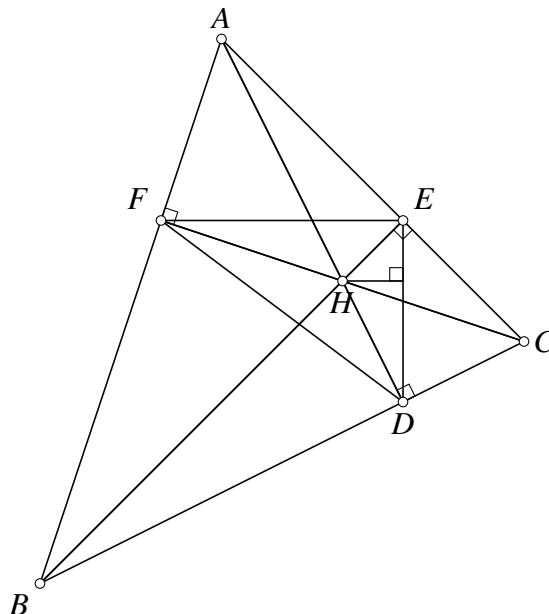


Tâm và bán kính của hai đường tròn  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  lần lượt là  $O(0;0)$ ,  $R_1 = \sqrt{13}$  và  $I(6;2)$ ,  $R_2 = 5$ . Gọi  $S$ ,  $H$ ,  $K$  lần lượt là trung điểm của  $OI$ ,  $MA$ ,  $NA$ .

Giao điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ (x-6)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ . Giải hệ ta suy ra  $A(2;3)$  ( $A$  có tung độ dương). Ta có  $OH \parallel IK$  (cùng vuông góc với  $d$ ), lại theo giả thiết suy ra  $AH = AK$  nên  $SA$  là đường trung bình của hình thang  $HOIK$ . Do đó  $SA \perp d$ . Đường thẳng  $d$  qua  $A$  nhận  $\vec{SA}$  làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình  $x - 3y + 7 = 0$ .

**Bài 50.** Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-1;5)$ ,  $B(-4;-4)$ ,  $C(4;0)$ . Gọi  $D$ ,  $E$ ,  $F$  lần lượt là chân các đường cao hạ từ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác  $DEF$ .

**Lời giải.**



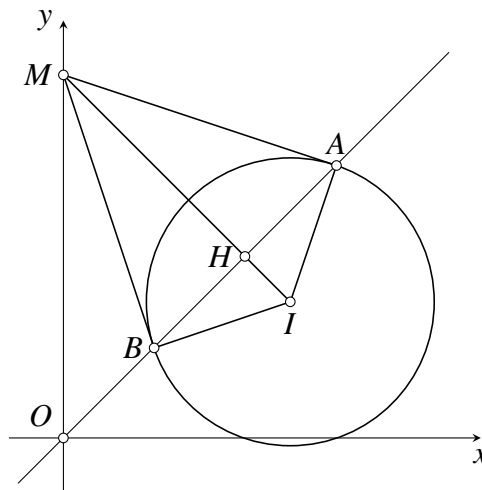
**Lời giải.** Gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Để thấy  $BFHD$  và  $CEHD$  là các tứ giác nội tiếp. Suy ra  $\widehat{HDE} = \widehat{HCE} = \widehat{HBF} = \widehat{HDF}$ , do đó  $HD$  là tia phân giác góc  $\widehat{EDF}$ . Tương tự  $HE$  là tia phân giác góc

$\widehat{DEF}$ . Vậy  $H$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $DEF$ .

Các đường thẳng  $BC$  và  $AC$  lần lượt có phương trình  $x - 2y - 4 = 0$  và  $x + y - 4 = 0$ . Các đường thẳng  $AD$  và  $BE$  lần lượt đi qua  $A, B$  và vuông góc với  $BC, CA$  nên chúng lần lượt có phương trình là  $2x + y - 3 = 0$  và  $x - y = 0$ . Do  $H$  là giao điểm của  $AD$  và  $BE$  nên  $H(1; 1)$ . Do  $D, E$  lần lượt là giao điểm của  $AD$  với  $BC, BE$  với  $CA$  nên  $D(2; -1), E(2; 2)$ . Suy ra phương trình đường thẳng  $DE$  là  $y = 2$ . Do đó  $d(H; DE) = 1$ . Vậy phương trình đường tròn cần tìm là  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ .

**Bài 51.** Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: x - y = 0$ . Đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R = \sqrt{10}$  cắt  $d$  tại hai điểm  $AB$  sao cho  $AB = 4\sqrt{2}$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $A$  và  $B$  cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Viết phương trình đường tròn  $(C)$ .

**Lời giải.**



Đặt  $M(0; m)$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ , suy ra  $AH = 2\sqrt{2}$ . Ta có  $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2}$ , suy ra  $MH = \frac{AH^2}{IH} = 4\sqrt{2}$ . Do đó

$$4\sqrt{2} = MH = d(M, AB) = \frac{|m|}{\sqrt{2}} \Rightarrow m = \pm 8.$$

- Với  $m = 8$  ta được  $M(0; 8)$ . Giả sử  $I(a; b)$ . Đường thẳng  $IM$  đi qua  $M$  vuông góc  $AB$  có phương trình  $x + y - 8 = 0$ . Ta có

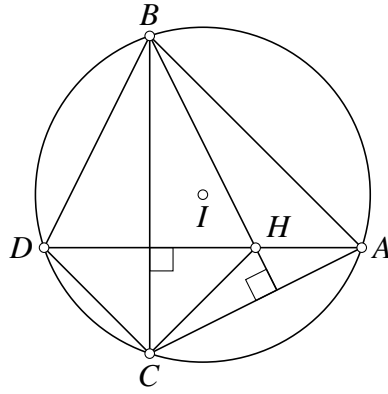
$$\begin{cases} I \text{ khác phía } M \text{ đối với } AB \\ I \in IM \\ d(I, AB) = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0 - 8)(a - b) < 0 \\ a + b - 8 = 0 \\ \frac{|a - b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10$ .

- Với  $m = -8$ , tương tự ta được phương trình đường tròn cần tìm là  $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 10$ .

**Bài 52.** Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H(2; 1)$  và  $B(1; 3), C(1; 0)$ . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**



Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $H$  qua đường thẳng  $BC$ . Để thấy  $\widehat{HBC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ , mà  $D$  đối xứng với  $H$  qua  $BC$  nên  $\widehat{BDC} = \widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ . Suy ra tứ giác  $ABDC$  là tứ giác nội tiếp, do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DBC$ .

Giả sử  $D(u; v)$ . Phương trình đường thẳng  $BC$  là  $x = 1$ . Do  $HD \perp BC$  nên đường thẳng  $BC$  nhận véc-tơ  $\overrightarrow{HA} = (u - 2; v - 1)$  làm một véc-tơ pháp tuyến. Suy ra  $v = 1$ .

Mặt khác trung điểm của  $HD$  nằm trên  $BC$  nên  $\frac{u+2}{2} = 1$  hay  $u = 0$ . Vậy  $D(0; 1)$ .

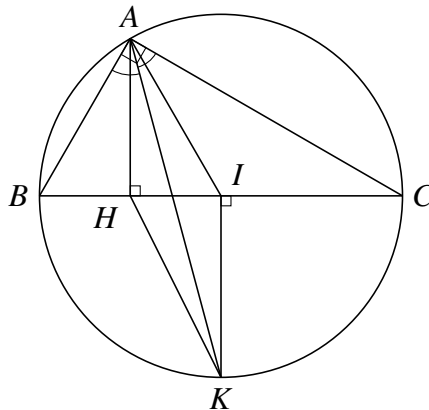
Giả sử phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DBC$  có dạng  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ . Do  $D, B, C$  thuộc đường tròn nên tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình đường tròn hay

$$\begin{cases} 0^2 + 1^2 + a \cdot 0 + b \cdot 1 + c = 0 \\ 1^2 + 3^2 + a \cdot 1 + b \cdot 3 + c = 0 \\ 1^2 + 0^2 + a \cdot 1 + b \cdot 0 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -3 \\ c = 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$ .

**Bài 53.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $AB < AC$  nội tiếp đường tròn  $(C) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$  và  $B(1; -1), C(5; 3)$ . Tia phân giác trong của góc  $\widehat{BAC}$  cắt đường tròn  $(C)$  tại  $K$ . Hình chiếu của  $A$  trên đường thẳng  $BC$  là  $H$ . Tìm tọa độ điểm  $A$  biết  $\frac{AH}{HK} = \frac{\sqrt{15}}{5}$  và  $A$  có tung độ dương.

**Lời giải.**



Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3; 1)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{2}$  và  $BC$  là đường kính của đường tròn  $(C)$ . Để thấy  $K$  là

điểm chính giữa cung  $BC$  nên  $IK \perp BC$ . Ta có

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{AH^2}{HK^2} = \frac{BH \cdot CH}{IH^2 + IK^2} \\ &= \frac{(R - IH)(R + IH)}{R^2 + IH^2} \\ &= \frac{R^2 - IH^2}{R^2 + IH^2} \\ \Rightarrow IH &= \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

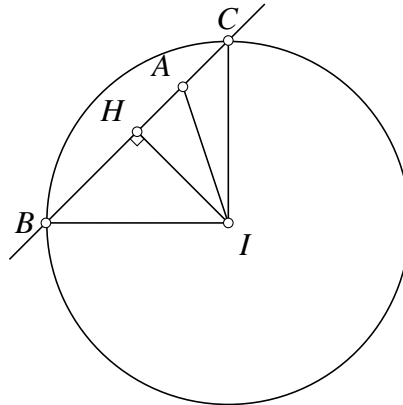
Do đó  $H$  là trung điểm  $BI$ , suy ra  $A$  nằm trên đường trung trực của  $BI$ , có phương trình  $x + y - 2 = 0$ . Do  $A$  là giao điểm của đường trung trực của đoạn  $BI$  và đường tròn  $(C)$  nên tọa độ của điểm  $A$  là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8 \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $A(2 - \sqrt{3}; \sqrt{3})$ .

**Bài 54.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$  có tâm  $I$  và điểm  $A(0; 2)$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$  qua  $A$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $B, C$  sao cho tam giác  $IBC$  và có diện tích bằng 8.

**Lời giải.**



Dễ thấy  $I = (1; -1)$  và  $IA = \sqrt{10} < 4$  nên  $A$  nằm trong đường tròn  $(C)$ . Do đó đường thẳng  $d$  qua  $A$  luôn cắt đường tròn  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $B, C$ .

Ta có  $8 = S_{IBC} = \frac{1}{2} IB \cdot IC \sin \widehat{BIC}$  nên  $\sin \widehat{BIC} = 1$ . Do đó  $\widehat{BIC} = 90^\circ$ . Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$  ta có  $IH = 2\sqrt{2}$ . Đường thẳng đi qua  $A$  có phương trình dạng

$$ax + b(y - 2) = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0).$$

$$\text{Ta có } d(I, d) = IH = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + 6ab - b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = 7a \end{cases}.$$

- Với  $a = -b$ , chọn  $a = 1, b = -1$  ta được đường thẳng  $d_1: x - y + 2 = 0$ .
- Với  $b = 7a$  chọn  $a = 1, b = 7$ , ta được đường thẳng  $d_2: x + 7y - 14 = 0$ .

**Bài 55.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$ . Tia  $Oy$  cắt  $(C)$  tại  $A$ . Viết phương trình đường tròn  $(C')$ , bán kính  $R' = 2$  và tiếp xúc ngoài với  $(C)$  tại  $A$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-2\sqrt{3}; 0)$ , bán kính  $R = 4$ .

Tọa độ điểm  $A$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  với  $y > 0$ , suy ra  $A(0; 2)$ .

Đường thẳng  $IA$  đi qua hai điểm  $I$  và  $A$  nên có phương trình  $IA : \begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t + 2 \end{cases}$ .

Đường tròn  $(C')$  tiếp xúc ngoài với  $(C)$  nên tâm  $I'$  thuộc đường thẳng  $IA$ , suy ra  $I' (2\sqrt{3}t; 2t + 2)$ .

Hơn nữa,  $R = 2R'$  nên  $\vec{AI} = 2\vec{I'A} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3} - 0 = 2(0 - 2\sqrt{3}t) \\ 0 - 2 = 2(2 - 2t - 2) \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ .

Với  $t = \frac{1}{2}$ , suy ra  $I' (\sqrt{3}; 3)$ . Phương trình đường tròn  $(C') : (x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4$ .

**Bài 56.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ . Viết phương trình đường tròn  $(C')$  có tâm  $M(5; 1)$ , biết  $(C')$  cắt  $(C)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB = \sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; -2)$ , bán kính  $R = \sqrt{3}$ .

Phương trình đường thẳng nối hai tâm  $IM$  là  $3x - 4y - 11 = 0$ .

Gọi  $H(x; y)$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có

$$\begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2 - AH^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 11 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = -\frac{29}{10} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = -\frac{11}{10} \end{cases}.$$

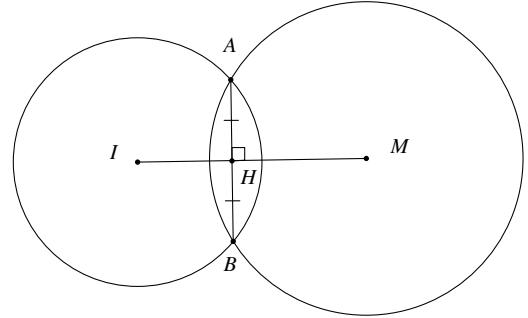
Suy ra  $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{29}{10}\right)$  hoặc  $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{11}{10}\right)$ .

- Với  $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{29}{10}\right)$ . Ta có  $R'^2 = MH^2 + AH^2 = 43$ .

Phương trình đường tròn  $(C') : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 43$ .

- Với  $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{11}{10}\right)$ . Ta có  $R'^2 = MH^2 + AH^2 = 13$ .

Phương trình đường tròn  $(C') : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$ .



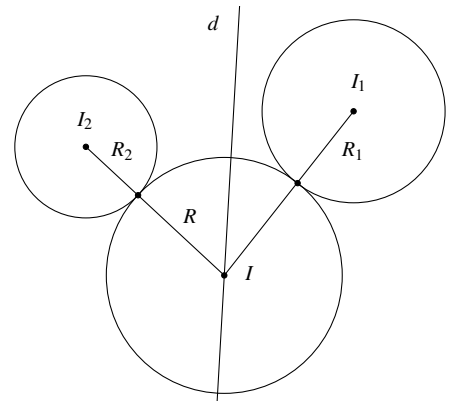
**Bài 57.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d : x - y - 1 = 0$  và hai đường tròn có phương trình  $(C_1) : (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 8$ ,  $(C_2) : (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 32$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm  $I$  thuộc  $d$  và tiếp xúc ngoài với  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I, I_1, I_2, R, R_1, R_2$  lần lượt là tâm và bán kính của  $(C)$ ,  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

Giả sử  $I(t; t - 1) \in d$ . Theo giả thiết bài toán:  $(C)$  tiếp xúc ngoài với  $(C_1)$  và  $(C_2)$  nên

$$\begin{cases} II_1 = R + R_1 \\ II_2 = R + R_2 \end{cases}$$



Suy ra

$$II_1 - R_1 = II_2 - R_2 \Leftrightarrow \sqrt{(t - 3)^2 + (t + 3)^2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{(t - 5)^2 + (t + 5)^2} - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 0.$$

Với  $t = 0$ , suy ra  $I(0; -1)$  và  $R = II_1 - R_1 = \sqrt{2}$ .

Phương trình đường tròn  $(C) : x^2 + (y + 1)^2 = 2$ .

### §3. ĐƯỜNG ELIP

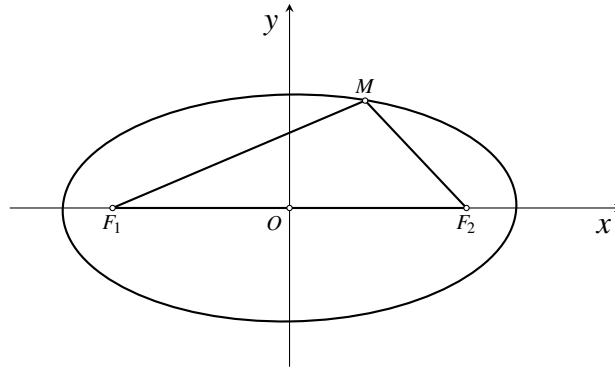
#### I. Tóm tắt lí thuyết

##### 1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định  $F_1, F_2$  với  $F_1F_2 = 2c$  và một độ dài không đổi  $2a$  ( $0 < c < a$ ). Elip ( $E$ ) là tập hợp tất cả các điểm  $M$  trong mặt phẳng thỏa mãn  $MF_1 + MF_2 = 2a$ .

Ta gọi:

- $F_1, F_2$  là các tiêu điểm của elip;
- $F_1F_2 = 2c$ : Tiêu cự của elip;
- $MF_1, MF_2$ : Bán kính qua tiêu.



##### 2. Phương trình chính tắc của Elip

Phương trình chính tắc của elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó  $a^2 = b^2 + c^2$ .

**Chứng minh.** Cho Elip có hai tiêu điểm  $F_1$  và  $F_2$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  sao cho  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ .

Khi đó:  $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow MF_1^2 = (x+c)^2 + y^2$

$MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow MF_2^2 = (x-c)^2 + y^2$

$\Rightarrow MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$  mà  $M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$  nên  $MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a}$ .

Ta có hệ:

$$\begin{cases} MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a} \\ MF_1 + MF_2 = 2a \end{cases} \quad (3.1)$$

Suy ra:

$$\begin{cases} MF_1 = a + \frac{cx}{a} \\ MF_2 = a - \frac{cx}{a} \end{cases} \quad (3.2)$$

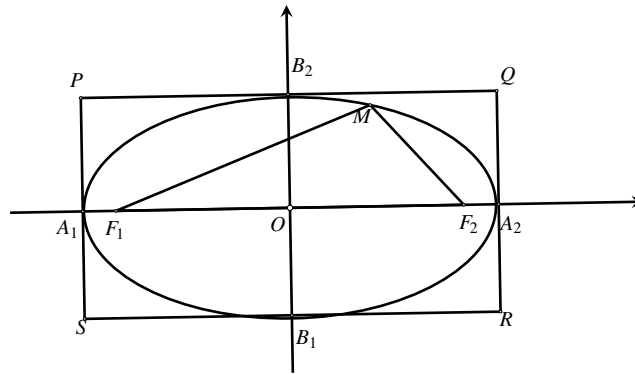
Lại có:  $MF_1 = a + \frac{cx}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$  hay  $\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$

Từ đó, phân tích và rút gọn ta được:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

Do  $a^2 - c^2 > 0$  nên đặt  $a^2 - c^2 = b^2$  ( $b > 0$ ), ta được:  $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (*)}$

Phương trình (\*) gọi là phương trình chính tắc của elip.

### 3. Hình dạng của elip



- a) *Trục đối xứng của elip*: Elip có phương trình (\*) nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng và nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- b) *Hình chữ nhật cơ sở*: Vẽ qua  $A_1$  và  $A_2$  hai đường thẳng song song với trục tung, vẽ qua  $B_1$  và  $B_2$  hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật  $PQRS$ . Ta gọi hình chữ nhật đó là hình chữ nhật cơ sở của elip.  
 Từ đó suy ra Mọi điểm của elip nếu không phải là đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở của nó, bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

$\triangle$  *Các điểm*:  $A_1(-a; 0); A_2(a; 0); B_1(0; -b); B_2(0; b)$  gọi là các đỉnh của elip.  
 $A_1A_2 = 2a$ : Độ dài trục lớn.  $B_1B_2 = 2b$ : Độ dài trục bé.

- c) *Tâm sai của elip*: Tỷ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là tâm sai của elip và được kí hiệu là  $e$  tức là  $e = \frac{c}{a}$ .
- Nếu tâm sai  $e$  càng bé (tức là càng gần 0) thì  $b$  càng gần  $a$  và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng “béo”.
  - Nếu tâm sai  $e$  càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỷ số  $\frac{b}{a}$  càng gần tới 1 và hình chữ nhật cơ sở càng “dẹt”, do đó đường elip càng “gầy”.

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip

Xác định tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm, độ dài các trục, độ dài tiêu cự của elip bằng cách áp dụng các công thức:

- a)  $c^2 = a^2 - b^2$ .
- b) Độ dài trục lớn:  $A_1A_2 = 2a$ , độ dài trục nhỏ:  $B_1B_2 = 2b$ .
- c) Độ dài tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c$ .

### CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1.** Xác định tọa độ các đỉnh và độ dài các trục của các elip có phương trình sau:

a)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

b)  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

**Lời giải.**

- a) Từ phương trình  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  ta có:  $a = 4, b = 2$ .  
 Các đỉnh:  $A_1(-4;0), A_2(4;0), B_1(0;-2), B_2(0;2)$ .  
 Độ dài trục lớn:  $A_1A_2 = 2a = 8, B_1B_2 = 2b = 4$ .

- b) Ta có  $x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1: a = 1, b = \frac{1}{2}$ .  
 Các đỉnh:  $A_1(-1;0), A_2(1;0), B_1(0;-\frac{1}{2}), B_2(0;\frac{1}{2})$ .  
 Độ dài trục lớn:  $A_1A_2 = 2a = 2, B_1B_2 = 2b = 1$ .

**Ví dụ 2.** Xác định tọa độ các tiêu điểm và độ dài tiêu cự của các elip có phương trình sau:

a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

b)  $4x^2 + 25y^2 = 36$ .

**Lời giải.**

- a) Từ phương trình  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  ta có:  $a^2 = 4, b^2 = 3$ , suy ra  $c = 1$ .  
 Các tiêu điểm:  $F_1(-1;0), F_2(1;0)$ .  
 Độ dài tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c = 2$ .
- b) Ta có  $4x^2 + 25y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{36}{25}} = 1$ , suy ra:  $a^2 = 9, b^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{21}}{5}$ .  
 Các tiêu điểm:  $F_1(-\frac{3\sqrt{21}}{5};0), F_2(\frac{3\sqrt{21}}{5};0)$ .  
 Độ dài tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c = \frac{6\sqrt{21}}{5}$ .

**Ví dụ 3.** Cho elip  $(E)$  có độ dài trục lớn bằng 10, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là  $\frac{3}{5}$ . Tính độ dài trục nhỏ của elip.

**Lời giải.** Ta có  $2a = 10 \Rightarrow a = 5$ . Mà  $\frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow c = 3$ .

Do đó  $b^2 = a^2 - c^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ . Vậy độ dài trục nhỏ  $2b = 8$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:

a)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

b)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $a^2 = 100, b^2 = 64 \Rightarrow a = 10, b = 8, c = 6$ .

Vậy  $A_1(-10; 0), A_2(10; 0), B_1(0; -8), B_2(0; 8), F_1(-6; 0), F_2(6; 0)$ .

b) Ta có  $a^2 = 4, b^2 = 1 \Rightarrow a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$ .

Vậy  $A_1(-2; 0), A_2(2; 0), B_1(0; -1), B_2(0; 1), F_1(-\sqrt{3}; 0), F_2(\sqrt{3}; 0)$ .

**Bài 2.** Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:

a)  $16x^2 + 25y^2 = 1$

b)  $0,25x^2 + 9y^2 = 1$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $16x^2 + 25y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$ .

Do đó:  $A_1(-\frac{1}{4}; 0), A_2(\frac{1}{4}; 0), B_1(0; -\frac{1}{5}), B_2(0; \frac{1}{5}), F_1(-\frac{3}{20}; 0), F_2(\frac{3}{20}; 0)$ .

b) Ta có  $0,25x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$ .

Vậy:  $A_1(-\frac{1}{4}; 0), A_2(\frac{1}{4}; 0), B_1(0; -\frac{1}{5}), B_2(0; \frac{1}{5}), F_1(-\frac{3}{20}; 0), F_2(\frac{3}{20}; 0)$ .

**Bài 3.** Tìm độ dài trục lớn, trục nhỏ và tiêu cự của các elip có phương trình sau:

a)  $16x^2 + 64y^2 = 100$

b)  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 2$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $16x^2 + 64y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{100}{16}} + \frac{y^2}{\frac{100}{64}} = 1$ . Vậy  $2a = 5, 2b = \frac{5}{2}, 2c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

b) Ta có  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Vậy  $2a = 8, 2b = 4, 2c = 4\sqrt{3}$ .

**Bài 4.** Xác định độ dài các trục của elip  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$  biết rằng  $(E)$  có độ dài tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm  $A(5; 0)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2c = 6 \Rightarrow c = 3, a = 5 \Rightarrow b = 4$ . Vậy  $2a = 10, 2b = 8$ .

**Bài 5.** Xác định tọa độ các đỉnh của elip  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$  biết rằng  $(E)$  đi qua hai điểm  $M(0; -2)$  và  $N(2; \sqrt{3})$ .

**Lời giải.**

Ta có  $b = 2$ .  $(E)$  đi qua điểm  $N(2; \sqrt{3})$  nên  $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ .

Vậy  $A_1(-4; 0), A_2(4; 0), B_1(0; -2), B_2(0; 2)$ .

**Bài 6.** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Biết  $(E)$  đi qua điểm  $M\left(2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$  và có tiêu cự bằng  $\frac{3}{4}$  độ dài trục lớn. Tính độ dài trục nhỏ của  $(E)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $c = \frac{3}{4}a, b^2 = a^2 - c^2 = \frac{7}{16}a^2$ . Vì  $M \in (E)$  nên  $b^2 = 7$ . Suy ra  $2b = 2\sqrt{7}$ .

**Bài 7.** Tìm tọa độ các đỉnh của elip  $(E)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , biết rằng  $(E)$  đi qua điểm  $M(2; 1)$  và các đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

**Lời giải.**

Gọi  $B$  là đỉnh trên trục nhỏ,  $F_1, F_2$  là hai tiêu điểm.

Khi đó tam giác  $F_1BF_2$  vuông cân nên  $b = c$ . Do đó  $a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2$ .

Mặt khác  $M \in (E)$  nên  $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ . Từ đó suy ra  $b^2 = 3, a^2 = 6$ .

Vậy  $A_1(-\sqrt{6}, 0), A_2(\sqrt{6}, 0), B_1(0; -\sqrt{3}), B_2(0; \sqrt{3})$ .

**Bài 8.** Cho elip  $(E)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Xác định tọa độ các tiêu điểm của  $(E)$  biết rằng  $(E)$  đi qua điểm  $M(\sqrt{5}; 1)$  và khoảng cách từ một đỉnh nằm trên trục lớn đến một đỉnh nằm trên trục nhỏ bằng tiêu cự.

**Lời giải.**

Gọi  $A(a; 0), B(0; b)$  là hai đỉnh. Khi đó  $AB = 2c$  suy ra  $a^2 + b^2 = 4c^2$ .

Mà  $c^2 = a^2 - b^2$  nên  $3a^2 = 5b^2$ .

Vì  $M \in (E)$  suy ra  $b^2 = 4, a^2 = \frac{20}{3} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

Vậy  $F_1(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0), F_2(\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0)$ .

### Dạng 2. Viết phương trình đường Elip

Viết phương trình elip là quá trình tìm các đặc trưng của elip, đó là độ dài trục lớn  $(2a)$ , độ dài trục nhỏ  $(2b)$ .

Khi làm dạng bài này, đầu tiên cần giả sử phương trình elip có dạng  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Sau đó từ những giả thiết bài toán, giải tìm  $a, b$  và viết phương trình.

\* Khi làm bài cần chú ý các tính chất sau của elip:

a) Elip nhận hai trục  $Ox, Oy$  làm trục đối xứng.

b) Tâm sai của elip  $e = \frac{c}{a}$ .

c) Bán kính qua tiêu của điểm  $M(x; y) \in (E)$ :  $MF_1 = a + ex; MF_2 = a - ex$ .

d) Đường chuẩn của elip:

Đường thẳng  $d_1 : x + \frac{a}{e} = 0$  được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$ .

Đường thẳng  $d_2 : x - \frac{a}{e} = 0$  được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm  $F_2(c; 0)$ .

**Ví dụ 4.** Lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$  mà độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Độ dài trục lớn bằng 6  $\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$ .

Độ dài trục nhỏ bằng 4  $\Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$ .

Vậy phương trình elip là  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Ví dụ 5.** Lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$  có độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Độ dài trục lớn bằng 10  $\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$ .

Độ dài tiêu cự bằng 6  $\Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$ .

Ta có  $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = 4$ .

Vậy phương trình elip có dạng  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

**Ví dụ 6.** Viết phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm  $M(1;0), N(\frac{\sqrt{3}}{2};1)$ .

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

$$\text{Điểm } M \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{Điểm } N \in (E) \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b = 2.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip có dạng  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 9.** Lập phương trình chính tắc của elip biết elip đi qua điểm  $M(8;12)$  và có bán kính qua tiêu điểm bên phải của  $M$  bằng 20.

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

$$M(8;12) \in (E) \Rightarrow \frac{64}{a^2} + \frac{144}{b^2} = 1.$$

$$\text{Bán kính qua tiêu điểm bên phải: } MF_2 = 20 \Rightarrow a - ex = 20 \Rightarrow a - \frac{8c}{a} = 20 \Rightarrow c = \frac{a^2 - 20a}{8}.$$

Lại có  $b^2 = a^2 - c^2$ , thay vào ta được phương trình ẩn  $a$  sau khi quy đồng và khử mẫu có dạng:  $a^4 - 40a^3 + 272a^2 + 2560a - 12288 = 0 \Leftrightarrow (a-4)(a-16)(a^2 - 20a - 192) = 0$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 16 \\ a = 10 - 2\sqrt{73} \\ a = 10 + 2\sqrt{73} \end{cases}$$

$$\text{Chú ý là } c > 0 \Rightarrow a = 10 + 2\sqrt{73} \Rightarrow c = 24 \Rightarrow b^2 = 40\sqrt{73} - 184.$$

$$\text{Vậy phương trình elip cần tìm là: } \frac{x^2}{(10+2\sqrt{73})^2} + \frac{y^2}{40\sqrt{73}-184} = 1.$$

**Bài 10.** Viết phương trình chính tắc của elip đi qua  $M(\frac{8}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}})$  và  $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ .

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

$$M \in (E) \Rightarrow \frac{64}{5a^2} + \frac{16}{5b^2} = 1 \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{F_1M} = \left(\frac{8}{\sqrt{5}} + c; \frac{4}{\sqrt{5}}\right); \overrightarrow{F_2M} = \left(\frac{8}{\sqrt{5}} - c; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0 \Rightarrow c = 4.$$

$$\text{Lại có } b^2 = a^2 - c^2. \text{ Thay vào (1), ta có phương trình ẩn } a: \frac{64}{5a^2} + \frac{16}{5(a^2 - 16)} = 1.$$

$$\text{Giải phương trình trên ta có } \begin{cases} a^2 = \frac{80+16\sqrt{5}}{5} \\ a^2 = \frac{80-16\sqrt{5}}{5} \end{cases}. \text{ Với } a > c \Rightarrow a^2 = \frac{80+16\sqrt{5}}{5}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{16\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy phương trình elip cần tìm là: } \frac{x^2}{\frac{80+16\sqrt{5}}{5}} + \frac{y^2}{\frac{16\sqrt{5}}{5}} = 1.$$

**Bài 11.** Viết phương trình chính tắc của đường elip biết hình chữ nhật cơ sở của  $(E)$  có một cạnh nằm trên đường thẳng  $y - 2 = 0$  và có độ dài đường chéo bằng 6.

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Một cạnh của hình chữ nhật cơ sở nằm trên đường thẳng  $y = 2$  suy ra  $b = 2$ .

Đường chéo của hình chữ nhật cơ sở có độ dài bằng 6 suy ra  $4a^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow a^2 = 5$ .

Vậy phương trình elip cần tìm là  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Bài 12.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 2BD$  và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình  $x^2 + y^2 = 4$ . Viết phương trình chính tắc của elip đi qua các đỉnh  $A, B, C, D$  của hình thoi. Biết điểm  $A$  nằm trên trục  $Ox$ .

**Lời giải.**

Đường tròn nội tiếp hình thoi  $ABCD$  có tâm trùng với giao điểm của hai đường chéo  $AC, BD$  của hình thoi.

Do  $A \in Ox \Rightarrow C \in Ox, B, D \in Oy$ . Nên  $A, B, C, D$  chính là bốn đỉnh của  $(E)$ .

Giả sử phương trình elip có dạng  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

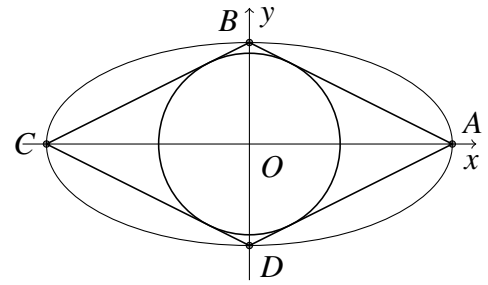
Từ việc bốn đỉnh của hình thoi là bốn đỉnh của hình thoi và giả thiết  $AC = 2BD$  suy ra  $a = 2b$ .

Xét tam giác vuông  $OAD$  trong hệ mặt phẳng  $Oxy$  với  $AD$  là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp hình thoi  $ABCD$ , đường cao xuất phát từ đỉnh  $O$  của tam giác này có độ dài là  $h$  bằng bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi  $ABCD$ .

Ta có  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2}$ , với  $h = 2, OA = a = 2b = 2OD$ .

Từ đó ta có  $a^2 = 20, b^2 = 5$ .

Vậy phương trình elip cần tìm là  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ .



**Bài 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $M(1; 2)$  và đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 = 21$ . Viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  biết hình chữ nhật cơ sở của  $(E)$  nội tiếp đường tròn  $(C)$  và điểm  $M$  nhìn hai tiêu điểm của  $(E)$  dưới một góc  $60^\circ$ .

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vì đường tròn  $(C)$  có tâm  $O(0; 0)$  trùng với tâm của hình chữ nhật cơ sở và tâm của elip nên ta có  $2\sqrt{a^2 + b^2} = 2R$  suy ra  $a^2 + b^2 = 21$ .

Ta có hai tiêu điểm  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ , lại có  $\widehat{F_1MF_2} = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (F_1F_2)^2 &= (MF_1)^2 + (MF_2)^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos 60^\circ \\ \Rightarrow 4c^2 &= (2+c)^2 + 1 + (2-c)^2 + 1 - \sqrt{1+(2+c)^2} \cdot \sqrt{1+(2-c)^2} \\ \Rightarrow 3c^4 - 34c^2 + 75 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = 3 \\ c^2 = \frac{25}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $c^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 12, b^2 = 9 \Rightarrow (E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Với  $c^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{44}{3}, b^2 = \frac{19}{3} \Rightarrow (E) : \frac{x^2}{\frac{44}{3}} + \frac{y^2}{\frac{19}{3}} = 1$ .

**Bài 14.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C)$  có phương trình  $x^2 + y^2 = 9$ , viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  có tâm sai  $e = \frac{1}{3}$ . Biết  $(E)$  cắt  $(C)$  tại 4 điểm phân biệt  $A, B, C, D$  sao cho  $AB$  song song với  $Ox$  và  $AB = 3BC$ .

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Tâm sai của (E) bằng  $\frac{1}{3}$  suy ra  $\frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow 8a^2 - 9b^2 = 0$  (1)

Toạ độ của A, B, C, D là nghiệm của hệ  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9(2) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(3) \end{cases}$

Do (E) và (C) cùng nhận Ox, Oy làm trục đối xứng nên ta có ABCD là hình chữ nhật.

Giả sử A(x; y), vì AB // Ox nên B(-x; y); C(-x; -y); D(x; -y).

Ta có AB = 3BC  $\Leftrightarrow x^2 = 9y^2$  (4)

Từ (2) thay vào (4) ta có:  $x^2 = \frac{81}{10}, y^2 = \frac{9}{10}$ , thay vào (3), ta được  $\frac{81}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$  (5)

Từ (1) và (5) ta có hệ sau:  $\begin{cases} 8a^2 - 9b^2 = 0 \\ \frac{81}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{729}{80} \\ b^2 = \frac{81}{10} \end{cases}$

Vậy phương trình elip (E) cần tìm là  $\frac{x^2}{\frac{729}{80}} + \frac{y^2}{\frac{81}{10}} = 1$ .

### Dạng 3. Tìm điểm thuộc elip thỏa điều kiện cho trước

Từ phương trình chính tắc của elip (E):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  suy ra rằng nếu điểm  $M(x_0; y_0) \in (E)$  thì toạ độ của M phải thỏa phương trình trên, tức  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ . Kết hợp với các điều kiện khác để tìm điểm M.

**Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E):  $9x^2 + 16y^2 = 144$ . Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho góc  $\widehat{F_1MF_2}$  bằng  $60^\circ$ .

**Lời giải.** Phương trình chính tắc của elip (E):  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Khi đó:  $a = 4, b = 3, c = \sqrt{7}$ .

Gọi M(x; y) là điểm cần tìm. Ta có:

$$MF_1 = 4 + \frac{\sqrt{7}}{4}x; \quad MF_2 = 4 - \frac{\sqrt{7}}{4}x; \quad F_1F_2 = 2\sqrt{7}$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $F_1MF_2$ , ta được:

$$\begin{aligned} F_1F_2^2 &= MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos \widehat{F_1MF_2} \\ 28 &= 2 \left( 16 + \frac{7}{16}x^2 \right) - \left( 4 + \frac{\sqrt{7}}{4}x \right) \left( 4 - \frac{\sqrt{7}}{4}x \right) \Leftrightarrow x^2 = \frac{64}{7} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8}{\sqrt{7}} \text{ hoặc } x = -\frac{8}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Vậy có 4 điểm thỏa đề bài là  $\left( \frac{8}{\sqrt{7}}; \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right); \left( -\frac{8}{\sqrt{7}}; \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right); \left( \frac{8}{\sqrt{7}}; -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right); \left( -\frac{8}{\sqrt{7}}; -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right)$ .

**Ví dụ 8.** Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E):  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Tìm tất cả các điểm thuộc elip có toạ độ là số nguyên.

**Lời giải.** Gọi M(x; y) là điểm cần tìm.

Khi đó  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow |x| \leq 2\sqrt{2}$  nên |x| chỉ có thể nhận các giá trị 0, 1 hoặc 2.

Với  $|x| = 0$  ta có  $|y| = \sqrt{2}$  (loại).

Với  $|x| = 1$  ta có  $|y| = \frac{\sqrt{7}}{2}$  (loại).

Với  $|x| = 2$  ta có  $|y| = 1$ .

Vậy tất cả các điểm thuộc  $(E)$  có tọa độ nguyên là  $(2; 1), (2; -1), (-2; 1), (-2; -1)$ .

**Ví dụ 9.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Gọi  $M$  là điểm di động trên elip. Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  lên các trục tọa độ  $Ox$  và  $Oy$ . Tìm tất cả điểm  $M$  để tứ giác  $OHMK$  có diện tích lớn nhất.

**Lời giải.** Gọi  $M(x; y)$  là điểm cần tìm. Dễ thấy tứ giác  $OHKM$  là hình chữ nhật. Khi đó,

$$S_{OHKM} = OH \cdot OK = |x| \cdot |y| = |xy|.$$

Mặt khác, ta có

$$1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{9} \cdot \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{3}|xy| \Rightarrow |xy| \leq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$  và  $y = \pm \sqrt{2}$ .

Vậy, tứ giác  $OHMK$  có diện tích lớn nhất khi  $M$  nằm tại một trong các điểm

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right); \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right).$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ . Gọi  $F_1, F_2$  lần lượt là tiêu điểm bên trái và bên phải của elip. Tìm tất cả điểm  $M$  thuộc elip sao cho:

- $MF_1 = 3$ .
- $MF_1 = 3MF_2$ .

**Lời giải.** Ta có:  $a = 4; b = \sqrt{7}; c = 3$ . Gọi  $M(x; y)$  là điểm cần tìm. Khi đó:

$$MF_1 = 4 + \frac{3}{4}x; \quad MF_2 = 4 - \frac{3}{4}x.$$

- Theo đề bài, ta có

$$MF_1 = 3 \Leftrightarrow 4 + \frac{3}{4}x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$$

Thay vào phương trình của elip, ta được  $y = \pm \frac{2\sqrt{14}}{3}$ .

Vậy, điểm cần tìm là  $\left(-\frac{4}{3}; \frac{2\sqrt{14}}{3}\right); \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2\sqrt{14}}{3}\right)$ .

- Theo đề bài, ta có

$$MF_1 = 3MF_2 \Leftrightarrow 4 + \frac{3}{4}x = 3\left(4 - \frac{3}{4}x\right) \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

Thay vào phương trình của elip, ta được  $y = \pm \frac{\sqrt{35}}{3}$ .

Vậy điểm cần tìm là  $\left(\frac{8}{3}; \frac{\sqrt{35}}{3}\right); \left(\frac{8}{3}; -\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$ .

**Bài 16.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E): x^2 + 5y^2 - 20 = 0$ , có  $F_1, F_2$  lần lượt là tiêu điểm bên trái và bên phải. Tìm tất cả điểm  $M$  thuộc elip sao cho:

a)  $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ .

b)  $\widehat{F_1MF_2} = 120^\circ$ .

**Lời giải.** Phương trình chính tắc  $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

Ta có  $a = 2\sqrt{5}; b = 2; c = 4; F_1F_2 = 2c = 8$ . Gọi  $M(x; y)$  là điểm cần tìm. Khi đó,

$$MF_1 = 2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x; MF_2 = 2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x$$

a) Theo đề bài, ta có

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 \Leftrightarrow 64 = \left(2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}.$$

Vậy điểm cần tìm là  $(\sqrt{15}; 1); (\sqrt{15}; -1); (-\sqrt{15}; 1); (-\sqrt{15}; -1)$ .

b) Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $MF_1F_2$  ta được

$$\begin{aligned} F_1F_2^2 &= MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos F_1MF_2 \\ \Leftrightarrow 64 &= \left(2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 + \left(2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x\right) \cdot \left(2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x\right) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Vậy điểm cần tìm là  $(\sqrt{5}; \sqrt{3}); (\sqrt{5}; -\sqrt{3}); (-\sqrt{5}; \sqrt{3}); (-\sqrt{5}; -\sqrt{3})$ .

**Bài 17.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  và điểm  $A(-3; 0)$ . Tìm tất cả các điểm  $B, C$  thuộc elip sao cho tam giác  $ABC$  nhận điểm  $I(-1; 0)$  làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

**Lời giải.** Gọi  $(C)$  là đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ , có tâm là  $I(-1; 0)$  và bán kính  $IA = 2$ . Khi đó, phương trình đường tròn  $(C)$  là  $(x+1)^2 + y^2 = 4$ . Do  $B, C$  thuộc elip nên tọa độ của  $B, C$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ hoặc } x = -\frac{3}{5} \\ y^2 = 4 - (x+1)^2 \end{cases}$$

Với  $x = -3$  thì  $y = 0$ . Suy ra  $A, B, C$  trùng nhau (loại).

Với  $x = -\frac{3}{5}$  thì  $y = \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}$ . Vậy, tất cả các điểm thỏa bài toán là

$$B\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right); C\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right) \text{ hoặc } B\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right); C\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right).$$

**Bài 18.** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm tọa độ các điểm  $A$  và  $B$  thuộc  $(E)$  có hoành độ dương sao cho tam giác  $OAB$  cân tại  $O$  và có diện tích lớn nhất.

**Lời giải.** Gọi  $A(x; y)$  thì  $B(x; -y)$  với  $x > 0$ . Ta có  $AB = 2|y| = \sqrt{4-x^2}$ .

Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$  thì  $OH = x$  suy ra

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH \cdot AB = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(4-x^2)} \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x = \sqrt{2}$ .

Vậy ta có  $A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  hoặc  $A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**Bài 19.** Cho elip  $(E) : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$  và điểm  $M(3;2)$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm nằm trên elip và đối xứng nhau qua  $M$ . Viết phương trình đường thẳng  $AB$ .

**Lời giải.** Gọi  $A(x;y) \in (E)$ , ta có  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ .

Từ  $M$  là trung điểm của  $AB$  suy ra  $B(6-x;4-y)$ . (1)

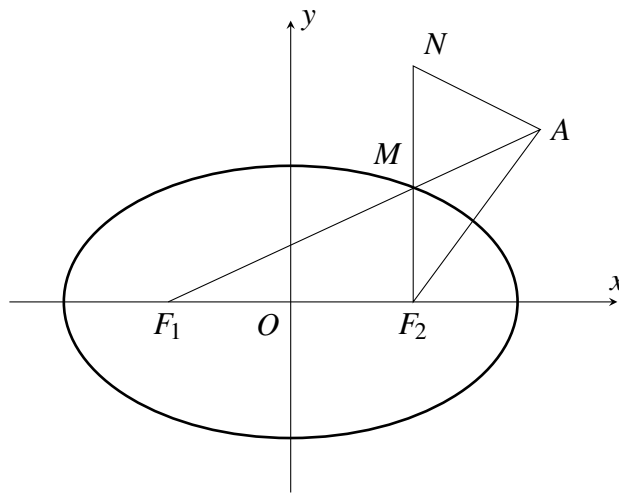
Ta cũng có  $B \in (E)$  nên suy ra  $\frac{(6-x)^2}{100} + \frac{(4-y)^2}{36} = 1$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $27x + 50y - 131 = 0$ . (\*)

Do tọa độ của  $A$  và  $B$  đều thỏa (\*) nên (\*) chính là phương trình đường thẳng  $AB$  cần tìm.

**Bài 20.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(2;\sqrt{3})$  và elip  $(E) : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Gọi  $F_1, F_2$  là các tiêu điểm của  $(E)$  ( $F_1$  có hoành độ âm);  $M$  là giao điểm của đường thẳng  $AF_1$  với  $(E)$  ( $M$  có tung độ dương);  $N$  là điểm đối xứng của  $F_2$  qua  $M$ . Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ANF_2$ .

**Lời giải.**



Ta có  $F_1(-1;0), F_2(1;0)$ .

Đường thẳng  $AF_1$  có phương trình  $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ .

$M$  là giao điểm có tung độ dương của  $AF_1$  với  $(E)$  suy ra  $M\left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ .

Ta tính được  $MA = MF_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Do  $N$  đối xứng với  $F_2$  qua  $M$  nên  $MF_2 = MN$ , suy ra  $MA = MF_2 = MN$ .

Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ANF_2$  là đường tròn tâm  $M$ , bán kính  $MA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**Bài 21.** Cho elip  $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  và hai điểm  $A(-5;3), B(5;-3)$ . Tìm trên  $(E)$  điểm  $C$  có hoành độ và tung độ dương sao cho diện tích tam giác  $ABC$  lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

**Lời giải.** Ta có  $AB = 2\sqrt{34}$  và phương trình đường thẳng  $AB : 3x + 5y = 0$ .

Gọi  $C(x;y) \in (E)$  ( $x > 0, y > 0$ ), ta có  $d(C, AB) = \frac{|3x+5y|}{\sqrt{34}}$ . Khi đó diện tích tam giác  $ABC$  là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{34} \cdot \frac{|3x+5y|}{\sqrt{34}} = |3x+5y|.$$

$$\text{Mà } |3x+5y| = 15 \left| \frac{x}{5} + \frac{y}{3} \right| \leq 15 \sqrt{2 \left( \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \right)} = 15\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ . Thay vào phương trình của  $(E)$  và chú ý  $x > 0, y > 0$  ta tìm được  $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y =$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } M\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

### BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 22.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ  $Oxy$ , viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  biết khi  $M$  thay đổi trên  $(E)$  thì độ dài nhỏ nhất của  $OM$  bằng 4 và độ dài lớn nhất của  $MF_1$  bằng 8 với  $F_1$  là tiêu điểm có hoành độ âm.

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$M(x; y) \in (E) \Rightarrow MF_1 = a + \frac{cx}{a}$ , mà  $-a \leq x \leq a$  nên  $MF_1$  lớn nhất bằng  $a + c$  khi  $x = a, y = 0$ .

Vì  $a > b$  nên  $\frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{b^2} \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{b^2} = \frac{OM^2}{b^2} \Rightarrow OM \geq b$ .

Do đó giá trị nhỏ nhất của  $OM$  bằng  $b$  khi  $x = 0, y = \pm b$ .

Kết hợp với giả thiết ta có:  $\begin{cases} b = 4 \\ a + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 5 \end{cases}$ .

Vậy phương trình của  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

**Bài 23.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$ , biết có một đỉnh và hai tiêu điểm của  $(E)$  tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của  $(E)$  là  $12(2 + \sqrt{3})$ .

**Lời giải.** Giả sử phương trình elip có dạng  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Chu vi của hình chữ nhật cơ sở là  $2(2a + 2b)$

Suy ra  $2(2a + 2b) = 12(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow a + b = 3(2 + \sqrt{3})$  (1)

Do các đỉnh  $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$  và  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$  cùng nằm trên  $Ox$  nên theo giả thiết  $F_1, F_2$  cùng với đỉnh  $B_2(0, b)$  trên  $Oy$  tạo thành một tam giác đều  $\Leftrightarrow B_2F_2 = F_1F_2 = B_2F_1$  (\*)

Lại có  $F_1F_2$  đối xứng nhau qua  $Oy$  nên tam giác  $B_2F_1F_2$  luôn là tam giác cân tại  $B_2$ .

Do đó: (\*)  $\Leftrightarrow B_2F_2 = F_1F_2 \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + b^2} = 2c \Leftrightarrow b^2 = 3c^2$ .

Lại có:  $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow 3a^2 = 4b^2$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $a = 6$  và  $b = 3\sqrt{3}$ .

Vậy phương trình elip  $(E)$  là  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ .

**Bài 24.** Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , cho elip  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Đường thẳng  $\Delta: 2x - 3y = 0$  cắt  $(E)$  tại hai điểm  $B, C$ . Tìm toạ độ điểm  $A$  trên  $(E)$  sao cho tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất.

**Lời giải.** Do  $\Delta \cap (E) = \{B; C\}$  nên  $B, C$  cố định hay độ dài  $BC$  không đổi.

Do đó diện tích  $\triangle ABC$  lớn nhất khi khoảng cách  $h = d(A, \Delta)$  lớn nhất.

Phương trình tham số của  $(E)$  có dạng:  $\begin{cases} x = 3 \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$

Mà  $A \in (E) \Rightarrow A(3 \sin t; 2 \cos t)$ , khi đó

$$h = (A, \Delta) = \frac{|6 \sin t - 6 \cos t|}{\sqrt{13}} = \frac{6|\sin t - \cos t|}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{2} \left| \sin \left( t - \frac{\pi}{4} \right) \right|}{\sqrt{13}} \leq \frac{6\sqrt{26}}{13}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \left| \sin \left( t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left( t - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\ \sin \left( t - \frac{\pi}{4} \right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow A \left( \frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right)$$

$$+ \text{ Với } t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow A \left( -\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right)$$

**Bài 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  và  $P(1; -1)$ . Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua  $P$  cắt  $(E)$  tại hai điểm  $M, N$ . Tìm tọa độ hai điểm  $M, N$  sao cho  $PM \cdot PN$  lớn nhất.

**Lời giải.**

Ta có  $P(1; -1)$  thuộc miền trong của  $(E)$  nên  $d$  luôn cắt  $(E)$  tại  $M, N$ .

Gọi phương trình đường thẳng  $d$  có dạng  $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = -1 + nt \end{cases}$  với  $t \in \mathbb{R}, m^2 + n^2 \neq 0$ . Gọi  $M(1 + mt_1; -1 + nt_1); N(1 + mt_2; -1 + nt_2)$ . Trong đó  $t_1, t_2$  là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1 + mt)^2}{8} + \frac{(-1 + nt)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 2n^2)t^2 + 2(m - 2n)t - 5 = 0.$$

Theo hệ thức Vi-et ta có  $t_1 \cdot t_2 = \frac{-5}{m^2 + 2n^2}$

$$\text{Khi đó } PM \cdot PN = \sqrt{(mt_1)^2 + (nt_1)^2} \cdot \sqrt{(mt_2)^2 + (nt_2)^2} = (m^2 + n^2)|t_1 \cdot t_2| = \frac{5(m^2 + n^2)}{m^2 + 2n^2} = \frac{5}{2 - \frac{m^2}{m^2 + n^2}}.$$

Mặt khác  $0 \leq \frac{m^2}{m^2 + n^2} \leq 1$ , do đó  $PM \cdot PN$  lớn nhất khi và chỉ khi  $\frac{m^2}{m^2 + n^2} \Leftrightarrow n = 0$ .

Khi đó phương trình của đường thẳng  $d$  có dạng  $y = -1$ , suy ra tọa độ của các điểm  $M, N$  là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(\sqrt{6}; -1) \\ N(-\sqrt{6}; -1) \\ M(-\sqrt{6}; -1) \\ N(\sqrt{6}; -1) \end{cases}.$$

**Bài 26.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho elip  $(E) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$  cắt  $(E)$  tại hai điểm phân biệt có tọa độ là các số nguyên.

**Lời giải.** Gọi  $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1$  (1)

$$\Rightarrow x_0^2 \leq 2 \Rightarrow x_0 \in \{-1; 0; 1\}.$$

Với  $x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = \pm 2$  (thỏa mãn).

Với  $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \pm 2\sqrt{2}$  (loại).

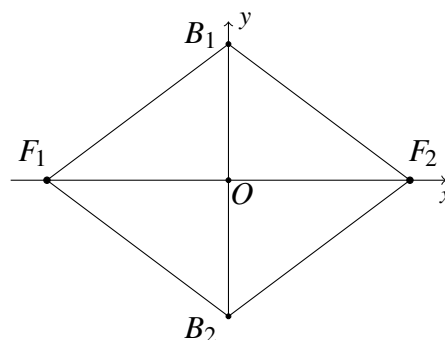
Vậy có bốn điểm có tọa độ nguyên trên  $(E)$  là  $M_1(1; 2); M_2(1; -2); M_3(-1; 2); M_4(-1; -2)$ .

Do đó ta sẽ lập được 6 phương trình đường thẳng  $d$  thỏa mãn đề bài là:

$$y = 2; 2x + y = 0; -2x + y = 0; x = -1; x = 1; y = -2.$$

**Bài 27.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , viết phương trình chính tắc của  $(E)$  có tâm sai bằng  $\frac{4}{5}$ . Biết rằng diện tích của tứ giác tạo bởi các tiêu điểm và các đỉnh trên trục bé của  $(E)$  là 24.

**Lời giải.**



Gọi phương trình chính tắc của elip ( $E$ ) có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a > b > 0 \text{ và } a^2 = b^2 + c^2.$$

Ta có tâm sai  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}c$ .

Gọi  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$  là các tiêu điểm và  $B_1(0; -b), B_2(0; b)$  là các đỉnh trên trục bé.

Suy ra  $F_1B_2F_2B_2$  là hình thoi, kho đó  $S_{F_1B_2F_2B_2} = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot B_1B_2 = \frac{1}{2}2c \cdot 2b = 2bc = 24 \Leftrightarrow b = \frac{12}{c}$ .

Khi đó

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}c\right)^2 = \left(\frac{12}{c}\right)^2 + c^2 \Leftrightarrow 25c^4 = 2304 + 16c^4 \Leftrightarrow c^4 = 256 \Leftrightarrow c = 4 (\text{do } c > 0).$$

Suy ra  $a = 5; b = 3$ . Vậy phương trình chính tắc của elip ( $E$ ) cần tìm là:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

**Bài 28.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(4; 3), B(6; 4)$ . Xác định điểm  $M$  thuộc elip ( $E$ ) :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \text{ sao cho diện tích tam giác } MAB \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

**Lời giải.** Ta có  $AB = \sqrt{5}$  và phương trình đường thẳng  $AB : 2x + y - 11 = 0$ .

Gọi  $M(x_0, y_0) \in (E)$ . Khi đó  $\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1$ .

(1)

Từ (1) suy ra  $|x_0| \leq \sqrt{2}; y_0 \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x_0 + y_0 < 11$ .

Ta lại có  $d(M, AB) = \frac{|2x_0 + y_0 - 11|}{\sqrt{5}} = \frac{11 - (2x_0 + y_0)}{\sqrt{5}}$ .

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(2x_0 + y_0)^2 \leq (8 + 8) \left( \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} \right) = 16 \Rightarrow -4 \leq 2x_0 + y_0 \leq 4$$

Suy ra  $d(M, AB) \geq \frac{7}{\sqrt{5}} \Rightarrow (d(M, AB))_{\min} = \frac{7}{\sqrt{5}}$

Vậy  $\min S_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot (d(M, AB))_{\min} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow M(1; 2)$ .

**Bài 29.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ( $E$ ) :  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  và điểm  $M(2; 3)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua  $M$ , cắt ( $E$ ) tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

**Lời giải.** Ta có  $M$  thuộc miền trong của ( $E$ ), do đó  $d$  luôn cắt ( $E$ ) tại hai điểm phân biệt.

Gọi phương trình đường thẳng  $d$  có dạng:  $\begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 3 + nt \end{cases}$  với  $t \in \mathbb{R}, m^2 + n^2 \neq 0$ .

Gọi  $A(2 + mt_1; 3 + nt_1), B(2 + mt_2; 3 + nt_2)$ . Khi đó  $t_1, t_2$  là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1 + mt)^2}{25} + \frac{(2 + nt)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow (9m^2 + 25n^2)t^2 + 2(9m + 50n)t - 116 = 0$$

Theo hệ thức Vi-et ta có  $t_1 + t_2 = -\frac{2(9m + 50n)}{9m^2 + 25n^2}$

Mặt khác ta lại có  $M$  là trung điểm của  $AB$ , do đó  $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (t_1 + t_2)m = 4 \\ 6 + (t_1 + t_2)n = 6 \end{cases}$

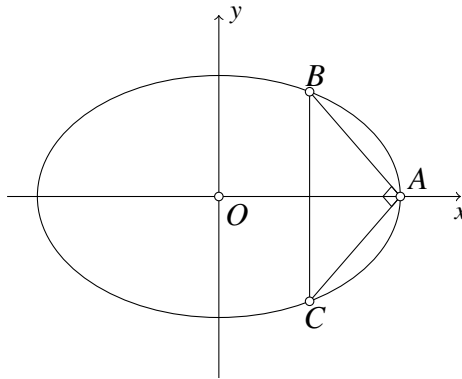
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(t_1 + t_2) = 0 \\ n(t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow -\frac{2(9m + 50n)}{9m^2 + 25n^2} = 0 \Leftrightarrow 9m + 50n = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{50}{9}n.$$

Chọn  $m = 9 \Rightarrow n = -50$ . Khi đó phương trình đường thẳng  $d$  là  $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 3 - 50t \end{cases}$

**Bài 30.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(4;0)$  và elip  $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Tìm tọa độ các điểm  $B, C$  thuộc  $(E)$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

**Lời giải.**



Ta có  $B, C$  thuộc  $(E)$  và tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Mặt khác  $A(4;0) \in Ox$  và  $(E)$  nhận các trục  $Ox, Oy$  là trục đối xứng nên  $B, C$  đối xứng nhau qua trục  $Ox$ .

Do đó gọi  $B(m;n), C(m;-n) \in (E)$  với  $n \neq 0$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (m-4; n) \\ \overrightarrow{AC} = (m-4; -n) \end{cases}, \text{ khi đó } \begin{cases} \frac{m^2}{16} + \frac{n^2}{9} = 1 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{16} + \frac{n^2}{9} = 1 \\ (m-4)^2 - n^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{16} + \frac{n^2}{9} = 1 \\ n^2 = (m-4)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{16} + \frac{(m-4)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 25m^2 - 128m + 112 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{28}{25} \end{cases}$$

Với  $m = 4 \Rightarrow n = 0$

$$\text{Với } m = \frac{28}{25} \Rightarrow n = \pm \frac{72}{25}. \text{ Suy ra } \begin{cases} B\left(\frac{28}{25}; \frac{72}{25}\right) \\ C\left(\frac{28}{25}; -\frac{72}{25}\right) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B\left(\frac{28}{25}; -\frac{72}{25}\right) \\ C\left(\frac{28}{25}; \frac{72}{25}\right) \end{cases}.$$

**Bài 31.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: x + y - 4 = 0$  và elip  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với  $d$  và cắt  $(E)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng 2.

**Lời giải.** Ta có  $\Delta \perp d$  do đó phương trình đường thẳng  $\Delta$  có dạng:  $x - y + c = 0$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(E)$  là:

$$2x^2 + 4(x+c)^2 = 8 \Leftrightarrow 6x^2 + 8cx + 4c^2 - 8 = 0 \quad (1)$$

Ta lại có  $\Delta$  cắt  $(E)$  tại hai điểm phân biệt do đó (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là

$$\Delta' = 48 - 8c^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < c < \sqrt{6} \quad (2)$$

Ta có  $A(x_1, x_1 + c), B(x_2, x_2 + c)$  là các giao điểm của  $\Delta$  với  $(E)$ , khi đó  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Do đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4c}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2c^2 - 4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 \cdot x_2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{\frac{32c^2}{9} - \frac{16c^2 - 32}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{c^2 + 2}$$

$$\text{Ta lại có } d(O, \Delta) = \frac{|c|}{\sqrt{2}}$$

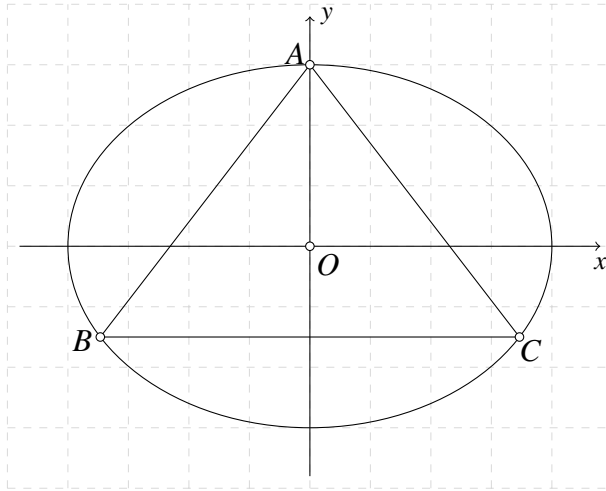
$$\text{Mà } S_{ABC} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(O, \Delta) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{c^2 + 2} \cdot \frac{|c|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow c^4 + 2c^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow c = \pm \sqrt{-1 + \sqrt{19}} \text{ (thỏa mãn (2))}$$

Vậy đường thẳng  $\Delta$  cần lập là  $\Delta: x - y + \sqrt{-1 + \sqrt{19}} = 0$  hoặc  $\Delta: x - y - \sqrt{-1 + \sqrt{19}} = 0$

**Bài 32.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho elip  $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  ngoại tiếp tam giác đều  $ABC$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ , biết  $(E)$  nhận  $A(0; 3)$  làm đỉnh và trục tung làm trục đối xứng.

**Lời giải.**



Do  $\triangle ABC$  đều và có  $A(0; 3)$  nên  $B, C$  đối xứng với nhau qua trục tung, nên gọi  $B(m, n) \Rightarrow C(-m, n)$  với  $m > 0 \Rightarrow a = BC = 2m$  và chiều cao của tam giác là  $h = 3 - n$ .

$$\text{Khi đó } h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3 - n = \sqrt{3}m \Leftrightarrow n = 3 - \sqrt{3}m \Rightarrow B(m; 3 - \sqrt{3}m)$$

$$\text{Mặt khác } B \in (E), \text{ do đó } \frac{m^2}{16} + \frac{(3 - \sqrt{3}m)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9m^2 - 32\sqrt{3}m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{32\sqrt{3}}{19} \text{ (thỏa mãn) và } m = 0 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Khi đó } n = \frac{-39}{19} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{96}{19} \\ BC = \frac{64\sqrt{3}}{19} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{3072\sqrt{3}}{361}$$

## §4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 3

### I. Đề số 1a

**Bài 1.** Cho  $A(1, 5); B(4, -1); C(-4, -5)$ .

- Viết phương trình tổng quát của đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.
- Viết phương trình đường trung trực cạnh  $BC$  và  $AB$ .
- Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

- Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3, -6); \overrightarrow{BC} = (-8, -4), \overrightarrow{AC} = (-5, -10)$ .  
 Phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh  $AB$ :  $2(x - 1) + (y - 5) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0$  ..... 0,5 điểm  
 Phương trình tổng quát đường thẳng chứa cạnh  $AC$ :  $2(x + 4) - (y + 5) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$  ..... 0,5 điểm  
 Phương trình tổng quát đường thẳng chứa cạnh  $BC$ :  $(x - 4) - 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 6 = 0$  ..... 0,5 điểm
- Gọi  $I$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Khi đó  $I(0; -3)$ . Phương trình đường trung trực cạnh  $BC$  là  $2(x - 0) + (y + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0$  . . . 0,5 điểm  
 Gọi  $J$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Khi đó  $J(\frac{5}{2}; 2)$ . Phương trình đường trung trực cạnh  $AB$  là  $(x - \frac{5}{2}) - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 3 = 0$  ..... 0,5 điểm
- Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm  $O$  của cạnh  $AC$ . Ta có  $O(\frac{-3}{2}; 0)$  và bán kính  $OA = \frac{5\sqrt{5}}{2}; \overrightarrow{OA} = (\frac{-5}{2}; -5)$ . ..... 0,5 điểm  
 Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $(x + \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{125}{4}$  ..... 0,5 điểm.

**Bài 2.** Cho elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

- Tìm tiêu điểm, tâm sai, đường chuẩn của  $(E)$ .
- Tìm trên  $(E)$  những điểm  $M$  sao cho  $M$  nhìn đoạn thẳng nối hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

**Lời giải.**

- Ta có  $c^2 = a^2 - b^2 = 3$ , suy ra  $c = \sqrt{3}$ . Các tiêu điểm  $F_1(-\sqrt{3}; 0)$  và  $F_2(\sqrt{3}; 0)$ . ..... 0,5 điểm  
 Tâm sai  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ..... 0,5 điểm  
 Đường chuẩn  $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$  ..... 0,5 điểm
- Vì  $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ , do đó  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $F_1F_2$  là  $x^2 + y^2 = 3$ . ..... 0,5 điểm.  
 Tọa độ điểm  $M$  là nghiệm hệ phương trình  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  và  $x^2 + y^2 = 3$ . ..... 0,5 điểm.  
 Giải hệ ta được  $x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  ..... 0,5 điểm  
 Vậy có bốn điểm cần tìm là  $(\pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$  ..... 0,5 điểm

**Bài 3.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(2;0)$  và  $B(6;4)$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  tiếp xúc với trục hoành tại điểm  $A$  và khoảng cách từ tâm của  $(C)$  đến điểm  $B$  bằng 5.

**Lời giải.** Gọi  $I(a;b)$ ,  $R$  là tâm và bán kính đường tròn  $(C)$ . Do  $(C)$  tiếp xúc với trục hoành tại điểm  $A(2;0)$  nên  $a = 2$  và  $|b| = R$  ..... 0,75 điểm

Do  $IB = 5$  mà  $I(2;b)$  và  $B(6;4)$  suy ra  $(b-2)^2 + (4-b)^2 = 5^2 \Leftrightarrow b^2 = 8b + 7 = 0 \Leftrightarrow b = 1, b = 7$  ..... 0,75 điểm

Với  $a = 2, b = 1 \Rightarrow R = 1$ , ta có phương trình của  $(C)$  là  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$  ..... 0,75 điểm

Với  $a = 2, b = 7 \Rightarrow R = 7$  ta có phương trình của  $(C)$  là  $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$  ..... 0,75 điểm

## II. Đề số 1b

**Bài 1.** Cho  $A(-5,6); B(-4,-1); C(4,3)$ .

- Viết phương trình tổng quát của đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.
- Viết phương trình đường trung trực cạnh  $BC$  và  $AB$ .
- Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

- Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1, -7); \overrightarrow{BC} = (8, 4), \overrightarrow{AC} = (9, -3)$ .

Phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh  $AB$ :  $7(x+5) + (y-6) = 0 \Leftrightarrow 7x + y + 29 = 0$  ..... 0,5 điểm

Phương trình tổng quát đường thẳng chứa cạnh  $AC$ :  $(x+5) + 3(y-6) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 13 = 0$  ..... 0,5 điểm

Phương trình tổng quát đường thẳng chứa cạnh  $BC$ :  $(x+4) - 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$  ..... 0,5 điểm

- Gọi  $I$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Khi đó  $I(0;1)$ . Phương trình đường trung trực cạnh  $BC$  là  $2(x-0) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$  ..... 0,5 điểm

Gọi  $J$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Khi đó  $J(\frac{-9}{2}; \frac{5}{2})$ . Phương trình đường trung trực cạnh  $AB$  là  $(x + \frac{9}{2}) - 7(y - \frac{5}{2}) = 0 \Leftrightarrow x - 7y + 22 = 0$  ..... 0,5 điểm

- Gọi  $O$  là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh  $AB$  và  $BC$ . Tọa độ điểm  $O$  là nghiệm hệ phương trình  $2x + y - 1 = 0$  và  $x - 7y + 22 = 0$  .. 0,5 điểm Giải hệ ta được  $O(-1;3)$  và  $\overrightarrow{OC} = (-5;0)$  suy ra bán kính  $OC = 5$ . ..... 0,5 điểm

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$  ..... 0,5 điểm.

**Bài 2.** Cho elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

- Tìm tiêu điểm, tâm sai, đường chuẩn của  $(E)$ .
- Tìm trên  $(E)$  những điểm  $M$  sao cho  $M$  nhìn đoạn thẳng nối hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

**Lời giải.**

- Ta có  $c^2 = a^2 - b^2 = 5$ , suy ra  $c = \sqrt{5}$ . Các tiêu điểm  $F_1(-\sqrt{5};0)$  và  $F_2(\sqrt{5};0)$ . ..... 0,5 điểm

Tâm sai  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  ..... 0,5 điểm

Đường chuẩn  $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$  ..... 0,5 điểm

- b) Vì  $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ , do đó  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $F_1F_2$  là  $x^2 + y^2 = 5$ . ..... 0,5 điểm.  
 Tọa độ điểm  $M$  là nghiệm hệ phương trình  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  và  $x^2 + y^2 = 5$ . ..... 0,5 điểm.  
 Giải hệ ta được  $x = \frac{\pm 3}{\sqrt{5}}; y = \pm \frac{\pm 4}{\sqrt{6}}$  ..... 0,5 điểm  
 Vậy có bốn điểm cần tìm là  $\left(\pm \frac{3}{\sqrt{5}}; \pm \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$  ..... 0,5 điểm

**Bài 3.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  có  $C(-1; -2)$ , đường trung tuyến kẻ từ  $A$  và đường cao kẻ từ  $B$  lần lượt có phương trình là  $5x + y - 9 = 0$  và  $x + 3y - 5 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $A$  và  $B$ .

**Lời giải.** Đường thẳng  $AC$  đi qua  $C$  và vuông góc với đường thẳng  $x + 3y - 5 = 0$ , suy ra phương trình  $AC$  là  $3x - y + 1 = 0$  ..... 0,75 điểm  
 Tọa độ điểm  $A$  là nghiệm của hệ  $5x + y - 9 = 0$  và  $3x - y + 1 = 0$ , suy ra  $A(1; 4)$  ..... 0,75 điểm  
 Điểm  $B$  thuộc đường thẳng  $x + 3y - 5 = 0$  và trung điểm của cạnh  $BC$  thuộc đường thẳng  $5x + y - 9 = 0$  0,5 điểm  
 Tọa độ điểm  $B$  là nghiệm của hệ phương trình  $x + 3y - 5 = 0$  và  $5\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{y-2}{2} - 9 = 0$ , suy ra  $B(5; 0)$   
 0,75 điểm

### III. Đề số 2a

**Bài 1 (2 điểm).** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  và điểm  $A(3; 0)$ . Tìm  $B \in \Delta$  sao cho  $\Delta AOB$  vuông tại  $O$ .

**Lời giải.** Gọi  $B(1 + b; b) \in \Delta$ . Khi đó:  $\overrightarrow{OB} = (1 + b; b); \overrightarrow{OA} = (3; 0)$ . ..... (0,5 điểm).  
 $\Delta AOB$  vuông tại  $O$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$  ..... (0,5 điểm).  
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  ..... (0,5 điểm).  
 $\Leftrightarrow 3 \cdot (1 + b) + 0 \cdot (b) = 0$  ..... (0,5 điểm).  
 $\Leftrightarrow b = -1$   
 Vậy  $B(0; -1)$  ..... (0,5 điểm).

**Bài 2 (2 điểm).** Tìm hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ  $O$  lên đường thẳng  $\Delta: x - y + 2 = 0$ , từ đó tìm điểm đối xứng của  $O$  qua  $\Delta$ .

**Lời giải.** Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $\Delta$ .  
 Vì  $OH$  vuông góc với  $\Delta$  nên  $OH$  nhận vectơ pháp tuyến ( $\vec{n}_\Delta = (1; -1)$ ) của  $\Delta$  làm vectơ chỉ phương, tức là  $OH$  nhận  $\vec{n}_{OH} = (1; 1)$  làm vectơ pháp tuyến. .... (0,5 điểm).  
 Do đó,  $OH$  là đường thẳng qua  $O(0; 0)$  và nhận  $\vec{n}_{OH} = (1; 1)$  làm vectơ pháp tuyến; vậy  $OH$  có phương trình:  $1(x - 0) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$ . .... (0,5 điểm).

Ta có  $H = \Delta \cap OH$ , nên tọa độ của  $H$  là nghiệm của hệ:  $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ .

Vậy  $H(-1; 1)$ . .... (0,5 điểm).

Gọi  $O'$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $\Delta$ .

Khi đó,  $H$  là trung điểm của  $OO'$ .

Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm ta tính được  $O'(-2; 2)$ . .... (0,5 điểm).

**Bài 3 (2 điểm).** Viết phương trình đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) nội tiếp  $\Delta ABC$  biết ( $\mathcal{C}$ ) có tâm  $I(1; 2)$  và  $AB: x - 2y + 7 = 0$ .

**Lời giải.** Vì  $\Delta ABC$  nội tiếp ( $\mathcal{C}$ ) nên ( $\mathcal{C}$ ) có bán kính  $R = d(I, AB) = \frac{4}{\sqrt{5}}$ . .... (1,0 điểm).

Vậy ( $\mathcal{C}$ ):  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{16}{5}$ . .... (1,0 điểm).

**Bài 4 (2 điểm).** Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm là gốc tọa độ  $O$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(\mathcal{C})$  tại  $A$  biết  $E(-1;0)$  và  $F(1;1)$  lần lượt là chân đường cao kẻ từ  $B$  và  $C$ ;  $A$  thuộc đường thẳng  $\Delta: 3x + y - 1 = 0$ .

**Lời giải.** Gọi  $At$  là tiếp tuyến của  $(\mathcal{C})$  tại  $A$ .

- Chứng minh  $OA \perp EF$ .

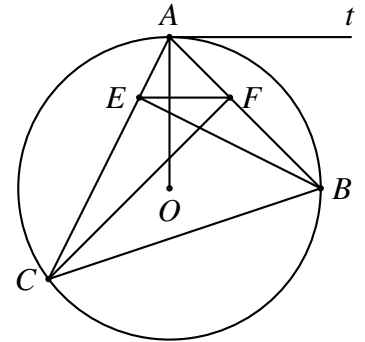
Tứ giác  $BCEF$  nội tiếp nên  $\widehat{EFA} = \widehat{ACB}$ .

Hơn nữa,  $\widehat{BAF} = \widehat{ACB}$ .

Do đó,  $\widehat{EFA} = \widehat{BAF}$ .

Mặt khác  $At \perp OA$  nên  $EF \perp OA$  ..... (0,5 điểm).

- $OA$  là đường thẳng đi qua  $O(0;0)$  và nhận  $\vec{EF} = (2;1)$  làm véc-tơ pháp tuyến.  
 $OA: 2x + y = 0$ . ..... (0,5 điểm).



- $A$  là giao điểm của  $OA$  và  $\Delta$ . Do đó, tọa độ  $(x;y)$  của  $A$  là nghiệm của hệ:  $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ . Ta tìm được  $A(1;-2)$ . ..... (0,5 điểm).
- Tiếp tuyến  $At$  là đường thẳng qua  $A(1;-2)$  và nhận  $\vec{OA} = (1,-2)$  làm véc-tơ pháp tuyến.  
 $At: x - 2y - 5 = 0$ . ..... (0,5 điểm).

**Bài 5 (2 điểm).** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

- Tìm độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự của  $(E)$ .
- Viết phương trình đường tròn đường kính là đoạn nối hai tiêu điểm của  $(E)$ .  
 Chứng minh  $(E)$  và  $(\mathcal{C})$  không có điểm chung nào.

**Lời giải.**

- Ta có  $a = \sqrt{25} = 5$ ;  $b = \sqrt{16} = 4$ ;  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$ . ..... (0,5 điểm).  
 Độ dài trục lớn:  $2a = 10$ .  
 Độ dài trục bé:  $2b = 8$ .  
 Tiêu cự:  $2c = 6$ . ..... (0,5 điểm).
- Đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng  $c = 3$ .  
 $(\mathcal{C})$  có phương trình:  $x^2 + y^2 = 9$ . ..... (0,5 điểm).  
 Vì hệ  $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$  vô nghiệm nên  $(E)$  và  $(\mathcal{C})$  không có điểm chung nào. .... (0,5 điểm).

#### IV. Đề số 2b

**Bài 1 (2 điểm).** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  và điểm  $A(0;3)$ . Tìm  $B \in \Delta$  sao cho  $\Delta AOB$  vuông tại  $O$ .

**Lời giải.** Gọi  $B(1-b;b) \in \Delta$ . Khi đó:  $\vec{OB} = (1-b;b)$ ;  $\vec{OA} = (0;3)$ .

$\Delta AOB$  vuông tại  $O$ .

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB}. \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0. \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot (1-b) + 3 \cdot (b) = 0. \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

$$\text{Vậy } B(1;0). \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

**Bài 2 (2 điểm).** Tìm hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ  $O$  lên đường thẳng  $\Delta: x + y - 2 = 0$ , từ đó tìm điểm đối xứng của  $O$  qua  $\Delta$ .

**Lời giải.** Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $\Delta$ .

Vì  $OH$  vuông góc với  $\Delta$  nên  $OH$  nhận vectơ pháp tuyến  $(\vec{n}_\Delta = (1; 1))$  của  $\Delta$  làm vectơ chỉ phương, tức là  $OH$  nhận  $\vec{n}_{OH} = (1; -1)$  làm vectơ pháp tuyến. .... (0,5 điểm).

Do đó,  $OH$  là đường thẳng qua  $O(0;0)$  và nhận  $\vec{n}_{OH} = (1; -1)$  làm vectơ pháp tuyến; vậy  $OH$  có phương trình:  $1(x - 0) - 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ . .... (0,5 điểm).

Ta có  $H = \Delta \cap OH$ , nên tọa độ của  $H$  là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy  $H(1; 1)$ . .... (0,5 điểm).

Gọi  $O'$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $\Delta$ .

Khi đó,  $H$  là trung điểm của  $OO'$ .

Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm ta tính được  $O'(2; 2)$ . .... (0,5 điểm).

**Bài 3 (2 điểm).** Viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  nội tiếp  $\Delta ABC$  biết  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(-1; 2)$  và  $AB: x - 2y + 7 = 0$ .

**Lời giải.** Vì  $\Delta ABC$  nội tiếp  $(\mathcal{C})$  nên  $(\mathcal{C})$  có bán kính  $R = d(I, AB) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . .... (1,0 điểm).

Vậy  $(\mathcal{C}): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}$ . .... (1,0 điểm).

**Bài 4 (2 điểm).** Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm là gốc tọa độ  $O$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(\mathcal{C})$  tại  $A$  biết  $E(-1; 3)$  và  $F(2; 3)$  lần lượt là chân đường cao kẻ từ  $B$  và  $C$  và  $A$  thuộc đường thẳng  $\Delta: 2x + y - 5 = 0$ .

**Lời giải.** Gọi  $At$  là tiếp tuyến của  $(\mathcal{C})$  tại  $A$ .

- Chứng minh  $OA \perp EF$ .

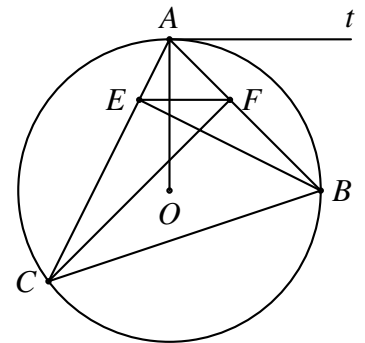
Tứ giác  $BCEF$  nội tiếp nên  $\widehat{EFA} = \widehat{ACB}$ .

Hơn nữa,  $\widehat{BAF} = \widehat{ACB}$ .

Do đó,  $\widehat{EFA} = \widehat{BAF}$ .

Mặt khác  $At \perp OA$  nên  $EF \perp OA$ . .... (0,5 điểm).

- $OA$  là đường thẳng đi qua  $O(0;0)$  và nhận  $\vec{EF} = (3; 0)$  làm véc-tơ pháp tuyến.  
 $OA: x = 0$ . .... (0,5 điểm).



- $A$  là giao điểm của  $OA$  và  $\Delta$ . Do đó, tọa độ  $(x; y)$  của  $A$  là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$
 Ta tìm được  $A(0; 5)$ . .... (0,5 điểm).

- Tiếp tuyến  $At$  là đường thẳng qua  $A(0; 5)$  và nhận  $\vec{OA} = (0; 5)$  làm véc-tơ pháp tuyến.  
 $At: y = 5$ . .... (0,5 điểm).

**Bài 5 (2 điểm).** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

- Tìm độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự của  $(E)$ .
- Viết phương trình đường tròn đường kính là đoạn nối hai tiêu điểm của  $(E)$ .  
Chứng minh  $(E)$  và  $(\mathcal{C})$  có 4 điểm chung.

**Lời giải.**

- Ta có  $a = \sqrt{25} = 5$ ;  $b = \sqrt{9} = 3$ ;  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$ . .... (0,5 điểm).  
Độ dài trục lớn:  $2a = 10$ .  
Độ dài trục bé:  $2b = 6$ .  
Tiêu cự:  $2c = 8$ . .... (0,5 điểm).

- b) Đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng  $c = 4$ .  
 ( $\mathcal{C}$ ) có phương trình:  $x^2 + y^2 = 16$ . ..... (0,5 điểm).  
 Vì hệ  $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$  có 4 nghiệm phân biệt nên ( $E$ ) và ( $\mathcal{C}$ ) có 4 điểm chung. .... (0,5 điểm).

## V. Đề số 3a

**Câu 1.** (4,0 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(-1;3)$ ,  $B(3;1)$  và  $C(3;-5)$ .

- Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh  $AC$ .
- Viết phương trình tổng quát của đường cao xuất phát từ đỉnh  $B$  và tìm tọa độ trực tâm của tam giác  $ABC$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và cách  $B$  một đoạn bằng 4.

### Lời giải.

- Ta có  $\overrightarrow{AC} = (4; -8)$  nên đường thẳng  $AC$  nhận véc-tơ  $\vec{n}_1 = (2; 1)$  làm véc-tơ pháp tuyến. ... 0,5 điểm.  
 Phương trình tham số của đường thẳng  $AC$ :  $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$  ..... 0,5 điểm.  
 Phương trình tổng quát của đường thẳng  $AC$ :  $2x + y - 1 = 0$ . .... 0,5 điểm.
- Phương trình của đường cao xuất phát từ  $B(3;1)$  và nhận véc-tơ  $\overrightarrow{AC} = (4; -8)$  làm véc-tơ pháp tuyến là  $x - 2y - 1 = 0$ . .... 0,5 điểm.  
 Phương trình đường cao xuất phát từ  $A(-1;3)$  và nhận  $\overrightarrow{BC} = (0; -6)$  làm véc-tơ pháp tuyến là  $y - 3 = 0$ . .... 0,5 điểm.  
 Tọa độ trực tâm  $H$  của  $\Delta ABC$  là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3. \end{cases}$$

..... 0,25 điểm.

- Gọi  $\Delta$  là đường thẳng cần tìm và  $\Delta$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (a; b)$  với  $a^2 + b^2 \neq 0$ .  
 Đường thẳng  $\Delta$  có dạng  $a(x + 1) + b(y - 3) = 0$ . .... 0,25 điểm.  
 Ta có

$$\begin{aligned} d(B; \Delta) = 4 &\Leftrightarrow \frac{|a(3+1) + b(1-3)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \\ &\Leftrightarrow |2a - b| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 4ab + 3b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } b = -\frac{3a}{4}. \end{aligned}$$

..... 1,0 điểm.

Khi  $b = 0$  (thì  $a \neq 0$ ), ta có phương trình  $\Delta$  là  $x + 1 = 0$ . .... 0,25 điểm.

Khi  $b = -\frac{3a}{4}$  thì  $\Delta$  có phương trình là  $4x - 3y + 13 = 0$ . .... 0,25 điểm.

## B

**Câu 2.** (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(T)$ :  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ .

- Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của  $(T)$ .

- b) Viết phương trình tiếp tuyến của  $(T)$ , biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng  $l: 3x - 4y + 5 = 0$ .

**Lời giải.**

- a) Đường tròn  $(T)$  có tâm  $I(1; -3)$  và bán kính  $R = 5$ . ..... 0,5 điểm.
- b) Gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến cần tìm.  
 Vì  $\Delta$  song song  $l$  nên  $\Delta$  có dạng  $3x - 4y + m = 0, m \neq 5$ . ..... 0,5 điểm.  
 Vì  $\Delta$  tiếp xúc  $(T)$  nên  $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow m = 10$  hoặc  $m = -35$ . ..... 0,75 điểm.  
 Vậy phương trình  $\Delta$  là  $3x - 4y + 10 = 0$  và  $3x - 4y - 35 = 0$ . ..... 0,25 điểm.

**Câu 3.** (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho elip  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

- a) Xác định tọa độ các tiêu điểm  $F_1, F_2$  và độ dài tiêu cự của  $(E)$ .
- b) Lấy điểm  $M$  tùy ý thuộc  $(E)$ . Chứng minh rằng biểu thức  $T = MF_1 \cdot MF_2 + OM^2$  có giá trị không đổi.

**Lời giải.**

- a) Ta có  $c^2 = a^2 - b^2 = 5$  nên elip  $E$  có hai tiêu điểm  $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$ . ..... 0,5 điểm.  
 Độ dài tiêu cự của  $(E)$  là  $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{5}$ . ..... 0,25 điểm.
- b) Với  $M$  tùy ý thuộc  $E$ , ta có  $MF_1 \cdot MF_2 = \left(a + \frac{c}{a}x_M\right) \cdot \left(a - \frac{c}{a}x_M\right) = 9 - \frac{5}{9}x_M^2$ . ..... 0,5 điểm.  
 Mà  $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = x_M^2 + 4\left(1 - \frac{x_M^2}{9}\right) = \frac{5}{9}x_M^2 + 4$ . ..... 0,5 điểm.  
 Vậy  $T = MF_1 \cdot MF_2 + OM^2 = 13$ . ..... 0,25 điểm.

**Câu 4.** (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

- a) Viết phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm  $O$  và đường kính bằng độ dài trục nhỏ của  $(E)$ .
- b) Tìm điểm  $M(x; y)$  thuộc  $E$  có tọa độ dương sao cho tích  $x \cdot y$  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

- a) Elip  $(E)$  có độ dài trục nhỏ  $2b = 8$  nên đường tròn cần tìm có bán kính  $r = 4$ . ..... 0,5 điểm.  
 Vậy phương trình  $(C)$  là  $x^2 + y^2 = 16$ . ..... 0,5 điểm.
- b) Vì  $M(x; y) \in (E)$  và  $x, y > 0$  nên ta có  $y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$ . ..... 0,25 điểm.  
 Ta có  $xy = \frac{4}{5}\sqrt{x^2(25 - x^2)} \leq \frac{4}{5} \cdot \frac{x^2 + 25 - x^2}{2} = 10$ . ..... 0,5 điểm.
- Đẳng thức xảy ra khi  $\begin{cases} x^2 = 25 - x^2 \\ x > 0 \\ y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$  ..... 0,25 điểm.

**VI. Đề số 3b**

**Câu 1.** (4,0 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $MNP$  với  $M(-1;3), N(3;1)$  và  $P(3;-5)$ .

- Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh  $MP$ .
- Viết phương trình tổng quát của đường cao xuất phát từ đỉnh  $N$  và tìm tọa độ trực tâm của tam giác  $MNP$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua  $M$  và cách  $N$  một đoạn bằng 4.

**Lời giải.**

- Ta có  $\overrightarrow{MP} = (4; -8)$  nên đường thẳng  $MP$  nhận véc-tơ  $\vec{n}_1 = (2; 1)$  làm véc-tơ pháp tuyến. . 0,5 điểm.  
 Phương trình tham số của đường thẳng  $MP$ :  $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$  ..... 0,5 điểm.  
 Phương trình tổng quát của đường thẳng  $MP$ :  $2x + y - 1 = 0$ . ..... 0,5 điểm.

- Phương trình của đường cao xuất phát từ  $N(3;1)$  và nhận véc-tơ  $\overrightarrow{MP} = (4; -8)$  làm véc-tơ pháp tuyến là  $x - 2y - 1 = 0$ . ..... 0,5 điểm.  
 Phương trình đường cao xuất phát từ  $M(-1;3)$  và nhận  $\overrightarrow{NP} = (0; -6)$  làm véc-tơ pháp tuyến là  $y - 3 = 0$ . ..... 0,5 điểm.  
 Tọa độ trực tâm  $H$  của  $\Delta MNP$  là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3. \end{cases}$$

..... 0,25 điểm.

- Gọi  $\Delta$  là đường thẳng cần tìm và  $\Delta$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (a; b)$  với  $a^2 + b^2 \neq 0$ .  
 Đường thẳng  $\Delta$  có dạng  $a(x + 1) + b(y - 3) = 0$ . ..... 0,25 điểm.  
 Ta có

$$\begin{aligned} d(N; \Delta) = 4 &\Leftrightarrow \frac{|a(3+1) + b(1-3)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \\ &\Leftrightarrow |2a - b| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 4ab + 3b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } b = -\frac{3a}{4}. \end{aligned}$$

..... 1,0 điểm.  
 Khi  $b = 0$  (thì  $a \neq 0$ ), ta có phương trình  $\Delta$  là  $x + 1 = 0$ . ..... 0,25 điểm.

Khi  $b = -\frac{3a}{4}$  thì  $\Delta$  có phương trình là  $4x - 3y + 13 = 0$ . ..... 0,25 điểm.

**Câu 2.** (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C)$ :  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ .

- Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của  $(C)$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$ , biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng  $d$ :  $4x - 3y + 1 = 0$ .

**Lời giải.**

- Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; -3)$  và bán kính  $R = 5$ . ..... 0,5 điểm.
- Gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến cần tìm.  
 Vì  $\Delta$  song song  $d$  nên  $\Delta$  có dạng  $4x - 3y + m = 0, m \neq 1$ . ..... 0,5 điểm.  
 Vì  $\Delta$  tiếp xúc  $(C)$  nên  $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow m = 12$  hoặc  $m = -38$ . ..... 0,75 điểm.  
 Vậy phương trình  $\Delta$  là  $4x - 3y + 12 = 0$  và  $4x - 3y - 38 = 0$ . ..... 0,25 điểm.

**Câu 3.** (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho elip  $(E) : \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

- a) Xác định tọa độ các tiêu điểm  $F_1, F_2$  và độ dài tiêu cự của  $(E)$ .  
 b) Lấy điểm  $M$  tùy ý thuộc  $(E)$ . Chứng minh rằng biểu thức  $T = MF_1 \cdot MF_2 + OM^2$  có giá trị không đổi.

**Lời giải.**

- a) Ta có  $c^2 = a^2 - b^2 = 5$  nên elip  $E$  có hai tiêu điểm  $F_1(-2\sqrt{2}; 0), F_2(2\sqrt{2}; 0)$ . ..... 0,5 điểm.  
 Độ dài tiêu cự của  $(E)$  là  $F_1F_2 = 2c = 4\sqrt{2}$ . ..... 0,25 điểm.  
 b) Với  $M$  tùy ý thuộc  $E$ , ta có  $MF_1 \cdot MF_2 = \left(a + \frac{c}{a}x_M\right) \cdot \left(a - \frac{c}{a}x_M\right) = 12 - \frac{2}{3}x_M^2$ . ..... 0,5 điểm.  
 Mà  $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = x_M^2 + 4\left(1 - \frac{x_M^2}{12}\right) = \frac{2}{3}x_M^2 + 4$ . ..... 0,5 điểm.  
 Vậy  $T = MF_1 \cdot MF_2 + OM^2 = 16$ . ..... 0,25 điểm.

**Câu 4.** (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

- a) Viết phương trình đường tròn  $(C)$  có tâm  $O$  và đường kính bằng độ dài trục nhỏ của  $(E)$ .  
 b) Tìm điểm  $M(x; y)$  thuộc  $E$  có tọa độ dương sao cho tích  $x \cdot y$  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

- a) Elip  $(E)$  có độ dài trục nhỏ  $2b = 6$  nên đường tròn cần tìm có bán kính  $r = 3$ . ..... 0,5 điểm.  
 Vậy phương trình  $(C)$  là  $x^2 + y^2 = 9$ . ..... 0,5 điểm.  
 b) Vì  $M(x; y) \in (E)$  và  $x, y > 0$  nên ta có  $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ . ..... 0,25 điểm.  
 Ta có  $xy = \frac{3}{4}\sqrt{x^2(16 - x^2)} \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2 + 16 - x^2}{2} = 6$ . ..... 0,5 điểm.  
 Đẳng thức xảy ra khi  $\begin{cases} x^2 = 16 - x^2 \\ x > 0 \\ y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ . ..... 0,25 điểm.