

ĐƯỜNG THẲNG TRONG HỆ TRỤC OXYZ (VD - VDC)

I. CÁC VẤN ĐỀ VÀ VÍ DỤ GIẢI TOÁN

1. Vấn đề 1: Lập phương trình đường thẳng

Trong phần này chúng ta nghiên cứu giải một số bài toán về đường thẳng trong hệ tọa không gian Oxyz ở mức vận dụng và vận dụng cao. Trong đó có các mối liên hệ bao gồm điểm - đường thẳng - mặt phẳng - mặt cầu, nhưng chủ đề là đường thẳng. Như lập phương trình đường thẳng.

Có một số bài toán mà đề bài cho giả thiết về đường thẳng, nhưng trong bài làm ta rất ít sử dụng đến kiến thức về đường thẳng trong không gian, chẳng hạn ta xét ví dụ sau

► Ví dụ 1. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2018 M101 C39)

Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . Điểm M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

- A. $6x + 8y + 11 = 0$. B. $3x + 4y + 2 = 0$. C. $3x + 4y - 2 = 0$. D. $6x + 8y - 11 = 0$.

Hướng dẫn.

Gọi $I(-1;-1;-1)$ là tâm mặt cầu, ta có tam giác AMI vuông tại M nên điểm M thuộc mặt cầu đường

kính AI có tâm $K\left(\frac{1}{2}; 1; -1\right)$, bán kính $\frac{5}{2}$, phương trình là $(S'): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{25}{4}$.

Như vậy điểm $M(x; y; z)$ thuộc cả hai mặt cầu $(S), (S')$ nên trừ các vế ta được:

$$3x + 4y + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0. \text{ Chọn C.}$$

Lời bình.

Sau khi giải một bài chúng ta không dừng lại ở bài giải, mà tự đặt ra câu hỏi là: bài này nói về kiến thức gì? Cần kỹ năng gì? Từ đó chúng ta xác định vấn đề cần giải quyết hay mở rộng cho các bài toán tương tự. Chúng ta có thể nhìn nhận bài toán dưới 3 hình thức:

- Thứ nhất: điểm M xem như giao của hai mặt cầu tâm I và tâm K.

- Thứ hai: nếu ta tính $AM = \sqrt{AI^2 - IM^2} = \sqrt{AI^2 - R^2} = \text{const} = r$ khi đó điểm M là giao của mặt cầu tâm A, bán kính r với mặt cầu tâm I đã cho.

- Thứ ba: điểm M có giới hạn chính xác là một đường tròn giao tuyến, chứ không đơn thuần chỉ nằm trên mặt phẳng. Mặt phẳng này có véc tơ pháp tuyến là \vec{IA} .

Từ đó ta liên hệ với các kiến thức lớp 11 và lớp 9. Nói cách khác: chúng ta khai thác các kiến thức về hình học lớp 9, lớp 10, lớp 11 hay lớp 12 đều được, tùy theo đối tượng HS để triển khai. Tức là hình học tổng hợp hoặc tọa độ hóa. Đối với HS thì vừa cụ thể, vừa trừu tượng lại có tính khái quát. Như thế ta rèn luyện tư duy khá tốt cho các em về vị trí tương đối giữa điểm - đường thẳng - mặt phẳng - mặt cầu.

► Ví dụ 2. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2017 M101 C37)

Trong không hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt

phẳng $(P): 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

- A. $2x - y + 2z + 22 = 0$. B. $2x - y + 2z + 13 = 0$. C. $2x - y + 2z - 13 = 0$. D. $2x + y + 2z - 22 = 0$.

Hướng dẫn.

Nhận xét: Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm cùng phương với $\vec{u}_2 = (2; -1; 2)$ nên loại đáp án **D**.

Ta tìm giao điểm M của d_1 và (P) , ghi $2(1+3X)+2(-2+X)-3 \times 2$ bấm **Shift Solve** ta có $X = 1 = t$.

Sửa thành $2(1+3X)-(-2+X)+2 \times 2$ bấm = ta có 13 nên **chọn C**.

Lời bình.

Cách tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng là tìm tham số t , chỉ khác hơn ở đây ta chọn máy tính để giải mà thôi. Chẳng hạn ta làm tự luận là: $2(1+3t)+2(-2+t)-3 \times 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ rồi thay trở về ta có giao điểm $M(4; -1; 2)$ sau đó viết phương trình mặt phẳng $2(x-4)-(y+1)+2(z-2) = 0$. Rõ ràng ta lặp lại một số thao tác mà trong khi không sử dụng máy tính? Nếu vậy thì làm sao đủ thời gian?

Bài toán trên có liên quan đến đường thẳng trong không gian, nhưng lại hỏi về mặt phẳng.

Đối với HS: Bài toán cho đường thẳng tham số và chính tắc, lại có cả mặt phẳng nên dễ bị rối hay lúng túng trong giải toán. Nhiệm vụ của GV là dẫn dắt các em tiếp cận dưới góc độ dễ hiểu nhất có thể được, kết hợp sự trừu tượng khi bấm máy Casio, *chỉ tự luận đơn thuần sẽ không đáp ứng nhu cầu thực tế*.

► Ví dụ 3. (THPT LƯƠNG THẾ VINH)

Trong hệ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x - y + 2z - 1 = 0$.

Phương trình đường thẳng d đi qua A song song với cả (P) và (Q) là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-6}$ C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{2}$ D. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-6}$.

Hướng dẫn.

Nhận xét: cả 4 phương án đều cho đường thẳng đi qua A nên ta cần xác định véc tơ chỉ phương.

Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng, ta có $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 2a - b + 2c = 0 \end{cases}$. Cho $c = 1$

ta có hệ $\begin{cases} 2a + 2b = -1 \\ 2a - b = -2 \end{cases}$, giải ra ta có $a = -\frac{5}{6}, b = \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{-5}{6}; \frac{1}{3}; 1\right) = \frac{-1}{6}(5; -2; -6)$. **Chọn D**.

Lời bình.

Đối với *đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng hay đường thẳng song song với hai mặt phẳng* thì chúng ta thường lấy tích có hướng của hai véc tơ pháp tuyến làm véc tơ chỉ phương: $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ (hoặc

cùng phương). Có hai cách tính $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ phổ biến là:

- Tính tự luận: theo định nghĩa và định thức cấp 2. Theo cách này thì nên viết ra giấy nháp theo cột để tính độ chính xác cao. Với các em "học tốt" thì việc tính này không khó khăn, nhưng vẫn thích tính theo cách dùng máy tính Casio.

- Hỗ trợ máy tính Casio. Thông thường ta vào **Mode 8** Shift VCT (với máy 570ES hay 570Vn) hoặc **Menu 5** (với máy 580VN-x) theo cách này cần thực hiện nhiều thao tác nên cũng mất khá nhiều thời gian. Thậm chí còn chậm, tính nhầm theo cách 1 còn nhanh hơn (cũng dễ sai hơn về dấu).

Ở đây ta giải bằng cách giải hệ hai ẩn: *Cho thành phần $z = 1$ hay $x = 1$ để giải hệ hai ẩn còn lại, nghĩa là $\vec{u} = (X; Y; 1)$ sau đó quy đồng mẫu thức là xong. Chú ý là vì chuyển về thành phần z sang phải nên ta đổi dấu thành phần này*. Thoạt nhìn về lý thuyết thì khá dài, nhưng vào **Mode 5 1** để giải hệ hai ẩn thì khá nhanh. Trong đó dòng đầu là $2 = 2 = -1 =$ và dòng thứ hai là $2 = -1 = -2 =$ là được. Không phải ghi ra giấy nháp nhiều. Ban đầu có thể chưa quen nhưng quen rồi thì tính xong X, Y ta đã biết nhanh được kết quả.

➤ **Ví dụ 4.** (BGD Đề thi chính thức THPTQG 2017 M101 C34)

Trong không hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$ và $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với Δ và Δ' ?

- A. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 1+3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = 3+t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1-t \\ z = 3+t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 3+t \end{cases}$

Hướng dẫn.

Nhận xét: có 2 phương án **C, D** là đường thẳng đi qua M nên ta cần xác định thêm véc tơ chỉ phương. Vào **Mode 5 1** nhập dòng đầu là $3 = 2 = -1 =$ và dòng thứ hai là $1 = 3 = 2 =$

(nhìn vào hai đường thẳng để nhập - không cần nháp) ta được $X = -1, Y = 1 \Rightarrow \vec{u} = (-1; 1; 1)$. **Chọn D.**

➤ **Ví dụ 5.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1-4t \\ z = 6+6t \end{cases}$ và đường thẳng

$d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}$. Đường thẳng đi qua $A(1;-1;2)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình

- A. $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}$ B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{4}$ C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{4}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$

Hướng dẫn.

Nhận xét: Cả 4 phương án đều là đường thẳng đi qua A nên ta cần xác định thêm véc tơ chỉ phương. Vào **Mode 5 1** nhập dòng đầu là $1 = -4 = -6 =$ và dòng thứ hai là $2 = 1 = 5 =$

ta được $X = \frac{14}{9}, Y = \frac{17}{9} \Rightarrow \vec{u} = (14; 17; 9)$. **Chọn A.**

Lời bình.

Bài này bấm xong máy tính cho ra X, Y ta có ngay đáp án **A**. Không cần chuyển đổi véc tơ.

➤ **Ví dụ 6.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d': \begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \\ z = -2+3t \end{cases}$

cắt nhau. Phương trình mặt phẳng chứa d và d' là

- A. $6x + 9y + z + 8 = 0$ B. $6x - 9y - z - 8 = 0$ C. $-2x + y + 3z - 8 = 0$ D. $6x + 9y + z - 8 = 0$

Hướng dẫn.

Trước hết ta cần xác định véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{u}']$. Vào **Mode 5 1** nhập:

$-2 = 1 = -3 =$ và $1 = -1 = -3 =$ ta có $\vec{n} = (6; 9; 1)$ nên có 2 phương án thích hợp là **A, D**.

Lấy điểm $M(1; -2; 4)$ thử: $6X + 9Y + F$ CALC nhập $1 = -2 = 4 =$ kết quả -8 . **Chọn A.**

Lời bình.

Qua các **ví dụ 4, 5, 6** ta thấy được việc hỗ trợ máy tính Casio hợp lý: *tránh đi độ phức tạp của phép toán, giảm đi tối đa các phép tính nhằm và nhập, giảm tối đa các thao tác bấm máy*, khi đó sẽ mang lại hiệu quả cao thần tốc khi thi trắc nghiệm.

► **Ví dụ 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 3x + y - 3 = 0$, $(Q): 2x + y + z - 3 = 0$

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Hướng dẫn.

Ta thấy cả 4 phương án đều cho đường thẳng đi qua M , nên cần tìm véc tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

Vào **Mode 5 1** nhập $3 = 1 = 0 =$ và $2 = 1 = -1 =$ ta có $\vec{u} = (1; -3; 1)$. **Chọn D.**

► **Ví dụ 8.** (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2019 M101 C33)

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(2;0;2)$, $C(2;-1;3)$, $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

$$\text{A. } \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Hướng dẫn.

Trước hết ta tìm véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_{ABD} = [\vec{AB}, \vec{AD}]$. Vào **Mode 5 1** nhập $1 = -2 = -2 =$ và

$0 = -1 = -3 =$ ta có $\vec{u} = (4; 3; 1)$ nên loại **B, D**. Trong đáp án **C**, cho $t = 1 \Rightarrow C(2; -1; 3)$. **Chọn C.**

► **Ví dụ 9.** (THTT Số 3-486)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d .

$$\text{A. } \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{B. } \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{C. } \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{D. } \frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

Hướng dẫn.

Trước hết ta có $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}, \vec{u}_d]$, vào **Mode 5 1** nhập $1 = 2 = -1 =$ và $2 = 1 = -3 =$ ta được $X = \frac{-5}{3}, Y = \frac{1}{3}$ suy ra $\vec{u} = (-5; 1; 3)$. So sánh đáp án ta **chọn A.**

Lưu ý.

Khi đổi hướng véc tơ thì cả ba thành phần tọa độ của véc tơ đồng loạt đổi dấu. Do đó bài này ta không cần kiểm tra (hay tìm thêm) điểm thuộc đường thẳng Δ , cụ thể điểm $M(1;1;1) = d \cap (P)$.

Việc tìm phương của $[\vec{n}, \vec{u}_d]$ theo cách trên là đúng, tuy nhiên không chính xác về độ dài.

Sau đây ta xét thêm về ứng dụng của tích vô hướng, cụ thể là "quy tắc hình thoi"

► **Ví dụ 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases}$. Viết

phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2 .

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{3}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$.

Hướng dẫn.

Trước hết ta tính $\vec{u}\vec{u}' = -1 - 2 - 2 = -5 < 0$ nên góc giữa hai véc tơ là góc tù, ta đổi hướng đúng một véc tơ, ta có $\vec{v} = (1; 1; -2)$ thì góc giữa \vec{u}, \vec{v} là góc nhọn. Mặt khác ta có $|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{6}$ nên $\vec{u} + \vec{v}$ sẽ nằm trên đường chéo hình thoi có các cạnh $\sqrt{6}$. Mà $\vec{u} + \vec{v} = (2; 3; -3)$. **Chọn C.**

► **Ví dụ 11.** (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2018 M101 C49)

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$, gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1; 1; 1)$ và có

véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$.

Hướng dẫn.

Trước hết ta tính $\vec{u}_d \vec{u}_\Delta = 3 - 8 = -5 < 0$ nên góc giữa hai véc tơ là góc tù, ta đổi hướng đúng một véc tơ ta có $\vec{v} = (-1; 2; -2)$ thì góc giữa \vec{u}_d, \vec{v} là góc nhọn. Mặt khác ta có $|\vec{u}_d| = 5; |\vec{v}| = 3$ nên $\frac{3}{5}\vec{u}_d + \vec{v}$ sẽ nằm trên đường chéo hình thoi có các cạnh 3. Mà $\frac{3}{5}\vec{u}_d + \vec{v} = \left(\frac{4}{5}; \frac{22}{5}; -2\right) = \frac{2}{5}(2; 11; -5)$. **Chọn C** vì hai đường thẳng đều đi qua điểm A .

► **Ví dụ 12.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(5; 5; 1)$. Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt mặt phẳng (Oxy) tại $M(a; b; 0)$. Tính $3b - a$.

A. 6. B. 5. C. 3. D. 0.

Hướng dẫn.

Gọi D là chân đường phân giác, ta tính $\frac{AB}{AC}$, ghi $\sqrt{\frac{1+4+4}{16+16+4}}$ Shift Sto M. Bấm $\frac{B+CM}{1+M}$ CALC nhập

$2 = 5 ==$ Shift Sto X $\Delta \frac{B+CM}{1+M}$ CALC nhập $3 = 5 ==$ Shift Sto Y $\Delta \frac{B+CM}{1+M}$ CALC nhập $1 = 1 ==$

Shift Sto F, ta có $D\left(3; \frac{11}{3}; 1\right)$ nên $\vec{AD} = (X-1; Y-1; F+1) = \frac{2}{3}(3; 4; 3)$ và phương trình

$AD: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ và cho $t = \frac{1}{3}$ ta được $3b - a = 9t + 2 = 5$. **Chọn B.**

► **Ví dụ 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết điểm $A(1; 2; 3)$, đường

trung tuyến BM và đường cao CH có phương trình lần lượt là
$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 0 \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad \text{và} \quad \frac{x-4}{16} = \frac{y+2}{-13} = \frac{z-3}{5}.$$

Viết phương trình đường phân giác góc A .

A. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{10}.$

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{5}.$

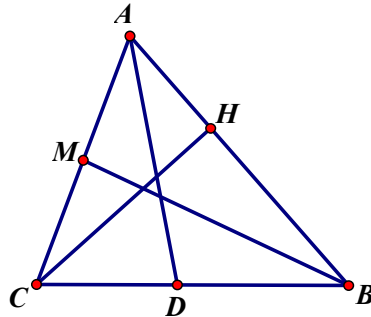
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}.$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-3}{-5}.$

Hướng dẫn.

Giả sử $M(5t; 0; 4t+1)$ là trung điểm AC , suy ra $C(10t-1; -2; 8t-1) \in CH$ nên ta được

$C(4; -2; 3)$. Phương trình (P) qua A và vuông góc với CH là: $16(x-1) - 13(y-2) + 5(z-3) = 0$, mp(P) cắt BM tại $B(0; 0; 1)$.



Gọi D là chân đường phân giác, ghi $\sqrt{\frac{1+4+4}{9+16}}$ Shift Sto M. Bấm $\frac{B+CM}{1+M}$ CALC nhập $0 = 4 ==$

Shift Sto X $\Delta \frac{B+CM}{1+M}$ CALC nhập $0 = -2 ==$ Shift Sto Y $\Delta \frac{B+CM}{1+M}$ CALC nhập $1 = 3 ==$ Shift

Sto F, ta được $D\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{7}{4}\right)$ nên $\overline{AD} = (X-1; Y-2; F-3) = \frac{1}{4}(2; -11; -5)$. **Chọn D.**

► **Ví dụ 14.** (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2018 M101 C33)

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}.$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}.$

C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}.$

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}.$

Hướng dẫn.

Cách 1. (PP trắc nghiệm loại trừ)

Loại phương án **C** vì đường thẳng không qua A . Ba phương án còn lại đều đi qua A và đều vuông góc với d . Trong đáp án **A**, cho $t = 0$ ta được điểm $M(-1; 0; 0) \in Ox$. **Chọn A.**

Cách 2. (PP tự luận)

Phương trình mp(P) qua A và vuông góc với d là: $2(x-1)+1(y-2)-2(z-3)=0$

Cho $y=z=0$ ta có $x=-1$ nên giao điểm của (P) và Ox là $M(-1;0;0) \Rightarrow \overline{MA}=(2;2;3)$. **Chọn A.**

Lời bình.

Cách 3. Tự luận (mà sau này ta phải chuyển đổi sang ngôn ngữ Casio cho nhanh):

Lấy điểm $M(X;0;0) \in Ox \Rightarrow \overline{MA}=(1-X;2;3) \perp \overline{u_d}=(2;1;-2)$ nên ta có

$$2(1-X)+2-6=0 \Rightarrow X=-1 \Rightarrow \overline{MA}=(2;2;3), M(-1;0;0). \text{ **Chọn A.**}$$

Bản chất **cách 2** và **cách 3** không có gì khác nhau. Ta chuyển đổi sang **ngôn ngữ Casio** như sau

Ghi $2(X-1)+1(Y-2)-2(F-3)=0$ bấm **Shift Solve** máy hỏi Y, F? Ta nhập $0=0$ cho ta $X=-1$.

Sửa thành $(X-1):(Y-2):(F-3)$ bấm $=$ là được $(-2; -2; -3)$.

► Ví dụ 15. (THPT LƯƠNG THẾ VINH - HÀ NỘI)

Trong không gian Oxyz, cho các đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1; 0; 2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2 .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn.

Viết phương trình mp(P) qua A và vuông góc với d_2 , phương trình: $1(X-1)+2Y+2(F-2)=0$.

Tìm giao điểm B của d_1 và mp(P), nhập $1(1+X-1)+2(-1+2X)+2(-X-2)=0$ bấm **Shift Solve** ta có $X=2$. Sửa thành $(1+X-1):(-1+2X):(-X-2)$ bấm $=$ ta có $(2; 3; -4)$. **Chọn C.**

► Ví dụ 16. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$, $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ vuông góc với d_1 và cắt đường thẳng d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-3}$ C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

Hướng dẫn.

Viết phương trình mp(P) qua A và vuông góc với d_1 , phương trình: $3(X-1)+2(Y-2)-(F-3)=0$.

Tìm giao điểm B của d_2 và mp(P), nhập $3(1-X-1)+2(1+2X-2)-(-1-X-3)=0$ bấm **Shift Solve** có $X=-1$. Sửa thành $(1-X-1):(1+2X-2):(-1-X-3)$ bấm $=$ có $(1; -3; -3)$. **Chọn B.**

► Ví dụ 17. Trong không gian Oxyz, cho Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+4=0$ và cắt cả hai

đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$, $d': \begin{cases} x=3+t \\ y=3t \\ z=2t \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đường thẳng Δ ?

A. $M(6;5;-4)$. B. $N(4;5;6)$. C. $P(5;6;5)$. D. $Q(4;4;5)$

Hướng dẫn.

Lấy $A(a-3; -a+2; 2a) \in d$ và $B(b+3; 3b; 2b) \in d'$ khi đó $\overline{AB} // \overline{n_\alpha}$ nên ta có:

$$\frac{b-a+6}{1} = \frac{3b+a-2}{2} = \frac{2b-2a}{-1} \text{ giải ra ta có } a=4, b=2.$$

Ghi $2 \times \frac{A-3-X}{1} - \frac{-A-2-Y}{2} - \frac{2A-F}{-1}$ CALC thử điểm. **Chọn D.**

- **Ví dụ 18.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -6)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm A, B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A.** $\sqrt{38}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** 12.

Hướng dẫn.

Mặt phẳng (P) qua M và chứa d_1 là: $7(x-1)+11(y-1)-3(z+1)=0$ (kết hợp **Mode 5 1**).

Giao điểm B của (P) và d_2 thỏa mãn: $7(3X-3)+11(X-2)-3(2X+3)=0 \Rightarrow X=2$

Suy ra $B(4; 1; 6)$, đường thẳng MB sẽ cắt d_1 tại A . Phương trình MB là

$$x=2X+4; y=2X+1; z=12X+6 \text{ thay vào } d_1 \text{ ta có } X=-\frac{1}{2} \text{ và } \overline{BA}=(2X; 2X; 12X) \text{ nên suy ra}$$

$$AB=|2X|\sqrt{1+1+36}=\sqrt{38}. \text{ **Chọn A.**}$$

- **Ví dụ 19.** (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình)

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(2; -3; 2)$. Tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A, B, C là một đường thẳng d . Phương trình tham số của đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 - 7t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = -t \\ z = -15 - 7t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$

Hướng dẫn.

Ta ghi $2\sqrt{(X-1)^2+(Y-1)^2+(F-1)^2} - \sqrt{(X+1)^2+(Y-2)^2+F^2} - \sqrt{(X-2)^2+(Y+3)^2+(F-2)^2}$

Dùng CALC rồi lấy hai điểm khác nhau thuộc d để thử (tức là $2AM - BM - CM = 0$). **Chọn A.**

Lời bình.

Nhận xét: Tập hợp các điểm M là đường thẳng giao tuyến của các mặt phẳng trung trực của AB, AC .

+ Phương trình mặt phẳng trung trực BA là: $2x - y + z = \frac{OA^2 - OB^2}{2} = \frac{3-5}{2} = -1$.

+ Phương trình mặt phẳng trung trực AC là: $x - 4y + z = \frac{OC^2 - OA^2}{2} = \frac{17-3}{2} = 7$.

Cho $y=t$ rồi trừ các vế ta được: $\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$. **Chọn A.**

► Ví dụ 20. (THPT Chuyên Tiền Giang)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$; $B(0;3;0)$; $C(0;0;4)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Tìm phương trình tham số của đường thẳng OH .

A. $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = -2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \\ z = 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Hướng dẫn.

Sử dụng tính chất $OH \perp mp(ABC)$ thì vì $\overrightarrow{n_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$ suy ra $\overline{OH} = (6; 4; 3)$. **Chọn C.**

Lời bình. Việc chứng minh $OH \perp mp(ABC)$ thì GV có thể hướng dẫn HS tự luyện (Hình học 11).

► Ví dụ 21. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(3;0;0)$, $B(0;6;0)$, $C(0;0;6)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1}$

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$

C. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{1}$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{1}$

Hướng dẫn.

Gọi $H(x_0; y_0; z_0)$ là trực tâm ABC , ta chứng minh $OH \perp (ABC)$. Trước hết ta có phương trình $(ABC): 2x + y + z - 6 = 0$ và $2x_0 + y_0 + z_0 - 6 = 0$. Ta có $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ & $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ suy ra

$$-3x_0 + 6y_0 = 0, -6y_0 + 6z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = y_0 = \frac{1}{2}x_0 \text{ suy ra } 2x_0 + x_0 - 6 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = z_0 = 1$$

Hay là $\overline{OH} = (2; 1; 1) = \overline{n_{ABC}}$. **Chọn B.**

► Ví dụ 22. (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$ B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$ C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$ D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}$

Hướng dẫn.

Ta thấy các véc tơ chỉ phương trong 4 phương án là như nhau nên ta cần tìm tâm đường tròn nội tiếp.

Bài toán liên quan góc tọa độ O , ta có $\overline{OA} = (2; 2; 1) \Rightarrow OA = 3$, $\overline{OB} = \frac{4}{3}(-2; 1; 2) \Rightarrow OB = 4$ và

$\overline{BA} = \frac{1}{3}(14; -2; -5) \Rightarrow AB = 5$. Vậy tam giác OAB vuông tại O . Lấy điểm B' thuộc tia OB sao cho

$\overline{OB}' = (-2; 1; 2)$ khi đó tâm I thuộc đường thẳng qua O và có VTCP \vec{u} cùng hướng $\overline{OA} + \overline{OB}' = (0; 3; 3)$

hay chọn $\vec{u} = (0;1;1)$. Ta có $r = \frac{2S}{2p} = \frac{3.4}{3+4+5} = 1 \Rightarrow OI = r\sqrt{2} = \sqrt{2} = |\vec{u}| \Rightarrow I(0;1;1)$. **Chọn A.**

Lời bình.

Cách giải trên dựa vào tính toán các yếu tố liên quan đặc biệt của tam giác. ả goài ra ta có thể giải ngắn gọn hơn dựa vào kết quả tâm tỉ cự sau: $OB.\vec{IA} + OA.\vec{IB} + BA.\vec{IO} = \vec{0} \Leftrightarrow 4.\vec{IA} + 3.\vec{IB} + 5.\vec{IO} = \vec{0}$ suy ra tọa độ của I là $x_I = \frac{4x_A + 3x_B + 5x_O}{4+3+5} = 0; y_I = \frac{4y_A + 3y_B}{4+3+5} = 1; z_I = \frac{4z_A + 3z_B}{4+3+5} = 1 \Rightarrow I(0;1;1)$. **Chọn A.**

► **Ví dụ 23. (THTT Số 3-486)**

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và $d': \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$.

- A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$. C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$. D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

Hướng dẫn.

Trước hết ta có $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$, vào **Mode 5 1** nhập $2=3=5=$ và $3=-2=1=$ ta được $X=1, Y=1$ suy ra $\vec{u}_\Delta = (1;1;1)$. Đến đây ta loại các phương án **B** và **D**.

Từ phương án A, thay $y=x$ vào d ta có $\frac{X-2}{2} = \frac{X-3}{3}$ **Shift Solve** có $x=y=0$ suy ra $z=1$ và giao điểm là $(0; 0; 1)$. Tương tự thay $y=x$ vào d' ta có $\frac{X+1}{3} = \frac{X-4}{-2}$ **Shift Solve** có $x=y=2$ suy ra $z=3$ và giao điểm là $(2; 2; 3)$. Vậy **chọn A.**

► **Ví dụ 24. (THTT Số 2-485)**

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x=4-2t \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=1 \\ y=t' \\ z=-t' \end{cases}$.

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên là

- A. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{9}{4}$. B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{9}{4}$.
 C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}$. D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn.

Đường kính mặt cầu là đoạn vuông góc chung của d_1 & d_2 , đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = (1;2;2)$. Gọi $A(4-2a; a; 3)$ và $B(1; b; -b)$ mà AB đoạn vuông góc chung, ta có \vec{AB} cùng phương với \vec{u} nên $\frac{2a-3}{1} = \frac{b-a}{2} = \frac{-b-3}{2}$ giải ra có $a=1, b=-1$. Suy ra $A(2;1;3)$, $B(1;-1;1)$ do đó ta được tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$, bán kính $R = IA = \frac{3}{2}$. **Chọn B.**

2. Vấn đề 2: Khoảng cách - Góc - Min, Max

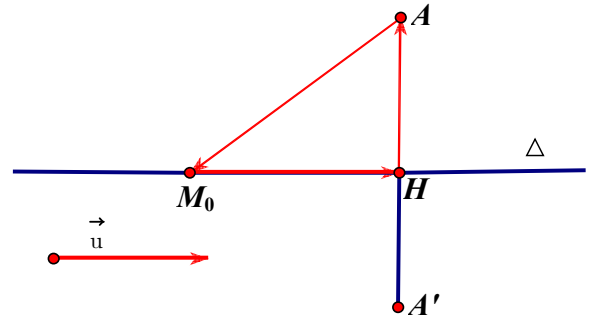
Xuất phát là: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và điểm $A(x_1; y_1; z_1)$ không thuộc Δ . Đặc biệt hơn khi Δ có thể viết được dạng chính tắc là

$$\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

Các bài toán vận dụng đơn giản là:

- Tìm tọa độ hình chiếu H của A trên Δ .
- Tìm tọa độ A' đối xứng của A qua Δ .
- Tính khoảng cách từ A đến Δ .

Cả 3 bài toán trên đều được giải nếu ta tìm được tọa độ của H . Cách giải ta thường sử dụng là: lấy điểm H thuộc Δ dạng tham số, sau đó tính \overrightarrow{AH} , rồi cho $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ để tìm tham số t , cuối cùng thay t trở về suy ra H . Hay một số cách giải khác.



Sau đây ta xem xét cách giải sau:

Ta có $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{M_0H}$, vì $\overrightarrow{M_0H}$ và \vec{u} cùng phương nên $\overrightarrow{M_0H} = t\vec{u}$ suy ra: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM_0} + t\vec{u}$ (1).

Nhân cả hai vế của (1) với \vec{u} ta được $0 = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} + t\vec{u} \cdot \vec{u} \Rightarrow t = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0A}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ (2).

Biểu diễn (1) dạng tọa độ là:
$$\begin{cases} x_H = x_0 + at \\ y_H = y_0 + bt \\ z_H = z_0 + ct \end{cases}$$
, với t được tính theo công thức (2).

Nhận xét:

Đặt $\overrightarrow{M_0A} = (X; Y; Z)$, khi đó giá trị của t theo công thức (2) viết thành:

$$t = \frac{aX + bY + cZ}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}. \text{ Mặt khác: bình phương hai vế của (1) và rút}$$

gọn ta có $AH = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{(aX + bY + cZ)^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$. Ồ ời như vậy: Để diễn giải bản chất công thức thì

tương đối dài, vì toàn bằng chữ có tính trừu tượng và tổng quát, còn thực hành thì rất nhanh.

Trong thực hành ta gán t vào phím M trong máy tính, phím F thay cho biến z (nếu là máy 570ES, 570Vn) tuy nhiên đối với máy 580Vn -X thì có đủ phím z nên tiện lợi hơn.

☞ **Công thức tính nhanh bổ xung.**

- Để tính giá trị của t ta ghi vào màn hình: $\frac{aX + bY + cF}{a^2 + b^2 + c^2}$ (các số a, b, c nhập trực tiếp)
- Bấm CALC, ta thay tọa độ điểm A vào tử số Δ và lần lượt là X, Y, F (nhằm được), **Shift Sto M**.
- Để tính khoảng cách AH ta bấm $\sqrt{X^2 + Y^2 + F^2 - (a^2 + b^2 + c^2)M^2}$ và bấm = là xong.
- Để tìm tọa độ H ta ghi $x_0 + aM : y_0 + bM : z_0 + cM$ bấm = = = là được.

➤ **Ví dụ 25.** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Tìm hình

chiều vuông góc của A lên đường thẳng d

A. (2; 1; 1)

B. (1; 2; 1)

C. (1; 1; 2)

D. (2; -1; -1).

Hướng dẫn.

Ghi vào màn hình $\frac{X+Y+2F}{1^2+1^2+2^2}$ CALC (thay tọa độ A vào tử của d) nhập $0=0=3=$ Shift Sto M .

Bấm AC và ghi $1+M:M:-1+2M$ bấm $===$ ta có $(2;1;1)$. **Chọn A.**

(Ghi $1+M:M:-1+2M$ như là phương trình tham số $x=1+t, y=t, z=-1+2t$ hàng ngang).

► **Ví dụ 26.** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và điểm $M(1;2;-3)$. Tọa độ

hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng d là:

- A.** $H(1;2;-1)$ **B.** $H(1;-2;-1)$ **C.** $H(-1;-2;-1)$ **D.** $H(1;2;1)$.

Hướng dẫn.

Ghi vào màn hình $\frac{2X+Y+2F}{2^2+1^2+2^2}$ CALC (thay tọa độ M vào tử của d) nhập $-2=3=-4=$ Shift Sto M .

Bấm AC và ghi $3+2M:-1+M:1+2M$ bấm $===$ ta có $(1;-2;-1)$. **Chọn B.**

► **Ví dụ 27.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình

chiếu vuông góc của A trên d

- A.** $(6; -2; -1)$ **B.** $(10; -1; -3)$ **C.** $(2; -3; 1)$ **D.** $(-2; 3; 1)$.

Hướng dẫn.

(Lưu ý: Ở đây ta có thể rèn luyện cách chuyển phương trình d sang dạng chính tắc ra giấy nháp)

Ghi vào máy $\frac{-4X-Y+2F}{16+1+4}$ (trên tử chính là các thành phần cột tham số t)

CALC và nhập $-5=3=2=$ (Lấy tọa độ A trừ các số tự do trong phương trình tham số) Shift Sto M

Bấm AC và ghi $6-2M:-2-M:-1+2M$ (như phương trình tham số của d viết theo hàng ngang)

bấm $===$ ta được **đáp án C.**

Lời bình.

Vì phải giải thích cách làm nên việc trình bày tương đối dài, sau này ta sẽ không giải thích vấn đề này.

► **Ví dụ 28.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và điểm $A(-1; 0; 1)$.

Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua đường thẳng d

- A.** $(1; 2; 3)$ **B.** $(1; 2; 1)$ **C.** $(1; -2; 3)$ **D.** $(0; 1; 1)$.

Hướng dẫn.

(Lưu ý là: để tìm tọa độ điểm B ta nhân đôi tọa độ H rồi trừ đi tọa độ của A)

ghi vào máy $\frac{2X-2Y-F}{9}$ CALC và nhập $-3=1=1=$ Shift Sto M

Bấm AC và ghi $4+4M+1:-2-4M:-2M-1$ bấm $===$ ta được **đáp án B**.

► **Ví dụ 29.** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;-2;6), B(-2;4;4)$. Viết phương trình đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB

A. $\frac{x}{6} = \frac{y}{5} = \frac{z}{12}$. B. $\frac{x}{6} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{12}$. C. $\frac{x}{6} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-12}$. D. $\frac{x}{6} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-12}$.

Hướng dẫn.

Phương trình (AB): $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-6}{-2}$ (nhập). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AB .

Ghi vào màn hình $\frac{X+6Y-2F}{1+36+4}$ CALC nhập $3=2=-6=$ Shift Sto M.

Bấm AC và ghi $-3+M:-2+6M:6-2M$ bấm $===$ ta có $\left(\frac{-96}{41}; \frac{80}{41}; \frac{192}{41}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = -\frac{16}{41}(6;-5;-12)$.

Chọn C.

Lời bình.

Trong bài này ta có thể thử bằng cách loại trừ: Xem véc tơ chỉ phương nào vuông góc với \overline{AB} thì chọn

Ghi $X+6Y-2F$ CALC nhập lần lượt các bộ véc tơ, đến $6=-5=-12=$ cho kết quả bằng 0.

Tuy nhiên để tạo ra bài toán khó hơn ta có thể đưa vào phương án **D**. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$. Khi đó phép thử còn chưa đủ kết luận.

► **Ví dụ 30.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với d là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5\sqrt{2}$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 5\sqrt{2}$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 50$.

Hướng dẫn.

Ở đây ta loại các phương án **C** và **D** vì sai tâm I , ta còn phải tính bán kính $R^2 = [d(I, \Delta)]^2$.

Ghi vào màn hình $\frac{2X+Y-F}{6}$ CALC nhập $2=-4=6=$ Shift Sto M.

Bấm $X^2+Y^2+F^2-6M^2$ bấm $=$ ta được kết quả 50. **Chọn A.**

Lời bình.

Ta luyện tập thành thạo thì chỉ cần hình dung cách làm trong đầu và tính nhằm một vài phép tính nhỏ. ả hư thế thì khỏi cần ghi cái gì ra giấy nháp. Đến đây ta thấy: phần lý thuyết và công thức bổ xung thì có vẻ phức tạp đôi chút, còn phần thực hành quả là thần tốc!

► **Ví dụ 31.** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$, mặt cầu tâm $I(2;5;3)$ tiếp xúc

với d là:

A. $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 18.$

B. $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 16.$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 25.$

D. $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 9.$

Hướng dẫn.

Ở đây ta cả 4 phương án đều đúng tâm I , phải tính bán kính $R^2 = [d(I, \Delta)]^2$.

Ghi vào màn hình $\frac{2X+Y+2F}{9}$ CALC nhập $1=5=1 = \text{Shift Sto } M$.

Bấm $X^2 + Y^2 + F^2 - 9M^2$ bấm = ta được kết quả 18. **Chọn A.**

► **Ví dụ 32.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu (S) :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

A. 3.

B. 0.

C. 1

D. 2.

Hướng dẫn.

Ở đây ta tính khoảng cách từ tâm $I(1; 2; -3)$ đến Δ và so sánh với bán kính $R = \sqrt{1+4+9+67} = 9$.

Ghi vào màn hình $\frac{-X+Y-F}{3}$ CALC nhập $3=2=-6 = \text{Shift Sto } M$.

Bấm $\sqrt{X^2 + Y^2 + F^2 - 3M^2}$ bấm = ta được kết quả $\sqrt{42}$ và < 9 . **Chọn D.**

► **Ví dụ 33.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ cắt mặt cầu

$(S): (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$ tại 2 điểm A, B . Độ dài AB bằng

A. 6.

B. 4.

C. 8.

D. 5.

Hướng dẫn.

Ở đây ta kí hiệu $h = d(I, d)$, R là bán kính mặt cầu. Khi đó $AB = 2\sqrt{R^2 - h^2}$.

Ghi vào màn hình $\frac{2X-2Y+F}{9}$ CALC nhập $9=-6=6 = \text{Shift Sto } M$.

Bấm $2\sqrt{18 - (X^2 + Y^2 + F^2 - 9M^2)}$ bấm = ta được kết quả 6. **Chọn A.**

► **Ví dụ 34.** Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$. Tính khoảng

cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- A. $4\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn.

ả hện xét hai đường thẳng đã cho song song với nhau, lấy điểm trên d_1 và tính khoảng cách đến d_2

Ghi $\sqrt{X^2 + Y^2 + F^2 - \frac{(X + 2Y + 2F)^2}{9}}$ CALC nhập $1 = -2 = -2 =$ kết quả $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **Chọn B.**

► **Ví dụ 35.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$. Đường thẳng nào sau cắt mặt cầu (S) ?

A. $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$

B. $d_2: \frac{x+4}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+5}{3}$

C. $d_3: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

D. $d_4: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$.

Hướng dẫn.

- Ở đây ta tính khoảng cách từ tâm I đến các đường thẳng và chọn đáp án mà $d < R$. Ta làm như sau:

Ghi công thức $\sqrt{(-1-X)^2 + (2-Y)^2 + (1-F)^2 - \frac{(A(-1-X) + B(2-Y) + C(1-F))^2}{A^2 + B^2 + C^2}}$ - 2

CALC nhập X, Y, F lần lượt $0 = 1 = -2 =$ nhập A, B, C lần lượt $2 = 1 = 3 =$ kết quả $\frac{-14 + 3\sqrt{35}}{7} > 0$

CALC nhập lại đối với đường thẳng d_2 là $-4 = 2 = -5 = 6 = 2 = 3 =$ kết quả là $\frac{-14 + 3\sqrt{101}}{7} > 0$

CALC nhập lại đối với đường thẳng d_3 là $2 = 0 = 0 = -2 = 2 = 1 =$ kết quả là $\frac{-6 + \sqrt{5}}{3} < 0$. **Chọn C.**

Lời bình.

Thực chất các biểu thức chính là vế trái của mặt cầu, có thêm các biến A, B, C là bộ véc tơ chỉ phương của đường thẳng. Công thức khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng là:

$$d(I, \Delta) = \sqrt{(X + 1)^2 + (Y - 2)^2 + (F - 1)^2 - \frac{(A(X + 1) + B(Y - 2) + C(F - 1))^2}{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ta chỉ việc nhập tọa độ $(x_0; y_0; z_0)$ và $(a; b; c)$.

Công thức trên cũng là công thức chúng ta thường dùng nhưng **viết dạng đại số**. Quy đồng và ta biến

đổi được về **công thức véc tơ** như sau: $d(I, \Delta) = \frac{\sqrt{\vec{u}^2 \cdot \overline{IM_0}^2 - (\vec{u} \cdot \overline{IM_0})^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\vec{u}| \cdot |\overline{IM_0}| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{|\vec{u}|}$

Hay là $d(I, \Delta) = \frac{|\vec{u}| \cdot |\overline{IM_0}| \sin \alpha}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u}, \overline{IM_0}|}{|\vec{u}|}$.

Đến đây ta thấy được ý nghĩa lớn và thực tế hơn là: *Chúng ta có thể tính khoảng cách khi mà véc tơ hay điểm có tham số, như thế ở trong chế độ Mode 1, ta có thể giải phương trình bởi SHIFT SOLVE chứ không thực hiện được trong chế độ Mode 8 hay Menu 5 không cho phép giải phương trình cũng như tính khoảng cách có tham số.* Ta xét ví dụ sau:

► **Ví dụ 36.** Trong không gian Oxyz, cho $d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc

d_1 sao cho khoảng cách từ M đến d_2 bằng 1

- A. (6; 3; 3) B. (4; 1; 1) C. (3; 0; 0) D. (5; 2; 2).

Hướng dẫn.

Ở đây ta thay tham số t bởi tham số M , ghi vào công thức tính khoảng cách

$$\sqrt{(3+M-2)^2 + (M-1)^2 + M^2 - \frac{(2(3+M-2)+1(M-1)+2M)^2}{9}} = 1 \Rightarrow M$$

Bấm **Shift Solve** ta được $M = 1 = t$ nên điểm cần tìm là (4; 1; 1). **Chọn B.**

Lời bình.

Ta có thể ra phương án khó hơn, chẳng hạn: biết $M(a; b; c) \in d_1$ và cách d_2 một khoảng bằng 1, hỏi tổng $a + 2b + 3c$? (Hay là $P(a, b, c)$ là biểu thức nào đó ta tùy chọn đặt ra). Bài toán trên còn phát biểu

dạng sau: Biết rằng $M(m+3; m; m)$ cách đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ một khoảng bằng 1. Tìm giá trị của tham số m .

- A. $m = 3$ B. $m = 2$ C. $m = 1$ D. $m = 0$.

► **Ví dụ 37.** Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại C, D . Để độ dài CD lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

- A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$. B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.
- C. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$. D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

Hướng dẫn.

Xét trong mặt phẳng chứa A , tâm I và Δ thì ta quy về hình học lớp 9: CD lớn nhất thì gần tâm I nhất. Tuy nhiên ở đây Δ còn nằm trong (α) cho nên Δ đi qua A và tâm H của đường tròn giao tuyến.

Cả 4 phương án thì đường thẳng đều đi qua A , do đó cần tìm véc tơ chỉ phương cùng phương với \overline{AH} .

Ghi vào màn hình $-\frac{2X-2Y+F+15}{9}$ CALC nhập $2 = 3 = 5 = \text{Shift Sto M}$

Ghi $2M + X: -2M + Y: M + F$ bấm $= = =$ ta được $H(-2; 7; 3)$ nên $\overline{AH} = (1; 4; 6)$. **Chọn A.**

(Các bạn tham khảo thêm về Casio mặt phẳng trong không gian).

► **Ví dụ 38.** Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(3; 4; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-4}$. Phương

trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12 là

- A. $(x+3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25$. B. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 5$.
- C. $(x-3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 5$. D. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$.

Hướng dẫn.

Gọi mặt cầu bán kính R , H là trung điểm AB , đặt $IH = h$ ta có $R^2 = AH^2 + h^2 = \left(\frac{S}{h}\right)^2 + h^2$

Ghi $\sqrt{X^2 + Y^2 + F^2 - \frac{(X+Y-4F)^2}{18}}$ CALC nhập $2 = 2 = 1 =$ có $h = 3$. ả ên $R^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

Chọn D.

► Ví dụ 39. (THPT LƯƠNG THẾ VINH - HÀ NỘI)

Trong hệ trục $Oxyz$, cho $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ cắt đường thẳng d tại các điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Hướng dẫn.

ả hện xét: cả 4 phương án đều đúng tâm I , chỉ khác bán kính.

Vậy ta cần tìm bán kính $R^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + [d(I, d)]^2$ nên ta làm như sau

Ghi $(\sqrt{3})^2 + X^2 + Y^2 + F^2 - \frac{(3X-2Y+2F)^2}{9+4+4}$ CALC nhập $2 = 0 = -3 =$ kết quả 16. **Chọn D.**

► Ví dụ 40. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-m}{2}$ và mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn EF lớn nhất

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -\frac{1}{3}$.

D. $m = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn.

Gọi I là tâm mặt cầu bán kính R , H là trung điểm EF , đặt $IH = h$ ta có $EF = 2\sqrt{R^2 - h^2}$

nên để EF lớn nhất thì h^2_{\min} , ta có: $h^2 = 0^2 + 2^2 + (2-m)^2 - \frac{(1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 4 - 2m)^2}{6}$

$h^2 = \frac{1}{3}m^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow h^2_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = 0$. **Chọn B.**

► Ví dụ 41. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\beta): x + 2y - 2z - 4 = 0$, $(\alpha): 2x - 2y - z + 1 = 0$, và mặt cầu S có phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$.

A. -9 .

B. -12

C. 5 .

D. 2 .

Hướng dẫn.

Vào **Mode 5 1** và nhập hai bộ $1 = 2 = 2 =$ và $2 = -2 = 1$ ta có $X = 1, Y = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{u} = (2; 1; 2)$. Mặt cầu có

tâm $I(-2; 3; 0)$, gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu của I trên d, ta có $\vec{u} \cdot \vec{IH} = 0 \Leftrightarrow 2(x+2) + 1(y-3) + 2z = 0$

$$\text{nên ta có hệ ba ẩn } \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x - 2y - z = -1 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases} \text{ suy ra } x = 0, y = 1, z = -1 \Rightarrow \vec{IH} = (2; -2; -1) \Rightarrow IH = 3.$$

Đến đây ta có $R^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + IH^2 \Leftrightarrow 4 + 9 - m = 16 + 9 \Rightarrow m = -12$. **Chọn B.**

Lời bình.

Trên đây ta không cần viết phương trình đường thẳng d, sau đó tính khoảng cách IH sẽ phức tạp hơn.

Qua bài toán này ta có thêm *cách tính khoảng cách từ điểm I đến Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng.*

► **Ví dụ 42.** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(2; 3; -1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến

của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z - 1 = 0$ và $(\alpha'): x + 3y + 2z - 7 = 0$.

A. $\frac{\sqrt{453}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{77}}{7}$ C. $\frac{2\sqrt{77}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{534}}{6}$.

Hướng dẫn.

Cho $z = t$ thay vào $(\alpha), (\alpha')$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x + y = 2t + 1 \\ x + 3y = 7 - 2t \end{cases} \Rightarrow x = -2 + 4t, y = 3 - 2t, z = t \Rightarrow d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Ghi $\sqrt{X^2 + Y^2 + F^2 - \frac{(4X - 2Y + F)^2}{21}}$ CALC nhập $4=0=-1=$ ta được $\frac{2\sqrt{77}}{7}$. **Chọn C.**

Lời bình.

Cách giải thông thường: viết phương trình d, rồi tính khoảng cách $d(M, d) = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{MM}_0|}{|\vec{u}_d|}$. Đề nghị bạn

đọc giải theo cách này xem thời gian bao nhiêu phút?. Hãy so sánh **ví dụ 41** và **ví dụ 42**?

► **Ví dụ 43. (THPT LƯƠNG THẾ VINH - HÀ NỘI)**

Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho A $(1; 4; 2)$, B $(-1; 2; 4)$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$ và điểm M thuộc d.

Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMB

A. $2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $6\sqrt{2}$.

Hướng dẫn.

Nhận xét: Do độ dài AB không đổi nên diện tích tam giác AMB nhỏ nhất nếu khoảng cách từ M đến AB nhỏ nhất. Ở đây chúng ta nghiên cứu hai cách giải sau:

+ **Cách 1 (PP khảo sát).** Ta có $\overline{BA} = (2; 2; -2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$. Chọn $\overline{u_{AB}} = (1; 1; -1)$ ta có khoảng cách

$$\text{của } M \text{ đến } AB \text{ là } h^2 = (-4t+4)^2 + (2t-2)^2 + (t+2)^2 - \frac{(-4t+4+2t-2-t-2)^2}{3}$$

$$h^2 = 21t^2 - 36t + 24 - 3t^2 = 18t^2 - 36t + 24 \geq 6 \Rightarrow \min h = \sqrt{6}. \text{ Vậy } S_{\min} = 3\sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$$

+ **Cách 2 (Tâm tử cực).** Tính các khoảng cách lần lượt từ A, B đến d, nhập công thức

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + F^2 - \frac{(-4X + 2Y + F)^2}{16 + 4 + 1}} \text{ CALC nhập } -4 = 2 = -2 = \text{kết quả } \frac{2\sqrt{105}}{7}$$

CALC nhập $-6 = 0 = 0 =$ kết quả $\frac{2\sqrt{105}}{7}$. Đến đây gọi I là trung điểm AB, tọa độ I(0; 3; 3).

CALC nhập $-5 = 1 = -1 =$ kết quả $h = \sqrt{6}$. Suy ra $S_{\min} = 3\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Lời bình.

Theo cách 2 ta tính ra giấy nháp độ dài AB và tọa độ I. Còn lại chỉ việc nhắm & bấm máy.

Các bạn có thể tính theo công thức truyền thống $d(M, AB) = \frac{|\overline{[AB, AM]}|}{|\overline{AB}|}$ xem nhanh, chậm thế nào?

➤ **Ví dụ 44.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$ và đường thẳng Δ

có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ , xác định vị

trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của điểm M là:

A. $M(1; 0; 2)$ **B.** $M(2; 4; 3)$ **C.** $M(-3; 2; -2)$ **D.** $M(1; 4; 3)$.

Hướng dẫn.

Nhận xét: Vì AB không đổi nên chu vi tam giác AMB nhỏ nhất nếu MA + MB nhỏ nhất.

Ở đây ta giải theo PP tâm tử cực: $X^2 + Y^2 + F^2 - \frac{(2X - Y + 2F)^2}{9}$ CALC nhập $2 = 4 = 0 =$ kết quả 20.

CALC nhập $4 = 2 = 6 =$ kết quả 20. Đến đây gọi I(2; 4; 3) là trung điểm AB.

Trở về màn hình sửa thành $\frac{(2X - Y + 2F)}{9}$ CALC nhập $3 = 3 = 3 =$ kết quả $t = 1$. **Chọn A.**

➤ **Ví dụ 45. (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG)**

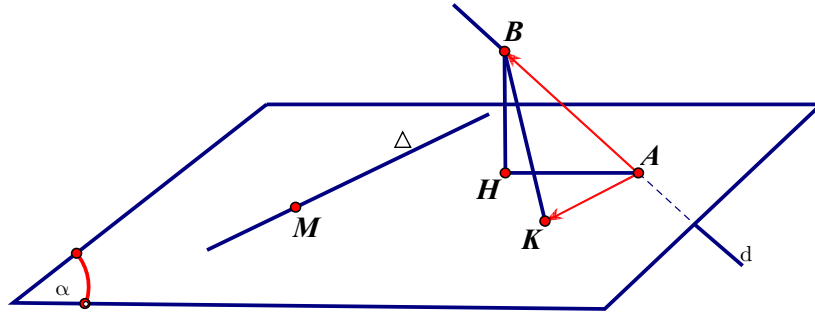
Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $M(3; 1; 1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 3 = 0$ và

tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là:

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = -3 - 4t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 3 - 2t' \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 + 5t' \\ y = 1 - 4t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$

Hướng dẫn.

Giả sử đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại A, điểm B thuộc d sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u_d}$, H là hình chiếu vuông góc của B trên (α) . Vì véc tơ chỉ phương của đường thẳng không phụ thuộc độ dài nên ta chọn véc tơ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{u_\Delta}$ có độ dài AK không đổi.



Khi đó trong tam giác ABK có độ dài hai cạnh AB, AK không đổi nên góc \widehat{BAK} nhỏ nhất khi độ dài BK nhỏ nhất, tức là $BK = BH$ hay $\overrightarrow{u_\Delta}$ cùng phương \overrightarrow{AH} .

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{u_\Delta} + t\vec{n} \Rightarrow t = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{u_d}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$ suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{u_d} - t\vec{n}$. Bấm máy Casio

$\frac{X+Y-F}{3}$ CALC nhập $0=3=-2=$ Shift Sto M bấm $X-M:Y-M:F+M$ bấm $=$ ta có

$\overrightarrow{u_\Delta} = -\frac{1}{3}(5;-4;1)$. **Chọn B** (nếu xét thêm: cho $t' = -1$ ta sẽ có tọa độ của M).

Lời bình.

Cách giải trên dựa vào sự phân tích hình học hợp lý để xét phương của Δ . ả goài ra ta có thể giải theo phương pháp khảo sát hàm số (Bạn đọc thử giải theo PP hàm số xem thế nào?!).

► **Ví dụ 46.** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3-t \\ z = -2 \end{cases}$. Mặt

phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ (với $a; b; c; d \in \mathbb{R}$) vuông góc với đường thẳng d_1 và chẵn d_1, d_2 đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Tính $a + b + c + d$.

A. -14

B. 1

C. -8

D. -12.

Hướng dẫn.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của d_1, d_2 thì AB là đoạn có độ dài nhỏ nhất. Mặt khác $d_1 \perp (P)$ và $d_1 \perp AB$, kết hợp với giả thiết suy ra $AB \subset (P)$ hay (P) chứa AB. Ta có $\vec{n}_P = (1; 2; -1)$ và cần tìm tọa

độ của A. Gọi $A(1+t; 2+2t; 1-t) \Rightarrow d^2 = (1+t-2)^2 + (2+2t-3)^2 + (1-t+2)^2 - \frac{(t-1+2t-1)^2}{2}$

$\Rightarrow d^2 = \frac{3}{2}t^2 - 6t + 9 \geq 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$ tại $t=2 \Rightarrow A(3; 6; -1) \Rightarrow (P): x + 2y - z - 16 = 0$. **Chọn A.**

Lời bình.

Đề bài ra thiếu tính chặt chẽ, chẳng hạn từ phương trình $(P): x + 2y - z - 16 = 0$ ta có thể viết thành

$(P): \frac{4}{7}x + \frac{8}{7}y - \frac{4}{7}z - \frac{64}{7} = 0$ và lấy tổng $a + b + c + d = -8$! Để khắc phục điều này ta có thể cho biết

trước một thành phần, như $(P): ax + by - z + d = 0$ và hỏi tổng $a + b + d = ?$ Hay điều kiện khác.

➤ **Ví dụ 47. (THTT số 5-488)**

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng

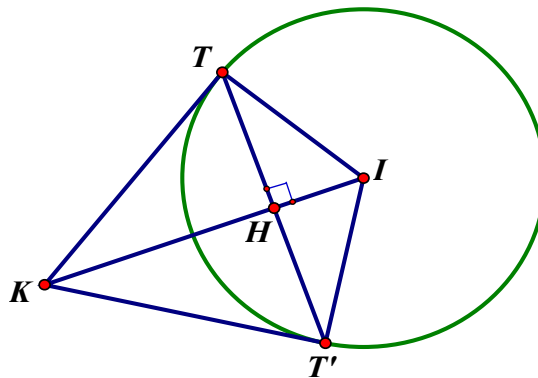
$d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

- A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. C. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$. D. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$.

Hướng dẫn.

Ta diễn đạt giả thiết thành *các tiếp diện của (S) tại T và T' cắt nhau theo giao tuyến d* . Gọi I là tâm mặt cầu, xét mặt phẳng (Q) qua ba điểm I, T, T' và giả sử (Q) cắt d tại K . Ta có thể lấy $\overline{IT}, \overline{IT}'$ làm

các véc tơ pháp tuyến của (P) và (P') thì ta có $\overline{u}_d = \overline{n}_Q = k[\overline{IT}, \overline{IT}']$ ($k \neq 0$) hay ta có $d \perp IK$.



Tọa độ $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = 1$. Ghi $\frac{X+Y-F}{3}$ CALC nhập $1 = -2 = -1 = \text{Shift Sto M}$.

Ghi $M : 2 + M : -M$ bấm $===$ ta có $K(0; 2; 0)$ suy ra $\overline{IK} = (-1; 2; 1) \Rightarrow \overline{IH} = t(-1; 2; 1), t > 0$.

Trong tam giác vuông ITK ta có $IH \cdot IK = IT^2 = R^2$, ta được $6t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. **Chọn A.**

Lời bình.

Khi đã hiểu vấn đề (nhớ kết quả) và thi trắc nghiệm thì bấm máy (hay tự luận) cũng nhẹ nhàng, còn nếu chưa nắm được nội dung bài toán mà bắt đầu giải thì gặp vướng mắc lớn ở chỗ: các mặt phẳng (P) và (P') cũng như các tiếp điểm T và T' cho một cách trừu tượng (không có phương trình cụ thể và tọa độ cụ thể), vị trí tương đối giữa mặt cầu, mặt phẳng, đường thẳng trong không gian cũng không có hình vẽ. Ờ ừ vậy đây là bài toán khó.

(Bạn đọc liên hệ và tham khảo thêm **ví dụ 1**)

II. CÁC BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Câu 1: (THTT Số 1-484)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho $A(1;3;2)$ là trung điểm MN . Tính độ dài đoạn MN .

- A. $MN = 4\sqrt{33}$. B. $MN = 2\sqrt{26,5}$. C. $MN = 4\sqrt{16,5}$. D. $MN = 2\sqrt{33}$.

Câu 2: (THPT Chuyên ĐH Vinh)

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 2 = 0$.

Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) , đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d ?

- A. $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}$. B. $\Delta_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$.
C. $\Delta_3: \frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-5}{1}$. D. $\Delta_1: \frac{x+2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+4}{-1}$.

Câu 3: (THTT Số 2-485)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0$, $(Q): x - 2y - 2 = 0$ là

- A. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$. B. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{5}$.
C. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5$. D. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$.

Câu 4: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa)

Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 4 = 0$ và $(\beta): 2x - 2y - z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = 8$ khi:

- A. $m = 12$. B. $m = -12$. C. $m = -10$. D. $m = 5$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua $A(1;1;1)$ và có

vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$.

Câu 6. Trong không gian với trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$, và mặt phẳng

$(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm nằm trên d luôn cách đều A, B có phương trình là.

A. $d: \frac{x}{-1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z}{-2}$.

B. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z}{2}$.

C. $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-2}$.

D. $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-4}{2}$.

Câu 7. (THPT CHUYÊN KHTN)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3), B(-2;0;1)$ và mặt phẳng

$(\alpha): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

A. 2

B. 0

C. 1

D. vô số.

Câu 8. (SỞ GD & ĐT NGHỆ AN)

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ bằng

A. $\sqrt{7}$

B. 3

C. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

D. $\sqrt{\frac{7}{3}}$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $\Delta': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' bằng:

A. $\frac{\sqrt{79}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{386}$.

C. $\frac{11\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{386}}{3}$.

Câu 10. (THPT Chuyên Hà Tĩnh)

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

A. $(-1;0;4)$.

B. $(7;1;-1)$.

C. $(2;1;-2)$.

D. $(0;2;-5)$.

Câu 11. Trong không gian với trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

$d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}; d_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ là

A. $5\sqrt{14}$

B. $6\sqrt{7}$

C. $7\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{21}$.

Câu 12. Trong không gian với trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

$d_1: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$ và $d_2: \frac{x}{-6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ là

A. 5 .

B. 4 .

C. 2 .

D. 3 .

Câu 13. (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng

$(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và $A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN . Một vectơ chỉ phương của Δ là

- A. $\vec{u} = (2; 3; 2)$. B. $\vec{u} = (1; -1; 2)$. C. $\vec{u} = (-3; 5; 1)$. D. $\vec{u} = (4; 5; -13)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36$, điểm

$I(1; 2; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d , N thuộc (S) sao cho I là trung điểm của MN .

- A. $\begin{bmatrix} N(3; 2; 1) \\ N(3; 6; -1) \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} N(-3; -2; 1) \\ N(3; 6; -1) \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} N(-3; 2; 1) \\ N(3; 6; 1) \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} N(-3; -2; -1) \\ N(3; 6; 1) \end{bmatrix}$.

Câu 15: (SGD Bắc Giang)

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2; 2; 1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB . Đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

- A. $d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$. B. $d: \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}$.
C. $d: \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{19}{9}}{2}$. D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-6}{2}$.

Câu 16: (THPT Chuyên ĐH KHTN)

Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{3}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-9}{3}$. Mặt cầu có một đường kính là đoạn thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình là:

- A. $\left(x - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + (z-14)^2 = 3$. B. $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + (z-7)^2 = 12$.
C. $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + (z-7)^2 = 3$. D. $\left(x - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + (z-14)^2 = 12$.

Câu 17: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(1; 1; 3)$. $H(x_0; y_0; z_0)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Khi đó $x_0 + y_0 + z_0$ bằng:

- A. $\frac{38}{9}$. B. $\frac{34}{11}$. C. $\frac{30}{11}$. D. $\frac{11}{34}$.

Câu 18: (THPT Chuyên ĐH Vinh)

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_3 = (2;1;-1)$. B. $\vec{u}_2 = (1;-1;0)$. C. $\vec{u}_4 = (0;1;-1)$. D. $\vec{u}_1 = (1;2;1)$.

Câu 19: (SỞ GD & ĐT PHÚ THỌ)

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-2z+12=0$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của (α) với 3 trục tọa độ, đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với (α) có phương trình là

- A. $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-2}$. B. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$. C. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-2}$. D. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-2}$.

Câu 20: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$. B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$. C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$. D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

Câu 21: (SGD Bắc Giang)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M , cắt và vuông góc với Δ là

- A. $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-4t \\ z=-2t \end{cases}$. B. $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$. C. $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-4t \\ z=2t \end{cases}$. D. $d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 22: (THPT Chuyên Phan Bội Châu) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) , (Q) chứa d

và tiếp xúc với (S) . Gọi M và N là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng MN bằng?

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. 4.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng

$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$. Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN bằng 8.

- A. $m = -24$ B. $m = 8$ C. $m = 16$ D. $m = -12$.

Câu 24: (THPT Chuyên ĐH Vinh)

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 2 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$ và điểm $A\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) , song song với d đồng thời cách d một khoảng bằng 3. Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng.

A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$. C. $\frac{7}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại C , có $\widehat{ABC} = 60^\circ$; $AB = 3\sqrt{2}$.

Đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{x+8}{-4}$, đường thẳng AC nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + z - 1 = 0$. Biết điểm B là điểm có hoành độ dương, gọi (a, b, c) là tọa độ của điểm C . Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 2. B. 3. C. 4. D. 7.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng có phương trình

$(P): x + y + z + 2 = 0$ cắt nhau tại I . Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , vuông góc với đường thẳng d đồng thời khoảng cách từ I đến Δ bằng $\sqrt{42}$. Gọi $M(5; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của I trên Δ . Giá trị của tích bc bằng:

A. -10. B. 10. C. 12. D. -20.

Câu 27 (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG):

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng:

A. 30. B. 26. C. 20. D. 21.

Câu 28: (THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI)

Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 4)$ và hai điểm M, B thỏa mãn $MA \cdot \overrightarrow{MA} + MB \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Giả sử điểm M thay đổi trên đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{1}$. Khi đó điểm B thay đổi trên đường thẳng có phương trình là

- A. $d_1: \frac{x+7}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+12}{1}$ B. $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{1}$
- C. $d_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ D. $d_4: \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-12}{1}$.

Câu 34. (BGD - Đề thi MINH HỌA THPTQG 2018-2019)

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

- A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$.

Câu 35. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2019 M101 C42)

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $P(-3;0;-3)$. B. $M(0;-3;-5)$. C. $N(0;3;-5)$. D. $Q(0;5;-3)$.

Câu 36. (PTNK-ĐHQG TP HCM)

Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$, $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , song song với (P) sao cho khoảng cách từ B đến d là lớn nhất.

- A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$. B. $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. D. $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z-1}{-7}$.

Câu 37. (TT Diệu Hiền-Cần Thơ)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;-5)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là:

- A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$. B. $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$.
C. $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+1}{-5}$.

Câu 38. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định)

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$, $N(-1;1;3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M , N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ vectơ pháp tuyến \vec{n} của mặt phẳng (P) .

- A. $\vec{n} = (1;-1;1)$. B. $\vec{n} = (1;1;-1)$. C. $\vec{n} = (2;-1;1)$. D. $\vec{n} = (2;1;-1)$.

Câu 39. (THPT Lê Quý Đôn-Quảng Trị)

Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$.

Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(1;2;3)$. B. $M(2;0;5)$. C. $M(3;-2;7)$. D. $M(3;0;4)$.

Câu 40. (THTT Số 4-487)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3;2;-1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

- A.** $2x + y - 3z + 3 = 0$. **B.** $x + 2y - z - 1 = 0$. **C.** $3x + 2y - z + 1 = 0$. **D.** $2x - y - 3z + 3 = 0$.

Câu 41. (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình)

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$.

Tìm vectơ chỉ phương \vec{u} của đường thẳng Δ đi qua điểm A và vuông góc với d đồng thời cách B một khoảng lớn nhất.

- A.** $\vec{u} = (4; -3; 2)$. **B.** $\vec{u} = (2; 0; -4)$. **C.** $\vec{u} = (2; 2; -1)$. **D.** $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

Câu 42. (THTT Số 4-487)

Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;4;-4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

- A.** $H(-2; -1; 3)$. **B.** $I(-1; -2; 3)$. **C.** $K(3; 0; 15)$. **D.** $J(-3; 2; 7)$.

Câu 43. (PTNK-ĐHQG TP HCM)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0$ và điểm $M(1;2;-1)$. Một đường thẳng thay đổi qua M và cắt (S) tại hai điểm A, B . Tìm giá trị lớn nhất của tổng $MA + MB$.

- A.** 8. **B.** 10. **C.** $2\sqrt{17}$. **D.** $8 + 2\sqrt{5}$.

Câu 44. (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh)

Trong không gian $Oxyz$, cho $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$, $(S_2): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=-3t \\ z=-2-t \end{cases}$. Gọi A, B là hai điểm tùy ý thuộc $(S_1), (S_2)$ và M thuộc đường thẳng d . Khi

đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + MB$ bằng

- A.** $\frac{\sqrt{2211}}{11}$. **B.** $\frac{\sqrt{3707}}{11} - 3$. **C.** $\frac{\sqrt{1771} + 2\sqrt{110}}{11}$. **D.** $\frac{\sqrt{3707}}{11}$.

Câu 45. (SGD Quảng Nam)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 4z = 0$, đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 3; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) . Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , nằm

trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a; b; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tính $a + 2b$.

- A.** $a + 2b = -3$. **B.** $a + 2b = 0$. **C.** $a + 2b = 4$. **D.** $a + 2b = 7$.

Câu 46. (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm một vector chỉ phương \vec{u} của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

- A. $\vec{u} = (2; 2; -1)$. B. $\vec{u} = (1; 7; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 0; 2)$. D. $\vec{u} = (3; 4; -4)$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;0)$, mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 1 = 0$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P) , M là hình chiếu

vuông góc của I trên mặt phẳng (P) , N là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác IMN nhỏ nhất. Tọa độ điểm N là

- A. $N\left(2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. B. $N\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$. C. $N\left(2; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. D. $N\left(2; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 48. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH)

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$ và 2 điểm $A(6;3;-2)$; $B(1;0;-1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua B , vuông góc với d và thỏa mãn khoảng cách từ A đến Δ là nhỏ nhất. Một vector chỉ phương của Δ có tọa độ:

- A. $(1; 1; -3)$ B. $(1; -1; -1)$ C. $(1; 2; -4)$ D. $(2; -1; -3)$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-3;2;1)$, $B(2;1;-3)$. Đường thẳng Δ đi qua gốc O sao cho tổng khoảng cách từ A và B tới Δ lớn nhất có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+2}{-4}$. Đường thẳng d đi qua A , song song với Δ và cắt (P) tại B . Điểm M di động trên (P) sao cho tam giác AMB luôn vuông tại M . Độ dài đoạn MB có giá trị lớn nhất bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{3}$. C. $18\sqrt{5}$. D. $17\sqrt{3}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu

$(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

- A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1), M(3;0;0)$ và mặt phẳng

$(P): x + y + z - 3 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M , nằm trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ là nhỏ nhất. Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là vectơ chỉ phương của Δ với a, b, c là các số nguyên có ước chung lớn nhất bằng 1. Tính giá trị $T = a + b + c$.

- A. $T = -1$. B. $T = 1$. C. $T = 0$. D. $T = 2$.

Câu 53. (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0), B(0;-\sqrt{2};0), M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất thì độ dài CM bằng

- A. $2\sqrt{3}$. B. 4. C. 2. D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Câu 54. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH)

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;4)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và mặt cầu

$(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng:

- A. $\sqrt{5}$ B. 1 C. 4 D. 2.

Câu 55. (THPT CHUYÊN TUYẾN QUANG)

Cho đường thẳng $d: \frac{x}{6} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ và ba điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6)$. Điểm $M(a;b;c) \in d$ thỏa mãn $MA + 2MB + 3MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = \frac{148}{49}$. B. $S = \frac{49}{148}$. C. $S = -\frac{50}{49}$. D. $S = -\frac{49}{50}$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;3), B(5;2;-1)$ và hai điểm M, \hat{A} thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho điểm $I(1;2;0)$ luôn là trung điểm của $M\hat{A}$. Khi biểu thức

$P = MA^2 + 2\hat{A}B^2 + \overline{MA} \cdot \overline{\hat{A}B}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 2x_M - 4x_{\hat{A}} + 7y_M - y_{\hat{A}}$

- A. $T = -10$ B. $T = -12$ C. $T = -11$ D. $T = -9$.

Câu 57. (THPT CHUYÊN TUYẾN QUANG)

Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{x} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ và hai điểm $A(2;0;-3), B(2;-3;1)$. Đường thẳng Δ qua A

và cắt d sao cho khoảng cách từ B đến Δ nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

- A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ B. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ C. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-2}$ D. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$

Câu 58. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;5;0); B(3;3;6)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi C là điểm trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Khoảng cách giữa 2 điểm A và C là

- A. 29. B. $\sqrt{29}$. C. $\sqrt{33}$. D. 7.

Câu 59. (SỞ GD & ĐT NINH BÌNH)

Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 20$. Mặt phẳng (α) có phương trình $x-2y+2z-1=0$ và đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-3}$.
Viết phương trình đường thẳng Δ' nằm trong mặt phẳng (α) , vuông góc với Δ đồng thời cắt (S) theo một dây cung có độ dài lớn nhất.

- A. $\Delta' : \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 \\ z = -4 + t \end{cases}$. B. $\Delta' : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\Delta' : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$. D. $\Delta' : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 5t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$.

Câu 60. (THPT CHUYÊN SON LA)

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P) : x-2y+2z-5=0$. Đường thẳng (d) đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d nhỏ nhất, Đường thẳng (d) có một VTCP là $\vec{u} = (1;b;c)$ khi đó $\frac{b}{c}$ bằng

- A. $\frac{b}{c} = 11$ B. $\frac{b}{c} = -\frac{11}{2}$ C. $\frac{b}{c} = -\frac{3}{2}$ D. $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm

$A(1;2;-1)$, $B(3;-1;-5)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là lớn nhất. Khi đó, gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của d với đường thẳng Δ , giá trị $P = a+b+c$ bằng

- A. -2 B. 4 C. 2 D. 6 .

Câu 62. (THPT HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH)

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;-4;-2)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases}$. Điểm

$I(a,b,c)$ thuộc d là điểm thỏa mãn $IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = a+b+c$ bằng

- A. $\frac{23}{58}$ B. $-\frac{43}{58}$ C. $\frac{65}{29}$ D. $-\frac{21}{58}$

Câu 63. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ hai điểm

$A(2;0;3)$ và $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc Δ thì $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0

- A. $x_0 = 0$ B. $x_0 = 1$ C. $x_0 = 2$ D. $x_0 = 3$.

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) .

- A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 65. (ĐHNT_HÀ NỘI)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+m}{1} = \frac{z-2m}{-3}$ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài AB lớn nhất.

- A.** $m = -\frac{1}{2}$.
- B.** $m = \pm\frac{1}{3}$.
- C.** $m = \frac{1}{2}$.
- D.** $m = 0$.

Câu 66. (TH & TT SỐ 8)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ và các điểm $A(2;3;-4)$, $B(4;6;-9)$. Gọi C, D là các điểm thay đổi trên Δ sao cho $CD = \sqrt{14}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất. Khi đó tọa độ trung điểm M của CD là

- A.** $M\left(\frac{79}{35}; \frac{64}{35}; \frac{102}{35}\right)$.
- B.** $M\left(\frac{181}{5}; \frac{-104}{5}; \frac{-42}{5}\right)$.
- C.** $M\left(\frac{101}{28}; \frac{13}{14}; \frac{69}{28}\right)$.
- D.** $(2; 2; 3)$.

Câu 67. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2017 M104C33)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

- A.** $M(-1; 0; -3)$.
- B.** $M(2; 3; 3)$.
- C.** $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.
- D.** $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 67. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2019 M101C48)

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

- A.** 12.
- B.** 8.
- C.** 16.
- D.** 4.

Câu	Câu	Câu	Câu	Câu	Câu	Câu	Câu	Câu	Câu	Câu
1C	2C	3A	4B	5C	6A	7B	8D	9D	10A	11D
12D	13A	14B	15A	16C	17B	18C	19C	20A	21A	22B
23D	24A	25C	26B	27B	28A	29A	30D	31A	32B	33A
34C	35C	36D	37D	38B	39B	40A	41A	42B	43C	44B
45A	46C	47D	48A	49A	50A	51C	52C	53C	54D	55A
56A	57C	58B	59D	60B	61D	62A	63C	64A	65D	66D
67C	68A									