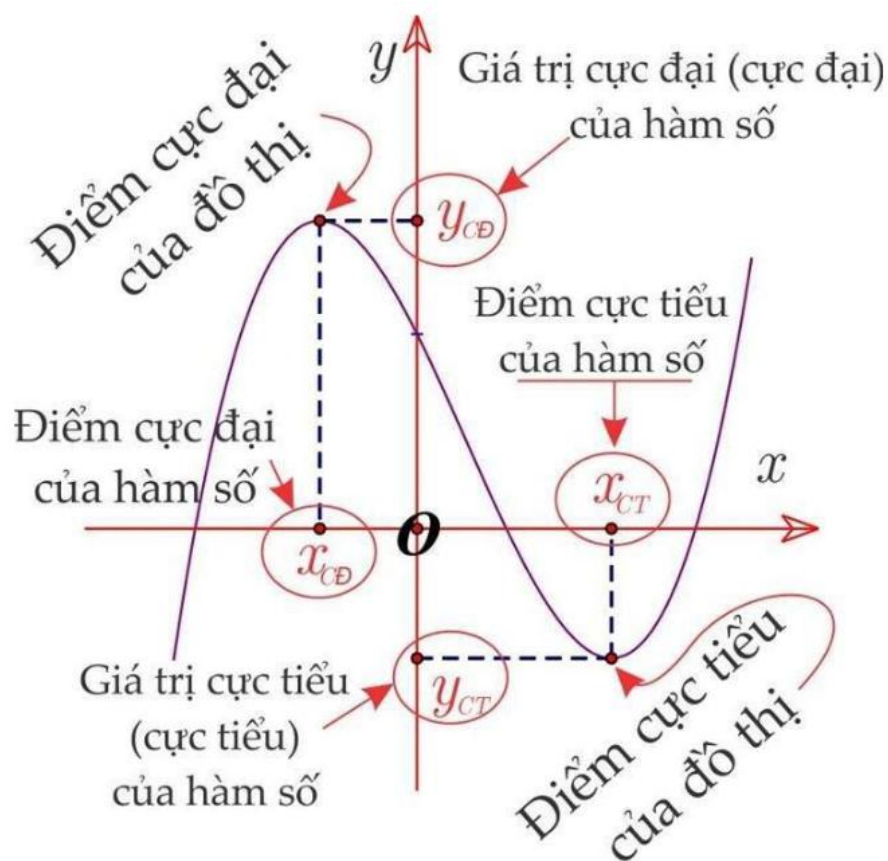




ÔN KIẾN THỨC TOÁN 12 THPT BÀI GIẢNG CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU) (KẾT HỢP 3 BỘ SÁCH GIÁO KHOA)

THÂN TẶNG TOÀN THỂ QUÝ THẦY CÔ VÀ CÁC EM HỌC SINH TRÊN TOÀN QUỐC

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK)
GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL); TEL 0398021920

THÀNH PHỐ THÁI BÌNH – THÁNG 7/2024

ÔN KIẾN THỨC TOÁN 12 THPT
CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)

DUNG LƯỢNG	NỘI DUNG
1 FILE	XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP
1 FILE	XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CÁC HÀM SỐ PHỨC TẠP
1 FILE	CÁC BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
LÝ THUYẾT CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

ĐIỂM CỰC TRỊ, GIÁ TRỊ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1) Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in K, x_1 \in K$.

+) x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b)$ và $x \neq x_0$.

Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CD} .

+) x_1 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c; d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c; d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c; d)$ và $x \neq x_1$.

Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT} .

+) Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị).

2) Chú ý

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì người ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

3) Cách nhận biết cực trị của hàm số bằng dấu của đạo hàm.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

4) Cách tìm cực trị của hàm số $f(x)$.

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Căn cứ bảng biến thiên, nêu kết luận về các cực trị của hàm số.

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ
XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

QUAN SÁT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ

Bài toán 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -3$. **B.** $x = -1$. C. $x = 1$. D. $y = -1$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên thì đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại $x = -1$, đây là điểm cực đại.

Bài toán 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A.** 3. B. 2 C. 4. D. 1.

Lời giải. Đạo hàm đổi dấu 3 lần nên ta có 3 cực trị.

Bài toán 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-3		$+\infty$			

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. -4 . B. 0 . C. 1 . **D.** -3 .

Bài toán 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		1		2	
	$-\infty$							$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho

- A.** 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên thì Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Bài toán 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. -3 . C. -1 . **D.** -2 .

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên thì giá trị cực đại của hàm số là -2 .

Bài toán 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đạt cực tiểu tại

A. $x = -1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm y' đổi dấu từ âm sang dương

Bài toán 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	1	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y	0	$\frac{4}{27}$	0	$+\infty$		

Điểm cực đại của hàm số đã cho bằng:

A. $\frac{4}{27}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên thì điểm cực đại của hàm số đã cho là: $x = \frac{4}{3}$.

Bài toán 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

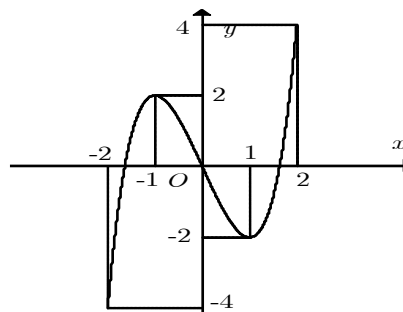
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Bài toán 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?

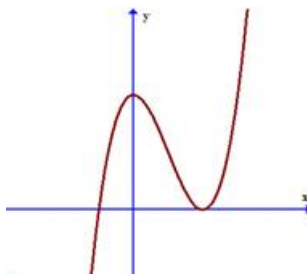
A. $x = -2$

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Bài toán 10. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

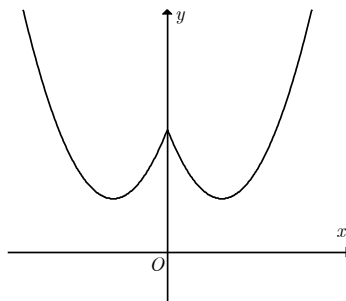


Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

D.3.

Lời giải. Đồ thị hàm số đối chiều 2 lần ta được 2 điểm cực trị

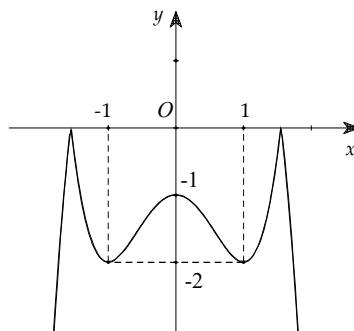
Bài toán 11. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực tiểu

D. 0 .

Bài toán 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

D.5.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đổi chiều 5 lần nên hàm số có 5 cực trị.

Bài toán 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0
				$-$	

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

D. 3.

Lời giải

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ đổi dấu 2 lần nên hàm số đó có 2 điểm cực trị.

Bài toán 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -2$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

Đạo hàm đổi dấu tại điểm $x = -2$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = -2$.

CỰC TRỊ HÀM SỐ ĐA THỨC

Bài toán 1. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.

A. $y_{CT} = -6$

B. $y_{CT} = -1$

C. $y_{CT} = -2$

D. $y_{CT} = 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			-2		$-\infty$

Vậy $y_{CD} = y(1) = -2$; $y_{CT} = y(-1) = -6$.

Bài toán 2. Gọi x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

A. 2.

B. 1.

C. -1.

D. 0.

Lời giải. Ta có $y = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 1$.

Lập bảng xét dấu đạo hàm ta có cực đại, cực tiểu lần lượt là $x_1 = 1; x_2 = -1 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = -1$.

Bài toán 3. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -3$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 + 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$y'' = 2x + 2$; $y''(-3) = -4 < 0$; $y''(1) = 4 > 0$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Bài toán 4. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			0		-1		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Bài toán 5. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ là

A. $(-1; -8)$

B. $(0; -5)$

C. $\left(\frac{5}{3}; \frac{40}{27}\right)$

D. $(1; 0)$

Lời giải

$$y' = -3x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y'' = -6x + 2.$$

Ta có: $y''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$; $y_{CT} = y(-1) = -8$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1; -8)$.

Bài toán 6. Tính tổng các cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x + 6$.

A. 1

B. 2

C. 0

D. 4

Lời giảiTa có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 1$. Tổng các cực trị bằng 0.**Bài toán 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giảiTa có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y							

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x = 0$.**Bài toán 8.** Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

A. (3;1).

B. $x = 3$.C. $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.D. $x = 1$.**Lời giải.** $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$.Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương tại điểm $x = 3$ nên $x = 3$ là điểm cực tiểu.**Bài toán 9.** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.A. $m = -1$ B. $m = -7$ C. $m = 5$ D. $m = 1$ **Lời giải**Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; $y'' = 2x - 2m$.Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = 5(TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.**Bài toán 10.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có điểm cực tiểu là A, tính khoảng cách từ A đến trục hoành

A. 2

B. 3

C. 4

D. $\sqrt{2}$ **Lời giải.**

$$y = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Điểm cực tiểu của đồ thị là $A(2; -3)$. Khoảng cách từ A đến trục hoành bằng 3.**Bài toán 11.** Hàm số nào sau đây có hai điểm cực trị cùng dương?A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ B. $y = x^4 - 4x^2 + 1$ C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$ **D.** $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$.**Lời giải.**

$$\text{Hàm số } y = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}, 1 \text{ cực trị dương.}$$

Hàm số trùng phương $y = x^4 - 4x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 8x = 4x^2(x^2 - 2)$, hàm số có 1 cực trị dương.

Hàm số trùng phương $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có 3 cực trị, trong đó 1 cực trị dương.

$y = x^3 - 4x^2 + 5x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 8x + 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x = \frac{5}{3}$, hàm số có 2 cực trị dương.

Bài toán 12. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ bằng

- A. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$. **D. $\frac{10\sqrt{6}}{9}$.**

Lời giải.

$$y = x^3 - 2x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow A\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{9-4\sqrt{6}}{9}\right), B\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right).$$

$$\text{Khi đó } \overline{AB} = \left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{8\sqrt{6}}{9}\right) \Rightarrow AB = \frac{10\sqrt{6}}{9}.$$

Bài toán 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	5	-1	$+\infty$

Tung độ điểm uốn (trung điểm hai điểm cực đại, cực tiểu) của đồ thị hàm số bằng

- A. 2** B. 1 C. 3 D. 4

Lời giải.

Trung điểm hai điểm cực trị là $I\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Tung độ bằng 2.

Bài toán 14. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Khẳng định nào sau đây không đúng?

- A. $y_1 y_2 = -4$. **B. $AB = 4\sqrt{2}$.** C. $y_1 = -y_2$. D. $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải.

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 3 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Hai điểm cực trị là $A(1; 2), B(3; -2) \Rightarrow \overline{AB} = (2; -4) \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$.

Bài toán 15. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị và hai điểm cực trị nằm khác phía với trục tung

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ B. $y = x^4 + 4x^2 + 1$
C. $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 5$ D. $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$.

Lời giải. Hai điểm cực trị trái dấu, hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 5$ có đạo hàm $y' = 3x^2 + 4x - 5$ nên có hai nghiệm trái dấu.

Bài toán 16. Đường cong $y = x^3 - 3x^2$ có các điểm cực trị A, B. Tính khoảng cách d từ điểm $C(3; 4)$ đến đường thẳng AB.

- A. $d = 5$. **B. $d = 2\sqrt{5}$.** C. $d = \sqrt{26}$. D. $d = 4\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

Hai điểm cực trị là $A(0; 0), B(2; -2) \Rightarrow (AB): y = kx \Rightarrow k = -2 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow 2x + y = 0$.

$$\text{Khi đó } d = d(C, (AB)) = \frac{|2 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

CỰC TRỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỶ

Bài toán 1. Hàm số $y = \frac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = -3$. D. $x = 0$.

Lời giải. Ta có $y' = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Hàm số đạt cực trị tại điểm

Bài toán 2. Hàm số $y = \frac{x^2-x+4}{x-1}$ có tổng hai cực trị bằng

- A. 2 B. 0 C. 1 D. -2

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'		+	0	-	
					+

Từ bảng xét dấu y' ta có tổng hai cực trị bằng 2.

Bài toán 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2-2x+6}{x+1}$. Tổng hai giá trị cực trị của hàm số bằng

- A. 4 B. 3 C. 8 D. -8

Lời giải

Đạo hàm $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
					-
$f(x)$	$+\infty$	-10	$+\infty$	2	$-\infty$

Vậy hàm số $f(x)$ có tổng 2 giá trị cực trị bằng -8.

Bài toán 4. Hàm số $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ có giá trị cực đại bằng

- A. 3 B. 2 C. -2 D. 0

Lời giải. $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -2$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'		+	0	-	
					+
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

Hàm số có giá trị cực đại bằng -2.

Bài toán 5. Cho hàm số $y = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$ có hai giá trị cực trị y_1, y_2 . Giá trị $|y_1 - 2y_2|$ có thể bằng

- A. 0 B. 12 C. 10 D. -14

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+5)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy $|y_1 - 2y_2|$ có thể bằng 12.

Bài toán 6. Hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$ có hai điểm cực trị A, B . Gọi M, N là hình chiếu của A, B trên trục hoành.

Tính độ dài đoạn thẳng MN .

A. 6

B. 4

C. 8

D. 8

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x + 2)^2}$. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$.

Bảng biến thiên như sau. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $MN = |1 - (-5)| = 6$.

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

The graph shows the function $f(x)$ plotted against x . The x-axis has critical points at $-\infty$, -5 , -2 , 1 , and $+\infty$. The y-axis is labeled $f(x)$. The function is represented by a series of line segments with arrows indicating the direction of the curve. The curve starts at $-\infty$, decreases to a local minimum at $x = -5$, increases to a local maximum at $x = -2$, decreases to a local minimum at $x = 1$, and then increases towards $+\infty$. The arrows indicate the direction of the curve: from $-\infty$ to -5 (downward), from -5 to -2 (upward), from -2 to 1 (downward), and from 1 to $+\infty$ (upward).

Bài toán 7. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x_M bằng

A. $x_M = 2$.

B. $x_M = 1 - \sqrt{2}$.

C. $x_M = 1$.

D. $x_M = 1 + \sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1} \Rightarrow d : y = \frac{(x^2 - 4x + 5)'}{(x - 1)'} = 2x - 4$; $d \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2$.

Bài toán 8. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 2}$ có hai điểm cực trị A, B . Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua hai điểm AB .

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

D. $\frac{4}{\sqrt{5}}$

Lời giải.

Phương trình của đường thẳng AB là $y = \frac{(x^2 + 2x + m)'}{(x - 2)'} \Leftrightarrow y = 2x + 2 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$.

Khoảng cách $d(O; AB) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài toán 9. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = 2x + 1$.

D. $y = 3x + 1$

Lời giải. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = \frac{(x^2 + 2x + 3)'}{(2x + 1)'} = \frac{2x + 2}{2} = x + 1$.

CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA CĂN

Bài toán 1. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 10}$.

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 3

Lời giải. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 10} \Rightarrow y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 10}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 10}}$.

Bài toán 2. Số điểm cực trị của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Ta có

$$y = x + \sqrt{2x^2 + 1} \Rightarrow y' = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 = 4x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hàm số có 1 cực trị.

Bài toán 3. Tìm số cực tiểu của hàm số $y = x\sqrt{x^2 + 2x}$

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Lời giải

Ta có: $y = x\sqrt{x^2 + 2x} \Rightarrow y' = \sqrt{x^2 + 2x} + x \cdot \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x^2 + 2x + x(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{2x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

Do đó: $y' = 0$ tương đương $2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -\frac{3}{2}$.

Hai nghiệm đơn và thỏa mãn TXĐ nên hàm có 1 cực tiểu.

Bài toán 4. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đạt cực đại tại điểm

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = 2$.

Lời giải

Tập xác định $[0; 2]$.

Ta có $y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow y' = \frac{(2x - x^2)'}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm nên $x = 1$ là điểm cực đại.

Bài toán 5. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 8x + 19}$ đạt cực trị tại

- A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 1$ D. $x = -4$

Lời giải. $y' = \frac{(x^2 + 8x + 19)'}{2\sqrt{x^2 + 8x + 19}} = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x + 19}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x + 19}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Bài toán 6. Số điểm cực trị của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Ta có

$$y = x + \sqrt{2x^2 + 1} \Rightarrow y' = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 = 4x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hàm số có 1 cực trị.

Bài toán 7. Tìm một điểm cực trị của hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$.

- A. $y = 1$. B. $x = 0$. C. $y = 0$. D. $x = 1$.

Lời giải

Tập xác định $[-1; 1]$. Ta có $y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{(1 - x^2)'}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bài toán 8. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ đạt cực trị tại

A. $x = -3$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $y = -1$.

Lời giải

Hàm số luôn xác định.

Ta có đạo hàm $y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Hàm số đạt cực trị tại $x = -1$.

Bài toán 9. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ đạt cực trị tại điểm

A. $x = -3$

B. $x = 3$

C. $x = 1$

D. $x = 5$

Lời giải

Hàm số luôn xác định.

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 10} \Rightarrow y' = \frac{(x^2 + 6x + 10)'}{2\sqrt{x^2 + 6x + 10}} = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x + 10}} = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Bài toán 10. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = (3x - 2)\sqrt{x + 1}$ bằng

A. $\frac{-10\sqrt{5}}{9}$

B. $\frac{-10\sqrt{3}}{9}$

C. $\frac{-6\sqrt{3}}{9}$

D. $\frac{-8\sqrt{2}}{9}$

Lời giải.

Tập xác định: $D = [-1; +\infty)$.

$$+ y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (3x - 2) + 3\sqrt{x+1} = \frac{3x - 2 + 3 \cdot 2 \cdot (x+1)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{9x + 4}{2\sqrt{x+1}}.$$

$$+ y' = 0 \Leftrightarrow 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{9}.$$

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$-\frac{4}{9}$	$+\infty$
y'			$- \quad 0 \quad +$	
y	/ / / / /		0	$+\infty$
			$\swarrow$	$\nearrow$
			$\frac{-10\sqrt{5}}{9}$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{4}{9}$, $y_{CT} = -\frac{10\sqrt{5}}{9}$.

Bài toán 11. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}$ bằng

A. $4\sqrt{5}$

B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{2}$

Lời giải.

Tập xác định: $D = [-1; 3]$. Đạo hàm $y' = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}}$.

$$+ y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3-x = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'			$+ \quad 0 \quad -$		
y	/ / / / /		2	2	/ / / / /
			$\swarrow$	$\nearrow$	
			$2\sqrt{2}$		

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = 2\sqrt{2}$.

CỰC TRỊ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC, HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARIT

Bài toán 1. Hàm số $y = e^{2x} - e^x$ đạt cực trị tại điểm

- A. $x = 3$. B. $x = -\ln 2$. C. $x = -\frac{1}{2}\ln 2$. D. $x = -1$.

Lời giải. $y' = 2e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$.

Bài toán 2. Hàm số $y = \cos x - \sin x$ có cực trị tại x_0 . Giá trị $\tan x_0$ khi đó bằng

- A. 2 B. 1 C. -1 D. 0

Lời giải

$$y' = (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x; y' = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Rightarrow \tan x_0 = -1$$

Bài toán 3. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{1-2x}$.

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Lời giải. Ta thấy $y' = -2e^{1-2x}$ nên hàm số không có cực trị.

Bài toán 4. Tính giá trị cực tiểu của hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + 10)$.

- A. 3 B. $2\ln 3$ C. $3\ln 2$ D. $2\ln 2$

Lời giải

$$\text{Tập xác định } \mathbb{R}; y = \ln(x^2 - 2x + 10) \Rightarrow y' = \frac{2x-2}{x^2-2x+10} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y = \ln 9 = 2\ln 3$.

Bài toán 5. Hàm số $y = 3^{x^2-5x}$ tại cực trị tại điểm

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = -3$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Lời giải

$$\text{Công thức tổng quát } (a^u)' = u' \cdot a^u \ln a \Rightarrow y' = (x^2 - 5x)' 3^{x^2-5x} \ln 3 = (2x-5) 3^{x^2-5x} \ln 3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}. \text{ Đạo hàm đổi dấu tại đây nên hàm số đạt cực trị tại } x = \frac{5}{2}.$$

Bài toán 6. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2x} - 4e^x$.

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

$$\text{Lời giải. } y = e^{2x} - 4e^x \Rightarrow y' = 2e^{2x} - 4e^x = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$, đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Bài toán 7. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x + 5)$.

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{(x^2 - 2x + 5)'}{(x^2 - 2x + 5)\ln 3} = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x + 5)\ln 3}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Hàm số có 1 cực trị.}$$

Bài toán 8. Tìm số cực tiểu của hàm số $y = \ln(x^2 - 4x + 12)$.

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

Lời giải

$$y = \ln(x^2 - 4x + 12) \Rightarrow y' = \frac{2x-4}{x^2-4x+12}; y' = 0 \Leftrightarrow 2x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương nên hàm số có 1 cực tiểu.

Bài toán 9. Tìm số cực trị thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của hàm số $y = \sin x - \frac{1}{3}x$.

- A. 3 B. 4 C. 2 D. 1

Lời giải.

$y' = \cos x - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3}$. Phương trình này có 2 nghiệm trong khoảng $(0; 2\pi)$. Hàm có 2 cực trị.

Bài toán 10. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = 3\sin x + 4\cos x - mx + 4$ có cực trị

A. 11

B. 10

C. 9

D. 6

Lời giải.

$$y = 3\sin x + 4\cos x - mx + 4 \Rightarrow y' = 3\cos x - 4\sin x - m = 0 \Leftrightarrow m = 3\cos x - 4\sin x.$$

Theo BĐT Bunyakovsky có $(3\cos x - 4\sin x)^2 \leq (3^2 + 4^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 25 \Rightarrow -5 \leq 3\cos x - 4\sin x \leq 5$.

Bài toán 11. Tìm số điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 4\pi)$ của hàm số $y = 2\sin x + x\sqrt{2} + 4$.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Lời giải. $y = 2\sin x + x\sqrt{2} + 4 \Rightarrow y' = 2\cos x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Trên khoảng $(0; 4\pi)$, vẽ 2 vòng tròn lượng giác ta thu được 4 nghiệm dẫn đến 4 điểm cực trị.

Bài toán 12. Tính độ dài đoạn thẳng OA với A là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \ln(x^2 - 8x + 17)$.

A. $OA = 3$

B. $OA = 4$

C. $OA = 5$

D. $OA = 6$

Lời giải

Ta có $y' = \frac{2x-8}{x^2-8x+17}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = \ln 1 = 0 \Rightarrow A(4; 0) \Rightarrow OA = 4$.

Bài toán 13. Tìm số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên $[0; 4\pi]$ biết rằng $f'(x) = (e^x - 3)(\sin 2x - 1)$.

A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 3)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Trên $[0; 4\pi]$ (2 vòng tròn lượng giác) ta thu được 5 điểm cực trị.

Bài toán 14. Tìm tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = \cos x - \sqrt{3}\sin x - x$.

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

$y' = \sin x + \sqrt{3}\cos x - 1$. Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài toán 16. Tính tổng các cực trị của hàm số $y = e^x(x^2 + 2x - 3)$.

A. 3

B. - 4

C. - 2

D. 1

Lời giải

Ta có

$$y = e^x(x^2 + 2x - 3) \Rightarrow y' = e^x(x^2 + 2x - 3) + (2x + 2)e^x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$$

Tổng các cực trị bằng - 4 (theo hệ thức Viet).

Bài toán 17. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = \ln(x - 2\sqrt{x} + 6)$ nằm trong khoảng nào sau đây

A. (1; 2)

B. (3; 4)

C. (4; 5)

D. (2; 3)

Lời giải.

Tập xác định R. $y' = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x - 2\sqrt{x} + 6}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bài toán 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -2m \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{5}x + 20$ có cực trị

A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$ C. $-2 \leq m \leq 2$ D. $-2 < m < 2$

Lời giải.

$$y = -2m \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{5}x + 20 \Rightarrow y' = m \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - \sqrt{5}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow m \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{5}. \text{ Điều kiện có cực trị là phương trình có nghiệm (không kép):}$$

$$m^2 + 1 > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

Bài toán 19. Tìm số cực trị của hàm số $f(x) = \ln x - 2x^2$.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x > 0; f(x) = \ln x - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 4x = \frac{1 - 4x^2}{x}. \text{ Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Đạo hàm đổi dấu qua đây nên hàm số có 1 cực trị.

Bài toán 20. Gọi M là điểm cực tiểu của hàm số $y = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 5}$. Điểm M nằm trên đường thẳng nào sau đây

A. $y = x + 3$. B. $y = 7x + 2$. C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. D. $x - 2y - 3 = 0$.

Lời giải

$$y = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 5} \Rightarrow y' = \frac{(e^{2x} - 2e^x + 5)'}{2\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 5}} = \frac{2e^{2x} - 2e^x}{2\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 5}} = \frac{e^{2x} - e^x}{\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 5}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^x \Leftrightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow M(0; 2)$$

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Điểm M này thuộc đường thẳng $y = 7x + 2$.

Bài toán 21. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}$.

A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Lời giải

$$(e^{x^3 - 3x^2 + 3x + 1})' = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 6x + 3)e^{x^3 - 3x^2 + 3x + 1} = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (nghiệm kép)}.$$

Hàm số không có cực trị.

Bài toán 22. Hàm số $y = e^x \cdot \sin 2x$ đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó

A. $\tan 2x_0 = \frac{1}{2}$ B. $\tan 2x_0 = -2$ C. $\tan 2x_0 = -\frac{1}{2}$ D. $\tan x_0 = -3$

Lời giải.

Theo công thức đạo hàm tích ta có

$$y = e^x \cdot \sin 2x \Rightarrow y' = e^x \cdot 2 \cos 2x + e^x \cdot \sin 2x = e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -2 \cos 2x \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -2 \Leftrightarrow \tan 2x = -2. \text{ Như vậy } \tan 2x_0 = -2.$$

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ
XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA CÁC HÀM SỐ PHỨC TẠP

ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA HAI ĐIỂM CỰC TRỊ

Bài toán 1. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $M(0; -1)$ B. $N(1; -10)$ C. $P(1; 0)$ D. $Q(-1; 10)$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB .

Bài toán 2. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$ B. $m = \frac{3}{4}$ C. $m = -\frac{1}{2}$ D. $m = \frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0; 1)$, $B(2; -3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m - 1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi $(2m - 1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Bài toán 3. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m - 1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

- A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = -\frac{3}{4}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có TXĐ: $\mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0; 1)$, $B(2; -3) \Rightarrow \overline{AB} = (2; -4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A , B có phương trình: $\frac{x}{2} = \frac{y - 1}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Đường thẳng $y = (2m - 1)x + m + 3$ song song với đường thẳng $d \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = -2 \\ m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Bài toán 4. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

- A. $P(1; 0)$. B. $M(0; -1)$. C. $N(1; -10)$. D. $Q(-1; 10)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases}$$

Ta có $A(-1; 6)$, $B(3; -26) \Rightarrow \overline{AB} = (4; -32)$ nên) Chọn $\vec{n}_{AB} = (8; 1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$8(x + 1) + 1(y - 6) = 0 \Leftrightarrow 8x + y + 2 = 0.$$

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng.

Bài toán 5. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m + 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{1}{6}$.

C. $m = \frac{1}{6}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

Có : $y' = 3x^2 - 6x$, $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Bài toán 6. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A , B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = -2x + 1$.

C. $y = -x + 2$.

D. $y = x - 2$.

Lời giải

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) + (-2x + 1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

Ta có:
$$\begin{cases} y_1 = y(x_1) = y'(x_1) \cdot \left(\frac{1}{3}x_1\right) + (-2x_1 + 1) = -2x_1 + 1 \\ y_2 = y(x_2) = y'(x_2) \cdot \left(\frac{1}{3}x_2\right) + (-2x_2 + 1) = -2x_2 + 1 \end{cases}$$

Ta thấy, tọa độ hai điểm cực trị A và B thỏa mãn phương trình $y = -2x + 1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y = -2x + 1$.

Bài toán 7. Giả sử A , B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

A. $-\frac{16}{25}$.

B. -9 .

C. $-\frac{25}{9}$.

D. 1 .

Lời giải

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2 - 3b > 0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$. Ta có $f(x) = f'(x) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A , B là: $y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$ (d).

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

Khi đó $P = abc + ab + c \Leftrightarrow P = 9c^2 + 10c \Leftrightarrow P = \left(3c + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$. Suy ra $\min P = -\frac{25}{9}$.

CỰC TRỊ HÀM SỐ ĐA THỨC SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ VIET VÀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Bài toán 1. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$. Tính diện tích của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. 32

B. 16

C. 48

D. 40

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 16x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có ba điểm cực trị. Không mất tính tổng quát, giả sử ba điểm cực trị là:

$$A(0; 10), B(2; -6), C(-2; -6).$$

Do $A \in Oy$ và B, C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC , khi đó $H(0; -6)$; $AH = 16$; $BC = 4$.

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 = 32.$$

Bài toán 2. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ có đồ thị là (C) . Đường thẳng đi qua điểm $A(-1, 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là

A. $y = x + 3$.

B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

D. $x - 2y - 3 = 0$.

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 12x + 9, y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 - 12x + 9) + (-2x + 4)$$

Khi đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) có phương trình là $y = -2x + 4$.

Đường thẳng vuông góc với $y = -2x + 4$ có phương trình $y = \frac{1}{2}x + b$.

$$\text{Đường thẳng qua } A(-1; 1) \text{ suy ra } 1 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là } y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Bài toán 3. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị

là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?

A. 3.

B. 1.

C. Không có m .

D. 2.

Lời giải.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + x - 2 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2mx + 1.$$

Hai cực trị là a, b thì $a + b = 2m; ab = 1$.

Theo định lý Pytago $a^2 + b^2 = 7 \Rightarrow (a + b)^2 - 2ab = 7 \Rightarrow 4m^2 - 2 = 7 \Rightarrow m = \pm \frac{3}{2}$. Thử lại ta thu được 2 giá trị m .

Bài toán 4. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có điểm cực đại B, tính khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 1 = 0$.

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{5}$

D.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

Khi đó $A(0;1), B(2;-3) \Rightarrow d(B, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$.

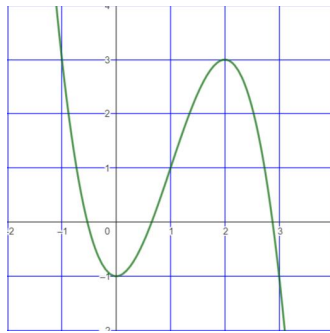
Bài toán 5. Đường cong $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ có điểm cực tiểu A và điểm cực đại B. Đường thẳng AB cắt trục hoành tại C, tính tỷ số $k = \frac{CA}{CB}$.

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = \frac{1}{3}$. C. $k = \frac{1}{3}$. D. $k = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

$$y = -x^3 + 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2 \Rightarrow A(0; -1), B(2; 3).$$

Theo định lý Talet $\frac{CA}{CB} = \frac{d(A, Ox)}{d(B, Ox)} = \left| \frac{y_A}{y_B} \right| = \frac{1}{3}$.



Bài toán 6. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0; m)$ và $B(2; -4 + m)$.

$$\text{Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4 - m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Bài toán 7. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.

- A. $T = \sqrt{51} + 6$ B. $T = \sqrt{61} + 3$ C. $T = \sqrt{61} - 3$ D. $T = \sqrt{51} - 6$

Lời giải

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0 \quad (1)$

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases} \quad (*)$$

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 , theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 25 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} \quad (**)$$

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3.$

Bài toán 8. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm

cực trị $x_1, x_2 \leq 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó giả sử $x_1 < x_2$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{4 - m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4 - m} \end{cases}$

Yêu cầu bài toán trở thành $x_2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - m} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m < 4$.

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \leq m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 9. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m - 2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$

A. $m = 5$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = 3$.

D. $m = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Ta có $y = x^3 + 4(m - 2)x^2 - 7x + 1$ (1)

$\Rightarrow y' = 3x^2 + 8(m - 2)x - 7$. Xét phương trình $3x^2 + 8(m - 2)x - 7 = 0$ (2)

$\Delta' = [4(m - 2)]^2 + 21 > 0$, với mọi $m \Rightarrow$ hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ với mọi m .

*Ta thấy $ac = -21 < 0 \Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$\Rightarrow x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$

*Ta có $|x_1| - |x_2| = -4 \Rightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow \frac{8(m - 2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Bài toán 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng

$d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 3

B. 6

C. -6

D. 0

Lời giải

Cách 1: Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m - 1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right)$ và $B\left(m + 1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$

Để thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2 - 1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với

$d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Bài toán 11. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$

có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1),$$

$$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1; \Delta = 13m^2 - 4.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow g(x) \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases} \cdot (*)$$

$$x_1, x_2 \text{ là các nghiệm của } g(x) \text{ nên theo định lý Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

A. $\frac{40}{9}$

B. $\frac{22}{9}$

C. $\frac{25}{4}$

D. $\frac{8}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ta có hệ phương trình } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(t/m) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}.$$

Bài toán 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

A. $m = -3$

B. $m = 3$

C. $m = -1$

D. $m = 1$

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 6x + m. \text{ Hàm số đạt cực trị tại } x_1, x_2. \text{ Vậy } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình } y' = 0$$

Theo viết ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 - \frac{2m}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 6 \Rightarrow m = -3$$

Bài toán 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7.

B. 9.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Có $f'(x) = 6x^2 - 12x$. Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -m + 1 \text{ và } x = 2 \Rightarrow f(2) = -m - 7$$

$$\text{Hàm số có các giá trị cực trị trái dấu} \Leftrightarrow (-m + 1)(-m - 7) < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 7) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài toán 15. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

A. $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$.

B. $m \in (3; 4)$.

C. $m \in (1; 3)$.

D. $m \in (-1; 4)$.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m - 1)x + 6(m - 2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m - 1)x + (m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -m + 2 \end{cases}$$

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong

$$\text{khoảng } (-2; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 \neq -1 \\ -2 < -m + 2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$$

Bài toán 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1; 4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$

$$\text{Đồ thị } (C) \text{ có hai điểm cực trị} \Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

$$\text{Khi đó } A(0; 4m^2 - 2), B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4 + 1}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } \frac{x - 0}{2m - 0} = \frac{y - (4m^2 - 2)}{-4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$$

$$d(C, AB) = \frac{|2m^2 + 4 - 4m^2 + 2|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}}$$

Diện tích tam giác ABC là

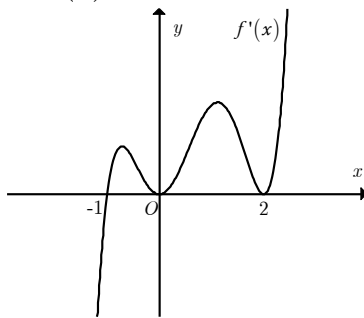
$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2|m| \cdot \sqrt{4m^4 + 1} \cdot \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |m(m^2 - 3)| = 2 \Leftrightarrow m^6 - 6m^4 + 9m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1)^2(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên ta được $m = 1, m = 2$, tổng thu được là 3.

CỰC TRỊ HÀM SỐ THÔNG QUA ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

Bài toán 1. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K như hình vẽ bên dưới.



Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 .

B. 1 .

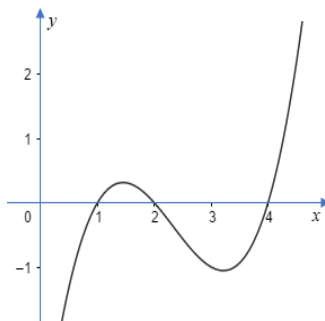
C. 2 .

D. 4 .

Lời giải

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất (không tính tiếp xúc) có nghĩa là đạo hàm chỉ đổi dấu một lần nên hàm số có 1 điểm cực trị.

Bài toán 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $g = f'(x)$ có đồ thị



Điểm cực đại của hàm số là

A. $x = 4$.

B. $x = 3$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

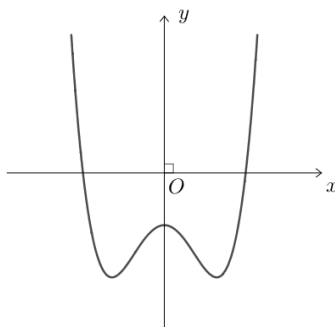
Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $g = f'(x)$, ta suy ra BBT:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$y'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$y(x)$			f_{cr}		f_{cd}		f_{cr}		

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 2$.

Bài toán 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 3 .

B. 2 .

C. 0 .

D. 5 .

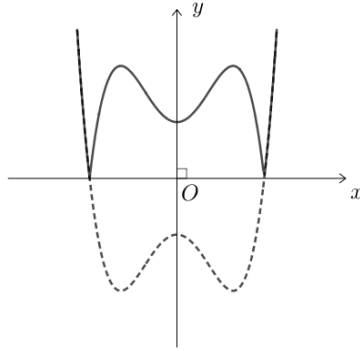
Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên Ox của hàm số $y = f(x)$.

- Lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới Ox của hàm số $y = f(x)$ qua Ox đồng thời bỏ phần đồ thị phía dưới trục Ox .

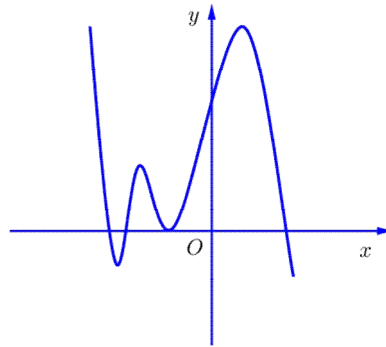
Từ đó ta có đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ dưới



Dựa vào đồ thị, ta kết luận đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Bài toán 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên.

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 6.

B. 5.

C. 4.

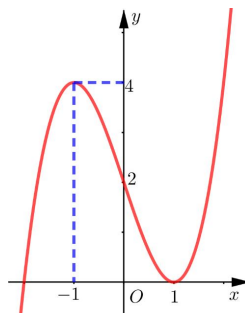
D. 3.

Lời giải

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm nhưng giá trị $f'(x)$ chỉ đổi dấu 3 lần.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Bài toán 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là:

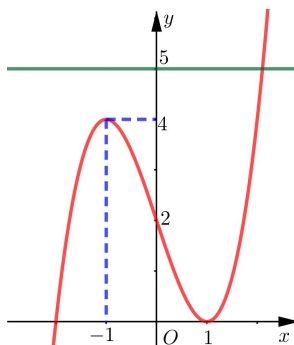
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải



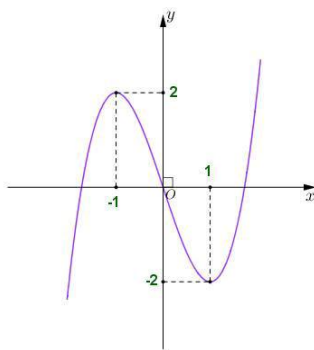
Ta có: $y' = f'(x) - 5$; $y = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5$.

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $f'(x) = 5$ có nghiệm duy nhất và đó là nghiệm đơn.

Nghĩa là phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi qua nghiệm này.

Vậy hàm số $y = f(x) - 5x$ có một điểm cực trị.

Bài toán 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng .Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. $f(0)$.

B. $f(1)$.

C. $f(2)$.

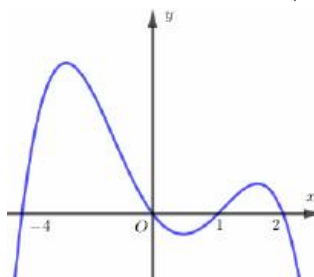
D. $f(-1)$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta suy ra BBT:

x	$-\infty$	-2	x_1	0	1	x_2	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

Bài toán 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

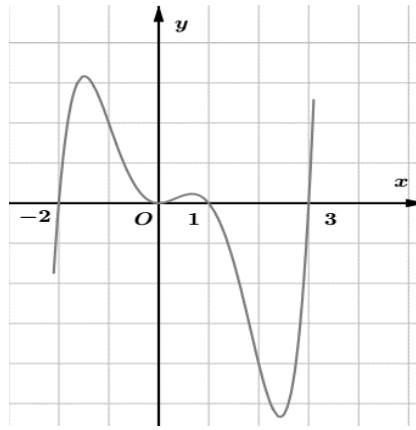
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	0	1	2	$+\infty$				
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-
y										

Suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

CỰC TRỊ HÀM SỐ HỢP, HÀM SỐ LIÊN KẾT

Bài toán 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 .

B. 3 .

C. 5 .

D. 2 .

Lời giải

$$\text{Từ đồ thị } y = f'(x) \text{ ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases};$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}; f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 2xf'(x^2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

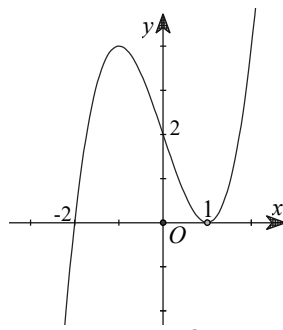
$$\text{Ta có } f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \\ x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
$2x$		-	-	-	0	+	+	+		
$f'(x^2)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	+
$g(x)$										

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

Bài toán 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



A. 4

B. 2

C. 5

D. 3

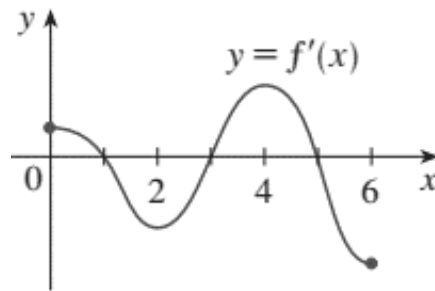
Lời giải

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Mà $x = \pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Bài toán 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



A. 3 .

B. 7 .

C. 6 .

D. 4 .

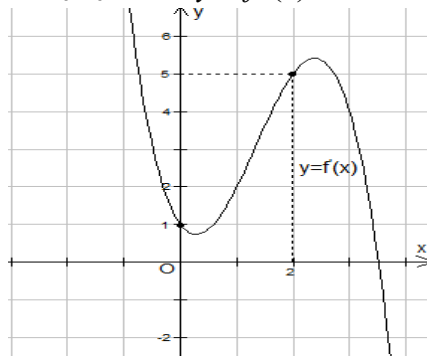
Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 2f(x)f'(x) \text{ nên } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}.$$

Từ đồ thị ta suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Bài toán 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ không đạt cực trị tại $x = 0$.

D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ không có cực trị.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1$.

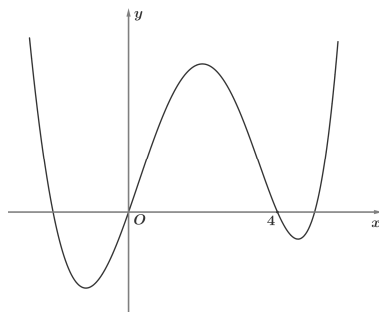
Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị ta có: $g'(1) = f'(1) - 3 < 0$, $g'(3) = f'(3) - 7 < 0$ nên $x = 0$ là nghiệm đơn và $x = 2$ là nghiệm kép. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$					

Từ bảng biến thiên ta có $x = 0$ là điểm cực đại.

Bài toán 5. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 5 .

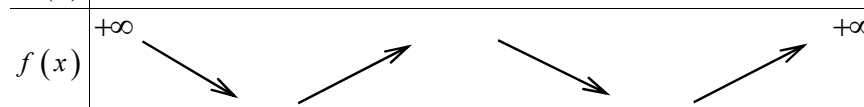
B. 3 .

C. 7 .

D. 11.

Lời giải

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$

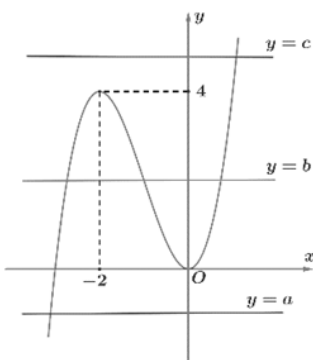
Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{cases}$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

Bài toán 6. Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

A. 9.

B. 3.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Ta có $y' = 2(x-1) \cdot f'(x^2 - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - a = 0, a \in (-\infty; -1) \quad (1) \\ x^2 - 2x - b = 0, b \in (-1; 0) \quad (2) \\ x^2 - 2x - c = 0, c \in (0; 1) \quad (3) \\ x^2 - 2x - d = 0, d \in (1; +\infty) \quad (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình (2), (3), (4) đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b, c, d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình (2), (3), (4) cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'(x^2 - 2x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là 7.

Bài toán 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4

B. 7

C. 9

D. 11

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$* y = h(x) = f(|x|^2 - 2|x|)$$

$$y' = h'(x) = f'(|x|^2 - 2|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \cdot (2|x| - 2).$$

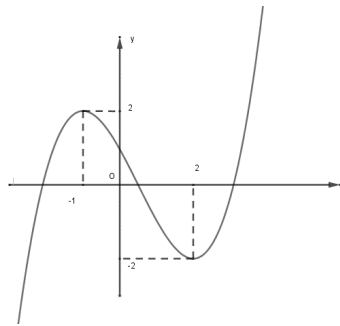
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ |x|^2 - 2|x| = 0 \\ |x|^2 - 2|x| = 1 \\ |x|^2 - 2|x| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta thấy phương trình $h'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn (1).

$h'(x)$ không tồn tại tại $x = 0$ mà $x = 0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Bài toán 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

$$\text{Đặt } g(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1.$$

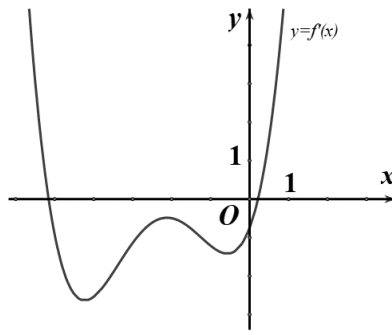
$$\text{Khi đó, } g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a (a > 2) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do đó, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		a		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				13		$g(2) < 0$		$+\infty$
				-3					

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox .

Bài toán 9. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^3) - x|$ là



A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Xét $h(x) = f(x^3) - x$

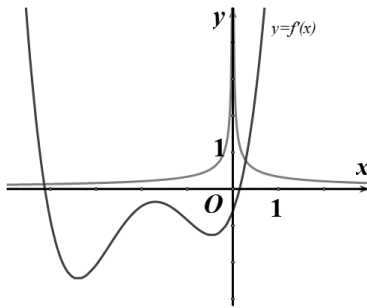
Có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 1$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 f'(x^3) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{3x^2} \quad (x \neq 0) \quad (1)$$

Đặt $x^3 = t \Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{t^2}$ phương trình (1) trở thành:

$$f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \quad (t \neq 0) \quad (2)$$

Vẽ đồ thị hàm $y = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y = f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có:

$$f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = b < 0 \\ t = a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = b < 0 \\ x^3 = a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{b} < 0 \\ x = \sqrt[3]{a} > 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\sqrt[3]{b}$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$		$f(b) - \sqrt[3]{b}$	0	$f(a) - \sqrt[3]{a}$		
$g(x) = h(x) = f(x^3) - x $		$f(b) - \sqrt[3]{b}$	0	$-f(a) + \sqrt[3]{a}$		

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $g(x) = |f(x^3) - x|$ có 5 điểm cực trị.

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ
BÀI TOÁN CỰC TRỊ CHỨA THAM SỐ

Bài toán 1. Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + m$ đi qua điểm $M(-3; 7)$ khi m bằng bao nhiêu?

- A. 1. B. -1. C. 3. D. 0.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 2. \text{ Và } y = x^3 - 2x + m = \frac{1}{3}x \cdot y' + \left(-\frac{4}{3}x + m\right)$$

Suy ra đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y = -\frac{4}{3}x + m$ đường thẳng này

đi qua điểm $M(-3; 7)$ khi và chỉ khi $7 = -\frac{4}{3}(-3) + m \Leftrightarrow m = 3$.

Bài toán 2. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

- A. $m = \frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

$$\text{Có: } y' = 3x^2 - 6x, \quad y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1.$$

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Bài toán 3. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A , B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = -\sqrt{2}$. C. $m = 2$. D. $m = -\sqrt{2}; m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(2m; 2 - 4m^3)$. Ta có $\overrightarrow{MA} = (-1; 4)$, $\overrightarrow{MB} = (2m-1; 4-4m^3)$.

Ba điểm A , B và $M(1; -2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{1-m^3}{1} \Leftrightarrow 2m-1 = m^3-1 \Leftrightarrow m^3 = 2m$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2} \text{ (do } m \neq 0 \text{)}.$$

Bài toán 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.

Lời giải

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Có $x = 2$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ (TM)

Với $m = -1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Loại)

Trường hợp 2: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 1^2 - 2(m+1) \cdot 1 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài toán 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-9)(x^2-16)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên

dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 7x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16.

B. 9.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \pm 4 \end{cases}$ và $g'(x) = \frac{(3x^2+7)(x^3+7x)}{\sqrt{(x^3+7x)^2}} \cdot f'(|x^3+7x|+m)$.

+) $g'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và $\frac{(3x^2+7)(x^3+7x)}{\sqrt{(x^3+7x)^2}}$ đổi dấu khi qua $x = 0$ nên $x = 0$ là một điểm cực trị

của hàm số.

+) $f'(|x^3+7x|+m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3+7x|+m = -4 \\ |x^3+7x|+m = 4 \\ |x^3+7x|+m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3+7x| = -m-4 \\ |x^3+7x| = -m+4 \\ |x^3+7x| = -m+9 \end{cases} \quad (1)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $|u(x)|$ với $u(x) = x^3 + 7x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$		+	+
$u(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$ u(x) $	$+\infty$	0	$+\infty$

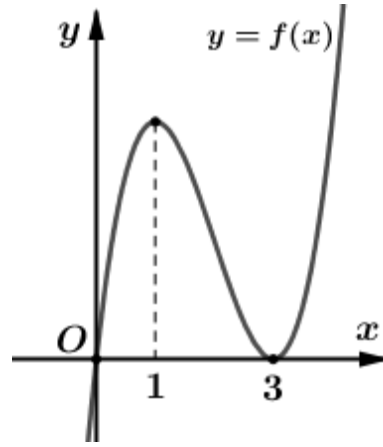
Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì hệ (1) phải có ít nhất 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ khác 0.

Mà ta lại thấy $-m+9 > -m+4 > -m-4$.

Nên suy ra $-m+9 > 0 \Rightarrow m < 9$.

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

Bài toán 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > 1$

B. $m \geq 1$

C. $m \leq 2$

D. $m > 2$

Lời giải

Số cực trị của hàm số $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$ bằng số cực trị của hàm số $y(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số $y(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$ và $y = 0$.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + 2f'(x) = 2f'(x)[f(x) + 1]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = \alpha (\alpha < 0) \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$	α	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$-1+2m$	$\mathbb{CD}$	$2m$	$+\infty$

Hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$. Đáp án B là gần kết quả nhất

Bài toán 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 16

B. 44

C. 26

D. 27

Lời giải

Đặt: $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = m - 32 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 5 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		$m-5$		m		$m-32$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $\begin{cases} m-5 > 0 \\ m-32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ 5 < m < 32 \end{cases}$. Vì m là số

nguyên dương cho nên có 26 số m thỏa đề bài

Bài toán 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y' = (4x^3 - 16x)f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x^4 - 8x^2 = -m \\ x^4 - 8x^2 = -m - 10 \end{cases}.$$

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^2$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

The graph shows a function $g(x)$ with a local minimum at $x = -2$ ($y = -16$), a local maximum at $x = 0$ ($y = 0$), and another local minimum at $x = 2$ ($y = -16$). The function approaches $+\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $x \rightarrow +\infty$.

Vì $-10 - m < -m$ nên để hàm số đã cho có 9 điểm cực trị thì
$$\begin{cases} -16 < -m - 10 < 0 \\ 0 \leq -m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -10 < m \leq 0$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}$. Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Bài toán 9. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 2(m+1)x + 2m + 6)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá số 2022 sao cho hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có 9 điểm cực trị?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ h(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \\ h(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m + 6 = 0 \end{cases}.$$

$$+ g'(x) = 2x.f'(x^2 + 1)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Để hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x^2+1)=0$ có 8 nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

+TH1: $h(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì $f'(x^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+1=2 \\ x^2+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{cases}$ (ko xét nghiệm kép

nếu có của $h(x) = 0$ vì nó là nghiệm bội chẵn)

Suy ra $f'(x^2+1)=0$ chỉ có 4 nghiệm đơn $\Rightarrow$ loại.

+TH2: $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=a, x=b$ với $(a < b)$.

$$f'(x^2+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=2 \\ x^2+1=5 \\ x^2+1=a \\ x^2+1=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \\ x^2+1=a \\ x^2+1=b \end{cases} \quad (2) \cdot$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2)$ và (3) có tổng số nghiệm là 4 nghiệm phân biệt khác $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a < b \\ a, b \notin \{2; 5\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $a, b > 1$ và khác 2, 5.

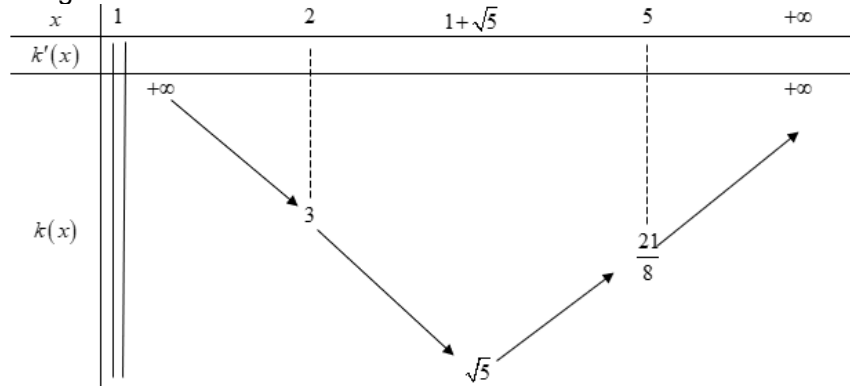
• Xét phương trình $h(x)=x^2-2(m+1)x+2m+6=0$ với $x > 1$.

$$\Leftrightarrow 2m(x-1)=x^2-2x+6 \text{ với } x > 1.$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{x^2-2x+6}{2(x-1)} = k(x), x > 1.$$

$$\text{Khi đó } k'(x) = \frac{x^2-2x-4}{2(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ x=1+\sqrt{5} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên



$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{5} \\ m \neq 3 \\ m \neq \frac{21}{8} \end{cases} \text{ . Với điều kiện } m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \leq 2022$$

Suy ra $m \in \{4; 5; \dots, 2022\}$.

Vậy có 2019 giá trị m thỏa mãn.

Bài toán 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị

A. 5.

B. 6.

C. 12.

D. 11.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$. Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx + 64$. (*)

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^4 - 2mx^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 2mx + 64 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình (1) luôn có một nghiệm $x \neq 0$ nên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$ cắt Ox ít nhất hai điểm và

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^4 - 2mx^2 + 64x) = +\infty.$$

Suy ra để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$ có đúng một điểm cực

trị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có đúng một nghiệm đơn, tức là $m = x^2 + \frac{16}{x}$ có đúng một nghiệm đơn.

Xét hàm số: $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$, $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$. Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

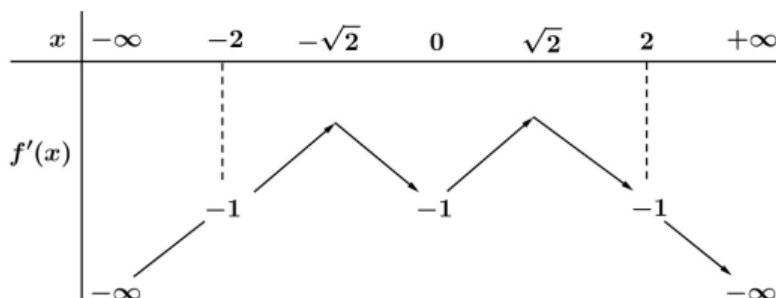
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq 12$.

Suy ra: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z}_+^* \\ m \leq 12 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 11; 12\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị.

Bài toán 11. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có $f(2) = 36, f(-2) = -32$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-50; 50)$ để hàm số $g(x) = \left| f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - \frac{6}{2x-1} + m \right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 63.

B. 34.

C. 36.

D. 62.

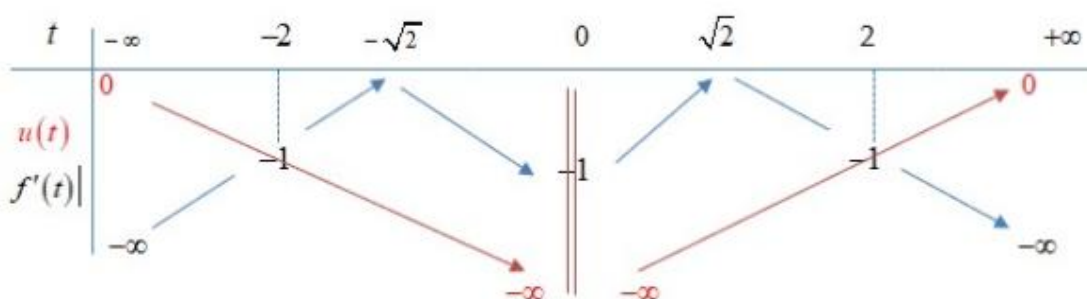
Lời giải

Xét $h(x) = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - \frac{6}{2x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$.

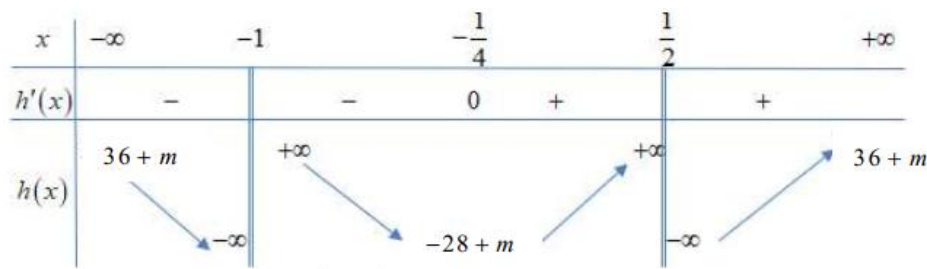
Ta có $h'(x) = f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{12}{(2x-1)^2}$ $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{-4(x+1)^2}{(2x-1)^2}$ đặt $t = \frac{2x-1}{x+1}$ ta được

phương trình $f'(t) = \frac{-4}{t^2}$

Đặt $u(t) = \frac{-4}{t^2}$ dễ dàng suy ra được bảng sau



Do đó $f'(t) = \frac{-4}{t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$ thay lại ta được $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{-1}{4}$. Ta có bảng biến thiên của $h(x) = 0$.



Do $h(x)$ có 1 điểm cực trị nên để hàm số $|h(x)|$ có 5 điểm cực trị khi chỉ khi $h(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt do đó ta suy ra $\begin{cases} 36+m > 0 \\ -28+m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -36 < m < 28$. Vậy có 63 giá trị của m .

Bài toán 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

- A. $\frac{4}{17}$. B. $\frac{14}{17}$. C. $-\frac{2}{17}$. D. $\frac{20}{17}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1).$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0.$$

Vì $\Delta' = 1 > 0 \forall m$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x = m \pm 1$.

Gọi $A(m+1; -4m-2)$, $B(m-1; -4m+2)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} = (-2; 4) = -2(1; -2), \overrightarrow{IA} = (m-1; -4m), \overrightarrow{IB} = (m-3; -4m+4).$$

Phương trình đường thẳng AB qua $A(m+1; -4m-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1)$ là $AB: 2x + y + 2m = 0$.

$$\text{Suy ra } d(I, AB) = \frac{|2+2m|}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Khi đó } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(I, AB) = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} \frac{|2+2m|}{\sqrt{5}} = |2+2m|.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\Delta IAB} = \frac{AB \cdot IA \cdot IB}{4R} \Leftrightarrow AB \cdot IA \cdot IB = 4\sqrt{5}|2+2m|.$$

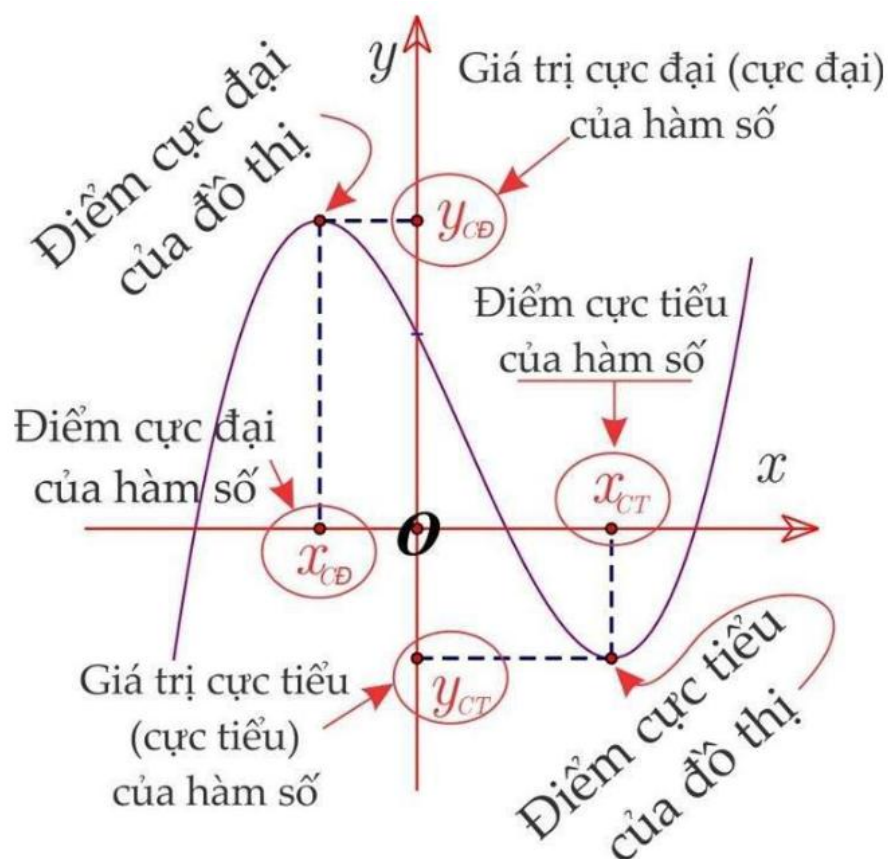
$$\Leftrightarrow \sqrt{20} \sqrt{17m^2 - 2m + 1} \sqrt{17m^2 - 38m + 25} = 4\sqrt{5}|2+2m|$$

$$\Leftrightarrow (17m^2 - 2m + 1)(17m^2 - 38m + 25) = 4(4m^2 + 8m + 4)$$

$$\Leftrightarrow 289m^4 - 680m^3 + 502m^2 - 120m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{17} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } m_1 + m_2 = \frac{20}{17}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG



LUYỆN KỸ NĂNG TOÁN 12 THPT BÀI GIẢNG CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU) (KẾT HỢP 3 BỘ SÁCH GIÁO KHOA)

THÂN TẶNG TOÀN THỂ QUÝ THẦY CÔ VÀ CÁC EM HỌC SINH TRÊN TOÀN QUỐC

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK)
ĐÁP ÁN CHI TIẾT PDF BẠN ĐỌC VUI LÒNG LIÊN HỆ
GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL); TEL 0398021920

THÀNH PHỐ THÁI BÌNH – THÁNG 7/2024

LUYỆN KỸ NĂNG TOÁN 12 THPT
CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)

DUNG LƯỢNG	NỘI DUNG
3 FILE 2 trang	CƠ BẢN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ
3 FILE 2 trang	VẬN DỤNG CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ
3 FILE 2 trang	VẬN DỤNG CAO CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)
LỚP BÀI TOÁN CƠ BẢN – PHẦN 1

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -3$. **B. $x = -1$.** C. $x = 1$. D. $y = -1$.

Câu 2. Tính tổng các cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x + 6$.

- A. 1 B. 2 **C. 0** D. 4

Câu 3. Tìm số cực trị của hàm số $y = 3^{x^2-x}$.

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 4. C. 2. **D. 1.**

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$

Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3.** B. 2 C. 4. D. 1.

Câu 6. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 8x + 19}$ đạt cực trị tại

- A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 1$ **D. $x = -4$**

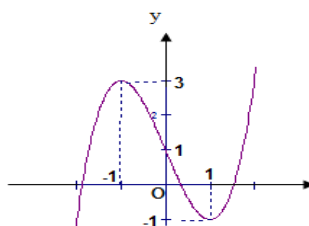
Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 3. C. 4. **D. 1.**

Câu 8. Tìm số cực trị của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

- A. 2 B. 1 C. 3 **D. 0**

Câu 9. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1; -1)$. **B. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1; -1)$.**
 C. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-1; 3)$. D. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1; 1)$.

Câu 10. Tìm một điểm cực trị của hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$.

- A. $y = 1$. **B. $x = 0$.** C. $y = 0$. D. $x = 1$.

Câu 11. Hàm số $y = e^x - xe$ đạt cực trị tại

- A. $x = -3$. B. $x = -1$. **C. $x = 1$.** D. $y = -1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 13. Tìm một điểm cực trị nào đó của hàm số $y = \cos x - x$.

- A. $x = 0$ B. $x = \frac{\pi}{2}$ **C. $x = -\frac{\pi}{2}$** D. $x = \frac{2\pi}{3}$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
 A. 1. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 15. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

A. $(3;1)$. B. $x = 3$. C. $\left(1; \frac{7}{3}\right)$. D. $x = 1$.

Câu 16. Hàm số nào dưới đây không có cực trị?

A. $y = \frac{x^2+1}{x}$ B. $y = \frac{2x-2}{x+1}$ C. $y = x^2 - 2x + 1$ D. $y = -x^3 + x + 1$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		0	1	0	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

A. $y = 1$. B. $x = 0$. C. $y = 0$. D. $x = 1$.

Câu 18. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ đạt cực trị tại

A. $x = -3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $y = -1$.

Câu 19. Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ bằng

A. 0. B. 1. C. 4. D. -1.

Câu 20. Tìm số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$.

A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 21. Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:

A. $y_{CT} = 0$. B. $y_{CT} = 3$. C. $y_{CT} = 2$. D. $y_{CT} = 4$.

Câu 22. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

A. không tồn tại m . B. $m = \pm 1$. C. $m = 1$. D. $m \in \{1; 2\}$.

Câu 23. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		5		1		$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số là

A. $y = 2$. B. $y = -1$. C. $y = 5$. D. $y = 0$.

Câu 25. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ là

A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 26. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ đạt cực trị tại điểm

A. $x = -3$ B. $x = 3$ C. $x = 1$ D. $x = 5$

Câu 27. Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 B. 3 C. 0 D. 2

Câu 28. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 15}$ có giá trị cực tiểu bằng

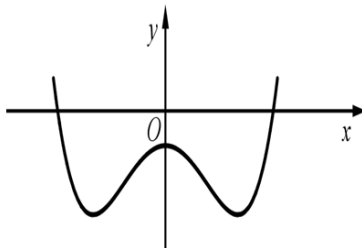
A. 5. B. 1. C. 3. D. $\sqrt{14}$

Câu 29. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. B. 1. C. 3. D. -1.

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)
LỚP BÀI TOÁN CƠ BẢN – PHẦN 2

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2 **B. 3** C. 0 D. 1

Câu 2. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.

- A. $y_{CT} = -6$ B. $y_{CT} = -1$ C. $y_{CT} = -2$ D. $y_{CT} = 1$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -2$. B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$. D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 4. Gọi x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- A. 2. B. 1. **C. -1.** D. 0.

Câu 5. Hàm số $y = e^{2x} - e^x$ đạt cực trị tại điểm

- A. $x = 3$. **B. $x = -\ln 2$.** C. $x = -\frac{1}{2}\ln 2$. D. $x = -1$.

Câu 6. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

- A. -1. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

- A.** $m > 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < 0$. D. $m \leq 0$.

Câu 8. Hàm số $y = \cos x - \sin x$ có cực trị tại x_0 . Giá trị $\tan x_0$ khi đó bằng

- A. 2 B. 1 C. -1 D. 0

Câu 9. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

- A. $m = -1$ B. $m = -7$ C. $m = 5$ D. $m = 1$

Câu 10. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{1-2x}$.

- A. 2 B. 1 C. 3 **D. 0**

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	5	$-\infty$	

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1. B. 2. C. 0. D. 5.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3 B. 1 C. 0 D. 2

Câu 13. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau đây

- Hàm số có 3 điểm cực trị.
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$.
- Hàm số có 1 điểm cực trị.
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$; $(0; 1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên?

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 14. Tìm số cực tiểu của hàm số $y = x\sqrt{x^2 + 2x}$

A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Câu 15. Tính giá trị cực tiểu của hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + 10)$.

A. 3 B. $2 \ln 3$ C. $3 \ln 2$ D. $2 \ln 2$

Câu 16. Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

A. $y = \frac{2x-3}{x+2}$. B. $y = x^4$. C. $y = -x^3 + x$. D. $y = |x+2|$.

Câu 17. Hàm số $y = 3^{x^2-5x}$ tại cực trị tại điểm

A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = -3$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 18. Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2019m$ ($m \in \mathbb{R}$) đạt cực tiểu tại điểm:

A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. $x = -3$. B. $x = 1$. C. $x = 2$ D. $x = -2$.

Câu 20. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đạt cực đại tại điểm

A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = 2$.

Câu 21. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 22. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = -3$. D. $x = 3$.

Câu 23. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)
LỚP BÀI TOÁN CƠ BẢN – PHẦN 3

Câu 1. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2x} - 4e^x$.

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

Câu 2. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực tiểu của hàm số là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0

Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 4. Số điểm cực trị của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. Không tồn tại m . D. $m = -1$.

Câu 6. Hàm số nào sau đây có điểm cực trị lớn hơn 3

- A. $y = x^3 - 3x^2$ B. $y = x^3 - 3x$ C. $y = \frac{x}{x+2}$ D. $y = x^3 - 6x^2 + 4$

Câu 7. Hàm số $y = -x^3 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 8. Khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đến trục tung bằng

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 0.

Câu 9. Hàm số $y = 2x^4 + 4x^2 - 8$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	2	$-\infty$	

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$ B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1
 C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$

Câu 11. Hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ có giá trị cực tiểu bằng

- A. 1 B. 2 C. 4 D. -3

Câu 12. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 10}$.

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			3		1		$+\infty$
	$-\infty$						

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm x bằng

A. 3

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 14. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ là

A. $(-1; -8)$

B. $(0; -5)$

C. $\left(\frac{5}{3}; \frac{40}{27}\right)$

D. $(1; 0)$

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		-	0	+		-	0	+	

Khi đó số cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 16. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x + 5)$.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x^2 + 2x)^3(x^2 - \sqrt{2}) \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 4

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 18. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?

A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 5

B. 2

C. 0

D. 1

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $m = 0$.

B. $m > 4$.

C. $0 \leq m < 4$.

D. $0 < m \leq 4$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3.

B. 2.

C. -2.

D. -3.

Câu 23. Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là.

A. $\{1\}$.

B. $\{-1\}$.

C. $\emptyset$.

D. $\mathbb{R}$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3

B. 5

C. 2

D. 4

Câu 25. Tìm số cực tiểu của hàm số $y = \ln(x^2 - 4x + 12)$.

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Câu 26. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ là:

A. $M(-1; -1)$.

B. $N(0; 1)$.

C. $P(2; -1)$.

D. $Q(1; 3)$.

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)
LỚP BÀI TOÁN VẬN DỤNG – PHẦN 1

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có điểm cực tiểu là A, tính khoảng cách từ A đến trục hoành

- A. 2 B. 3 C. 4 D. $\sqrt{2}$

Câu 2. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = \ln(x^2 - 4x + 12)$ nằm trong khoảng nào sau đây

- A. (1;2) B. (3;4) C. (4;5) D. (2;3)

Câu 3. Hàm số nào sau đây có hai điểm cực trị cùng dương ?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ B. $y = x^4 - 4x^2 + 1$
 C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$ D. $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$.

Câu 4. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ bằng

- A. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{10\sqrt{6}}{9}$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+	

Khẳng định nào sau đây sai đối với hàm số $4f(x) + 1$.

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$.
 C. $x = 1$ là điểm cực trị của hàm số. D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $2\sqrt{5}$. B. 5. C. 8. D. 6.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			5		-1		$+\infty$
	$-\infty$						

Tung độ điểm uốn (trung điểm hai điểm cực đại, cực tiểu) của đồ thị hàm số bằng

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

Câu 8. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Khẳng định nào sau đây không đúng?

- A. $y_1 y_2 = -4$. B. $AB = 4\sqrt{2}$. C. $y_1 = -y_2$. D. $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 9. Tìm số cực trị thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của hàm số $y = \sin x - \frac{1}{3}x$.

- A. 3 B. 4 C. 2 D. 1

Câu 10. Đường cong $y = x^4 - 4x^2 - 3$ có các điểm cực trị A, B, C. Tính độ dài đoạn thẳng OG với G là trọng tâm của tam giác ABC.

- A. $OG = \frac{17}{3}$. B. $OG = \frac{8}{3}$. C. $OG = 3$. D. $OG = \frac{7}{3}$.

Câu 11. Đường cong $y = x^3 - 3x^2$ có các điểm cực trị A, B. Tính khoảng cách d từ điểm $C(3; 4)$ đến đường thẳng AB.

- A. $d = 5$. B. $d = 2\sqrt{5}$. C. $d = \sqrt{26}$. D. $d = 4\sqrt{3}$.

Câu 12. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 2$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = b - a$.

A. $T = 2 + \sqrt{3}$.

B. $T = 1 + \sqrt{3}$.

C. $T = 2 - \sqrt{3}$.

D. $T = 3 - \sqrt{3}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^5}{\sqrt[3]{x-4}}$. Hỏi hàm số

$y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x - mx + 4$ có cực trị

A. 11

B. 10

C. 9

D. 6

Câu 15. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân.

A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$

B. $y = x^4 - 4x^2 + 1$

C. $y = x^4 + 2x^2 + 6$

D. $y = \frac{x+4}{x-2}$.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 6)$

A. 24

B. 25

C. 26

D. 23

Câu 17. Tìm số điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 4\pi)$ của hàm số $y = 2 \sin x + x\sqrt{2} + 4$.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Câu 18. Tính khoảng cách d giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$.

A. $d = 2\sqrt{2}$.

B. $d = \sqrt{3}$.

C. $d = \sqrt{2}$.

D. $d = 1$.

Câu 19. Gọi B, C là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Tính diện tích S của tam giác OBC (O là gốc tọa độ)

A. $S = 2$.

B. $S = 4$.

C. $S = 1$.

D. $S = 3$.

Câu 20. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị và hai điểm cực trị nằm khác phía với trục tung

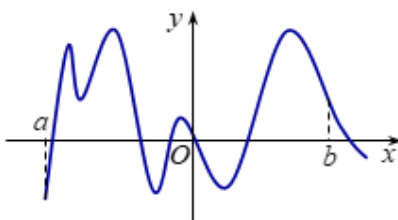
A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$

B. $y = x^4 + 4x^2 + 1$

C. $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 5$

D. $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(a; b)$.



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 7.

Câu 22. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x_M bằng

A. $x_M = 2$.

B. $x_M = 1 - \sqrt{2}$.

C. $x_M = 1$.

D. $x_M = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 23. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m+2)x - m - 1$ đạt cực trị tại các điểm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$ là

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-\infty; 2)$.

Câu 24. Gọi M là điểm cực tiểu của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 10}$. Tính khoảng cách từ M đến trục tung.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 3

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)
LỚP BÀI TOÁN VẬN DỤNG – PHẦN 2

Câu 1. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tính $f(1)$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		6		-26		$+\infty$

- A. 2 B. -10 C. -8 D. -12

Câu 2. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có hai cực trị $x = 1; x = 2$ và $f(0) = 3; f(1) = \frac{23}{6}$. Tính $f(2)$.

- A. 3 B. $\frac{11}{3}$ C. $\frac{13}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

Câu 3. Tính độ dài đoạn thẳng OA với A là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \ln(x^2 - 8x + 17)$.

- A. $OA = 3$ B. $OA = 4$ C. $OA = 5$ D. $OA = 6$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 5. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 5. Tìm tất cả cả điểm cực trị của hàm số $y = \cos x - \sqrt{3} \sin x - x$.

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây có điểm cực trị nằm trên trục hoành hoặc trục tung ?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ B. $y = x^4 - 4x^2 + 1$
 C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$ D. $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$.

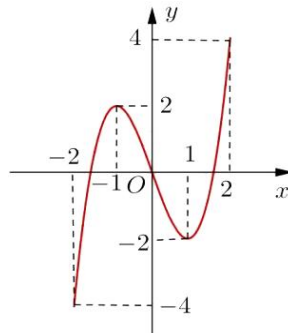
Câu 7. Tìm khoảng cách giữa hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

- A. 10 B. $4\sqrt{65}$ C. $8\sqrt{65}$ D. $10\sqrt{3}$

Câu 8. Tính tổng các cực trị của hàm số $y = e^x(x^2 + 2x - 3)$.

- A. 3 B. -4 C. -2 D. 1

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn có $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là



- A. $M(-2; -4)$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $M(1; -2)$.

Câu 10. Cho các hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$, $y = x^4 - 4x^2 - 3$, $y = \frac{x+5}{x+2}$, $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 7$.

Có bao nhiêu đồ thị hàm số thỏa mãn đường thẳng nối hai điểm cực trị song song với trục hoành

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \sin 6x \cos x - \sin x \cos 6x - mx + 2022$ có cực trị

- A. 6 B. 9 C. 11 D. 13

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 13. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = (3x-2)\sqrt{x+1}$ bằng

- A. $\frac{-10\sqrt{5}}{9}$ B. $\frac{-10\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{-6\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{-8\sqrt{2}}{9}$

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;2)$ và $B(2;-14)$. Tính giá trị $f(1)$.

- A. 2 B. -3 C. -5 D. -4

Câu 15. Tìm tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{5\pi}{12} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi, -\frac{5\pi}{12} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{5\pi}{12} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k2\pi, -\frac{7\pi}{12} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 16. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = \ln(x - 2\sqrt{x} + 6)$ nằm trong khoảng nào sau đây

- A. (1;2) B. (3;4) C. (4;5) D. (2;3)

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		5		$+\infty$	
	$-\infty$		-1		

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng

- A. $\sqrt{37}$ B. 7 C. $\sqrt{41}$ D. $3\sqrt{5}$

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -2m \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{5}x + 20$ có cực trị

- A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$ C. $-2 \leq m \leq 2$ D. $-2 < m < 2$

Câu 19. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Đường thẳng AB đi qua điểm nào sau đây

- A. (8;2). B. (8;20). C. (-1;10). D. (1;7).

Câu 20. Gọi M là điểm cực tiểu của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$. Điểm M nằm trên đường thẳng nào sau đây

- A. $y = x + 3$. B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. C. $y = x + 1$. D. $x - 2y - 3 = 0$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau, trong đó ABC là tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			$+\infty$	
		-2			-2			

Trọng tâm G tam giác ABC có hoành độ bằng

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)
LỚP BÀI TOÁN VẬN DỤNG – PHẦN 3

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

- A. $y(-1) = 7$. B. $y(-1) = 11$. C. $y(-1) = -11$. D. $y(-1) = -35$.

Câu 2. Tìm số cực trị của hàm số $f(x) = \ln x - 2x^2$.

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Câu 3. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$. Tính diện tích của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

- A. 32 B. 16 C. 48 D. 40

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ có đồ thị là (C) . Đường thẳng đi qua điểm $A(-1, 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là

- A. $y = x + 3$. B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. D. $x - 2y - 3 = 0$.

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x+1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 6. Hàm số $y = e^x \cdot \sin 2x$ đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó

- A. $\tan 2x_0 = \frac{1}{2}$ B. $\tan 2x_0 = -2$ C. $\tan 2x_0 = -\frac{1}{2}$ D. $\tan x_0 = -3$

Câu 7. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?

- A. 3. B. 1. C. Không có m . D. 2.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 2}$ có hai điểm cực trị A, B. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB.

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{4}{\sqrt{5}}$

Câu 9. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}$ bằng

- A. $4\sqrt{5}$ B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại. Tính tổng các phần tử của tập S .

- A. 1. B. 2. C. 6. D. 0.

Câu 11. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - x + 5 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

- A. 2 B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{17}{12}$ D. $\frac{59}{12}$

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có điểm cực đại B, tính khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 1 = 0$.

A.2

B. 1

C. $\frac{1}{5}$

D.

Câu 13. Gọi M là điểm cực tiểu của hàm số $y = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 5}$. Điểm M nằm trên đường thẳng nào sau đây

A. $y = x + 3$.B. $y = 7x + 2$.C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.D. $x - 2y - 3 = 0$.

Câu 14. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

A. -2.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 15. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}$.

A.2

B. 3

C. 1

D. 0.

Câu 16. Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. $(0; +\infty)$.B. $(-\infty; 0]$.C. $[0; +\infty)$.D. $(-\infty; 0)$.

Câu 17. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$			
y'		-	0	+	-	0	+	-	0	-

Hàm số $y = f(2020x + 2021)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 18. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

A. $y = 2x + 2$.B. $y = x + 1$.C. $y = 2x + 1$.D. $y = 3x + 1$

Câu 19. Đường cong $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ có điểm cực tiểu A và điểm cực đại B. Đường thẳng AB cắt trục hoành tại C, tính tỷ số $k = \frac{CA}{CB}$.

A. $k = \frac{1}{2}$.B. $k = \frac{1}{3}$.C. $k = \frac{1}{3}$.D. $k = \frac{4}{3}$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. 0.

D. 9.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 - (2m-1)x + m + 2$, m là tham số. Biết hàm số có hai điểm cực trị

x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - 10(x_1 + x_2)$.

A. 78.

B. 1.

C. -18.

D. -22.

Câu 22. Tìm số điểm cực trị thuộc $(0; 2\pi)$ của hàm số $y = \sin 2x - \frac{x}{2}$.

A.4

B. 6

C. 8

D. 5

Câu 23. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$.

A. $m = 5$.B. $m = \frac{1}{2}$.C. $m = 3$.D. $m = \frac{7}{2}$.

Câu 24. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^2 - 4x + 2|x^2 - 9|$.

A.2

B. -3

C. -1

D. -4

Câu 25. Hàm số $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ có vô số điểm cực đại, giá trị cực đại luôn bằng

A.3

B. 2

C. 1

D. -2

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
CỰC TRỊ HÀM SỐ (CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU)
LỚP BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO – PHẦN 1

Câu 1. Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $ab \geq 0$ B. $ab \leq 0$ C. $ab > 0$ D. $ab < 0$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

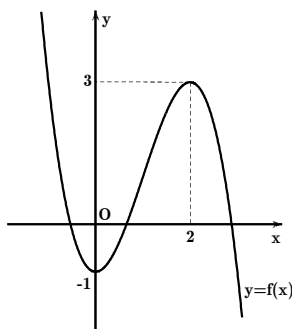
Số điểm cực trị của hàm số $f(4x^2 + 4x)$ là

- A. 7. B. 3. C. 5. D. 9.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1.

- A. $m = 1, m = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. B. $m = 0, m = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. C. $m = 0, m = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. D. $m = 1, m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

- A. $(1; 3)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tập tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b}; c\right)$ với a, b, c là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 14

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 5. B. 7. C. 6. D. 4.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $4b + 2c + d + 16 < 0$ và $9b - 3c + d > 54$. Hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-20; 20]$ sao cho hàm số $y = -2x + 2 + a\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại?

- A. 35. B. 17. C. 36. D. 18.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

- A. 16. B. 9. C. 15. D. 10.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

B. 7.

B. 5.

C. 8.

D. 6.

Câu 11. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x-1)]^4$ là

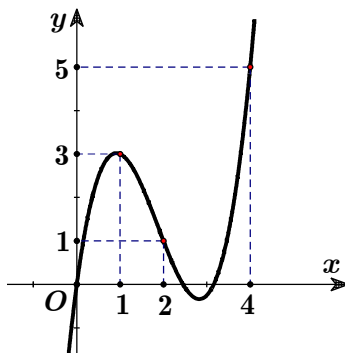
A. 7.

B. 8.

C. 5.

D. 9.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

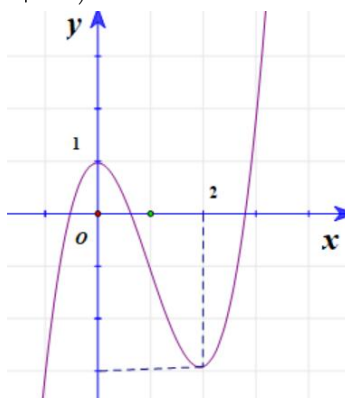
D. 3.

Câu 13. Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} | 0 \leq n \leq 20\}$ và F là tập hợp các hàm số $f(x) = x^3 + (2m^2 - 5)x^2 + 6x - 8m^2$ có $m \in A$.

Chọn ngẫu nhiên một hàm số $f(x)$ từ F . Tính xác suất để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox .

A. $\frac{18}{21}$.B. $\frac{19}{20}$.C. $\frac{9}{10}$.D. $\frac{19}{21}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để hàm số $g(x) = f(|x^5 + 4x| + m)$ có ít nhất 5 điểm cực trị.



A. 2022.

B. 2023.

C. 2021.

D. 1012.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3ax + 4$ với a là tham số. Biết a_0 là giá trị của tham số a để hàm số đã cho

đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a_0 \in (-7; -3)$.B. $a_0 \in (-10; -7)$.C. $a_0 \in (7; 10)$.D. $a_0 \in (1; 7)$.

Câu 1. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^5(x+1)^4(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(f(x))$ bằng

- A. 13. B. 10. C. 3. D. 11.

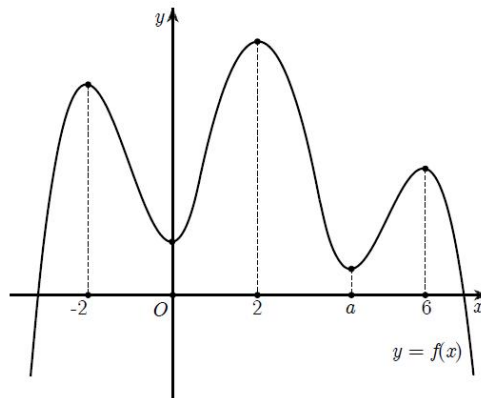
Câu 3. Đường cong $y = -2x^4 + 4x^2 + 6$ có ba điểm cực trị A, B, C. Giả sử tồn tại điểm D để tứ giác ABDC là hình thoi, tính diện tích S của hình thoi ABDC.

- A. $S = 16$. B. $S = 10$. C. $S = 6$. D. $S = 8$.

Câu 4. Đường cong $y = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 1}$ có hai điểm cực trị A, B, điểm $H(a; b)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O trên đường thẳng AB. Tính giá trị biểu thức $17(a + b)$.

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là

- A. 8. B. 11. C. 9. D. 7.

Câu 6. Hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là 0, 1, 2 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(4x - x^2)$.

- A. 5 B. 7 C. 6 D. 3

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C với A thuộc trục tung và $OB = AC$. Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $b^2 = -2ac$ B. $b^2 = 2ac$ C. $b^2 = -4ac$ D. $b^2 = 4ac$

Câu 8. Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có 2 cực trị A, B thỏa mãn tam giác OAB cân tại gốc O.

- A. $m = 3$ B. $m = \frac{5}{2}$ C. $m = 1$ D. $m = 4$

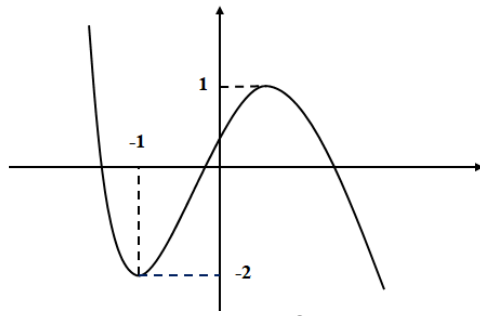
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

Câu 10. Hàm số $y = a \sin 2x + b\sqrt{2} \cdot \cos 3x - 2x$ ($0 < x < 2\pi$) đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{4}; x = \pi$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + 3b - 3ab$.

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là:



A. 4 .

B. 1.

C. 3.

D. 2 .

Câu 12. Tính tổng các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2m}{x+1}$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O.

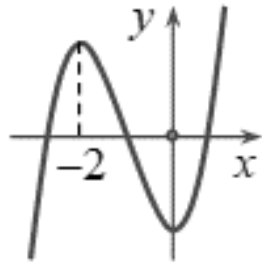
A.9

B. 1

C. 4

D. 5

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 14. Đường cong $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ có điểm cực tiểu A. Xét điểm $B(1;1)$ và $C(a;b)$ thuộc trục hoành sao cho $CA + CB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = 20a + 21b$.

A. S = 10.

B. S = 11.

C. S = 21.

D. S = 23.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

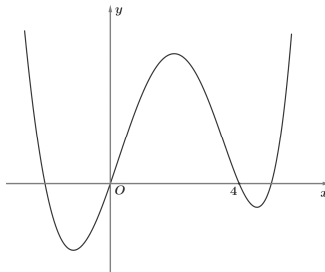
A. 9.

B. 3.

C. 7.

D. 5.

Câu 16. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 5.

B.9.

C. 7.

D. 11.

Câu 17. Cho hàm số: $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng 120° .

A. $m = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

B. $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

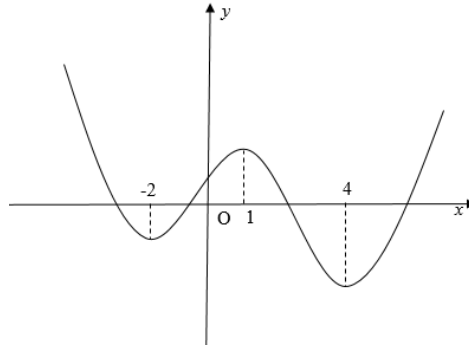
C. $m = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

D. $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (trong đó O là gốc tọa độ)

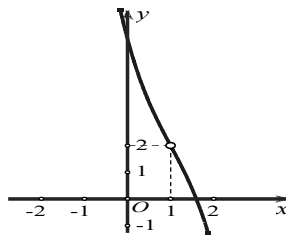
- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{17}{11} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{17}{11} \end{cases}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 3. B. 7. C. 6. D. 4.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường cong của như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 - 2x.f(x) + 2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị của hàm số $y = h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1; 0)$.
 B. Hàm số $y = h(x)$ không có cực trị.
 C. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $N(1; 2)$.
 D. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $M(1; 0)$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A. $0 < m < 1$ B. $m > 0$ C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$ D. $m < 1$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 2(m+1)x + 2m + 6)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá số 2022 sao cho hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có 9 điểm cực trị?

- A. 2019. B. 2022. C. 2023. D. 2021.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ (m là tham số). Tìm tích các giá trị m xảy ra khi đồ thị hàm số có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp.

- A. 1 B. $-\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1)$ có đúng 8 cực trị?

A. 16.

B. 19.

C. 21.

D. 18.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $\frac{4}{17}$.B. $\frac{14}{17}$.C. $-\frac{2}{17}$.D. $\frac{20}{17}$.

Câu 9. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = -\frac{1}{\ln 2}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-4	-1	$-\infty$

Hàm số $g(x) = \left| f(-x^2) - x^2 + \frac{2x^2}{\ln 2} \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) và thỏa mãn $\begin{cases} a > 0, d > 2020 \\ a + b + c + d - 2020 < 0 \end{cases}$. Tìm số

điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ với $g(x) = f(x) - 2020$.

A. 4

B. 5

C. 6

D. 3

Câu 11. Cho hàm số $y = x + p + \frac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2; -2)$. Tính pq .

A. $pq = 2$.B. $pq = \frac{1}{2}$.C. $pq = \sqrt{3}$.D. $pq = 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$. Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ đồ thị hàm số luôn có ba điểm cực trị. Gọi (P) là đường parabol đi qua ba điểm cực trị đó. Tìm tổng các giá trị của m để (P) đi qua điểm $I(2; 24)$.

A. 4

B. 5

C. 6

D. 3

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	-3	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - |m|x + 4}{x - |m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B . Tìm số

giá trị m sao cho ba điểm $A, B, C(4; 2)$ phân biệt và thẳng hàng.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 15. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2}{x - 1}$ có hai điểm cực trị A, B . Khi $\angle AOB = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\frac{1}{16}$.

B. 8.

C. $\frac{1}{8}$.

D. 16.