

CHỦ ĐỀ 12: TÍCH CÓ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1) Công thức định thức: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

2) Định nghĩa tích có hướng của 2 vector: Cho 2 vector: $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1); \vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$.

Khi đó tích có hướng của 2 vector $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1); \vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ ký hiệu: $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vector và được tính

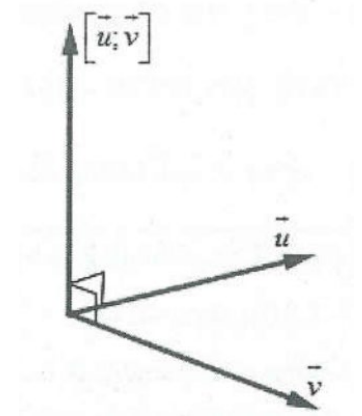
như sau: $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1)$

3) Tính chất: $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{u}; [\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{v}; [\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$

Độ dài của vector tích có hướng $||[\vec{u}, \vec{v}]|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Hai vector $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0} (0; 0; 0)$.

Ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng khi $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.



Từ đó suy ra 4 điểm A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện khi 3 vector $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng hay $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$ và 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng khi $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

4) Ứng dụng:

- Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = ||[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]||$.
- Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2} ||[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]||$.
- Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = ||[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}||$.
- Thể tích tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} ||[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}||$.

Ví dụ 1: Tính tích có hướng của các cặp vector sau:

a) $\vec{a} = (1; 0; -2); \vec{b} = (0; 1; 3)$.

b) $\vec{a} = (3; 1; -1); \vec{b} = (2; 1; -2)$.

c) $\vec{a} = (-3; 1; 4); \vec{b} = (1; -1; 2)$.

d) $\vec{a} = (1; 3; 5); \vec{b} = (2; -1; 3)$.

Lời giải:

a) $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2; -3; 1)$.

$$\text{b)} [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 4; 1).$$

$$\text{c)} [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (6; 10; 2).$$

$$\text{d)} [\vec{a}, \vec{b}] = (-4; 13; -7).$$

Ví dụ 2:

a) Cho 3 vector $\vec{u} = (2; -1; 1); \vec{v} = (m; 3; -1); \vec{w} = (1; 2; 1)$. Tìm m để 3 vector đồng phẳng.

b) Cho 3 vector $\vec{u} = (1; 2; 3); \vec{v} = (2; 1; m); \vec{w} = (2; m; 1)$. Tìm m để 3 vector không đồng phẳng.

Lời giải:

$$\text{a)} \text{ Ta có: } [\vec{u}, \vec{v}] = (-2; m+2; m+6) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = -2 + 2m + 4 + m + 6 = 3m + 8$$

$$\text{Ba vector } \vec{u}; \vec{v}; \vec{w} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow 3m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{8}{3}.$$

$$\text{b)} \text{ Ta có: } [\vec{u}, \vec{v}] = (2m-3; 6-m; -3) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 4m-6+6m-m^2-3 = -m^2+10m-9$$

$$\text{Để 3 vector } \vec{u}; \vec{v}; \vec{w} \text{ không đồng phẳng thì } [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} \neq 0 \Leftrightarrow -m^2+10m-9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 9 \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm: $A(1; 0; 1); B(-1; 1; 2);$

$C(-1; 1; 0); D(2; -1; -2)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$. Suy ra độ dài đường cao của tứ diện qua đỉnh A.

Lời giải:

$$\text{a)} \text{ Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-2; 1; 1); \overrightarrow{AC} = (-2; 1; -1); \overrightarrow{AD} = (1; -1; -3).$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2; -4; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD} \text{ không đồng phẳng}$$

Do đó A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.

$$\text{b)} \text{ Thể tích tứ diện } ABCD \text{ là: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{BC} = (0; 0; -2); \overrightarrow{BD} = (3; -2; -4) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-4; -6; 0)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \sqrt{13} \Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm: $A(-3;5;15)$, $B(0;0;7)$, $C(2;-1;4)$, $D(4;-3;0)$. Chứng minh rằng AB và CD cắt nhau.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -5; -8)$; $\overrightarrow{AC} = (5; -6; -11)$; $\overrightarrow{AD} = (7; -8; -15)$ và $\overrightarrow{CD} = (2; -2; -4)$

Do $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (7; -7; 7) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng (1)

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng phương (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB và CD cắt nhau.

Ví dụ 5: Cho 3 vector $\vec{u} = (3; 7; 0)$; $\vec{v} = (2; 3; 1)$; $\vec{w} = (3; -2; 4)$.

a) Chứng minh 3 vector $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ không đồng phẳng.

b) Biểu thị vector $\vec{a} = (-4; -12; 3)$ theo 3 vector $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$.

Lời giải:

a) Ta có: $[\vec{u}, \vec{v}] = (7; -3; -5) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 7 \neq 0 \Rightarrow 3$ vector $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ không đồng phẳng.

b) Giả sử $\vec{a} = m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} \Leftrightarrow (-4; -12; 3) = (3m; 7m; 0) + (2n; 3n; n) + (3p; -2p; 4p)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n + 3p = -4 \\ 7m + 3n - 2p = 7 \\ n + 4p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = 7 \\ p = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } \vec{a} = -5\vec{u} + 7\vec{v} - \vec{w}.$$

Ví dụ 6: Cho 4 điểm $A(1;1;0)$; $B(0;2;1)$; $C(1;0;2)$; $D(1;1;1)$

a) Chứng minh 4 điểm đã cho đồng phẳng, tính thể tích tứ diện $ABCD$.

b) Tính diện tích các mặt của tứ diện $ABCD$.

c) Tính độ dài các đường cao của tứ diện $ABCD$.

Lời giải:

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0; -1; 2)$; $\overrightarrow{AD} = (0; 0; 1)$

Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (3; 2; 1) \cdot (0; 0; 1) = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng

Do đó 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng

Thể tích tứ diện $ABCD$ là: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6}$.

b) Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{\sqrt{14}}{2}$; $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{2}$.

$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}]| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Ta có $V = \frac{1}{3}Sh \Rightarrow h = \frac{3V}{S}$. Gọi $h_A; h_B; h_C; h_D$ lần lượt là độ dài đường cao hạ từ A, B, C, D của tứ diện

thì ta có: $h_A = \frac{3V}{S_{BCD}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; h_B = \frac{3V}{S_{ACD}} = 1; h_C = \frac{3V}{S_{ABD}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; h_D = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$

Ví dụ 7: Cho 3 điểm $A(1;0;0); B(0;0;1)$ và $C(2;1;1)$.

a) Chứng minh 3 điểm A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác, tính diện tích tam giác đó.

b) Tính độ dài đường cao h_A kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC .

Lời giải:

a) $\overrightarrow{AB} = (-1;0;1); \overrightarrow{AC} = (1;1;1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1;2;-1) \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay 3 điểm A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

b) Ta có: $h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$

Ví dụ 8: Cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$ và điểm D thuộc trục Oy . Biết $V_{ABCD} = 5$.
Tìm tọa độ điểm D .

Lời giải:

Gọi $D(0;y;0) \in Oy$ ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-1;2); \overrightarrow{AD} = (-2;y-1;1); \overrightarrow{AC} = (0;-2;4)$

Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0;-4;-2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4(y-1) - 2 = -4y + 2$

Do $V_{ABCD} = 5 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot |-4y + 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 8 \end{cases}.$

Vậy $D(0;-7;0)$ hoặc $D(0;8;0)$.

Ví dụ 9: Chứng minh đẳng thức: $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |[\vec{a}, \vec{b}]|^2.$

Lời giải:

Ta có: $VT = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\vec{a}, \vec{b})$

Lại có: $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$

Do đó $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |[\vec{a}, \vec{b}]|^2$ (đpcm).

Ví dụ 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 3 vectơ $\vec{a}(m+2;3;2m)$; $\vec{b}(2;-1;m)$; $\vec{c}(1;2;1)$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để 3 vectơ trên đồng phẳng. Số phần tử của tập hợp S là:

- a) 0. b) 1. c) 2. d) 3.

Lời giải:

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (5m; 2m - m^2; -m - 8)$

Ba vectơ đã cho đồng phẳng khi $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow 5m + 4m - 2m^2 - m - 8 = 0$

$\Leftrightarrow -2m^2 + 8m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$

Do đó tập hợp S có một phần tử. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho 2 vectơ $\vec{u} = (1; 2; -1)$; $\vec{v} = (1; -3; x)$. Tìm x biết rằng $[\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{30}$.

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = 2$.

Lời giải:

Ta có: $[\vec{u}, \vec{v}] = (2x - 3; x + 1; -5)$

Do đó $[\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{(2x - 3)^2 + (x + 1)^2 + 25} = 30 \Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. **Chọn B.**

Ví dụ 12: Cho 3 vectơ $\vec{u} = (1; x; -1)$; $\vec{v} = (0; 2; 1)$; $\vec{w} = (x; 7; 2)$. Tìm x biết rằng $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0$.

- A. $x = \pm 1$. B. $x = \pm 3$. C. $\begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -3 \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} x = 3 \\ x = 1 \end{bmatrix}$.

Lời giải:

$[\vec{u}, \vec{v}] = (x + 2; -1; 2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = x^2 + 2x - 7 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -3 \end{bmatrix}$. **Chọn C.**

Ví dụ 13: Cho 2 vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ biết $|\vec{u}| = \sqrt{2}$; $|\vec{v}| = 3$. Góc giữa 2 vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 45° , độ dài vector $[5\vec{u}, -3\vec{v}]$ là:

- A. $7\sqrt{2}$. B. 15. C. $15\sqrt{2}$. D. 45.

Lời giải:

Do $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ \Rightarrow (5\vec{u}, -3\vec{v}) = 135^\circ$.

Ta có: $|[5\vec{u}, -3\vec{v}]| = |5\vec{u}| \cdot |-3\vec{v}| \cdot \sin(5\vec{u}, -3\vec{v}) = 5\sqrt{2} \cdot 9 \cdot \sin 135^\circ = 45$. **Chọn D.**

Ví dụ 14: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;1;-1)$; $B(1;0;2)$; $C(5;0;0)$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $\sqrt{21}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. C. $\sqrt{42}$. D. $2\sqrt{21}$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 3)$; $\overrightarrow{AC} = (2; -1; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 8; 4)$.

Vậy diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{21}$. **Chọn A.**

Ví dụ 15: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 4 điểm $A(0;1;1)$; $B(-1;0;2)$; $C(-1;1;1)$; $D(1;4;7)$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) là:

- A. $h_D = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. B. $h_D = 9$. C. $h_D = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. D. $h_D = 9\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (1; 3; 6)$

Lại có: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -1; -1) \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{3}{2}$.

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d_{(D; (ABC))} = h_D = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 16: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;7;-3)$, $C(m+1;m;0)$. Biết diện tích tam giác ABC bằng $3\sqrt{3}$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 6; -4)$; $\overrightarrow{AC} = (m; m-1; -1)$

Khi đó $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (4m-10; 2+4m; -8m+2)$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(4m-10)^2 + (2+4m)^2 + (-8m+2)^2} = 3\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(2m-5)^2 + (1+2m)^2 + (-4m+1)^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 24m^2 - 24m + 27 = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=0 \end{cases} \Rightarrow T=1$. **Chọn A.**

Ví dụ 17: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 4 điểm $A(m-1;m;2m-1)$; $B(-1;0;2)$; $C(-1;1;0)$; $D(2;1;-2)$.

Biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{5}{6}$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. 1. B. $\frac{9}{7}$. C. 9. D. $\frac{5}{7}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = (0; 1; -2); \overrightarrow{BD} = (3; 1; -4) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-2; -6; -3)$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{BA} = (m; m; 2m - 3) \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{6} |-2m - 6m - 6m + 9|$$

$$= \frac{1}{6} |-14m + 9| = \frac{5}{6} \Leftrightarrow |9 - 14m| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{2}{7} \end{cases} \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 18: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1; 1; 1)$; $B(-1; 7; -3)$; $C(2; 1; 0)$. Tìm điểm D thuộc Oz sao cho bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

- A. $D(1; 2; 0)$. B. $D(0; 0; 3)$. C. $D(0; 0; -3)$. D. $D(0; 0; 2)$.

Lời giải:

$$\text{Do điểm } D \in Oz \Rightarrow D(0; 0; d)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-2; 6; -4); \overrightarrow{AC} = (1; 0; -1); \overrightarrow{AD} = (-1; -1; d - 1)$$

$$\text{Để bốn điểm } A, B, C, D \text{ đồng phẳng thì } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-6; -6; -6) \cdot (-1; -1; d - 1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 6 - 6d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = 3 \Rightarrow D(0; 0; 3). \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 19: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 3)$; $B(-1; 2; 1)$; $C(0; 1; 4)$. Biết $H(x_o; y_o; z_o)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tính $P = x_o - y_o$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{-1}{2}$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = 2$.

Lời giải:

Gọi $H(a; b; c)$ là trực tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH}$ đồng phẳng

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB}(-2; 2; -2) = -2(1; -1; 1); \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 1);$$

$$\overrightarrow{CH} = (a; b - 1; c - 4); \overrightarrow{BH} = (a + 1; b - 2; c - 1); \overrightarrow{AH} = (a - 1; b; c - 3)$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (4; 4; 0) = 4(1; 1; 0)$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-1=0 \\ a-b+1+c-4=0 \\ -a-1+b-2+c-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{3}{4} \\ c=\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow P = -\frac{1}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 20: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;0;-2)$; $B(3;-1;-4)$; $C(-2;2;0)$. Điểm D nằm trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là

- A. $D(0;3;-1)$. B. $D(0;-3;-1)$. C. $D(0;1;-1)$. D. $D(0;2;-1)$.

Lời giải:

Vì $D \in (Oyz) \Rightarrow D(0;b;c)$, do cao độ âm nên $c < 0$.

Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $|c|$ và bằng 1 $\Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = -1$ (do $c < 0$) $\Rightarrow D(0;b;-1)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -1; -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-4; 2; 2) \\ \overrightarrow{AD} = (-2; b; 1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 6; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 + 6b - 2 = 6b - 6 = 6(b-1)$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = |b-1|$$

$$\text{Mặt khác } V_{ABCD} = 2 \Leftrightarrow |b-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D(0;3;-1) \\ D(0;-1;-1) \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$. Kết luận nào là **sai**?

- A. $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{a}]$.
B. $[\vec{a}, \vec{b}]$ không vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
C. $[k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$.
D. $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Câu 2: Cho $\vec{a} = (-2; 5; 3)$, $\vec{b} = (-4; 1; -2)$. Kết quả của biểu thức $||[\vec{a}, \vec{b}]||$ là

- A. $\sqrt{216}$.
B. $\sqrt{405}$.
C. $\sqrt{749}$.
D. $\sqrt{708}$.

Câu 3: Cho $\vec{a} = (1; t; 2)$, $\vec{b} = (t+1; 2; 1)$, $\vec{c} = (0; t-2; 2)$. Xác định t để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

- A. $t = 1$.
B. $t = -2$.
C. $t = \frac{1}{2}$.
D. $t = \frac{2}{5}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; 0; 4)$, $C(2; 1; -1)$. Độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của $\triangle ABC$ là

- A. $\sqrt{6}$.
B. $\sqrt{\frac{33}{50}}$.
C. $\frac{5\sqrt{6}}{9}$.
D. $\sqrt{\frac{50}{33}}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 0; -1)$, $B(1; -2; 2)$. Diện tích tam giác OAB bằng:

- A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.
B. $\sqrt{11}$.
C. $\sqrt{6}$.
D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 1)$, $B(0; 2; 3)$, $C(2; 1; 0)$. Độ dài đường cao kẻ từ C của tam giác ABC là

- A. $\sqrt{26}$.
B. $\frac{\sqrt{26}}{2}$.
C. $\frac{\sqrt{26}}{3}$.
D. 26.

Câu 7: Cho tam giác ABC biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-1; 4; 2)$. Độ dài trung tuyến AM và đường cao AH lần lượt là:

- A. $\frac{\sqrt{83}}{2}$ và $2\sqrt{2}$.
B. $\frac{\sqrt{83}}{2}$ và $\sqrt{2}$.
C. $\frac{\sqrt{79}}{2}$ và $\sqrt{2}$.
D. $\frac{\sqrt{79}}{2}$ và $2\sqrt{2}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; 4; -4)$, $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng

- A. $\sqrt{245}$.
B. $\sqrt{345}$.
C. $\sqrt{615}$.
D. $\sqrt{618}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm không đồng phẳng $A(2; -1; -2)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(-1; 1; 0)$, $S(1; 0; 1)$. Độ dài đường cao của hình chóp $S.ABC$ xuất phát từ đỉnh S bằng

- A. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.
B. $\frac{1}{\sqrt{13}}$.
C. $\frac{2}{\sqrt{13}}$.
D. $\sqrt{13}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;1;1)$, $D(1;1;1)$ không đồng phẳng. Tứ diện $ABCD$ có thể tích là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 2. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;-2;2)$, $B(0;-1;2)$, $C(0;-2;3)$ và $D(-2;-1;1)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 12: Cho $A(3;0;0)$; $B(0;3;0)$; $C(0;0;3)$; $D(1;-1;0)$ thì thể tích của tứ diện $ABCD$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 27. C. $\frac{9}{2}$. D. 3.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;2)$ thì thể tích V của tứ diện $ABA'C'$ bằng:

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;-6)$, $B(0;0;-2)$, $C(-5;1;2)$, $D'(2;1;-1)$. Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì thể tích của nó là:

- A. 36 (đvtt). B. 38 (đvtt). C. 40 (đvtt). D. 42 (đvtt).

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;3;-4)$ và điểm $B(1;3;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho tam giác ABC cân tại C và có diện tích bằng $8\sqrt{5}$.

- A. $\begin{bmatrix} C(3;7;0) \\ C(3;1;0) \end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix} C(3;7;0) \\ C(3;-1;0) \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} C(-3;-7;0) \\ C(-3;-1;0) \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} C(-3;-7;0) \\ C(3;-1;0) \end{bmatrix}$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$. B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$. C. $M\left(\frac{7}{4}; \frac{14}{4}; 0\right)$. D. $M(0;0;1)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$, $B(0;-3;3)$, $C(1;7;1)$. Biết rằng tọa độ điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất có dạng $M(a;0;b)$, $(a,b \in \mathbb{R})$. Khi đó $a^2 + 3b^2$ bằng

- A. 16. B. 4. C. 11. D. 13.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Theo lý thuyết SGK thì hiển nhiên A sai, B đúng, C đúng, D đúng. **Chọn A.**

Câu 2: Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-13; -16; 18) \Rightarrow \left\| [\vec{a}, \vec{b}] \right\| = \sqrt{749}$. **Chọn C.**

Câu 3: Để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} t & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & t \\ t+1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (t-4; 2t+1; 2-t-t^2)$

Suy ra $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = (2t+1)(t-2) + 2(2-t-t^2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$. **Chọn D.**

Câu 4: Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; 1; -5) \Rightarrow BC = \sqrt{27} \longrightarrow d(A, BC) = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{5\sqrt{6}}{9}$. **Chọn C.**

Câu 5: Ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 6: Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 2) \Rightarrow AB = 3 \longrightarrow d(C, AB) = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{\sqrt{26}}{3}$. **Chọn C.**

Câu 7: Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-1; 1; 1) \Rightarrow BC = \sqrt{3} \longrightarrow d(A, BC) = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{BC} = \sqrt{2}$.

Tọa độ trung điểm M của BC là $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{83}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 8: $\overrightarrow{AB} = (-1; -3; 1); \overrightarrow{AC} = (-4; -4; 9)$

Diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng: $S = 2S_{\Delta ABC} = \left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\| = \left\| (-23; 5; -8) \right\| = \sqrt{618}$. **Chọn D.**

Câu 9: $\overrightarrow{SA} = (1; -1; -3); \overrightarrow{SB} = (-2; 1; 1); \overrightarrow{SC} = (-2; 1; -1)$

Thể tích hình chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] \cdot \overrightarrow{SC} \right| = \frac{1}{3}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 4); \overrightarrow{AC} = (-3; 2; 2) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\| = \sqrt{13}$.

Khi đó $h_s = \frac{3V}{S} = \frac{1}{\sqrt{13}}$. **Chọn B.**

Câu 10: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 1)$

Thể tích tứ diện $ABCD$ là: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6}$. **Chọn A.**

Câu 11: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$; $\overrightarrow{AD} = (-3; 1; -1)$

Thể tích tứ diện $ABCD$ là: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 12: $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 3)$; $\overrightarrow{AD} = (-2; -1; 0)$

Thể tích tứ diện $ABCD$ là: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$. **Chọn C.**

Câu 13: $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2)$

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} = (1; 1; 2)$

Thể tích V của tứ diện $ABA'C'$ bằng: $V = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'} \right] \cdot \overrightarrow{AC'} \right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. **Chọn C.**

Câu 14: Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $ABCD$ là hình bình hành

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (-1; -1; 4) \Rightarrow (-5 - x_D; 1 - y_D; 2 - z_D) = (-1; -1; 4)$

Suy ra $D(-4; 2; -2)$ khi đó $\overrightarrow{DD'} = (6; -1; 1)$; $\overrightarrow{DA} = (5; -1; -4)$; $\overrightarrow{DC} = (-1; -1; 4)$

Thể tích của khối hộp là $V = \left| \left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC} \right] \cdot \overrightarrow{DD'} \right| = 38$. **Chọn B.**

Câu 15: Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 0; 8)$; $AB = 4\sqrt{5}$.

Gọi $I(3; 3; 0)$ là trung điểm của AB và $C(x; y; 0)$ ta có: $CA = CB \Rightarrow \overrightarrow{CI} \perp \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow (-4; 0; 8) \cdot (3 - x; 3 - y; 0) \Leftrightarrow x = 3$.

Suy ra $C(3; y; 0)$, mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2} CI \cdot AB = \frac{1}{2} |y - 3| \cdot 4\sqrt{5} = 8\sqrt{3} \Leftrightarrow |y - 3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y = -1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 16: Gọi G là trọng tâm tứ diện khi đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Khi đó $G\left(\frac{7}{4}; \frac{14}{4}; 0\right)$, ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$

$$\begin{aligned} &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \end{aligned}$$

$$= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow MG^2 \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow MG = 0 \Leftrightarrow M \equiv G\left(\frac{7}{4}; \frac{14}{4}; 0\right). \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 17: Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(1; 0; 2)$

Khi đó $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} \right| = \left| 4\overrightarrow{MI} \right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

Suy ra $M \equiv I(1;0;2) \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 3b^2 = 13$. **Chọn D.**