

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (14 điểm).

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$, (với m là tham số) và điểm $I(2; -2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác IAB nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tích các phần tử của tập S là

- A. $\frac{14}{17}$. B. $\frac{4}{17}$. C. $\frac{20}{17}$. D. $\frac{3}{17}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. B. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. C. $2y' + xy'' = -\frac{4}{x^2}$. D. $2y' + xy'' = \frac{2}{x^2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P = 2M - m$ có dạng $a\sqrt{11} - b\sqrt{3} + c$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Giá trị của $a + b + c$ là

- A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 4: Tìm tất cả tham số m để hàm số $y = (m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + x - 1$ đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

- A. $-1 < m < 1$. B. $m \leq -\frac{5}{2}$. C. $-\frac{1}{4} \leq m \leq 2$. D. $-\frac{1}{4} \leq m < 2$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1; 4; 0)$, $D(4; 4; 0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

- A. $\frac{5\sqrt{265}}{2}$. B. $3\sqrt{265}$. C. $\frac{7\sqrt{265}}{2}$. D. $2\sqrt{265}$.

Câu 6: Hàm số $y = -x^4 - 2(1+m)x^2 + 1$ (với m là tham số) đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi

- A. $m < -1$. B. $m > 0$. C. $-1 \leq m < 0$. D. $m \geq 0$.

Câu 7: Cho tập hợp A gồm 6 phần tử, lấy ngẫu nhiên một tập con của A . Xác suất để chọn được tập con có đúng 3 phần tử của tập A là

- A. $\frac{5}{16}$. B. $\frac{11}{16}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{16}$.

Câu 8: Tính $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

- A. $I = \frac{13}{12}$. B. $I = \frac{1}{12}$. C. $I = \frac{11}{12}$. D. $I = \frac{25}{12}$.

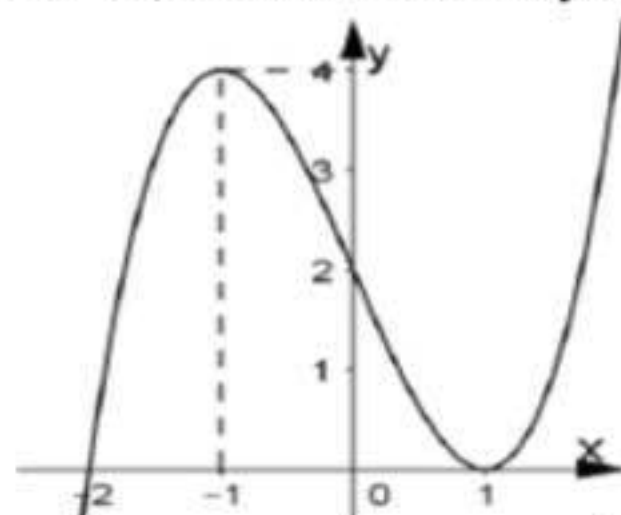
Câu 9: Cho $\int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x)dx=1, \int_1^5 \frac{f(x)}{x^2}dx=3$. Giá trị của $\int_1^5 f(x)dx$ bằng

- A. -13. B. 12. C. 16. D. -17.

Câu 10: Bất phương trình $\log_3(3x-1) < \log_3(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị ở hình dưới đây.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $0 < m < 4$. B. $-2 \leq m \leq 2$. C. $-2 < m < 2$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 12: Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên từ hộp hai thẻ. Tính xác suất để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3.

- A. $\frac{409}{1225}$. B. $\frac{681}{1225}$. C. $\frac{8}{25}$. D. $\frac{801}{1225}$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y = \log_2 \frac{2-x}{x}$ là

- A. $(0; 2)$. B. $(0; 2]$. C. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.

Câu 14: Cho $a; b$ là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4$. Tìm $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

- A. $T_{\min} = \frac{9}{2}$ B. $T_{\min} = \frac{1}{2}$ C. $T_{\min} = \frac{5}{2}$ D. $T_{\min} = \frac{3}{2}$.

Câu 15: Cho $\int f\left(\frac{x}{2}\right)dx = x^3 + 2x + C, (C \in \mathbb{R})$. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(\cos x)$ là

- A. $\int f(\cos x)dx = 3\cos 2x - 8x + C$. B. $\int f(\cos x)dx = 8\sin x + 3x + C$.
C. $\int f(\cos x)dx = 3\sin 2x - 8x + C$. D. $\int f(\cos x)dx = 3\sin 2x + 8x + C$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

- A. $m \leq -2$ hoặc $m = 1$. B. $m < -2$ hoặc $m > 1$.
C. $m < -2$. D. $m < -2$ hoặc $m = 1$.

Câu 17: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $(a-2b)^2 = 8ab$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_2(a+2b) + 2 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. B. $\log_2(a+2b) - 2 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.
C. $\log_2(a+2b) - 1 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. D. $\log_2(a+2b) + 1 = \frac{1}{2}\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 b$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K, M lần lượt là các điểm thuộc các đoạn thẳng SB, SD sao cho $\frac{SK}{SB} = \frac{2}{3}; \frac{SM}{SD} = \frac{3}{5}$. Mặt phẳng (AKM) chia khối chóp

$S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{46}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{17}{47}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{23}$.

Câu 19: Cho hình nón có bán kính đáy và chiều cao là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón đã cho và tạo với đáy của nó một góc 60° . Diện tích thiết diện của mặt phẳng (P) và hình nón đó bằng

- A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. C. $2a^2$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 20: Trong tọa độ không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; -2; 4)$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$ đi qua M và cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tứ giác $ABCM$ là hình bình hành. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $abc = -6$. B. $abc = \frac{9}{4}$. C. $abc = -\frac{9}{8}$. D. $abc = 6$.

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6\text{ cm}$, $BC = BB' = 2\text{ cm}$. Gọi E là trung điểm cạnh BC . Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC' , hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F . Độ dài đoạn thẳng $A'F$ bằng

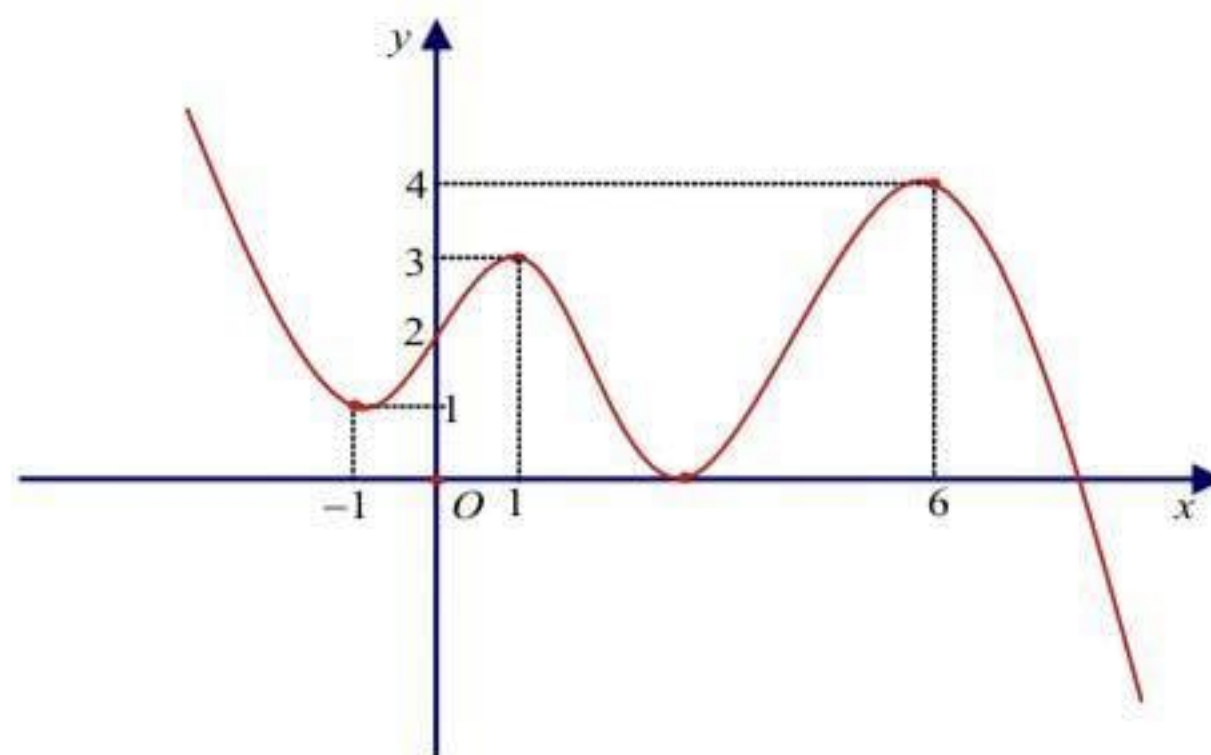
- A. $3\sqrt{5}\text{ cm}$. B. 2 cm . C. 1 cm . D. $2\sqrt{5}\text{ cm}$.

Câu 22: Có bao nhiêu cách xếp 3 nam và 6 nữ thành một hàng dọc sao cho 3 nam luôn đứng đầu?

- A. 3450. B. 4320. C. 6720. D. 432.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị của

tham số m để phương trình $\frac{4m^3 + m}{\sqrt{2f^2(x) + 5}} = f^2(x) + 3$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?



- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B . Góc giữa cạnh SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° ; $AC = 3a, BC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 25: Biết $\int_1^2 \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^2 + b^2 + ab = 7$. B. $a^2 + b^2 + ab = 8$. C. $a^2 + b^2 + ab = 10$. D. $a^2 + b^2 + ab = 6$.

Câu 26: Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 - 2mx + 3m - 2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn $-2021 \leq m \leq 2021$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

A. 2019. B. 4040. C. 2018. D. 4041.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = ax^4 + 3x^2 + bx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ tại $x = 1$?

A. 6. B. C. 5. D. 11.

Câu 28: Cộng vào số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư của một cấp số cộng tăng lần lượt các số 1; 2; 7 và 25 ta được bốn số lập thành cấp số nhân. Tìm công sai d của cấp số cộng đó.

A. $d = \frac{11}{15}$. B. $d = \frac{5}{3}$. C. $d = \frac{7}{9}$. D. $d = \frac{1}{3}$.

Câu 29: Đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 4x + 3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|\vec{2u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$. B. $|\vec{2u} + \vec{v}| = \sqrt{39}$. C. $|\vec{2u} + \vec{v}| = 7$. D. $|\vec{2u} + \vec{v}| = 4$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 2, góc giữa hai mặt phẳng ABC' và ABC bằng α với $\tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = x^3 + 2x^2 - m^2 + 2m, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(\sin x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ và

$f(0) = 1, f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $T = f(-1) + f(3)$ bằng

A. $-2 + 5 \ln 2$. B. $4 + 5 \ln 2$. C. $3 + 5 \ln 2$. D. $2 + 5 \ln 2$.

Câu 34: Cho hình trụ có tâm hai đáy là O, O' và có chiều cao $2a$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy tâm O và O' sao cho $AB = 3a$; Thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3 \sqrt{5}}{3}$. Thể tích khối trụ giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{5\pi a^3}{2}$. B. πa^3 . C. $\frac{20\pi a^3}{3}$. D. $\frac{9\pi a^3}{2}$.

Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD, BAC > 90^\circ$; tam giác BCD vuông tại $D, BC = 2a$ và $CBD = 30^\circ$. Biết bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{5a}{4}$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

$$\text{A. } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{36}.$$

$$\text{B. } V = a^3 \sqrt{3}.$$

$$\text{C. } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{D. } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

Câu 36: Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $625^{\frac{x-1}{x}} \cdot 3^x = 10125$. Khẳng định nào sau đây đúng?

$$\text{A. } S \in (5; 6).$$

$$\text{B. } S \in (0; 1).$$

$$\text{C. } S \in (2; 3).$$

$$\text{D. } S \in (3; 4).$$

Câu 37: Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O , bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ khi diện tích xung quanh của hình nón lớn nhất là

$$\text{A. } h = R.$$

$$\text{B. } h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{C. } 2R\sqrt{3}.$$

$$\text{D. } h = R\sqrt{2}.$$

Câu 38: Cho $\int_0^1 \frac{2x+1}{3-x} dx = -a + b \ln \frac{a}{c}$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}; a, c > 0$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ là

$$\text{A. } 2.$$

$$\text{B. } 12.$$

$$\text{C. } -2.$$

$$\text{D. } -6.$$

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2 \left(\frac{x^2 - mx + m^2}{x + 2m} \right) = -x^2 + (m+4)x - m^2 + 8m + 2$ có hai nghiệm phân biệt?

$$\text{A. } 14.$$

$$\text{B. } 13.$$

$$\text{C. } 19.$$

$$\text{D. } 8.$$

Câu 40: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, A'C = 3a$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$\text{A. } 2a^3.$$

$$\text{B. } 4a^3.$$

$$\text{C. } 6a^3.$$

$$\text{D. } a^3 \sqrt{5}.$$

II. PHẦN TỰ LUẬN (6,0 điểm).

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình $2 \cdot 3^{x^2-4} + 3^{x+2} = 3^{x^2+x-2} + 2$.

Câu 2. (3 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 3a$ và nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}, AD = a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB , mặt phẳng (P) đi qua DM và cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng vuông góc với DM . Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (P) và SA .

a. Tính AE .

b. Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh S .

Câu 3. (1 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \left(\cos A + \sqrt{\cos^2 A + 2} \right) \cdot \left(\cos B + \sqrt{\cos^2 B + 2} \right) \cdot \left(\cos C + \sqrt{\cos^2 C + 2} \right).$$

----- HẾT -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1 (Họ tên và ký).....

Cán bộ coi thi số 2 (Họ tên và ký).....



I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (14,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (với m là tham số) và điểm $I(2; -2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác IAB nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tích các phần tử của tập S là

- A. $\frac{14}{7}$. B. $\frac{4}{17}$. C. $\frac{20}{17}$. D. $\frac{3}{17}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. B. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. C. $2y' + xy'' = -\frac{4}{x^2}$. D. $2y' + xy'' = \frac{2}{x^2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x) + 1}$ và $f(0) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P = 2M - m$ có dạng $a\sqrt{11} - b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Giá trị của $a + b + c$ là

- A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 4. Tìm tất cả tham số m để hàm số $y = (m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-1 < m < 1$. B. $m \leq -\frac{5}{2}$. C. $-\frac{1}{4} \leq m \leq 2$. D. $-\frac{1}{4} \leq m < 2$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt cầu $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$; các điểm $A(4; 0; 0); B(\frac{1}{4}; 0; 0); C(1; 4; 0); D(4; 4; 0)$. Gọi M thay đổi trên (S_1) , N thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

- A. $\frac{5\sqrt{265}}{2}$. B. $3\sqrt{265}$. C. $\frac{7\sqrt{265}}{2}$. D. $2\sqrt{265}$.

Câu 6. Hàm số $y = -x^4 - 2(1+m)x^2 + 1$ (m là tham số) đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi

- A. $m < -1$. B. $m > 0$. C. $-1 \leq m < 0$. D. $m \geq 0$.

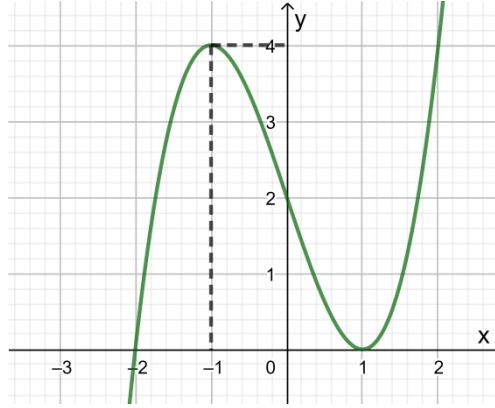
Câu 7. Cho tập hợp A gồm 6 phần tử, lấy ngẫu nhiên một tập con của A . Xác suất để chọn được tập con có đúng 3 phần tử của tập A là

- A. $\frac{5}{16}$. B. $\frac{11}{16}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{16}$.

Câu 8. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

- A. $I = \frac{13}{12}$. B. $I = \frac{1}{12}$. C. $I = \frac{11}{12}$. D. $I = \frac{25}{12}$.

- Câu 9.** Cho $\int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x)dx = 1$, $\int_1^5 \frac{f(x)}{x^2}dx = 3$. Giá trị của $\int_1^5 f(x)dx$ bằng
- A. -13. B. 12. C. 16. D. -17.
- Câu 10.** Bất phương trình $\log_3(3x-1) < \log_3(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị ở hình dưới đây.



- Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.
- A. $0 < m < 4$. B. $-2 \leq m \leq 2$. C. $-2 < m < 2$. D. $-1 < m < 1$.
- Câu 12.** Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên từ một hộp hai thẻ. Tính xác suất để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3.
- A. $\frac{409}{1225}$. B. $\frac{681}{1225}$. C. $\frac{8}{25}$. D. $\frac{801}{1225}$.
- Câu 13.** Tập xác định của hàm số $y = \log_2 \frac{2-x}{x}$ là
- A. $(0; 2)$. B. $(0; 2]$. C. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.
- Câu 14.** Cho $a; b$ là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \frac{4a+2b+5}{a+b} = a+3b-4$. Tìm $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$.
- A. $T_{\min} = \frac{9}{2}$. B. $T_{\min} = \frac{1}{2}$. C. $T_{\min} = \frac{5}{2}$. D. $T_{\min} = \frac{3}{2}$.
- Câu 15.** Cho $\int f\left(\frac{x}{2}\right)dx = x^3 + 2x + C$, $(C \in \mathbb{R})$. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(\cos x)$ là
- A. $\int f(\cos x)dx = 3\cos 2x - 8x + C$. B. $\int f(\cos x)dx = 8\sin x + 3x + C$.
C. $\int f(\cos x)dx = 3\sin 2x - 8x + C$. D. $\int f(\cos x)dx = 3\sin 2x + 8x + C$.
- Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m\log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$
- A. $m \leq 2$ hoặc $m = 1$. B. $m < -2$ hoặc $m > 1$. C. $m < -2$. D. $m < -2$ hoặc $m = 1$.
- Câu 17.** Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $(a-2b)^2 = 8ab$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $\log_2(a+2b) + 2 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. B. $\log_2(a+2b) - 2 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

C. $\log_2(a+2b)-1=\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$. D. $\log_2(a+2b)+1=\frac{1}{2}\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 b$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K, M lần lượt là các điểm thuộc các đoạn SB, SD sao cho $\frac{SK}{SB}=\frac{2}{3}; \frac{SM}{SD}=\frac{3}{5}$. Mặt phẳng (AKM) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa điểm S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{46}$. B. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{11}$. C. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{17}{47}$. D. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{23}$.

Câu 19. Cho hình nón có bán kính đáy và chiều cao là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón đã cho và tạo với đáy của nó một góc 60° . Diện tích thiết diện của mặt phẳng (P) và hình nón bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. C. $2a^2$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-2;4)$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+3=0$ đi qua M và cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tứ giác $ABCM$ là hình bình hành. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $abc=-6$. B. $abc=\frac{9}{4}$. C. $abc=-\frac{9}{8}$. D. $abc=6$.

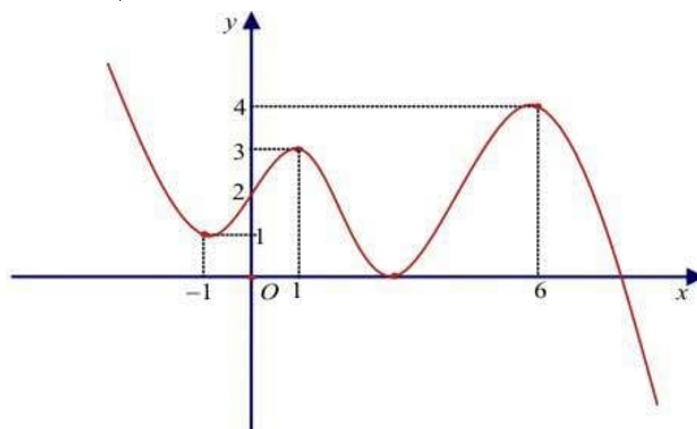
Câu 21. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=6\text{ cm}, BC=BB'=2\text{ cm}$. Gọi E là trung điểm cạnh BC . Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC' , hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại F . Độ dài đoạn thẳng $A'F$ bằng

A. $3\sqrt{5}\text{ cm}$. B. 2 cm . C. 1 cm . D. $2\sqrt{5}\text{ cm}$.

Câu 22. Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 học sinh nam và 6 học sinh nữ thành một hàng dọc sao cho 3 học sinh nam luôn đứng đầu?

A. 3450. B. 4320. C. 6720. D. 432.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\frac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?



- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B . Góc giữa cạnh SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° ; $AC = 3a$, $BC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 25. Biết $\int_1^2 \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a^2 + b^2 + ab = 7$. B. $a^2 + b^2 + ab = 8$. C. $a^2 + b^2 + ab = 10$. D. $a^2 + b^2 + ab = 6$.

Câu 26. Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 - 2mx + 3m - 2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn $-2021 \leq m \leq 2021$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

- A. 2019. B. 4040. C. 2018. D. 4041.

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = ax^4 + 3x^2 + bx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ tại $x = 1$?

- A. 6. B. . C. 5. D. 11.

Câu 28. Cộng vào số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư của một cấp số cộng tăng lần lượt các số 1; 2; 7 và 25 ta được bốn số lập thành cấp số nhân. Tìm công sai d của cấp số nhân đó.

- A. $d = \frac{11}{15}$. B. $d = \frac{5}{3}$. C. $d = \frac{7}{9}$. D. $d = \frac{1}{3}$.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 4x + 3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|2\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$. B. $|2\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{39}$. C. $|2\vec{u} + \vec{v}| = 7$. D. $|2\vec{u} + \vec{v}| = 4$.

Câu 31. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 2, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng α với $\tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = x^3 + 2x^2 - m^2 + 2m, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(\sin x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ và $f(0) = 1, f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $T = f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $-2+5\ln 2$. B. $4+5\ln 2$. C. $3+5\ln 2$. D. $2+5\ln 2$.

Câu 34. Cho hình trụ có tâm đáy là O, O' và có chiều cao $2a$. Gọi hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy tâm O, O' sao cho $AB = 3a$; thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. Thể tích khối trụ giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng:

- A. $\frac{5\pi a^3}{2}$. B. πa^3 . C. $\frac{20\pi a^3}{3}$. D. $\frac{9\pi a^3}{2}$.

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} < 90^\circ$, tam giác BCD vuông tại D , $BC = 2a$ và $\widehat{CBD} = 30^\circ$. Biết bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{5a}{4}$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 36. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $625^{\frac{x-1}{x}} \cdot 3^x = 10125$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S \in (5; 6)$. B. $S \in (0; 1)$. C. $S \in (2; 3)$. D. $S \in (3; 4)$.

Câu 37. Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O , bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ khi diện tích xung quanh của hình nón lớn nhất là

- A. $h = R$. B. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. C. $h = 2R\sqrt{3}$. D. $h = R\sqrt{2}$.

Câu 38. Cho $\int_0^1 \frac{2x+1}{3-x} dx = -a + b \ln \frac{a}{c}$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}; a, c > 0$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ là

- A. 2. B. 12. C. -2. D. -6.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2 \left(\frac{x^2 - mx + m^2}{x + 2m} \right) = -x^2 + (m+4)x - m^2 + 8m + 2$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 14. B. 13. C. 19. D. 8.

Câu 40. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$; $AD = 2a$; $A'C = 3a$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là:

- A. $2a^3$. B. $4a^3$. C. $6a^3$. D. $\sqrt{5}a^3$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (6,0 điểm)

Câu 1. Giải phương trình $2 \cdot 3^{x^2-4} + 3^{x+2} = 3^{x^2+x-2} + 2$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 3a$ và nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = \sqrt{2}a, AD = a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB , mặt phẳng (P) đi qua DM và cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng vuông góc với DM . Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (P) và SA .

a) Tính AE .

b) Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh S .

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \left(\cos A + \sqrt{\cos^2 A + 2} \right) \cdot \left(\cos B + \sqrt{\cos^2 B + 2} \right) \cdot \left(\cos C + \sqrt{\cos^2 C + 2} \right).$$

---HẾT---



BẢNG ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	D	D	A	A	B	A	B	C	B	A	C	D	A	B	A	D	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	B	A	C	A	D	D	C	A	D	B	D	C	D	C	C	B	C	B	B

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (14,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (với m là tham số) và điểm $I(2; -2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác IAB nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tích các phần tử của tập S là

A. $\frac{14}{7}$.

B. $\frac{4}{17}$.

C. $\frac{20}{17}$.

D. $\frac{3}{17}$.

Lời giải

Chọn D

*TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$.

Khi đó, ta có: $A(m + 1; -4m - 2); B(m - 1; -4m + 2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} = 2R$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI).

Vậy tam giác ABI vuông tại I . Ta có:

$\overrightarrow{IA} = (m - 1; -4m), \overrightarrow{IB} = (m - 3; -4m + 4);$

$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{17} \end{cases}$.

Vậy tích các phần tử của tập S là: $1 \cdot \frac{3}{17} = \frac{3}{17}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$.

B. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

C. $2y' + xy'' = -\frac{4}{x^2}$.

D. $2y' + xy'' = \frac{2}{x^2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow y' \cdot x^2 = 1 - \ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế ta có $y'' \cdot x^2 + 2x \cdot y' = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow 2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P = 2M - m$ có dạng $a\sqrt{11} - b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Giá trị của $a + b + c$ là

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x) \cdot f'(x) &= 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int 2x dx \\ \Rightarrow \int d\left[\sqrt{f^2(x)+1}\right] &= \int 2x dx \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + C. \end{aligned}$$

Với $x = 0$ ta có $C = 1$, từ đó suy ra $\sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + 1 \Rightarrow f^2(x) = (x^2 + 1)^2 - 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}$.

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) \cdot 2x}{2\sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}} = \frac{2x(x^2 + 1)}{\sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}} > 0, \forall x \in [1;3].$$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên $[1;3]$.

$$\text{Suy ra } \min_{[1;3]} f(x) = f(1) = \sqrt{3}, \max_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3\sqrt{11}.$$

$$P = 2M - m = 6\sqrt{11} - \sqrt{3}, a + b + c = 6 + 1 + 0 = 7.$$

Câu 4. Tìm tất cả tham số m để hàm số $y = (m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-1 < m < 1$.

B. $m \leq -\frac{5}{2}$.

C. $-\frac{1}{4} \leq m \leq 2$.

D. $-\frac{1}{4} \leq m < 2$.

Lời giải

Chọn D

+ Với $m = -1$, hàm số trở thành $y = 3x^2 + x - 1$ là hàm số bậc hai nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m \neq -1$, đạo hàm $y' = 3(m+1)x^2 - 2(2m-1)x + 1$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m+1) > 0 \\ (2m-1)^2 - 3(m+1) \cdot 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 4m^2 - 7m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -\frac{1}{4} \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq 2.$$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt cầu $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$; các điểm $A(4;0;0); B\left(\frac{1}{4};0;0\right); C(1;4;0); D(4;4;0)$. Gọi M thay đổi trên (S_1) , N thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

A. $\frac{5\sqrt{265}}{2}$.

B. $3\sqrt{265}$.

C. $\frac{7\sqrt{265}}{2}$.

D. $2\sqrt{265}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1 = 1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I(0;4;0)$, bán kính $R_2 = 2$.

Ta có các điểm A, B, C, D, I đều thuộc mặt phẳng (Oxy) .

+) Ta có $\frac{OB}{OM} = \frac{1}{4}; \frac{OM}{OA} = \frac{1}{4}$; xét điểm $M \in (S_1)$, nằm trong mặt phẳng (Oxy) .

Khi đó ta có $\triangle OBM \sim \triangle OMA \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{1}{4} \Rightarrow MA = 4MB$.

+) Ta có $\frac{IC}{IN} = \frac{1}{2}; \frac{IN}{ID} = \frac{1}{2}$; xét điểm $N \in (S_2)$, nằm trong mặt phẳng (Oxy) .

Khi đó ta có $\triangle ICN \sim \triangle IND \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{1}{2} \Rightarrow ND = 2NC$.

Ta có $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC = 4BM + 4NC + 4MN + 4BC$
 $= 4(BM + MN + NC) + 4BC \geq 4BC + 4BC = 8BC = 2\sqrt{265}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng $2\sqrt{265}$, khi B, M, N, C thẳng hàng.

Câu 6. Hàm số $y = -x^4 - 2(1+m)x^2 + 1$ (m là tham số) đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi

A. $m < -1$.

B. $m > 0$.

C. $-1 \leq m < 0$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn A

+) TH1: $(-1)(-2-2m) \geq 0$ hàm số có 1 điểm cực trị và đó là điểm cực đại, nên trường hợp này không có giá trị nào của m thỏa mãn.

+) TH2: $(-1)(-2-2m) < 0 \Leftrightarrow m < -1$ hàm số có 3 điểm cực trị trong đó có 2 điểm cực đại trái dấu và 1 điểm cực tiểu là $x = 0$.

Vậy $m < -1$.

Câu 7. Cho tập hợp A gồm 6 phần tử, lấy ngẫu nhiên một tập con của A . Xác suất để chọn được tập con có đúng 3 phần tử của tập A là

A. $\frac{5}{16}$.

B. $\frac{11}{16}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là $2^6 = 64$.

Số cách chọn tập con có đúng 3 phần tử của tập A là $C_6^3 = 20$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

Câu 8. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

A. $I = \frac{13}{12}$.

B. $I = \frac{1}{12}$.

C. $I = \frac{11}{12}$.

D. $I = \frac{25}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^3 - (8-x)}{x \left[2^2 + 2\sqrt[3]{8-x} + (\sqrt[3]{8-x})^2 \right]}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \left[4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \left(\sqrt[3]{8-x} \right)^2 \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left[4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \left(\sqrt[3]{8-x} \right)^2 \right]} = \frac{1}{12}.$$

Câu 9. Cho $\int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x)dx = 1$, $\int_1^5 \frac{f(x)}{x^2}dx = 3$. Giá trị của $\int_1^5 f(x)dx$ bằng

A. -13.

B. 12.

C. 16.

D. -17.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x)dx$. Đặt $t = \sqrt{x^2+5}-x \Leftrightarrow t+x = \sqrt{x^2+5}$

$$\Leftrightarrow (t+x)^2 = x^2+5$$

$$\Leftrightarrow x^2+2tx+t^2 = x^2+5.$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2t} - \frac{t}{2} \Rightarrow dx = -\left(\frac{5}{2t^2} + \frac{1}{2}\right)dt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = -2 \Rightarrow t = 5 \\ x = 2 \Rightarrow t = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_5^1 \left(\frac{5}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) f(t) dt = \int_1^5 \left(\frac{5}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) f(t) dt = \frac{5}{2} \int_1^5 \frac{f(t)}{t^2} dt + \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) dt.$$

$$\text{Suy ra } 1 = \frac{5}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) dt \Leftrightarrow \int_1^5 f(t) dt = -13.$$

Câu 10. Bất phương trình $\log_3(3x-1) < \log_3(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

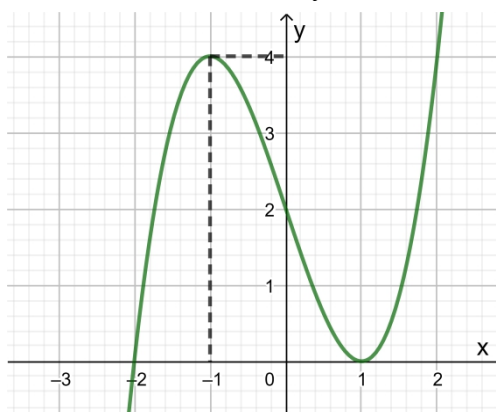
Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_3(3x-1) < \log_3(x+7) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ x+7 > 0 \\ 3x-1 < x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -7 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 4.$$

Bất phương trình có các nghiệm nguyên là 1; 2; 3.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị ở hình dưới đây.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $0 < m < 4$.

B. $-2 \leq m \leq 2$.

C. $-2 < m < 2$.

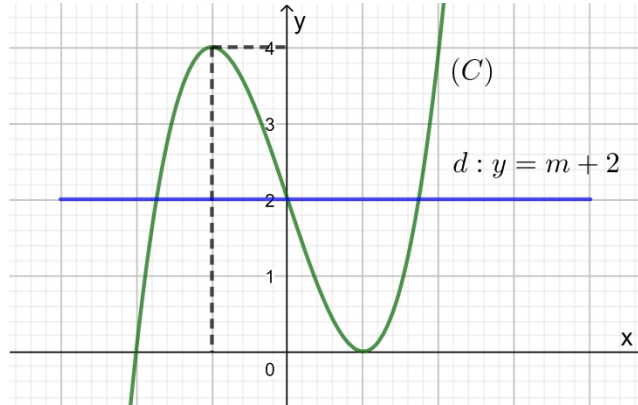
D. $-1 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^3 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = m + 2$ (1).

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường thẳng $d: y = m + 2$ và đồ thị $(C): y = x^3 - 3x + 2$.



Từ đồ thị ta thấy để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt thì

$$0 < m + 2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Câu 12. Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên từ một hộp hai thẻ. Tính xác suất để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3.

A. $\frac{409}{1225}$.

B. $\frac{681}{1225}$.

C. $\frac{8}{25}$.

D. $\frac{801}{1225}$.

Lời giải

Chọn B

Mỗi lần lấy ra hai thẻ từ hộp có 50 cái thẻ là một tổ hợp chập 2 của 50.

Số cách lấy bằng C_{50}^2 .

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{50}^2 = 1225$.

Trong 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50 có 16 cái thẻ đánh số chia hết cho 3, 17 cái thẻ đánh số chia cho 3 dư 1 và 17 cái thẻ đánh số chia cho 3 dư 2.

Để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3 xảy ra 4 trường hợp:

TH1: Hai thẻ có số chia hết cho 3 có C_{16}^2 .

TH2: Hai thẻ có số chia cho 3 dư 1 có C_{17}^2 .

TH3: Hai thẻ có số chia cho 3 dư 2 có C_{17}^2 .

TH4: Có 1 thẻ có số chia cho 3 dư 1 và một thẻ có số chia cho 3 dư 2 có $C_{17}^1 \cdot C_{17}^1$.

Vậy số cách lấy ra hai thẻ thỏa mãn là $C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^1 \cdot C_{17}^1 = 681$.

Xác suất để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3 là $p = \frac{681}{1225}$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \log_2 \frac{2-x}{x}$ là

A. $(0; 2)$.

B. $(0; 2]$.

C. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

D. $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\frac{2-x}{x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

Câu 14. Cho $a; b$ là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \frac{4a+2b+5}{a+b} = a+3b-4$. Tìm $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

A. $T_{\min} = \frac{9}{2}$.

B. $T_{\min} = \frac{1}{2}$.

C. $T_{\min} = \frac{5}{2}$.

D. $T_{\min} = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_5 \frac{4a+2b+5}{a+b} = a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5 (4a+2b+5) - \log_5 (a+b) = a+3b-4$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (4a+2b+5) + (4a+2b+5) = \log_5 (a+b) + 5a+5b+1$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (4a+2b+5) + (4a+2b+5) = \log_5 (5a+5b) + (5a+5b) \quad (*)$$

Đặt $f(t) = \log_5(t) + t$ với $t \in (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0 \quad \forall t \in (0; +\infty) \text{ nên hàm số đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$(*) \text{ ta có: } 4a+2b+5 = 5a+5b \Leftrightarrow a+3b=5$$

$$\text{Áp dụng BĐT Bunhiacopxky: } (a+3b)^2 \leq (1^2+3^2)(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 25 \leq 10T \Leftrightarrow T \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } T_{\min} = \frac{5}{2}.$$

Câu 15. Cho $\int f\left(\frac{x}{2}\right) dx = x^3 + 2x + C, (C \in \mathbb{R})$. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(\cos x)$ là

A. $\int f(\cos x) dx = 3 \cos 2x - 8x + C.$

B. $\int f(\cos x) dx = 8 \sin x + 3x + C.$

C. $\int f(\cos x) dx = 3 \sin 2x - 8x + C.$

D. $\int f(\cos x) dx = 3 \sin 2x + 8x + C.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Theo giả thiết } \int f\left(\frac{x}{2}\right) dx = x^3 + 2x + C \Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = 3x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot (2x)^2 + 2 = 12x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f(\cos x) = 12 \cos^2 x + 2 = 6 \cos 2x + 8$$

$$\Rightarrow \int f(\cos x) dx = \int (6 \cos 2x + 8) dx = 3 \sin 2x + 8x + C$$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$

A. $m \leq 2$ hoặc $m = 1.$

B. $m < -2$ hoặc $m > 1.$

C. $m < -2.$

D. $m < -2$ hoặc $m = 1.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \log_2 x \neq m+1 \\ x > 0 \end{cases}$

Vì $x \in (4; +\infty)$ nên $\log_2 x \in (2; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{-m^2 - m + 2}{(\log_2 x - m - 1)^2} \cdot \frac{1}{x \ln 2}$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - m + 2 < 0 \\ m + 1 \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2)$

Câu 17. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $(a - 2b)^2 = 8ab$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2(a + 2b) + 2 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

B. $\log_2(a + 2b) - 2 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

C. $\log_2(a + 2b) - 1 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

D. $\log_2(a + 2b) + 1 = \frac{1}{2}\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(a - 2b)^2 = 8ab \Leftrightarrow (a + 2b)^2 = 16ab$.

Do đó $\log_2(a + 2b)^2 = \log_2 16ab \Leftrightarrow 2\log_2(a + 2b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$

$\Leftrightarrow \log_2(a + 2b) - 2 = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K, M lần lượt là các điểm thuộc các đoạn SB, SD sao cho $\frac{SK}{SB} = \frac{2}{3}; \frac{SM}{SD} = \frac{3}{5}$. Mặt phẳng (AKM) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa điểm S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{46}$.

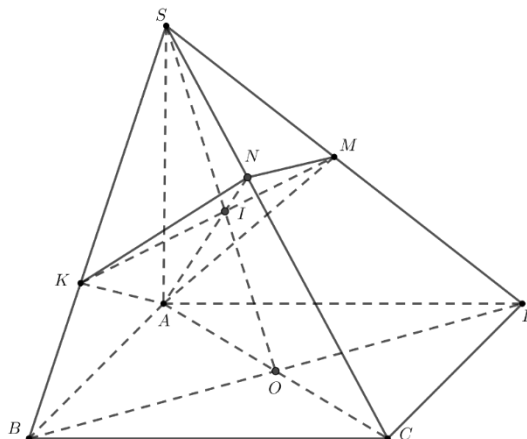
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{17}{47}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{23}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao của AC và BD .

Trong (SBD) gọi I là giao của SO và KM .

Trong (SAC) gọi N là giao của SC và AI .

$$\text{Do } \frac{S_{\Delta SKM}}{S_{\Delta SBD}} = \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SM}{SD} \Leftrightarrow \frac{S_{\Delta SKI} + S_{\Delta SMI}}{2S_{\Delta SBO}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SI}{SO} \cdot \frac{SM}{SD} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{12}{19}.$$

$$\text{Trong tam giác } SOC \text{ ta có } \frac{AO}{AC} \cdot \frac{CN}{SN} \cdot \frac{SI}{IO} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{CN}{SN} \cdot \frac{12}{7} = 1 \Leftrightarrow \frac{CN}{SN} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{6}{13}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AKN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}, \quad \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SC}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.AKN}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} + \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{38}{65} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_{S.ABCD}} = \frac{19}{65} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{46}.$$

Câu 19. Cho hình nón có bán kính đáy và chiều cao là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón đã cho và tạo với đáy của nó một góc 60° . Diện tích thiết diện của mặt phẳng (P) và hình nón bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

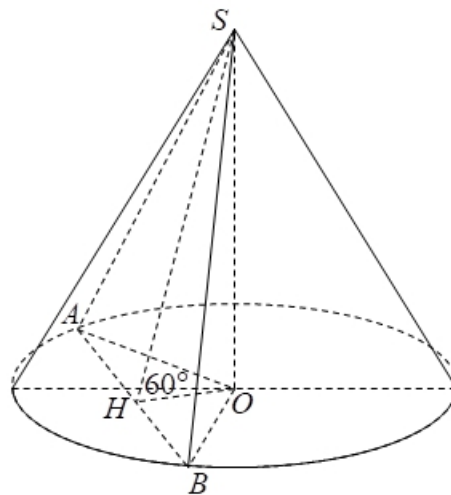
B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

C. $2a^2$.

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình tròn đáy, mặt phẳng (P) cắt đáy theo dây cung AB . Gọi H là trung điểm của AB , suy ra: $\widehat{SHO} = 60^\circ$, $OA = OB = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} S_{\Delta SAB} &= \frac{1}{2} AB \cdot SH = HB \cdot SH = \sqrt{OB^2 - OH^2} \cdot SH = \sqrt{OB^2 - \left(\frac{OS}{\tan 60^\circ}\right)^2} \cdot \frac{OS}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{OS^2}{\sin 60^\circ} \sqrt{1 - \frac{1}{\tan^2 60^\circ}} = \frac{2a^2}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -2; 4)$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$ đi qua M và cắt ba trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho tứ giác $ABCM$ là hình bình hành. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $abc = -6$.

B. $abc = \frac{9}{4}$.

C. $abc = -\frac{9}{8}$.

D. $abc = 6$.

Lời giải

Chọn C

Vì A, B, C lần lượt là giao của (P) với ba trục Ox, Oy, Oz nên có tọa độ:

$$A\left(-\frac{3}{a}; 0; 0\right), B\left(0; -\frac{3}{b}; 0\right) \text{ và } C\left(0; 0; -\frac{3}{c}\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB}\left(\frac{3}{a}; -\frac{3}{b}; 0\right), \overrightarrow{MC}\left(-3; 2; -\frac{3}{c}-4\right)$$

$$\text{Để } ABCM \text{ là hình bình hành thì } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{a} = -3 \\ -\frac{3}{b} = 2 \\ 0 = -\frac{3}{c} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

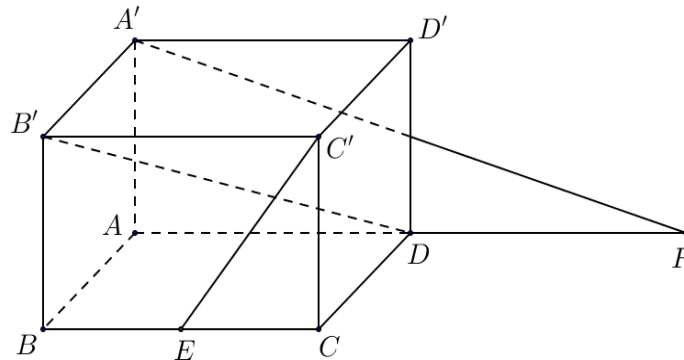
$$\text{Vậy } abc = -\frac{9}{8}.$$

Câu 21. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6\text{ cm}$, $BC = BB' = 2\text{ cm}$. Gọi E là trung điểm cạnh BC . Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC' , hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại F . Độ dài đoạn thẳng $A'F$ bằng

- A. $3\sqrt{5}\text{ cm}$. B. 2 cm . C. 1 cm . **D. $2\sqrt{5}\text{ cm}$.**

Lời giải

Chọn D



Do tứ diện $MNPQ$ là tứ diện đều nên $MN \perp PQ$. Suy ra $EC' \perp B'F$.

Ta có: $\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{B'C'}$ (với $k \in \mathbb{R}$).

$$\text{Mà } \overrightarrow{EC'} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'B}.$$

$$\text{Do đó ta có: } \overrightarrow{EC'} \cdot \overrightarrow{B'F} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'B}\right) \cdot (\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{B'C'}) = \frac{k}{2}B'C'^2 - B'B^2 = \frac{k}{2} \cdot 4 - 4 = 0$$

$\Rightarrow k = 2$. Suy ra $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$, tức là D là trung điểm của đoạn thẳng AF .

$$\text{Vậy } A'F = \sqrt{AA'^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}(\text{cm}).$$

Câu 22. Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 học sinh nam và 6 học sinh nữ thành một hàng dọc sao cho 3 học sinh nam luôn đứng đầu?

- A. 3450. **B. 4320.** C. 6720. D. 432.

Lời giải

Chọn B

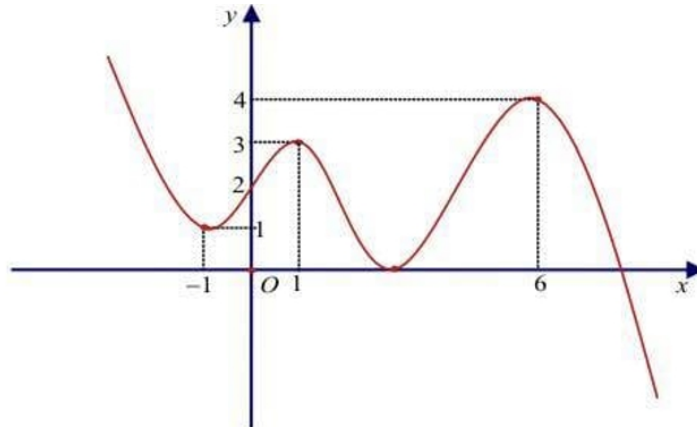
Số cách sắp xếp học sinh nam, có $3! = 6$ (cách).

Số cách sắp xếp học sinh nữ, có $6! = 720$ (cách).

Vậy có $6.720 = 4320$ cách xếp sao cho 3 học sinh nam luôn đứng đầu.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị của

tham số m để phương trình $\frac{4m^3 + m}{\sqrt{2f^2(x) + 5}} = f^2(x) + 3$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?



A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{4m^3 + m}{\sqrt{2f^2(x) + 5}} = f^2(x) + 3 \Leftrightarrow 4m^3 + m = [f^2(x) + 3] \cdot \sqrt{2f^2(x) + 5}$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 + 2m = 2[f^2(x) + 3] \cdot \sqrt{2f^2(x) + 5} \Leftrightarrow 8m^3 + 2m = [2f^2(x) + 5 + 1] \cdot \sqrt{2f^2(x) + 5}$$

$$\Leftrightarrow (2m)^3 + 2m = (\sqrt{2f^2(x) + 5})^3 + \sqrt{2f^2(x) + 5} \quad (*)$$

Xét hàm số $h(t) = t^3 + t$ có $h'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t$ nên hàm số $h(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow h(2m) = h(\sqrt{2f^2(x) + 5}) \Leftrightarrow 2m = \sqrt{2f^2(x) + 5}.$$

Suy

ra

$$2m = \sqrt{2f^2(x) + 5} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m^2 = 2f^2(x) + 5 \\ f^2(x) = 2m^2 - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2m^2 - \frac{5}{2} \geq 0 \\ f(x) = \sqrt{2m^2 - \frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \\ f(x) = \sqrt{2m^2 - \frac{5}{2}} \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ

$$\text{khi } \begin{cases} 0 < \sqrt{2m^2 - \frac{5}{2}} < 1 \\ 3 < \sqrt{2m^2 - \frac{5}{2}} < 4 \\ m \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2m^2 - \frac{5}{2} < 1 \\ 9 < 2m^2 - \frac{5}{2} < 16 \\ m \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4} < m^2 < \frac{7}{4} \\ \frac{23}{4} < m^2 < \frac{37}{4} \\ m \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{2} < m < \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \frac{\sqrt{23}}{2} < m < \frac{\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

Do m nguyên nên có duy nhất 1 giá trị của tham số m thỏa mãn.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B . Góc giữa cạnh SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° ; $AC = 3a$, $BC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $a^3\sqrt{3}$.

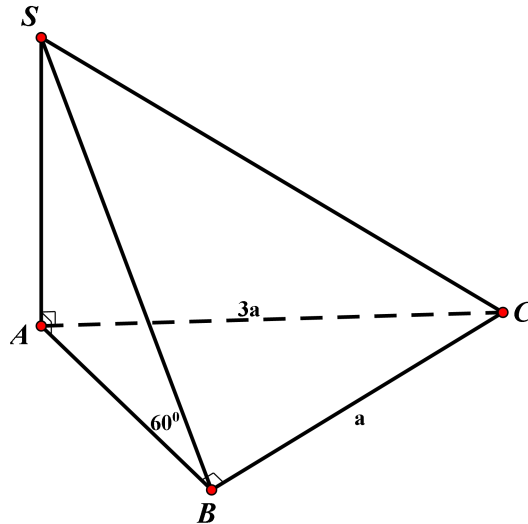
B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có tam giác ABC vuông tại B và $AC = 3a$, $BC = a$ nên $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = a^2\sqrt{2}$.

Lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Suy ra $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = 2a\sqrt{2} \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{6}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{6} \cdot a^2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 25. Biết $\int_1^2 \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx = \ln(\ln a + b)$ với a , b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^2 + b^2 + ab = 7$.

B. $a^2 + b^2 + ab = 8$.

C. $a^2 + b^2 + ab = 10$.

D. $a^2 + b^2 + ab = 6$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^2 \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx &= \int_1^2 \frac{1}{\ln x + 1} (\ln x + 1)' dx = \int_1^2 \frac{1}{\ln x + 1} d(\ln x + 1) \\ &= \ln |\ln x + 1| \Big|_1^2 = \ln |\ln 2 + 1| - \ln |\ln 1 + 1| = \ln (\ln 2 + 1). \end{aligned}$$

Do đó $a = 2$; $b = 1$. Vậy $a^2 + b^2 + ab = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 = 7$.

Câu 26. Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 - 2mx + 3m - 2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn $-2021 \leq m \leq 2021$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

A. 2019. B. 4040. C. 2018. **D. 4041.**

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$$(x-1)(x^2 - 2mx + 3m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 2m \cdot 1 + 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$$

$$\text{Do } -2021 \leq m \leq 2021 \text{ nên } \begin{cases} -2021 \leq m < 1 \\ 2 < m \leq 2021 \end{cases}$$

Vậy có 4041 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn.

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = ax^4 + 3x^2 + bx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ tại $x = 1$?

A. 6. B. 5. C. 5. **D. 11.**

Lời giải

Chọn D

Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ tại $x = 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, nghĩa

$$\text{là: } \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \text{ và } y(x) \geq y(1) \quad \forall x \in [0; 4].$$

$$\text{Ta có: } y = 4ax^3 + 6x + b; y' = 12ax^2 + 6.$$

$$+ \begin{cases} y'(1) = 0 & | 4a + 6 + b = 0 & | b = -4a - 6 \\ y''(1) > 0 & | 12a + 6 > 0 & | a > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ y(x) \geq y(1) \quad \forall x \in [0; 4]$$

$$\Leftrightarrow ax^4 + 3x^2 + bx \geq a + 3 + b \quad (*) \quad \forall x \in [0; 4], \text{ thay } b = -4a - 6 \text{ vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$(*) \Leftrightarrow ax^4 + 3x^2 + (-4a - 6)x \geq a + 3 - 4a - 6 \quad \forall x \in [0; 4]$$

$$\Leftrightarrow a(x^4 - 4x + 3) \geq -3x^2 + 6x - 3 \quad \forall x \in [0; 4]$$

$$\Leftrightarrow a(x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \geq -3(x-1)^2 \quad \forall x \in [0; 4]$$

$$a \geq \frac{-3}{x^2 + 2x + 3} \quad \forall x \in [0; 4];$$

$$a \max_{x \in [0;4]} g(x); \text{ với } g(x) = \frac{-3}{x^2 + 2x + 3}.$$

Ta có $g'(x) = \frac{3(2x+2)}{(x^2 + 2x + 3)^2} > 0 \forall x \in [0;4]$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[0;4]$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0;4]} g(x) = g(4) = \frac{-3}{16 + 8 + 3} = -\frac{1}{9}.$$

Suy ra $a \geq -\frac{1}{9}$, mà a nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ nên có 11 giá trị của a .

Câu 28. Cộng vào số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư của một cấp số cộng tăng lần lượt các số 1; 2; 7 và 25 ta được bốn số lập thành cấp số nhân. Tìm công sai d của cấp số nhân đó.

A. $d = \frac{11}{15}$.

B. $d = \frac{5}{3}$.

C. $d = \frac{7}{9}$.

D. $d = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử cấp số cộng có số hạng đầu u_1 . Vì cấp số cộng tăng nên $d > 0$.

Khi đó, 4 số hạng của cấp số cộng lần lượt là : $u_1; u_1 + d; u_1 + 2d; u_1 + 3d$.

Cấp số nhân mới là: $u_1 + 1; u_1 + d + 2; u_1 + 2d + 7; u_1 + 3d + 25$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

$$\begin{cases} (u_1 + 1)(u_1 + 2d + 7) = (u_1 + d + 2)^2 \\ (u_1 + d + 2)(u_1 + 3d + 25) = (u_1 + 2d + 7)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 + (2d + 8)u_1 + 2d + 7 = u_1^2 + 2(d + 2)u_1 + (d + 2)^2 \\ u_1^2 + (4d + 27)u_1 + (d + 2)(3d + 25) = u_1^2 + 2(2d + 7)u_1 + (2d + 7)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 = d^2 + 2d - 3 \\ 13u_1 = d^2 - 3d - 1 \end{cases}$$

Suy ra:

$$13(d^2 + 2d - 3) = 4(d^2 - 3d - 1)$$

$$\Leftrightarrow 9d^2 + 38d - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{7}{9} \text{ (TM)} \\ d = -5 \text{ (L)} \end{cases}$$

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 4x + 3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang ?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Rightarrow \text{đồ thị hàm số có tiệm cận ngang } y = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 4x + 3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|2\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$. B. $|2\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{39}$. C. $|2\vec{u} + \vec{v}| = 7$. **D. $|2\vec{u} + \vec{v}| = 4$.**

Lời giải

Chọn D

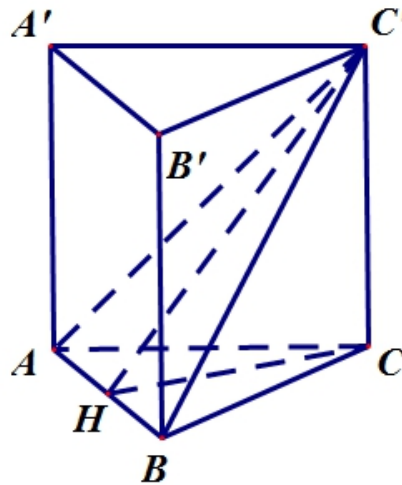
$$\begin{aligned} (2\vec{u} + \vec{v})^2 &= (2\vec{u})^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{v})^2 = 4|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 4|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 16 + 16 + 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 16 \Rightarrow |2\vec{u} + \vec{v}| = 4. \end{aligned}$$

Câu 31. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 2, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng α với $\tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.** C. $\sqrt{6}$. D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB .

Đặt $AA' = x$, ta có $AC' = BC' = \sqrt{a^2 + x^2}$ nên $C'H \perp AB$

Lại có $CH \perp AB$, suy ra $((ABC'), (ABC)) = \widehat{CHC'}$.

Trong $\triangle CHC'$ vuông ở C , ta có $CC' = CH \cdot \tan \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = x^3 + 2x^2 - m^2 + 2m, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(\sin x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

- A. 1. B. 4. C. 2. **D. 3.**

Lời giải

Chọn D

Trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ hàm số $y = \sin x$ nghịch biến và $\sin x \in (0; 1)$.

Hàm số $y = f(\sin x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ khi hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$

$$\Leftrightarrow f'(t) = t^3 + 2t^2 - m^2 + 2m \geq 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow m^2 - 2m \leq t^3 + 2t^2, \forall t \in (0; 1) (*)$$

$$g(t) = t^3 + 2t^2 \Rightarrow g'(t) = 3t^2 + 4t \geq 0, \forall t \in (0; 1)$$

Suy ra trên $(0; 1)$ hàm số $y = g(t)$ đồng biến, do đó $(*) \Leftrightarrow m^2 - 2m \leq g(0) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ và

$f(0) = 1, f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $T = f(-1) + f(3)$ bằng

A. $-2 + 5 \ln 2$.

B. $4 + 5 \ln 2$.

C. $3 + 5 \ln 2$.

D. $2 + 5 \ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \int \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| + C$.

Suy ra $f(x) = \begin{cases} \ln(3x-1) + C_1, & \text{khi } x > \frac{1}{3} \\ \ln(1-3x) + C_2, & \text{khi } x < \frac{1}{3} \end{cases}$. Lại có $f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$.

Do đó: $T = f(-1) + f(3) = (\ln 4 + 1) + (\ln 8 + 2) = 3 + 5 \ln 2$.

Câu 34. Cho hình trụ có tâm đáy là O, O' và có chiều cao $2a$. Gọi hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy tâm O, O' sao cho $AB = 3a$; thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3 \sqrt{5}}{3}$. Thể tích khối trụ giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng:

A. $\frac{5\pi a^3}{2}$.

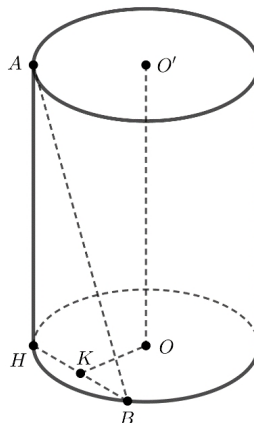
B. πa^3 .

C. $\frac{20\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{9\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ đường sinh AH (hình vẽ). Ta có: $\triangle ABH$ vuông tại $H \Rightarrow HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = a\sqrt{5}$
Gọi K là trung điểm của $BH \Rightarrow OK \perp HB$.

Mặt khác, $AH \parallel OO' \Rightarrow OO' \parallel (ABH) \Rightarrow V_{OO'AB} = V_{AHOB} = \frac{1}{3}AH.S_{OHB}$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle OHB} = \frac{3V_{OO'AB}}{AH} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{5}}{3}}{2a} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Lại có: } S_{\triangle OHB} = \frac{1}{2}OK.HB \Rightarrow OK = \frac{2S_{\triangle OHB}}{HB} = a \text{ suy ra } R = OH = \sqrt{\frac{HB^2}{4} + OK^2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Vậy: } V_{tru} = \pi R^2 h = \pi \frac{9}{4} a^2 \cdot 2a = \frac{9\pi a^3}{2}.$$

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} < 90^\circ$, tam giác BCD vuông tại D , $BC = 2a$ và $\widehat{CBD} = 30^\circ$. Biết bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{5a}{4}$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

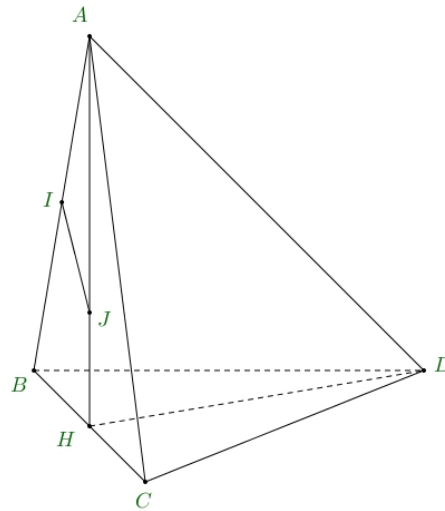
B. $V = a^3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow SH \perp (BCD)$

Gọi I là trung điểm của AB , ta kẻ đường trung trực đoạn AB cắt SH tại J , ta có

$$\begin{cases} JA = JB \\ JB = ID = JC \end{cases} \text{ suy ra } J \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } ABCD \text{ và } JA = \frac{5a}{4}$$

Xét tam giác BCD vuông tại D : $DC = BC \cdot \sin 30^\circ = a$; $BD = BC \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$

$$\text{Ta có } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot BD \sin 30^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } \widehat{BAC} < 90^\circ \text{ nên } AH = AJ + JH = AJ + \sqrt{JB^2 - HB^2} = 2a$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 36. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $625^{\frac{x-1}{x}} \cdot 3^x = 10125$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S \in (5; 6)$.

B. $S \in (0; 1)$.

C. $S \in (2; 3)$.

D. $S \in (3; 4)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 625^{\frac{x-1}{x}} \cdot 3^x = 10125 \Leftrightarrow 5^{\frac{4(x-1)}{x}} \cdot 3^x = 5^3 \cdot 3^4 \Leftrightarrow 3^{x-4} = 5^{\frac{4-x}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x-4 = \frac{4-x}{x} \cdot \log_3 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-\log_3 5 \end{cases}$$

Vậy $S = 4 - \log_3 5 \approx 2,53 \in (2; 3)$.

Câu 37. Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O , bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ khi diện tích xung quanh của hình nón lớn nhất là

A. $h = R$.

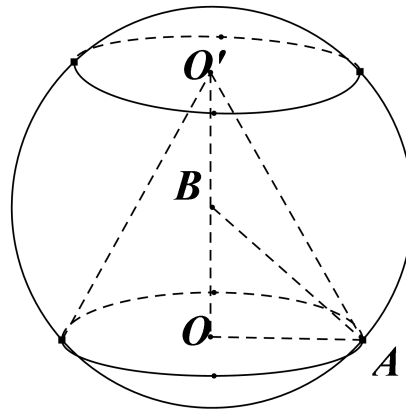
B. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

C. $h = 2R\sqrt{3}$.

D. $h = R\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



$$d((P), (Q)) = OO' = h.$$

$$AB = R.$$

$$\Delta OAB \text{ vuông tại } O \text{ nên } OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.$$

$$\Delta OAO' \text{ vuông tại } O \text{ nên } O'A = \sqrt{O'O^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + R^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{R^2 + \frac{3h^2}{4}}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón: } S = \pi \cdot OA \cdot O'A = \pi \cdot \sqrt{\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot \left(R^2 + \frac{3h^2}{4}\right)}.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{h^2}{4}, x > 0.$$

$$\text{Xét } f(x) = \pi \cdot \sqrt{(R^2 - x) \cdot (R^2 + 3x)} = \pi \cdot \sqrt{R^4 + 2R^2x - 3x^2} \text{ với } x \in (0; R^2].$$

$$f'(x) = \pi \cdot \frac{2R^2 - 6x}{\sqrt{(R^2 - x) \cdot (R^2 + 3x)}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R^2}{3}.$$

x	0	$\frac{R^2}{3}$	R^2
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f\left(\frac{R^2}{3}\right)$	

Diện tích xung quanh của hình nón đạt giá trị lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên

$$(0; R^2]. \text{ Khi đó } x = \frac{R^2}{3} \Leftrightarrow \frac{h^2}{4} = \frac{R^2}{3} \Leftrightarrow h^2 = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 38. Cho $\int_0^1 \frac{2x+1}{3-x} dx = -a + b \ln \frac{a}{c}$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}; a, c > 0$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ là

A. 2.

B. 12.

C. -2.

D. -6.

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{3-x} dx = \int_0^1 \left(-2 + \frac{7}{3-x} \right) dx = \left(-2x - 7 \ln |3-x| \right) \Big|_0^1 = -2 - 7 \ln 2 + 7 \ln 3 = -2 - 7 \ln \frac{2}{3}.$$

Suy ra $a = 2, b = -7, c = 3 \Rightarrow a + b + c = -2$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\log_2 \left(\frac{x^2 - mx + m^2}{x + 2m} \right) = -x^2 + (m+4)x - m^2 + 8m + 2 \text{ có hai nghiệm phân biệt?}$$

A. 14.

B. 13.

C. 19.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x + 2m \neq 0 \\ \frac{x^2 - mx + m^2}{x + 2m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2m > 0 \quad (\text{do } x^2 - mx + m^2 = \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{3m^2}{4} \geq 0 \forall x; m \in \mathbb{R}).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = m = 0$

$$\text{Phương trình } \log_2 \left(\frac{x^2 - mx + m^2}{x + 2m} \right) = -x^2 + (m+4)x - m^2 + 8m + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - mx + m^2) + (x^2 - mx + m^2) = \log_2 (4x + 8m) + (4x + 8m) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(x^2 - mx + m^2) = f(4x + 8m) \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 = 4x + 8m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+4)x + m^2 - 8m = 0 \quad (2)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + 2m > 0 \\ x_2 + 2m > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 + 4m > 0 \\ (x_1 + 2m)(x_2 + 2m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+4)^2 - 4(m^2 - 8m) > 0 \\ x_1 + x_2 + 4m > 0 \\ x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 4m^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 40m - 16 < 0 \\ m + 4 + 4m > 0 \\ m^2 - 8m + 2m(m+4) + 4m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 40m - 16 < 0 \\ 5m + 4 > 0 \\ 7m^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20-8\sqrt{7}}{3} < m < \frac{20+8\sqrt{7}}{3} \\ m > -\frac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20-8\sqrt{7}}{3} < m < \frac{20+8\sqrt{7}}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Do m nguyên nên $m \in \{1; 2; \dots; 13\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$; $AD = 2a$; $A'C = 3a$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là:

A. $2a^3$.

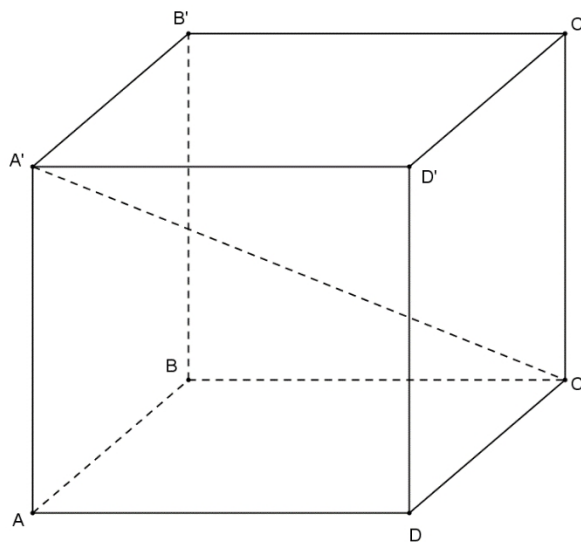
B. $4a^3$.

C. $6a^3$.

D. $\sqrt{5}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $A'C^2 = AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$

$$\Rightarrow AA'^2 = A'C^2 - AB^2 - AD^2 = (3a)^2 - a^2 - (2a)^2 = 4a^2 \Rightarrow AA' = 2a$$

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V = AB \cdot AD \cdot AA' = a \cdot 2a \cdot 2a = 4a^3$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (6,0 điểm)

Câu 1. (1,0 điểm) Giải phương trình $2 \cdot 3^{x^2-4} + 3^{x+2} = 3^{x^2+x-2} + 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2.3^{x^2-4} + 3^{x+2} = 3^{x^2+x-2} + 2 \Leftrightarrow (2.3^{x^2-4} - 2) + (3^{x+2} - 3^{x^2+x-2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(3^{x^2-4} - 1) - 3^{x+2}(3^{x^2-4} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^{x^2-4} - 1)(2 - 3^{x+2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-4} = 1 \\ 3^{x+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x + 2 = \log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = -2 + \log_3 2 \end{cases}$$

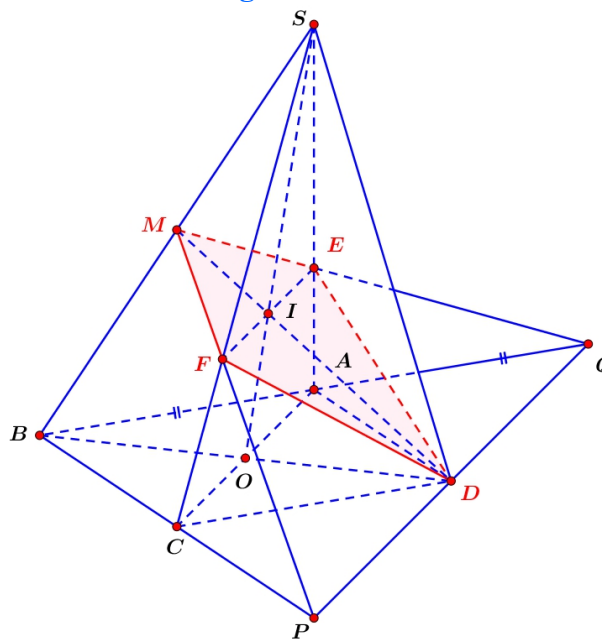
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-2; 2; -2 + \log_3 2\}$.

Câu 2. (3,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 3a$ và nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = \sqrt{2}a, AD = a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB , mặt phẳng (P) đi qua DM và cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng vuông góc với DM . Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (P) và SA .

a) Tính AE .

b) Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh S .

Lời giải



Đầu tiên, ta gọi I là giao điểm giữa SO và DM mà M, O lần lượt là trung điểm của SB, BD nên suy ra I là trọng tâm ΔSBD

Cho một đường thẳng qua I , song song với AC và cắt SA, SC lần lượt tại E', F

$$\text{Ta có: } IE' = \frac{AC}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; DI = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2(DS^2 + DB^2) - SB^2}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}; AE' = \frac{SA}{3} = a$$

Mà ta nhận thấy: $DI^2 + IE'^2 = DE'^2 = DA^2 + AE'^2$ nên suy ra $\Delta IDE'$ vuông tại $I \Rightarrow DM \perp E'F$

Mặt khác $E'F = (ME'DF) \cap (SAC)$ nên suy ra mặt phẳng (P) cần tìm chính là mặt phẳng $(ME'DF)$ và $E' = SA \cap (P)$

Mà theo giả thiết ta có E là giao điểm của mặt phẳng (P) với SA nên suy ra $E \equiv E'$

Suy ra $AE = AE' = a$

a) Do $E \equiv E'$ nên suy ra $EF // AC \Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ (Định lý Ta-lét). Suy ra ta có được:

$$\begin{cases} \frac{V_{S.MEDF}}{V_{S.BADC}} = \frac{V_{S.MEF} + V_{S.DEF}}{V_{S.BADC}} = \frac{V_{S.MEF}}{2V_{S.BAC}} + \frac{V_{S.DEF}}{2V_{S.DAC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SF}{SC} + \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SF}{SC} \right) = \frac{1}{3} \\ V_{S.BADC} = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S A S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a \cdot a \sqrt{2} = a^3 \sqrt{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $V_{S.MEDF} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

Như vậy, thể tích khối đa diện chứa đỉnh S là $V_{S.MEDF} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \left(\cos A + \sqrt{\cos^2 A + 2} \right) \cdot \left(\cos B + \sqrt{\cos^2 B + 2} \right) \cdot \left(\cos C + \sqrt{\cos^2 C + 2} \right).$$

Lời giải

Lấy ln hai vế ta được

$$\ln S = \ln \left(\cos A + \sqrt{\cos^2 A + 2} \right) + \ln \left(\cos B + \sqrt{\cos^2 B + 2} \right) + \ln \left(\cos C + \sqrt{\cos^2 C + 2} \right)$$

Xét hàm $f(t) = \ln \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right) - \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}, t \in (0;1)$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2}} - \frac{2}{3} = \frac{3 - 2\sqrt{t^2 + 2}}{3\sqrt{t^2 + 2}} = \frac{1 - 4t^2}{3\sqrt{t^2 + 2}(3 + 2\sqrt{t^2 + 2})}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

t	0	1/2	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$f(1/2)$	

Từ BBT ta suy ra $f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2, \forall t \in (0;1)$

$$\text{Do đó } \ln S \leq 3 \ln 2 + \frac{2}{3}(\cos A + \cos B + \cos C) - 1$$

Lại có

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \leq 2 \sin \frac{C}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{3}{2} - 2 \left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{2}.$$

Suy ra $\ln S \leq 3 \ln 2 \Leftrightarrow S \leq 8$.

---HẾT---