Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu
Tổ Toán - Tin

VƯỢT VŨ MÔN TOÁN

ĐỀ SỐ 2

A. Phần trắc nghiệm (8 điểm)

Câu 1: Giả sử x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. $\log_2(x+y) = \log_2 x + \log_2 y$ **B.** $\log_2\sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y)$

C. $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$ **D.** $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (C) có tiệm cận ngang là $y = 3$ **B.** (C) có tiệm cận ngang là $y = 0$

C. (C) có tiệm cận đứng là $x = 1$ **D.** (C) chỉ có một tiệm cận

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$

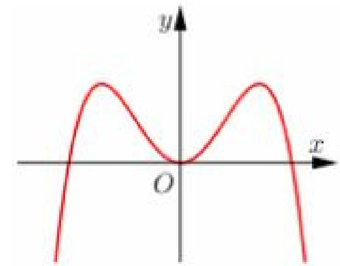
C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;3)$

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $D=[1;+\infty)$ **B.** $D=(1;+\infty)$ **C.** $D=(-\infty;1)$ **D.** $D=(0;1)$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x)$ là một trong bốn hàm được đưa ra trong các phương án A, B, C, D dưới đây. Tìm $f(x)$



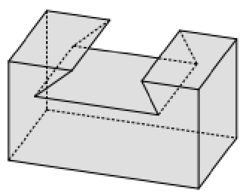
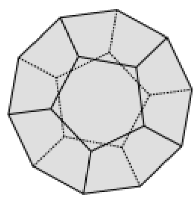
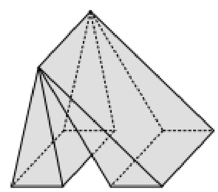
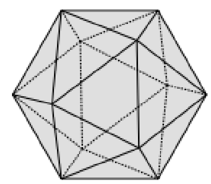
A. $f(x)=x^4-2x^2$

B. $f(x)=x^4+2x^2$

C. $f(x)=-x^4+2x^2-1$

D. $f(x)=-x^4+2x^2$

Câu 6: Vật thể nào trong các vật thể sau **không** phải là khối đa diện.

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Câu 7: Cho hàm số $y=\frac{x}{2^x}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số đã cho có cả điểm cực đại và điểm cực tiểu.

B. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại.

D. Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3+mx^2-x$ có 2 điểm cực trị

A. $|m|\geq 2\sqrt{3}$ **B.** $|m|>2$ **C.** $|m|>\sqrt{3}$ **D.** $|m|\geq\sqrt{3}$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x^2-4)$, $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị. **B.** Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=2$

C. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. **D.** Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-2$

Câu 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2-3}{x-2}$ trên đoạn $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $M+m=\frac{8}{3}$ **B.** $M+m=\frac{4}{3}$ **C.** $M+m=\frac{7}{2}$ **D.** $M+m=\frac{16}{3}$

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(4x+1)$ là

A. $y'=\frac{4}{(4x+1)\ln 3}$ **B.** $y'=\frac{1}{(4x+1)\ln 3}$ **C.** $y'=\frac{4\ln 3}{4x+1}$ **D.** $y'=\frac{\ln 3}{4x+1}$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=2x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$

A. $-\frac{3}{2}<m\neq -1$ **B.** $m\geq -\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{3}{2}\leq m\neq -1$ **D.** $m>-\frac{3}{2}$

Câu 13: Một hình nón có tỉ lệ giữa đường sinh và bán kính đáy bằng 2. Góc ở đỉnh của hình nón bằng

A. 150^0 **B.** 120^0 **C.** 60^0 **D.** 30^0

Câu 14: Giả sử a là số thực dương, khác 1. Biểu thức $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^{α}. Khi đó

A. $\alpha=\frac{2}{3}$ **B.** $\alpha=\frac{11}{6}$ **C.** $\alpha=\frac{1}{6}$ **D.** $\alpha=\frac{5}{3}$

Câu 15: Hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi của thiết diện qua trục bằng 10a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $4\pi a^3$ **B.** $3\pi a^3$ **C.** πa^3 **D.** $5\pi a^3$

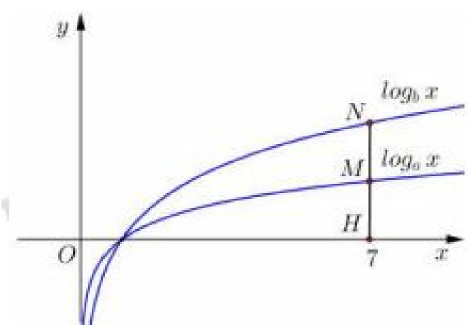
Câu 16: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB=\sqrt{5}a, AC=a$. Cạnh $SA=3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. a^3 **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}a^3$ **C.** $2a^3$ **D.** $3a^3$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x-\frac{1}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm phân biệt

A. $-1<m\neq 0$ **B.** $m>-1$ **C.** không tồn tại m **D.** $-1<m<0$

Câu 18: Cho hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại H, M và N. Biết rằng $HM=MN$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**



A. $a=7b$ **B.** $a=b^2$

C. $a=b^7$ **D.** $a=2b$

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+a}{x^2+ax^2}$ có 3 đường tiệm cận

A. $a<0, a\neq 1$ **B.** $a>0$ **C.** $a\neq 0, a\neq \pm 1$ **D.** $a\neq 0, a\neq -1$

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m^2-1)x^4-2mx^2$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. $m\leq -1$ **B.** $m=-1$ hoặc $m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

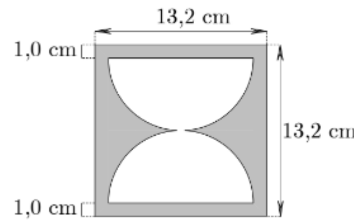
C. $m\leq -1$ hoặc $m\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **D.** $m\leq -1$ hoặc $m>1$

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. $m\in(-4;1)$ **B.** $m\in[1;+\infty)$

C. $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$ **D.** $m\in(1;+\infty)$

Câu 22: Một xưởng sản xuất muốn tạo ra những chiếc đồng hồ cát bằng thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với các kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này (phần tô màu làm bằng thủy tinh). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

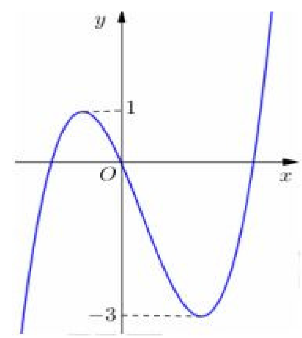


A. $711,6cm^3$ **B.** $1070,8cm^3$ **C.** $602,2cm^3$ **D.** $6021,3cm^3$

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2a, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\sqrt{3}a$. Thể tích khối chóp S.ABCD bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **B.** $4\sqrt{3}a^3$ **C.** $\sqrt{3}a^3$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$

Câu 24: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị là:



A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$

B. $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$

C. $m=-1$ hoặc $m=3$

D. $1\le m\le 3$

Câu 25: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AB=AC=a, BC=a\sqrt{3}$. Cạnh bên $AA'=2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AB'C'C bằng

A. a **B.** $a\sqrt{5}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 26: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$ là:

A. $\min P=-83$ **B.** $\min P=-63$ **C.** $\min P=-80$ **D.** $\min P=-91$

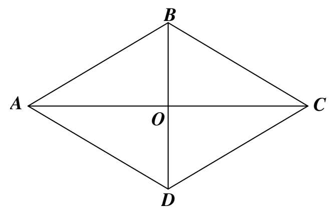
Câu 27: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'}=\dfrac{1}{2},\dfrac{BN}{BB'}=\dfrac{CP}{CC'}=\dfrac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện ABC.MNP bằng:

A. $\dfrac{2}{3}V$ **B.** $\dfrac{9}{16}V$ **C.** $\dfrac{20}{27}V$ **D.** $\dfrac{11}{18}V$

Câu 28: Giải phương trình $\sin 3x-4\sin x.\cos 2x=0$.

A. $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

Câu 29: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O (như hình vẽ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?



A. Phép quay tâm O, góc $-\dfrac{\pi}{2}$ biến tam giác OCD thành tam giác OBC.

B. Phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{DA}$ biến tam giác DCB thành tam giác ABD.

C. Phép vị tự tâm O, tỷ số $k=1$ biến tam giác ODA thành tam giác OBC.

D. Phép vị tự tâm O, tỷ số $k=-1$ biến tam giác CDB thành tam giác ABD.

Câu 30: Cho cấp số nhân $(u_n); u_1=1, q=2$. Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy?

A. 10 **B.** 8 **C.** 11 **D.** 9

Câu 31: Một cái hộp đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ cái hộp đó.Tính xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 là bi xanh.

A. $\dfrac{2}{5}$ **B.** $\dfrac{2}{15}$ **C.** $\dfrac{11}{12}$ **D.** $\dfrac{7}{24}$

Câu 32: Cho hai hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x\neq 0 \\ 1 & \text{khi } x=0 \end{cases}$

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$ **B.** $f(x)$ liên tục tại $x=0$

C. $f(\sqrt{2})<0$ **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$

B. Phần tự luận (2 điểm)

Bài 1. Giải phương trình $\dfrac{\cos x+\sin^3 x}{\sin x-\sin^2 x}=1+\sin x+\cot x$.

Bài 2. Nhân dịp kỷ niệm ngày Nhà giáo Việt Nam, trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu tuyển chọn được 24 tiết mục văn nghệ tiêu biểu, trong số đó lớp 11A có 2 tiết mục để công diễn trong toàn trường. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành hai buổi công diễn, mỗi buổi 12 tiết mục. Tính xác suất để 2 tiết mục của lớp 11A được biểu diễn trong cùng một buổi.

Bài 3. Tính hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $\left[\sqrt{x}+3(1-\dfrac{1}{x})\right]^n$, $(x>0)$, biết rằng n là số nguyên dương thoả mãn $3C_{n+1}^1+8C_{n+2}^2=3C_{n+1}^3$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+xy}}+\dfrac{2\sqrt{3}}{1+z}$.

----------------------Hết-----------------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

A. Phần trắc nghiệm (mỗi câu đúng 0,25 điểm)

Câu 1: Đáp án A

Ta có $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(xy)$ nên A sai

Câu 2: Đáp án B

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$, tiệm cận ngang là $y = 0$ nên B đúng

Câu 3: Đáp án C,D

Câu 4: Đáp án B

Tập xác định của hàm số là $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow D = (1; +\infty)$

Câu 5: Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty \Rightarrow$ hệ số $a < 0 \Rightarrow$ Loại A và B. Mà (C) qua $O(0;0)$ $\Rightarrow$ D đúng.

Câu 6: Đáp án C

Rõ ràng C là đáp án đúng

Câu 7: Đáp án C

Ta có $y = \dfrac{x}{2^x} = x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Rightarrow y' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln\dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(1 + x\ln\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x(1 - x\ln 2)$

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\ln 2}$. Mà $y'' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln\dfrac{1}{2}.(1 - x\ln 2) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x.(-\ln 2)$

$\Rightarrow y''\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) = 0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\ln 2}}(-\ln 2) < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{1}{\ln 2}$

Câu 8: Đáp án C

Ta có $y' = -3x^2 + 2mx - 1$

YCBT $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{3}$

Câu 9: Đáp án A

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$ và $f''(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = 16 > 0 \\ f''(-2) = -16 < 0 \end{cases}$

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$

Khi đó $x = 0$ thì đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu nên $f(x)$ không đạt cực trị tại $x = 0$

Câu 10: Đáp án A

Câu 11: Đáp án A

Ta có $y' = \dfrac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3} = \dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$

Câu 12: Đáp án B

Điều kiện : $x \neq 1$

Phương trình hoành độ giao điểm $2x+1=\dfrac{x+m}{x-1}\Leftrightarrow 2x^2-2x-m-1=0(*)$

Để cắt nhau thì (*) có nghiệm $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 2m+3\ge 0\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{3}{2}$

Câu 13: Đáp án C

Ta có $\sin\alpha=\dfrac{r}{l}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \alpha=30^0\Rightarrow$ góc ở định là $2\alpha=60^0$

Câu 14: Đáp án A

Ta có $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=a^{\frac{2}{3}}\Rightarrow \alpha=\dfrac{2}{3}$

Câu 15: Đáp án B

Gọi $l=h$ là độ dài đường sinh của khối trụ

Khi đó chu vi thiết diện qua trục là $C=2(2r+l)=2(2r+h)=10a\Rightarrow h=3a$

Suy ra $V_{(T)}=\pi R^2h=3\pi a^3$

Câu 16: Đáp án A

Ta có $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=2a$

Do đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}3a.\dfrac{2a^2}{2}=a^3$

Câu 17: Đáp án B

ĐK. $\begin{cases} x>-1 \\ \log_3(x+1)\ne 0\Leftrightarrow x\ne 0\end{cases}$

Khi đó ta có: $y'=1-\dfrac{2.\left[\log_3(x+1)\right]'}{\log_3^2(x+1)}=1+\dfrac{2}{\ln 3(x+1)\log_3^2(x+1)}>0(\forall x>-1)$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$

x	-1		0		$+\infty$
y'	‖	+	‖	+	
y	‖ -1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng BBT suy ra PT đã cho có 2 nghiệm khi $m>-1$

Câu 18: Đáp án B

Dựa vào hình vẽ ta thấy $HM = MN \Leftrightarrow NH = 2MH \Leftrightarrow \log_b 7 = 2\log_a 7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_7 b} = \dfrac{2}{\log_7 a} \Leftrightarrow a = b^2$

Câu 19: Đáp án D

Ta có $D = \mathbb{R}\backslash\{0;-a\}$. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + a}{x^3 + ax^2}$ luôn có một tiệm cận ngang là $y = 0$ do $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$. Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow g(x) = x^2 + a$ không nhận $x = 0; x = -a$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ a^2 + a \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ a \ne -1 \end{cases}$

Câu 20: Đáp án C

Ta có $y' = 4(m^2 - 1)x^3 - 4mx$

- Với $m = -1 \Rightarrow y' = 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$
- Với $m = 1 \Rightarrow y' = -4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ nên hàm số không đồng biến trên $(1;+\infty)$
- Với $m \ne \pm 1$ để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì $\left[(m^2 - 1)x^2 - m\right]x \ge 0 \left(\forall x \in (1;+\infty)\right)$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 \ge m\left(\forall x \in (1;+\infty)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ (m^2 - 1).(1)^2 \ge m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m < -1 \end{array}\right.$$

Kết hợp ta có $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m \le -1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Câu 21: Đáp án C

Hàm số đã cho xác định trên khoảng

$(0;+\infty) \Leftrightarrow g(x) = m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \ne 0 (\forall x > 0)$

Đặt $t = \log_3 x \,(t \in \mathbb{R})$ khi đó ĐKBT $\Leftrightarrow g(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \ne 0 (\forall t \in \mathbb{R})$

Với $m = 0 \Rightarrow g(t) = -4x + 3$ (không thỏa mãn)

Với $m \ne 0$ suy ra $g(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \ne 0 (\forall t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \Delta' = 4 - m(m+3) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -4 \end{array}\right.$

Câu 22: Đáp án B

Thể tích của hình trụ là $V_1 = \pi r^2 h = \pi.6.6^2.13,2\ cm^3 = 1806,39\ cm^3$

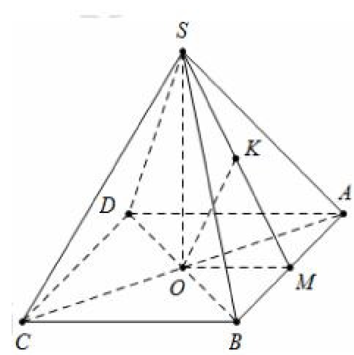
Thể tích hình cầu chứa cát là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{13,2-2}{2}\right)^3 = 735,62\ cm^3$

Vậy lượng thủy tinh cần phải làm là $V = V_1 - V_2 = 1070,77\ cm^3$

Câu 23: Đáp án D

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SAB)$



$\Rightarrow d(SA;CD) = d(CD;(SAB)) = 2.d(O;(SAB)) = a\sqrt{3}$

Gọi M là trung điểm của AB, kẻ $OK \perp SM (K \in SM)$

Khi đó $OK \perp (SAB) \Rightarrow d(O;(SAB)) = OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔSMO vuông tại M, có $\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OK^2} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là $V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$

Ta có $V = \pi\int_0^4 xdx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi \Rightarrow V_1 = 4\pi$

Câu 24: Đáp án A

Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến trên trục Oy m đơn vị

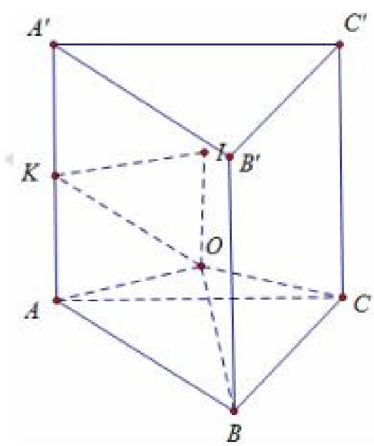
Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x) + m$ xảy ra hai trường hợp sau:

- Nằm phía trên trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương
- Nằm phía dưới trục hoành hoặc điểm cực đại thuộc trục Ox và cực tiểu dương

Khi đó $m \ge 3$ hoặc $m \le -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 25: Đáp án D

Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AB'C'C cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ dứng đã cho



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) cắt mặt phẳng trung trực của AA' tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Mặt khác $\cos\widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = -\frac{1}{2}$

Ta có: $R_{ABC} = a$ do đó $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = a\sqrt{2}$

Câu 26: Đáp án A

Ta có $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3} \ge 4(x+y)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \ge 4 \\ x+y \le 0 \end{array}\right.$. Mặt khác

$x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \le 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \le 8 \Rightarrow x + y \in [4;8]$

Xét biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy$ và đặt

$t = x + y \in [4;8] \Rightarrow P = 4t^2 + 7xy$.

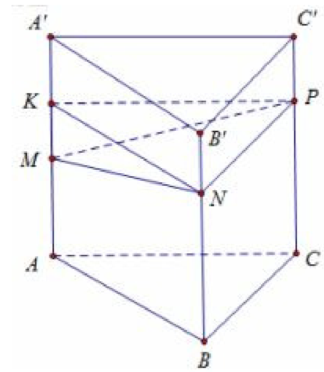
Lại có $(x+3)(y+3) \ge 0 \Leftrightarrow xy \ge -3(x+y) - 9 \Rightarrow P \ge 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63$

$= 4t^2 - 21t - 63$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2-21t-63$ trên đoạn $[4;8]$ suy ra $P_{min}=f(7)=-83$

Câu 27: Đáp án D

Gọi K là hình chiếu của P trên AA'



Khi đó $V_{ABC.KPN}=\frac{2}{3}V; V_{M.KPN}$

$=\frac{1}{3}MK.S_{KNP}=\frac{1}{3}.\frac{1}{6}AA'S_{ABC}=\frac{1}{18}V$

Do đó $V_{ABC.MNP}=\frac{2}{3}V-\frac{1}{18}V=\frac{11}{18}V$

Câu 28: Đáp án B

Câu 29: Đáp án D

Câu 30: Đáp án C

Câu 31: Đáp án A

Câu 32: Đáp án D

B. Phần tự luận (mỗi bài đúng 0,5 điểm)

Bài 1. (0,5 điểm)

Điều kiện: $\sin x \neq 0, \sin x \neq 1$ hay $x \neq k\pi,\ x \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\cos x+\sin^3 x=(1-\sin x)(\sin x+\sin^2 x+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sin^3 x=\sin x\cos^2 x+\cos x-\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x=\cos^2 x-\cos x \ (\text{vì } \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 2. (0,5 điểm)

Gọi hai buổi công diễn là I, II. Số cách chia 24 tiết mục thành hai buổi công diễn chính là số cách chọn 12 tiết mục cho buổi I, đó là C_{24}^{12}.

Gọi A là biến cố "2 tiết mục của lớp $11A$ được biểu diễn trong cùng một buổi".

Nếu 2 tiết mục của lớp $11A$ cùng biểu diễn trong buổi I thì số cách chọn 10 tiết mục còn lại cho buổi I là C_{22}^{10}. Hai tiết mục của lớp $11A$ cũng có thể cùng biểu diễn trong buổi II.

Vì vậy, số cách chia để biến cố A xảy ra là $2.C_{22}^{10}$.

Do đó $P(A)=\frac{2.C_{22}^{10}}{C_{24}^{12}}=\frac{11}{23}\approx 0,4783.$

Ghi chú. Xác suất cũng có thể được tính theo công thức $P(A)=\frac{2.C_{12}^{2}}{C_{24}^{2}}=\frac{11}{23}$.

Bài 3. (0,5 điểm)

Từ giả thiết ta có $3(n+1)+8.\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=3.\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}, n\geq 2$

$$\Leftrightarrow 6+8(n+2)=n(n-1)\Leftrightarrow n^2-9n-22=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=11 \\ n=-2 \end{array}\right.\Leftrightarrow n=11.$$

Theo khai triển nhị thức Newton ta có

$$\left[\sqrt{x}+3\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^{k}.(\sqrt{x})^{11-k}.3^k\left(1-\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^{k}.3^k(\sqrt{x})^{11-k}.\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{(-1)^i}{x^i}$$

$$=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^{k}.3^k.\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-1)^i x^{\frac{11-k}{2}-i}.$$

Xét phương trình $\dfrac{11-k}{2}-i=4, 0\leq i\leq k\leq 11 \Leftrightarrow k+2i=3, 0\leq i\leq k\leq 11\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1, i=1 \\ k=3, i=0 \end{array}\right.$

Suy ra hệ số của x^4 là $C_{11}^1.3.C_1^1.(-1)^1+C_{11}^3.3^3=4422.$

Bài 4. (0,5 điểm)

Hướng dẫn giải

+ Biểu thức thứ 1 và 2 có tính **đối xứng theo hai biến** x, y

+ Sử dụng bất đẳng thức đại số và điều kiện đánh giá hai biểu thức thứ 1 và 2 nhằm đưa về hàm theo biến z

Lời giải

B1 • Ước lượng biểu thức P về hàm một biến số.

Theo bất đẳng thứ **Cauchy** ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}\geq\frac{2}{\sqrt[4]{(x^2+xy)(y^2+yx)}}\geq\frac{2}{\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2+xy}{2}}}=\frac{2}{\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}}\geq\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=y$. Kết hợp với điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$, ta được:

$$P\geq\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{12}}{z+1}=\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{\sqrt{12}}{z+1}=f(z)$$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến z.

Do x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$ nên $0<z<1$

Vậy $z\in(0;1)$

B3 • Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(z)=\dfrac{2}{\sqrt{1-z^2}}+\dfrac{\sqrt{12}}{z+1}$ trên khoảng $(0;1)$

Ta có: $f'(z)=\dfrac{2z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}-\dfrac{\sqrt{12}}{(1+z)^2}=\dfrac{2z(1+z)^2-\sqrt{12}(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}{(1+z^2)^2(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}$

$$f'(z)=0\Leftrightarrow 2z(1+z)^2-\sqrt{12}(1-z^2)\sqrt{1-z^2}=0\Leftrightarrow 16z^6+16z^5-12z^4+16z^3+40z^2-12=0$$

$$\Leftrightarrow 4(z+1)^3(2z-1)(2z^2-3z+3)=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

z	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		$\searrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(z) \geq \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\forall z \in (0;1)$ $\Rightarrow P \geq \frac{8\sqrt{3}}{3}$ (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}, z=\frac{1}{2}$.

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ đạt khi $x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}, z=\frac{1}{2}$. ❐

--------------------Hết------------------

Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu
Tổ Toán - Tin

ĐÁP ÁN VƯỢT VŨ MÔN TOÁN

ĐỀ SỐ 2

A. Phần trắc nghiệm (8 điểm)

Câu 1: Giả sử x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. $\log_2(x+y)=\log_2 x+\log_2 y$ **B.** $\log_2\sqrt{xy}=\frac{1}{2}(\log_2 x+\log_2 y)$

C. $\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$ **D.** $\log_2\frac{x}{y}=\log_2 x-\log_2 y$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Ta có $\log_2 x+\log_2 y=\log_2(xy)$ nên **A** sai

Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (C) có tiệm cận ngang là $y=3$ **B.** (C) có tiệm cận ngang là $y=0$

C. (C) có tiệm cận đứng là $x=1$ **D.** (C) chỉ có một tiệm cận.

Hướng dẫn giải: Đáp án B

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x=-1$, tiệm cận ngang là $y=0$ nên **B** đúng

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;3)$

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$

Hướng dẫn giải: Đáp án C,D (Học sinh hưởng điểm)

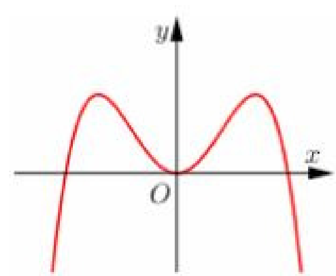
Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $D=[1;+\infty)$ **B.** $D=(1;+\infty)$ **C.** $D=(-\infty;1)$ **D.** $D=(0;1)$

Hướng dẫn giải: Đáp án B

Điều kiện xác định của hàm số là $x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Rightarrow D=(1;+\infty)$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x)$ là một trong bốn hàm được đưa ra trong các phương án A, B, C, D dưới đây. Tìm $f(x)$



A. $f(x)=x^4-2x^2$

B. $f(x)=x^4+2x^2$

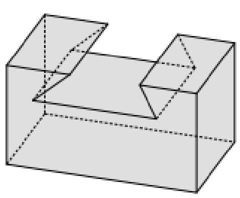
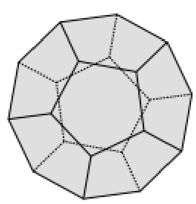
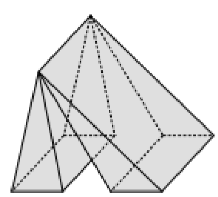
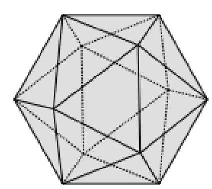
C. $f(x)=-x^4+2x^2-1$

D. $f(x)=-x^4+2x^2$

Hướng dẫn giải: Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty \Rightarrow$ hệ số $a<0 \Rightarrow$ Loại A và B. Mà (C) qua $O(0;0)$ $\Rightarrow$ **D** đúng.

Câu 6: Vật thể nào trong các vật thể sau **không** phải là khối đa diện.

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Hướng dẫn giải: Đáp án C

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2^x}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số đã cho có cả điểm cực đại và điểm cực tiểu.

B. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại.

D. Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

Hướng dẫn giải: Đáp án C

Ta có $y=\dfrac{x}{2^x}=x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Rightarrow y'=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(1+x\ln\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x(1-x\ln 2)$

Do đó $y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\ln 2}$. Mà $y''=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}\ln\dfrac{1}{2}.(1-x\ln 2)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}.(-\ln 2)$

$\Rightarrow y''\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)=0+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\ln 2}}(-\ln 2)<0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{1}{\ln 2}$

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3+mx^2-x$ có 2 điểm cực trị

A. $|m|\ge 2\sqrt{3}$ **B.** $|m|>2$ **C.** $|m|>\sqrt{3}$ **D.** $|m|\ge\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải: Đáp án C

Ta có $y'=-3x^2+2mx-1$. YCBT $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-3>0 \Leftrightarrow |m|>\sqrt{3}$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x^2-4)$, $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị. **B.** Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=2$

C. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. **D.** Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-2$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2\end{array}\right.$ và $f''(x)=4x^3-8x \Rightarrow \begin{cases} f''(2)=16>0 \\ f''(-2)=-16<0\end{cases}$

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

Khi đó $x=0$ thì đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu nên $f(x)$ không đạt cực trị tại $x=0$

Câu 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $M+m=\dfrac{8}{3}$ **B.** $M+m=\dfrac{4}{3}$ **C.** $M+m=\dfrac{7}{2}$ **D.** $M+m=\dfrac{16}{3}$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(4x+1)$ là

A. $y'=\dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$ **B.** $y'=\dfrac{1}{(4x+1)\ln 3}$ **C.** $y'=\dfrac{4\ln 3}{4x+1}$ **D.** $y'=\dfrac{\ln 3}{4x+1}$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Ta có $y'=\dfrac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3}=\dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=2x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$

A. $-\dfrac{3}{2}<m\ne -1$ **B.** $m\ge -\dfrac{3}{2}$ **C.** $-\dfrac{3}{2}\le m\ne -1$ **D.** $m>-\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải: Đáp án B

Điều kiện : $x\ne 1$. Phương trình hoành độ giao điểm $2x+1=\dfrac{x+m}{x-1} \Leftrightarrow 2x^2-2x-m-1=0(*)$

Để cắt nhau thì (*) có nghiệm $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 2m+3 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{3}{2}$

Câu 13: Một hình nón có tỉ lệ giữa đường sinh và bán kính đáy bằng 2. Góc ở đỉnh của hình nón bằng

A. 150^0 **B.** 120^0 **C.** 60^0 **D.** 30^0

Hướng dẫn giải: Đáp án C

Ta có $\sin\alpha = \frac{r}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0 \Rightarrow$ góc ở định là $2\alpha = 60^0$.

Câu 14: Giả sử a là số thực dương, khác 1. Biểu thức $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^α. Khi đó

A. $\alpha = \frac{2}{3}$ **B.** $\alpha = \frac{11}{6}$ **C.** $\alpha = \frac{1}{6}$ **D.** $\alpha = \frac{5}{3}$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Câu 15: Hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi của thiết diện qua trục bằng 10a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $4\pi a^3$ **B.** $3\pi a^3$ **C.** πa^3 **D.** $5\pi a^3$

Hướng dẫn giải: Đáp án B

Gọi $l = h$ là độ dài đường sinh của khối trụ

Khi đó chu vi thiết diện qua trục là $C = 2(2r+l) = 2(2r+h) = 10a \Rightarrow h = 3a$. Suy ra $V_{(T)} = \pi R^2 h = 3\pi a^3$

Câu 16: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB = \sqrt{5}a, AC = a$. Cạnh $SA = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. a^3 **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}a^3$ **C.** $2a^3$ **D.** $3a^3$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2a$. Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}3a.\frac{2a^2}{2} = a^3$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x - \frac{1}{\log_3(x+1)} = m$ có hai nghiệm phân biệt

A. $-1 < m \ne 0$ **B.** $m > -1$ **C.** không tồn tại m **D.** $-1 < m < 0$

Hướng dẫn giải: Đáp án B

ĐK. $\begin{cases} x > -1 \\ \log_3(x+1) \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 0 \end{cases}$

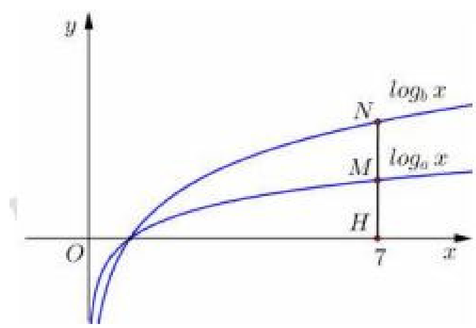
Khi đó ta có: $y' = 1 - \frac{2.\left[\log_3(x+1)\right]'}{\log_3^2(x+1)} = 1 + \frac{2}{\ln 3(x+1)\log_3^2(x+1)} > 0 (\forall x > -1)$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$

x	-1		0		+∞
y'	‖	+	‖	+	
y	‖ -1	↗	+∞ ‖ −∞	↗	+∞

Dựa vào bảng BBT suy ra PT đã cho có 2 nghiệm khi $m > -1$

Câu 18: Cho hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại H, M và N. Biết rằng $HM = MN$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**



A. $a = 7b$ **B.** $a = b^2$

C. $a = b^7$ **D.** $a = 2b$

Hướng dẫn giải: Đáp án B

Dựa vào hình vẽ ta thấy $HM = MN \Leftrightarrow NH = 2MH \Leftrightarrow \log_b 7 = 2\log_a 7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_7 b} = \dfrac{2}{\log_7 a} \Leftrightarrow a = b^2$

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + a}{x^2 + ax^2}$ có 3 đường tiệm cận

A. $a < 0, a \neq 1$ **B.** $a > 0$ **C.** $a \neq 0, a \neq \pm 1$ **D.** $a \neq 0, a \neq -1$

Hướng dẫn giải: Đáp án D

Ta có $D = \mathbb{R} \backslash \{0; -a\}$. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + a}{x^3 + ax^2}$ luôn có một tiệm cận ngang là $y = 0$ do $\lim\limits_{x \to \infty} y = 0$. Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow g(x) = x^2 + a$ không nhận $x = 0; x = -a$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 + a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}$

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 - 2mx^2$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

A. $m \leq -1$ **B.** $m = -1$ hoặc $m > \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **D.** $m \leq -1$ hoặc $m > 1$

Hướng dẫn giải: Đáp án C

Ta có $y' = 4(m^2 - 1)x^3 - 4mx$

- Với $m = -1 \Rightarrow y' = 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$

➢ Với $m=1 \Rightarrow y'=-4x>0 \Leftrightarrow x<0$ nên hàm số không đồng biến trên $(1;+\infty)$

➢ Với $m \neq \pm 1$ để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì $\left[\left(m^2-1\right)x^2-m\right]x \geq 0\left(\forall x \in (1;+\infty)\right)$

$$\Leftrightarrow \left(m^2-1\right)x^2 \geq m\left(\forall x \in (1;+\infty)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1>0 \\ \left(m^2-1\right).(1)^2 \geq m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m<-1 \end{array}\right.$$

Kết hợp ta có $\left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m \leq -1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. $m \in (-4;1)$ **B.** $m \in [1;+\infty)$

C. $m \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$ **D.** $m \in (1;+\infty)$

Hướng dẫn giải: Đáp án C

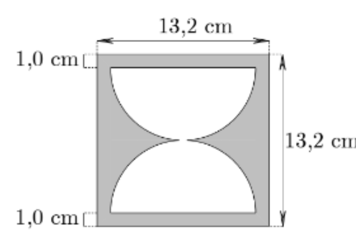
Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow g(x)=m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3 \neq 0(\forall x>0)$

Đặt $t=\log_3 x\,(t \in \mathbb{R})$ khi đó ĐKBT $\Leftrightarrow g(t)=mt^2-4t+m+3 \neq 0(\forall t \in \mathbb{R})$

Với $m=0 \Rightarrow g(t)=-4x+3$ (không thỏa mãn)

Với $m \neq 0$ suy ra $g(t)=mt^2-4t+m+3 \neq 0(\forall t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \Delta'=4-m(m+3)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-4 \end{array}\right.$

Câu 22: Một xưởng sản xuất muốn tạo ra những chiếc đồng hồ cát bằng thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với các kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này (phần tô màu làm bằng thủy tinh). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau



A. $711,6cm^3$ **B.** $1070,8cm^3$ **C.** $602,2cm^3$ **D.** $6021,3cm^3$

Hướng dẫn giải: Đáp án B

Thể tích của hình trụ là $V_1=\pi r^2 h=\pi.6.6^2.13,2\ cm^3=1806,39\ cm^3$

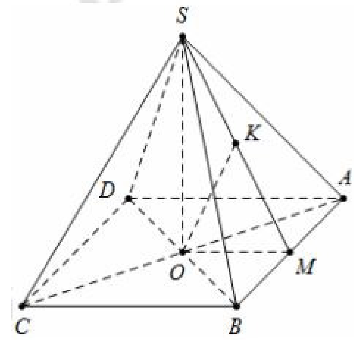
Thể tích hình cầu chứa cát là $V_2=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{13,2-2}{2}\right)^3=735,62\ cm^3$

Vậy lượng thủy tinh cần phải làm là $V=V_1-V_2=1070,77\ cm^3$

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2a, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\sqrt{3}a$. Thể tích khối chóp S.ABCD bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **B.** $4\sqrt{3}a^3$ **C.** $\sqrt{3}a^3$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$

Hướng dẫn giải: Đáp án D



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SAB)$

$\Rightarrow d(SA;CD) = d(CD;(SAB)) = 2.d(O;(SAB)) = a\sqrt{3}$

Gọi M là trung điểm của AB, kẻ $OK \perp SM\,(K \in SM)$

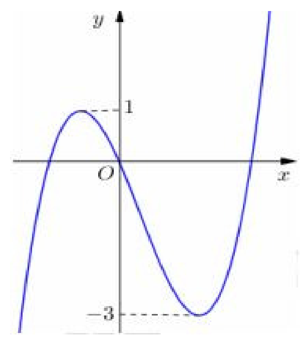
Khi đó $OK \perp (SAB) \Rightarrow d(O;(SAB)) = OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔSMO vuông tại M, có $\dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OK^2} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là $V = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a^3$

Ta có $V = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi \Rightarrow V_1 = 4\pi$

Câu 24: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là:



A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$

B. $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$

D. $1 \le m \le 3$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến trên trục Oy m đơn vị

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x) + m$ xảy ra hai trường hợp sau:

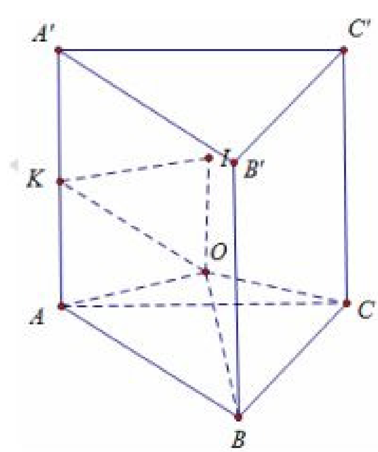
- Nằm phía trên trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương
- Nằm phía dưới trục hoành hoặc điểm cực đại thuộc trục Ox và cực tiểu dương

Khi đó $m \ge 3$ hoặc $m \le -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 25: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AB = AC = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AB'C'C bằng

A. a **B.** $a\sqrt{5}$ **C.** $a\sqrt{3}$

D. $a\sqrt{2}$



Hướng dẫn giải: Đáp án D

Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AB'C'C cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ dứng đã cho

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) cắt mặt phẳng trung trực của AA' tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Mặt khác $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = -\dfrac{1}{2}$

Ta có: $R_{ABC} = a$ do đó $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = a\sqrt{2}$

Câu 26: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(x^2 + y^2\right) + 15xy$ là:

A. $\min P = -83$ **B.** $\min P = -63$ **C.** $\min P = -80$ **D.** $\min P = -91$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Ta có $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3} \geq 4(x+y)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{array}\right.$. Mặt khác $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \leq 8 \Rightarrow x + y \in [4;8]$

Xét biểu thức $P = 4\left(x^2 + y^2\right) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy$ và đặt

$t = x + y \in [4;8] \Rightarrow P = 4t^2 + 7xy$.

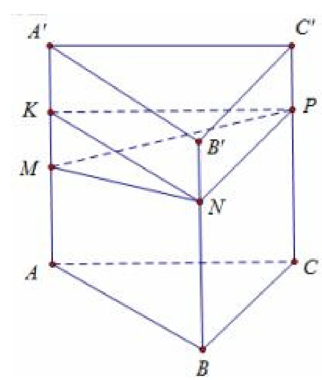
Lại có $(x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9 \Rightarrow P \geq 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63 = 4t^2 - 21t - 63$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$ trên đoạn $[4;8]$ suy ra $P_{\min} = f(7) = -83$

Câu 27: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện ABC.MNP bằng:

A. $\dfrac{2}{3}V$ **B.** $\dfrac{9}{16}V$ **C.** $\dfrac{20}{27}V$ **D.** $\dfrac{11}{18}V$

Hướng dẫn giải: Đáp án D



Gọi K là hình chiếu của P trên AA'

Khi đó $V_{ABC.KPN} = \dfrac{2}{3}V; V_{M.KPN}$

$= \dfrac{1}{3}MK.S_{KNP} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{6}AA'S_{ABC} = \dfrac{1}{18}V$

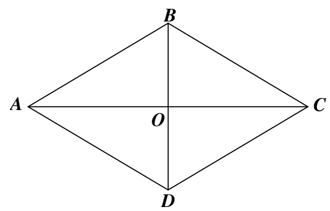
Do đó $V_{ABC.MNP} = \dfrac{2}{3}V - \dfrac{1}{18}V = \dfrac{11}{18}V$

Câu 28: Giải phương trình $\sin 3x - 4\sin x.\cos 2x = 0$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải: Đáp án B

Câu 29: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O (như hình vẽ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?



A. Phép quay tâm O, góc $-\frac{\pi}{2}$ biến tam giác OCD thành tam giác OBC.

B. Phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{DA}$ biến tam giác DCB thành tam giác ABD.

C. Phép vị tự tâm O, tỷ số $k=1$ biến tam giác ODA thành tam giác OBC.

D. Phép vị tự tâm O, tỷ số $k=-1$ biến tam giác CDB thành tam giác ABD.

Hướng dẫn giải: Đáp án D

Câu 30: Cho cấp số nhân $(u_n); u_1=1, q=2$. Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy?

A. 10 **B.** 8 **C.** 11 **D.** 9

Hướng dẫn giải: Đáp án C

Câu 31: Một cái hộp đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ cái hộp đó.Tính xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 là bi xanh.

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{2}{15}$ **C.** $\frac{11}{12}$ **D.** $\frac{7}{24}$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

Câu 32: Cho hai hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$ **B.** $f(x)$ liên tục tại $x=0$

C. $f(\sqrt{2})<0$ **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$

Hướng dẫn giải: Đáp án D

B. Phần tự luận (2 điểm)

Bài 1. Giải phương trình $\frac{\cos x+\sin^3 x}{\sin x-\sin^2 x}=1+\sin x+\cot x$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\sin x\neq 0, \sin x\neq 1$ hay $x\neq k\pi, x\neq \frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\cos x+\sin^3 x=(1-\sin x)(\sin x+\sin^2 x+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sin^3 x=\sin x\cos^2 x+\cos x-\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x=\cos^2 x-\cos x \text{ (vì } \sin x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 2. Nhân dịp kỷ niệm ngày Nhà giáo Việt Nam, trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu tuyển chọn được 24 tiết mục văn nghệ tiêu biểu, trong số đó lớp 11A có 2 tiết mục để công diễn trong toàn trường. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành hai buổi công diễn, mỗi buổi 12 tiết mục. Tính xác suất để 2 tiết mục của lớp 11A được biểu diễn trong cùng một buổi.

Hướng dẫn giải:

Gọi hai buổi công diễn là I, II. Số cách chia 24 tiết mục thành hai buổi công diễn chính là số cách chọn 12 tiết mục cho buổi I, đó là C_{24}^{12}.

Gọi A là biến cố "2 tiết mục của lớp $11A$ được biểu diễn trong cùng một buổi".

Nếu 2 tiết mục của lớp $11A$ cùng biểu diễn trong buổi I thì số cách chọn 10 tiết mục còn lại cho buổi I là C_{22}^{10}. Hai tiết mục của lớp $11A$ cũng có thể cùng biểu diễn trong buổi II.

Vì vậy, số cách chia để biến cố A xảy ra là $2.C_{22}^{10}$.

Do đó $P(A)=\frac{2.C_{22}^{10}}{C_{24}^{12}}=\frac{11}{23}\approx 0,4783$.

Ghi chú. Xác suất cũng có thể được tính theo công thức $P(A)=\frac{2.C_{12}^{2}}{C_{24}^{2}}=\frac{11}{23}$.

Bài 3. Tính hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $\left[\sqrt{x}+3(1-\frac{1}{x})\right]^n$, $(x>0)$, biết rằng n là số nguyên dương thoả mãn $3C_{n+1}^1+8C_{n+2}^2=3C_{n+1}^3$.

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết ta có $3(n+1)+8.\frac{(n+2)(n+1)}{2}=3.\frac{(n+1)n(n-1)}{6}, n\geq 2$

$$\Leftrightarrow 6+8(n+2)=n(n-1)\Leftrightarrow n^2-9n-22=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=11 \\ n=-2 \end{array}\right.\Leftrightarrow n=11.$$

Theo khai triển nhị thức Newton ta có

$$\left[\sqrt{x}+3\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^{k}.(\sqrt{x})^{11-k}.3^k\left(1-\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^{k}.3^k(\sqrt{x})^{11-k}.\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{(-1)^i}{x^i}$$

$$=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^{k}.3^k.\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-1)^i x^{\frac{11-k}{2}-i}.$$

Xét phương trình $\frac{11-k}{2}-i=4,\ 0\leq i\leq k\leq 11 \Leftrightarrow k+2i=3,\ 0\leq i\leq k\leq 11\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1, i=1 \\ k=3, i=0 \end{array}\right.$

Suy ra hệ số của x^4 là $C_{11}^1.3.C_1^1.(-1)^1+C_{11}^3.3^3=4422.$

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}+\frac{2\sqrt{3}}{1+z}$.

Hướng dẫn giải:

+ Biểu thức thứ 1 và 2 có tính **đối xứng theo hai biến** x,y

+ Sử dụng bất đẳng thức đại số và điều kiện đánh giá hai biểu thức thứ 1 và 2 nhằm đưa về hàm theo biến z

B1• Ước lượng biểu thức P về hàm một biến số.

Theo bất đẳng thứ **Cauchy** ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}\geq\frac{2}{\sqrt[4]{(x^2+xy)(y^2+yx)}}\geq\frac{2}{\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2+xy}{2}}}=\frac{2}{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}\geq\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad(1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=y$. Kết hợp với điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$, ta được:

$$P\geq\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{12}}{z+1}=\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{\sqrt{12}}{z+1}=f(z)$$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến z.

Do x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$ nên $0<z<1$

Vậy $z\in(0;1)$

B3• Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(z)=\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{\sqrt{12}}{z+1}$ trên khoảng $(0;1)$

Ta có: $f'(z)=\frac{2z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}-\frac{\sqrt{12}}{(1+z)^2}=\frac{2z(1+z)^2-\sqrt{12}(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}{(1+z^2)^2(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}$

$$f'(z)=0\Leftrightarrow 2z(1+z)^2-\sqrt{12}(1-z^2)\sqrt{1-z^2}=0\Leftrightarrow 16z^6+16z^5-12z^4+16z^3+40z^2-12=0$$

$$\Leftrightarrow 4(z+1)^3(2z-1)(2z^2-3z+3)=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

z	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		$\searrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(z)\geq\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\forall z\in(0;1)$ $\Rightarrow P\geq\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $x=y=\frac{\sqrt{6}}{4}, z=\frac{1}{2}$.

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ đạt khi $x=y=\frac{\sqrt{6}}{4}, z=\frac{1}{2}$. ❒

----------- HẾT -----------