

Ngày thi: 28/10/2020

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
 (Đề thi gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1 (4,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{2a+b+3ab} + \frac{bc}{2b+c+3bc} + \frac{ca}{2c+a+3ca} \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 2 (4,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ sao cho $p^2 + 3pq + q^2$ là một số chính phương.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho dãy số $(a_n): a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}$ và $a_{n+1} = \frac{a_n^2 a_{n-1} + a_n(n - a_{n-1}) + 2}{n+2}, \forall n \geq 2$.

1. Tìm giới hạn của dãy số (a_n) .

2. Xét dãy số $(b_n): b_1 = 1, b_n = \sqrt[n]{a_n}, \forall n \geq 2$. Chứng minh $\lim b_n = 1$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm T cho trước. Một điểm M di động trên (O) , tiếp tuyến của (O) tại M cắt d tại P . Gọi (C) là đường tròn tâm J đi qua M và tiếp xúc với d tại P và I là điểm đối xứng với P qua J .

1. Chứng minh $OI = IP$ và (C) tiếp xúc với một đường tròn cố định.

2. Tìm quỹ tích tâm J của đường tròn (C) khi M di động trên (O) .

Câu 5 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng cho n điểm phân biệt và m đường thẳng phân biệt. Gọi k là số bộ (A, a) sao cho $A \in a$ với A là một trong các điểm đã cho và a là một trong các đường đã cho.

1. Tìm giá trị lớn nhất của k với $n = 6$ và $m = 5$.

2. Với $n = 66$ và $m = 16$, chứng minh $k \leq 159$.

———— HẾT ————

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Giám thị coi thi số 1: Giám thị coi thi số 2: