

Họ và tên thí sinh: Chữ ký giám thị 1:
Số báo danh:

SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

*** Môn thi: TOÁN**

*** Ngày thi: 14/01/2024**

*** Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)**

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Cho tam giác ABC có diện tích S thỏa mãn đẳng thức $S = BC^2 - (AC - AB)^2$.

Tính $\tan A$.

b) Giải phương trình: $(1 - \cos x) \cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x$.

Câu 2 (4,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = 16 \\ u_{n+1} + 14 = \frac{15(nu_n + 1)}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(u_n - 1) + 14^n}{2024 \cdot 15^n}$.

Câu 3 (4,0 điểm).

Giải phương trình: $\log_3(x^3 + 3x^2 - 4x + 1) = \log_9(x^2 - x + 1) - \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3)$.

Câu 4 (4,0 điểm).

a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa cạnh BC . Biết rằng hình đa giác tạo bởi giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng $\frac{5\sqrt{2}a^2}{6}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (P) .

b) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$ (tam giác ABC không cân). Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC . Đường phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại điểm $E (E \neq A)$. Đường thẳng d đi qua điểm I và vuông góc với AE cắt đường thẳng BC tại điểm K . Đường thẳng KA, KE cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm $M, N (M \neq A; N \neq E)$. Đường thẳng ND, NI cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm $P, Q (P \neq N; Q \neq N)$. Chứng minh rằng EQ là đường trung trực của đoạn thẳng MP .

Câu 5 (4,0 điểm).

a) Một thùng đựng 27 viên bi được đánh số từ 1 đến 27, mỗi bi mang một số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, tính xác suất để các số ghi trên bi lập thành một cấp số cộng.

b) Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ và } f(xy) = f(x) \cdot f\left(\frac{4}{y}\right) + f(y) \cdot f\left(\frac{4}{x}\right), \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Gồm có 05 trang)

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.Ta có $S = BC^2 - (AC - AB)^2 = a^2 - (b - c)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc \sin A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - b^2 + 2bc - c^2 \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc \sin A = 2bc - 2bc \cos A \Leftrightarrow \cos A = 1 - \frac{1}{4} \sin A \quad (*) \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\text{Lại có } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Leftrightarrow \sin^2 A + \left(1 - \frac{1}{4} \sin A\right)^2 = 1 \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{16} \sin^2 A - \frac{1}{2} \sin A = 0 \Leftrightarrow \sin A = \frac{8}{17} \text{ (do } \sin A > 0) \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\text{Kết hợp với } (*) \text{ ta được: } \cos A = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan A = \frac{8}{15}. \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\text{b) Điều kiện: } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)} \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow (1 - \cos x) \frac{\cos x}{\sin x} + \cos 2x + \sin x = \sin 2x \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \cos^2 x + \cos 2x \sin x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x \cos x \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 - 2 \sin^2 x) + \cos 2x \sin x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cos 2x + \cos 2x \sin x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x + \sin x - 1 = 0 \end{cases} \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$+ \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}. \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$+ \cos x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \\ x = l2\pi \end{cases} \text{ (} l \in \mathbb{Z} \text{)} \quad (0,25 \text{ đ})$$

Kết hợp điều kiện, phương trình đã cho có các nghiệm là:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \text{ (} k, l \in \mathbb{Z} \text{)}. \quad (0,25 \text{ đ})$$

Câu 2 (4,0 điểm).

$$\text{Ta có: } u_{n+1} + 14 = \frac{15(n.u_n + 1)}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} + 14(n+1) = 15.n.u_n + 15 \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - (n+1) = 15.(n.u_n - n) \quad (2) \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\text{Đặt } v_n = n.u_n - n, n \in \mathbb{N}^*, \text{ khi đó (2) được viết lại: } v_{n+1} = 15.v_n, \forall n \geq 1. \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\text{Suy ra } (v_n) \text{ là cấp số nhân với công bội } q = 15. \quad (0,25 \text{ đ})$$

Ta có: $v_n = 15^{n-1} \cdot v_1$, $n \in \mathbb{N}^*$ mà $v_1 = u_1 - 1 = 15$ nên $v_n = 15^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. (0,5 đ)

Do đó $15^n = n \cdot u_n - n \Leftrightarrow u_n = \frac{15^n + n}{n}$. (0,5 đ)

Khi đó: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(u_n - 1) + 14^n}{2024 \cdot 15^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{15^n + 14^n}{2024 \cdot 15^n}$ (0,5 đ)

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{14^n}{15^n}}{2024}$ (0,5 đ)

$= \frac{1}{2024}$. (0,25 đ)

Câu 3 (4,0 điểm).

Điều kiện: $x^3 + 3x^2 - 4x + 1 > 0$ (0,25 đ)

Ta có: pt $\Leftrightarrow \log_3(x^3 + 3x^2 - 4x + 1) - \log_3(x^2 + 3) = \frac{1}{2} \log_3(x^2 - x + 1)$ (0,5 đ)

$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3} = \log_3 \sqrt{x^2 - x + 1}$ (0,5 đ)

$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x + 3 - \frac{7x + 8}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1}$ (0,5 đ)

$\Leftrightarrow \left[(x + 3) - \sqrt{x^2 - x + 1} \right] - \frac{7x + 8}{x^2 + 3} = 0$ (0,25 đ)

$\Leftrightarrow \frac{7x + 8}{\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 3)} - \frac{7x + 8}{x^2 + 3} = 0$ (0,25 đ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{7} \text{ (tm)} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 3)} - \frac{1}{x^2 + 3} = 0, (*) \end{cases}$ (0,5 đ)

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 3) = x^2 + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = x^2 - x$ (0,25 đ)

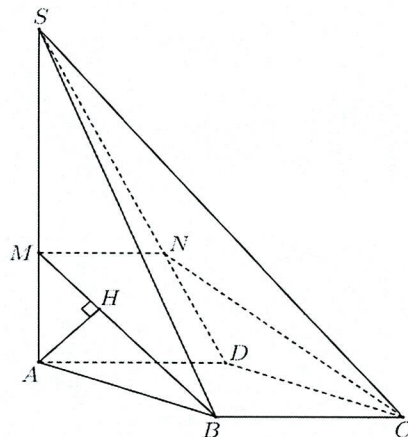
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - x + 1} \right)^2 - \sqrt{x^2 - x + 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (0,5 đ)

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2}$ (thỏa mãn đk) (0,25 đ)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ -\frac{8}{7}; \frac{1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2} \right\}$. (0,25 đ)

Câu 4 (4,0 điểm).

a)



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (P) với $SA, SD \Rightarrow MN \parallel AD$; (0,25 đ)

kẻ $AH \perp BM$ tại H . Ta có: $AD \perp SA; AD \perp AB \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp (SAB)$
 $\Rightarrow MN \perp MB$ và $MN \perp AH$

$\Rightarrow$ Thiết diện là hình thang vuông $BMNC$ có diện tích là $\frac{MB}{2} \cdot (MN + BC)$ (0,25 đ)

$AH \perp MN, AH \perp BM, MN \parallel AD \Rightarrow AH$ là khoảng cách từ AD đến (P) . (0,25 đ)

Đặt $AM = x$ ($0 < x < 3a$) $\Rightarrow SM = 3a - x$. Ta có: $\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA}$ (do $MN \parallel AD$)

$$\Rightarrow \frac{MN}{a} = \frac{3a - x}{3a} \Rightarrow MN = \frac{3a - x}{3}, \text{ mà } MB = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\text{Diện tích thiết diện là } \frac{5\sqrt{2}a^2}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2} \cdot \left(\frac{3a - x}{3} + a \right) = \frac{5\sqrt{2}a^2}{6} \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + x^2} \cdot (6a - x) = 5\sqrt{2}a^2 \Rightarrow (a^2 + x^2)(36a^2 - 12ax + x^2) = 50a^4$$

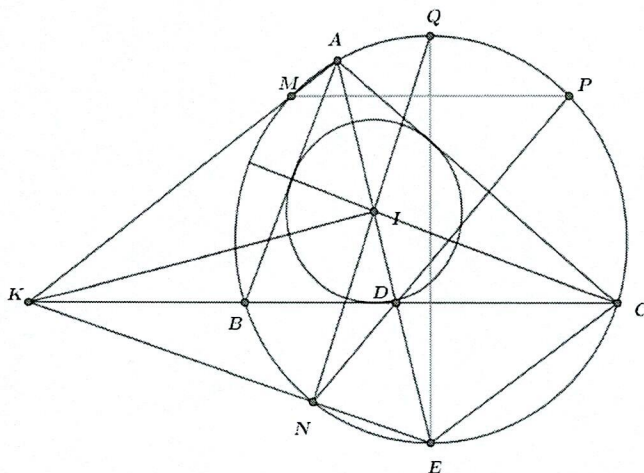
$$\Rightarrow x^4 - 12ax^3 + 37a^2x^2 - 12a^3x - 14a^4 = 0$$

$$\Rightarrow (x - a)(x - 7a)(x^2 - 4ax - 2a^2) = 0 \Rightarrow x = a \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\Rightarrow MB = a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{AM \cdot AB}{MB} = \frac{a \cdot a}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (0,5 \text{ đ})$$

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (P) là $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

b)



Xét tam giác IEC ta có: $\widehat{EIC} = \widehat{ICE}$ nên tam giác IEC cân tại E (0,25 đ)

Nên $EB = EI = EC \Rightarrow KI$ tiếp tuyến của đường tròn (E, EI) . (0,25 đ)

Khi đó $KI^2 = KB.KC = KN.KE$ nên $IN \perp KE \Rightarrow EQ$ là đường kính của (O) (0,25 đ)

Mặt khác do $IN \perp KE \Rightarrow KM.KA = KN.KE = KI^2 \Rightarrow IM \perp KA$ nên tứ giác $IMKN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QNM} = \widehat{AKI}$ (0,25 đ)

Ta lại có: $\widehat{BKN} = \frac{1}{2}\widehat{sđCE} - \frac{1}{2}\widehat{sđBN} = \frac{1}{2}\widehat{sđNE} = \widehat{EAN}$ nên tứ giác $ADNK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{AND}$ (0,25 đ)

Lại có $\widehat{IKD} = 90^\circ - \widehat{IDK} = 90^\circ - \widehat{IAC} - \widehat{ACB}$

$$= \frac{1}{2}\widehat{sđQBE} - \frac{1}{2}\widehat{sđCE} - \frac{1}{2}\widehat{sđAB} = \frac{1}{2}\widehat{sđQBE} - \frac{1}{2}\widehat{sđBE} - \frac{1}{2}\widehat{sđAB} \\ = \frac{1}{2}\widehat{sđAQ} = \widehat{ANQ} \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{AKD} - \widehat{IKD} = \widehat{AND} - \widehat{ANQ} = \widehat{INP}$$

$\Rightarrow \widehat{MNI} = \widehat{INP} \Rightarrow Q$ là điểm chính giữa cung MP (0,25 đ)

Mà QE là đường kính $\Rightarrow EQ$ là đường trung trực của đoạn thẳng MP . (0,25 đ)

Câu 5 (4,0 điểm).

a) Số cách lấy ngẫu nhiên 4 viên bi là $C_{27}^4 \Rightarrow n(\Omega) = C_{27}^4$ (0,5 đ)

Gọi 4 số hạng của cấp số cộng tăng là $x; x+d; x+2d; x+3d; d > 0$

Ta có $1 \leq x; x+3d \leq 27 \Rightarrow d \leq 8$ (0,25 đ)

Các số hạng trong cấp số cộng nguyên dương nên $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$

Trong mỗi trường hợp thỏa mãn đề bài, để đếm số cấp số cộng thỏa mãn ta chỉ cần đếm x .

Ta có $u_4 = u_1 + 3d; u_4 \leq 27 \Leftrightarrow x + 3d \leq 27 \Leftrightarrow x \leq 27 - 3d$ (0,25 đ)

Lại có $x \geq 1$ nên

$d = 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 24 \Rightarrow$ có 24 cấp số cộng

$d = 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 21 \Rightarrow$ có 21 cấp số cộng

...

$d = 8 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow$ có 3 cấp số cộng (0,5 đ)

Gọi biến cố A : “các số ghi trên bi lập thành một cấp số cộng”

$$n(A) = 24 + 21 + 18 + \dots + 3 = 108 \quad (0,25 \text{ đ})$$

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{108}{17550}$. (0,25 đ)

b) Từ đề bài ta có $f(x) > 0, \forall x > 0$. (0,25 đ)

Xét phương trình $f(xy) = f(x)f\left(\frac{4}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{4}{x}\right), \forall x, y \in (0; +\infty)$

Cho $x = y = 1$ ta được $f(1) = f(1).f(4) + f(1).f(4) \Rightarrow f(4) = \frac{1}{2}$. (0,5 đ)

Cho $y = 1$ ta được $f(x) = f(x).f(4) + f(1).f\left(\frac{4}{x}\right) \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{4}{x}\right)$ (0,5 đ)

Cho $y = \frac{4}{x}$ ta được $f(4) = f(x).f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right).f\left(\frac{4}{x}\right) \Rightarrow [f(x)]^2 = \frac{1}{4}$ (0,25 đ)

Vì $f(x) > 0, \forall x > 0$ nên $f(x) = \frac{1}{2}$. (0,25 đ)

Thử lại thấy $f(x) = \frac{1}{2}$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài. (0,25 đ)

----- HẾT -----

*** Chú ý:** Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.