

1A. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

HÀM BẬC BA

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Câu 1. Hàm số $y = x^3 + 3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-2; 0)$. D. $(0; 4)$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$. Mệnh đề nào dưới đây *sai*?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 5)$.

Lời giải tham khảo

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 17$	$\searrow -15$	$\nearrow +\infty$	

Câu 3. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số**Câu 4.** Hàm số $y = 3x - 4x^3$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải tham khảoCác khoảng nghịch biến của hàm số: $y = 3x - 4x^3$ làTập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3 - 12x^2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (3; +\infty)$.
 D. Hàm số chỉ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Lời giải tham khảoTập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\text{Cho: } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+	0	0	+
y				

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (3; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên $(-1; 3)$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 6. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\mathbb{R}$.

B. $(-\infty; -1), (3; +\infty)$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-1; 3)$.

Câu 7. Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\mathbb{R}$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 9. Hàm số $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 3)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. Không có.

Câu 10. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. Không có.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 1)$. B. $(-1; 3)$.
C. $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$. B. $(0; 2)$.
C. $(2; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Cho hàm số $y = -3x^3 - 3x^2 - x + \frac{3}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm. B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
C. Hàm số trên đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. D. Hàm số trên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Câu 14. Hàm số $y = 2x^3 - 6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1), (1; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $[-1; 1]$. D. $(0; 1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 15. Hàm số $y = 2x^3 - 6x + 20$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1), (1; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $[-1; 1]$. D. $(0; 1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ Dạng 2. Tìm điều kiện để hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$

Câu 16. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 3$. B. $m < 3$. C. $m \leq 3$. D. $m \geq 3$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 17. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x + 7$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 1$. B. $m = 2$. C. $m \leq 1$. D. $m \geq 2$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

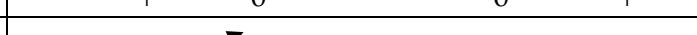
Đạo hàm: $y' = -x^2 + (m-1)$

+ Nếu $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1 \Rightarrow y' < 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow y' < 0 \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow x^2 = m-1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m-1}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{m-1}$	$\sqrt{m-1}$	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\sqrt{m-1}; \sqrt{m-1})$ không thỏa mãn đề bài.

Vậy với $m \leq 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 18. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{m}{2}x^2 + mx + 1$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \in (0; 4)$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. D. $m \in [0; 4]$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = x^2 - mx + m; y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Câu 19. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{mx^2}{2} + 2x + 2016$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2\sqrt{2}$.

B. $|m| \leq 2\sqrt{2}$.

C. $m \leq -2\sqrt{2} \vee m \geq 2\sqrt{2}$.

D. Một kết quả khác.

Lời giải tham khảoTập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 - mx + 2$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}.$$

Câu 20. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+2)x^2 - (m-1)x - 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\frac{-7-\sqrt{45}}{2} \leq m \leq \frac{-7+\sqrt{45}}{2}$.

B. $\frac{-7+\sqrt{45}}{2} < m < \frac{7+\sqrt{45}}{2}$.

C. $\frac{-7-\sqrt{45}}{2} < m < \frac{-7+\sqrt{45}}{2}$.

D. $\frac{-7+\sqrt{45}}{2} \leq m \leq \frac{7+\sqrt{45}}{2}$.

Lời giải tham khảoTập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2(m+2)x - (m-1)$$

$$Ycbt \Leftrightarrow \Delta_f = m^2 + 7m + 1 \quad \dots \Leftrightarrow \frac{-7-\sqrt{45}}{2} \leq m \leq \frac{-7+\sqrt{45}}{2}.$$

Câu 21. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1-m}{3}x^3 - 2(2-m)x^2 + 2(2-m)x + 5$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $2 < m < 5$.

B. $m > -2$.

C. $m = 1$.

D. $2 \leq m \leq 3$.

Lời giải tham khảoTa có $y' = (1-m)x^2 - 4(2-m)x + 2(2-m)$ TH1: $m = 1$ thì $y' = -4x + 4$. Với $m = 1$ thì hàm số không nghịch biến trên TXĐTH2: $m \neq 1$ để hàm số luôn nghịch biến thì điều kiện là:

$$\begin{cases} 1-m < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 - 5m + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3.$$

Câu 22. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + (m-2)x - 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m < 0$.

Lời giải tham khảo

$$y = mx^3 - (2m-1)x^2 + (m-2)x - 2$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3mx^2 - 2(2m-1)x + m-2$$

+ Nếu $m = 0$ thì $y' = 2x - 2$ âm khi $x < 1$ nên hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ (loại).

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$\begin{aligned} +\text{Do đó Hàm số luôn đồng biến trên } \mathbb{R} &\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a = 3m > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 - 3m(m - 2) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)^2 \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \end{aligned}$$

Vậy: với $m > 0$ thì hàm số luôn đồng biến trên D .

Câu 23. Cho hàm số $y = mx^3 - (2m - 1)x^2 + mx - 7$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Không có giá trị.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số giá trị.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = 3mx^2 - 2(2m - 1)x + m$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dạng 3. Tìm điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng K cho trước

Câu 24. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx + 5$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. -1.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3m$

+ Nếu $m < 0$ thì $y' > 0 \forall x$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (nên $m < 0$ bị loại)

+ Nếu $m > 0 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m \Leftrightarrow x^2 = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{m} \\ x = \sqrt{m} \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	$\sqrt{m}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\sqrt{m}; \sqrt{m})$.

Do đó hàm số nghịch biến trong khoảng $(-1; 1)$ thì $m = 1$.

Câu 25. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

A. $m < 10$.

B. $m > 10$.

C. $m \leq -10$.

D. $m > 5$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m + 1$

Theo giả thiết $y' \leq 0 \forall x \in (-1; 1)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 1 \leq -m \quad \forall x \in (-1; 1)$$

Xét $g(x) = 3x^2 + 6x + 1$ liên tục trên $(-1; 1)$. Ta có $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$

$$\Rightarrow g(x) \text{ đồng biến trên } (-1; 1) \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = -2; \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 10$$

Lập bảng biến thiên đối với hàm số $g(x) \Rightarrow -m \geq 10 \Leftrightarrow m \leq -10$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Câu 26. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

A. $m \geq \frac{12}{7}$.

B. $m < \frac{12}{7}$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m > \frac{7}{12}$.

Lời giải tham khảo

Đạo hàm: $y' = -x^2 + 2(m-1)x + m + 3$

$$\Rightarrow y'(0) \geq 0 \text{ và } y'(3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ -9+6m-6+m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m > \frac{7}{12} \end{cases}$$

Câu 27. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \leq 3$.

C. $m \geq 3$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x > 0$

$$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 6x, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \geq \max(-3x^2 + 6x) = 3.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 28. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

A. $m = 1$.

B. $m \geq 1$.

C. $m = 2$.

D. $m \leq 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 29. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

A. $m \leq 1$.

B. $m \leq -3$.

C. $m > 3$.

D. $m \leq 3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 30. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

A. $m \geq 0$.

B. $m \leq 0$.

C. Không có m .

D. Mọi $m \in \mathbb{R}$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

Dạng 4. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Câu 31. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
C. $(1; +\infty)$. D. $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	$-$	0	$+$	0	$+$				
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 32. Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(3; 4)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; -1), (0; 1)$.

Lời giải tham khảo

$y = -x^4 + 2x^2 + 4$, $y' = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	$-$	$+$	$-$			
y		$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1), (0; 1)$.

Câu 33. Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - \frac{3}{2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$. B. $(0; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ và $(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty)$.
C. $(\sqrt{3}; +\infty)$. D. $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

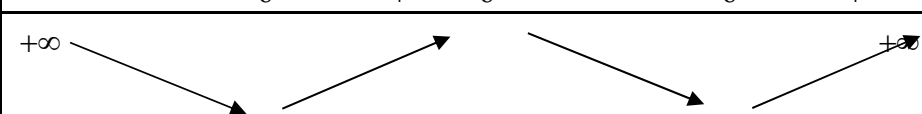
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Đạo hàm: $y' = 2x(x^2 - 3) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$



Câu 34. Hàm số $y = x^4 + 8x^3 + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-6; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; -6)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

$y' = 4x^3 + 24x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-6	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y				





BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 35. Hàm số $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(-\infty; -2), (-1; 0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	$\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$

Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$.

B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$.

C. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + \frac{5}{2}$.

D. $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 37. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $m \leq 1$.

B. $0 < m \leq 1$.

C. $m > 0$.

D. $m \leq 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 38. Hàm số $y = \frac{x^4}{2} - x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty, 0); (1, +\infty)$. B. $(-\infty, -1); (0, 1)$. C. $(-1, 0); (1, +\infty)$. D. $(-\infty, +\infty)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 39. Hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 40. Hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$. B. $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$.
 C. $(-\infty; -\frac{3}{2})$. D. Trên $\mathbb{R}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 41. Hàm số $y = -\frac{x^4}{2} + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-3; 4)$. D. $(-\infty; 1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

HÀM PHÂN THỨC

Dạng 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Câu 42. Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng thuộc D: $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 43. Hàm số $y = x - \frac{2}{x}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. B. $(1; 0)$. C. $\mathbb{R}$. D. Không có.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Đạo hàm: $y' = 1 + \frac{2}{x^2} > 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến.

Bảng biến thiên:

x	$+\infty$	0	$+\infty$
y'	+	+	
y			1

Câu 44. Hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. Không có.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Đạo hàm: $y' = -1 - \frac{4}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên D.

Câu 45. Hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.
C. $\mathbb{R}$. D. Không có.

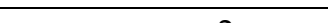
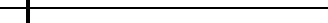
Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y						

Vậy khoảng nghịch biến của hàm số là $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.**BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓****Câu 46.** Hàm số $y = \frac{x^2 - 8x + 9}{x - 5}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 5)$ và $(5; +\infty)$. B. $(5; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. Không có.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 47. Hàm số $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1); (1; +\infty)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 48. Hàm số $y = \frac{x + 2}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số**Câu 49.** Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$. B. $(1; 0)$. C. $\mathbb{R}$. D. Không có.

Lời giải tham khảoTập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ Đạo hàm: $y' = 1 + \frac{4}{(x+2)^2} > 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên D .**Câu 50.** Hàm số $y = \frac{1}{x+1} - 2x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. Không có.

Lời giải tham khảoTập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ Đạo hàm: $y' = -\frac{1}{(x+1)^2} - 2 \leq 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên D .**Câu 51.** Hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. $(-1; 1)$.

Lời giải tham khảoTập xác định: $D = \mathbb{R}$.Đạo hàm: $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0
y	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Vậy khoảng đồng biến của hàm số là $(-1; 1)$.**Câu 52.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$	$+$	
y	2	$-\infty$	2

Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{2x-5}{x-2}$. B. $y = \frac{2x-3}{x+2}$. C. $y = \frac{x+3}{x-2}$. D. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

Lời giải tham khảoDựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có TCĐ $x = 2$, TCN $y = 2$. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+3}{1-x}$.

D. $y = \frac{x+3}{x-2}$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

C. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

D. $y = \frac{x+3}{2x+1}$.

Câu 55. Cho hàm số $y = \frac{2x+7}{x+2}$ có đồ thị (C). Hỏi mệnh đề nào dưới đây *sai*?

A. Hàm số có tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

B. Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{-7}{2}; 0\right)$.

C. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Có đạo hàm $y' = \frac{-3}{(x+2)^2}$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ac \neq 0, ad - bc \neq 0$) và D là tập xác định của hàm

số. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, khi $y' > 0 \forall x \in D$.
- B. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, khi $y' \geq 0 \forall x \in D$.
- C. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định, khi $y' < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định, khi $y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 57. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 58. Cho hàm số $y = \frac{4}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Nghịch biến trên $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- C. Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2); (2; +\infty)$.
- D. Đồng biến trên các $(-\infty; 2); (2; +\infty)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- B. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- D. Hàm số luôn luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 60. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- B. Hàm số không xác định tại điểm $x = 1$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 61. Cho hàm số $y = \frac{x^2+x-1}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.
Nghịch biến trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.
- B. Đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. Nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- C. Đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- D. Đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 62. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 6. Tìm điều kiện để hàm số đơn điệu

Câu 63. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $m < -2$.

B. $m \leq -2$.

C. $m > -2$.

D. $m \geq -2$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{-2-m}{(x-2)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow -2-m < 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Câu 64. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+7m-8}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $-8 < m < 1$.

B. $-8 \leq m \leq 1$.

C. $-4 < m < 1$.

D. $-4 \leq m \leq 1$.

Lời giải tham khảo

$$y' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m > 0.$$

Câu 65. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2-mx+2}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $m \geq 3$.

B. $m < 3$.

C. $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

D. $m < -2\sqrt{2}$ hoặc $m > 2\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = \frac{x^2-2x+m-2}{(x-1)^2} \geq 0, \forall x \neq 1 \Leftrightarrow x^2-2x+m-2 \geq 0, \forall x \neq 1 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Câu 66. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $m < 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m = 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } y' = \frac{1-m}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow m < 1.$$

Câu 67. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

A. $m < 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $m < 2$.

D. $m \leq 2$.

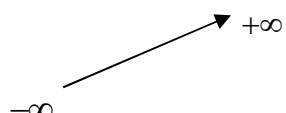
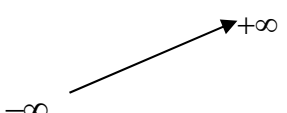
Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{-m}{(x-m)^2}.$$

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	+		+
y			

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$

Câu 68. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 25}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

A. $-5 \leq m \leq 5$.B. $-5 < m \leq -1$.C. $-5 < m < 5$.D. $m \geq -1$.*Lời giải tham khảo*

$$y' = \frac{m^2 - 25}{(x + m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1) \Leftrightarrow y' < 0 \quad \forall x \in \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 25 < 0 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m \leq -1.$

Câu 69. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2 + mx}{2x + m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.B. $-2 < m < 2$.C. $-2 \leq m \leq 2$.D. $m < -2$ hoặc $m > 2$.*Lời giải tham khảo*

Ta có $y' = \frac{m^2 - 4}{(2x + m)^2} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{2} \right\} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$

HÀM BẬC HAI, CĂN, LƯỢNG GIÁC, LOGARIT

Dạng 7. Xét tính đơn điệu của hàm số

Câu 70. Hàm số $y = x^2 - 4x + 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 2x - 4$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ và } f(2) = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	$\searrow$ -2 $\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 71. Hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$.
C. $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = -x - 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $f(-1) = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$+\infty$	-1	$-\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	$\nearrow$ 2 $\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 72. Hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$.
C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = x - 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ và } f(2) = 3.$$

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.**Câu 73.** Hàm số $y = x^2 + 2x + 5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

*Lời giải tham khảo*Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.Đạo hàm: $y' = 2x + 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $f(-1) = 4$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.**Câu 74.** Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

*Lời giải tham khảo*Tập xác định: $D = [0; 2]$.Đạo hàm: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \forall x \in (0; 2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x		0	1	2	
y'		+	0	-	
y		$-\infty$	2	$-\infty$	

Câu 75. Hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-2; 0)$. C. $(-2; 2)$. D. $\mathbb{R}$.

*Lời giải tham khảo*Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

Đạo hàm: $y' = -\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
 $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$
y				2	

Câu 76. Hàm số $y = \sqrt{2+x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $(-1; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

$$D = [-1; 2]$$

$$y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{2+x-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
y'		$+$	0
y			

Câu 77. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > -2$. B. $m > 0$. C. $m > -1$. D. $m > 1$.

Lời giải tham khảo

$$y = |x+1| - mx = \begin{cases} (m+1)x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ (m-1)x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m > 1.$$

Câu 78. Hàm số $y = \frac{x}{\ln x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(1; e)$. C. $(0; e)$. D. $(e; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D = (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Bảng biến thiên:

x		0	1	e	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$
y					

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số**Câu 79.** Hàm số $y = x \ln x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{1}{10}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$. C. $(e; +\infty)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải tham khảoTập xác định: $D = (0; +\infty)$.Đạo hàm: $y' = \ln x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

Lập bảng biến thiên.

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$.**Câu 80.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{e^x - 1}{e^x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

- A. $\frac{1}{e} \leq m < 1$. B. $m < 1$.
C. $m \leq \frac{1}{e^2}$ hoặc $\frac{1}{e} \leq m < 1$. D. $m < \frac{1}{e^2}$.

Lời giải tham khảoĐặt $t = e^x$; $t \in \left(\frac{1}{e^2}; \frac{1}{e}\right)$. Tìm m từ điều kiện $y' = \frac{-m+1}{(t-m)^2} > 0$; $\forall t \in \left(\frac{1}{e^2}; \frac{1}{e}\right)$.**Câu 81.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số b để hàm số $y = \sin x - bx$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $(-\infty; 1)$. B. $[1; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1]$.

Lời giải tham khảoĐạo hàm: $y' = \cos x - b$ Để hàm số nghịch biến thì $y' \leq 0 \Rightarrow \cos x - b \leq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq b \Leftrightarrow b \geq 1$ vì $|\cos x| \leq 1$.**Câu 82.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-4 \leq m \leq \frac{2}{3}$. B. Không có m . C. $\frac{1}{2} < m \leq 3$. D. $-2 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải tham khảo $y' = m - 3 + (2m+3)\sin x$ Bài toán đưa về $g(t) = m - 3 + (2m+1)t \leq 0, \forall t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \leq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{2}{3}$.**Câu 83.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m \geq 0$. B. $m < 0$. C. $m > 0$. D. $m \leq 0$.

Lời giải tham khảo

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Đặt $t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

$$f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4, f'(t) = 3t^2 + 6t - m = g(t); g'(t) = 6t + 6, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$f(t)$ đồng biến trên $(0; 1) \Leftrightarrow g(t) \geq 0, \forall t \in (0; 1)$

Dựa vào BBT của $g(t)$, ta có $g(0) = -m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Câu 84. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2m \cos x + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 0$. B. $0 \leq m < 1$. C. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$. D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = -2m \sin x + 1$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow -2m \sin x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2m \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: $m = 0, y' = 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Nhận $m = 0$

$$TH2: \begin{cases} m > 0 \\ 2m \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \sin x \leq \frac{1}{2m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 \leq \frac{1}{2m} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}$$

$$TH3: \begin{cases} m < 0 \\ 2m \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \sin x \geq \frac{1}{2m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -1 \leq \frac{1}{2m} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0.$$

Câu 85. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x - mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq -2$. B. $m \leq -\sqrt{3}$. C. $m \geq 2$. D. $m \geq 1$.

Lời giải tham khảo

$$y' = \cos x + \sqrt{3} \sin x - m.$$

Khi đó $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \cos x + \sqrt{3} \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$ xác định, liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 B. Hàm số có cực trị trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải tham khảo

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và có

$$f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{(1 - \cos x)^2 (2 \cos x + 1)}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó, hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 87. Cho bất đẳng thức $x > \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. (1) luôn đúng khi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. B. (1) luôn đúng khi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.
C. (1) luôn đúng khi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. D. (1) luôn đúng khi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải tham khảo

Xét hàm số $f(x) = x - \sin x$ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $f(x) = 1 - \cos x \geq 0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = x - \sin x > f(0) = 0 \Leftrightarrow x > \sin x$.

Mặt khác: với $x = \frac{\pi}{2}$, ta có: $\frac{\pi}{2} > \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Câu 88. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m \leq 0 \vee 1 \leq m < 3$. B. $m < 3$. C. $0 \leq m < 3$. D. $m > 3$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in (0; 1)$. Xét $f(t) = \frac{t - 3}{t - m} \Rightarrow f'(t) = \frac{-m + 3}{(t - m)^2}$

Để $f'(t) = \frac{-m + 3}{(t - m)^2} > 0, \forall t \in (0; 1) \Rightarrow m \leq 0 \vee 1 \leq m < 3$.

Câu 89. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \cos x}{\sin^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m \leq \frac{5}{4}$. B. $m \geq 1$. C. $m \leq 2$. D. $m \leq 0$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y = \frac{m - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{m - \cos x}{1 - \cos^2 x}$. Đặt $t = \cos x$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, xét hàm $g(t) = \frac{m - t}{1 - t^2}$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi $g'(t) \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 1}{2t}, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Xét hàm $h(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}$, $\forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Ta có $h'(t) = \frac{t^2 - 1}{2t^2} > 0$, $\forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Lập bảng BBT trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, ta có $m \leq \frac{5}{4}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 90. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \leq \frac{5}{4}$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \leq 2$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $y' = \frac{-\cos^2 x + 2m \sin x - 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{-1 + 2m \sin x - \sin^2 x}{\cos^3 x}$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ (*)

Đặt $t = \sin x, t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Ta có: (*) $\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 1}{2t}$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Ta có: $f'(t) = \frac{2(t^2 - 1)}{4t^2} < 0, t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{5}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $m \leq \frac{5}{4}$.

Câu 91. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

A. $m > -1$.

B. $m < -1$.

C. $m \leq -1$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải tham khảo

$y' = \frac{-(1+m)\cos x}{(\sin x - 1)^2}$. Do $\cos x < 0 \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow -(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Câu 92. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m < 0$.

B. $1 < m < 2$.

C. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

D. $m > 2$.

Lời giải tham khảo

1A. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

- Chọn đáp án C.

Đặt $t = \tan x$, $t \in (0; 1)$. Hàm số thành $y = f(t) = \frac{t-2}{t-m} \quad \forall t \in (0; 1)$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{m\}, \quad f'(t) = \frac{-m+2}{(t-m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên D khi: $-m+2 > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Để hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ ta phải có $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

Câu 93. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 10}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 1$.

B. $m \geq 2$.

C. $1 \leq m < 10$.

D. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 10$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \tan x$, $t \in (0; 1)$. Hàm số thành $y = f(t) = \frac{t-10}{t-m} \quad \forall t \in (0; 1)$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{m\}, \quad f'(t) = \frac{-m+10}{(t-m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên D khi: $-m+10 > 0 \Leftrightarrow m < 10$.

Để hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ ta phải có $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 10$.

1B. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

HÀM BẬC BA

Dạng 8. Tìm điểm cực đại, cực tiểu của hàm số

Câu 1. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 4$.

A. $x = -1$.B. $x = 1$.C. $x = -3$.D. $x = 3$.

Lời giải tham khảo

$$y' = -3x^2 + 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 6 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	6	$-\infty$	

Câu 2. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = 3x - 4x^3$.

A. $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.B. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.C. $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 3 - 12x^2; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	1	$-\infty$	

Câu 3. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

A. $(1; 4)$.B. $(3; 0)$.C. $(0; 3)$.D. $(4; 1)$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 3x^2 - 12x + 9; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = -18 \\ x = 1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

1B. Cực trị của hàm số

BBT

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y					

Điểm cực đại $(1; 4)$.**Câu 4.** Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

A. $-3 + 4\sqrt{2}$.

B. $3 - 4\sqrt{2}$.

C. $3 + 4\sqrt{2}$.

D. $-3 - 4\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 3x^2 - 6x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 + 4\sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ là $-3 + 4\sqrt{2}$.

 BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 5. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$.

A. $(0; -2)$.

B. $(2; 2)$.

C. $(1; -3)$.

D. $(-1; -7)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

A. $y_{CD} = \frac{11}{3}$.

B. $y_{CD} = \frac{-5}{3}$.

C. $y_{CD} = -1$.

D. $y_{CD} = -7$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$.

A. $(-1; 2)$.

B. $\left(3; \frac{2}{3}\right)$.

C. $(1; -2)$.

D. $(1; 2)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số có một cực trị.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Giá trị cực đại của hàm số là 2.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1B. Cực trị của hàm số

Câu 9. Tính tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 10. Tính tích giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

A. 0.

B. -3.

C. -6.

D. 3.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 11. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

A. $(1; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $\left(\frac{7}{3}; \frac{-32}{27}\right)$.

D. $\left(\frac{7}{3}; \frac{32}{27}\right)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 12. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$.

A. -1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 13. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$.

A. $y_{CT} = -3$.

B. $y_{CT} = -2$.

C. $y_{CT} = 0$.

D. $y_{CT} = 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 9. Tìm m để hàm số đạt cực đại, cực tiểu

Câu 14. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{mx^2}{3} + 4$ đạt cực đại tại $x = 2$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Lời giải tham khảo

$$y' = -x^2 + \frac{2}{3}mx \Rightarrow y'(2) = \frac{4m}{3} - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

$$y'' = -2x + \frac{2}{3}m \Rightarrow y''(2) = -4 + 2 = -2 < 0 \Rightarrow x = 2.$$

Câu 15. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - m \cdot \frac{x^2}{2} + (2m - 4)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 2$.

- A. $m < 4$. B. $\forall m$. C. $m > 4$. D. $m \neq 4$.

Lời giải tham khảo

$$+ \text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$+ f'(x) = x^2 - mx + 2m - 4$$

$$+ f''(x) = 2x - m$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2m + 2m - 4 = 0 \\ 4 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$$

Câu 16. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- A. Không tồn tại m . B. Có vô số m . C. $m = 6$. D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải tham khảo

$$y'(1) = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{2}. \text{ Hơn nữa, } y''(1) > 0 \Rightarrow \text{không tồn tại } m \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 17. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 3x^2 - 4mx + m^2; y'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy $m = 1$ thỏa.

Câu 18. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 0$. B. $m \neq 0$. C. $m > 0$. D. $m < 0$.

Lời giải tham khảo

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

1B. Cực trị của hàm số

Câu 19. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m^2 - 2m)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 3$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 0$.

Lời giải tham khảo

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 20. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x$ có cực đại và cực tiểu.

A. $m = 3$.

B. $m \neq 3$.

C. $\forall m$.

D. Không có giá trị m .

Câu 21. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx + m$ có cực đại và cực tiểu.

A. $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$.

B. $m \in (-3; 1)$.

C. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

D. $m > -3$.

Câu 22. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - (m-1)x^2 + 2mx + 3$ đạt cực trị tại $x = 1$.

A. $m = -2$.

B. $m = \frac{5}{4}$.

C. $m = -\frac{1}{4}$.

D. $m = 1$.

1B. Cực trị của hàm số

Câu 23. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 10. Tìm m để hàm số đạt cực đại, cực tiểu thỏa điều kiện cho trước

Câu 24. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + 3m+1 \text{ đạt cực trị tại } x_1, x_2 \text{ sao cho } x_1 < 2 < x_2.$$

- A. $m > 0$. B. $m > -1$. C. $m < 0$. D. $m < -1$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(m-2)x + 5m+4 = 0 \quad (1)$

Vậy (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hay } m > 9 \quad (2)$

Để thỏa đk bài toán, ta cần có $(x_2 - 2)(2 - x_1) > 0 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 - 4 > 0 \quad (3)$

Từ định lí Viet với (1) và (3) ta có $m < 0 \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $m < 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 25. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^3}{3} - (m-2)x^2 + (4m-8)x + m+1 \text{ đạt cực trị tại các điểm } x_1, x_2 \text{ sao cho } x_1 < -2 < x_2.$$

- A. $\frac{1}{2} < m$. B. $m < \frac{3}{2}$. C. $1 \leq m$. D. $m \leq 2$.

Lời giải tham khảo

$$y' = x^2 - 2(m-2)x + 4m-8.$$

Yêu cầu bài toán đưa về: $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < -2 < x_2$

$$\text{Khi đó } x_1 + 2 < 0 < x_2 + 2 \Leftrightarrow (x_1 + 2)(x_2 + 2) < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}.$$

Câu 26. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + mx$ đạt cực đại và cực tiểu và có hoành độ các điểm cực trị lớn hơn m .

- A. $m < -2$. B. $m > 1$. C. $m < 2$. D. $m > 2$.

Lời giải tham khảo

Đạo hàm: $y' = x^2 + x + m$

Hàm số đạt cực trị tại những điểm có hoành độ $x > m$

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa } m < x_1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ y'(m) > 0 \\ \frac{S}{2} > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m > 0 \\ m^2 + 2m > 0 \\ -\frac{1}{2} > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m < -2 \vee m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

1B. Cực trị của hàm số

Câu 27. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

- A. $m = -2$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 36 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Hai cực trị thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 28. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho $AB = \sqrt{20}$.

- A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm 2$. C. $m = 1; m = 2$. D. $m = 1$.

Lời giải tham khảo

Ta có : $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$

Để hàm số có hai cực trị thì $m \neq 0$

Hai điểm cực trị $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$

$$AB = \sqrt{20} \Leftrightarrow 16m^6 + 4m^2 = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ 16m^4 + 16m^2 + 20 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 29. Tính khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - mx + m}{x - 1}$.

- A. $2\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Toạ độ 2 điểm cực trị là $I_1(0; -m), I_2(2; 4 - m)$

$$\text{Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị } I_1I_2 = \left| \overline{I_1I_2} \right| = 2\sqrt{5}.$$

 BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 30. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

A. $m = 0$.

B. $m = -1$.

C. $m = -2$.

D. $m = 3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 31. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có cực đại, cực tiểu cách đều gốc tọa độ O .

A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \pm \frac{1}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 32. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 33. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x$.

A. $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $m = \pm \frac{1}{2}$.

C. $m = 0$.

D. $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; m = 0$.

Câu 34. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 2m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $d: y = -2x$.

A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

B. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

C. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Câu 35. Cho điểm $M(-2; 2)$ và đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 1$. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị A, B và tam giác ABM vuông tại M .

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. Không có m .

D. Có vô số giá trị của m .

HÀM BẬC BỐN

Dạng 11. Tìm điểm cực đại, cực tiểu của hàm số

Câu 36. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

- A. $y_{CT} = 2$. B. $y_{CT} = -1$. C. $y_{CT} = 1$. D. $y_{CT} = 0$.

Lời giải tham khảo

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \quad y' = 4x^3 - 4x \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$	$+$
y	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y_{CD} = 1$; HS đạt cực tiểu tại $x = \pm 1 \Rightarrow y_{CT} = 0$.

Câu 37. Hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải tham khảo

Tìm y' ; tìm số nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Câu 38. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$.

- A. 0. B. $\frac{3}{4}$. C. $-\frac{1}{12}$. D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = x^3 + x^2 = x^2(x+1), y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1.$$

Dựa vào bảng biến thiên. Giá trị cực tiểu là: $y(-1) = -\frac{1}{12}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 2$. Mệnh đề sau đây là **đúng**?

- A. Đạt cực tiểu tại $x = 0$. B. Có cực đại và cực tiểu.
C. Có cực đại, không có cực tiểu. D. Không có cực trị.

Lời giải tham khảo

Hàm trùng phương có hệ số a, b cùng dấu và $a = 1$ nên hàm số có một điểm cực tiểu tại $x = 0$.

Dạng 12. Tìm m để hàm số đạt cực trị thỏa điều kiện cho trước

Câu 40. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} - mx^2 + m$ có ba cực trị.

A. $m = 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m > 0$.

D. $m < 0$.

Lời giải tham khảo

$$y' = x^3 - 2mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2m > 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Câu 41. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị.

A. $m \neq 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $m > 0$.

D. $m < 0$.

Lời giải tham khảo

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $y' = 4x^3 + 4mx$.

+ $y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$

+ Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi $m < 0$.

Câu 42. Gọi A, B, C là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

A. $S = 4$.

B. $S = 3$.

C. $S = 2$.

D. $S = 1$.

Lời giải tham khảo

Điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1), B(1;-1), C(-1;-1)$.

ΔABC cân tại A nên ta có diện tích là 2.

Câu 43. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

A. $m = 2$.

B. $m > 4$.

C. $m = -2$.

D. $m < -5$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm m \quad (m \neq 0)$$

Với $m = 2$ ta có $A(0;1), B(-2;-15), C(2;-15), \overline{BC} = (4;0), \overline{AH} = |y_A - y_B| = 16$;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} 4 \cdot 16 = 32.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 44. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m = \pm 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = \pm 2$.

D. $m = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 45. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích 4?

A. $m = 16$.

B. $m = -\sqrt[3]{16}$.

C. $m = \sqrt[3]{16}$.

D. $m = \sqrt[5]{16}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 46. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m = 0$.

B. $m > 0$.

C. $m < 0$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 47. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 - mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

A. $m = -2\sqrt[3]{5}$.

B. $m = 2\sqrt[3]{6}$.

C. $m = 0$.

D. $m = 2\sqrt[3]{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1B. Cực trị của hàm số

Câu 48. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

A. $m > -\frac{1}{3}$.

B. $m = \frac{1}{3}$.

C. $m = -\frac{2}{3}$.

D. $m = \frac{1}{3}; m = -\frac{2}{3}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 49. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = -\sqrt[3]{3}$.

D. $m = \sqrt[3]{3}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Dạng 13. Bài tập tổng hợp về cực trị

Câu 50. Hàm số nào sau đây có cực trị?

A. $y = \frac{2-x}{x^2+2}$.

B. $y = \frac{-x+2}{x+2}$.

C. $y = \frac{x-2}{x+2}$.

D. $y = \frac{x-2}{-x+2}$.

Lời giải tham khảo

$$y = \frac{2-x}{x^2+2} \Rightarrow y' = \frac{x^2-4x-2}{(x^2+2)^2}$$

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số có cực trị.

Câu 51. Trong các hàm số sau, đồ thị hàm số nào có 2 điểm cực trị?

A. $y = \frac{x-2}{2x+1}$.

B. $y = x^4 - 4x^2 - 5$.

C. $y = x^3 + 2x - 3$.

D. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5$.

Lời giải tham khảo

Đồ thị hàm số ở đáp án A, B không thể có 2 cực trị, ở đáp án C do

$$y' = 3x^2 + 2 > 0, \forall x$$

D. Có $y' = 2x^2 - 4x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{x}$ đạt cực trị tại điểm x_1, x_2 . Tính tổng $S = x_1 + x_2$.

A. $S = 4$.

B. $S = -4$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Lời giải tham khảo

$$y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Hỏi, hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải tham khảo

$f'(x)$ đổi dấu khi x qua $x = 0$ và $x = 2$ nên hàm số có 2 cực trị.

Câu 54. Hàm số $y = x^3(1-x)^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Ba điểm cực trị.

B. Hai điểm cực trị.

C. Một điểm cực trị.

D. Không có cực trị.

Lời giải tham khảo

$$\text{Xét dấu } y' \text{ với } y' = x^5 - 2x^4 + x^3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (K)} \\ x = 1 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

1B. Cực trị của hàm số

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y		2	-3	

Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và đạt cực đại $x = 1$
- B. Hàm số đạt giá trị cực đại bằng -3
- C. Hàm số đạt giá trị cực tiểu bằng 2
- D. Hàm số có đúng một cực trị

Lời giải tham khảo

Ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và đạt cực đại $x = 1$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 56. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Có điểm cực đại là $A(1;0)$.
- B. Có điểm cực tiểu là $B(3;0)$.
- C. Không có cực trị.
- D. Có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α để hàm số

$$y = \frac{4}{3}x^3 - 2(1 - \sin \alpha)x^2 - (1 + \cos 2\alpha)x \text{ có cực trị.}$$

- A. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
- B. $\alpha \neq k\pi$.
- C. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
- D. $\alpha = k\pi$.

1B. Cực trị của hàm số

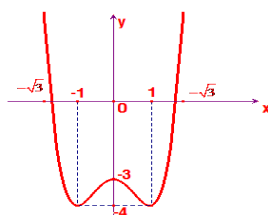
Câu 58. Giả sử hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 và $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 .

Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $f'(x_0) > 0$. B. $f'(x_0) \neq 0$. C. $f'(x_0) = 0$. D. $f'(x_0) < 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 59. Cho đồ thị hàm số như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số có 3 điểm cực trị.
B. Với $-4 < m \leq -3$ thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$.
D. Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0; -3)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0 .
B. Hàm số đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$.
C. Nếu hàm số đạt cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
D. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1B. Cực trị của hàm số

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y		1	0	

Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hàm số có đúng một cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực đại bằng -1 .
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0 .

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	0	$-3\sqrt[3]{4}$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hàm số có đúng một cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $3\sqrt[3]{4}$.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng $-3\sqrt[3]{4}$.
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

1C. GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

HÀM BẬC BA, BẬC BỐN

Dạng 14. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 3]$.

- A. $M = -2$. B. $M = 2$. C. $M = 3$. D. $M = -1$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Tính $y(0) = 3, y(2) = 1, y(3) = 3$. Vậy $\max_{[0;3]} y = 3$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[1; 3]$.

- A. $M = 4; m = 0$. B. $M = 20; m = 4$. C. $M = 20; m = 0$. D. $M = 20; m = -4$.

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = 3x^2 - 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Tính $y(-1) = 4, y(1) = 0, y(3) = 20$. Vậy $\max_{[1;3]} y = 20; \min_{[1;3]} y = 0$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$.

- A. $M = 40$. B. $M = 8$. C. $M = -41$. D. $M = 15$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-4; 4] \\ x = 3 \in [-4; 4] \end{cases}$

$y(-4) = -41; y(-1) = 40; y(3) = 8; y(4) = 15 \Rightarrow \max_{[-4;4]} y = 40 = y(-1); \min_{[-4;4]} y = -41 = y(-4)$.

Câu 4. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$. Tính tổng $M + m$.

- A. $-\frac{28}{3}$. B. $\frac{28}{3}$. C. $\pm \frac{28}{3}$. D. -35 .

Lời giải tham khảo

Ta có $y' = x^2 + 4x + 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

$y(-4) = y(-1) = -\frac{16}{3}, y(-3) = y(0) = -4 \Rightarrow M = -4; m = -\frac{16}{3} \Rightarrow M + m = -\frac{28}{3}$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

- A. $M = 6$. B. $M = 10$. C. $M = 15$. D. $M = 11$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (-1; 2) \\ x = -2 \notin (-1; 2) \end{cases}; y(-1) = 15; y(2) = 6; y(1) = -5 \Rightarrow \underset{[-1; 2]}{\text{Max}} y = 15.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $M = 5; m = 1$.

B. $M = 3; m = 1$.

C. $M = 1; m = -1$.

D. $M = 2; m = 0$.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.

A. $\min_{(-\infty; 1)} y = 3$.

B. $\min_{(-\infty; 1)} y = -1$.

C. $\min_{(-\infty; 1)} y = 2$.

D. $\min_{(-\infty; 1)} y = -3$.

Câu 8. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Có giá trị nhỏ nhất là $\min_{(0; +\infty)} y = 3$.

B. Có giá trị lớn nhất là $\max_{(0; +\infty)} y = -1$.

C. Có giá trị nhỏ nhất là $\min_{(0; +\infty)} y = -1$.

D. Có giá trị lớn nhất là $\max_{(0; +\infty)} y = 3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\max_{[-1;1]} y = 0, \min_{[-1;1]} y = -2$.

B. $\max_{[-1;1]} y = 2, \min_{[-1;1]} y = 0$.

C. $\max_{[-1;1]} y = 2, \min_{[-1;1]} y = -2$.

D. $\max_{[-1;1]} y = 2, \min_{[-1;1]} y = -1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 5$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\max_{[0;2]} y = 5$.

B. $\min_{[0;2]} y = 3$.

C. $\max_{[-1;1]} y = 3$.

D. $\min_{[-1;1]} y = 7$.

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $M = 11, m = 2$.

B. $M = 3, m = 2$.

C. $M = 5, m = 2$.

D. $M = 11, m = 3$.

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 2$.

HÀM PHÂN THỨC

Dạng 15. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

Câu 13. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $M = \frac{-1}{3}$.

B. $M = -5$.

C. $M = 5$.

D. $M = \frac{1}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0; 2] \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên } [0; 2] \Rightarrow \max_{[0; 2]} y = y(0) = \frac{1}{3}.$$

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\max_{[-1; 1]} f(x) = 3; \min_{[-1; 1]} f(x) = 2$.

B. $\min_{(2; 3]} f(x) = 2$, không tồn tại $\max_{(2; 3]} f(x)$.

C. $\max_{[-1; 1]} f(x) = 2$; không tồn tại $\min_{[-1; 1]} f(x)$.

D. $\max_{[-1; 1]} f(x) = 2; \min_{[-1; 1]} f(x) = 1$.

Lời giải tham khảo

+ Hàm số xác định và liên tục trên $D = (2; 3]$

$$+ \forall x \in D: f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên } D$$

$$+ \text{Vậy } \min_{(2; 3]} f(x) = f(3) = 2, \text{ không tồn tại } \max_{(2; 3]} f(x).$$

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + 1 + \frac{4}{x+2}$ trên đoạn $[-1; 5]$.

A. $\max_{[-1; 5]} y = 3$.

B. $\max_{[-1; 5]} y = 4$.

C. $\max_{[-1; 5]} y = \frac{46}{7}$.

D. $\max_{[-1; 5]} y = -5$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 1 - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -4$$

$$\text{Tính } f(0) = -3; f(-1) = 4; f(5) = \frac{46}{7}. \text{ Suy ra } \max_{[-1; 5]} y = \frac{46}{7}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 5]$.

A. $\max_{[2;5]} y = -1.$

B. $\max_{[2;5]} y = \frac{11}{4}.$

C. $\max_{[2;5]} y = 1.$

D. $\max_{[2;5]} y = -\frac{11}{4}.$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{x - 2}$ trên đoạn $[1; 4]$.

A. $\min_{[1;4]} y = -1.$

B. $\min_{[1;4]} y = 0.$

C. $\min_{[1;4]} y = 6.$

D. $\min_{[1;4]} y = 8.$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\max_{[-4;-2]} y = -\frac{16}{3}, \min_{[-4;-2]} y = -6.$

B. $\max_{[-4;-2]} y = -6, \min_{[-4;-2]} y = -5.$

C. $\max_{[-4;-2]} y = -5, \min_{[-4;-2]} y = -6.$

D. $\max_{[-4;-2]} y = -4, \min_{[-4;-2]} y = -6.$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 1}$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $y\left(\frac{1}{2}\right)$, giá trị lớn nhất là $y(-1)$.
- B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $y(-1)$, giá trị lớn nhất là $y\left(\frac{1}{2}\right)$.
- C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $y(-1)$ và $y\left(\frac{1}{2}\right)$, giá trị lớn nhất là $y(0)$.
- D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $y(0)$, giá trị lớn nhất là $y\left(\frac{1}{2}\right)$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{x^2}{4} + x$ thỏa $M = \max_{[0;3]} f(x); m = \min_{[0;3]} f(x)$. Tính $M - m$.

- A. $\frac{3}{5}$. B. 1. C. $\frac{7}{5}$. D. $\frac{9}{5}$.

Câu 21. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên $[0; 1]$ bằng -2 .

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

HÀM BẬC HAI, CĂN, LƯỢNG GIÁC, LOGARIT

Dạng 16. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

Câu 22. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên đoạn $[-1; 3]$.

A. $m = 2\sqrt{2}$.

B. $m = \frac{5}{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 2\sqrt{3}$.

Lời giải tham khảo

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$f(-1) = f(3) = 2\sqrt{2}; f(1) = 2.$$

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{6 - 3x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $M = \sqrt{6}$ và $m = 0$.

B. $M = 3$ và $m = \sqrt{6}$.

C. $M = 1$ và $m = -1$.

D. $M = 3$ và $m = \sqrt{3}$.

Lời giải tham khảo

$y' = 0$ vô nghiệm; So sánh $y(-1)$ và $y(1)$, kết luận.

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $M = 9$.

B. $M = 3$.

C. $M = 1$.

D. $M = 0$.

Lời giải tham khảo

Hàm số xác định trên $[-1; 1]$

$$y = \sqrt{5 - 4x}, y' = \frac{-2}{\sqrt{5 - 4x}} < 0, \forall x \in [-1; 1],$$

$$y(-1) = 3, y(1) = 1.$$

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x + \sqrt{1 - 2x}$ trên đoạn $\left[-4; \frac{1}{2}\right]$.

A. $M = -1$.

B. $M = \frac{1}{2}$.

C. $M = 0$.

D. $M = 1$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, y(0) = 1, y(-4) = -1, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên tập xác định.

A. $\underset{[-2;2]}{\text{Max}} f(x) = 2\sqrt{2}; \underset{[-2;2]}{\text{Min}} f(x) = -\sqrt{2}.$

B. $\underset{[-2;2]}{\text{Max}} f(x) = -\sqrt{2}; \underset{[-2;2]}{\text{Min}} f(x) = -2.$

C. $\underset{D}{\text{Max}} f(x) = 2\sqrt{2}; \underset{D}{\text{Min}} f(x) = -2.$

D. $\underset{[-2;2]}{\text{Max}} f(x) = 2; \underset{[-2;2]}{\text{Min}} f(x) = -2.$

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$ trên tập xác định.

A. $M = 2.$

B. $M = 5.$

C. $M = 3.$

D. $M = 4.$

Câu 28. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$ trên tập xác định.

A. $M = \frac{1}{2}.$

B. $M = -\frac{1}{2}.$

C. $M = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

D. $M = -1.$

Câu 29. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^4 x + \cos 2x + 5$ trên tập xác định.

A. $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{11}{4}.$

B. $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{11}{2}.$

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 2.$

D. $\min_{\mathbb{R}} y = 3.$

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \sin^2 x, t \in [0; 1]$. Ta có $y = f(t) = 2(t^2 - t + 3), t \in [0; 1]$. Tính được $\min y = \frac{11}{2}.$

Câu 30. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$. Tính $M + m$.

- A. $M + m = 0$. B. $M + m = 2$. C. $M + m = \frac{25}{8}$. D. $M + m = \frac{25}{4}$.

Lời giải tham khảo

$t = \cos x$ ($t \in [-1; 1]$). Xét $g(t) = -2t^2 - t + 3$ trên $[-1; 1]$.

Câu 31. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sqrt{3}$. Tính $M + m$.

- A. $M + m = 4 + \sqrt{3}$. B. $M + m = 2\sqrt{3}$. C. $M + m = 4$. D. $M + m = 1 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải tham khảo

$$y = \sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sqrt{3} = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3} = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$$

Dễ dàng tính được $M = \max_{\mathbb{R}} y = 2 + \sqrt{3}$, $m = \min_{\mathbb{R}} y = -2 + \sqrt{3} \Rightarrow M + m = 2\sqrt{3}$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 32. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin x \cos x$ trên tập xác định.

- A. $M = \frac{1}{2}$. B. $M = \frac{9}{8}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{3}{4}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $\max_{\mathbb{R}} y = 2; \min_{\mathbb{R}} y = 1$. B. $\max_{\mathbb{R}} y = 1; \min_{\mathbb{R}} y = -2$.
C. $\max_{\mathbb{R}} y = 2; \min_{\mathbb{R}} y = -1$. D. $\max_{\mathbb{R}} y = -1; \min_{\mathbb{R}} y = -2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 34. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \log_2^2 x - 4\log_2 x + 1$ trên đoạn $[1; 8]$.

A. $\min_{x \in [1; 8]} y = -2$.

B. $\min_{x \in [1; 8]} y = 1$.

C. $\min_{x \in [1; 8]} y = -3$.

D. Đáp án khác.

Lời giải tham khảo

$$y = \log_2^2 x - 4\log_2 x + 1 \Rightarrow y = t^2 - 4t + 1 \text{ với } t = \log_2 x \in [0; 3].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (t/m)}$$

$$y(0) = 1; y(2) = -3; y(3) = -2 \Rightarrow \min_{x \in [1; 8]} y = -3.$$

Câu 35. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |x| + 3$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính $M + m$.

A. $M + m = 0$.

B. $M + m = 3$.

C. $M + m = 4$.

D. $M + m = 7$.

Lời giải tham khảo

$$f(x) = |x| + 3 = \begin{cases} x + 3 & \text{khi } x > 0 \\ -x + 3 & \text{khi } x < 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 0 \\ -1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ hàm số không có đạo hàm tại}$$

$$x = 0.$$

$$f(-1) = 4, f(1) = 4, f(0) = 3 \Rightarrow \min_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(0) = 3; \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(1) = 4.$$

BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Dạng 17. Bài toán vận dụng GTLN, GTNN

Câu 36. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5\sqrt{2}$.

A. $S_{\max} = \frac{25}{8}$.

B. $S_{\max} = \frac{25}{4}$.

C. $S_{\max} = \frac{25}{2}$.

D. $S_{\max} = 25$.

Lời giải tham khảo

Gọi một cạnh góc vuông là x ($0 < x < 5\sqrt{2}$). Diện tích tam giác vuông là: $S = \frac{1}{2}x\sqrt{50 - x^2}$.

Diện tích lớn nhất khi: $x = 5 \Rightarrow S_{\max} = \frac{25}{2}$.

Câu 37. Chu vi của một tam giác là 16cm , biết độ dài một cạnh của tam giác là $a = 6\text{cm}$. Tìm độ dài hai cạnh còn lại b, c của tam giác sao cho tam giác đó có diện tích lớn nhất.

A. $b = 4\text{cm}; c = 6\text{cm}$.

B. $b = 3\text{cm}; c = 7\text{cm}$.

C. $b = 2\text{cm}; c = 8\text{cm}$.

D. $b = c = 5\text{cm}$.

Lời giải tham khảo

+ Gọi x là độ dài một trong hai cạnh của tam giác.

+ Suy ra độ dài cạnh còn lại là $16 - 6 - x = 10 - x$

+ Theo công thức Hêrông, diện tích tam giác sẽ là:

$$S(x) = \sqrt{8(8-6)(8-x)(8-10+x)} = 4\sqrt{-x^2 + 10x - 16}, \quad 0 < x < 8$$

$$S'(x) = \frac{4(5-x)}{\sqrt{-x^2 + 10x - 16}}$$

+ Lập bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0; 8)$, $S(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 5$.

Vậy diện tích tam giác lớn nhất khi mỗi cạnh còn lại dài 5cm .

Câu 38. Cho tam giác vuông ABC , tổng của cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a > 0$). Tính độ dài cạnh góc vuông của tam giác ABC thỏa điều kiện tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

A. $x = 2a$.

B. $x = \frac{a}{3}$.

C. $x = \frac{a}{2}$.

D. $x = a\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Gọi cạnh góc vuông AB là x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right) \Rightarrow$ cạnh huyền $BC = a - x$, cạnh góc vuông kia

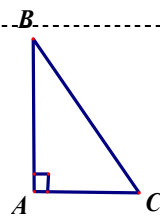
là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2}$ hay $AC = \sqrt{a^2 - 2ax}$

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$

1C. GTLN, GTNN của hàm số

$$S'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 2ax} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ax}{\sqrt{a^2 - 2ax}} = \frac{a(a - 3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$$



Kẻ BBT, xét dấu, ta thấy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi $x = \frac{a}{3}$.

Câu 39. Cho một hình chữ nhật có diện tích $S = 100$. Tính chiều rộng x và chiều dài y tương ứng thỏa điều kiện chu vi hình chữ nhật là nhỏ nhất.

- A. $x = 25; y = 4$. B. $x = 10; y = 10$. C. $x = 20; y = 5$. D. $x = 50; y = 2$.

Lời giải tham khảo

Ta thấy chu vi hình chữ nhật $= (\text{dài} + \text{rộng}) \cdot 2$

Chu vi nhỏ nhất khi dài + rộng nhỏ nhất

A: sai vì $25 + 4 = 29$

C: $20 + 5 = 25$

D: $50 + 2 = 52$

B: $10 + 10 = 20$ nhỏ nhất.

Câu 40. Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy hình vuông không nắp có thể tích là 4 lít. Tìm kích thước của hộp đó để lượng vàng dùng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau.

- A. Cạnh đáy bằng 2, chiều cao bằng 1. B. Cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng 2.
C. Cạnh đáy bằng 3, chiều cao bằng 4. D. Cạnh đáy bằng 4, chiều cao bằng 3.

Lời giải tham khảo

Gọi x là cạnh của đáy hộp.

h là chiều cao của hộp.

$S(x)$ là diện tích phần hộp cần mạ.

Khi đó, khối lượng vàng dùng mạ tỉ lệ thuận với $S(x)$.

Ta có: $S(x) = x^2 + 4xh$ (1); $V = x^2h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{x^2}$ (2). Từ (1) và (2), ta có $S(x) = x^2 + \frac{16}{x}$

Dựa vào BBT, ta có $S(x)$ đạt GTNN khi $x = 2$.

Câu 41. Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tole hình vuông có cạnh là 1. Tính thể tích V của hộp cần.

- A. $V = \frac{5}{8}$. B. $V = \frac{2}{27}$. C. $V = \frac{3}{27}$. D. $V = \frac{6}{11}$.

Lời giải tham khảo

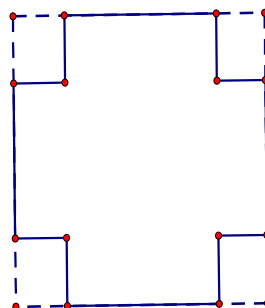
Giả sử mỗi góc ta cắt đi một hình vuông cạnh x

Khi đó chiều cao của hộp là x dm $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

và cạnh đáy của hộp là $(1 - 2x)$ dm

vậy thể tích của hộp là $V = x(1 - 2x)^2$ dm³

Ta có: $V' = 1 - 8x + 12x^2$



Phương trình $V' = 0$ có nghiệm $x = \frac{1}{6} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
V'	+	0	-
V	0	$\frac{2}{27}$	0

Vậy thể tích cần tìm là : $V = \frac{2}{27} dm^3$.

✎ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 42. Một người thợ muốn làm một cái thùng hình hộp chữ nhật không nắp có chiều dài đáy gấp đôi chiều rộng và có thể tích $10 m^3$. Giá tiền vật liệu làm đáy thùng là $10.000 \text{ đồng}/m^2$, vật liệu làm mặt bên thùng là $5.000 \text{ đồng}/m^2$. Hãy xác định kích thước thùng (rộng x dài x cao) để chi phí làm thùng là nhỏ nhất.

A. $\sqrt[3]{\frac{4}{15}} \times 2\sqrt[3]{\frac{4}{15}} \times 5\sqrt[3]{\frac{225}{16}} (m)$.

B. $\sqrt{\frac{15}{4}} \times 2\sqrt{\frac{15}{4}} \times 5\sqrt{\frac{16}{225}} (m)$.

C. $\sqrt{15} \times 2\sqrt{15} \times \frac{5}{15} (m)$.

D. $\sqrt{15} \times 2\sqrt{15} \times \frac{5}{15} (m)$.

Câu 43. Một nhà máy sản xuất máy tính vừa làm ra x sản phẩm máy tính và bán với giá $p = 1000 - x$ cho một sản phẩm. Biết rằng tổng chi phí để làm ra x sản phẩm là $C(x) = 3000 + 20x$. Hỏi, nhà máy cần sản xuất và bán bao nhiêu sản phẩm để thu được lợi nhuận tốt nhất?

A. 490.

B. 480.

C. 500.

D. 510.

Câu 44. Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu tiêu phí hết số tiền là x vào việc quảng cáo, N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6$, $0 \leq x \leq 30$ (x tính theo đơn vị triệu đồng). Tính số lô hàng lớn nhất mà công ty có thể bán sau đợt quảng cáo và số tiền đã dành cho việc quảng cáo đó.

A. $N(x) = 231; x = 15$.

B. $N(x) = 6; x = 30$.

C. $N(x) = 226; x = 10$.

D. $N(x) = 131; x = 5$.

Câu 45. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F(x) = \frac{1}{40}x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. 20 mg.

B. 30 mg.

C. 40 mg.

D. 50 mg.

Câu 46. Xét x, y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2y^2 - 4xy$.

A. $\min S = -3$.

B. $\min S = -4$.

C. $\min S = 0$.

D. $\min S = 1$.

Câu 47. Xét x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Đặt $S = xy + \frac{1}{xy + 1}$.

Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Biểu thức S không có giá trị lớn nhất. B. Biểu thức S không có giá trị nhỏ nhất.
C. $\min S = \frac{3}{2}$. D. $\max S = 1$.

Câu 48. Xét x, y là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Tính $M + m$.

- A. $M + m = \frac{5}{2}$. B. $M + m = 4$. C. $M + m = \frac{9}{2}$. D. $M + m = 3$.

Câu 49. Xét x, y là các số thực thuộc nửa khoảng $(0; 1]$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 4xy$. Đặt $S = x^2 + y^2$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Biểu thức S không có giá trị nhỏ nhất. B. $\max S = \frac{10}{9}$.
C. Biểu thức S không có giá trị lớn nhất. D. $\min S = 0$.

Câu 50. Xét x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Đặt $S = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2}$.

Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Biểu thức S không có giá trị nhỏ nhất. B. $\min S = -6$.
C. Biểu thức S không có giá trị lớn nhất. D. $\max S = 2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1D. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

✎ **Dạng 18. Tìm phương trình tiệm cận ngang, tiệm cận đứng**

Câu 1. Tìm phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+1}$.

A. $x = \frac{2}{3}$.

B. $y = \frac{2}{3}$.

C. $x = -\frac{1}{3}$.

D. $y = -\frac{1}{3}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{2}{3}, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$ (TCN).

Câu 2. Tìm phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+3}}$.

A. $y = 1$.

B. $y = 2$ và $y = -2$.

C. $y = 2$.

D. $y = 1$ và $y = -1$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$.

Câu 3. Tìm phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+x+1}}$.

A. $y = \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}$.

B. $y = 2$.

C. $y = \frac{1}{4}$.

D. $y = 0$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+x+1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 4. Tìm phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{-x+2}$.

A. $x = 2; y = 2$.

B. $x = 2; y = -2$.

C. $x = -2; y = -2$.

D. $x = -2; y = 2$.

Lời giải tham khảo

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2, \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$

Câu 5. Tìm phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2-3x}{x+1}$.

A. $x = 1$ và $y = 2$.

B. $x = -1$ và $y = -3$.

C. $x = -3$ và $y = -1$.

D. $x = 2$ và $y = 1$.

Lời giải tham khảo

+) $\lim y = -3$ khi $x \rightarrow \pm\infty$

+) $\lim y = \pm\infty$ khi $x \rightarrow (-1)^{\pm}$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 6. Tìm phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+2}{2x-1}$.

A. $y = 2, x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 2, y = \frac{1}{2}$.

C. $x = \frac{1}{2}, y = -4$.

D. $y = 2, x = -\frac{1}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 7. Tìm phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$.

A. Có tiệm cận đứng là $x = -2$ và không có tiệm cận ngang.B. Có tiệm cận ngang $y = -2$ và không có tiệm cận đứng.C. Có tiệm cận đứng là $y = -2$ và tiệm cận ngang $x = 2$.D. Có tiệm cận đứng là $x = -2$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 8. Tìm phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{2x+1}$.

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = -\frac{1}{2}$.

C. $y = -\frac{1}{2}$.

D. $y = \frac{1}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 9. Tìm phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

A. $y = 1$.

B. $x = 2$.

C. $y = 2$.

D. $x = 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1D. Đường tiệm cận

Câu 10. Đồ thị của hàm số nào dưới đây nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2 - x}$. B. $y = \frac{2x - 2}{x + 2}$. C. $y = \frac{1 + x}{1 - x}$. D. $y = \frac{1 + x^2}{1 + x}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{3x + 1}{2x - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{3}{2}$.
B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y = \frac{3}{2}$.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -\frac{1}{2}$.
D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 19. Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang, tiệm cận đứng thỏa điều kiện cho trước

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m^2 + m)x - 1}{x - 2}$ có đường tiệm cận ngang qua điểm $A(-3; 2)$.

A. $m = -1 \vee m = -2$.

B. $m = 1 \vee m = -2$.

C. $m = 1 \vee m = 2$.

D. $m = -1 \vee m = 2$.

Lời giải tham khảo

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y = m^2 + m$

Tiệm cận ngang qua $A(-3; 2) \Rightarrow m = 1 \vee m = -2$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$.

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải tham khảo

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là: $x = \frac{-m}{2}$

Mà tiệm cận đứng đi qua điểm $x = \frac{-m}{2} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \frac{-m}{2} = -1$.

Câu 14. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng $x = 1$ và đi qua điểm $A(2; 5)$?

A. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$.

B. $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

C. $y = \frac{-3x + 2}{1 - x}$.

D. $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.

Lời giải tham khảo

+ Vì hàm số có TCD là $x = 1 \Rightarrow d = -1$

+ Mặt khác hàm số đi qua điểm $A(2; 5)$ nên ta có: $5 = \frac{2a + 1}{2 - 1} \Leftrightarrow a = 2$

+ Vậy hàm số có phương trình là: $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = \frac{2x + m}{mx + 1}$ có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

A. $m = \pm \frac{1}{4}$.

B. $m = \pm \frac{1}{2}$.

C. $m = \pm \frac{1}{8}$.

D. Không có m thỏa mãn.

Lời giải tham khảo

Với $m \neq 0$, (C_m) có tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{m}$, và tiệm cận ngang $y = \frac{2}{m}$

Diện tích hình chữ nhật bằng 8 $\Rightarrow \left| -\frac{1}{m} \right| \left| \frac{2}{m} \right| = 8 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x-m+1}$ sao cho tiệm cận ngang tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 5$.

- A. Không có giá trị m . B. $m = 5$. C. $m = 6$. D. Với $\forall m \in \mathbb{R}$.

Lời giải tham khảo

Để (C_m) có tiệm cận ngang thì $m(m-1)-2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1. \\ m \neq 2. \end{cases}$

Khi đó, phương trình đường tiệm cận ngang là $d: y = m$.

d tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 5 \Leftrightarrow m = 5$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-4+m}{x-2}$ có tiệm cận đứng $x = 2$.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = \pm 1$ và $m = 2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-m}$ có tiệm cận.

- A. $m \neq 1$. B. Với mọi m . C. $m \neq 0$. D. Không có m .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-3x+m^2}$ chỉ có một tiệm cận đứng.

- A. $\forall m$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $m = 2$. D. Không có m .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x^2 - ax + a}$ có đúng một đường tiệm cận đứng.

A. $a = 1$.

B. $a = 2$.

C. $\begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{mx^2+2}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m = 0$.

B. $m > 0$.

C. $m < 0$.

D. $m = -1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+m-1}{x-1}$ không có tiệm cận ngang.

A. Với mọi m .

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. Không có m .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+x-m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. Mọi $m \in \mathbb{R}$.

B. $\begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m \geq -\frac{1}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$.

D. $m \neq 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Dạng 20. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 24. Tìm số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải tham khảo

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

Câu 25. Tìm số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải tham khảo

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -3$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

Câu 26. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{x+1}$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải tham khảo

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 0$.

Câu 27. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$.

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải tham khảo

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow TCN y = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2} y = \infty \Rightarrow TCD x = 2$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓**Câu 28.** Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$.

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 29. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-9}{x^2-1}$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Không có tiệm cận.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 30. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{8x + 3}{x^2 - x - 6}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 33. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$.

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Dạng 21. Một số bài tập tổng hợp

Câu 34. Mệnh đề nào dưới đây là *sai*?

- A. Hàm số $y = x^3 + 3x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Đồ thị hàm số $y = 3x^4 + 5x^2 - 1$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.
- C. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-1}$ có 2 đường tiệm cận.
- D. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ nhận giao điểm hai đường tiệm cận là tâm đối xứng.

Lời giải tham khảo

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-1}$ có 3 đường tiệm cận ($y = 0; x = \pm 1$).

Câu 35. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	1	$-\infty$	1

- A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{x-1}{x+1}$. C. $y = \frac{x-3}{x-2}$. D. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Lời giải tham khảo

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- + Tiệm cận đứng là $x = 2$.
- + Tiệm cận ngang là $y = 1$.
- + $y' < 0$

Câu 36. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ (C). Tìm các điểm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

- A. $(1; -2)$. B. $\left(1 + \sqrt{3}; \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$.
- C. $(1 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$. D. $(2 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ và $(2 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$.

Lời giải tham khảo

+ TCD: $x = 2$ (d_1) và TCN: $y = 1$ (d_2)

+ $M(x; y) \in (C)$

+ Ta có:

$$\begin{aligned} d(M, d_1) + d(M, d_2) &= |x - 2| + |y - 1| \\ &= |x - 2| + \left| \frac{x+1}{x-2} - 1 \right| = |x - 2| + \left| \frac{3}{x-2} \right| \geq 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

+ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow |x - 2| = \left| \frac{3}{x-2} \right| \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

+ Vậy $M_1(2 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ và $M_2(2 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$.

Câu 37. Gọi I là giao điểm của tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(3m+1)x+4}{x+m}$. Hỏi I thuộc đường thẳng nào dưới đây?

- A. $y = -3x - 1$. B. $y = -3x + 1$. C. $y = 3x + 1$. D. $y = 3x - 1$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Đề } (C_m) \text{ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang thì } (3m+1)(-m)+4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{4}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Khi đó phương trình đường tiệm cận đứng là $x = -m$ và tiệm cận ngang là $y = 3m + 1$.

Tọa độ điểm I là $I(-m; 3m+1) \Rightarrow y_I = -3x_I + 1 \Rightarrow I \in \Delta: y = -3x + 1$.

Câu 38. Tìm tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng của (C) bằng khoảng cách từ M đến trục Ox .

- A. $M\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right), M\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$.
 B. $M\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right), M\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$.
 C. $M\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.
 D. $M\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y)$, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Delta: x - 1 = 0$. Ta có $d(M, \Delta) = d(M, Ox)$.

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Đồ thị của hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
 B. Đồ thị của hàm số đã cho có một tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị của hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $x = -1$ và $x = 1$.
 D. Đồ thị của hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = 1$.

Lời giải tham khảo

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x-1} = -1 \text{ nên đồ thị hàm số có TCN là } y = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x-1} = 1 \text{ nên đồ thị hàm số có TCN là } y = 1.$$

1E. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 22. Bài toán nhận diện đồ thị hàm số

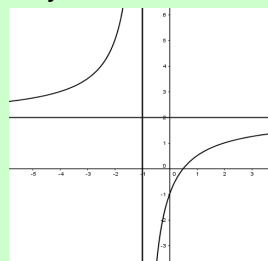
Câu 1. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x + 2$.

B. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2$.

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.



Lời giải tham khảo

Vì hàm số này là hàm nhất biến tăng trên từng khoảng xác định.

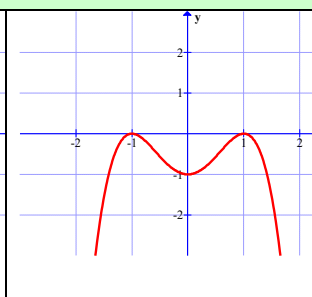
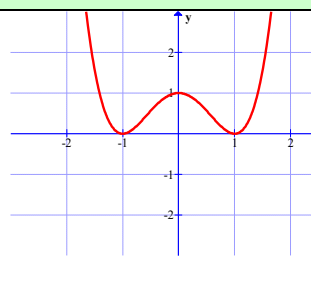
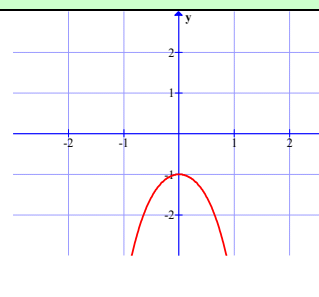
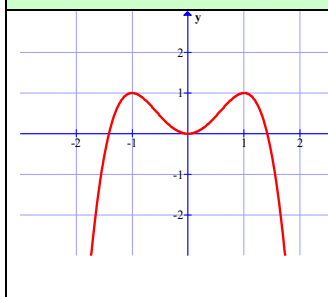
Câu 2. Đồ thị nào sau đây là đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$?

A.

B.

C.

D.



Lời giải tham khảo

$$y = -x^4 + 2x^2 - 1, \quad y' = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y		0	-1	0	

Đồ thị hàm số qua các điểm $(-1; 0)$, $(0; -1)$; $(1; 0)$.

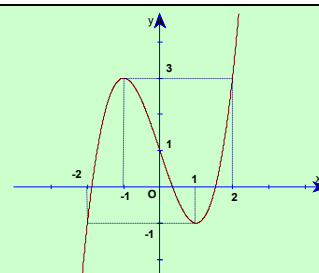
Câu 3. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x - 1$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.



Lời giải tham khảo

Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra bảng biến thiên

1E. Đồ thị của hàm số

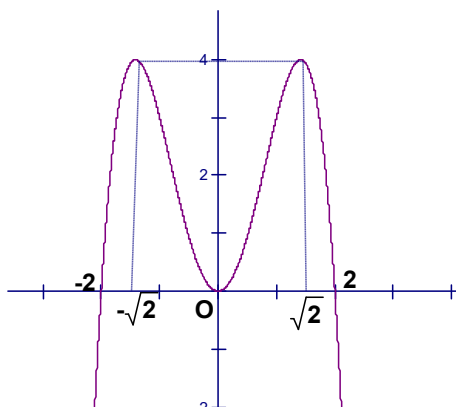
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y		3	-1		

- Ta thấy hệ số $a > 0$ và giao điểm với trục Oy là $(0;1)$.

Câu 4. Đồ thị sau đây là của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $0 < m < 4$. B. $0 \leq m < 4$. C. $2 < m < 6$. D. $0 \leq m \leq 6$.

Lời giải tham khảo



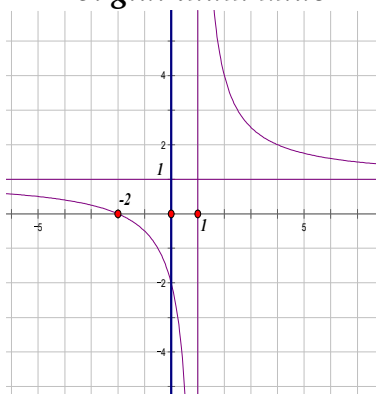
$$x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 = m - 2$$

Để PT có 4 nghiệm phân biệt thì $0 < m - 2 < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Câu 5. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x+2}{x-1}$. C. $y = \frac{x+1}{x-1}$. D. $y = \frac{x+2}{1-x}$.

Lời giải tham khảo

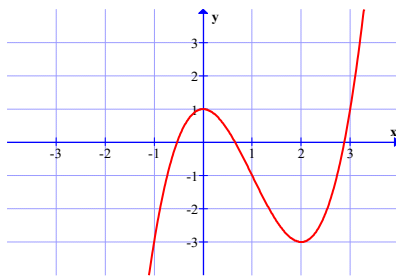


Câu 6. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. D. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải tham khảo

1E. Đồ thị của hàm số



Câu 7. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

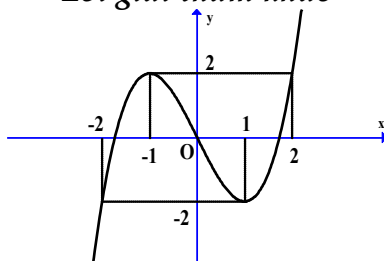
A. $y = x^3 + 3x$.

B. $y = -x^3 - 3$.

C. $y = -x^3 - 3x$.

D. $y = x^3 - 3x$.

Lời giải tham khảo



Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 8. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

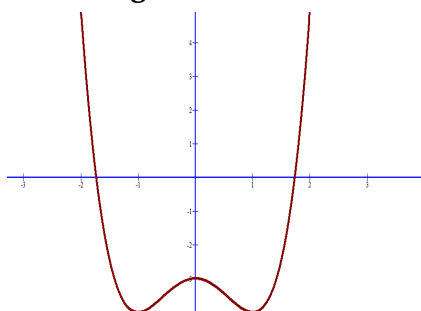
A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

B. $y = x^3 - 2x + 3$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

D. $y = -x^3 - 2x + 3$.

Lời giải tham khảo



Đường cong là đồ thị hàm trùng phương, đồ thị có dạng đi xuống – đi lên – đi xuống – đi lên nên hệ số $a > 0$.

Câu 9. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$.

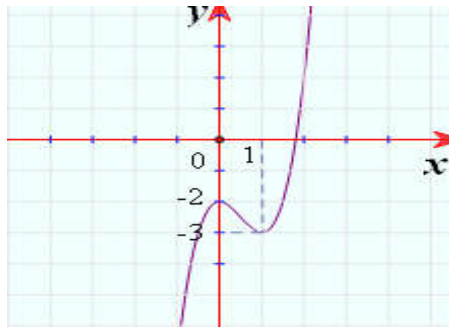
B. $y = -2x^3 + 3x^2 - 2$.

C. $y = 2x^3 - 6x - 2$.

D. $y = -2x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải tham khảo

1E. Đồ thị của hàm số



TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Vì đồ thị là của hàm số bậc 3 nên: hệ số $a > 0$

Dựa vào các đáp án, ta loại đi 2 đáp án B, D

Nhìn vào đồ thị, ta thấy: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Câu A: $y' = 6x^2 - 6x$; $y' = 0$ khi $x = 0$; $x = 1$

Câu C: $y' = 6x^2 - 6$; $y' = 0$ khi $x = \pm 1$.

Câu 10. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

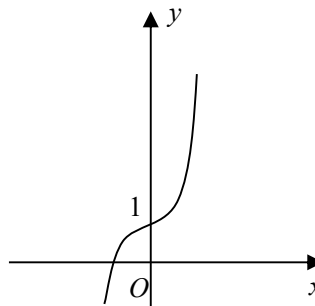
A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = x^3 + 3x + 1$.

C. $y = -x^3 - 3x + 1$.

D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

Lời giải tham khảo



Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và cắt trục hoành tại 1 điểm nên chọn đáp án B.

Câu 11. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

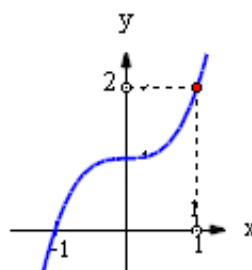
A. $y = x^3 - 3$.

B. $y = -x^3 + 6x - 2$.

C. $y = -x^3 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải tham khảo

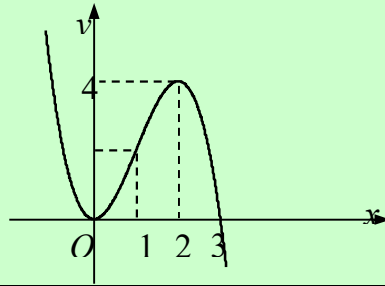


Đồ thị của hàm số luôn đồng biến nên $a > 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

1E. Đồ thị của hàm số

Câu 12. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 3x^2$. B. $y = -x^3 - 3x^2$. C. $y = x^3 - 3x^2$. D. $y = -x^3 + 3x^2$.

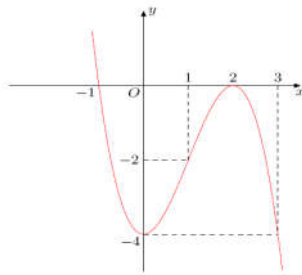


Lời giải tham khảo

Hàm số nghịch biến $\Rightarrow a < 0$. Đồ thị hàm số đi qua $(2; 4) \Rightarrow y = -x^3 + 3x^2$

Câu 13. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 4$. C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$. D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

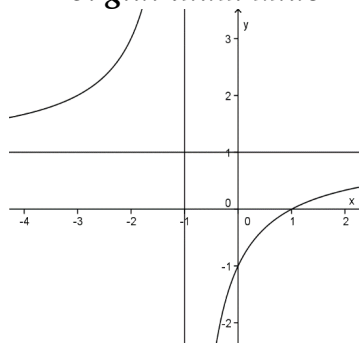


(Dạng đồ thị hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$).

Câu 14. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x-1}{x+1}$. C. $y = \frac{x+1}{1-x}$. D. $y = \frac{1-x}{x+1}$.

Lời giải tham khảo



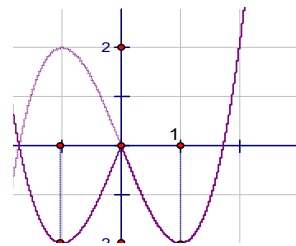
Câu 15. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = |x|^3 + 3|x|$. B. $y = |x^3 + 3x|$.
C. $y = |x^3| - 3|x|$. D. $y = |x^3 - 3x|$.

Lời giải tham khảo

1E. Đồ thị của hàm số

Đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 3x$ có hình dạng



Đồ thị hàm số như hình vẽ là đồ thị của một hàm số

Chẵn có nửa nhánh bên phải giống đồ thị (C) nên

Đồ thị như hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = |x^3| - 3|x|$.

Câu 16. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

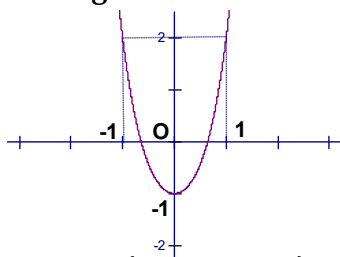
A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 1$.

C. $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Lời giải tham khảo



Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số quay bề lõm lên trên. Đáp án B loại

Hàm số chỉ có một cực trị là (0; -1).

Câu 17. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

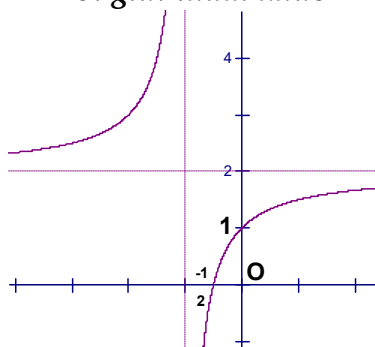
A. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+3}{1-x}$.

Lời giải tham khảo



Nhìn vào đồ thị nhận thấy đồ thị có TCN $y = 2$, TCD $x = 1$ và qua điểm $x = 0 \Rightarrow y = 3$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	+	-
y	$-\infty$		3	$-\infty$

1E. Đồ thị của hàm số

Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số không có cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3 và không có giá trị nhỏ nhất.
- D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải tham khảo

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

BTT:

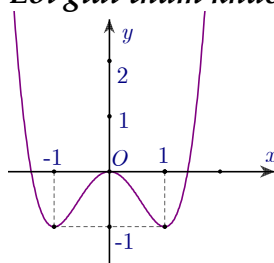
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		+	0	+	0	-
y	$-\infty$			3		$-\infty$

$\Rightarrow \max_{\mathbb{R}} y = 3$; không có GTNN.

Câu 19. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$. B. $y = -x^4 + 2x^2$. C. $y = x^4 - 2x^2$. D. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải tham khảo



Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị có tọa độ $(0;0)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$ thỏa mãn hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

1F. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

HÀM BẬC BA

Dạng 23. Bài toán tương giao của hàm số bậc ba

Câu 1. Biết rằng đường thẳng $y = 2x - 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + 2x - 3$ tại hai điểm phân biệt A và B , biết điểm B có hoành độ âm. Tìm x_B .

A. $x_B = 0$.

B. $x_B = -2$.

C. $x_B = -1$.

D. $x_B = -5$.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2(x + 1) = 0$ có nghiệm âm $x = -1$.

Câu 2. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = 1 - 2x$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải tham khảo

Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 1 - 2x \Leftrightarrow x = 1$ nên đường cong và đường thẳng cắt nhau tại 1 giao điểm.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 3. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2x$ cắt đường thẳng $y = -2x - 2$ tại ba điểm phân biệt. Kí hiệu ba điểm đó là $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ và $C(x_3; y_3)$. Tính tổng $S = x_1 + x_2 + x_3$.

A. $S = 2$.

B. $S = 3$.

C. $S = 1$.

D. $S = 2\sqrt{3}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 4. Biết rằng đường thẳng $y = -5x + 6$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 6$ tại điểm duy nhất $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

A. $y_0 = 4$.

B. $y_0 = -1$.

C. $y_0 = 0$.

D. $y_0 = 6$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1F. Bài toán tương giao của đồ thị hàm số

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ x_1, x_2 . Tính tổng $x_1 + x_2$.

- A. $x_1 + x_2 = 2$. B. $x_1 + x_2 = 0$. C. $x_1 + x_2 = -1$. D. $x_1 + x_2 = -2$.

Lời giải tham khảo

Phương trình cho hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Khi đó: $x_1 + x_2 = -1$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $0 < m < 4$. B. $m > 4$. C. $0 < m \leq 4$. D. $0 \leq m < 4$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow$	

- Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt khi $0 < m < 4$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $-3 < m < 1$. B. $-3 \leq m \leq 1$. C. $m > 1$. D. $m < -3$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $y_{cd} = 1; y_{ct} = -3$ suy ra A. $-3 < m < 1$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + mx + 4$ cắt đường thẳng $y = x + 4$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = 4$. D. $m \neq 2$.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là $x^3 + mx^2 + mx + 4 = x + 4$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + mx + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + mx + m - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Để hai đường đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai

$$\text{nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m - 1) > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 2)^2 > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án $m = 4$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt.

A. $-2 \leq m \leq 2$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $\begin{cases} -2 < m \leq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + (m-6)x - 3m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m < 1$.

B. $m < -1$.

C. $\begin{cases} m < -1 \\ m \neq -15 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq -15 \end{cases}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + x + m)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt.

A. $m > -\frac{1}{4}$.

B. $m > \frac{1}{4}$ và $m \neq 2$.

C. $m < \frac{1}{4}$.

D. $m < \frac{1}{4}$ và $m \neq -2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-3)(x^2 + x + 4)$ với trục hoành.

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m + 1 = 0$ có hai nghiệm.

A. $m \leq 1$.

B. $m \geq -3$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

D. $-3 < m < 1$.

Lời giải tham khảo

$$x^3 - 3x^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = m$$

PT đã cho là PT hoành độ giao điểm của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$ và đường thẳng $y = m$.

PT đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow (C)$ và d có 2 giao điểm $(*)$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

	$y' = 3x^2 - 6x ; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$				
BBT	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
	y'	$+$	0	$-$	0
	y		1		$+\infty$
				-3	
		$-\infty$			
	$(*) \Leftrightarrow$	$\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$			

Câu 14. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 12x + m - 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $-16 < m < 16$.

B. $-18 < m < 14$.

C. $-14 < m < 18$.

D. $-4 < m < 4$.

Lời giải tham khảo

Xét hàm số $y = x^3 - 12x \Rightarrow y' = 3x^2 - 12$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{CT} = -16 \\ y_{CD} = 16 \end{cases}$$

Xét đường thẳng $y = 2 - m$. Để PT có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện là

$$-16 < 2 - m < 16 \Leftrightarrow -14 < m < 18.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 15. Tìm tất cả giá trị thực của k để phương trình $x^3 - 3x = k$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $-2 < k < 2$.

B. $-2 \leq k \leq 2$.

C. $k > 2$.

D. $k < -2$.

Câu 16. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m = 2$.

B. $0 < m < 4$.

C. $m < 0$.

D. $m > 4$.

Câu 17. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $0 < m < 4$.

B. $0 \leq m \leq 4$.

C. $m > 4$.

D. $m < 0$.

Câu 18. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x = 2m$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

A. $0 < m < 2$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $-2 < m < 2$.

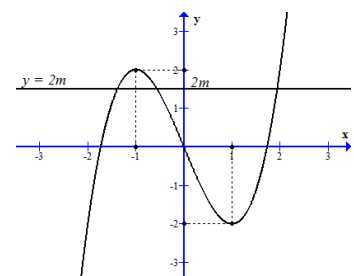
D. $0 < m < 1$.

Lời giải tham khảo

Từ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$.

Từ đó ta có kết quả thoả mãn yêu cầu bài toán là

$0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.



Câu 19. Hình bên là đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $64|x|^3 = (x^2 + 1)^2 (12|x| + m(x^2 + 1))$ có nghiệm.

A. $-2 \leq m \leq 2$.

B. $\forall m$.

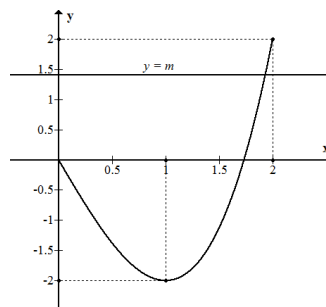
C. $m \geq 0$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải tham khảo

$$64|x|^3 - 12|x|(x^2 + 1)^2 = m(x^2 + 1)^3 \Leftrightarrow \left| \frac{4x}{x^2 + 2} \right|^3 - 3 \left| \frac{4x}{x^2 + 1} \right| = m \quad (*)$$

Đặt $t = \left| \frac{4x}{x^2 + 1} \right|$, $t \in [0; 2]$. Yêu cầu bài toán trở thành: tìm m để phương trình $t^3 - 3t = m$ có nghiệm nằm trong đoạn $[0; 2]$. Vẽ đồ thị hàm số $y = t^3 - 3t$ trên đoạn $[0; 2]$. Từ đó ta có kết quả thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-2 \leq m \leq 2$.



Câu 20. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = mx - 3m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = -\frac{3}{2}$.

C. $m = 3$.

D. $m = -3$.

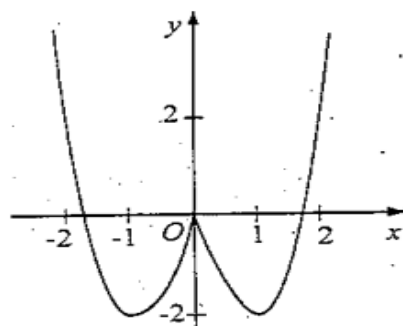
Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) :

$$x^3 - 3x^2 = m(x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 - 3x - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Khi đó $x_1 = 3, x_2, x_3$ là các nghiệm của (2) với điều kiện

$$\begin{cases} 9 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$



$$\text{Suy ra } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15 \Leftrightarrow 3^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 15 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Câu 21. Hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $|x^3 - 3x| = m^2$ có năm nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$.

B. $m \in (0; \sqrt{2})$.

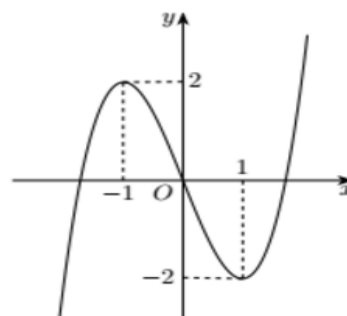
C. $m \in (-2; 0) \cup (0; 2)$.

D. $m \in (0; 2)$.

Lời giải tham khảo

Từ đồ thị đã cho, ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |x^3 - 3x|$.

Từ đó ta có kết quả thỏa mãn yêu cầu bài toán $0 < m^2 < 2 \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$.



HÀM BẬC BỐN

Dạng 24. Bài toán tương giao của hàm số bậc bốn

Câu 22. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 - 1$ với trục Ox .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x^2 + 1)^2 = 0$ (vô nghiệm)

Suy ra số giao điểm của đồ thị hàm $y = -x^4 - 2x^2 - 1$ và trục Ox là 0.

Câu 23. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + mx^2 + 1$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 4x^3 + 2mx, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{m}{2} \end{cases}$$

Đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt khi phương trình $x^2 = -\frac{m}{2}$ có hai

nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{-\frac{m}{2}}$ thỏa $y\left(\pm\sqrt{-\frac{m}{2}}\right) = 0$.

$$\text{Suy ra } m < 0 \text{ và: } \left(\pm\sqrt{-\frac{m}{2}}\right)^4 + m\left(\pm\sqrt{-\frac{m}{2}}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = 2$ thỏa yêu cầu.

Câu 24. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - m - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

- A. $m = -3$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. Không có giá trị m .

Lời giải tham khảo

Thế $x = 0, y = 2$ vào PT đồ thị.

Câu 25. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ tại bốn điểm phân biệt.

- A. $-1 < m < 1$. B. $2 < m < 3$. C. $0 < m < 1$. D. $-1 < m < 0$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -1; x = 1.$$

$$y(0) = 3; y(1) = y(-1) = 2.$$

Câu 26. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 - mx^2 + m - 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. B. Không có m . C. $m > 1$. D. $m \neq 2$.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là: $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ (1).

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Khi đó ta được phương trình: (2): $t^2 - mt + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = m - 1 \end{cases}$.

Yêu cầu của đề bài $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Câu 27. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $1 < m < \frac{13}{4}$. B. $0 < m < \frac{9}{4}$. C. $-\frac{9}{4} < m < 0$. D. $-1 < m < \frac{13}{4}$.

Lời giải tham khảo

$$x^4 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 3x^2 = m$$

Xét hàm số $y = -x^4 + 3x^2$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -4x^3 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Phương trình có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow CT < m < CD \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$.

HÀM PHÂN THỨC

Dạng 25. Bài toán tương giao của hàm phân thức

Câu 28. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x+1}$ và $y = -x+1$.

- A. $(1;1), (-1;2)$. B. $(1;0), (-1;2)$. C. $(-1;0), (1;2)$. D. $(1;-2)$.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{cases} x-1 = (2x+1)(-x+1) \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 2 = 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow (-1;2) \\ x = 1 \Rightarrow (1;0) \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 29. Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{2x+1}$ và trục tung.

- A. $M(4;-2)$. B. $M(4;0)$. C. $M(0;-4)$. D. $M(0;0)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 30. Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$ và $y = x+1$.

- A. $M(2;2)$. B. $M(2;-3)$. C. $M(-1;0)$. D. $M(3;1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 31. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x+1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$.

Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN .

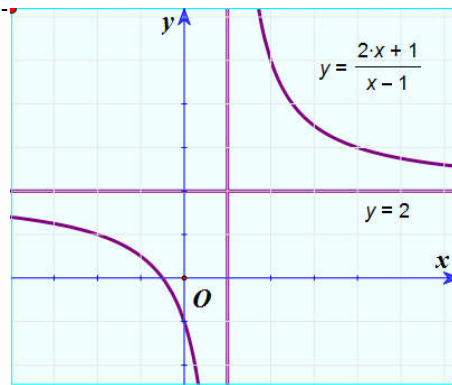
- A. $-\frac{5}{2}$. B. 1. C. 2. D. $\frac{5}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	

1F. Bài toán tương giao của đồ thị hàm số

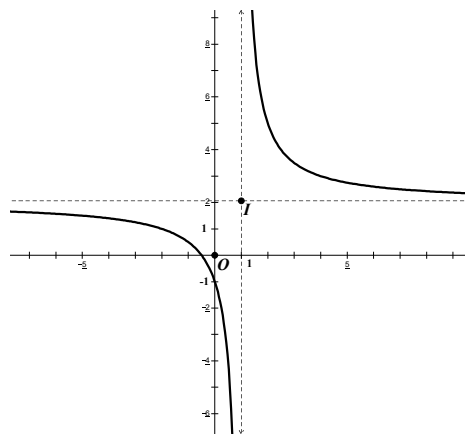
Câu 32. Hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{2x+1}{|x-1|} = m$ có hai nghiệm phân biệt.

- A. $m > 2$.
 B. Không có giá trị của m .
 C. $m > -2$.
 D. Với mọi m .

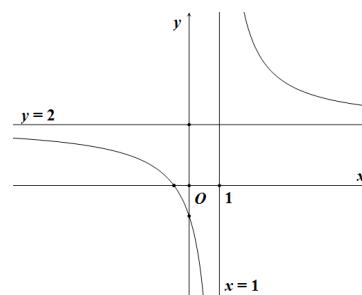


Câu 33. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{|2x+1|}{x-1} = 3m-1$ có hai nghiệm phân biệt.

- A. $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{3}$.
 B. Không có m .
 C. $m > 1$.
 D. $-2 < m < 0$.



Câu 34. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{|2x+1|}{|x-1|} = 2m$ có hai nghiệm phân biệt.



- A. Với mọi m . B. Không có giá trị của m .
C. $m > 0$. D. $m \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Câu 35. Tìm giá trị thực của tham số m đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ đi qua điểm $M(-1;0)$.

- A. -1. B. 2. C. -2. D. 1.

Câu 36. Tìm tất các giá trị của m để đường thẳng $y = x - m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt.

- A. $m \neq 1$. B. $m \leq 1$. C. $m > 1$. D. $\forall m$.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m - 2x$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

- A. $|m| > 4$. B. $|m| < 4$. C. $|m| \geq 4$. D. $|m| \leq 4$.

Câu 38. Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{-x + 1}$ sao cho M cách đều hai trục tọa độ.

- A. $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M\left(m; \frac{m^2 - 3m + 3}{-m + 1}\right)$. Khi đó $|m| = \left|\frac{m^2 - 3m + 3}{-m + 1}\right| \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 39. Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x - 3}{x + 1}$ sao cho điểm M cách đều hai trục tọa độ.

- A. $M(-2; 5)$. B. $M(1; -1)$. C. $M(3; -3)$. D. $M\left(2; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M\left(m; \frac{m - 3}{m + 1}\right) \in (C), m \neq -1$. Khi đó $d(M, Ox) = d(M, Oy) \Leftrightarrow |m| = \left|\frac{m - 3}{m + 1}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Câu 40. Gọi M và N lần lượt là hai điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x - 3}{x + 1}$ và cách đều hai điểm $A(2; 0)$ và $B(0; -2)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn MN .

- A. $I(-1; 1)$. B. $I\left(0; -\frac{3}{2}\right)$. C. $I\left(0; \frac{3}{2}\right)$. D. $I(-2; 2)$.

Lời giải tham khảo

Giả sử $M(x; y)$. Khi đó $MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} \Leftrightarrow y = -x$.

Hơn nữa, $M \in (C) \Leftrightarrow M\left(x; \frac{x - 3}{x + 1}\right)$. Suy ra $\frac{x - 3}{x + 1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Tìm được $M(1; -1), N(-3; 3) \Rightarrow I(-1; 1)$.

Câu 41. Cho đồ thị $(C): y = \frac{x}{x + 1}$. Gọi M là điểm thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: 3x + 4y = 0$ bằng 1. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm M thỏa mãn điều kiện đề bài?

- A. Có 4 điểm. B. Không có điểm nào.
C. Có 2 điểm. D. Có vô số điểm.

Lời giải tham khảo

Gọi $M\left(m; \frac{m}{m + 1}\right) \in (C)$. Khi đó $d(M; d) = \frac{\left|3m + 4 \cdot \frac{m}{m + 1}\right|}{5} = \frac{|3m^2 + 7m|}{5|m + 1|}$

$$d(M; d) = 1 \Leftrightarrow |3m^2 + 7m| = 5|m + 1| \Leftrightarrow m \in \left\{\frac{-6 \pm \sqrt{21}}{3}; 1; -\frac{5}{3}\right\}.$$

Vậy có bốn điểm M thỏa mãn đề bài.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{3x-2}{x+1} = \frac{3m-2}{m+1}$ chỉ có một nghiệm.

A. Với mọi m .

B. $m \neq -1$.

C. $m \neq \frac{1}{4}$.

D. Không có giá trị nào của m .

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $-1 < m < 4$.

B. $-1 < m$ hoặc $m > 4$.

C. $m = 4$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 44. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN .

A. $x_I = -\frac{5}{2}$.

B. $x_I = 1$.

C. $x_I = 2$.

D. $x_I = \frac{5}{2}$.

Câu 45. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = -1$.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+2} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0$ (*)

Vì $\Delta_{(*)} = (m-2)^2 + 8 > 0$ và -2 không phải là nghiệm phương trình (*) nên đồ thị hai hàm số luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của (*). Khi đó $A(x_1; -x_1 + m); B(x_2; -x_2 + m);$

$$\Rightarrow AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2$$

$$\text{Áp dụng định lí Viet } AB^2 = 2\left[(m-2)^2 + 8\right] \geq 16 \Rightarrow AB \geq 4.$$

Vậy AB ngắn nhất bằng $4 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 46. Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-5}{x+m}$ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$.

A. 2. B. 5. C. 7. D. Đáp án khác.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm: $\begin{cases} x(x+m) = x-5 \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-1)x + 5 = 0 = f(x) \\ x \neq -m \end{cases}$

Đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm A, B khi và chỉ khi: $\begin{cases} \Delta_f > 0 \\ f(-m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 19 > 0 \\ m \neq -5 \end{cases}$

Gọi: $A(x_1; x_1), B(x_2; x_2)$. Với $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

$$AB = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = -5 \end{cases}$$

So với điều kiện ta nhận $m = 7$.

Câu 47. Cho hai điểm A, B phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ sao cho A và B đối xứng với nhau qua điểm $M(3;3)$. Tính độ dài AB .

A. $AB = 2\sqrt{2}$. B. $AB = 5\sqrt{2}$. C. $AB = 6\sqrt{2}$. D. $AB = 3\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Gọi $A\left(a; 1 + \frac{3}{a-1}\right), B\left(b; 1 + \frac{3}{b-1}\right) \in (C)$ với $a \neq b; a, b \neq 1$.

Do A, B đối xứng nhau qua điểm nên M là trung điểm của AB .

$$\text{Tìm được } \begin{cases} a = 2; b = 4 \Rightarrow A(2; 4); B(4; 2) \\ a = 4; b = 2 \Rightarrow A(4; 2); B(2; 4) \end{cases} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 48. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB = 2\sqrt{2}$.

A. $m = 1$.

B. $m = 5$.

C. $m = -2$.

D. $m = 8$.

Câu 49. Biết đường thẳng $y = 3x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt A và B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = 4\sqrt{10}$.

B. $AB = 4\sqrt{6}$.

C. $AB = 4\sqrt{2}$.

D. $AB = 4\sqrt{15}$.

Câu 50. Gọi M, N là hai điểm thuộc đồ thị $y = \frac{x-3}{x+1}$ cách đều hai trục tọa độ. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

A. $MN = 4\sqrt{2}$.

B. $MN = 3$.

C. $MN = 2\sqrt{2}$.

D. $MN = 3\sqrt{5}$.

Câu 51. Biết đường thẳng $y = x - 3$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm A, B phân biệt. Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ A, B đến đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Tính $d = d_1 + d_2$.

- A. $d = 3\sqrt{2}$. B. $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $d = 6$. D. $d = 2\sqrt{2}$.

Câu 52. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm của tam giác OAB thuộc đồ thị (C), với $O(0;0)$ là gốc tọa độ.

- A. $m = \frac{15 - 3\sqrt{13}}{2}$. B. $m = \frac{15 + 5\sqrt{13}}{2}$. C. $m = \frac{7 + 5\sqrt{5}}{2}$. D. Với mọi m .

Câu 53. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx - m^2 - 2}{x - 3}$ giảm trên từng khoảng xác định và đồ thị hàm số đi qua điểm $I(4;1)$.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m = 1$. C. $m = 3$. D. $m = 1$ và $m = 3$.

Câu 54. Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$. Hỏi có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số (C) có tọa độ nguyên (hoành độ và tung độ là những số nguyên)?

- A. Có 4 điểm. B. Có vô số điểm. C. Có 2 điểm. D. Không có điểm nào.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1G. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dạng 26. Bài toán tiếp tuyến

Câu 1. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

- A. $y = -9x$. B. $y = 9x + 9$. C. $y = 9x - 9$. D. $y = 9x$.

Lời giải tham khảo

$$x = 1 \Rightarrow y = 0; y' = 3x^2 + 6x, y'(1) = 9.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } y = 9(x - 1) = 9x - 9.$$

Câu 2. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x$ tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$.

- A. $y = x - 2$. B. $y = x + 2$. C. $y = -x + 2$. D. $y = -x - 2$.

Lời giải tham khảo

$$x_0 = -1; y_0 = 1; f'(x_0) = 1. \text{ Phương trình tiếp tuyến } y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Câu 3. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

- A. $y = -3x - 2$. B. $y = 3x - 2$. C. $y = 3x + 2$. D. $y = -3x + 2$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Với } x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1 \text{ và } y'(-1) = 3. \text{ Phương trình tiếp tuyến } y = 3x + 2.$$

Câu 4. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{-x+2}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

- A. $y = -5x + 8$. B. $y = 5x - 2$.
C. $y = -5x - 2$. D. $y = 5x + 8$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Vì } y' = \frac{5}{(-x+2)^2} \quad \forall x \neq 2 \text{ nên } y'(1) = 1 \text{ và } x = 1 \Rightarrow y = 3.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M(1; 3) \text{ là } y = 5x - 2.$$

Câu 5. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -3$.

- A. $y = -3x - 5$. B. $y = -3x + 13$. C. $y = 3x + 13$. D. $y = 3x + 5$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } y(-3) = 4. \text{ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = 3x + 13.$$

1G. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Câu 6. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-6}{x-2}$ (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- A. $y = 2x - 6$. B. $y = \frac{1}{2}x + 3$. C. $y = 2x + 6$. D. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Lời giải tham khảo

Ta có : $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3, y' = \frac{2}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Câu 7. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đi qua điểm $A(0; 3)$.

- A. $y = -3x + 3$. B. $y = -2x + 3$. C. $y = 3x + 3$. D. $y = 4x + 3$.

Lời giải tham khảo

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y = kx + 3$. Tìm k từ hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = kx + 3 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases}$$

Câu 8. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$ đi qua điểm $M(2; -1)$.

- A. $y = x + 1$. B. $y = -2x - 1$. C. $y = x - 3$. D. $y = -2x + 3$.

Lời giải tham khảo

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y = k(x - 2) - 1$

Tìm k từ hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - x + 1 = k(x - 2) - 1 \\ \frac{x}{2} - 1 = k \end{cases}$. Suy ra $y = x - 3$.

Câu 9. Có bao nhiêu phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$? Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 3y - 2 = 0$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải tham khảo

Có $y' = \frac{3}{(1-x)^2}$. Lập luận suy ra $\frac{3}{(1-x)^2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

Giải được $x = 0; x = 2$. Viết được hai phương trình tiếp tuyến: $y = 3x + 1; y = 3x - 1$

Câu 10. Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$? Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 2$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Không có.

1G. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Câu 11. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x$ có một tiếp tuyến có hệ số góc k nhỏ nhất. Tìm giá trị của k .

- A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.

Lời giải tham khảo

$$y' = x^2 + 1 \geq 1. \text{ Kết luận.}$$

Câu 12. Trong các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 - 12x + 4$ có một tiếp tuyến có hệ số góc k lớn nhất. Tìm giá trị của k .

- A. $k = -9$. B. $k = 0$. C. $k = 12$. D. $k = -12$.

Lời giải tham khảo

$$k = y'(x_0) = -3x_0^2 - 12 \leq -12.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm đó có hệ số góc lớn nhất.

- A. $M(-1; 2)$. B. $M(1; 0)$. C. $M(0; 4)$. D. $M(-2; 0)$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc $k = -3x^2 - 6x$

$$\text{Ta có: } k = -3x^2 - 6x = -3(x+1)^2 + 3 \leq 3$$

$$k \text{ đạt giá trị lớn nhất bằng } 3 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow M(-1; 2).$$

Câu 14. Cho hàm số $(C): y = -x^3 + 6x + 2$ và đường thẳng $d: y = mx - m - 1$. Tìm giá của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm A, B, C sao cho tổng hệ số góc các tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A, B, C bằng -6 .

- A. $m = -3$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải tham khảo

+ Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d :

$$-x^3 + 6x + 2 = mx - m - 1 \Leftrightarrow x^3 + (m-6)x - m - 3 = 0 \quad (1)$$

+ Giả sử pt (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 . Khi đó:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = m-6 \\ x_1x_2x_3 = m+3 \end{cases}$$

$$+ \text{ Theo giả thiết ta có: } (-3x_1^2 + 6) + (-3x_2^2 + 6) + (-3x_3^2 + 6) = -6$$

$$\Leftrightarrow -3(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3.0 + 6(m-6) + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

+ Thử lại: $m = 2$ thỏa đề bài.

1G. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Câu 15. Cho đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 2x^2 + \frac{5}{3}x$. Tiếp tuyến tại gốc tọa độ O của (C) cắt (C) tại điểm thứ hai M . Tìm tọa độ điểm M .

- A. $M\left(-2; \frac{10}{3}\right)$. B. $M\left(-2; -\frac{10}{3}\right)$. C. $M\left(2; -\frac{10}{3}\right)$. D. $M\left(2; \frac{10}{3}\right)$.

Lời giải tham khảo

Viết phương trình tiếp tuyến $d: y = \frac{5}{3}x \Rightarrow d$ cắt (C) tại $M\left(2; \frac{10}{3}\right)$.

Câu 16. Tìm một tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B thỏa mãn $OB = 9OA$.

- A. $y = 9x + 7$. B. $y = 9x - 25$. C. $y = 9x + 25$. D. $y = 9x - 7$.

Lời giải tham khảo

Gọi điểm $M(x_0; x_0^3 - 3x_0^2 + 2)$ là tọa độ tiếp điểm. Do $OB = 9OA$, suy ra

$$\begin{cases} k = 9 \\ k = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 9 \\ f'(x_0) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}. \text{ Suy ra } \begin{cases} y = 9x + 7 \\ y = 9x - 25 \end{cases}.$$

Câu 17. Gọi $M \in (C): y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B . Tính diện tích tam giác OAB .

- A. $y = \frac{121}{6}$. B. $\frac{119}{6}$. C. $y = \frac{123}{6}$. D. $y = \frac{125}{6}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $y_0 = 5 \Rightarrow x_0 = 2, y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -3$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11$

Tiếp tuyến cắt trục Ox tại $A\left(\frac{11}{3}; 0\right)$, cắt trục Oy tại $B(0; 11)$

$$y = -(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11.$$

Câu 18. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C) . Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) , mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Tính $x_1 + x_2$.

- A. $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$. B. $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}$. C. $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}$. D. $x_1 + x_2 = -1$.

2A. HÀM SỐ LŨY THỪA – HÀM SỐ MŨ

✎ **Dạng 27. Tập xác định của hàm số mũ**

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (1 - x^2)^\pi$.

A. $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

D. $D = (-1; 1)$.

Lời giải tham khảo

ĐK: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Tập xác định: $(-1; 1)$.

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x - 4}$.

A. $D = [-1; 4]$.

B. $D = (-1; 4)$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

D. $D = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Hàm số xác định khi $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{cases}$.

Câu 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4x^2 - 1)^{-4}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = (0; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

D. $D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải tham khảo

Số mũ nguyên âm thì cơ số phải có điều kiện: $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{2}$.

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (2x^2 - x - 6)^{-5}$.

A. $D = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

B. $D = \left(-\frac{3}{2}; 2\right)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Lời giải tham khảo

Hàm số xác định khi $2x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓**Câu 5.** Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 4)^{-\frac{2}{3}}$.

A. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

C. $D = (-2; 2)$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (1 - x)^{\frac{1}{2}}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = (-\infty; 1)$.

D. $D = \{\emptyset\}$.

Câu 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$.

A. $D = [-1; 1]$.

B. $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 8. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{9^x - 3^x}$.

A. $D = (1; 2)$.

B. $D = [0; +\infty)$.

C. $D = [3; +\infty)$.

D. $D = (0; 3)$.

Câu 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (1 - x)^3$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = (0; +\infty)$.

D. $D = \{\emptyset\}$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt[5]{x^2 - 3x + 2}$.

A. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

C. $D = (1; 2)$.

D. $D = \mathbb{R}$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 28. Đạo hàm của hàm số mũ

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = 12^x$.

A. $y' = x \cdot 12^{x-1}$.

B. $y' = 12^x \ln 12$.

C. $y' = 12^x$.

D. $y' = \frac{12^x}{\ln 12}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = (12^x)' = 12^x \ln 12$$

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $y = 100^{x+1}$.

A. $y' = 100^{x+1} \ln 10$.

B. $y' = 200 \cdot 100^x \ln 10$.

C. $y' = \frac{1}{(x+1) \ln 100}$.

D. $y' = (x+1) \ln 100$.

Lời giải tham khảo

$$y' = (100^{x+1})' = 100^{x+1} \ln 100 = 100 \cdot 100^x \ln 10^2 = 200 \cdot 100^x \ln 10.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x+3}$.

A. $y' = 2 \cdot 2^{2x+3} \cdot \ln 2$.

B. $y' = 2^{2x+3} \cdot \ln 2$.

C. $y' = 2 \cdot 2^{2x+3}$.

D. $y' = (2x+3) \cdot 2^{2x+2}$.

.....

.....

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 2$.

B. $f'(0) = \ln 2$.

C. $f'(0) = 2 \ln 2$.

D. Kết quả khác.

.....

.....

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}$.

A. $y' = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}} (2x - 2)$.

B. $y' = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}} (2x - 2)$.

C. $y' = \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$.

D. $y' = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}} (x - 1)$.

.....

.....

2A. Hàm số lũy thừa – Hàm số mũ

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1) = \frac{3}{8}$.

B. $f'(1) = \frac{8}{3}$.

C. $f'(1) = 2$.

D. $f'(1) = 4$.

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{2x+1} \sin 2x$.

A. $y' = 2e^{2x+1} \cos 2x$.

B. $y' = 4e^{2x+1} \cos 2x$.

C. $y' = 2e^{2x+1} \sin 2x - 2e^{2x+1} \cos 2x$.

D. $y' = 2e^{2x+1} \sin 2x + 2e^{2x+1} \cos 2x$.

Lời giải tham khảo

$$y' = (e^{2x+1})' \sin 2x + e^{2x+1} (\sin 2x)' = 2e^{2x+1} \sin 2x + 2e^{2x+1} \cos 2x$$

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2-5x+1}$.

A. $y' = (x^2 - 5x + 1)e^{x^2-5x+1}$.

B. $y' = 2x - 5e^{x^2-5x+1}$.

C. $y' = (2x - 4)e^{x^2-5x+1}$.

D. $y' = (2x - 5)e^{x^2-5x+1}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = (e^{x^2-5x+1})' = (x^2 - 5x + 1)' e^{x^2-5x+1} = (2x - 5)e^{x^2-5x+1}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓**Câu 19.** Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{2x} - 3.5^{5x}$.

A. $y' = 2e^{2x} - 5^{5x} \cdot \ln 5$.

B. $y' = 2e^{2x} - 3.5^{5x}$.

C. $y' = 2e^{2x} - 3.5^{5x} \cdot \ln 5$.

D. $y' = 2e^{2x} - 3.5^{5x+1} \cdot \ln 5$.

Câu 20. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

A. $y' = x^2 e^x$.

B. $y' = (2x - 2)e^x$.

C. $y' = -2xe^x$.

D. $y' = 2xe^x$.

Câu 21. Cho hàm số $y = e^{\tan 2x}$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $-4e^{\sqrt{3}}$.

B. $2e^{\sqrt{3}}$.

C. 4.

D. $8e^{\sqrt{3}}$.

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = 9^x(1 - 3x)$.

A. $y' = 9^x[(1 - 3x)\ln 9 - 1]$.

B. $y' = 9^x[(2 - 6x)\ln 9 - 3]$.

C. $y' = 9^x(2 - 6x)\ln 3 - 3^{2x+1}$.

D. $y' = 9^x[(1 - 3x)\ln 3 - 3]$.

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{9^x}$.

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$.

B. $y' = \frac{1-(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$.

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 9}{3^x}$.

D. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^x}$.

.....

.....

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = 3^x - 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f'(0) = \ln 3$.

B. $f'(0) = 3 \ln 3$.

C. $f'(1) = \ln 3$.

D. $f'(2) = 9$.

.....

.....

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = x.e^x$. Tính $f''(0)$.

A. $f''(0) = 1$.

B. $f''(0) = 2e$.

C. $f''(0) = 3e$.

D. $f''(0) = 2$.

Lời giải tham khảo

$$f'(x) = e^x(x+1), \quad f''(x) = e^x(x+2) \Rightarrow f''(0) = 2.$$

Câu 26. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = 10^x$.

A. $y'' = 10^x$.

B. $y'' = 10^x \cdot \ln 10^2$.

C. $y'' = 10^x \cdot (\ln 10)^2$.

D. $y'' = 10^x \cdot \ln 20$.

Lời giải tham khảo

$$y = 10^x \Leftrightarrow y' = 10^x \cdot \ln 10 \Leftrightarrow y'' = 10^x \cdot (\ln 10)^2.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 27. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{e^x - 1}{x}$.

A. $\frac{e^x - 1}{x^2}$.

B. $\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

C. $\frac{xe^x \ln x - e^x + 1}{x^2}$.

D. $\frac{e^x(x+1)+1}{x^2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{2x+1}$.

A. $y' = 2e^{2x+1}$.

B. $y' = \frac{1}{2}e^{2x+1}$.

C. $y' = e^{2x+1}$.

D. $y' = 2e^{2x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 29. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2017^x$.

A. $y' = x \cdot 2017^{x-1}$.

B. $y' = 2017^x \cdot \ln 2017$.

C. $y' = 2017^x$.

D. $y' = \frac{2017^x}{\ln 2017}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Dạng 29. Rút gọn biểu thức

Câu 30. Cho $4^x + 4^{-x} = 23$. Tính $I = 2^x + 2^{-x}$.

- A. $I = 5$. B. $I = 4$. C. $I = \sqrt{23}$. D. $I = \sqrt{21}$.

Lời giải tham khảo

Sử dụng hằng đẳng thức $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$.

Câu 31. Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính $P = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}}$.

- A. $-\frac{5}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Lời giải tham khảo

Ta có $(3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 9^{-x} + 2 = 23 + 2 = 25$ nên $(3^x + 3^{-x}) = 5$

Suy ra $P = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{5 + 5}{1 - 5} = -\frac{5}{2}$.

Câu 32. Cho a và b là hai số thực thỏa mãn đồng thời $a + b = 1$ và $4^{-2a} + 4^{-2b} = 0,5$. Tính $P = ab$.

- A. $P = \frac{1}{4}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = -\frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{1}{4}$.

Lời giải tham khảo

Rút b từ $a + b = 1$ rồi thế vào $4^{-2a} + 4^{-2b} = 0,5$.

Câu 33. Rút gọn biểu thức $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}$ với $x > 0$.

- A. $x^{\frac{7}{3}}$. B. $x^{\frac{5}{2}}$. C. $x^{\frac{2}{3}}$. D. $x^{\frac{5}{3}}$.

Lời giải tham khảo

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}} = x^{\frac{5}{3}}.$$

Câu 34. Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$. Tính $f\left(\frac{13}{10}\right)$.

- A. $\frac{11}{10}$. B. 4. C. 1. D. $\frac{13}{10}$.

Lời giải tham khảo

$$\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow 0 < a < b.$$

Câu 35. Cho hàm số $y = e^{\sin x}$. Tính $M = y' \cos x - y \sin x - y''$.

- A. $\sin x$. B. 0. C. 1. D. -1.

Lời giải tham khảo

$$y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$y'' = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x}$$

$$\text{Ta có } y' \cos x - y \sin x - y'' = (\cos x \cdot e^{\sin x}) \cos x - \sin x \cdot e^{\sin x} - (-\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x}) = 0.$$

Câu 36. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{\left(a^\pi + b^\pi\right)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi}$ với a, b là các số dương.

- A. $P = |a^\pi - 2b^\pi|$. B. $P = |a^\pi + b^\pi|$. C. $P = a^\pi - b^\pi$. D. $P = |a^\pi - b^\pi|$.

Lời giải tham khảo

Sử dụng hằng đẳng thức với lưu ý $\sqrt{A^2} = |A|$.

Câu 37. Rút gọn biểu thức $P = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ với a, b là các số dương.

- A. $P = \frac{1}{a}$. B. $P = a + b$. C. $P = a - b$. D. $P = \frac{1}{b}$.

Lời giải tham khảo

$$P = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{1}{a}$$

Câu 38. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\left(x^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}}{x^{\sqrt{5}-3} \cdot x^{1-\sqrt{5}}}$ với $x > 0$.

- A. $A = x$. B. $A = x^2$. C. $A = x^3$. D. $A = x^4$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Rút gọn biểu thức } A = \frac{\left(x^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}}{x^{\sqrt{5}-3} \cdot x^{1-\sqrt{5}}} = \frac{x^{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}}{x^{\sqrt{5}-3+1-\sqrt{5}}} = \frac{x}{x^{-2}} = x^3 \text{ (với } x > 0 \text{)}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 39. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^{-1}})}{a^{\frac{8}{5}}(\sqrt[5]{a^2} - \sqrt[5]{a^{-8}})}$ với a dương.

- A. $P = a + 1$. B. $P = a - 1$. C. $P = \frac{1}{a-1}$. D. $P = \frac{1}{a+1}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2A. Hàm số lũy thừa – Hàm số mũ

Câu 40. Cho $2^x + 2^y = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = x + y$.

A. $S = 0$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 4$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 1}$. Tính $S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$.

A. $S = 2017$.

B. $S = 1009$.

C. $S = 1008$.

D. $S = 1006$.

Câu 42. Rút gọn biểu thức $P = a^{\frac{7}{3}} : \sqrt[3]{a}$ với $a > 0$.

A. $P = a^2$.

B. $P = a^{-2}$.

C. $P = a$.

D. $P = a^{-1}$.

Câu 43. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$.

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = -1$.

D. $P = -2$.

Câu 44. Rút gọn biểu thức $Q = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$.

A. $Q = 12$.

B. $Q = 10$.

C. $Q = 8$.

D. $Q = 6$.

Câu 45. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1$.

A. $P = \sqrt{a}$.

B. $P = 1$.

C. $P = a$.

D. $P = \sqrt[4]{a}$.

Câu 46. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$ với $a > 0, b > 0$.

A. $P = a + b$.

B. $P = a - b$.

C. $P = a.b$.

D. $P = \frac{a}{b}$.

Câu 47. Rút gọn biểu thức $A = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \right) a^{\frac{1}{4}}$ với $a > 0$.

A. $A = \sqrt{a}$.

B. $A = \sqrt{a} - 1$.

C. $A = \sqrt{a} + 1$.

D. $A = \sqrt[4]{a}$.

Câu 48. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} : x^{\frac{11}{16}}$.

A. $P = \sqrt[4]{x}$.

B. $P = \sqrt[6]{x}$.

C. $P = \sqrt[8]{x}$.

D. $P = \sqrt{x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 49. Cho $x = t^{\frac{1}{t-1}}$, $y = t^{\frac{t}{t-1}}$ ($t > 0$, $t \neq 1$). Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y .

A. $y^x = x^y$.

B. $y^x = x^{\frac{1}{y}}$.

C. $y^{\frac{1}{y}} = x^y y$.

D. $y^y = x^x$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 50. Rút gọn biểu thức $K = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$.

A. $K = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$.

B. $K = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{12}}$.

C. $K = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$.

D. $K = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Dạng 30. Bài tập tổng hợp

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 5^{x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 + x \cdot \log_2 5 > 0$. B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow -x \ln 2 + x^2 \cdot \ln 5 > 0$.
 C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x - x^2 \cdot \log_2 5 < 0$. D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 - x \cdot \log_5 2 > 0$.

Lời giải tham khảo

$$\log_2 f(x) > \log_2 1 = 0 \Leftrightarrow -x + x^2 \cdot \log_2 5 > 0.$$

Câu 52. Cho hàm số $f(x) = 4^x \cdot 9^{x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_4 9 < 0$. B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 + x \log_9 4 > 0$.
 C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow \lg 4 + x \lg 9 < 0$. D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x(\lg 4 + \lg 9^x) < 0$.

Lời giải tham khảo

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow 4^x \cdot 9^{x^2} < 1 \Leftrightarrow \log_4 4^x \cdot 9^{x^2} < 0 \Leftrightarrow x + x^2 \log_4 9 < 0$$

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow 4^x \cdot 9^{x^2} < 1 \Leftrightarrow \log_9 4^x \cdot 9^{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 + x \log_9 4 < 0$$

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow 4^x \cdot 9^{x^2} < 1 \Leftrightarrow \lg 4^x \cdot 9^{x^2} < 0 \Leftrightarrow x \lg 4 + x^2 \lg 9 < 0 \Leftrightarrow x(\lg 4 + x \lg 9) < 0$$

Câu 53. Cho hàm số $f(x) = 2^{x^2} \cdot 3^x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $f(x) > 2 \Leftrightarrow x^2 + x \log_2 3 > 1$. B. $f(x) > 2 \Leftrightarrow 2x + x \log_2 3 > 1$.
 C. $f(x) > 2 \Leftrightarrow x^2 - x \log_2 3 > 1$. D. $f(x) > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + x \log_2 3 > 1$.

Lời giải tham khảo

$$f(x) > 2 \Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot 3^x > 2 \Leftrightarrow \log_2 (2^{x^2} \cdot 3^x) > \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2^{x^2}) + \log_2 3^x > 1 \Leftrightarrow x^2 + x \log_2 3 > 1$$

Câu 54. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 3^{-x}$. B. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. C. $y = e^x$. D. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$.

Lời giải tham khảo

Hàm số $y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 55. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. B. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. C. $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$. D. $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$.

Lời giải tham khảo

Hàm số $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ có cơ số lớn hơn 1 nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 56. Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\alpha < \beta$. B. $\alpha > \beta$. C. $\alpha + \beta = 0$. D. $\alpha\beta = 1$.

Lời giải tham khảo

Vì $\pi > 1$ nên $\pi^\alpha > \pi^\beta \Rightarrow \alpha > \beta$.

Câu 57. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Với $a > 0$ thì $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^2$. B. $4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} = 8$.
C. $3^{-\sqrt{3}} < 3^{-\sqrt{2}}$. D. $\log_3 2 < \log_2 3$.

Lời giải tham khảo

Với $a > 0$ thì $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = a \neq a^2$.

Câu 58. Cho số thực $a > 1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $a^{x^2+1} > a^{2x+1} \Leftrightarrow x < 0$ hay $x > 2$. B. $\sqrt{a^{x^2+1}} \leq \sqrt{a^{2x+1}} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.
C. $(\sqrt[5]{a})^{x^2+1} \geq (\sqrt[5]{a})^{2x+1} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$. D. $\sqrt[3]{a^{x^2+1}} \geq \sqrt[3]{a^{2x+1}} \Leftrightarrow x \leq 0$ hay $x \geq 2$.

Lời giải tham khảo

$(\sqrt[5]{a})^{x^2+1} \geq (\sqrt[5]{a})^{2x+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ hay $x \geq 2$.

Câu 59. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
B. Hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ là hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.
C. Hàm số $y = a^x$ với $(0 < a \neq 1)$ luôn đi qua điểm $(a; 1)$.
D. Hàm số $y = a^x$ với $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ($0 < a \neq 1$) thì đối xứng qua trục tung.

Câu 60. Với $a > 0$, $b > 0$, x và y tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $a^x \cdot a^y = a^{x \cdot y}$. B. $(ab)^x = ab^x$. C. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. D. $(a^x)^y = a^{x+y}$.

2B. HÀM SỐ LÔGARIT

Dạng 31. Tập xác định của hàm số lôgarit

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(3^x - 1)$.

- A. $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $D = (0; +\infty)$. C. $D = [1; +\infty)$. D. $D = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải tham khảo

$$3^x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0.$$

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3(4 - x^2)$.

- A. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. B. $D = (-2; 2)$.
C. $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $D = [-2; 2]$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện } 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3(x^2 - 5x + 6)$.

- A. $D = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $D = (2; 3)$.
C. $D = [2; 3]$. D. $D = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5(x^2 + 2x - 3)$.

- A. $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $D = (-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$.
C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. D. $D = [-1; 3]$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5(x^2 - 6x + 9)$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. C. $D = (3; +\infty)$. D. $D = (-\infty; 3)$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5(4 - x)^2$.

A. $D = [-2; 2]$.

B. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -2)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Câu 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5(x^3 - x^2 - 2x)$.

A. $D = (0; 1)$.

B. $D = (1; +\infty)$.

C. $D = (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

D. $D = (0; 2) \cup (4; +\infty)$.

Câu 8. Tìm tập xác định D của hàm số $\log_6(2x - x^2)$.

A. $D = (0; 2)$.

B. $D = (2; +\infty)$.

C. $D = (-1; 1)$.

D. $D = (-\infty; 3)$.

Câu 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log(x^2 - 4)$.

A. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

B. $D = [-2; 2]$.

C. $D = (-2; 2)$.

D. $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{\sqrt[3]{2}}(8 + 5x - 3x^2)$.

A. $D = \left(-1; -\frac{8}{3}\right)$.

B. $D = \left(-1; \frac{8}{3}\right)$.

C. $D = \left(1; -\frac{8}{3}\right)$.

D. $D = \left(1; \frac{8}{3}\right)$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$.

A. $D = (0; +\infty)$.

B. $D = (-\infty; 0)$.

C. $D = (2; 3)$.

D. $D = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 12. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_9(x+1)^2 - \ln(3-x) + 2$.

A. $D = (3; +\infty)$.

B. $D = (-\infty; 3)$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 3)$.

D. $D = (-1; 3)$.

Câu 13. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{4}{\log_4 x - 3}$.

A. $D = (0; 64) \cup (64; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{64\}$.

D. $D = (0; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \end{cases}$$

Câu 14. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} \frac{x-4}{x+4}$.

A. $D = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

B. $D = [-4; 4]$.

C. $D = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

D. $D = (4; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi } \frac{x-4}{x+4} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty).$$

Câu 15. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{0,6} (2^{x-3} - 16)$.

A. $D = (-\infty; 7)$.

B. $D = (7; +\infty)$.

C. $D = (3; +\infty)$.

D. $D = (5; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

$$2^{x-3} - 16 > 0 \Leftrightarrow 2^{x-3} > 2^4 \Leftrightarrow x-3 > 4 \Leftrightarrow x > 7.$$

Câu 16. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + 2}$.

A. $D = (3; 12]$.

B. $D = (3; 12)$.

C. $D = [3; 12)$.

D. $D = [3; 12]$.

Lời giải tham khảo

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-3) \geq -2 \Leftrightarrow 0 < x-3 \leq 9 \Leftrightarrow 3 < x \leq 12.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 17. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{4}{\log_3 x - 3}$.

A. $D = (0; 27) \cup (27; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{27\}$.

D. $D = (0; +\infty)$.

Câu 18. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}}(x - 1)$.

A. $D = [1; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C. $D = (1; +\infty)$.

D. $D = (-\infty; 1)$.

Câu 19. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$.

A. $D = (1; +\infty)$.

B. $D = (-\infty; 1]$.

C. $D = (-\infty; 5) \cup (1; +\infty)$.

D. Kết quả khác.

Câu 20. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log \frac{x-2}{1-x}$.

A. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $D = (1; 2)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Câu 21. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_2 x - 1}$.

A. $D = (0; 1)$.

B. $D = (1; +\infty)$.

C. $D = (0; +\infty)$.

D. $D = [2; +\infty)$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 22. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{3 - \log_3(x+2)}$.

A. $D = (0; 25)$.

B. $D = (-2; 27)$.

C. $D = (-2; +\infty)$.

D. $D = (-2; 25]$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \ln \frac{1}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $xy' + 1 = e^y$.

B. $xy' + 1 = -e^y$.

C. $xy' - 1 = e^y$.

D. $xy' - 1 = -e^y$.

Câu 24. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3 \frac{10-x}{x^2-3x+2}$.

A. $D = (1; +\infty)$.

B. $D = (-\infty; 1) \cup (2; 10)$.

C. $D = (-\infty; 10)$.

D. $D = (2; 10)$.

Câu 25. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln(2x^2 + e^2)$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2e}\right)$.

C. $D = \left(\frac{e}{2}; +\infty\right)$.

D. $D = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 26. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(x^2 + 2x + 1)$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. $D = \{\emptyset\}$.

Câu 27. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3-x}$.

A. $D = (-\infty; 3]$.

B. $D = (3; +\infty)$.

C. $D = [3; +\infty)$.

D. $D = (-\infty; 3)$.

✎ Dạng 32. Đạo hàm của hàm số lôgarit

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2^2(2x+1)$.

A. $y' = \frac{2\log_2(2x+1)}{(2x+1)\ln 2}$.

B. $y' = \frac{4\log_2(2x+1)}{(2x+1)\ln 2}$.

C. $y' = \frac{4\log_2(2x+1)}{2x+1}$.

D. $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = 2\log_2(2x+1)[\log_2(2x+1)]' = \frac{2\log_2(2x+1) \cdot (2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} = \frac{4\log_2(2x+1)}{(2x+1)\ln 2}$$

Câu 29. Tính đạo hàm của hàm số $\log_3(x^2 - 2x + 1)$.

A. $y' = \frac{2x-2}{x^2-2x+3}$.

B. $y' = \frac{2}{(x-1) \cdot \ln 3}$.

C. $y' = \frac{2x-2}{\ln 3}$.

D. $y' = \frac{2x-1}{(x^2-2x+1) \cdot \ln 3}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = \frac{(x^2 - 2x + 1)'}{(x^2 - 2x + 1) \cdot \ln 3} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 \cdot \ln 3} = \frac{2}{(x-1) \cdot \ln 3}$$

Câu 30. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x \ (x > 0)$.

A. $y' = 3^x \ln x$.

B. $y' = x \ln 3$.

C. $y' = \frac{1}{x \ln 3}$.

D. $y' = \frac{x}{\ln 3}$.

Lời giải tham khảo

$$y = \log_3 x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln 3}$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓**Câu 31.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2017}(x^2 + 1)$.

A. $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$.

B. $y' = \frac{1}{(x^2 + 1) \ln 2017}$.

C. $y' = \frac{2x}{2017}$.

D. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 2017}$.

Câu 32. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(2x - x^2)$ với $0 < x < 2$.

A. $y' = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$.

B. $y' = (2 - 2x)(2x - x^2)$.

C. $y' = \frac{1}{2x - x^2}$.

D. $y' = 2x - x^2$.

Câu 33. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2x \ln^2 x$.

A. $y' = 2 \ln^2 x + 4x \ln x$.

B. $y' = 2x \ln^2 x + 4x \ln x$.

C. $y' = 2x \ln^2 x + 4 \ln x$.

D. $y' = 2 \ln^2 x + 4 \ln x$.

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $y = x \ln^2 x$.

A. $y' = \ln^2 x + 2$.

B. $y' = \ln x (\ln x + 2)$.

C. $y' = \frac{2 \ln x}{x}$.

D. $y' = 2x \ln x$.

Câu 35. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x - 1) \ln x$.

A. $y' = \ln x$.

B. $y' = \frac{x - 1}{x}$.

C. $y' = \frac{x - 1}{x} - \ln x$.

D. $y' = \frac{x - 1}{x} + \ln x$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 + \ln x) \cdot \ln x$.

- A. $y' = \frac{1 - 2 \ln x}{x}$. B. $y' = \frac{2 \ln x}{x}$. C. $y' = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$. D. $y' = \frac{-2 \ln x}{x}$.

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$.

- A. $y' = \frac{1}{x}$. B. $y' = \frac{1 - \ln x}{x}$.
C. $y' = \frac{1 + \ln x}{x^2}$. D. $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Lời giải tham khảo

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Câu 38. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\ln x - 1}{x}$.

- A. $y' = \ln x - 1$. B. $y' = \frac{2 - \ln x}{x^2}$. C. $y' = \frac{1}{x} - 1$. D. $y' = 1$.

Lời giải tham khảo

$$y = \frac{\ln x - 1}{x} \text{ có } y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x + 1}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$.

- A. $y' = -\frac{\ln x}{x}$. B. $y' = \frac{\ln x}{x}$. C. $y' = \frac{\ln x}{x^4}$. D. $y' = \ln x^2$.

Câu 40. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln \left| \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right|$.

- A. $y' = \frac{2}{\cos 2x}$. B. $y' = \frac{2}{\sin 2x}$. C. $y' = \cos 2x$. D. $y' = \sin 2x$.

Câu 41. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

A. $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

B. $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$.

C. $y' = x + \sqrt{1+x^2}$.

D. $y' = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}}$.

Câu 42. Cho hàm số $y = \ln\left(\frac{x-5}{3}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $y' - \frac{1}{x-5} = 0$.

B. $3y - \ln(x-5) = 0$.

C. $e^y = x-5$.

D. $y' - y = 0$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \ln\sqrt{1+e^x}$. Tính $f'(\ln 2)$

A. $f'(\ln 2) = 2$.

B. $f'(\ln 2) = -2$.

C. $f'(\ln 2) = 0,3$.

D. $f'(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

Câu 44. Tính đạo hàm của hàm số $y = x \ln \frac{1}{1+x}$.

A. $y' = -\frac{x + (1+x)\ln(1+x)}{1+x}$.

B. $y' = \frac{x + (1+x)\ln(1+x)}{1+x}$.

C. $y' = -\frac{x + \ln(1+x)}{1+x}$.

D. $y' = -x - \ln(1+x)$.

Câu 45. Cho hàm số $y = \ln(2x^2 + e^2)$. Tính $f'(e)$.

A. $f'(e) = \frac{3}{4e}$.

B. $f'(e) = \frac{4}{9e}$.

C. $f'(e) = \frac{4}{9e^2}$.

D. $f'(e) = \frac{4}{3e^2}$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 46. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln x^2$.

A. $y' = \frac{2}{x}$.

B. $y' = \frac{2}{x} \ln x$.

C. $y' = \frac{2}{x^2}$.

D. $y' = \frac{2}{x^3}$.

.....
.....
.....

.....
.....
.....

Dạng 33. Biểu diễn giá trị lôgarit

Câu 47. Cho $\log_2 20 = a$. Tính $P = \log_{20} 5$ theo a .

A. $P = a - 2$.

B. $P = a + 2$.

C. $P = \frac{a-2}{a}$.

D. $P = \frac{a+2}{a}$.

Lời giải tham khảo

+) $a = \log_2 20 = \log_2 (2^2 \cdot 5) = 2 \log_2 2 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5 \Rightarrow \log_2 5 = a - 2$

+) $P = \log_{20} 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 20} = \frac{a-2}{a}$.

Câu 48. Cho $\log_{12} 27 = a$. Tính $P = \log_6 16$ theo a .

A. $P = \frac{4(3-a)}{3+a}$.

B. $P = \frac{3-a}{3+a}$.

C. $P = \frac{8a}{3+a}$.

D. $P = \frac{4}{3+a}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\log_{12} 27 = \frac{3}{1+2\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{3-a}{2a}$

Vậy $P = \frac{4}{1+\log_2 3} = \frac{4(3-a)}{3+a}$.

Câu 49. Cho $\log_{15} 3 = a$. Tính $P = \log_{25} 15$ theo a .

A. $P = \frac{1}{2(1-a)}$.

B. $P = \frac{1-a}{a}$.

C. $P = \frac{1}{1-a}$.

D. $P = \frac{2}{1-a}$.

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết $\log_{15} 3 = a \Rightarrow a = \frac{1}{\log_3 15} = \frac{1}{\log_3 (3 \cdot 5)} = \frac{1}{1+\log_3 5}$

$\Rightarrow 1+\log_3 5 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1-a}{a}$

Suy ra $P = \log_{25} 15 = \log_{5^2} 15 = \frac{1}{2} \log_5 (3 \cdot 5) = \frac{1}{2} (\log_5 3 + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{1-a} + 1 \right) = \frac{1}{2(1-a)}$.

Câu 50. Tìm x thỏa mãn $\log_{140} 63 = \frac{x \cdot \log_x 3 \cdot \log_7 x + 1}{\log_x 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_7 x + x \log_7 x + 1}$.

A. $x = 2$.

B. $x = 4$.

C. $x = 3$.

D. $x = 5$.

Lời giải tham khảo

Nhập phương trình vào máy tính Casio. Sử dụng chức năng CALC thay đáp án. Dễ dàng chọn được đáp án A.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 51. Rút gọn biểu thức $A = \log_{\frac{1}{3}} 7 + 2\log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}$.

- A. $A = 3\log_3 7$. B. $A = \log_3 7$. C. $A = 2\log_3 7$. D. $A = 4\log_3 7$.

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} +) A &= -\log_3 7 + 2\log_{3^2} 7^2 - \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}} 7^{-1} \\ &= -\log_3 7 + 2\log_3 7 + 2\log_3 7 \\ &= 3\log_3 7 \end{aligned}$$

Câu 52. Cho $\log_2 5 = a$; $\log_3 5 = b$. Tính $P = \log_6 5$ theo a và b .

- A. $P = \frac{1}{a+b}$. B. $P = \frac{ab}{a+b}$. C. $P = a+b$. D. $P = a^2 + b^2$.

Lời giải tham khảo

$$\log_2 5 = a; \log_3 5 = b \Rightarrow \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = b \Rightarrow \log_2 3 = \frac{a}{b}$$

$$\text{Vậy } P = \log_6 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \frac{\log_2 5}{\log_2 3 + 1} = \frac{ab}{a+b}.$$

Câu 53. Cho $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$. Tính $P = \log_3 50$ theo a và b .

- A. $P = a + b - 1$. B. $P = a - b - 1$.
C. $P = 2a + b - 1$. D. $P = a + 2b - 1$.

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} P &= \log_3 50 = \log_3 10 + \log_3 5 \\ &= \log_3 10 + \log_3 15 - 1 = a + b - 1. \end{aligned}$$

Câu 54. Cho $m = \log_6 2$, $n = \log_6 5$. Tính $P = \log_3 5$.

- A. $P = \frac{n}{m}$. B. $P = \frac{n}{m-1}$. C. $P = \frac{n}{m+1}$. D. $P = \frac{n}{1-m}$.

Lời giải tham khảo

$$P = \log_3 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 3} = \frac{\log_6 5}{\log_6 \frac{6}{2}} = \frac{\log_6 5}{\log_6 6 - \log_6 2} = \frac{\log_6 5}{1 - \log_6 2} = \frac{n}{1-m}.$$

Câu 55. Cho $a = \log_{12} 6$, $b = \log_{12} 7$. Tính $P = \log_2 7$.

- A. $P = \frac{a}{b+1}$. B. $P = \frac{b}{1-a}$. C. $P = \frac{a}{b-1}$. D. $P = \frac{a}{a-1}$.

Lời giải tham khảo

$$P = \log_2 7 = \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} \frac{12}{6}} = \frac{b}{1-a}.$$

Câu 56. Cho $\log_{30} 3 = a$; $\log_{30} 5 = b$. Tính $P = \log_{30} 1350$ theo a và b .

- A. $P = 2a + 2b + 1$. B. $P = a + b + 1$. C. $P = 2a + b + 1$. D. $P = 2a + b$.

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} P &= \log_{30} 1350 = \log_{30} (30 \cdot 45) = \log_{30} 45 + 1 \\ &= \log_{30} (3^2 \cdot 5) + 1 = \log_{30} 5 + 2\log_{30} 3 + 1 = 2a + b + 1. \end{aligned}$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 57. Cho $\log 3 = a$; $\log 2 = b$. Tính $P = \log_{125} 30$ theo a và b .

A. $P = \frac{1+2a}{b}$.

B. $P = \frac{2a}{1+b}$.

C. $P = \frac{1+a}{1-b}$.

D. $P = \frac{1+a}{3(1-b)}$.

Câu 58. Cho $a = \log 2$, $b = \log 3$. Tính $P = \log 0,018$ theo a và b .

A. $P = \frac{2b+a}{2}$.

B. $P = 2b + a - 3$.

C. $P = 2b + a - 2$.

D. $P = 2a + b - 2$.

Câu 59. Tìm x thỏa mãn $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$ với $a > 0$; $b > 0$.

A. $x = a^4 b^7$.

B. $x = 4a + 7b$.

C. $x = 4a \cdot 7b$.

D. $x = a \cdot b$.

Câu 60. Cho $a = \log_2 7$; $b = \log_7 3$. Tính $P = \log_{42} 147$ theo a và b .

A. $P = \frac{a(2+b)}{a+b+1}$.

B. $P = \frac{2+b}{1+ab+a}$.

C. $P = \frac{b(2+a)}{1+ab+a}$.

D. $P = \frac{a(2+b)}{1+ab+a}$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 61. Cho $\log_{25} 7 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $I = \log_5 6,125$.

- A. $I = 4a - 3b$. B. $I = 4a - \frac{3}{b}$. C. $I = \frac{3}{b} - 4a$. D. $I = 4a + \frac{3}{b}$.

Câu 62. Cho $\log 2 = m$ và $\ln 2 = n$. Tính $I = \ln 20$.

- A. $I = \frac{n}{m} + 1$. B. $I = \frac{m+1}{n}$. C. $I = \frac{n}{m} + n$. D. $I = \frac{m}{n} + m$.

Câu 63. Cho $a = \log_2 m$ với $m > 0$ và $m \neq 1$ và $A = \log_m(8m)$. Tính A theo a .

- A. $A = \frac{3+a}{a}$. B. $A = (3+a)a$. C. $A = \frac{3-a}{a}$. D. $A = (3-a).a$.

Câu 64. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Tính $I = \log_7 \left(\frac{a+b}{3} \right)$.

- A. $I = \frac{1}{2} \log_7 a + \log_7 b$. B. $I = \frac{1}{2} (\log_7 a + \log_7 b)$.
C. $I = \log_7 a + \frac{1}{2} \log_7 b$. D. $I = \log_7 \frac{a}{3} + \log_7 \frac{b}{3}$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 65. Cho $a^2 + b^2 = 7ab$ ($a, b > 0$). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$.

B. $2\log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$.

C. $\log_2 \frac{a+b}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b)$.

D. $4\log_2 \frac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b$.

Câu 66. Cho $a > 0, a \neq 1$. Tính $P = a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

A. $P = 2$.

B. $P = 16$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = 4$.

Câu 67. Cho $a > 0, a \neq 1$. Tính $P = \log_{a^3} a$.

A. $P = \frac{1}{3}$.

B. $P = -\frac{1}{3}$.

C. $P = 3$.

D. $P = -3$.

Câu 68. Tính $P = \log_{\sqrt{7}} x_1 \cdot \log_{\sqrt{7}} x_2$, biết x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $\pi \log_7^2 x - 10 \log_7 x + e = 0$.

A. $P = \frac{4e}{\pi}$.

B. $P = \frac{2e}{\pi}$.

C. $P = \frac{e}{\pi}$.

D. $P = \frac{e}{4\pi}$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 69. Cho $\log_2 x = 5\log_2 a + 4\log_2 b$ ($a, b > 0$). Tìm x .

A. $x = a^5 b^4$.

B. $x = a^4 b^5$.

C. $x = 5a + 4b$.

D. $x = 4a + 5b$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 70. Cho $\log_{12} 18 = a, \log_{24} 54 = b$. Tính $M = ab + 5(a - b)$.

A. $M = 0$.

B. $M = 2$.

C. $M = 3$.

D. $M = 1$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 34. Bài tập tổng hợp hàm số lôgarit

Câu 71. Cho $a^{\frac{\sqrt{5}}{5}} > a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ và $\log_b \frac{4}{5} < \log_b \frac{5}{6}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $0 < a < 1, b > 1$.
 B. $0 < a < 1, 0 < b < 1$.
 C. $a > 1, b > 1$.
 D. $a > 1, 0 < b < 1$.

Lời giải tham khảo

Nếu $a^{\frac{\sqrt{5}}{5}} > a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ và $\log_b \frac{4}{5} < \log_b \frac{5}{6}$ thì $0 < a < 1, b > 1$;

Câu 72. Cho hàm số $y = \log_a x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
 B. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$.
 C. $\forall x > 0$ hàm số có đạo hàm $y' = \frac{1}{x \ln a}$.
 D. Đồ thị hàm số luôn nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Lời giải tham khảo

A sai vì hàm số có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Câu 73. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
 B. $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
 C. $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$.
 D. $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$.

Câu 74. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\log_3 5 > 0$.
 B. $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$.
 C. $\log_{x^2+3} 2007 < \log_{x^2+3} 2008$.
 D. $\log_{0,3} 0,8 < 0$.

Lời giải tham khảo

Câu D sai vì $\log_{0,3} 1 = 0$

Mà $0,8 < 1$ và cơ số $0,3 < 1$ nên $\log_{0,3} 0,8 > \log_{0,3} 1 \Rightarrow \log_{0,3} 0,8 > 0$.

Câu 75. Cho a, b là các số thực dương; $a, b \neq 1$ và $a.b \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\log_{\frac{1}{a}}(ab) = -1 + \log_a b$.
 B. $\log_{\frac{1}{a}}(ab) = -1 - \log_a b$.
 C. $\log_{ab} a = \frac{1}{1 + \log_a b}$.
 D. $\log_{a^2} b = \frac{1}{2 \log_b a}$.

Lời giải tham khảo

$\log_{\frac{1}{a}}(ab) = -(1 + \log_a b)$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 76. Cho $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $2\log_a \sqrt{bc} = \log_a bc$.

B. $\log_a \sqrt{bc} = \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c)$.

C. $\log_a \sqrt{bc} = \frac{1}{\log_{\sqrt{bc}} a}$.

D. $\log_a \sqrt{bc} = \log_a \sqrt{b} - \log_a \sqrt{c}$.

Lời giải tham khảo

Vì $\log_a \sqrt{bc} = \log_a \sqrt{b} + \log_a \sqrt{c}$.

Câu 77. Cho các số thực dương a, b , với $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_a (a^2 b^3) = 2[\log_a (ab) + \log_a b]$.

B. $\log_a (a^2 b^3) = 2 + 3\log_a b$.

C. $\log_a (a^2 b^3) = 2\log_a b + 3\log_a (ab)$.

D. $\log_a (a^2 b^3) = 6(1 + \log_a b)$.

Lời giải tham khảo

$\log_a a^2 b^3 = 2 + 3\log_a b$.

Câu 78. Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_{a^2} \frac{a}{b} = \frac{1}{2}\log_a b$.

B. $\log_{a^2} \frac{a}{b} = 2 - 2\log_a b$.

C. $\log_{a^2} \frac{a}{b} = \frac{1}{4}\log_a b$.

D. $\log_{a^2} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải tham khảo

+) Ta có: $\log_{a^2} \frac{a}{b} = \frac{1}{2}\log_a \frac{a}{b} = \frac{1}{2}(\log_a a - \log_a b) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_a b$.

Câu 79. Cho a, b dương và $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_{a^3} (a.b) = 3 + 3\log_a b$.

B. $\log_{a^3} (a.b) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_a b$.

C. $\log_{a^3} (a.b) = \frac{1}{3}\log_a b$.

D. $\log_{a^3} (a.b) = 3\log_a b$.

Lời giải tham khảo

$\log_{a^3} (a.b) = \frac{1}{3}[\log_a (a.b)] = \frac{1}{3}[\log_a a + \log_a b] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_a b$.

Câu 80. Cho $0 < a < 1$ và $1 < \alpha < \beta$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a^\beta < a^\alpha < 1$.

B. $a^\alpha < 1 < a^\beta$.

C. $1 < a^\alpha < a^\beta$.

D. $a^\alpha < a^\beta < 1$.

Lời giải tham khảo

Tính chất: $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow a^\alpha > a^\beta$ Tương tự: $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < 1 < \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow a^0 = 1 > a^\alpha > a^\beta$ hay $a^\beta < a^\alpha < 1$.

Câu 81. Với $(a-1)^{\frac{1}{2}} > (a-1)^{\frac{1}{3}}$ và $\log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{2016}{2017}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $0 < a < 1; b < 1$.

B. $0 < a < 1; b > 1$.

C. $1 < a < 2; b < 1$.

D. $1 < a < 2; b > 1$.

Lời giải tham khảo

Vì $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \Rightarrow (a-1)^{\frac{1}{2}} > (a-1)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 0 < a-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2$

Và $\frac{2}{3} < \frac{2016}{2017} \Rightarrow \log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{2016}{2017} \Leftrightarrow b > 1$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 82. Cho hai số thực a và b , với $a^{-5} > a^{-4}$ và $\log_b \left(\frac{3}{4} \right) < \log_b \left(\frac{4}{5} \right)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a > 1; b > 1$.

B. $a > 1; 0 < b < 1$.

C. $0 < a < 1; b > 1$.

D. $0 < a < 1; 0 < b < 1$.

Câu 83. Cho $a, b, c > 0$; $a \neq c$; $a.b \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 - \log_a b$.

B. $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 - \log_a c$.

C. $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$.

D. $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a c$.

Câu 84. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.B. Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.C. Hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) có tập xác định là $\mathbb{R}$.D. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($0 < a \neq 1$) đối xứng nhau qua trục hoành.

Câu 85. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục hoành.
- B. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng nhau qua trục tung.
- C. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = a^x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.
- D. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = -x$.

Câu 86. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\log_3(x^2 + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 7) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
- B. $\log_3(x^2 + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 7) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
- C. $\log_3(x^2 + 5) > \log_3(x^2 + 7), \forall x \in \mathbb{R}.$
- D. $\frac{\log_3(x^2 + 5)}{\log_3(x^2 + 7)} = \frac{5}{7}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Câu 87. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $9 \ln^2 x + 4 \ln^2 y = 12 \ln x \cdot \ln y$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $x^2 = y^3.$ B. $3x = 2y.$ C. $x^3 = y^2.$ D. $x = y.$

2B. Hàm số lôgarit

Câu 88. Cho các số thực dương a, b, x, y , với $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

B. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$.

C. $\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a y$.

D. $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$.

Câu 89. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, x và y là hai số dương. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

B. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$.

C. $\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a y$.

D. $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$.

Câu 90. Cho các số thực dương a, x, y với $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

B. $\log_a (xy^2) = 2(\log_a x + \log_a y)$.

C. $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a x$.

D. $\log_a (xy^2) = \log_a x + 2 \log_a y$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 91. Cho $a > 1$. Mệnh đề nào dưới đây *sai*?

A. $\log_a x > 0$ khi $x > 1$.

B. $\log_a x < 0$ khi $0 < x < 1$.

C. Nếu $x_1 < x_2$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

D. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ có tiệm cận ngang là trục hoành.

Câu 92. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Mệnh đề nào dưới đây *đúng*?

A. $\log(a+b) = \frac{3}{2}(\log a + \log b)$.

B. $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$.

C. $3\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

D. $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Câu 93. Cho $M = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^k} x}$ với $1 \neq a > 0, x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây *đúng*?

A. $M = \frac{k(k+1)}{\log_a x}$.

B. $M = \frac{k(k+1)}{2\log_a x}$.

C. $M = \frac{4k(k+1)}{\log_a x}$.

D. $M = \frac{k(k+1)}{3\log_a x}$.

2B. Hàm số lôgarit

Câu 94. Mệnh đề nào dưới đây *sai*?

A. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

B. $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

C. $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$.

D. $\log_{\sqrt{2}} a = \log_{\sqrt{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 95. Mệnh đề nào dưới đây *đúng*?

A. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7} > 0$.

B. $\log_3 4 < \log_4 \frac{1}{3}$.

C. $\log_{0,2} 0,5 < 0$.

D. $\log_2 5 > 0$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2C. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Dạng 35. Phương trình mũ

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 8$.

A. $x = 1$.

B. $x = \frac{5}{2}$.

C. $x = 2$.

D. $x = 4$.

Lời giải tham khảo

$$2^{2x-1} = 8 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$$

Câu 2. Tìm nghiệm của phương trình $27^x = 3$.

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $x = \frac{1}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$27^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_{27} 3 = \frac{1}{3}$$

Câu 3. Tìm nghiệm của phương trình $2^{x^2-4} \cdot 5^{2-x} = 1$.

A. $x = 2; x = -2 + \log_2 5$.

B. $x = 2$.

C. $x = -2 + \log_2 5$.

D. $x = -2 + \log_2 5; x = 1$.

Lời giải tham khảo

$$\bullet 2^{x^2-4} \cdot 5^{2-x} = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 4) + (2 - x)\log_2 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2 - \log_2 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 + \log_2 5 \end{cases}$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 4. Tìm số nghiệm của phương trình $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

.....

.....

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình $3^x \cdot 2^{3x} = 576$.

A. $x = 4$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2$.

D. $x = 1$.

.....

.....

2C. Phương trình mũ

Câu 6. Cho phương trình $2^{x^2-5x+6} = 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt.
- B. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu.
- C. Phương trình có nghiệm $x = 6$.
- D. Tổng các nghiệm của phương trình bằng 4.

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$.

- A. $x = \pm 1; x = 2$ và $x = -5$.
- B. $x = 1; x = 2$ và $x = 4$.
- C. $x = 0; x = 2$ và $x = 6$.
- D. $x = 1; x = 2$ và $x = 5$.

Lời giải tham khảo

Đặt $u = 4^{x^2-3x+2} > 0; v = 4^{x^2+6x+5} > 0 \Rightarrow u + v = uv + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1; x = 2 \text{ và } x = -5.$$

Câu 8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^{x^2+2x} + 4^{x^2-x-2} = 1 + 4^{2x^2+x-2}$.

- A. $S = \{0; -1; 1; 2\}$.
- B. $S = \{0; -2; -1; 2\}$.
- C. $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.
- D. $S = \{0; -1; 1; 3\}$.

Lời giải tham khảo

Đưa phương trình về dạng tích để giải hoặc thay các giá trị x vào để kiểm tra nghiệm.

Câu 9. Tìm số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x^2-x} = 3$.

- A. 2.
- B. 3.
- C. 1.
- D. 4.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = 2^{x^2-x}$.

Câu 10. Tìm số nghiệm của phương trình $3^{-3x} \cdot 2^{3x} + 3^{-x} \cdot 2^x - 2 = 0$.

- A. 1.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 4.

Lời giải tham khảo

Chọn đáp án A.

Đặt $t = 3^{-x} \cdot 2^x$.

Câu 11. Phương trình $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $x_1 + x_2 = -2$.
- B. $x_1 \cdot x_2 = -1$.
- C. $x_1 + 2x_2 = -1$.
- D. $2x_1 + x_2 = 0$.

Lời giải tham khảo

$$3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases}.$$

2C. Phương trình mũ

Câu 12. Tìm nghiệm của phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

A. $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $x = \frac{1}{3}$.

Lời giải tham khảo

Nghiệm của phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -5 \\ 3^x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 13. Tìm nghiệm của phương trình $49^x - 7^{x+1} - 8 = 0$.

A. $x = 0$.

B. $x = \log_7 8$.

C. $x = 0$ và $x = \log_7 8$.

D. $x = 0$ và $x = \log_8 7$.

Lời giải tham khảo

$49^x - 7^{x+1} - 8 = 0 \Leftrightarrow 49^x - 7 \cdot 7^x - 8 = 0 \Leftrightarrow (7^x)^2 - 7 \cdot 7^x - 8 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = 7^x, t > 0$

$(1) \Rightarrow t^2 - 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \text{ (nhận)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$

Với $t = 8 \Leftrightarrow 7^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_7 8$.

Câu 14. Tìm tất cả giá trị m để phương trình $4^x - 2^{x+3} + 3 = m$ có đúng 2 nghiệm $x \in (1; 3)$.

A. $-13 < m < -9$.

B. $3 < m < 9$.

C. $-9 < m < 3$.

D. $-13 < m < 3$.

Lời giải tham khảo

Tìm m để phương trình $4^x - 2^{x+3} + 3 = m$ có đúng 2 nghiệm $x \in (1; 3)$.

$x \in (1; 3) \Rightarrow 2^x \in (2; 8)$

Xét hàm số $y = f(t) = t^2 - 8t + 3$ với $t \in (2; 8)$

t	$-\infty$	2	4	8	$+\infty$
y'		-	0	+	
y		-9	-13	3	

Để phương trình $4^x - 2^{x+3} + 3 = m$ có đúng 2 nghiệm $x \in (1; 3)$ thì $-13 < m < -9$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 15. Tìm nghiệm của phương trình $4^x + 2^x - 2 = 0$.

A. $x = 1$.

B. $x = 1$ và $x = -2$.

C. $x = -2$.

D. $x = 0$.

.....

.....

2C. Phương trình mũ

Câu 16. Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^x - 6.2^x + 8 = 0$.

A. $S = \{2, 4\}$.

B. $S = \{1, 2\}$.

C. $S = \{-1, 2\}$.

D. $S = \{1, 4\}$.

Câu 17. Tìm số nghiệm của phương trình $6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 18. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} - 2.3^{\lg x^2+2} = 0$.

A. $S = \frac{2}{9}$.

B. $S = 0$.

C. $S = \frac{9}{4}$.

D. $S = \frac{1}{100}$.

Câu 19. Tìm số nghiệm của phương trình $4.2^x = (\sqrt{2})^{4+2x} + 15$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Câu 20. Cho phương trình $3.25^x - 2.5^{x+1} + 7 = 0$ và các phát biểu sau:

- (1) $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.
- (2) Phương trình có nghiệm dương.
- (3) Cả hai nghiệm phương trình đều nhỏ hơn 1.
- (4) Phương trình có tổng hai nghiệm là $-\log_5\left(\frac{3}{7}\right)$.

Số phát biểu đúng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 21. Hỏi, $x = \log_2 3$ là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

- | | |
|---|---|
| A. $\log_2(3.3^{2x-1} - 4) = x \log_2 3 + \log_{\sqrt{4}} \sqrt{9}$. | B. $8^x - 2^{2x+1} = 3(\sqrt[3]{2})^{3x}$. |
| C. $8^x - 2^{2x+1} = (\sqrt[3]{2})^{3x}$. | D. $\log_2(2.2^{2x-1} - 1) = 4$. |

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 22. Hỏi, $x = 3$ không là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

- | | |
|--------------------------------------|---|
| A. $3^{2x-4} + 2.3^{x-1} - 27 = 0$. | B. $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} + 2 \log_4(x-2) = 2$. |
| C. $3^{2x-1} + 2.3^{x-1} - 1 = 0$. | D. $\log_4 x^2 + \log_2(2x-1) = \log_2(4x+3)$. |

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 23. Tìm nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^{2x} + \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^{2x} = 6.2^{x-1}$.

A. $\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} - \sqrt{15.3^x - 50 - 9^x} = 1$.

A. $4 + \log_2 6$.

B. $2 + \log_3 6$.

C. $1 + \frac{1}{2} \log_7 5$.

D. $\log_7 \frac{1}{3} - 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 4m(2^x - 1) = 0$ có nghiệm.

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

B. $0 < m < 1$.

C. $m > \frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2} < m \leq 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 2m.2^x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m < 2$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $m \in \emptyset$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2C. Phương trình mũ

Câu 27. Cho phương trình $4.3^{\log(100x^2)} + 9.4^{\log(10x)} = 13.6^{1+\log x}$. Gọi a, b lần lượt là hai nghiệm của phương trình. Tính tích ab .

A. $ab = \frac{1}{10}$.

B. $ab = 1$.

C. $ab = 100$.

D. $ab = 10$.

Câu 28. Tính $S = 5^{x_1} + 5^{x_2}$, biết x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $25^x - 6.5^x + 5 = 0$.

A. $S = 6$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 3$.

Câu 29. Tìm số nghiệm của phương trình $2016^{x^5+x} = 2017$.

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $e^{2x} = 2e^x + m$ có nghiệm.

A. $m \geq -1$.

B. $-1 \leq m < 0$.

C. $-1 \leq m \leq 0$.

D. $m > -1$.

Câu 31. Tìm nghiệm của phương trình $e^{6x} - 3.e^{3x} + 2 = 0$.

A. $x = 0 \vee x = -\frac{1}{3} \ln 2$.

B. $x = 0 \vee x = \frac{1}{3} \ln 3$.

C. $x = 0 \vee x = \frac{1}{3} \ln 2$.

D. $x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \ln 3$.

2C. Phương trình mũ

Câu 32. Tìm nghiệm của phương trình $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$.

A. $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 4$.

D. $x = 5$.

Câu 33. Tìm nghiệm của phương trình $(0,3)^{3x-2} = 1$.

A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = \frac{2}{3}$.

D. $x = -\frac{2}{3}$.

Câu 34. Tìm nghiệm của phương trình $4^{2x+3} = 8^{4-x}$.

A. $x = \frac{6}{7}$.

B. $x = \frac{2}{3}$.

C. $x = \frac{4}{5}$.

D. $x = 2$.

Câu 35: Tính tổng các nghiệm của phương trình $4 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 12 + 6^x$.

A. $S = 3$.

B. $S = 6$.

C. $S = -1$.

D. $S = 5$.

2D. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Dạng 36. Phương trình lôgarit

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 2) = 3$.

A. $x = \frac{11}{3}$.

B. $x = \frac{10}{3}$.

C. $x = 3$.

D. $x = 2$.

Lời giải tham khảo

$$\log_2(3x - 2) = 3 \Leftrightarrow 3x - 2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}.$$

Câu 2. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(x - 1) = 3$.

A. $x = 29$.

B. $x = 28$.

C. $x = 82$.

D. $x = 81$.

Lời giải tham khảo

$$\log_3(x - 1) = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 3^3 \Leftrightarrow x = 28.$$

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_4(2x - 8) = 2$.

A. $S = \{\emptyset\}$.

B. $S = \{4\}$.

C. $S = \{12\}$.

D. $S = \{4; 12\}$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

$$\log_4(2x - 8) = 2 \Leftrightarrow 2x - 8 = 4^2 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12 \text{ (thỏa điều kiện).}$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 4. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(3x - 11) = 4$.

A. $x = 5$.

B. $x = \frac{13}{3}$.

C. $x = \frac{17}{3}$.

D. $x = \frac{20}{3}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 5. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(5x^2 - 21) = 4$.

A. $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

B. $S = \{-5; 5\}$.

C. $S = \{-\log_2 5; \log_2 5\}$.

D. $S = \{\emptyset\}$.

.....	
.....	
.....	
.....	

2D. Phương trình lôgarit

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}} x = 2$.

A. $x = 1$.

B. $x = 9$.

C. $x = 2$.

D. $x = 3$.

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(2x - 1) = 2$.

A. Vô nghiệm.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 3$.

Câu 8. Tìm nghiệm của phương trình $\log_x 243 = 5$.

A. $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 4$.

D. $x = 5$.

Câu 9. Hỏi, $x = \log_3 2$ là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau ?

A. $\log_3(3^x + 1) + \log_3(3^{x+2} + 9) = 3$.

B. $3 \cdot 3^{x+2} - 3^x + 1 = 0$.

C. $\log_3(3^x + 1) \cdot \log_3(3^{x+2} + 9) = 3$.

D. $\log_3(3^x + 3) \cdot \log_3(3^x + 9) = 3$.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 1) = \log_2 5$.

A. $x = -4$.

B. $x = 2$.

C. $x = 4$.

D. $x = -4; x = 2$.

Lời giải tham khảo

+) Đk: $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$.

+) $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 1) = \log_2 5$

$\Leftrightarrow \log_2(x + 3)(x - 1) = \log_2 5$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$

+) Kết hợp đk chọn $x = 2$.

2D. Phương trình lôgarit

Câu 11. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$.

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 4.

Lời giải tham khảo

ĐK: $x > 1$.

$$PT \Leftrightarrow \log = 1 = \log_2 2_2 [x(x-1)] \Leftrightarrow x.(x-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(\text{loại}) \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 12. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2 (x+3) = \log_2 4$.

A. $x = 1$.

B. $x = -4$.

C. $x = 1; x = -4$.

D. $x = 0$.

Lời giải tham khảo

$$\log_2 x + \log_2 (x+3) = \log_2 4 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Do đó phương trình (1)} \Leftrightarrow \log_2 x(x+3) = \log_2 4 \Leftrightarrow x(x+3) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1$.

Câu 13. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 (3x) + 7 = 0$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = 3^x$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓**Câu 14.** Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$.

A. Vô nghiệm.

B. $x = 1$.C. $x = 2$.D. $x = 3$.**Câu 15.** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log(x^2 + 2x + 7) = 1 + \log x$.A. $S = \{-1; 7\}$.B. $S = \{1; 7\}$.C. $S = \{1\}$.D. $S = \{7\}$.**Câu 16.** Tính tổng tất các nghiệm của phương trình $\log^2 x - \log x \log_2(4x) + 2 \log_2 x = 0$.A. $S = 101$.B. $S = 100$.C. $S = 5$.D. $S = 0$.**Câu 17.** Tìm nghiệm của phương trình $\frac{1}{4 + \log_a x} + \frac{1}{2 - \log_a x} = 1$ với $a > 1$.A. $\begin{cases} x = \frac{1}{a^2} \\ x = \frac{1}{a^4} \end{cases}$.B. $\begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ x = \frac{1}{a^4} \end{cases}$.C. $\begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ x = \frac{1}{a^2} \end{cases}$.D. $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{a^2} \end{cases}$.

Câu 18. Tìm số nghiệm của phương trình $\ln(x^2 - 2x + 2) + \sqrt{x^2 + 2} = 1$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có nghiệm nằm trong đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

A. $0 \leq m \leq 2$.

B. $0 < m < 2$.

C. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

D. $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 20. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(6 \cdot 2^x - 3) - \log_3(4^x - 4) = 1$.

A. $x = \log_2 6$.

B. $x = \log_2 3$.

C. $x = \log_3 2$.

D. $x = -\log_2 3$.

Câu 21. Tìm nghiệm của phương trình $\ln x + \ln(x + 1) = 0$.

A. $\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}$.

2E. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Dạng 37. Bất phương trình mũ

Câu 1. Tìm nghiệm của bất phương trình $3^{x^2+3x} \leq 81$.

- A. $-4 \leq x \leq 1$. B. $x \geq 1; x \leq -4$. C. $1 \leq x \leq 4$. D. $x \geq 4; x \leq 1$.

Lời giải tham khảo

$$3^{x^2+3x} \leq 81 \Leftrightarrow 3^{x^2+3x} \leq 3^4 \Leftrightarrow x^2 + 3x \leq 4.$$

Câu 2. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-2}{x}\right)} < 1$.

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 0)$. C. $S = (0; 2)$. D. $S = (0; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐK: } \frac{x-2}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$$

$$5^{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-2}{x}\right)} < 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-2}{x}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{-2}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $S = (-\infty; 0)$.

Câu 3. Tìm nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{\frac{x+1}{3}}$.

- A. $x < \log_2 3$. B. $x < \log_{\frac{2}{3}} 3$.
C. $x > \log_{\frac{2}{3}} 3$. D. $x > \log_{\frac{2}{3}} 2$.

Lời giải tham khảo

$$2^x > 3^{\frac{x+1}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3.$$

Câu 4. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x^2+x} \leq 25^{x+1}$.

- A. $S = [-1; 2]$. B. $S = (-1; 2)$. C. $S = [-1; 2)$. D. $S = (-1; 2]$.

Lời giải tham khảo

$$5^{x^2+x} \leq 25^{x+1} \Leftrightarrow 5^{x^2+x} \leq 5^{2(x+1)} \Leftrightarrow x^2 + x \leq 2(x+1) \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Câu 5. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $9^x - 3^x - 6 < 0$.

- A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1)$. C. $S = (-1; 1)$. D. Kết quả khác.

Lời giải tham khảo

$$\text{Đặt } t = 3^x \ (t > 0)$$

$$\text{Đưa về pt: } t^2 - t - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 3$$

$$\text{So với điều kiện } 0 < t < 3$$

$$\text{Suy ra } 0 < 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1$$

2E. Bất phương trình mũ

Câu 6. Tìm nghiệm của bất phương trình $9^{x-1} - 36.3^{x-3} + 3 \leq 0$.

A. $1 \leq x \leq 3$.

B. $1 \leq x \leq 2$.

C. $1 \leq x$.

D. $x \leq 3$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = 3^{x-1}$ ($t > 0$) BPT thành: $t^2 - 4t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3$

Vậy $1 \leq 3^{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{2x+2} - 2.6^x - 7.4^x > 0$.

A. $S = (1; +\infty)$.

B. $S = (-1; 0)$.

C. $S = (0; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -1)$.

Lời giải tham khảo

Chia hai vế cho 4^x .

Câu 8. Tìm nghiệm của bất phương trình $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$.

A. $x > 1$.

B. $\begin{cases} x > 1 \\ x < -2 \end{cases}$.

C. $x > 0$.

D. $\begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = 2^x$.

Câu 9. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $(\sqrt{10} - 3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x+1}{x+3}}$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} (\sqrt{10} - 3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x+1}{x+3}} &\Leftrightarrow (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x+1}{x+3}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} > \frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{-8}{(x-1)(x+3)} > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+3) < 0 \\ &\Leftrightarrow -3 < x < 1 \Rightarrow x = -2, -1, 0 \end{aligned}$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓**Câu 10.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $(\sqrt{2})^{x^2-2x} \leq (\sqrt{2})^3$.

A. $S = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

B. $S = (-1; 3)$.

C. $S = [-1; 3]$.

D. $S = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Câu 11. Tìm nghiệm của bất phương trình $8^x \cdot 2^{1-x^2} > (\sqrt{2})^{2x}$.

A. $x > 1 + \sqrt{2}$.

B. $x < 1 - \sqrt{2}$.

C. $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.

D. $x > 1 + \sqrt{2}$ hoặc $x < 1 - \sqrt{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = 3^x \cdot 4^{2x^3}$. Mệnh đề nào sau đây *sai*?

A. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x + 4x^3 \log_3 2 \leq 0$.

B. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x + x^3 \cdot \log_3 16 \leq 0$.

C. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \log_2 \sqrt{3} + 2x^3 \leq 0$.

D. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \log_2 3 + 2x^3 \leq 0$.

Câu 13. Tìm nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 25$.

A. $x > -2$.

B. $x < -2$.

C. $x > 2$.

D. $x < 2$.

2E. Bất phương trình mũ

Câu 14. Tìm nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-x+2} < 9^{x+1}$.

A. $0 < x < 3$.

B. $x < 0$ hoặc $x > 3$.

C. $-1 < x < 0$.

D. $0 < x < 1$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $9^x + m.3^x + 1 \leq 0$ có nghiệm.

A. $m \leq -2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \geq -2$.

D. $m \geq 2$.

Câu 16. Tìm nghiệm của bất phương trình $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \leq 10$.

A. $\frac{1}{5} \leq x \leq 5$.

B. $-5 \leq x \leq \frac{1}{5}$.

C. $1 \leq x \leq 5$.

D. Vô nghiệm.

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2}$.

A. $S = [3; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 1]$.

C. $S = [1; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; +\infty)$.

2F. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Dạng 38. Bất phương trình lôgarit

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-2) > 3$.

- A. $S = [10; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 10)$. C. $S = (-\infty; 10]$. D. $S = (10; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Ta có $\log_2(x-2) > 3 \Leftrightarrow x - 2 > 2^3 \Leftrightarrow x > 10$

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình có nghiệm: $S = (10; +\infty)$.

Câu 2. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x - x^2) \geq 0$.

- A. $x < 2$. B. $0 < x < 2$. C. $0 \leq x \leq 2$. D. $x = 1$.

Lời giải tham khảo

$\log_2(2x - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 3. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x+1) < 2$.

- A. $x > 2$. B. $x < 3$. C. $x < 4$. D. $x > 5$.

Lời giải tham khảo

$\log_3(2x+1) < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 4$.

Câu 4. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x-1) > 3$.

- A. $x > 4$. B. $x > 14$. C. $x < 2$. D. $2 < x < 14$.

Lời giải tham khảo

Do cơ số $a = 3 > 1$ nên $\log_3(2x-1) > 3 \Leftrightarrow 2x-1 > 27 \Leftrightarrow x > 14$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 5. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_5(2x+15) \leq 2$.

- A. $-\frac{15}{2} < x < 5$. B. $x > -\frac{15}{2}$. C. $x \leq 5$. D. $-\frac{15}{2} < x \leq 5$.

.....
.....
.....

Câu 6. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) > 0$.

- A. $S = (-\infty; 2)$. B. $S = (2; 3)$. C. $S = (2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

.....
.....
.....

2F. Bất phương trình lôgarit

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$.

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = [0; 2)$. C. $S = [0; 1) \cup (2; 3]$. D. $S = [0; 2) \cup (3; 7)$.

Câu 8. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 7) \geq -3$.

- A. $x \leq 10$. B. $x \geq 10$. C. $-\frac{7}{2} < x \leq 10$. D. $-\frac{7}{2} < x < 10$.

Câu 9. Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(x^2 - 4x + 20) \geq m$ luôn nghiệm đúng với mọi giá trị của x .

- A. $m \leq 4$. B. $m \geq 4$. C. $m \leq 16$. D. $m \geq 16$.

Câu 10. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x - 2) > \log_2(6 - 5x)$.

- A. $S = (0; +\infty)$. B. $S = \left(1; \frac{6}{5}\right)$. C. $S = \left(\frac{1}{2}; 3\right)$. D. $S = (-3; 1)$.

Lời giải tham khảo

$$DK: \begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 6 - 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{6}{5}\right) \quad (1)$$

$$BPT \Leftrightarrow 3x - 2 > 6 - 5x \Leftrightarrow 8x > 8 \Leftrightarrow x > 1 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có ĐS: } x \in \left(1; \frac{6}{5}\right).$$

Câu 11. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x \geq \log_2 \frac{x}{4} + 4$.

- A. $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. B. $S = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.
C. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$. D. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \log_2 x$.

2F. Bất phương trình lôgarit

Câu 12. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_6 x^2 < \log_6 (x+6)$.

A. $S = (-2; 3)$.

B. $S = (-3; 2) \setminus \{0\}$.

C. $S = (-2; 3) \setminus \{0\}$.

D. $S = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -6 \end{cases} \quad (1)$

$$\log_6 x^2 < \log_6 (x+6) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 3) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tập nghiệm phương trình $(-2; 3) \setminus \{0\}$.

Câu 13. Cho bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5)$.

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Bất phương trình có nghĩa khi $x < -5$. B. Tập nghiệm $S = (1; 4]$.

C. Bất phương trình có nghĩa khi $x > 1$. D. Tập nghiệm $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2 - x - 1 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-1}{2} \\ x > 1 \\ x < -5 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \leq x^2 + 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

Kết hợp với điều kiện ta được: $1 < x \leq 4$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓**Câu 14.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình

$$\log_2(x+1) - 2\log_4(5-x) < 1 - \log_2(x-2).$$

- A. $S = (3; 5)$. B. $S = (2; 3)$. C. $S = (2; 5)$. D. $S = (-4; 3)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ có tập nghiệm $\mathbb{R}$.

- A. $m \in [5; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 5]$. C. $m \in (2; 5]$. D. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m bất phương trình

$$\log^2 x - m \log x + m + 3 \leq 0 \text{ có nghiệm nằm trong khoảng } (1; +\infty).$$

- A. $m < -3$ hoặc $m \geq 6$. B. $m < -3$.
C. $m \geq 6$. D. $-3 < m \leq 6$.

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(2-x) \geq 1$.

- A. $\frac{5}{3} \leq x < 2$. B. $x \geq \frac{5}{3}$. C. $x \leq \frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{3} < x < 2$.

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \geq -4$.

- A. $S = [-6; -4) \cup (2; 4]$. B. $S = (-6; -4) \cup (2; 4)$.
C. $S = [-6; 4]$. D. $S = (-\infty; -6) \cup [4; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

2F. Bất phương trình lôgarit

Câu 19. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_2(3^x - 2) < 0$.

A. $x > 1$.

B. $x < 1$.

C. $0 < x < 1$.

D. $\log_3 2 < x < 1$.

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x + 1) < 0$.

A. $S = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $S = \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

C. $S = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_3 \left[\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{16} \right) \right] > 1$.

A. $-\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$.

B. $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$.

C. $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}$.

D. $-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}$.

.....

.....

.....

.....

.....

3A. NGUYÊN HÀM

✎ **Dạng 39. Nguyên hàm hàm đa thức, phân thức**

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2}$.

A. $\int f(x)dx = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + C.$

C. $\int f(x)dx = x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

Lời giải tham khảo

$$\int \left(3x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \left(\frac{x^3}{18} - 1 \right)^5$.

A. $\int f(x)dx = \left(\frac{x^3}{18} - 1 \right)^6 + C.$

B. $\int f(x)dx = 6 \left(\frac{x^3}{18} - 1 \right)^6 + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{6} \left(\frac{x^3}{18} - 1 \right)^6 + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{18} - 1 \right)^6 + C.$

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \frac{x^3}{18} - 1$.

Câu 3. Cho $f'(x) = 3(x+2)^2$, $f(0) = 8$. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong các hàm sau đây?

A. $f(x) = 2(x+2)^3 - 8.$

B. $f(x) = (x+2)^2 + 4.$

C. $f(x) = 6(x+2) - 4.$

D. $f(x) = (x+2)^3.$

Lời giải tham khảo

Sử dụng $f(x) = \int f'(x)dx$.

Giả thiết $f(0) = 8$ giúp ta tìm được hằng số C .

Câu 4. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

A. $m = 3.$

B. $m = 0.$

C. $m = 1.$

D. $m = 2.$

Lời giải tham khảo

Áp dụng $F'(x) = f(x)$ và đồng nhất hệ số ta có $m = 1$.

Câu 5. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2x^2} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{x^4} + C$.

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}x^2 + C$.

D. $\int f(x)dx = \ln^3|x| + C$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{x-1} + C$.

B. $\int f(x)dx = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$.

D. $\int f(x)dx = x^2 + \ln|x-1| + C$.

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

A. $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

B. $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| + C$.

C. $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$.

D. $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$.

Câu 8. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2}$ thoả mãn $F(1) = 2$.

A. $\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{3}$.

B. $\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{3}$.

C. $\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{x} - \frac{5}{3}$.

D. $\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{x} - 9$.

Câu 9. Hàm số nào sau đây không là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$?

A. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$.

B. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x^2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x+1}$.

Câu 10. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) =$ thoả mãn $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f'(1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(-1) = 2$.

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$.

B. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$.

C. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{5}{2}$.

D. Kết quả khác.

Câu 11. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $F(x) = \frac{ax + a^2 + 3}{x - 2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{-6}{(x - 2)^2}$.

A. $a = -1$.

C. $a = 3$.

B. $a = 1$ hoặc $a = -3$.

D. $a = -1$ hoặc $a = 3$.

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x - 1)^5$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(3x - 1)^6 + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{18}(3x - 1)^5 + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{18}(3x - 1)^6 + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + C$.

✎ Dạng 40. Nguyên hàm hàm căn thức

Câu 14. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}.$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned}\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx &= \int x^2 dx + \int \frac{3}{x} dx - 2 \int \sqrt{x} dx \\ &= \int x^2 dx + 3 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} x^3 + 3 \ln|x| - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

Lời giải tham khảo

$$f(x) = \int \sqrt{1+x^2} x dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{9}{2}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{3}{2}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int \sqrt{3x+2} dx = \int (3x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{9} (3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$$

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2})^2 + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3 + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2 + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^2 + C.$

Lời giải tham khảo

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{x^2}{2} (\sqrt{1+x^2})^2 + C.$$

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$.

A. $\int f(x)dx = (3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \sqrt[3]{3x+1} + C.$

Lời giải tham khảo

$$\int f(x)dx = \int \sqrt[3]{3x+1}dx = \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} \frac{d(3x+1)}{3} = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} d(3x+1) = \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C.$$

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{14}{1-x}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + 14\ln|1-x| + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 14\ln|1-x| + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 14\ln|1-x| + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 14\ln|1-x| + C.$

Lời giải tham khảo

$$\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{14}{1-x} \right) dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + 14 \cdot \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 14\ln|1-x| + C.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$.

A. $\int f(x)dx = 2\sqrt{x} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C.$

D. $\int f(x)dx = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C.$

Câu 21. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1} + 4}$. nào sau đây là đúng?

A. $\int f(x)dx = \sqrt{2x-1} - 2\ln(\sqrt{2x-1} + 4) + C.$

B. $\int f(x)dx = \sqrt{2x-1} - \ln(\sqrt{2x-1} + 4) + C.$

C. $\int f(x)dx = \sqrt{2x-1} - 4\ln(\sqrt{2x-1} + 4) + C.$

D. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x-1} - \ln(\sqrt{2x-1} + 4) + C.$

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$.

A. $\int f(x)dx = 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C.$

B. $\int f(x)dx = 2\ln \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + C.$

D. $\int f(x)dx = 2\ln|x + \sqrt{x}| + C.$

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x + x\sqrt{x} + \sqrt{x}}$.

A. $\int f(x)dx = -\frac{2}{\sqrt{x} + x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{2}{\sqrt{x} + 1} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{2}{\sqrt{x} + x + 1} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{2}{2\sqrt{x} + x} + C.$

Câu 24. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + k}$ với $k \neq 0$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + k} + \frac{x}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{k}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} + C.$

Câu 25. Cho $F(x) = 3x + 1 = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 1}$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x - 1}}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 3.$

B. $S = 0.$

C. $S = 4.$

D. $S = 2.$

Câu 26. Tìm các giá trị của tham số a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$ trong khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

A. $a = 4, b = 2, c = 2$.

B. $a = 1, b = -2, c = 4$.

C. $a = -2, b = 1, c = 4$.

D. $a = 4, b = -2, c = 1$.

Câu 27. Trong các hàm số sau:

(I) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(II) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 5$

(III) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(IV) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2$

Hỏi hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (III).

C. Chỉ (II).

D. Chỉ (III) và (IV).

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{5}\sqrt[5]{x^5} + \ln|x| + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + C$.

C. $\int f(x)dx = \left(x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}\right)^2 + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \ln|x| + \frac{12}{5}\sqrt[5]{x^6} + C$.

Câu 29. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

A. $\int f(x)dx = \sqrt{1+x^2} + C.$

B. $\int f(x)dx = \ln|a+x^2| + C.$

C. $\int f(x)dx = \sqrt{a^2+x^2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \ln\sqrt{a^2+x^2} + C.$

.....

.....

Dạng 41. Nguyên hàm hàm lượng giác

Câu 30. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} + C.$

Lời giải tham khảo

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Câu 31. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(2x+1)$.

A. $\int f(x)dx = \cos(2x+1) + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$

D. $\int f(x)dx = -\cos(2x+1) + C.$

Lời giải tham khảo

$$\int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x+1)d(2x+1) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

Câu 32. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 1 + \sin 3x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

A. $F(x) = x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{\pi}{6}.$

B. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{\pi}{6}.$

C. $F(x) = x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{\pi}{6}.$

D. $F(x) = x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{\pi}{6}.$

Lời giải tham khảo

$$F(x) = x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{\pi}{6}.$$

Câu 33. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 - \sin 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

A. $F(x) = 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$

D. $F(x) = 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}.$

Lời giải tham khảo

$$F(x) = \int (2x^3 - 3x^2 + 1 - \sin 2x)dx = 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Vì $F(0) = 1$ nên $\frac{1}{2}\cos 0 + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$

3A. Nguyên hàm

Câu 34. Cho $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$.

B. $f(\pi) = 3\pi$.

C. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

D. $f(x) = 3x - 5 \cos x$.

Lời giải tham khảo

$$f(x) = \int f'(x) dx = 3x + 5 \cos x + C; \quad f(0) = 10 \Leftrightarrow C = 5$$

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5 \Rightarrow f(\pi) = 3\pi$.

Câu 35. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

B. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

C. $\int e^x dx = e^x + C$.

D. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\tan x + C$.

Lời giải tham khảo

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

Câu 36. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \cot^2 x$.

A. $\int f(x) dx = \tan x + C$.

B. $\int f(x) dx = -\tan x + C$.

C. $\int f(x) dx = \cot x + C$.

D. $\int f(x) dx = -\cot x + C$.

Lời giải tham khảo

$$\int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

Câu 37. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos x$.

A. $\int f(x) dx = x \sin x - \cos x + C$.

B. $\int f(x) dx = -x \sin x - \cos x + C$.

C. $\int f(x) dx = x \sin x + \cos x + C$.

D. $\int f(x) dx = -x \sin x + \cos x + C$.

Lời giải tham khảo

Đặt $u = x$, $dv = \cos x dx$; ta chọn $du = dx$, $v = \sin x$.

Do đó $I = x \sin x + \int \sin x dx = x \sin x - \cos x + C$.

Câu 38. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 5x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$.

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 8x + C$.

Lời giải tham khảo

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

Câu 39. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \cos \frac{2}{x} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \sin \frac{1}{x} + C.$ C.

$\int f(x) dx = \frac{1}{4} \cos \frac{1}{x} + C.$ D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \sin \frac{2}{x} + C.$

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \frac{1}{x}$.

Câu 40. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

A. $-\tan x.$

B. $1 - \tan x.$

C. $1 + \tan x.$

D. $\tan x - 1.$

Lời giải tham khảo

Chọn đáp án B.

$$F(x) = \int -\frac{1}{\cos^2 x} dx = -\tan x + C. \quad F(0) = 1 \text{ nên } C = 1.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$.

A. $\int f(x) dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$

B. $\int f(x) dx = x \tan x + \ln |\sin x| + C.$

C. $\int f(x) dx = x \tan x - \ln |\sin x| + C.$

D. $\int f(x) dx = x \tan x - \ln |\cos x| + C.$

Câu 42. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + C.$

Câu 43. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

A. $\int f(x)dx = \cot x + \tan x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\cot x - \tan x + C.$

C. $\int f(x)dx = -\cot x + \tan x + C.$

D. $\int f(x)dx = \cot x - \tan x + C.$

Câu 44. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$.

A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$

Câu 45. Cho $I = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \left[A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) \right] dx$. Tính giá trị A, B .

A. $A = B = \frac{1}{2}.$

B. $A = B = -\frac{1}{2}.$

C. $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$

D. $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}.$

Câu 46. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin \sqrt{1+x^2}$.

- A. $\int f(x) dx = -\sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} + \sin \sqrt{1+x^2} + C.$
 B. $\int f(x) dx = -\sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1+x^2} + C.$
 C. $\int f(x) dx = \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} + \sin \sqrt{1+x^2} + C.$
 D. $\int f(x) dx = \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1+x^2} + C.$

Câu 47. Xét các mệnh đề sau đây:

- (I) $F(x) = x + \cos x$ là một nguyên hàm của $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2$
 (II) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 6\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^3 + \frac{3}{\sqrt{x}}$
 (III) $F(x) = \tan x$ là một nguyên hàm của $f(x) = -\ln |\cos x|$

Mệnh đề nào **sai**?

- A. (I) và (II). B. Chỉ (III). C. Chỉ (II). D. Chỉ (I) và (III).

Câu 48. Cho hàm số $F(x) = e^{x\sqrt{2}}(a \tan^2 x + b \tan x + c)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^{x\sqrt{2}} \tan^3 x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $F(x) = e^{x\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} \tan x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$
 B. $F(x) = e^{x\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} \tan x + \frac{1}{2} \right).$
 C. $F(x) = e^{x\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2} \tan x + \frac{1}{2} \right).$
 D. $F(x) = e^{x\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} \tan x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

Câu 49. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$.

A. $\int f(x) dx = \tan x - x + C$.

B. $\int f(x) dx = \tan x + x + C$.

C. $\int f(x) dx = -\tan x - x + C$.

D. $\int f(x) dx = -\tan x + x + C$.

Câu 50. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos(x^2)$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin x + C$.

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin x + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x^2) + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$.

Câu 51. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin^2 x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 - x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} x^2 - x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} x^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right) \cos 2x + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} x^2 - x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Câu 52. Cho $a \neq 0$, C là hằng số. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$. B. $\int \cos(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$.
 C. $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}(ax+b)^{\alpha+1} + C$. D. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$.

Câu 53. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos x$.

- A. $\int f(x)dx = \cos 2x - \sin x + C$. B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + C$.
 C. $\int f(x)dx = -\cos 2x + \sin x + C$. D. $\int f(x)dx = \sin^2 x + \sin x + C$.

Câu 54. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - \sin 2x$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.
 C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| - \frac{1}{2}\cos 2x + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| + \frac{1}{2}\cos 2x$.

Dạng 42. Nguyên hàm hàm mũ – lôgarit

Câu 55. Mệnh đề nào sau đây là *sai*?

A. $y = e^{-x} \Rightarrow F(x) = -e^{-x} + C.$

B. $y = \frac{1}{e^x} \Rightarrow F(x) = -e^{-x} + C.$

C. $y = -e^{-x} \Rightarrow F(x) = e^{-x} + C.$

D. $y = -\frac{1}{e^x} \Rightarrow F(x) = -e^{-x} + C.$

Lời giải tham khảo

$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \Rightarrow$ Đáp án A đúng.

$\int \frac{1}{e^x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \Rightarrow$ Đáp án B đúng.

$\int -e^{-x} dx = -\int e^{-x} dx = e^{-x} + C \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

$\int -\frac{1}{e^x} dx = -\int \frac{1}{e^x} dx = -\int e^{-x} dx = e^{-x} + C \Rightarrow$ Đáp án D sai.

Câu 56. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^x$.

A. $\int f(x) dx = x.e^x - e^x + C.$

B. $\int f(x) dx = x.e^x + e^x + C.$

C. $\int f(x) dx = -x.e^x - e^x + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x - x.e^x + C.$

Lời giải tham khảo

$+ \int f(x).dx = \int x.e^x .dx$

$+ \text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx \text{ và } dv = e^x .dx \Rightarrow v = e^x$

$+ \text{Vậy } \int f(x).dx = x.e^x - \int e^x .dx = x.e^x - e^x + C$

Câu 57. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2xe^{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = 2e^{x^2} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2x^2 e^{x^2} + C.$

C. $\int f(x) dx = e^{x^2} + C.$

D. $\int f(x) dx = 2xe^{x^2} + C.$

Lời giải tham khảo

Đặt $t = x^2$.

Câu 58. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

A. $\int f(x) dx = x + \ln(e^x + 1) + C.$

B. $\int f(x) dx = -x + \ln(e^x + 1) + C.$

C. $\int f(x) dx = -x - \ln(e^x + 1) + C.$

D. $\int f(x) dx = x - \ln(e^x + 1) + C.$

Lời giải tham khảo

Đặt $t = e^x + 1$.

Câu 59. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

A. $\int f(x) dx = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^{2\sqrt{x}} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2} + C.$

D. $\int f(x) dx = e^{\sqrt{x}} + C.$

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \sqrt{x}$.

Câu 60. Mệnh đề sau đây mệnh đề nào **đúng**?

$$(I) \int \frac{x dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$$

$$(II) \int \cot x dx = -\frac{1}{\sin^2 x} + C$$

$$(III) \int e^{2\cos x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{2\cos x} + C$$

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (III).

C. Chỉ (I) và (II).

D. Chỉ (I) và (III).

Lời giải tham khảo

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$$

$$\int e^{2\cos x} \sin x dx = -\frac{1}{2} \int e^{2\cos x} d(\cos x) = -\frac{1}{2} e^{2\cos x} + C.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 61. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$.

$$A. \int f(x) dx = \frac{\ln^2(\ln 2x)}{2} + C.$$

$$B. \int f(x) dx = \frac{\ln^2(\ln x)}{2} + C.$$

$$C. \int f(x) dx = -\frac{\ln^2(\ln 2x)}{2} + C.$$

$$D. \int f(x) dx = \frac{\ln^2(\ln^2 x)}{2} + C.$$

Câu 62. Tìm giá trị của tham số a, b để $F(x) = (ax + b)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -xe^x$.

A. $a = 1, b = 1$.

B. $a = -1, b = 2$.

C. $a = 2, b = 1$.

D. $a = -1, b = 1$.

Câu 63. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = xe^{x^2+1}$ thoả mãn $F(0) = \frac{3e}{2}$.

A. $\frac{e^{x^2+1}}{2} - e.$

B. $\frac{e^{x^2+1}}{2} + e.$

C. $\frac{e^{x^2+1}}{4} - e.$

D. $\frac{e^{x^2+1}}{4} + e.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 64. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(2x + e^{3x})$.

A. $\int f(x)dx = 2xe^x - 2e^x - \frac{1}{4}e^{4x} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2xe^x + 2e^x - \frac{1}{4}e^{4x} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2xe^x + 2e^x + \frac{1}{4}e^{4x} + C.$

D. $\int f(x)dx = 2xe^x - 2e^x + \frac{1}{4}e^{4x} + C.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 65. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. C là hằng số. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a + C.$

B. $\int a^{2x} dx = \frac{a^{2x}}{2 \ln a} + C.$

C. $\int a^{2x} dx = a^{2x} + C.$

D. $\int a^{2x} dx = a^{2x} \cdot \ln a + C.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Dạng 43. Bài tập tổng hợp về nguyên hàm

Câu 66. Nguyên hàm nào dưới đây không tồn tại?

A. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx$.

B. $\int \sqrt{-x^2 + 2x - 2} dx$.

C. $\int \sin 3x dx$.

D. $\int e^{3x} x dx$.

Lời giải tham khảo

Trong ý B biểu thức trong căn luôn âm nên hàm không liên tục dẫn đến không có nguyên hàm

Câu 67. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$. Giả sử $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $F(x) = G(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

B. $G(x) = F(x) - M$ trên khoảng $(a; b)$ với M là một hằng số nào đó.

C. $F(x) = G(x) + C$ với mọi x thuộc giao của hai miền xác định.

D. $F(x)$ và $G(x)$ là hai hàm số không có sự liên quan.

Câu 68. Nguyên hàm nào dưới đây không tồn tại?

A. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 3}$.

B. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 2}$.

C. $f(x) = \sin 3x$.

D. $f(x) = xe^{3x}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $-x^2 + 2x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Vậy không tồn tại $\sqrt{-x^2 + 2x - 2}$

nên không nguyên hàm $\int \sqrt{-x^2 + 2x - 2} dx$

Mặt khác: biểu thức: $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có nghĩa $\forall x \neq 1$, biểu thức: $\sin 3x$; $e^{3x}x$ có nghĩa $\forall x$.

3B. TÍCH PHÂN

✎ Dạng 44. Tích phân hàm đa thức, phân thức

Câu 1. Tìm các giá trị của b sao cho $\int_0^b (2x - 4)dx = 5$.

- A. $\{5\}$. B. $\{-1; 5\}$. C. $\{-1\}$. D. $\{-1; 4\}$.

Lời giải tham khảo

$$\int_0^b (2x - 4)dx = 5 \Leftrightarrow (x^2 - 4x) \Big|_0^b = 5 \Leftrightarrow b^2 - 4b - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Câu 2. Cho $I = \int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x + 1)]dx$. Tìm giá trị của a biết $I = b \ln a - c$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

- A. $a = 3$. B. $a = -3$. C. $a = \frac{2}{3}$. D. $a = -\frac{2}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x + 1)]dx = \int_0^1 [3x^2 - 2x]dx + \int_0^1 [\ln(2x + 1)]dx = I_1 + I_2$$

Giải I_2 bằng phương pháp từng phần $\begin{cases} u = \ln(2x + 1) \\ dv = dx \end{cases}$

$$I = \frac{3}{2} \ln 3 - 1 \Rightarrow a = 3.$$

✎ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 x^2(x + 1)^3 dx$.

- A. $I = \frac{-7}{70}$. B. $I = \frac{-1}{60}$. C. $I = \frac{2}{15}$. D. $I = \frac{1}{60}$.

3B. Tích phân

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1-x)^5 dx$.

A. $I = -\frac{1}{42}$.

B. $I = \frac{1}{42}$.

C. $I = -\frac{1}{6}$.

D. $I = \frac{1}{6}$.

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x^3 + 3x)^{1000} \cdot (x^2 + 1) dx$.

A. $I = \frac{4^{1001}}{3003}$.

B. $I = \frac{3^{1001}}{3000}$.

C. $I = \frac{4^{1000}}{3000}$.

D. $I = \frac{3^{1001}}{3003}$.

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 4x}{x} dx$.

A. $I = \frac{29}{2}$.

B. $I = \frac{11}{2}$.

C. $I = \frac{-11}{2}$.

D. $I = \frac{-29}{2}$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 + 4x}{x} dx = \int_1^2 (x + 4) dx = \frac{11}{2}.$$

Câu 7. Cho $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln a$. Tính giá trị của a .

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải tham khảo

$$\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln(2x-1) \Big|_1^5 = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3.$$

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = -\frac{\pi}{4}$.

C. $I = \frac{\pi}{2}$.

D. $I = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải tham khảo

3B. Tích phân

Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, viết tích phân theo biến t và các cận mới $t = 0, t = \frac{\pi}{4}$ rồi tính tích phân mới nhận được.

Từ $x = \tan t$ ta có: $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1 + \tan^2 t) dt$

Do đó: $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$.

Câu 9. Cho $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x - 6}{2x + 1} dx = a + b \ln 3$. Tính $P = a.b$.

A. $P = -\frac{21}{4}$.

B. $P = \frac{21}{4}$.

C. $P = -\frac{4}{21}$.

D. $P = \frac{4}{21}$.

Lời giải tham khảo

$$\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x - 6}{2x + 1} dx = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \ln 3.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{10^{16}}{1 + e^{2x}} dx$.

A. $I = \frac{1}{2} 10^{16} \ln e$.

B. $I = \frac{1}{2} 10^{16} \ln \frac{2e^2}{e^2 + 1}$.

C. $I = \frac{1}{2} 10^{15} \ln \frac{2e^2}{e^2 + 1}$.

D. $I = \frac{1}{2} 10^{16} \ln \frac{e^2}{e^2 + 1}$.

Câu 11. Cho $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 2x + k} dx = \ln \frac{15}{7}$. Tính giá trị của k .

A. $k = 1$.

B. $k = 4$.

C. $k = 2$.

D. $k = \frac{3}{4}$.

3B. Tích phân

Câu 12. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-3)^8}{(2x+1)^{10}} dx$.

A. $I = \frac{3^{18} - 2^9}{63 \cdot 3^9}$.

B. $I = \frac{3^{18} + 2^9}{63 \cdot 3^9}$.

C. $I = \frac{-3^{18} + 2^9}{63 \cdot 3^9}$.

D. $I = -\frac{3^{18} - 2^9}{63 \cdot 3^9}$.

Câu 13. Tính tích phân $I = \int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x} + 5 - 7x}{x} dx$.

A. $I = 4\sqrt{e} - 7e + 8$.

B. $I = 7\sqrt{e} - 4e + 8$.

C. $I = 8\sqrt{e} - 7e + 4$.

D. $I = 4\sqrt{e} + 7e + 8$.

Câu 14. Tính tích phân $I = \int_1^2 x(1-x)^5 dx$.

A. $I = -\frac{42}{13}$.

B. $I = \frac{13}{42}$.

C. $I = -\frac{13}{42}$.

D. $I = \frac{42}{13}$.

Dạng 45. Tích phân hàm căn thức

Câu 15. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

A. $I = \frac{\pi}{2}$.

B. $I = \frac{\pi}{8}$.

C. $I = \frac{\pi}{4}$.

D. $I = \frac{\pi}{16}$.

Lời giải tham khảo

Đổi biến số Đặt $x = \sin t$, đổi cận $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Câu 16. Tính tích phân $I = \int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x+1}} dx$.

A. $I = \frac{478}{15}$.

B. $I = \frac{448}{15}$.

C. $I = \frac{408}{15}$.

D. $I = \frac{378}{15}$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{t^2-1}{2} \Rightarrow tdt = dx$

$$x=4 \Rightarrow t=3$$

$$x=0 \Rightarrow t=1$$

$$2x^2 + 4x + 1 = 2 \left(\frac{t^2-1}{2} \right)^2 = 4 \cdot \frac{t^2-1}{2} + 1 = \frac{t^4 + 2t^2 - 1}{2}$$

$$I = \int_1^3 \frac{t^4 + 2t^2 - 1}{2} \cdot t dt = \frac{1}{2} \int_1^3 (t^4 + 2t^2 - 1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t \right) \Big|_1^3 = \frac{478}{15}.$$

Câu 17. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

A. $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

B. $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

D. $I = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$.

Lời giải tham khảo

Đặt $x = \sin t$ khi đó $dx = \cos t dt$

Đổi cận: với $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cos t}{\sqrt{\cos^2 t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

3B. Tích phân

Câu 18. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

A. $I = \frac{5}{3}$.

B. $I = -\frac{5}{3}$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = -\frac{4}{3}$.

Lời giải tham khảo

Đặt $u = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow u^2 = x^2+1 \Rightarrow udu = xdx$

$x=0 \Rightarrow u=1$; $x=\sqrt{3} \Rightarrow u=2$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^2 (u^2-1)du = \left(\frac{u^3}{3} - u \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 19. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

A. $I = -\frac{141}{10}$.

B. $I = \frac{141}{10}$.

C. $I = \frac{141}{20}$.

D. $I = -\frac{47}{10}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Tính tích phân $I = \int_0^2 \min \left\{ x; \sqrt[3]{2-x} \right\} dx$.

A. $I = \frac{4}{5}$.

B. $I = -\frac{4}{5}$.

C. $I = -\frac{5}{4}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3B. Tích phân

Câu 21. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2 + 4} dx$.

A. $I = \frac{19}{3}$.

B. $I = 1$.

C. $I = -\frac{19}{3}$.

D. $I = -\frac{28}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

A. $I = \frac{\pi^2 + 1}{2}$.

B. $I = \frac{\pi^2 - 1}{2}$.

C. $I = \frac{\pi}{2}$.

D. $I = \pi$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Tính tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{3x^2 + 1} dx$.

A. $I = \frac{7}{3}$.

B. $I = \frac{8}{9}$.

C. $I = \frac{7}{9}$.

D. $I = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 46. Tích phân hàm lượng giác

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$.

- A. $I = \ln \frac{3}{2}$. B. $I = \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $I = \ln \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $I = \ln 2$.

Lời giải tham khảo

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = - \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = - \ln \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 25. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx$.

- A. $I = \frac{\pi}{2}$. B. $I = 0$. C. $I = \pi$. D. $I = 1$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx = - \int_0^{\pi} x d(\cos x) = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Câu 26. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1)^3 \sin x dx$.

- A. $I = \frac{15}{4}$. B. $I = -\frac{15}{4}$. C. $I = \frac{15}{2}$. D. $I = -\frac{15}{2}$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \cos x + 1 \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$;

$$I = - \int_2^1 t^3 dt = - \frac{t^4}{4} \Big|_2^1 = \frac{15}{4}.$$

Câu 27. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 3) \cdot \sin 4x dx$.

- A. $I = \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}$. B. $I = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}$. C. $I = \frac{\pi}{8} + \frac{3}{2}$. D. $I = \frac{\pi}{8} + 3$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 3) \cdot \sin 4x dx. \text{ Đặt: } \begin{cases} u = 2x + 3 \\ dv = \sin 4x dx \end{cases} \text{ ta có: } \begin{cases} du = 2 dx \\ v = -\frac{1}{4} \cos 4x dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left(-\frac{1}{4} (2x + 3) \cos 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx = \left(-\frac{1}{4} (2x + 3) \cos 4x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{3}{2}.$$

3B. Tích phân

Câu 28. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

A. $I = \frac{\pi}{2} + 1$.

B. $I = 1 - \frac{\pi}{2}$.

C. $I = \frac{\pi}{2}$.

D. $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow I = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} \cos x dx$.

A. $I = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

B. $I = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1$.

C. $I = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1$.

D. $I = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1.$$

Câu 30. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x dx$.

A. $I = 0$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{3}$.

D. $I = \frac{1}{6}$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x dx = 0.$$

Câu 31. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.

A. $I = \frac{\pi}{6}$.

B. $I = \frac{\pi}{3}$.

C. $I = \frac{\pi}{8}$.

D. $I = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

Câu 32. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$.

A. $I = \frac{2}{15}$.

B. $I = \frac{3}{15}$.

C. $I = \frac{2}{13}$.

D. $I = -\frac{2}{15}$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx$$

3B. Tích phân

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$; Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$\text{Do đó } I = \int_0^1 t^2 (1-t)^2 dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 33. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} (x + \sin x)^2 dx$.

A. $I = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}$.

B. $I = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2}$.

C. $I = \frac{\pi^3}{3} + \frac{5\pi}{2}$.

D. $I = \frac{\pi^2}{3} + \frac{5\pi}{2}$.

Câu 34. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+6\cos x}} dx$.

A. $I = \frac{1}{3}(\sqrt{7} + 2)$.

B. $I = \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 2)$.

C. $I = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - 2)$.

D. $I = (\sqrt{7} - 2)$.

Câu 35. Để tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx$. Một bạn giải như sau:

Bước 1: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(\tan x - \cot x)^2} dx$

Bước 2: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x - \cot x| dx$

Bước 3: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x - \cot x) dx$

Bước 4: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx$

Bước 5: $I = \ln |\sin 2x| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -2 \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$. Bạn này làm sai từ bước nào?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

3B. Tích phân

Câu 36. Biết $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}} dx = m$. Tính giá trị của $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^x} dx$.

A. $I = \pi - m$.

B. $I = \frac{\pi}{4} + m$.

C. $I = \pi + m$.

D. $I = \frac{\pi}{4} - m$.

Câu 37. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{3+2 \sin x} dx$.

A. $I = \ln \frac{5}{3}$.

B. $I = \ln \frac{3}{5}$.

C. $I = 5 \ln 3$.

D. $I = 3 \ln 5$.

Câu 38. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$.

A. $I = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$.

B. $I = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$.

C. $I = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

D. $I = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2}{2}$.

3B. Tích phân

Câu 39. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = -\frac{3}{2}$.

C. $I = -\frac{3}{2}$.

D. $I = -\frac{3}{2}$.

Câu 40. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3 x} dx = m \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tính $P = m + \frac{1}{2}$.

A. $P = -\frac{1}{4}$.

B. $P = \frac{1}{4}$.

C. $P = 0$.

D. $P = 1$.

Câu 41. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x; \cos x\} dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = \sqrt{2}$.

C. $I = \pi$.

D. $I = 2$.

Câu 42. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi^2}{3}$.

D. $\frac{\pi}{3}$.

Dạng 47. Tích phân hàm mũ – lôgarit

Câu 43. Tính tích phân $\int_0^2 2e^{2x} dx$.

- A. e^4 . B. $e^4 - 1$. C. $4e^4$. D. $3e^4$.

Lời giải tham khảo

$$\int_0^2 2e^{2x} dx = e^4 - 1.$$

Câu 44. Cho $I = \int_0^1 e^{-x^2} x dx$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $I = \frac{e-1}{2}$. B. $I = \frac{2e+1}{2e}$. C. $I = -\frac{e-1}{2}$. D. $I = \frac{e-1}{2e}$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} dt = x dx \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^t dt = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{e-1}{2e}.$$

Câu 45. Tính tích phân $I = \int_{-2}^0 (x-2)e^x dx$.

- A. $I = 3e^{-2} - 1$. B. $I = -2(1 - e^{-2})$. C. $I = \frac{5}{e^2} - 3$. D. $I = \frac{1}{e^2} + 1$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x - 2 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^0 (x-2)e^x dx = (x-2)e^x \Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 e^x dx \\ &= (x-2)e^x \Big|_{-2}^0 - e^x \Big|_{-2}^0 = -3 + \frac{5}{e^2} = \frac{5}{e^2} - 3. \end{aligned}$$

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_1^e \ln x dx$.

- A. $I = 4$. B. $I = 3$. C. $I = 2$. D. $I = 1$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_1^e \ln x dx; \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}, \text{ khi đó}$$

$$I = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e - (e-1) = 1.$$

Câu 47. Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$.

- A. $I = \frac{1-e^2}{4}$. B. $I = \frac{e^2+1}{4}$. C. $I = \frac{e^2+3}{4}$. D. $I = \frac{3-e^2}{4}$.

Lời giải tham khảo

3B. Tích phân

Ta có: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{3-e^2}{4}.$

Câu 48. Tính tích phân $I = \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$.

A. $I = \frac{2}{3}(e\sqrt{e} + 2)$. B. $I = \frac{2}{6}(e\sqrt{e} + 2)$. C. $I = \frac{2}{9}(e\sqrt{e} + 2)$. D. $I = \frac{2}{7}(e\sqrt{e} - 2)$.

Lời giải tham khảo

Tích phân từng phần: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^{\frac{1}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{cases} \dots$

Câu 49. Tính tích phân $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

A. $I = \frac{2e^3 + 1}{9}$. B. $I = \frac{2e^3 - 1}{9}$. C. $I = \frac{e^3 - 2}{9}$. D. $I = \frac{e^3 + 2}{9}$.

Lời giải tham khảo

Tính $I = \int_1^e x^2 \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} \ln x \right) \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{2e^3 + 1}{9}.$

Câu 50. Tính tích phân $I = \int_1^e (x-1) \ln x dx$.

A. $I = \frac{e^2 - 3}{2}$. B. $I = \frac{e^2 - 3}{3}$. C. $I = \frac{e^2 - 3}{4}$. D. $I = \frac{e^2 - 3}{6}$.

Lời giải tham khảo

Sử dụng công thức tính tích phân từng phần ta có:

$$I = \int_1^e (x-1) \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - e - \left(\frac{x^2}{4} - x \right) \Big|_1^e = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

Câu 51. Cho $I = \int_1^e x^2 \cdot \ln(x+1) dx$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $I = -\frac{5}{18} + \frac{2}{3} \ln 2$. B. $I = -\frac{5}{18} + \frac{3}{2} \ln 2$. C. $I = \frac{5}{18} + \frac{2}{3} \ln 2$. D. $I = -\frac{5}{18} - \frac{2}{3} \ln 2$.

Lời giải tham khảo

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$$I = \int_1^e x^2 \cdot \ln(x+1) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx = \frac{1}{3} \ln 2 \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx.$$

3B. Tích phân

$$\text{Tính } \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + 1 - 1}{x+1} dx = \int_0^1 \left((x^2 - x + 1) - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{5}{6} - \ln 2$$

$$I = \int_1^e x^2 \cdot \ln(x+1) dx = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) = -\frac{5}{18} + \frac{2}{3} \ln 2.$$

Câu 52. Tính tích phân $I = \int_3^4 2x \cdot \ln(3x-6) \cdot dx$.

A. $I = 12 \ln 6 + 5 \ln 3 - \frac{11}{2}$.

B. $I = 12 \ln 6 - 5 \ln 3 + \frac{11}{2}$.

C. $I = 12 \ln 6 + 5 \ln 3 + \frac{11}{2}$.

D. $I = 12 \ln 6 - 5 \ln 3 - \frac{11}{2}$.

Lời giải tham khảo

$$I = \int_3^4 2x \cdot \ln(3x-6) \cdot dx. \text{ Đặt: } \begin{cases} u = \ln(3x-6) \\ dv = 2x \cdot dx \end{cases} \text{ ta có: } \begin{cases} du = \frac{1}{x-2} \cdot dx \\ v = x^2 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C &= \left((x^2 - 4) \cdot \ln(3x-6) \right)_3^4 - \int_3^4 (x+2) dx = \left((x^2 - 4) \cdot \ln(3x-6) - \frac{x^2}{2} - 2x \right)_3^4 \\ &= 12 \ln 6 - 5 \ln 3 - \frac{11}{2}. \end{aligned}$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 53. Cho m là một số dương và $I = \int_0^m (4^x \ln x - 2^x \ln 2) dx$. Tìm m khi $I = 12$.

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Câu 54. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

A. $I = \frac{e^2 - 1}{2}$.

B. $I = \frac{e^2 + 1}{2}$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = -\frac{1}{2}$.

3B. Tích phân

Câu 55. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = \frac{1}{e}$.

C. $I = e$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 56. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

A. $I = 1 + \frac{2}{e}$.

B. $I = 1 - \frac{2}{e}$.

C. $I = 2 + \frac{1}{e}$.

D. $I = 2 - \frac{1}{e}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 57. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$.

A. $I = \frac{15 - 4 \ln 2}{256}$.

B. $I = \frac{14 - 3 \ln 2}{256}$.

C. $I = \frac{13 - 3 \ln 2}{256}$.

D. $I = \frac{15 + 4 \ln 2}{256}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 58. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x} dx$.

A. $I = \ln(1 + e^2)$.

B. $I = \ln(e^2 - 1)$.

C. $I = \ln(1 + e)$.

D. $I = \ln(e - 1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3B. Tích phân

Câu 59. Biết $\int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}} dx = a$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$.

A. $I = \frac{1}{2} - a$.

B. $I = 1 - a$.

C. $I = \frac{1}{3} - a$.

D. $I = 1 + a$.

Câu 60. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x \ln x + 1} dx$.

A. $I = \ln(e + 1)$.

B. $I = \ln(e - 1)$.

C. $I = -\ln(e + 1)$.

D. $I = \ln(1 - e)$.

Câu 61. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{2 + \ln x}}{2x} dx$.

A. $I = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}$.

B. $I = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{3}$.

C. $I = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{2}$.

D. $I = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 62. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$.

A. $I = \frac{e^2}{4}$.

B. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$.

D. $I = \frac{1}{4}$.

3B. Tích phân

Câu 63. Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$.

A. $I = \frac{3}{4}(1 - \ln 3) - \ln 2$.

B. $I = \frac{3}{4}(1 - \ln 3) + \ln 2$.

C. $I = \frac{3}{4}(1 + \ln 3) + \ln 2$.

D. $I = \frac{3}{4}(1 + \ln 3) - \ln 2$.

Câu 64. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + x) \cdot \cos x dx$.

A. $I = e + \frac{\pi}{2} - 2$.

B. $I = e + \frac{\pi}{2} + 2$.

C. $I = e - \frac{\pi}{2} + 2$.

D. $I = e - \frac{\pi}{2} - 2$.

Câu 65. Tính tích phân $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

A. $I = \frac{22}{3}$.

B. $I = \frac{19}{3}$.

C. $I = \frac{23}{3}$.

D. $I = \frac{20}{3}$.

Câu 66. Tính tích phân $I = \int_1^e (2x + 1) \ln x dx$.

A. $I = e^2 + 3$.

B. $I = \frac{e^2 + 1}{2}$.

C. $I = e^2 + \frac{3}{2}$.

D. $I = \frac{e^2 + 3}{2}$.

Dạng 48. Bất đẳng thức tích phân

Câu 67. Tìm giá trị a dương để $\int_0^a (x - x^2) dx$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $a = 1$.

B. $a = \frac{1}{2}$.

C. $a = 2$.

D. $a = \frac{3}{2}$.

Lời giải tham khảo

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(a)$, có $f'(a) = a - a^2$ ($a > 0$).

Câu 68. Tìm các giá trị thực $m > 1$ sao cho $\int_1^{\pi} (\ln x + 1) dx = m$.

A. $m = e + 1$.

B. $m = e^2$.

C. $m = 2e$.

D. $m = e$.

Lời giải tham khảo

Tính tích phân $\int_1^m (\ln x + 1) dx$ theo tham số m , sau đó tìm m từ phương trình $I = m$.

Câu 69. Tìm số dương k nhỏ nhất thỏa mãn $\int_0^1 \frac{dx}{2x + k} \geq 0$.

A. $k = 3$.

B. $k = 4$.

C. $k = 1$.

D. $k = 2$.

Lời giải tham khảo

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], 2x + k > 0$, do đó $\int_0^1 \frac{dx}{2x + k} > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Suy ra số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn bài ra là $k = 1$.

Câu 70. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện $\int_1^e \ln \frac{k}{x} dx < e - 2$. Tìm S .

A. $S = \{1; 2; 3\}$.

B. $S = \{1; 2\}$.

C. $S = \{2; 3\}$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải tham khảo

Tính tích phân theo hằng số k , rồi tìm k nguyên dương từ điều kiện.

Câu 71. Cho $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x + m}}$, với $m > 0$. Tìm các giá trị của tham số m để $I \geq 1$.

A. $0 < m \leq \frac{1}{4}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{8} \leq m \leq \frac{1}{4}$.

D. $m > 0$.

Lời giải tham khảo

Tính tích phân theo tham số m , sau đó tìm m từ bất phương trình $I \geq 1$.

Dạng 49. Bài tập tổng hợp về tích phân

Câu 72. Tính tích phân $I = \int_{-1}^4 |x^2 - 3x + 2| dx$.

A. $-\frac{19}{2}$.

B. $\frac{19}{2}$.

C. $\frac{28}{6}$.

D. 19.

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^4 (x^2 - 3x + 2) dx \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{19}{2}.
 \end{aligned}$$

Câu 73. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

A. $I = 2 \ln 2$.

B. $I = \frac{2}{\ln 2}$.

C. $I = \ln 2$.

D. $I = \frac{1}{\ln 2}$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = 2^x$ hoặc có thể sử dụng máy tính cầm tay để tìm kết quả.

Câu 74. Tính tích phân $J = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$.

A. 3.

B. 4.

C. 9.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải tham khảo

Xét dấu $x^2 - 1$ trên đoạn $[-2; 2]$

x	-2	-1	1	2	
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = 4.
 \end{aligned}$$

Câu 75. Cho $\int_0^{10} f(z) dz = 17$, $\int_0^8 f(t) dt = 12$. Tính $\int_8^{10} -3f(x) dx$.

A. -15.

B. 29.

C. 15.

D. 5.

Lời giải tham khảo

$$\int_8^{10} f(x) dx = 5 \text{ nên } \int_8^{10} -3f(x) dx = -15$$

3B. Tích phân

Câu 76. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;10)$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7; \int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P = 3$. B. $P = 2$. C. $P = 4$. D. $P = 1$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\int_0^{10} f(x)dx = F(10) - F(0) = 7; \int_2^6 f(x)dx = F(6) - F(2) = 3$

$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = F(2) - F(0) + F(10) - F(6) = 7 - 3 = 4$.

Câu 77. Cho $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn. B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
C. $f(x)$ không liên tục trên đoạn $[-a; a]$. D. Các đáp án đều sai.

Lời giải tham khảo

$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(x)$ lẻ.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 78. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{\sin^2 x}$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua $M\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \cot x$. B. $F(x) = \sqrt{3} - \cot x$.
C. $F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \cot x$. D. $F(x) = -\cot x + C$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3B. Tích phân

Câu 79. Cho $\int e^{2x} \cos 3x dx = e^{2x} (a \cos 3x + b \sin 3x) + c$, trong đó a, b, c là các hằng số. Tính tổng $a + b$.

A. $a + b = -\frac{1}{13}$.

B. $a + b = -\frac{5}{13}$.

C. $a + b = \frac{5}{13}$.

D. $a + b = \frac{1}{13}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 80. Trong Giải tích, với hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a, b]$ có đồ thị là một đường cong C thì độ dài của C được xác định bằng công thức

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Tính độ dài của đường cong C cho bởi $y = \frac{x^2}{8} - \ln x$ trên $[1; 2]$.

A. $\frac{3}{8} - \ln 2$.

B. $\frac{31}{24} - \ln 4$.

C. $\frac{3}{8} + \ln 2$.

D. $\frac{55}{48}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 81. Cho $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx = a(\ln 3 + 1) + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T = 4a + 2b$.

A. 4.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3C. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

✎ **Dạng 50. Tính diện tích hình phẳng**

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = f(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $S = \int_a^b f(x) dx.$ B. $S = \int_a^b (f(x))^2 dx.$ C. $S = \int_a^b |f(x)| dx.$ D. $S = \int_b^a f(x) dx.$

Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $S = \int_a^b [f(x) + g(x)] dx.$ B. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$
C. $S = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx.$ D. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

Lời giải tham khảo

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định và đồng biến trên $[0; 1]$ và có $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y_1 = f(x)$; $y_2 = (f(x))^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$?

A. $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)(1 - f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)(f(x) - 1) dx.$
B. $\int_0^1 \left\{ f(x) - (f(x))^2 \right\} dx.$
C. $\int_0^1 \left\{ (f(x))^2 - f(x) \right\} dx.$
D. $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|(1 - f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)(f(x) - 1) dx.$

Lời giải tham khảo

Công thức tổng quát ứng dụng $y_1 = f(x)$; $y_2 = g(x)$; $x_1 = a$; $x_2 = b$ ($a < b$) là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

3C. Diện tích hình phẳng

Do $f(x)$ đồng biến nên ta có:

$$\begin{aligned} f(x) < 1 &\Rightarrow x < \frac{1}{2}; f(x) \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow S = \int_0^1 |f(x) - (f(x))^2| dx = \int_0^1 |f(x)(f(x) - 1)| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|(1 - f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)(f(x) - 1) dx. \end{aligned}$$

Câu 4. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x + 2$.

A. $S = \frac{3}{2}$.

B. $S = \frac{9}{2}$.

C. $S = \frac{7}{2}$.

D. $S = \frac{15}{2}$.

Lời giải tham khảo

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \frac{9}{2}.$$

Câu 5. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$.

A. $S = \frac{4}{3}$.

B. $S = \frac{3}{2}$.

C. $S = \frac{5}{3}$.

D. $S = \frac{23}{15}$.

Lời giải tham khảo

$$\bullet x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 6. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2$ và $y = x$.

A. $S = 5$.

B. $S = 7$.

C. $S = \frac{9}{2}$.

D. $S = \frac{11}{2}$.

Lời giải tham khảo

Giải phương trình hoành độ $2 - x^2 = x \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

Áp dụng công thức diện tích (Bấm máy).

Câu 7. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -2x^2$ và $y = -2x - 4$.

A. $S = \frac{3}{13}$.

B. $S = 9$.

C. $S = \frac{13}{3}$.

D. $S = \frac{1}{9}$.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = -2x^2$ và $y = -2x - 4$ là:

$$-2x^2 = -2x - 4 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx = \left| \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx \right| = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = 9.$$

Câu 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = 3 - x^2$, đường thẳng $y = -2x + 3$, trục tung và $x = 1$.

A. $S = \frac{3}{4}$ (đvdt).

B. $S = \frac{4}{3}$ (đvdt).

C. $S = -\frac{4}{3}$ (đvdt).

D. $S = -\frac{3}{4}$ (đvdt).

Lời giải tham khảo

3C. Diện tích hình phẳng

Phương trình hoành độ giao điểm: $3 - x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Diện tích cần tìm được tính bằng công thức sau đây:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |x^2 - 2x| dx + \int_1^2 |x^2 - 2x| dx \\ &= \left| \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + \left| \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} x \right|_1^2 = \frac{4}{3} (\text{đvdt}). \end{aligned}$$

Câu 9. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 3x$ và $y = x$.

A. $S = 12$.

B. $S = 4$.

C. $S = 6$.

D. $S = 8$.

Lời giải tham khảo

Ta có PT hoành độ giao điểm $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

$$\text{Diện tích } S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = 4 + 4 = 8.$$

Câu 10. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x^3 - x$ và $y = x - x^2$.

A. $S = 12$.

B. $S = 37$.

C. $S = \frac{37}{12}$.

D. $S = 11$.

Lời giải tham khảo

$$x^3 - x = -x^2 + x \Leftrightarrow x = 0; x = -2; x = 1$$

$$S = \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \frac{37}{12}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 11. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^3 + 3x + 3$ và đường thẳng $y = 5$.

A. $S = \frac{5}{4}$.

B. $S = \frac{45}{4}$.

C. $S = \frac{27}{4}$.

D. $S = \frac{21}{4}$.

Câu 12. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và trục hoành.

A. $S = \frac{16}{15}$.

B. $S = \frac{8}{15}$.

C. $S = \frac{8}{15}$.

D. $S = \frac{15}{8}$.

Câu 13. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 5x^4 + 3x^2 - 8$, trục Ox trên đoạn $[1; 3]$.

A. $S = 100$.

B. $S = 150$.

C. $S = 180$.

D. $S = 200$.

Câu 14. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$.

A. $S = \frac{197}{6}$.

B. $S = \frac{109}{6}$.

C. $S = \frac{56}{3}$.

D. $S = \frac{88}{3}$.

3C. Diện tích hình phẳng

Câu 15. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $y = 2$ và đường thẳng $x = 1$ bằng

A. $S = e + \ln 2 - 4$.

B. $S = e + 2\ln 2 - 4$.

C. $S = e + 2\ln 2 + 4$.

D. $S = e + 2\ln 2 - 4$.

Câu 16. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ và trục hoành.

A. $S = 1 - \frac{1}{e}$.

B. $S = 2\left(1 + \frac{1}{e}\right)$.

C. $S = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

D. $S = 1 + \frac{1}{e}$.

Câu 17. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{2x-1}{-x+1}$ và hai trục toạ độ.

A. $S = \ln 2 - 1$.

B. $S = \ln 2$.

C. $S = \ln 2 + 1$.

D. $S = 2\ln 2 - 1$.

Câu 18. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1-x}{x}$, $y = 2$, $y = 0$, $x = 0$.

A. $S = -\ln 3$.

B. $S = \ln 3$.

C. $S = 2\ln 3$.

D. $S = -2\ln 3$.

3C. Diện tích hình phẳng

Câu 19. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$.

- A. $S = 7 - 4\ln \frac{5}{16}$. B. $S = 7 + 4\ln \frac{5}{14}$. C. $S = 7 + 4\ln \frac{5}{16}$. D. $S = 7 - 4\ln \frac{5}{14}$.

Câu 20. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{1}{2}$.

- A. $S = \frac{\pi}{2} - 1$. B. $S = \frac{\pi}{2} + 1$. C. $S = \frac{5\pi}{6} + 1$. D. $S = \frac{5\pi}{6} - 1$.

Câu 21. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

- A. $S = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. B. $S = \frac{8}{3}$. C. $S = 2\sqrt{2} - 1$. D. $S = \frac{2\sqrt{2}+1}{3}$.

Câu 22. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường (P) : $y = -x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Tính tọa độ điểm M nào trên (P) mà tiếp tuyến tại đó tạo với (H) một hình thang có diện tích nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$. C. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$. D. Không tồn tại điểm M .

3C. Diện tích hình phẳng

Câu 23. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 0$.

A. $S = 15$.

B. $S = 18$.

C. $S = 20$.

D. $S = 22$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 24. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = x$.

A. $S = \frac{7}{2}$.

B. $S = \frac{9}{2}$.

C. $S = \frac{19}{2}$.

D. $S = \frac{11}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3D. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

(CĐ 17)

 Dạng 51. Tính thể tích khối tròn xoay

Câu 1. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo khi quay hình cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) quay xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. B. $V = \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. D. $V = \int_a^b f(x) dx$.

Câu 2. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 3x$; $y = x$; $x = 0$; $x = 1$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi (H) quay quanh Ox .

A. $V = \frac{8\pi}{3}$. B. $V = \frac{8\pi^2}{3}$. C. $V = 8\pi^2$. D. $V = 8\pi$.

Lời giải tham khảo

Xét hình thang giới hạn bởi các đường: $y = 3x$; $y = x$; $x = 0$; $x = 1$

Ta có: $V = \pi \left| \int_0^1 (3x)^2 dx - \int_0^1 (x)^2 dx \right| = \frac{8}{3} \pi$.

Câu 3. Cho tam giác giới hạn bởi ba đường $y = x, x = 1$, trục Ox . Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Oy của tam giác đó.

A. $V = \frac{\pi}{3}$. B. $V = \frac{2\pi}{3}$. C. $V = \pi$. D. $V = \frac{4\pi}{3}$.

Lời giải tham khảo

Thể tích hình cần tính bằng thể tích khối trụ trừ đi thể tích khối nón.

Câu 4. Thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2, y = 0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 11$. B. $a + b = 17$. C. $a + b = 31$. D. $a + b = 25$.

Lời giải tham khảo

$\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$. Nên $a = 16, b = 15, a + b = 31$.

Câu 5. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2 - x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 0$ xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_{-1}^0 (2 - x^2)^2 dx$. B. $V = \int_{-1}^0 (2 - x^2)^2 dx$.
C. $V = \pi \int_{-1}^0 (2 - x^2) dx$. D. $V = \int_{-1}^0 |2 - x^2| dx$.

3D. Thể tích khối tròn xoay

Lời giải tham khảo

$$V = \pi \int_{-1}^0 (2 - x^2)^2 dx.$$

Câu 6. Tính thể tích V của hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2$, $y = x^2 + 2$ quay quanh trục Ox .

- A. $V = 14\pi$. B. $V = 15\pi$. C. $V = 16\pi$. D. $V = 17\pi$.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số: $4 - x^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Thể tích cần tìm: $V = \pi \int_{-1}^1 \left[(4 - x^2)^2 - (x^2 + 2)^2 \right] dx = 12\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = 16\pi$ (đvtt).

Câu 7. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2 - 3x$; $y = -x$ khi quay quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{56\pi}{15}$. B. $V = \frac{6\pi}{15}$. C. $V = -\frac{56\pi}{15}$. D. $V = \frac{56\pi}{5}$.

Lời giải tham khảo

Phương trình hoành độ giao điểm tìm được $x = 0$; $x = -2$

Gọi V_1 ; V_2 Tính được thể tích 2 phần là $\frac{32\pi}{5}$; $\frac{8\pi}{3}$. $\Rightarrow V = \frac{56\pi}{15}$.

Câu 8. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$, trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{16}{15}$. B. $V = \frac{4\pi}{3}$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = \frac{16\pi}{15}$.

Lời giải tham khảo

Phương trình HĐGD $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15} \pi.$$

Câu 9. Tính thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ quay quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{33\pi}{7}$. B. $V = \frac{33\pi}{6}$. C. $V = \frac{33\pi}{5}$. D. $V = \frac{33\pi}{4}$.

Lời giải tham khảo

$$V = \pi \int_0^3 (x - 2)^4 dx = \frac{33\pi}{5}.$$

3D. Thể tích khối tròn xoay

Câu 10. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$ và $y = 4x - 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox .

A. $V = \frac{4\pi}{3}$. B. $V = \frac{248\pi}{3}$. C. $V = \frac{224\pi}{15}$. D. $V = \frac{1016\pi}{15}$.

Lời giải tham khảo

$$x^2 + 1 = 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$V = \pi \int_1^3 \left((4x - 2)^2 - (x^2 + 1)^2 \right) dx = \frac{224}{15} \pi.$$

Câu 11. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = 0$ và các tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ tại điểm $(1; 2)$.

A. $V = \frac{15}{8}$. B. $V = \frac{8}{15} \pi$. C. $V = \frac{8}{15}$. D. $V = \frac{15}{8} \pi$.

Lời giải tham khảo

Viết phương trình tiếp tuyến, vẽ hình và xác định miền cần tính diện tích, có thể sử dụng máy tính cầm tay để tìm kết quả.

Câu 12. Tính thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = a$ ($a > 1$) quay quanh trục Ox .

A. $V = \left(\frac{1}{a} - 1 \right)$. B. $V = \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \pi$. C. $V = \left(1 - \frac{1}{a} \right) \pi$. D. $V = \left(1 - \frac{1}{a} \right)$.

Lời giải tham khảo

$$V = \pi \int_1^a \frac{dx}{x^2} = \left(1 - \frac{1}{a} \right) \pi.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 13. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$; $x = \pi$ biết rằng thiết diện của vật thể với mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều có cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. C. $V = 2\sqrt{3}$. D. $V = 2\pi$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3D. Thể tích khối tròn xoay

Câu 14. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0, x = 2$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) là một nửa hình tròn đường kính $\sqrt{5x^2}$.

A. $V = 4\pi$.

B. $V = \pi$.

C. $V = 3\pi$.

D. $V = 2\pi$.

Câu 15. Tính thể tích V của một vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có kích thước là x và $2\sqrt{9 - x^2}$.

A. $V = 16$.

B. $V = 17$.

C. $V = 19$.

D. $V = 18$.

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và $x = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng H quanh trục Ox .

A. $V = \frac{7\pi}{6}$.

B. $V = \frac{7\pi^2}{6}$.

C. $V = \frac{7}{6}$.

D. $V = \frac{5\pi}{3}$.

Câu 17. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục hoành $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$.

A. $V = \frac{31416}{20001}$.

B. $V = \frac{4\pi}{3}$.

C. $V = \frac{\pi}{2}$.

D. $V = \frac{3}{2}$.

3D. Thể tích khối tròn xoay

Câu 18. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{\ln(1+x^2)}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

A. $V = \pi \left(\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6} \right).$

B. $V = \pi \left(\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{4}{9} + \frac{\pi}{6} \right).$

C. $V = \pi \left(-\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6} \right).$

D. $V = \pi \left(\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{4}{9} + \frac{\pi}{6} \right).$

Câu 19. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Oy hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2 + 1}$, $y = 0$, $y = 1$.

A. $V = \frac{\pi}{3}.$

B. $V = \frac{\pi}{2}.$

C. $V = \frac{\pi}{4}.$

D. $V = \frac{3\pi}{2}.$

Câu 20. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x + \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ khi quay quanh trục Ox .

A. $V = \pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \right).$

B. $V = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \right).$

C. $V = \pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right).$

D. $V = \pi \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \right).$

3D. Thể tích khối tròn xoay

Câu 21. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sin x, x = 0, y = 0, x = \pi$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh Ox .

A. $V = 2\pi$.

B. $V = \frac{\pi^2}{2}$.

C. $V = \frac{\pi^2}{4}$.

D. $V = \frac{\pi}{2}$.

Câu 22. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x, x = 1, x = 2, y = 0$ khi nó quay xung quanh trục Ox .

A. $V = 2(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.

B. $V = \pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.

C. $V = 2\pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.

D. $V = \ln^2 2 - 2\ln 2 + 1$.

Câu 23. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = x \ln x, y = 0, x = e$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục Ox .

A. $V = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{28}$.

B. $V = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{25}$.

C. $V = \frac{\pi(5e^3 + 2)}{27}$.

D. $V = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27}$.

Câu 24. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, trục tung và $y = e$ quay quanh trục Ox .

A. $V = \pi(e^2 + 1)$.

B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

C. $V = \pi(e^2 + 2)$.

D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

3D. Thể tích khối tròn xoay

Câu 25. Tính thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{(e^6 - 1)\pi}{2}$. B. $V = \frac{(e^6 - 1)}{2}$. C. $V = \frac{(e^6 + 1)\pi}{2}$. D. $V = \frac{(e^6 + 1)}{2}$.

Câu 26. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = e^{-x}$ và $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

A. $V = \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - 1 \right)$. B. $V = \pi \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2} + 1 \right)$.
C. $V = \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 1 \right)$. D. $V = \pi \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2} - 1 \right)$.

Câu 27. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^x$ và các đường thẳng $x = 1, x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay A quanh trục hoành.

A. $V = \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{2}e^2$. B. $V = \pi \left(\frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{2}e^2 \right)$.
C. $V = -\frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{2}e^2$. D. $V = \pi \left(-\frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{2}e^2 \right)$.

3D. Thể tích khối tròn xoay

Câu 28. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x} \cdot e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = \frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$. B. $V = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$. C. $V = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$. D. $V = \frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 29. Tính thể tích V của hình khối do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = xe^x$, trục tung, trục hoành, $x = 2$ khi quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{1}{4}(5e^4 - 1)$. B. $V = \pi(5e^4 - 1)$. C. $V = \frac{\pi}{4}(5e^4 - 1)$. D. $V = 5e^4 - 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 30. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = xe^{\frac{x}{2}}$, $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox .

A. $V = \pi(e + 2)$. B. $V = \pi(e - 1)$. C. $V = \pi(e - 2)$. D. $V = \pi(e + 1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

4A. TÍNH TOÁN VỚI SỐ PHỨC

Dạng 52. Tìm phần thực, phần ảo của số phức

Câu 1. Cho số phức $z = 2i - 1$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- A. $a = 2, b = -1$. B. $a = 2, b = 1$. C. $a = -1, b = 2$. D. $a = -1, b = -2$.

Câu 2. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- A. $a = 2, b = -3$. B. $a = 2, b = 3$. C. $a = -3, b = 2$. D. $a = -3, b = -2$.

Câu 3. Cho số phức $z = -11 + 7i$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- A. $a = -11; b = 7$. B. $a = -11; b = -7$. C. $a = 7; b = 11$. D. $a = 7; b = -11$.

Câu 4. Cho số phức $z = 4i$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- A. $a = 0; b = 4$. B. $a = 0; b = -4$. C. $a = 4; b = 0$. D. $a = -4; b = 0$.

Câu 5. Số phức nào dưới đây là số thực?

- A. $z = (\sqrt{3} + 2i) - (\sqrt{3} - 2i)$. B. $z = (3 + 2i) + (3 - 2i)$.
C. $z = (1 + 2i) + (-1 + 2i)$. D. $z = (5 + 2i) - (\sqrt{5} - 2i)$.

Dạng 53. Tìm số phức liên hợp

Câu 6. Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Tìm số phức $\bar{z}$.

- A. $\bar{z} = 1 - i\sqrt{3}$. B. $\bar{z} = -\sqrt{3} - i$. C. $\bar{z} = -1 + i\sqrt{3}$. D. $\bar{z} = \sqrt{3} + i$.

Lời giải tham khảo

- $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ vậy $\bar{z} = 1 - i\sqrt{3}$.

Câu 7. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm số phức $\bar{z}$.

- A. $\bar{z} = -1 + 2i$. B. $\bar{z} = -1 - 2i$. C. $\bar{z} = 2 + i$. D. $\bar{z} = 1 - 2i$.

Lời giải tham khảo

- $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ vậy $\bar{z} = 1 - 2i$.

Câu 8. Cho số phức $z = -2 - 5i$. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $\bar{z}$.

- A. $a = -2, b = 5$. B. $a = -2, b = -5$. C. $a = -5, b = 2$. D. $a = -5, b = -2$.

Lời giải tham khảo

- $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ vậy $\bar{z} = -2 + 5i$. $\Rightarrow$ Phần thực bằng $a = -2$ và phần ảo bằng $b = 5$.

4A. Tính toán với số phức

Câu 9. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $\bar{z}$.

- A. $a = 3, b = 4$. B. $a = 3, b = -4$. C. $a = 4, b = 3$. D. $a = 4, b = -3$.

Lời giải tham khảo

- $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ vậy $\bar{z} = 3 - 4i$. $\Rightarrow$ Phần thực bằng $a = 3$ và phần ảo bằng $b = -4$.

Câu 10. Cho số phức $\bar{z} = 4 - 3i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. $a = 3, b = 4$. B. $a = 3, b = -4$. C. $a = 4, b = 3$. D. $a = 4, b = -3$.

Lời giải tham khảo

- $z = a + bi \Leftrightarrow \bar{z} = a - bi$ vậy $z = 4 + 3i$. $\Rightarrow$ Phần thực bằng $a = 4$ và phần ảo bằng $b = 3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 11. Cho số phức $z = -4 + 5i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- A. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $5i$.
B. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng 5.
C. Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng -5 .
D. Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng $-5i$.

Câu 12. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Tìm số phức $\bar{z}$.

- A. $\bar{z} = 6 + 7i$. B. $\bar{z} = 6 - 7i$. C. $\bar{z} = -6 + 7i$. D. $\bar{z} = -6 - 7i$.

Câu 13. Cho số phức z thỏa $(1 + i)\bar{z} = 4 - 2i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng $3i$.
B. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3.
C. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng $-3i$.
D. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng 3.

Câu 14. Cho số phức $z = i$. Tìm số phức $\bar{z}$.

- A. $\bar{z} = -i$. B. $\bar{z} = -1$. C. $\bar{z} = 1 - i$. D. $\bar{z} = 1$.

Câu 15. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- A. Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 3.
B. Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng -3 .
C. Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng $3i$.
D. Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng $-3i$.

Câu 16. Cho số phức $z = 1 - 3i$. Tìm số phức $\bar{z}$.

- A. $\bar{z} = 1 + 3i$. B. $\bar{z} = -1 - 3i$. C. $\bar{z} = -1 + 3i$. D. $\bar{z} = 1 - 3i$.

Câu 17. Cho số phức $z = 1 - 5i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- A. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng $-5i$.
B. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng -5 .
C. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 5.
D. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng $-5i$.

✎ Dạng 54. Phép cộng số phức

Câu 18. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 1 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. $4 + i$. B. $9 - i$. C. $-1 - 9i$. D. $4 - 5i$.

Lời giải tham khảo

$$(3 - 2i) + (1 + 3i) = (3 + 1) + (-2 + 3)i = 4 + i.$$

Câu 19. Cho số phức $z = a + bi$ và $w = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$. Mệnh đề sau đây là **đúng**?

- A. w là một số thực B. $w = 2$.
C. w là một số thuần ảo. D. $w = i$.

Lời giải tham khảo

$$z = a + bi \Rightarrow \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = a.$$

Câu 20. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Tìm phần ảo b của số phức $w = 2z + \bar{z}$.

- A. $b = -2$. B. $b = 2$. C. $b = 4$. D. $b = -4$.

Lời giải tham khảo

$$w = 2z + \bar{z} = 2(1 - 2i) + (1 + 2i) = 3 - 2i \Rightarrow b = -2.$$

Câu 21. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. $z = 3 + 3i$. B. $z = 3 + 2i$. C. $z = 2 - 2i$. D. $z = 3 - 2i$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } z = z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (1 + i) = (2 + 1) + (-3 + 1)i = 3 - 2i.$$

Câu 22. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Tìm điều kiện giữa a, b, a', b' để $z + z'$ là một số thuần ảo.

- A. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b, b' \text{ bất kì} \end{cases}$. C. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b = b' \end{cases}$. D. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' \neq 0 \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 23. Tìm số phức z thỏa mãn $3z + 2 + 3i = 5 + 4i$.

- A. $z = -1 + 3i$. B. $z = -3 + 2i$. C. $z = 2 - \frac{1}{3}i$. D. $z = 1 + \frac{1}{3}i$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } 3z + 2 + 3i = 5 + 4i \Leftrightarrow 3z = (5 - 2) + (4 - 3)i \Leftrightarrow z = 1 + \frac{1}{3}i.$$

Câu 24. Cho số phức $z = 2 + 4i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w = z - i$.

- A. Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng $-3i$. B. Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng -3 .
C. Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng $3i$. D. Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 3 .

Lời giải tham khảo

$$w = z - i = 2 + 4i - i = 2 + 3i \text{ có phần thực bằng } 2 \text{ và phần ảo bằng } 3.$$

4A. Tính toán với số phức

Câu 25. Cho hai số phức $z_1 = 7 + 5i$; $z_2 = 3 - i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

A. $4 + 4i$.

B. $10 + 4i$.

C. $4 - 4i$.

D. $4 + 6i$.

Lời giải tham khảo

$$(7 + 5i) - (3 - i) = 4 + 6i.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 26. Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5 + 7i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

A. $z = -3 + 7i$.

B. $z = -3 - 8i$.

C. $z = 7 + 6i$.

D. $z = -3 + i$.

Câu 27. Cho số phức $z = 3(3 - 4i) - 4(3i - 1)$. Tìm số phức $\bar{z}$.

A. $\bar{z} = 24 - 13i$.

B. $\bar{z} = 3(3 - 4i) + 4(3i - 1)$.

C. $\bar{z} = 5 - 24i$.

D. $\bar{z} = 13 - 24i$.

Câu 28. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$; $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $w = z_1 - 2z_2$.

A. $w = -3 + i$.

B. $w = -3 - 8i$.

C. $w = -5 + i$.

D. $w = -3 + 8i$.

Câu 29. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = -1 + i$. Tìm phần ảo của số phức $w = 2z_1 - z_2$.

A. -7 .

B. 5 .

C. 7 .

D. -5 .

Câu 30. Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5 + 7i$. Tìm số phức $z = 2z_1 - z_2$.

A. $z = 9 + 7i$.

B. $z = -3 - 3i$.

C. $z = 9 + 3i$.

D. $z = 7 + 6i$.

4A. Tính toán với số phức

Câu 31. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 2 + i$. Tìm số phức $z = 2\overline{z_1} - z_2$.

A. $z = 7i$.

B. $z = 5i$.

C. $z = -4 - 7i$.

D. $z = -7i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Cho $z + (5 - i)(2i - 1) = 4 - 3i$. Tìm số phức $z - 2\overline{z}$.

A. $7 - 14i$.

B. $-7 - 42i$.

C. -7 .

D. $-7 + 14i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 33. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 4i$. Tìm số phức $z = 5z_1 - 3z_2$.

A. $z = 1 + i$.

B. $z = 3i$.

C. $z = 1 + 2i$.

D. $z = 1 + 3i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 34. Cho hai số phức $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

A. $z = 3 + i$.

B. $z = 2 - i$.

C. $z = 1 + 7i$.

D. $z = 5 + 7i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 35. Cho số phức $z = -3 + 5i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z - i$.

A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng 5 .

B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $4i$.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 .

D. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng 4 .

.....

.....

.....

.....

Dạng 55. Phép nhân số phức

Câu 36. Cho hai số phức $z = i$. Tìm số phức $w = z^5$.

A. $w = i$.

B. $w = -1$.

C. $w = 1$.

D. $w = -i$.

Lời giải tham khảo

Ta có $w = z^5 = i^5 = i^4 \cdot i = i$

Câu 37. Cho hai số phức $z_1 = i$; $z_2 = 1 + 2i$. Tìm số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

A. $z = 1$.

B. $z = 2$.

C. $z = -1$.

D. $z = -2$.

Lời giải tham khảo

Ta có $z = z_1 \cdot z_2 = i(1 + 2i) = -2 + i$.

Câu 38. Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 + i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

A. $b = -2$.

B. $b = 2$.

C. $b = 0$.

D. $b = 1$.

Lời giải tham khảo

Ta có $z = (1 - i)(1 + i) = 1^2 - i^2 = 2$. Vậy phần ảo của số phức z là 0.

Câu 39. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1^2 - z_2^2$.

A. $b = -4$.

B. $b = 4$.

C. $b = 0$.

D. $b = 1$.

Lời giải tham khảo

Ta có $z = (1 + i)^2 - (1 - i)^2 = (1 + i + 1 - i)(1 + i - 1 + i) = 4i$.

Câu 40. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 4 - i$. Tìm số phức $z = z_1^2 \cdot z_2$.

A. $z = 2 + 8i$.

B. $z = 2 - 8i$.

C. $z = 5 + 3i$.

D. $z = 3 + 3i$.

Lời giải tham khảo

Ta có $z = (1 + i)^2(4 - i) = 2i(4 - i) = 2 + 8i$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 41. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 3 + i$. Tìm số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

A. $z = 9 - 7i$.

B. $z = 9 + 7i$.

C. $z = -9 + 7i$.

D. $z = -9 - 7i$.

.....

.....

Câu 42. Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 1 + 2i$. Tìm số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

A. $z = 4 + 3i$.

B. $z = 5i$.

C. $z = 3 + 4i$.

D. $z = 2 - 2i$.

.....

.....

4A. Tính toán với số phức

Câu 43. Cho hai số phức $z_1 = 2i - 5$; $z_2 = 1 - 3i$. Tìm số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

A. $z = -4 - i$.

B. $z = 1 + 17i$.

C. $z = -11 + 17i$.

D. $z = 1 - 13i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 44. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 5i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Tìm số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

A. $z = 6 + 20i$.

B. $z = 26 + 7i$.

C. $z = 6 - 20i$.

D. $z = 26 - 7i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 45. Cho ba số phức $z_1 = 1 - 3i$; $z_2 = 2 + i$; $z_3 = 3 - 4i$. Tìm số phức $z = z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3}$.

A. $z = 1 + 4i$.

B. $z = 1 - 4i$.

C. $z = -15 - 4i$.

D. $z = 15 + 4i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 46. Cho hai số phức $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$. Tìm số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

A. $z = i$.

B. $z = 4i$.

C. $z = 2\sqrt{3} + 4i$.

D. $z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2 (1 - \sqrt{2}i)$. Tìm phần ảo b của z .

A. $b = -\sqrt{2}$.

B. $b = \sqrt{2}$.

C. $b = 5$.

D. $b = 3\sqrt{2}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)(1 - \sqrt{2}i)$. Tìm phần thực a của z .

A. $a = \sqrt{2}$.

B. $a = -1$.

C. $a = 2\sqrt{2}$.

D. $a = 1$.

.....

.....

.....

.....

✎ Dạng 56. Phép chia số phức

Câu 49. Cho số phức $z = a + bi \neq 0$. Tìm phần thực của số phức z^{-1} .

A. $a + b$.

B. $a - b$.

C. $\frac{a}{a^2 + b^2}$.

D. $\frac{-b}{a^2 + b^2}$.

Lời giải tham khảo

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \text{ nên phần thực của } z^{-1} \text{ là } \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Câu 50. Tìm phần thực a của số phức $\frac{1}{i}$.

A. $a = 1$.

B. $a = -1$.

C. $a = 0$.

D. $a = -i$.

Lời giải tham khảo

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Câu 51. Tìm số phức $z = \frac{3}{i}$.

A. $z = 3i$.

B. $z = i$.

C. $z = -i$.

D. $z = -3i$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } z = \frac{3}{i} = \frac{3(-i)}{-i^2} = -3i$$

Câu 52. Tìm số phức $z = \frac{3 - 4i}{4 - i}$.

A. $z = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$.

B. $z = \frac{16}{15} - \frac{11}{15}i$.

C. $z = \frac{9}{5} - \frac{4}{5}i$.

D. $z = \frac{9}{25} - \frac{23}{25}i$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } z = \frac{3 - 4i}{4 - i} = \frac{(3 - 4i)(4 + i)}{17} = \frac{12 + 3i - 16i - 4i^2}{17} = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$$

Câu 53. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = \frac{1 + i}{2 - i}$.

A. $\overline{z} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

B. $\overline{z} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

C. $\overline{z} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

D. $\overline{z} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

Lời giải tham khảo

$$\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{1 + 3i}{2^2 - i^2} = \frac{1 + 3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Câu 54. Tìm số phức $z = \frac{3}{2 + i}$.

A. $z = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$.

B. $z = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

C. $z = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$.

D. $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } z = \frac{3}{2 + i} = \frac{3(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{6 - 3i}{4 - i^2} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 55. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$; $z_2 = 1 + i$. Tìm số phức $z = \frac{z_1}{z_2}$.

- A. $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. B. $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$. C. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. D. $z = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

Câu 56. Cho số phức $z = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$. Tính z^{-1} .

- A. $z^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5}i$. B. $z^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5}i$. C. $z^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{5}i$. D. $z^{-1} = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

Câu 57. Tìm số phức $z = \frac{3-2i}{1+i} + \frac{1+i}{3-2i}$.

- A. $z = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$. B. $z = \frac{15}{26} + \frac{55}{26}i$. C. $z = \frac{15}{26} - \frac{65}{26}i$. D. $z = \frac{15}{26} - \frac{55}{26}i$.

Câu 58. Tìm số phức $z = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3+2i}$.

- A. $z = \frac{21}{26} + \frac{61}{26}i$. B. $z = \frac{23}{26} + \frac{63}{26}i$. C. $z = \frac{15}{26} + \frac{55}{26}i$. D. $z = \frac{2}{13} + \frac{6}{13}i$.

Câu 59. Cho số phức $z = \frac{(2+i)(1-2i)}{2-i} + \frac{(2-i)(1+2i)}{2+i}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $z \cdot \bar{z} = \frac{22}{5}$. B. z là số thuần ảo. C. $z \in \mathbb{R}$. D. $z + \bar{z} = 22$.

4A. Tính toán với số phức

Câu 60. Cho số phức $z = 4 - 3i + \frac{5+4i}{3+6i}$. Tìm số phức $\bar{z}$.

A. $\bar{z} = 20 - 8i$.

B. $\bar{z} = 20 + 8i$.

C. $\bar{z} = \frac{73}{15} + \frac{17}{5}i$.

D. $\bar{z} = \frac{73}{15} - \frac{17}{5}i$.

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Câu 61. Tìm phần thực a của số phức $z = \frac{3+i}{(1-2i)(1+i)}$.

A. $a = \frac{4}{5}$.

B. $a = -\frac{4}{5}$.

C. $a = \frac{3}{5}$.

D. $a = -\frac{3}{5}$.

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Dạng 57. Môđun của số phức

Câu 62. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 2$.

B. $|z| = -3$.

C. $|z| = \sqrt{13}$.

D. $|z| = 13$.

Lời giải tham khảo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Câu 63. Cho số phức $z = 5 - 3i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 34$.

B. $|z| = 2$.

C. $|z| = \sqrt{34}$.

D. $|z| = 4$.

Lời giải tham khảo

$$|z| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

Câu 64. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 1$.

B. $|z| = \sqrt{5}$.

C. $|z| = 2$.

D. $|z| = 3$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } |1 + 2i| = \sqrt{1 + 2^2}$$

Câu 65. Cho số phức $z = -3 + 2i$. Tính $P = |z + 1 - i|$.

A. $P = 4$.

B. $P = 1$.

C. $P = \sqrt{5}$.

D. $P = 2\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

$$z + 1 - i = -2 - i \Rightarrow |z + 1 - i| = \sqrt{5}$$

4A. Tính toán với số phức

Câu 66. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = -2 + i$. Tính $P = |z_1 + z_2|$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = \sqrt{2}$. C. $P = \sqrt{13}$. D. $P = 2$.

Lời giải tham khảo

$$|z_1 + z_2| = |1 - i| = \sqrt{2}$$

Câu 67. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 3i$ và $z_2 = 2 - i$. Tính $P = |z_1 + z_2|$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = 5$. C. $P = \sqrt{10}$. D. $P = \sqrt{13}$.

Lời giải tham khảo

$$z_1 + z_2 = 3 + 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{13}$$

Câu 68. Cho hai số phức $z_1 = -3i$ và $z_2 = 3 - 5i$. Tính $P = |z_1 - z_2|$.

- A. $P = \sqrt{73}$. B. $P = \sqrt{13}$. C. $P = 3$. D. $P = 5$.

Lời giải tham khảo

$$z_1 - z_2 = -3 + 2i, \text{ do đó: } |z_1 - z_2| = \sqrt{13}.$$

Câu 69. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = -1 + 2i$. Tính $P = |z_1 - z_2|$.

- A. $P = 5$. B. $P = 6$. C. $P = 7$. D. $P = 8$.

Lời giải tham khảo

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(2+1)^2 + (6-2)^2} = 5.$$

Câu 70. Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 4 + 5i$. Tính $P = |z_1 - z_2|$ là

- A. $P = 2\sqrt{5}$. B. $P = 3\sqrt{5}$. C. $P = 3\sqrt{3}$. D. $P = 5\sqrt{3}$.

Lời giải tham khảo

$$z_1 - z_2 = -3 - 6i \Rightarrow |z_1 - z_2| = 3\sqrt{5}.$$

Câu 71. Cho hai số phức $z_1 = 4 + 5i$ và $z_2 = -1 + 2i$. Tính $P = |z_1 - z_2|$.

- A. $P = \sqrt{41}$. B. $P = \sqrt{5}$. C. $P = 3\sqrt{2}$. D. $P = \sqrt{34}$.

Lời giải tham khảo

$$z_1 - z_2 = 5 + 3i \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Câu 72. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 3 + i$. Tính $P = |z_1 - 2z_2|$.

- A. $P = \sqrt{26}$. B. $P = \sqrt{41}$. C. $P = \sqrt{29}$. D. $P = \sqrt{33}$.

Lời giải tham khảo

$$z_1 - 2z_2 = -5 - 4i \Rightarrow |z_1 - 2z_2| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

Câu 73. Cho hai số phức $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 - i$. Tính $P = |z_1 + z_1 z_2|$.

- A. $P = 10$. B. $P = 50$. C. $P = 5$. D. $P = 85$.

Lời giải tham khảo

$$z_1 z_2 = 7 - i, \quad z_1 + z_1 z_2 = 10.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 74. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$. Tìm $P = |\bar{z} + iz|$.

A. $P = 8\sqrt{2}$.

B. $P = 8\sqrt{3}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 4\sqrt{3}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 75. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = a + bi$. Tính $|z_2|$, biết $z_1 + z_2 = 3 + 4i$.

A. $|z_2| = 3$.

B. $|z_2| = 4$.

C. $|z_2| = \sqrt{5}$.

D. $|z_2| = 5$.

.....

.....

.....

.....

Câu 76. Cho số phức $z = (2 + i)(1 - i) + 1 + 2i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 2\sqrt{2}$.

B. $|z| = 4\sqrt{2}$.

C. $|z| = \sqrt{17}$.

D. $|z| = \sqrt{5}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 77. Cho số phức $z = 1 + 4i + (1 - i)^3$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 4$.

B. $|z| = \sqrt{29}$.

C. $|z| = 1$.

D. $|z| = \sqrt{5}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 78. Cho số phức $z = (1 + 2i)^2(1 - i)$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 5\sqrt{2}$.

B. $|z| = 50$.

C. $|z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $|z| = \frac{10}{3}$.

.....

.....

.....

.....

4A. Tính toán với số phức

Câu 79. Cho số phức $z = 5 + 2i - (1 + i)^3$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 7$.

B. $|z| = 3$.

C. $|z| = 5$.

D. $|z| = 2$.

.....

.....

.....

.....

Câu 80. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 8i$ và $z_2 = -2 - i$. Tính môđun của số phức $z = 2z_1 \cdot \overline{z_2}$.

A. $|z| = 4\sqrt{5}$.

B. $|z| = \sqrt{5}$.

C. $|z| = 20$.

D. $|z| = 40$.

.....

.....

.....

.....

Câu 81. Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = -3 + 5i$. Tính môđun của số phức $w = z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2$.

A. $|w| = \sqrt{130}$.

B. $|w| = 130$.

C. $|w| = \sqrt{112}$.

D. $|w| = 112$.

.....

.....

.....

.....

Câu 82. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z + (1 - 2i) = 1 + 3i$. Tính môđun của số phức z .

A. $|z| = \sqrt{11}$.

B. $|z| = \sqrt{85}$.

C. $|z| = 11$.

D. $|z| = 85$.

.....

.....

.....

.....

Câu 83. Tính môđun của số phức z thỏa mãn phương trình

$$(2z - 1)(1 + i) + (\overline{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i.$$

A. $|z| = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $|z| = \frac{1}{2}$.

D. $|z| = \frac{1}{3}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 84. Cho số phức $z = \frac{(1 + i)^4(2 - i)}{(1 + 2i)^3}$. Tính $|z|$.

A. $|z| = \frac{4}{5}$.

B. $|z| = \frac{3}{5}$.

C. $|z| = \frac{6}{5}$.

D. $|z| = \frac{7}{5}$.

.....

.....

.....

.....

4A. Tính toán với số phức

Câu 85. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} = 2 - i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

A. $|w| = 4$.

B. $|w| = 9$.

C. $|w| = 13$.

D. $|w| = \sqrt{13}$.

.....
.....
.....
.....

Câu 86. Tìm môđun của số phức liên hợp của $z = \frac{(1+i)(2-i)}{1+2i}$.

A. $|\bar{z}| = \sqrt{2}$.

B. $|\bar{z}| = 2\sqrt{2}$.

C. $|\bar{z}| = 1$.

D. $|\bar{z}| = 5\sqrt{2}$.

.....
.....
.....
.....

Câu 87. Tìm môđun của số phức $\bar{z}$, biết $z = \frac{(2-3i)^2 + (1+i)^2}{(1-2i)^2}$.

A. $|\bar{z}| = \sqrt{5}$.

B. $|\bar{z}| = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

C. $|\bar{z}| = \sqrt{\frac{11}{5}}$.

D. $|\bar{z}| = 5$.

.....
.....
.....
.....

Câu 88. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất sao cho $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$.

A. $z = -\frac{3}{2} - 2i$.

B. $z = -\frac{3}{2} + 2i$.

C. $z = \frac{3}{2} + 2i$.

D. $z = \frac{3}{2} - 2i$.

.....
.....
.....
.....

Câu 89. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$.

A. $z = -1 + i$.

B. $z = -2 + 2i$.

C. $z = 2 + 2i$.

D. $z = 3 + 2i$.

.....
.....
.....
.....

4A. Tính toán với số phức

Câu 90. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = \frac{3}{2}$.

A. $z = \frac{26 - 3\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$.

B. $z = \frac{26 - 2\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 3\sqrt{13}}{26}i$.

C. $z = \frac{26 - \sqrt{13}}{13} + \frac{78 - \sqrt{13}}{26}i$.

D. $z = \frac{26 + \sqrt{13}}{13} + \frac{78 + \sqrt{13}}{26}i$.

Câu 91. Cho số phức z thỏa mãn: $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$. Tìm giá trị $P_{\min}$ nhỏ nhất của $P = |z|$.

A. $P_{\min} = -\frac{1}{2}$.

B. $P_{\min} = \sqrt{2}$.

C. $P_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $P_{\min} = \frac{1}{2}$.

Dạng 58. Tìm số phức thỏa điều kiện cho trước

Câu 92. Tìm số phức $z = (1 + 2i)^3 + (3 - i)^2$.

A. $z = -3 + 8i$.

B. $z = -3 - 8i$.

C. $z = 3 - 8i$.

D. $z = 3 + 8i$.

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} z &= (1 + 2i)^3 + (3 - i)^2 = 1 + 6i + 3 \cdot 4i^2 + 8i^3 + 9 - 6i + i^2 \\ &= 1 + 6i - 12 - 8i + 9 - 6i - 1 = -3 - 8i. \end{aligned}$$

Câu 93. Tìm phần thực a của số phức z thỏa mãn $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$.

A. $a = 2$.

B. $a = -3$.

C. $a = -2$.

D. $a = 3$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z \Leftrightarrow (2 + 4i)z - (1 + 2i)z = 8 + i$

$$\Leftrightarrow (1 + 2i)z = 8 + i \Leftrightarrow z = \frac{8 + i}{1 + 2i} = \frac{(8 + i)(1 - 2i)}{5} = 2 - 3i$$

Vậy phần thực của z bằng 2.

Câu 94. Tìm số phức z thỏa mãn $iz + 2\bar{z} = -1 - 8i$.

A. $z = 7 + 7i$.

B. $z = 5 - 2i$.

C. $z = 2 + 5i$.

D. $z = 1 - 2i$.

Lời giải tham khảo

Gọi $z = a + bi$ khi đó $\bar{z} = a - bi$

4A. Tính toán với số phức

Ta có: $iz + 2\bar{z} = -1 - 8i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a - 2b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$

Vậy $z = 2 + 5i$.

Câu 95. Tìm số phức z thỏa mãn $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$.

- A. $z = -3 - i$. B. $z = -2 - i$. C. $z = 2 - i$. D. $z = 2 + i$.

Lời giải tham khảo

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i \Leftrightarrow a + bi - 2a + 2bi - 3ai - 3b = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = 1 \\ -3a + 3b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy $z = 2 - i$.

Câu 96. Tìm phần ảo b của số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = (2 - i)^2(1 - i)$.

- A. $b = 13$. B. $b = -13$. C. $b = -9$. D. $b = 9$.

Lời giải tham khảo

Đặt $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z + 2\bar{z} &= (2 - i)^3(1 - i) \\ \Leftrightarrow x + yi + 2(x - yi) &= -9 - 13i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -9 \\ -y = -13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 13 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 97. Tìm các số phức z thỏa mãn $|z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8$ và $z + \bar{z} = 2$.

- A. $z_1 = -1 + i; z_2 = 1 - i$. B. $z_1 = 1 + i; z_2 = -1 - i$.
C. $z_1 = -1 + i; z_2 = -1 - i$. D. $z_1 = 1 + i; z_2 = 1 - i$.

Lời giải tham khảo

$$|z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8 \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

$$z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Do đó } x = 1 \text{ và } y = \pm 1.$$

Câu 98. Tìm phần thực a của số phức z thỏa mãn $iz + 4 + 5i = i(6 + 3i)$.

- A. $a = 1$. B. $a = 7$. C. $a = 11$. D. $a = -1$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Tìm } z = \frac{i(6 + 3i) - 4 - 5i}{i} = 1 + 7i. \text{ Phần thực là } a = 1.$$

Câu 99. Tìm số phức z thỏa mãn $(1 + i)z + (2 - 3i)(1 + 2i) = 7 + 3i$.

- A. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. B. $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. C. $z = 1 + \frac{3}{2}i$. D. $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Lời giải tham khảo

$$(1 + i)z + (2 - 3i)(1 + 2i) = 7 + 3i \Leftrightarrow (1 + i)z + (8 + i) = 7 + 3i \Leftrightarrow (1 + i)z = -1 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 + 2i}{1 + i} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

4A. Tính toán với số phức**Câu 100.** Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (1+i)(3-2i) + \frac{1}{2+i}$.

- A. $\bar{z} = \frac{17}{3} + \frac{2}{3}i$. B. $\bar{z} = \frac{17}{5} + \frac{4}{5}i$. C. $\bar{z} = \frac{27}{5} - \frac{4}{5}i$. D. $\bar{z} = \frac{17}{3} - \frac{2}{3}i$.

Lời giải tham khảo

$$z = (1+i)(3-2i) + \frac{1}{2+i} = 5+i + \frac{2-i}{5} = \frac{27+4i}{5} \Rightarrow \bar{z} = \frac{17}{5} + \frac{4}{5}i.$$

Câu 101. Tìm cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện

$$(2x-4y+1) + (x-3y)i = (4x+2y+3) + (3x-y+5)i.$$

- A. $\left(\frac{-13}{4}; \frac{3}{4}\right)$. B. $\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. C. $\left(\frac{11}{4}; -\frac{9}{4}\right)$. D. $\left(\frac{-43}{4}; \frac{9}{4}\right)$.

Lời giải tham khảo

$$(2x-4y+1) + (x-3y)i = (4x+2y+3) + (3x-y+5)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y+1=4x+2y+3 \\ x-3y=3x-y+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-6y=2 \\ -2x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{13}{4} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Câu 102. Tìm số phức z thỏa mãn $(2+i)z = (3-2i)\bar{z} - 4(1-i)$.

- A. $z = 3-i$. B. $z = -3-i$. C. $z = 3+i$. D. $z = -3+i$.

Lời giải tham khảo

$$(2+i)z = (3-2i)\bar{z} - 4(1-i) \Leftrightarrow (2+i)(a+bi) = (3-2i)(a-bi) - 4(1-i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+5b-4=0 \\ a-b-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Câu 103. Tìm số phức z thỏa mãn $\frac{1-2i}{1+i}z = \frac{1-3i}{2-3i}$.

- A. $z = \frac{-2}{65} + \frac{36}{65}i$. B. $z = \frac{-2}{65} + \frac{20}{65}i$.
C. $z = \frac{-30}{65} + \frac{36}{65}i$. D. $z = \frac{2}{65} + \frac{36}{65}i$.

Lời giải tham khảo

$$\frac{1-2i}{1+i}z = \frac{1-3i}{2-3i} \Leftrightarrow z = \frac{(1-3i)(1+i)}{(2-3i)(1-2i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4-2i}{-4-7i} \Leftrightarrow z = \frac{-2}{65} + \frac{36}{65}i$$

Câu 104. Cho số phức $z = 2+3i$. Tìm số phức $w = iz - \bar{z}$.

- A. $w = -3+5i$. B. $w = 5+3i$. C. $w = -5+5i$. D. $w = 5-5i$.

Lời giải tham khảo

$$w = iz - \bar{z} = i(2+3i) - (2-3i) = -5+5i.$$

Câu 105. Cho số phức $z = 1+2i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

- A. $w = 1+i$. B. $w = -1+i$. C. $w = -1-i$. D. $w = 1-i$.

4A. Tính toán với số phức

Lời giải tham khảo

Cho số phức $z = 1 + 2i$. Số phức $w = iz + \bar{z}$ là
 $w = iz + \bar{z} = i(1 + 2i) + 1 - 2i = -1 - i$.

Câu 106. Cho số phức $\bar{z} = 3 + 2i$. Tìm số phức $w = 2i\bar{z} + z$.

A. $w = -1 + 4i$.

B. $w = 9 - 2i$.

C. $w = 4 + 7i$.

D. $w = 4 - 7i$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\bar{z} = 3 + 2i \Rightarrow z = 3 - 2i \Rightarrow w = 2i\bar{z} + z = (3 + 2i)2i + 3 - 2i = -1 + 4i$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 107. Cho số phức $z = 5 + 2i$. Tìm số phức $w = i\bar{z} - z$.

A. $w = 3 - 3i$.

B. $w = 3 + 3i$.

C. $w = -3 + 3i$.

D. $w = -3 - 3i$.

Câu 108. Cho số phức $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.

A. $w = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$.

B. $w = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$.

C. $w = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

D. $w = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$.

Câu 109. Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.

A. $w = 2$.

B. $w = -2$.

C. $w = 0$.

D. $w = 3$.

Câu 110. Tìm phần ảo b của số phức $w = 1 - zi + \bar{z}$, biết $(1 + i)\bar{z} - 1 - 3i = 0$.

A. $b = -1$.

B. $b = 2$.

C. $b = 1$.

D. $b = -2$.

4A. Tính toán với số phức

Câu 111. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tìm số phức $w = (1+z)\bar{z}$.

- A. $w = 3+i$. B. $w = -\frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{11}{\sqrt{13}}i$. C. $w = -\frac{3}{13} - \frac{11}{13}i$. D. $w = 3-i$.

.....
.....
.....
.....

Câu 112. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$. Tìm số phức $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$.

- A. $w = -1+3i$. B. $w = -1-i$. C. $w = i$. D. $w = 1+3i$.

.....
.....
.....
.....

Câu 113. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z - (2-i)\bar{z} = 3$. Tìm số phức $w = \frac{i-2z}{1-i}$.

- A. $w = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i$. B. $w = -3+2i$. C. $w = \frac{11}{2} + \frac{3}{2}i$. D. $w = \frac{3}{2} + \frac{9}{2}i$.

.....
.....
.....
.....

Câu 114. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{1-2i} + \bar{z} = 2$. Tìm số phức $w = z^2 - z$.

- A. $w = 3+5i$. B. $w = 3+3i$. C. $w = 1+5i$. D. $w = 1+3i$.

.....
.....
.....
.....

Câu 115. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

- A. $z = 1 \pm i$ hoặc $z = -1 \pm i$. B. $z = 1 \pm i$.
C. $z = -1 \pm i$. D. $z = -1 - i$.

.....
.....
.....
.....

Câu 116. Tìm số phức z thỏa mãn $|z| + z = 3+4i$.

- A. $z = -\frac{7}{6} + 4i$. B. $z = -7+4i$. C. $z = -7+6i$. D. $z = 7+6i$.

4A. Tính toán với số phức

Câu 117. Tìm số phức z thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$.

A. $z = 3 + 4i$ và $z = 5$.

B. $z = 3 - 4i$ và $z = 5$.

C. $z = 4 - 3i$ và $z = -5$.

D. $z = 4 + 3i$ và $z = 5$.

Câu 118. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 119. Tìm phần thực a của số phức $z = (1 + i)^{2016}$.

A. $a = 2^{1008}$.

B. $a = -2^{1008}$.

C. $a = 0$.

D. $a = 1$.

Câu 120. Tính $P = i \cdot (1 + i)^{2016}$.

A. $P = 2^{1008}$.

B. $P = -2^{1008}$.

C. $P = 2^{1008}$.

D. $P = -2^{1008}$.

Câu 121. Cho số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Tính $P = z \cdot z^7 \cdot z^{15}$.

A. $P = -i$.

B. $P = i$.

C. $P = 1$.

D. $P = -1$.

Câu 122. Tổng tổng $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2009}$.

A. $S = 1 + i$.

B. $S = 1 - i$.

C. $S = 1$.

D. $S = i$.

4A. Tính toán với số phức

Câu 123. Tìm phần thực a của số phức $(1+i)^{30}$.

A. $a = 0$.

B. $a = 1$.

C. $a = 2^{15}$.

D. $a = -2^{15}$.

Câu 124. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $z + 2i\bar{z} = 3 + 3i$. Tính $S = a^{2016} + b^{2017}$.

A. $S = 0$.

B. $S = 2$.

C. $S = \frac{3^{4032} - 3^{2017}}{5^{2017}}$.

D. $S = -\left(\frac{3^{4032} - 3^{2017}}{5^{2017}}\right)$.

Câu 125. Tìm phần thực a của số phức $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20}$.

A. $a = -2^{10} - 1$.

B. $a = -2^{10}$.

C. $a = 2^{10} + 1$.

D. $a = 2^{10} - 1$.

Câu 126. Cho số phức $z = \frac{1-m}{1-m(m-2i)}$ ($m \in \mathbb{R}$). Tìm giá trị thực của m để $z\bar{z} = \frac{1}{4}$.

A. $m = 1 \pm \sqrt{2}$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = -1 \pm \sqrt{2}$.

D. $m = 0$.

Câu 127. Cho số phức $z = 1 + mi$. Tìm giá trị thực của m để z^3 là một số thực.

A. $m = 0; m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $m = 0; m = \sqrt{3}$.

C. $m = 0; m = -\sqrt{3}$.

D. $m = 0; m = \pm \sqrt{3}$.

Câu 128. Cho $(x + 2i)^2 = 3x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Tìm giá trị của x và y .

A. $x = 1$ và $y = 2$ hoặc $x = 2$ và $y = 4$.

B. $x = -1$ và $y = -4$ hoặc $x = 4$ và $y = 16$.

4A. Tính toán với số phứcC. $x = 2$ và $y = 5$ hoặc $x = 3$ và $y = -4$.D. $x = 6$ và $y = 1$ hoặc $x = 0$ và $y = 4$.

.....

.....

.....

.....

Câu 129. Cho $(x + 2i)^2 = yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Tìm giá trị của x và y .A. $x = 1$ và $y = 4$ hoặc $x = -1$ và $y = -4$.B. $x = 3$ và $y = 12$ hoặc $x = -3$ và $y = -12$.C. $x = 2$ và $y = 8$ hoặc $x = -2$ và $y = -8$.D. $x = 4$ và $y = 16$ hoặc $x = -4$ và $y = -16$.

.....

.....

.....

.....

Câu 130. Cho hai số phức $z_1 = 1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + 2i$ thỏa $z_1 + z_2 = 2 + 5i$. Tìm z_1, z_2 .A. $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 + 2i$.B. $z_1 = 1 - 3i, z_2 = 1 + i$.C. $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 1 + 2i$.D. $z_1 = 2i, z_2 = -2 + i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 131. Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$ thỏa $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 4i \\ z_1 - z_2 = -1 \end{cases}$. Tìm z_1, z_2 .A. $z_1 = 2i, z_2 = 1 + i$.B. $z_1 = 3i, z_2 = 1 + i$.C. $z_1 = 2i, z_2 = 1 + 2i$.D. $z_1 = i, z_2 = 2 + i$.

.....

.....

.....

.....

Câu 132. Cho hai số phức $z_1 = a_1 + 2i, z_2 = a_2 + i$ và $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 3i \\ z_1 - z_2 = -1 + i \end{cases}$. Tìm z_1, z_2 .A. $z_1 = 2i, z_2 = 1 + i$.B. $z_1 = 3i, z_2 = 1 + i$.C. $z_1 = 2i, z_2 = 1 + 2i$.D. $z_1 = i, z_2 = 2 + i$.

.....

.....

.....

.....

4B. TẬP HỢP ĐIỂM – BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

✎ Dạng 59. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức

Câu 1. Cho số phức $z = i(i-1)(i+2)$. Tìm điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M(-1; 3)$. B. $M(-1; -3)$. C. $M(1; -3)$. D. $M(1; 3)$.

Lời giải tham khảo

$$z = i(i-1)(i+2) = i(i^2 + i - 2) = -1 - 3i$$

$$\Rightarrow M(-1; -3)$$

Câu 2. Cho số phức $z = -2i - 1$. Tìm điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M(-1; 2)$. B. $M(-1; -2)$. C. $M(-2; 1)$. D. $M(2; -1)$.

Lời giải tham khảo

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = -1 + 2i$ nên $\bar{z}$ có phần thực là -1 , phần ảo là 2 .

Vậy điểm biểu diễn là $M(-1; 2)$.

Câu 3. Cho số phức $z = 3 + i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $\frac{1}{z}$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$. C. $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải tham khảo

Ta có : $z = 1 + 3i \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right).$$

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z + 4 - 2i = 0$. Tìm điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M(-3; -1)$. B. $M(-3; 1)$. C. $M(3; -1)$. D. $M(3; 1)$.

Lời giải tham khảo

Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z + 4 - 2i = 0$. Điểm biểu diễn của z có tọa độ là

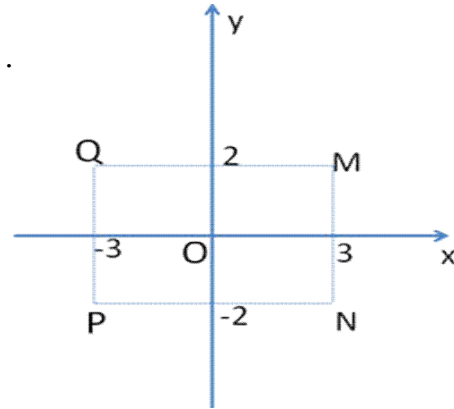
$$(1-i)z + 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow (1-i)z = -4 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{-4+2i}{1-i} \Leftrightarrow z = -3 - i.$$

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z = 5 - i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?

- A. Điểm N . B. Điểm M . C. Điểm P . D. Điểm Q .

Lời giải tham khảo

Ta có: $(1-i)z = 5-i \Leftrightarrow z = \frac{5-i}{1-i} = 3+2i \Rightarrow M(3;2)$.



Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $(1-4i)z = 5i - 2z$. Tìm điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M\left(\frac{-4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. B. $M\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. C. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. D. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{-4}{5}\right)$.

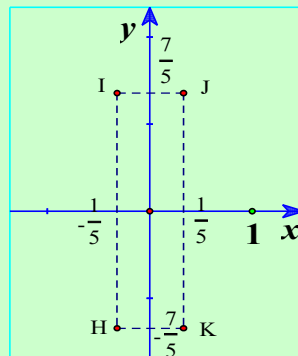
Lời giải tham khảo

$$(1-4i)z = 5i - 2z \Leftrightarrow (1-4i)z + 2z = 5i \Leftrightarrow (1-4i+2)z = 5i \Leftrightarrow (3-4i)z = 5i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{5i}{3-4i} = \frac{5i(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{15i-20}{25} = \frac{3i-4}{5} = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i \Rightarrow \left(\frac{-4}{5}; \frac{3}{5}\right).$$

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)z = 3+i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm I, J, K, H ở hình bên?

- A. Điểm K .
C. Điểm I .



- B. Điểm H .
D. Điểm J .

Lời giải tham khảo

$$(1-2i)z = 3+i \Rightarrow z = \frac{3+i}{1-2i} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i.$$

Điểm biểu diễn là $J\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

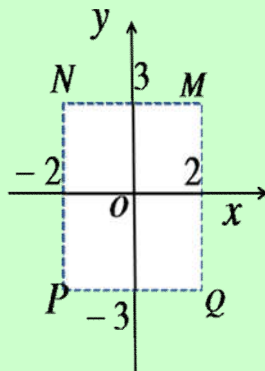
Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(4-i)z = 3-4i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M\left(\frac{16}{15}; -\frac{11}{15}\right)$. B. $M\left(\frac{16}{17}; -\frac{13}{17}\right)$. C. $M\left(\frac{9}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. D. $M\left(\frac{9}{25}; -\frac{23}{25}\right)$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } (4-i)z = 3-4i \Rightarrow z = \frac{3-4i}{4-i} = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i \Rightarrow M\left(\frac{16}{17}; -\frac{13}{17}\right)$$

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z = 8+i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình dưới đây?



- A. Điểm P . B. Điểm Q . C. Điểm M . D. Điểm N .

Lời giải tham khảo

Ta có : $(1+2i)z = 8+i \Leftrightarrow z = \frac{8+i}{2i+1} = \frac{(8+i)(1-2i)}{5} = 2-3i$

Vậy z được biểu diễn bởi điểm $(2; -3)$, suy ra $Q(2; -3)$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 14-2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M(6; 8)$. B. $M(8; 6)$. C. $M(-8; 6)$. D. $M(6; -8)$.

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết $(1+i)z = 14-2i$ suy ra $z = \frac{14-2i}{1+i} = \frac{(14-2i)(1-i)}{2} = 6-8i$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của $z = 6-8i$ trong mp tọa độ Oxy suy ra $M(6; -8)$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = (1-2i)^2$. Tìm điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B. $M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. C. $M\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$. D. $M\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải tham khảo

$$z = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$$

Câu 12. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 3+2i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z' = 2+3i$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.
 B. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .
 C. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục tung.
 D. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục hoành.

Lời giải tham khảo

Ta có $z = 3+2i \Rightarrow A(3; 2)$; $z' = 2+3i \Rightarrow B(2; 3)$. Gọi I là trung điểm của AB

Lúc đó : $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$; $I\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases}$

4B. Tập hợp điểm – Biểu diễn số phức

Với (d): $y = x$ và I là trung điểm của $AB \Rightarrow A$ và B đối xứng nhau qua (d).

Câu 13. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 1 + 2i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z' = -1 + 2i$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục hoành.
- B. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục tung.
- C. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .
- D. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Lời giải tham khảo

Vì $A(1; 2); B(-1; 2)$. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục tung.

Câu 14. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + 5i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z' = -2 + 5i$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành.
- B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung.
- C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O .
- D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\begin{cases} x_B = -x_A \\ y_B = y_A \end{cases}$ nên hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung.

Câu 15. Gọi A là điểm biểu diễn số phức z , B là điểm biểu diễn số phức $-z$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

- A. A và B đối xứng nhau qua trục hoành.
- B. A và B trùng gốc tọa độ khi $z = 0$.
- C. A và B đối xứng qua gốc tọa độ.
- D. Đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ.

Lời giải tham khảo

Giả sử $A(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức z thì $B(-a; -b)$ là điểm biểu diễn số phức $-z \Rightarrow A$ và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Câu 16. Cho các số phức $z_1 = \frac{4i}{i-1}$; $z_2 = (1-i)(1+2i)$; $z_3 = \frac{2+6i}{3-i}$. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3 . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- B. Tam giác ABC là tam giác vuông.
- C. Tam giác ABC là tam giác cân.
- D. Tam giác ABC là tam giác vuông cân.

Lời giải tham khảo

$$\text{Vì } z_1 = \frac{4i}{i-1} = 2 - 2i \Rightarrow A(2; -2),$$

$$z_2 = (1-i)(1+2i) = 3 + i \Rightarrow B(3; 1)$$

$$z_3 = \frac{2+6i}{3-i} = 2i \Rightarrow C(0; 2)$$

Ta có: $AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{20}$; $BC = \sqrt{10}$ nên $AC^2 = AB^2 + BC^2$ suy ra tam giác ABC vuông tại B .

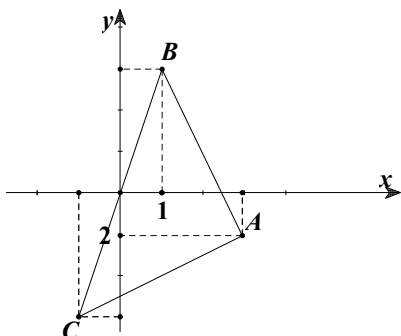
Câu 17. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức

$$z_1 = (1 - i)(2 + i); z_2 = 1 + 3i; z_3 = -1 - 3i. \text{ Mệnh đề nào dưới đây là đúng?}$$

- A. Tam giác ABC cân. B. Tam giác ABC đều.
C. Tam giác ABC vuông. D. Tam giác ABC vuông cân.

Lời giải tham khảo

$z_1 = 3 - i; z_2 = 1 + 3i; z_3 = -1 - 3i$. Khi đó $A(3; -1); B(1; 3); C(-1; -3)$. Biểu diễn trên mp ta có: tam giác ABC vuông cân tại A . (Chứng minh bằng tích vô hướng 2 vector hoặc độ dài các cạnh)



Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn cho số phức

$z = 3 - 4i$; M' là điểm biểu diễn cho số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích tam giác OMM' .

- A. $S_{\triangle OMM'} = \frac{25}{4}$. B. $S_{\triangle OMM'} = \frac{25}{2}$. C. $S_{\triangle OMM'} = \frac{15}{4}$. D. $S_{\triangle OMM'} = \frac{15}{2}$.

Lời giải tham khảo

Theo giả thiết, ta có $M(3; -4)$ và $z' = \frac{1+i}{2}z = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(3 - 4i) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$ suy ra

$$M'\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{OM'} = \left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MM'} = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ và $OM' = MM'$ nên tam giác

OMM' vuông cân tại M' . Diện tích tam giác OMM' là

$$S_{\triangle OMM'} = \frac{1}{2} \cdot OM' \cdot MM' = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} \right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Câu 19. Phương trình $x^2 - 2x + b = 0$ có hai nghiệm phức được biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi hai điểm A, B . Tính giá trị b để tam giác OAB đều.

- A. $b = \frac{4}{3}$. B. $b = 3$. C. $b = \frac{1}{3}$. D. $b = 4$.

Lời giải tham khảo

Tính $\Delta = 1 - b$.

Vì pt có 2 nghiệm phức nên $b > 1$.

4B. Tập hợp điểm – Biểu diễn số phức

Khi đó pt có nghiệm
$$\begin{cases} x = 1 - i\sqrt{1-b} \\ x = 1 + i\sqrt{1-b} \end{cases}$$

Các điểm biểu diễn là $A(1; -\sqrt{1-b})$, $B(1; \sqrt{1-b})$

Tam giác OAB đều nên $OA = OB = AB \Rightarrow b = \frac{4}{3}$.

Câu 20. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thỏa $|z - 2i| < 3$.

- A. Đường tròn bán kính $r = 3$.
- B. Hình tròn bán kính $r = 3$ không kể đường tròn bán kính $r = 3$.
- C. Đường tròn bán kính $r = 9$.
- D. Hình tròn bán kính $r = 9$.

Lời giải tham khảo

$$a^2 + (b - 2)^2 < 9.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 21. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z có phần thực dương thỏa mãn $|z| \leq 2$.

- A. Đường tròn $(O; 2)$.
- B. Hình tròn $(O; 2)$.
- C. Nửa hình tròn $(O; 2)$ nằm bên trái trục tung.
- D. Nửa hình tròn $(O; 2)$ nằm bên phải trục tung.

.....	
.....	
.....	
.....	

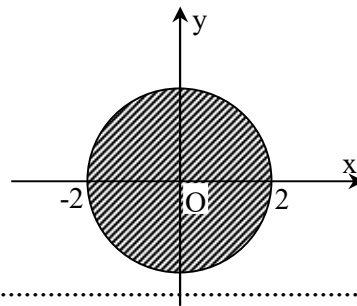
Câu 22. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn: $1 < |z| < 3$.

- A. Phần hình phẳng nằm hoàn toàn phía ngoài hình tròn $(O; 1)$ và phía trong hình tròn $(O; 3)$.
- B. Hình tròn $(O; 3)$ (bỏ gốc tọa độ O).
- C. Hình tròn $(O; 1)$ (bỏ gốc tọa độ O).
- D. Đường tròn $(O; 1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	

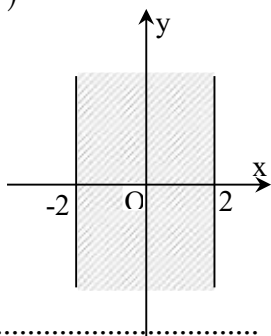
Câu 23. Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Tìm điều kiện của a và b để điểm biểu diễn của z như hình bên.

- A. $a + b = 4$. B. $2a + 2b > 4$.
C. $a^2 + b^2 = 4$. D. $a^2 + b^2 < 4$.



Câu 24. Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Tìm điều kiện của a và b để điểm biểu diễn của z nằm trong dải $(-2; 2)$ như hình bên.

- A. $\begin{cases} a \geq 2 \\ b \geq 2 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} a \leq -2 \\ b \leq -2 \end{cases}$.



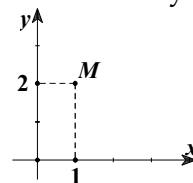
- B. $-2 < a < 2$ và $b \in \mathbb{R}$.
D. $a, b \in (-2; 2)$.

Câu 25. Cho số phức $z = a + ai$ với $a \in \mathbb{R}$. Phương trình nào trong các phương trình đường thẳng sau chứa các điểm biểu diễn các số phức z ?

- A. $y = 2x$. B. $y = -x$. C. $y = x + 1$. D. $y = x$.

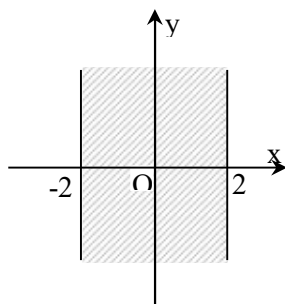
Câu 26. Điểm M trên hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- A. $(1 + i)z = 3 - i$. B. $(1 - i)z = 3 - i$.
C. $(1 - i)z = 3 + i$. D. $(1 + i)z = 3 + i$.



4B. Tập hợp điểm – Biểu diễn số phức

Câu 27. Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Tìm điều kiện của a và b để điểm biểu diễn của z như hình bên.

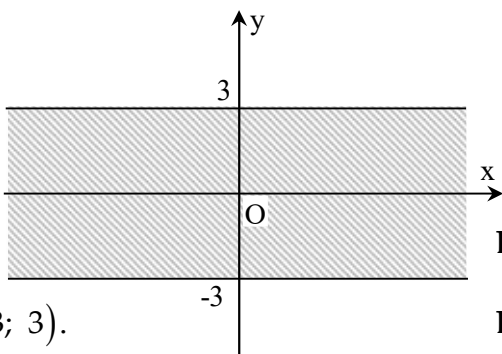


A. $\begin{cases} a \geq 2 \\ b \geq 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a \leq -2 \\ b \leq -2 \end{cases}$.

C. $-2 < a < 2$ và $b \in \mathbb{R}$. D. $a, b \in (-2; 2)$.

Câu 28. Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Tìm điều kiện của a và b để điểm biểu diễn của z như hình bên.



A. $\begin{cases} a \geq 3 \\ b \geq 3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a \leq -3 \\ b \leq -3 \end{cases}$.

C. $a, b \in (-3; 3)$.

D. $a \in \mathbb{R}$ và $-3 < b < 3$.

Câu 29. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện z^2 là số ảo.

A. Trục ảo.

B. Trục thực.

C. Hai đường phân giác $y = x$ và $y = -x$ của các góc tọa độ.

D. Đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

Câu 30. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số phức z thỏa mãn điều kiện z^2 là một số thực dương.

A. Trục hoành (trừ gốc tọa độ O).

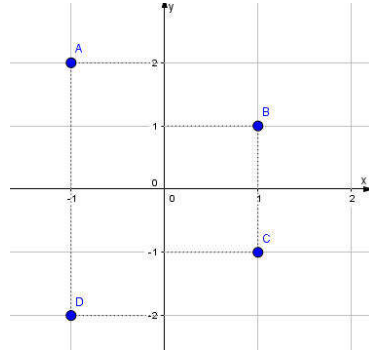
B. Trục tung (trừ gốc tọa độ O).

4B. Tập hợp điểm – Biểu diễn số phức

C. Đường thẳng $y = x$ (trừ gốc toạ độ O).

D. Đường thẳng $y = -x$ (trừ gốc toạ độ O).

Câu 31. Cho số phức $z = -1 + 2i$. Điểm biểu diễn của số phức z là điểm nào trong hình sau?



A. Điểm A .

B. Điểm B .

C. Điểm C .

D. Điểm D .

Câu 32. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$.

B. $r = 8$.

C. $r = 2$.

D. $r = 16$.

Câu 33. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\bar{z} - 4 + 3i| = 2$ là một đường tròn. Tìm tâm I và tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(4; 3)$, $R = 2$. B. $I(4; -3)$, $R = 4$. C. $I(-4; 3)$, $R = 4$. D. $I(4; -3)$, $R = 2$.

4B. Tập hợp điểm – Biểu diễn số phức

Câu 34. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

- A. Đường tròn tâm $I(3; 4)$ bán kính $R = \sqrt{2}$.
- B. Đường tròn tâm $I(3; 4)$ bán kính $R = 2$.
- C. Đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = \sqrt{2}$.
- D. Đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = 2z - i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r = 2$.
- B. $r = 1$.
- C. $r = -2$.
- D. $r = 4$.

Câu 36. Cho số phức z thỏa $|z - 1 + i| = 2$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng.
- B. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường Parabol.
- C. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng 2.
- D. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng 4.

Câu 37. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z} + 5| = 6$ là đường thẳng có phương trình nào trong các phương trình sau?

- A. $x = \frac{1}{2}$.
- B. $x = \pm \frac{1}{2}$.
- C. $y = \frac{1}{2}$.
- D. $y = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 38. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i| = 3$ là đường thẳng có phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $x^2 + (y - 1)^2 = 9$.

B. $x^2 + (y + 1)^2 = 9$.

C. $(x - 1)^2 + y = 9$.

D. $x^2 + (y + 1)^2 = 3$.

Câu 39. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = 4$.

A. Một đường thẳng.

B. Một đường tròn.

C. Một hình chữ nhật.

D. Một hình vuông.

Câu 40. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z , thỏa mãn: $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$.

A. Đường cong $y = \frac{-1}{x}$.

B. Đường cong $y = \frac{1}{x}$.

C. Đường cong $y = \frac{1}{x}$ và đường cong $y = \frac{-1}{x}$.

D. Đường cong $y = \frac{1}{x}$ hoặc đường cong $y = \frac{-1}{x}$.

Câu 41. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn các số phức z thỏa $|(1 + i)z - 2i| = \sqrt{2}$.

A. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

B. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

D. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

4B. Tập hợp điểm – Biểu diễn số phức

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $2|z + 2 - 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z .

A. Đường thẳng $12x + 32y + 47 = 0$.

B. Đường thẳng $12x - 32y + 47 = 0$.

C. Đường thẳng $12x - 32y - 47 = 0$.

D. Đường thẳng $12x + 32y - 47 = 0$.

Câu 43. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp tất cả các điểm M trong biểu diễn các số phức thỏa $|z| = |\overline{z - 3 + 4i}|$.

A. $2x - 3 = 0$.

B. Đường thẳng $6x - 8y - 25 = 0$.

C. Đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$.

D. Đường thẳng $y - 2 = 0$.

Câu 44. Trong mp tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|z - i| = |(1 + i)z|$.

A. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(2, -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

B. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(0, 1)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

C. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(0, -1)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

D. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(0, -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa $|2 + z| = |1 - z|$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng.
- B. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường Parabol.
- C. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn.
- D. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường Elip.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 46. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z}{z-i} \right| = 3$.

- A. Đường tròn tâm $I\left(\frac{9}{8}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{3}{8}$.
- B. Đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ bán kính $R = \frac{9}{64}$.
- C. Đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ bán kính $R = \frac{3}{8}$.
- D. Đường tròn tâm $I\left(0; -\frac{9}{8}\right)$ bán kính $R = \frac{3}{8}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 47. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn: $z^2 = (\bar{z})^2$.

- A. Trục Ox và trục Oy .
- B. Trục Ox .
- C. Trục Oy .
- D. Không có điểm M .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 48. Trong mặt phẳng phức Oxy , cho số phức z thỏa lần lượt một trong bốn điều kiện (I): $|z + \bar{z}| = 2$; (II): $z \cdot \bar{z} = 5$; (III): $|z - 2i| = 4$, (IV): $|i(z - 4i)| = 3$. Hỏi điều kiện nào để số phức z có tập hợp biểu diễn là đường thẳng?

- A. (I).
- B. (I), (II).
- C. (I), (IV).
- D. (II), (III), (IV).

4B. Tập hợp điểm – Biểu diễn số phức

Câu 49. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1.$$

A. Điểm $O(0;0)$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$.

C. Trục Oy .

D. Trục Ox .

Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$ và $w=2z+1-i$. Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn. Tính tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(3;-4), R=2$.

B. $I(4;-5), R=4$.

C. $I(5;-7), R=4$.

D. $I(7;-9), R=4$.

Câu 51. Cho số phức $z=3+bi; (b \in \mathbb{R})$. Phương trình nào dưới đây biểu là phương trình đường thẳng biểu diễn các số phức z trong mặt phẳng phức.

A. $x=3$.

B. $y=3$.

C. $x=b$.

D. $y=b$.

4B. Tập hợp điểm – Biểu diễn số phức

Câu 52. Các điểm biểu diễn của số thuần ảo nằm ở đâu trên mặt phẳng tọa độ?

A. Ox .

B. Oy .

C. O .

D. Ox và Oy .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 53. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức z .

A. $M(2; 3)$.

B. $M(-2; -3)$.

C. $M(2; -3)$.

D. $M(-2; 3)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 54. Gọi M là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức. Số $-z$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm sau?

A. Đối xứng với M qua O .

B. Đối xứng với M qua Oy .

C. Đối xứng với M qua Ox .

D. Không xác định được.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

4C. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM PHỨC

🔗 **Dạng 60. Bài toán liên quan phương trình nghiệm phức**

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $(2-i)\bar{z} - 4 = 0$ trên tập số phức.

- A. $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$. B. $z = \frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$. C. $z = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$. D. $z = \frac{7}{5} - \frac{3}{5}i$.

Lời giải tham khảo

Ta có phương trình tương đương $\bar{z} = \frac{4}{2-i} = \frac{4(2+i)}{5} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i \Rightarrow z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$.

Câu 2. Tìm nghiệm của phương trình $(i+z)(\bar{z} - 2 + 3i) = 0$ trên tập số phức.

- A. $\begin{cases} z = i \\ z = 2 - 3i \end{cases}$. B. $\begin{cases} z = 2i \\ z = 5 + 3i \end{cases}$. C. $\begin{cases} z = -i \\ z = 2 + 3i \end{cases}$. D. $\begin{cases} z = 3i \\ z = 2 - 5i \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Trong C, ta có $(i+z)(\bar{z} - 2 + 3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (i+z) = 0 \\ a-bi - 2 + 3i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ a = 2, b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = 2 + 3i \end{cases}$.

Câu 3. Tìm tập nghiệm phức S của phương trình $z^2 + |z| = 0$.

- A. $S = \{0; -1; -i\}$. B. $S = \{0; -1; i\}$. C. $S = \{0; 1; -i\}$. D. $S = \{0; i; -i\}$.

Lời giải tham khảo

Gọi $z = x + yi$ thay vào phương trình tìm x, y , suy ra $S = \{0; i; -i\}$.

Câu 4. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 + \bar{z} = 0$ trên tập số phức.

- A. $z_1 = 0; z_2 = -1; z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
 B. $z_1 = 0; z_2 = 1; z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
 C. $z_1 = 0; z_2 = -1; z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
 D. $z_1 = 0; z_2 = -1; z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải tham khảo

Gọi $z = x + yi$, thay vào phương trình x, y suy ra: $z = 0, z = -1, z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình $z(2-i) = 5(3-2i)$ trên tập số phức.

- A. $z = 8 - i$. B. $z = 8 + i$. C. $z = -8 - i$. D. $z = -8 + i$.

Lời giải tham khảo

$$z = \frac{(15-10i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{30+15i-20i-10i^2}{5} = \frac{40-5i}{5} = 8-i.$$

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 6. Tìm các số phức z thỏa mãn $z^2 = 3 + 4i$.

A. $z_1 = 2 + i; z_2 = -2 - i$.

B. $z_1 = 2 + i; z_2 = -2 + i$.

C. $z_1 = 2 - i; z_2 = -2 - i$.

D. $z_1 = 2 - i; z_2 = -2 + i$.

Lời giải tham khảo

$$z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2; b = 1 \\ a = -2; b = -1 \end{cases}$$

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$ trên tập số phức.

A. $z = 2i$ hoặc $z = -2i$.

B. $z = 2$.

C. $z = 2i$.

D. $z = 2$.

Lời giải tham khảo

Ta có $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z + 2i)(z - 2i) = 0 \Leftrightarrow z = -2i$ hoặc $z = 2i$.

Câu 8. Số nghiệm thực của phương trình $z^2 + 3z + 5 = 0$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải tham khảo

Tính $\Delta = -11 < 0$

Vậy phương trình không có nghiệm thực.

Câu 9. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$ trên tập số phức.

A. $\begin{cases} z = 1 - i\sqrt{3} \\ z = 1 + i\sqrt{3} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} z = -1 - i\sqrt{3} \\ z = -1 + i\sqrt{3} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} z = 1 - i\sqrt{2} \\ z = 1 + i\sqrt{2} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} z = 2 - i\sqrt{3} \\ z = 2 + i\sqrt{3} \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Tính $\Delta' = -3$. Vậy phương trình có 2 nghiệm phức $\begin{cases} z = 1 - i\sqrt{3} \\ z = 1 + i\sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ trên tập số phức.

A. ± 1 .

B. $\pm i$.

C. $-1 \pm i$.

D. $1 \pm i$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\Delta = 4 - 8 = -4$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phức là: $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.

Câu 11. Giải phương trình $2x^2 + 3x + 5 = 0$ trên tập số phức. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình có 2 nghiệm phức.

B. Phương trình có 2 nghiệm thực.

C. Phương trình có một nghiệm thực và một nghiệm phức.

D. Phương trình vô nghiệm.

Lời giải tham khảo

Tính $\Delta = -31$. Vậy phương trình có 2 nghiệm phức.

Câu 12. Số nghiệm phức của phương trình $5z^2 - 7z + 11 = 0$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải tham khảo

4C. Phương trình nghiệm phức

Tính $\Delta' = -171$. Vậy phương trình có 2 nghiệm phức

$$\begin{cases} z = \frac{7}{10} - \frac{3\sqrt{19}}{10}i \\ z = \frac{7}{10} + \frac{3\sqrt{19}}{10}i \end{cases}$$
Câu 13. Phương trình nào dưới đây có nghiệm thực?

- A. $z^2 - 3z - 4 = 0$. B. $z^2 + 6z + 10 = 0$. C. $2z^2 + 2z + 3 = 0$. D. $z^2 - z = -3$.

Lời giải tham khảo

- A. Có $\Delta = 25 > 0$. Suy ra phương trình có nghiệm thực.
 B. Có $\Delta = -4 < 0$. Suy ra phương trình có nghiệm phức.
 C. Có $\Delta = -20 < 0$. Suy ra phương trình có nghiệm phức.
 D. Có $\Delta = -11 < 0$. Suy ra phương trình có nghiệm phức.

Câu 14. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i$ trên tập số phức.

- A. $\begin{cases} z = 1 + 2i \\ z = 3 + i \end{cases}$. B. $\begin{cases} z = 1 - 2i \\ z = 3 - i \end{cases}$. C. $\begin{cases} z = -1 + 2i \\ z = -3 + i \end{cases}$. D. $\begin{cases} z = 1 + 3i \\ z = 3 + 2i \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Phương trình tương đương $z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 7i = 0$

Tính $\Delta = 3 - 4i \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \begin{cases} 2 - i \\ -2 + i \end{cases}$

Suy ra nghiệm của phương trình là $z_1 = 1 + 2i; z_2 = 3 + i$.

Câu 15. Tìm nghiệm của phương trình $z^3 + 8 = 0$ trên tập số phức.

- A. $z_1 = -2; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = 1 - \sqrt{3}i$. B. $z_1 = -2; z_2 = -1 + \sqrt{3}i; z_3 = 1 - \sqrt{3}i$.
 C. $z_1 = -2; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = -1 - \sqrt{3}i$. D. $z_1 = -2; z_2 = -1 + \sqrt{3}i; z_3 = -1 - \sqrt{3}i$.

Lời giải tham khảo

$$z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (z + 2)(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ z = 1 + \sqrt{3}i \\ z = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

Câu 16. Số nghiệm phức của phương trình $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải tham khảo

$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ z = \pm i \end{cases}. \text{ Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm phức.}$$

Câu 17. Tìm tập nghiệm phức S của phương trình $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0$.

- A. $S = \{3; 3 + 2\sqrt{3}i; -3 - 2\sqrt{3}i\}$. B. $S = \{3; -3 + 2\sqrt{3}i; -3 - 2\sqrt{3}i\}$.
 C. $S = \{3; -3 + 2\sqrt{3}i; 3 - 2\sqrt{3}i\}$. D. $S = \{3; 3 - 2\sqrt{3}i; -3 - 2\sqrt{3}i\}$.

Lời giải tham khảo

4C. Phương trình nghiệm phức

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z^2 + 6z + 21) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = -3 + 2\sqrt{3}i \\ z = -3 - 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

Câu 18. Tìm nghiệm của phương trình $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ trên tập số phức.

- A. $z = \pm i$. B. $z = \pm i; z = \pm i\sqrt{5}$. C. $z = \pm i\sqrt{5}$. D. Vô nghiệm.

Lời giải tham khảo

Ta có $z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$; $z^2 = -5 \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{5}$

Vậy phương trình có nghiệm $z = \pm i; z = \pm i\sqrt{5}$.

Câu 19. Tìm nghiệm của phương trình $z^4 + z^2 - 6 = 0$ trên tập số phức.

- A. $z = \pm\sqrt{2}; z = \pm i\sqrt{3}$. B. $z = \sqrt{2}; z = i\sqrt{3}$.
C. $z = \pm\sqrt{3}; z = \pm i\sqrt{2}$. D. $z = \pm\sqrt{5}; z = \pm 2i$.

Lời giải tham khảo

Ta có phương trình $z^4 + z^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2 \\ z^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 20. Tìm nghiệm của phương trình $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$ trên tập số phức.

- A. $S = \{-1; -2\}$. B. $S = \{i; i\sqrt{2}\}$. C. $S = \{i; -i; i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải tham khảo

$$z^4 + 3z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -2 = 2i^2 \\ z^2 = -1 = i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm i\sqrt{2} \\ z^2 = \pm i \end{cases}$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 21. Tìm nghiệm của phương trình $3x + (2 + 3i)(1 - 2i) = 5 + 4i$ trên tập số phức.

- A. $x = -1 + \frac{5}{3}i$. B. $x = -3 + 5i$. C. $x = -1 - \frac{5}{3}i$. D. $x = -3 - 5i$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Tìm nghiệm của phương trình $(\sqrt{2} - i\sqrt{3})x + i\sqrt{2} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}i$ trên tập số phức.

- A. $5i$. B. $-5i$. C. i . D. $-i$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 23. Tìm nghiệm của phương trình $2ix + 3 = 5x + 4i$ trên tập số phức.

- A. $\frac{55}{29} + \frac{14}{29}i$. B. $\frac{55}{19} - \frac{14}{19}i$. C. $\frac{55}{29} - \frac{14}{29}i$. D. $\frac{55}{19} + \frac{14}{19}i$.

Câu 24. Cho $z_1 = 1 - 2i$; $z_2 = 1 + 2i$. Phương trình bậc hai với hệ số thực nhận $z_1; z_2$ là phương trình nào trong các phương trình sau?

- A. $z^2 - 2z + 5 = 0$. B. $z^2 + 2z + 5 = 0$.
C. $z^2 - 2z - 5 = 0$. D. $z^2 - 5z + 2 = 0$.

Câu 25. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính

$$P = |z_1| + |z_2|.$$

- A. $P = 3$. B. $P = 6$. C. $P = 18$. D. $P = 4$.

Câu 26. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Tính

$$P = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

- A. $P = 10$. B. $P = 7$. C. $P = 14$. D. $P = 15$.

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 27. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2$.

A. $P = 6$.

B. $P = 5$.

C. $P = 4$.

D. $P = 7$.

Câu 28. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2x^2 + \sqrt{3}x + 3 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2$.

A. $P = -\frac{9}{4}$.

B. $P = \frac{9}{4}$.

C. $P = -\frac{45}{16}$.

D. $P = -\frac{3}{4}$.

Câu 29. Tìm giá trị của tham số phức m để phương trình $z^2 + mz + 3i = 0$ có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = 8$.

A. $m = 3 + i$ hoặc $m = -3 - i$.

B. $m = 3 + i$ hoặc $m = -3 + i$.

C. $m = 3 - i$ hoặc $m = -3 - i$.

D. $m = 3 - i$ hoặc $m = -3 + i$.

Câu 30. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Tính $P = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -\frac{3}{2}$.

C. $P = \frac{3}{2}$.

D. $P = \frac{5}{2}$.

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 31. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $x^2 + \sqrt{2}x + 5 = 0$. Tính

$$P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}.$$

A. $P = -\frac{\sqrt{2}}{5}.$

B. $P = \frac{\sqrt{2}}{5}.$

C. $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$

D. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}.$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 32. Tìm giá trị của tham số phức m để phương trình $z^2 - mz + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -10$.

A. $m = 2 - 2\sqrt{2}i; m = 2 + 2\sqrt{2}i.$

B. $m = 4 - 2\sqrt{3}; m = 4 + 2\sqrt{3}$

C. $m = 1 - 3i; m = 2 + 3i.$

D. $m = 1 - 3i; m = 1 + 3i.$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 33. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - (8 + 3i)z + 13 + 11i = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $P = 39.$

B. $P = 29.$

C. $P = 49.$

D. $P = 19.$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 34. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 4|\overline{z_1}||\overline{z_2}|$.

A. $P = 10.$

B. $P = 20.$

C. $P = -10.$

D. $P = 5.$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 35. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tìm số phức liên hợp của số phức $w = (5 - 2i)(z_1 + z_2)$?

- A. $\bar{w} = 10 + 4i$. B. $\bar{w} = -10 - 4i$. C. $\bar{w} = 10 - 4i$. D. $\bar{w} = -10 + 4i$.

Câu 36. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$. Tính $P = 2|z_1| - |z_2|$

- A. $P = 0$. B. $P = 16$. C. $P = 4$. D. $P = -4$.

Câu 37. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 5 = 0$. Tính $P = z_1 + z_2 + 4$.

- A. $P = 6$. B. $P = 4$. C. $P = 2$. D. $P = 5$.

Câu 38. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 14 = 0$. Tính $P = 2|z_1|^2 - 3|z_2|^2$.

- A. $P = -14$. B. $P = -13$. C. $P = 14$. D. $P = 13$.

Câu 39. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 5z + 10 = 0$, với z_1 có phần ảo dương. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $w = 4z_1 - 2z_2$.

- A. $a = 5; b = \sqrt{15}$. B. $a = -5; b = -\sqrt{15}$.
C. $a = 5; b = -\sqrt{15}$. D. $a = -5; b = \sqrt{15}$.

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 40. Tìm giá trị của tham số phức m để phương trình

$$z^2 - (5 - m + 2i)z + 5 + (m - 1)i = 0$$

có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 - 3z_1.z_2 = -20 + 7i$.

A. 2.

B. 3.

C. -2.

D. 1.

Câu 41. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính

$$P = |z_1 - 1|^2 + |z_2 - 1|^2.$$

A. $P = 25$.

B. $P = \sqrt{5}$.

C. $P = 5$.

D. $P = 2\sqrt{5}$.

Câu 42. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm phức của phương trình $z^3 - 1 = 0$. Tính

$$P = |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

A. $P = 1$.

B. $P = 4$.

C. $P = 2$.

D. $P = 3$.

Câu 43. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + z^2 - 6 = 0$. Tính

$$P = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|.$$

A. $P = 1$.

B. $P = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.

C. $P = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

D. $P = 7$.

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 44. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - 2z^2 - 63 = 0$.

Tính $P = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

- A. $P = 6$. B. $P = 2\sqrt{7}$. C. $P = 3 + 2\sqrt{7}$. D. $P = 6 + 2\sqrt{7}$.

Câu 45. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 4z^2 - 77 = 0$.

Tính $P = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

- A. $P = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{11}$. B. $P = 2\sqrt{7} - 2\sqrt{11}$. C. $P = 2\sqrt{7}$. D. $P = 2\sqrt{11}$.

Câu 46. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 6 = 0$. Tính

$P = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

- A. $P = 4$. B. $P = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$. C. $P = 2\sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Câu 47. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính

$P = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

- A. $P = 4$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 4 + 2\sqrt{3}$. D. $P = 2 + 2\sqrt{3}$.

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 48. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 8 = 0$, với z_1 có phần ảo là số âm. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $w = z_1 + 2z_2 - 3 + 4i$.

A. $a = -\frac{3}{4}, b = \frac{16 + 3\sqrt{55}}{4}$.

B. $a = \frac{3}{4}, b = \frac{16 + 3\sqrt{55}}{4}$.

C. $a = -\frac{3}{4}, b = \frac{16 - 3\sqrt{55}}{4}$.

D. $a = \frac{3}{4}, b = \frac{16 - 3\sqrt{55}}{4}$.

Câu 49. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính

$$P = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

A. $P = 100$.

B. $P = 10$.

C. $P = 20$.

D. $P = 17$.

Câu 50. Số nghiệm phức của phương trình $z^3 = 8$ thỏa mãn phần ảo $b < 0$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 51. Tìm nghiệm của phương trình $2x^2 - 5x + 4 = 0$ trên tập số phức.

A. $x_1 = \frac{-5}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; x_2 = \frac{-5}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

B. $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

C. $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; x_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

D. $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; x_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

4C. Phương trình nghiệm phức

Câu 52. Tìm nghiệm của phương trình $2z^2 + 3z + 4 = 0$ trên tập số phức.

A. $z_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{3}$. B. $z_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{4}$. C. $z_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{5}$. D. $z_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{6}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

5A. BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH & GÓC

✎ **Dạng 61. Tính khoảng cách - góc**

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$. Biết thể tích của khối chóp là $\frac{a^3}{6}$. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $h = a\sqrt{2}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = a\sqrt{3}$. D. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải tham khảo

$V = \frac{1}{6}a^3 \Rightarrow SA = a$. Kẻ AH vuông góc SB . Khi đó khoảng cách từ A đến (SBC) là AH .

Áp dụng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = a\sqrt{2}$. Biết góc tạo bởi SC và (ABC) bằng 45° . Tính khoảng cách d từ SB đến SC .

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $d = a\sqrt{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải tham khảo

$\widehat{SCH} = 45^\circ \Rightarrow SH = a$.

Gọi H là trung điểm của AC . Tính được $AC = 2HC = 2a$; $BH = \frac{1}{2}AC = a$

CM được $SH \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = \widehat{SCH} = 45^\circ \Rightarrow SH = a$

$\rightarrow$ Tam giác SHB vuông cân tại $H \Rightarrow SB = a\sqrt{2}$

Trong (SHB) : Dựng $HI \perp SB$ tại I (1)

CM được $AC \perp (SHB) \Rightarrow AC \perp HI$ tại H (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d(SB, AC) = HI = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC , mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60° . Tính khoảng cách d từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a .

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $d = a\sqrt{3}$. D. $d = \frac{a}{4}$.

Lời giải tham khảo

5A. Bài toán về khoảng cách và góc

Gọi M là trung điểm của AB. Ta có $\widehat{SMH} = 60^\circ$. Kẻ HK vuông góc với SM

$$d(I; (SAB)) = d(H; (SAB)) = HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 4. Khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) , đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết $BC = a$ và $SB = 2a$ và thể tích khối chóp là a^3 . Tính khoảng cách h từ A đến (SBC) .

- A. $h = 2a$. B. $h = 3a$. C. $h = \frac{3a}{2}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

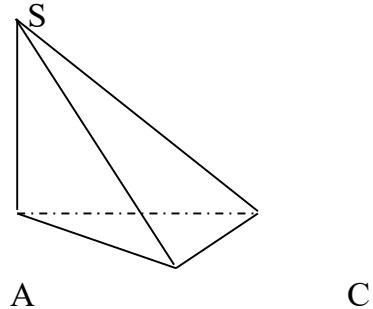
Lời giải tham khảo

Đặt $d(A, (SBC)) = h$

Diện tích ΔSBC : $S_{SBC} = a^2$

Ta có $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = a^3$

Suy ra $h = 3a$.



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SB = SC = a$. Tính khoảng cách h từ S đến mặt phẳng (ABC) .

- A. $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$. B. $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $h = \frac{a}{2}$. D. $h = \frac{a}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2}. \text{ Suy ra } h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B biết $BC = a\sqrt{3}$, $BA = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AC và biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Tính khoảng cách d từ C đến mặt phẳng (SAB) .

- A. $d = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$. B. $d = \frac{a\sqrt{30}}{10}$. C. $d = \frac{a\sqrt{66}}{11}$. D. $d = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

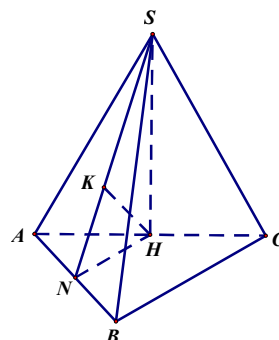
Lời giải tham khảo

Đặt $SH = x$. Suy ra $V = \frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3}\right) = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{6}{a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{2}$

Ta có $d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)) = 2HK$

mà $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{66}}{11}$

$$d(C, (SAB)) = \frac{2a\sqrt{66}}{11}.$$



Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{3}$, các tam giác ABC , ACD , ABD là các tam giác vuông tại đỉnh A . Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $d = \frac{a\sqrt{30}}{5}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $d = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Lời giải tham khảo

Gọi H là trực tâm tam giác BCD . Khi đó, $AH \perp (BCD) \Rightarrow d(A, (BCD)) = AH$.

Ngoài phương pháp tính thể tích khối tứ diện, ta có thể sử dụng công thức:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD , biết $EF = a\sqrt{3}$. Tính $\widehat{(AB, CD)}$.

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải tham khảo

Gọi M là trung điểm BD , $\widehat{(AB, CD)} = \widehat{(MF, ME)}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác EMF tính được:

$$\cos \widehat{EMF} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{EMF} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = 60^\circ.$$

Câu 9. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Người ta tăng cạnh đáy lên gấp 2 lần. Để thể tích giữ nguyên thì $\tan$ của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy phải giảm đi bao nhiêu lần?

- A. 8 lần. B. 2 lần. C. 3 lần. D. 4 lần.

Lời giải tham khảo

Gọi S là đỉnh hình chóp, O là trọng tâm tam giác ABC ; α là góc tạo bởi cạnh bên và

$mp(ABC)$. Chứng minh được thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{12}a^3 \tan \alpha$

Khi cạnh bên tăng lên 2 lần thì thể tích là $V = \frac{1}{12}(2a)^3 \tan \alpha'$. Để thể tích giữ nguyên thì

$\tan \alpha' = \frac{\tan \alpha}{8}$, tức là $\tan$ góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy phải giảm đi 8 lần.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách d từ $A'B$ và $B'D$.

A. $d = a\sqrt{6}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Góc giữa CA' và mặt $(AA'B'B)$ bằng 30° . Gọi $d(AI', AC)$ là khoảng cách giữa $A'I$ và AC , tính $d(AI', AC)$ theo a với I là trung điểm AB .

A. $d = \frac{a\sqrt{210}}{70}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{210}}{35}$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{210}}{35}$.

D. $d = \frac{3a\sqrt{210}}{35}$.

Câu 12. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách d từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

5A. Bài toán về khoảng cách và góc

Câu 13. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^\circ$. Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30° . Gọi M là trung điểm của BB' . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a .

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{21}$. B. $d = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{7}$. D. $d = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$ hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của AD . Tính khoảng cách d giữa hai đường SD và HK theo a .

- A. $d = \frac{3a}{5}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{7}$. C. $d = \frac{a\sqrt{21}}{5}$. D. $d = \frac{\sqrt{3}a}{5}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $d = a\sqrt{2}$. C. $d = a\sqrt{3}$. D. $d = a$.

5A. Bài toán về khoảng cách và góc

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB là tam giác cân tại đỉnh S . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 45° , góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$, biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng $a\sqrt{6}$.

A. $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBD) .

A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $d = \frac{a\sqrt{15}}{\sqrt{17}}$. C. $d = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. D. $d = a\sqrt{3}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{D} = 60^\circ$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{2}$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{3a}{\sqrt{5}}$. B. $d = a\sqrt{\frac{3}{5}}$. C. $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. D. $d = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

5A. Bài toán về khoảng cách và góc

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Tính khoảng cách d từ trung điểm K của HC đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.

C. $d = a\sqrt{13}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{13}}{8}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và tam giác SAB đều. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{7}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, biết cạnh $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy, thể tích khối chóp bằng $\frac{2a^3}{3}$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBD) .

A. $d = \frac{2a}{3}$.

B. $d = \frac{a}{3}$.

C. $d = \frac{4a}{3}$.

D. $d = \frac{3a}{2}$.

5A. Bài toán về khoảng cách và góc

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh bên là $2a$, diện tích mặt đáy là $4a^2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến (SBC) .

A. $d = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $d = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Tính khoảng cách h từ trung điểm K của đoạn thẳng HC đến mặt phẳng (SCD) .

A. $h = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

B. $h = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.

C. $h = \frac{a\sqrt{13}}{13}$.

D. $h = \frac{a\sqrt{130}}{26}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5B. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP TAM GIÁC

 Dạng 62. Thể tích khối chóp có đáy là tam giác đều

Câu 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $V = \frac{a^3}{2}$. C. $V = \frac{3a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

Lời giải tham khảo

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}.$$

Câu 2. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{12}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{4}$.

Lời giải tham khảo

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad h = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}.$$

Câu 3. Khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

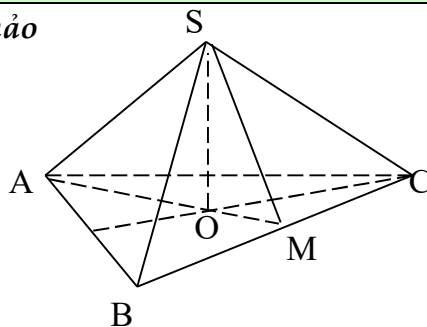
A. $V = \frac{1}{3}a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{6}}{2}a^3$.

Lời giải tham khảo

$$\triangle ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 3a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{8a^2}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3.$$



5B. Thể tích khối chóp

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải tham khảo

Gọi M là trung điểm của cạnh BC , khi đó $h = SA = AM$. $\tan \widehat{SMA} = \frac{3a}{2} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 5. Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3a^3.\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3.\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{a^3.\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{a^3.\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải tham khảo

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc tạo bởi cạnh SC và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$.

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{8}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{5}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{5}}{12}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{5}}{4}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH = \frac{2}{3}AC$, đường thẳng SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{36}$.

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{21}}{36}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{36}$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 9. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a$, $SA = 2a$. Một khối trụ có một đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC , đáy còn lại có tâm là đỉnh S . Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{33}}{9}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{33}}{27}$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{33}}{108}$. D. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{33}}{36}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH = \frac{2}{3}AC$, đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{8}$. B. $V = \frac{a^3}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{12}$. D. $V = \frac{a^3}{18}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 11. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , mặt bên tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{12}$. B. $V = \frac{a^3}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{24}$. D. $V = \frac{a^3}{4}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

5B. Thể tích khối chóp

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$. Góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3a^3}{4}$.

B. $V = \frac{a^3}{4}$.

C. $V = \frac{a^3}{12}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 13. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a$, cạnh bên SA tạo với đáy một góc 60° . Một hình nón có đỉnh là S , đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

A. $S_{xq} = \frac{4\pi a^2}{3}$.

B. $S_{xq} = \frac{2\pi a^2}{3}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{6}$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}$.

Câu 14. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Người ta tăng cạnh đáy lên gấp 2 lần. Để thể tích giữ nguyên thì tan của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy phải giảm đi bao nhiêu lần?

A. 8 lần.

B. 2 lần.

C. 3 lần.

D. 4 lần.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$. SA vuông góc với đáy, $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

B. $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{8}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

D. $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{4}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 63. Thể tích khối chóp có đáy là tam giác vuông

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$, mặt bên SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải tham khảo

Gọi H là trung điểm của cạnh BC .

$$\text{Tính được } SH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của cạnh SC . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABM$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Diện tích đáy : } S = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Chiều cao: } h = \frac{a\sqrt{3}}{3}, V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{V_{S.ABC}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}.$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $R = a\sqrt{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. D. $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

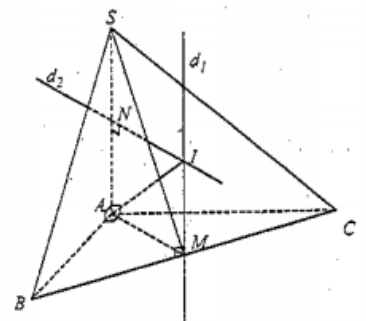
Lời giải tham khảo

Gọi điểm M là trung điểm của BC . Từ M , kẻ trục d_1 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mặt phẳng (SA, d_1) , kẻ trung trục d_2 của cạnh bên SA .

Khi đó $d_1 \cap d_2 = \{I\}$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$\text{Ta có } R = IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + \frac{BC^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



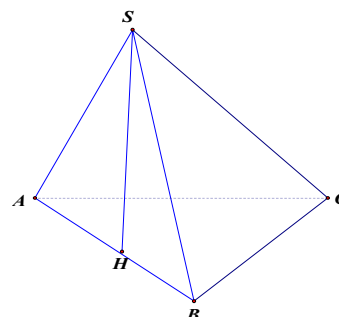
5B. Thể tích khối chóp

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C , cạnh góc vuông bằng a . Mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2}{2}$. Tính chiều cao của hình chóp đã cho.

- A. a . B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Lời giải tham khảo

$$AB = a\sqrt{2}; S_{\Delta SAB} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2} \cdot SH}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy; mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc bằng 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải tham khảo

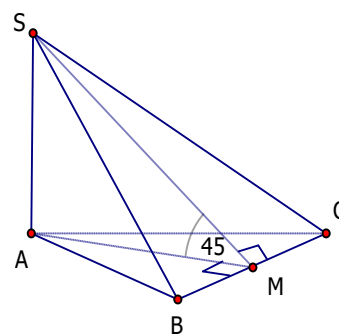
* Ta có: $AB = a\sqrt{2}, (SBC) \cap (ABC) = BC$

Gọi M là trung điểm BC

$AM \perp BC$ (vì ΔABC cân tại A)

$SM \perp BC$ (vì $AM = h_C(SM)$)

$$\Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA} = 45^\circ$$



* ΔABC vuông cân tại A có, $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a$ và $AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

* ΔSAM vuông tại A có $AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \widehat{M} = 45^\circ \Rightarrow SA = AM \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$* V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$. Mặt bên SBC là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = a^3$.

B. $V = \frac{a^3}{3}$.

C. $V = \frac{2a^3}{3}$.

D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B biết $AB = a$; $AC = 2a$. $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3a^3}{4}$.

B. $V = \frac{a^3}{4}$.

C. $V = \frac{3a^3}{8}$.

D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 23. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B . Cạnh SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{ACB} = 60^\circ$, $BC = a$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SB . Tính thể tích V của khối tứ diện $MABC$.

A. $V = \frac{a^3}{2}$.

B. $V = \frac{a^3}{3}$.

C. $V = \frac{a^3}{4}$.

D. $V = \frac{a^3}{12}$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, mặt bên SBC là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông O . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{6}$.

B. $V = \frac{a^3}{6}$.

C. $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{6}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc tạo bởi (SBC) và mặt đáy bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$.

C. $\frac{a^3}{9}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DB . Tính thể tích V của khối chóp S_{MNP} .

A. $V = \frac{4}{3}a^3$.

B. $V = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V = \frac{a^3}{6}$.

D. $V = \frac{a^3}{12}$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC . Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $V = \frac{a^3}{36}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{15}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

D. $V = \frac{a^3}{30}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa SC và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $3a^3$.

B. $a^3\sqrt{3}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 64. Thể tích khối tứ diện đều

Câu 29. Tính thể tích V của khối tứ diện đều cạnh a .

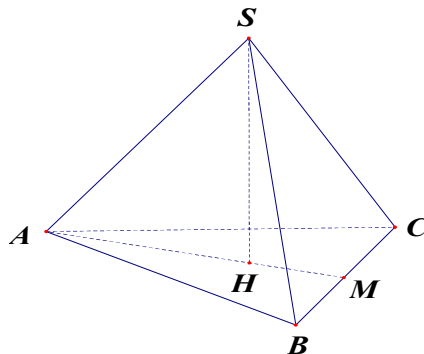
A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

Lời giải tham khảo

Gọi M là trung điểm của BC , H là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$$AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$



Câu 30. Tính thể tích V của khối tứ diện đều cạnh $a\sqrt{3}$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải tham khảo

Diện tích đáy : $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao: $h = a\sqrt{2}$.

Thể tích : $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Dạng 65. Thể tích khối chóp có đáy là tam giác thường

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải tham khảo

Tính được $AB = BC = a$, $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow$ Trung điểm H của AC là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó, $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ, \widehat{ASC} = 90^\circ, SA = SB = a, SC = 3a$.
 Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải tham khảo

Gọi M là điểm trên đoạn SC sao cho $SC = 3SM$.

Tính được $AB = BM = a, AM = a\sqrt{2}$, suy ra $\triangle ABM$ vuông tại B , suy ra trung điểm H của AM là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$. Suy ra $SH \perp (ABM)$.

Khi đó $V_{S.ABM} = \frac{1}{3}SH.S_{ABM} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

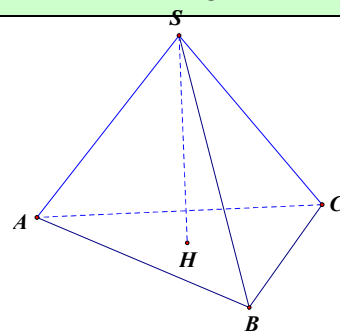
Suy ra $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = 3V_{S.ABM} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và đôi một vuông góc với nhau. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (ABC) .

A. $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$. B. $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $d = \frac{a}{2}$. D. $d = \frac{a}{3}$.

Lời giải tham khảo

$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.



Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = a\sqrt{3}, AC = 2a$ và $AD = 2a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên DB, DC .
 Tính thể tích V của tứ diện $AHKD$.

A. $V = \frac{4\sqrt{3}}{21}a^3$. B. $V = \frac{4\sqrt{3}}{7}a^3$. C. $V = \frac{2\sqrt{3}}{21}a^3$. D. $V = \frac{2\sqrt{3}}{7}a^3$.

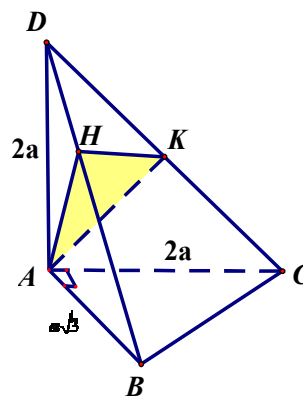
Lời giải tham khảo

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{V_{D.AHK}}{V_{D.ABC}} &= \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SK}{SC} \cdot \frac{DH}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DH \cdot DB}{DB^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD^2}{AD^2 + AB^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4a^2}{4a^2 + 3a^2} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$V_{D.ABC} = \frac{1}{3}DA.S_{ABC} = \frac{1}{3}2a \cdot \frac{1}{2}2a \cdot a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

Suy ra $V_{AHKD} = V_{D.AHK} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{21}$.



5B. Thể tích khối chóp

Câu 35. Hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = 3a^3\sqrt{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{3}$. D. $V = 6a^3\sqrt{3}$.

Lời giải tham khảo

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = a^2\sqrt{3}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = a^3\sqrt{3}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AC = AD = a$, $BC = BD = a$, $CD = a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{12}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2$, $AC = 3$, $AD = BC = 4$, $BD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{15}}{2}$. B. $V = \frac{\sqrt{15}}{3}$. C. $V = \sqrt{15}$. D. $V = 3\sqrt{15}$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 38. Cho khối tứ diện $S.ABC$ với SA, SB, SC vuông góc từng đôi một và $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AC, BC . Tính thể tích của khối tứ diện $SCMN$.

A. $V = \frac{2a^3}{3}$.

B. $V = a^3$.

C. $V = \frac{3a^3}{4}$.

D. $V = \frac{a^3}{4}$.

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD đôi một vuông góc với nhau. Cho biết $BA = 3a, BC = BD = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD . Tính thể tích V của khối chóp $C.BDNM$.

A. $V = 8a^3$.

B. $V = \frac{2a^3}{3}$.

C. $V = \frac{3a^3}{2}$.

D. $V = a^3$.

Câu 40. Cho hình chóp tam giác có đường cao bằng 100 cm và các cạnh đáy bằng 20 cm, 21 cm, 29 cm. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = 6000 \text{ cm}^3$.

B. $V = 6213 \text{ cm}^3$.

C. $V = 7000 \text{ cm}^3$.

D. $V = 7000\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{6}$.

C. $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{4}$.

D. $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{8}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP TỨ GIÁC

Dạng 66. Thể tích khối chóp có đáy là hình bình hành

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm SC . Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại P và Q . Tính tỉ số thể tích $t = \frac{V_{SAPMQ}}{V_{SABCD}}$.

A. $t = \frac{2}{9}$.

B. $t = \frac{1}{8}$.

C. $t = \frac{1}{3}$.

D. $t = \frac{2}{3}$.

Lời giải tham khảo

Vì mp song song với BD nên PQ song song với BD . Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Suy luận được SO, AM, PQ đồng quy tại G và G là trọng tâm tam giác SAC .

Suy luận được tỉ số $\frac{SQ}{SD} = \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}$;

Chứng minh được tỉ số thể tích: $\frac{V_{SAQM}}{V_{SADC}} = \frac{V_{SAPM}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3}$;

Suy ra được: $\frac{V_{SAQM} + V_{SAPM}}{V_{SADC} + V_{SABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{V_{SAPMQ}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{3}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SC . Mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại điểm P . Tính tỉ số thể tích $t = \frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $t = \frac{1}{8}$.

B. $t = \frac{1}{12}$.

C. $t = \frac{1}{6}$.

D. $t = \frac{1}{16}$.

Lời giải tham khảo

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

Gọi I là giao điểm của BP và MN .

Khi đó $\frac{IS}{IO} \cdot \frac{BO}{BD} \cdot \frac{PD}{PS} = 1 \Rightarrow \frac{PD}{PS} = 2 \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{1}{3}$.

$$V_{S..BMPN} = V_{S.MBN} + V_{S.MNP}.$$

Tính được $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{4}, \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ACD}} = \frac{1}{12} \Rightarrow V_{S.BMPN} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$.

Suy ra $t = \frac{1}{6}$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SA , mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại điểm N . Tính tỉ số thể tích $t = \frac{V_{S.BCNM}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $t = \frac{3}{4}$.

B. $t = \frac{1}{4}$.

C. $t = \frac{3}{8}$.

D. $t = \frac{1}{8}$.

Lời giải tham khảo

$$V_{S.BCNM} = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.BCNM} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } t = \frac{3}{8}.$$

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Tính tỉ số thể tích $t = \frac{V_{S.MNCD}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $t = \frac{3}{4}$.

B. $t = \frac{3}{8}$.

C. $t = \frac{1}{8}$.

D. $t = \frac{2}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}} = \frac{AM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MCD} = \frac{1}{2} V_{S.ACD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} \quad (1)$$

$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } V_{S.MNCD} = V_{S.MCD} + V_{S.MNC} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}.$$

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tính tỉ số thể tích $t = \frac{V_{S.ABD}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $t = 1$.

B. $t = \frac{1}{2}$.

C. $t = \frac{1}{8}$.

D. $t = \frac{1}{6}$.

Dạng 67. Thể tích khối chóp có đáy là hình thoi

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là thoi cạnh a với $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm I của cạnh AB . Cạnh bên SD hợp với đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{21}}{15}$. B. $V = \frac{a^3 \sqrt{21}}{12}$. C. $V = \frac{a^3 \sqrt{21}}{9}$. D. $V = \frac{a^3 \sqrt{21}}{3}$.

Lời giải tham khảo

Diện tích đáy: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

Chiều cao : $h = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $ID^2 = AI^2 + AD^2 - 2 \cdot AI \cdot AD \cdot \cos 120^\circ = \frac{7a^2}{4}$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $BD = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{2\sqrt{15}a^3}{15}$. B. $V = \frac{a^3}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải tham khảo

$(SAB) \perp (ABCD), (SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Ta có $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều

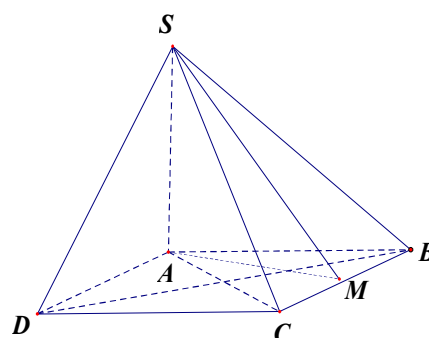
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC, AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì $AM \perp BC, SA \perp BC \Rightarrow$ góc giữa (SBC) và (ABC) bằng

$\widehat{SMA} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ$

$SA = AM \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.



Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 48, đáy $ABCD$ hình thoi. Các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc SA, SB, SC, SD thỏa: $SA = 2SM, SB = 3SN, SC = 4SP, SD = 5SQ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MNPQ$.

A. $V = \frac{2}{5}$. B. $V = \frac{4}{5}$. C. $V = \frac{6}{5}$. D. $V = \frac{8}{5}$.

Lời giải tham khảo

$V_{SMNP} = \frac{1}{24} V_{SABC}, V_{SMPQ} = \frac{1}{40} V_{SACD} \Rightarrow V_{SMNPQ} = \frac{1}{24} \cdot 24 + \frac{1}{40} \cdot 24 = \frac{8}{5}$.

Dạng 68. Thể tích khối chóp có đáy là hình chữ nhật

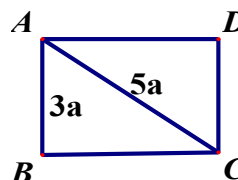
Câu 50. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3a$; $AC = 5a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = 15a^3\sqrt{2}$. B. $V = 12a^3\sqrt{2}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = 4a^3\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Tính $AD = 4a \Rightarrow S_{ABCD} = 12a^2$; $SA = a\sqrt{2}$

$$V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}12a^2.a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}.$$



Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB , SC tạo với mặt đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ACD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

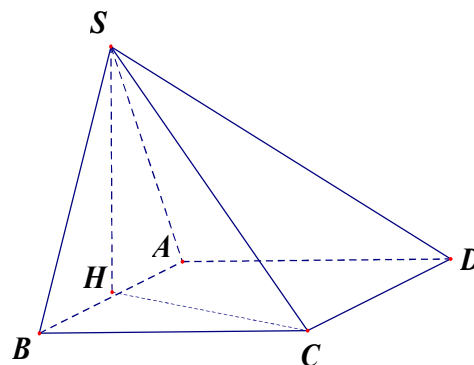
Lời giải tham khảo

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SCH} \Rightarrow \widehat{SCH} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta SCH$ vuông cân tại $H \Rightarrow SH = CH = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$$V_{S.ACD} = \frac{1}{3}SH.S_{ACD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot 2a = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$



Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $AD = 30\sqrt{3}$ và $BC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy là trung điểm H của OA . Biết rằng mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. C. $V = a^3\sqrt{15}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải tham khảo

Gọi K là điểm trên cạnh BC sao cho

$$BK = \frac{BC}{4} \Rightarrow HK = \frac{3a}{4} \Rightarrow SH = HK \cdot \tan \widehat{SKH} = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

Tính được $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 53. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a, BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = 2a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$V = \frac{1}{3}a.a\sqrt{3}.2a = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a, BC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy là trung điểm H của OA . Biết rằng đường thẳng SA tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$h = SH = AH = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{5}}{4} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}.$$

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, cạnh SC tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = \frac{2a^3}{3}$. D. $V = a^3$.

Lời giải tham khảo

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^3\sqrt{6}.$$

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $CD = 2a; AD = a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3$. B. $V = 2a^3$. C. $V = 6a^3$. D. $V = 4a^3$.

Lời giải tham khảo

$$S_{ABCD} = AD.CD = 2a^2; V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.3a.2a^2 = 2a^3.$$

Dạng 69. Thể tích khối chóp có đáy là hình vuông

Câu 57. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải tham khảo

$$S_{ABCD} = a^2, SA = AC = a\sqrt{2}, V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SB = \sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

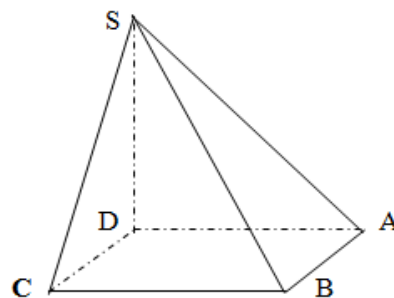
A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $V = a^3\sqrt{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải tham khảo

Diện tích đáy: $S = a^2$

Chiều cao: $h = a\sqrt{2}$

Thể tích: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$



Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

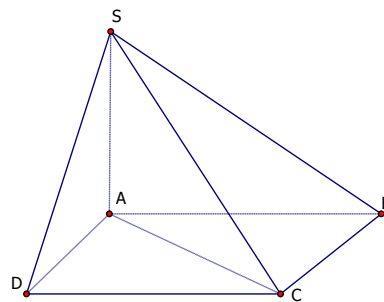
Lời giải tham khảo

Ta có : $SA = AC = a\sqrt{2}$

* $ABCD$ là hình vuông: $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$;

$S_{ABCD} = a^2, SA = a\sqrt{2}$

* $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



Câu 60. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SB . Tính thể tích V của khối chóp $S.ACM$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{24}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải tham khảo

$$\frac{V_{S.ACM}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow V = V_{S.ACM} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

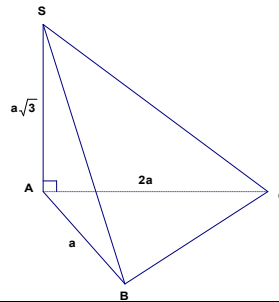
5B. Thể tích khối chóp

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3}{4}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải tham khảo

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$



Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải tham khảo

Gọi H , K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , CD .

Khi đó $h = SH = HK \tan \angle SKH = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 63. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° .

A. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{3}$. B. $V_{S.ABCD} = \frac{9a^3\sqrt{15}}{2}$. C. $V_{S.ABCD} = 9a^3\sqrt{3}$. D. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{15}$.

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a , SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = 3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = 2a^3$. C. $V = 3a^3$. D. $V = a^3$.

Câu 65. Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAD cân tại S và (SAD) vuông góc với mặt đáy. Biết thể tích V của khối chóp là $\frac{4}{3}a^3$. Tính $d = d(B, (SCD))$.

A. $d = \frac{2}{3}a$. B. $d = \frac{4}{3}a$. C. $d = \frac{8}{3}a$. D. $d = \frac{3}{4}a$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{32\pi}{3}$.

B. $V = \frac{125\pi}{6}$.

C. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

D. $V = \frac{108\pi}{3}$.

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng góc giữa mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3}{6}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a , SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của DC . Tính thể tích V của khối chóp $I.OBM$.

A. $V = \frac{a^3}{24}$.

B. $V = \frac{3a^3}{24}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SC và SD . Tính thể tích V của khối chóp $S.AHK$.

A. $V = \frac{a^3}{24}$.

B. $V = \frac{a^3}{12}$.

C. $V = \frac{a^3}{6}$.

D. $V = a^3$.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{5}$. SA vuông góc với đáy $SA = 2a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{10a^3\sqrt{2}}{3}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

C. $V = 5a^3\sqrt{2}$.

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{10}}{3}$.

Dạng 70. Thể tích khối chóp tứ giác đều

Câu 71. Khối chóp đều $S.ABCD$ có mặt đáy là hình nào dưới đây?

- A. Hình bình hành. B. Hình chữ nhật. C. Hình thoi. D. Hình vuông.

Câu 72. Nếu một hình chóp tứ giác đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?

- A. n^2 lần. B. $2n^2$ lần. C. n^3 lần. D. $2n^3$ lần.

5B. Thể tích khối chóp

Câu 73. Cho (H) là khối chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh bằng a , mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{1}{6}a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

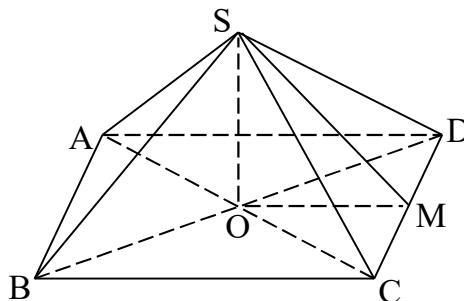
Lời giải tham khảo

$ABCD$ hình vuông cạnh $a \Rightarrow MO = \frac{a}{2}$

Góc tạo bởi mặt bên (SCD) và $(ABCD)$ là góc SMO

$$\tan 60^\circ = \frac{SO}{MO} \Rightarrow SO = \tan 60^\circ \cdot MO = \sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$



Câu 74. Cho (H) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = 4\sqrt{2}a^3$. B. $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. D. $V = \frac{4}{3}a^3$.

$ABCD$ hình vuông cạnh $2a \Rightarrow AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AO = a\sqrt{2}$

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = (2a)^2 - (a\sqrt{2})^2 = 2a^2 \Rightarrow SO = a\sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 75. Cho (H) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 76. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là:

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = 4a^3\sqrt{3}$.

.....	
-------	-------

5B. Thể tích khối chóp

Câu 77. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, mặt bên tạo với đáy một góc 45° . Một khối nón có đỉnh là S , đáy là hình tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$.

B. $V = \frac{\pi a^3}{3}$.

C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

D. $V = \frac{\pi a^3}{12}$.

Câu 78. Cho (H) là khối chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh bằng a , cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{1}{6}a^3$.

B. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

D. $V = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$.

5C. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ TAM GIÁC

✎ Dạng 71. Thể tích khối lăng trụ tam giác đều

Câu 1. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

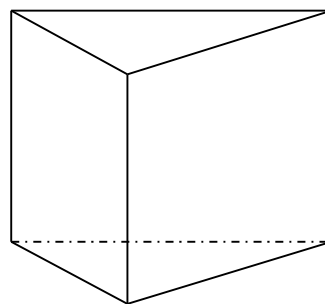
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải tham khảo

Diện tích đáy: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao: $h = a$.

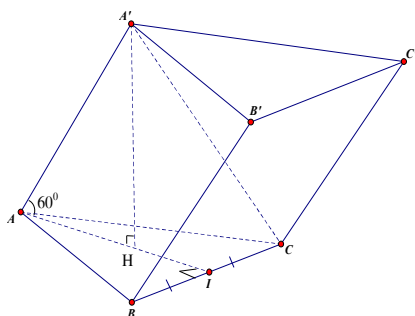
Thể tích: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Câu 2. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm của tam giác ABC . Tất cả các cạnh bên đều tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. Một kết quả khác.

Lời giải tham khảo



Gọi I là giao điểm của $A'H$ và BC . Theo giả thiết H là trực tâm của tam giác đều ABC nên $A'H$ là đường cao và H cũng là trọng tâm của tam giác đều ABC

$$\text{Nên } AH = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Do $A'H \perp (ABC)$ nên $\widehat{A'AH} = 60^\circ$ và $A'H \perp AH$

Trong tam giác vuông $HA'A$ có $A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$

Thể tích của khối chóp $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3}}{2} a = \frac{1}{4} a^3 \sqrt{3}$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $(A'BC)$ hợp với mặt đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $V = \frac{3a^3}{24}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

Lời giải tham khảo

Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AM$ là hình chiếu vuông góc của $A'M$ trên (ABC) , nên

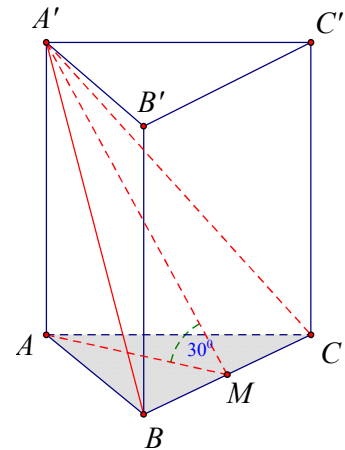
$\widehat{(A'BC), (ABC)}$ bằng góc $\widehat{A'MA} = 30^\circ$

Xét $\triangle A'MA$ vuông tại A . Ta có

$$A'A = AM \cdot \tan \widehat{A'MA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot A'A = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$



Câu 4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{8}a^3$. C. $V = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

Lời giải tham khảo

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Gọi } M \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow \widehat{AMA'} = 60^\circ$$

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC , $AA' = a\sqrt{7}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$.

B. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{8}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, các mặt bên đều là hình vuông. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích bằng 21π . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 18$.

B. $V = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

C. $V = 6$.

D. $V = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 7. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh bằng 1, $AA' = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$

A. $d = \frac{2\sqrt{15}}{5}$.

B. $d = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{4}}{2}$.

5C. Thể tích khối lăng trụ

Câu 8. Cho lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên (ABC) là trung điểm AB , góc giữa AC và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách d từ B đến $(ACC'A')$.

A. $d = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$. B. $d = \frac{\sqrt{13}a}{13}$. C. $d = \frac{2\sqrt{13}a}{13}$. D. $d = \frac{4\sqrt{13}a}{13}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Góc giữa CA' và mặt $(AA'B'B)$ bằng 30° . Gọi $d(AI', AC)$ là khoảng cách giữa $A'I$ và AC , tính $d(AI', AC)$ theo a với I là trung điểm AB là

A. $d = \frac{a\sqrt{210}}{70}$. B. $d = \frac{a\sqrt{210}}{35}$. C. $d = \frac{2a\sqrt{210}}{35}$. D. $d = \frac{3a\sqrt{210}}{35}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có mặt phẳng (ABC') tạo với đáy một góc 60° , diện tích tam giác ABC' bằng $24\sqrt{3}(cm^2)$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 724cm^3$. B. $345cm^3$. C. $V = 216cm^3$. D. $V = 820cm^3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

5C. Thể tích khối lăng trụ

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a . Mặt bên $ABB'A'$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B, A'C$. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $A'.AMN$ và $A'.ABC$.

- A. $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{3}$. C. $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{4}$. D. $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{5}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 12. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = 2a$. Gọi I là trung điểm CC' và φ là góc giữa $(A'BI)$ và (ABC) . Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $\cos \varphi = \sqrt{5}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 13. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của C' trên (ABC) là trung điểm I của BC . Góc giữa AA' và BC là 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{8}$. D. $V = \frac{a^3}{4}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

5C. Thể tích khối lăng trụ

Câu 14. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$.

B. $V = \frac{3a^3}{8}$.

C. $V = \frac{a^3}{8}$.

D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 15. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(ACC'A')$ tạo với đáy góc 45° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{16}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{a^3}{16}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ Dạng 72. Thể tích khối lăng trụ tam giác vuông

Câu 16. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = a^3\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} a^2$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 17. Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = a^3$. B. $V = a^3\sqrt{2}$. C. $V = 2a^3$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

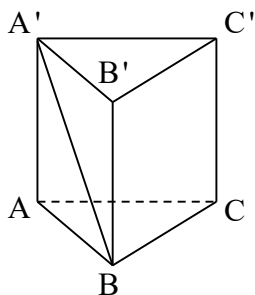
Lời giải tham khảo

Chọn đáp án B.

+) Tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$ nên $AB = AC = a$

+) $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow$

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = a^3\sqrt{2}.$$



Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên đáy ABC là trung điểm H của cạnh AC , đường thẳng $A'B$ tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{5}$.

Lời giải tham khảo

$$h = AH = HB = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{5}}{2}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 19. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = a^3\sqrt{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $V = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 20. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, đường thẳng $A'C$ tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

B. $V = a^3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

D. $V = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 21. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, mặt bên $(A'BC)$ hợp với mặt đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

✎ Dạng 73. Thể tích khối lăng trụ tam giác

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Giả sử D là trung điểm cạnh CC' và $\widehat{BDA'} = 90^\circ$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{\sqrt{15}}{2}$. B. $V = 3\sqrt{15}$. C. $V = \sqrt{15}$. D. $V = 2\sqrt{15}$.

Lời giải tham khảo

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{BAC} = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$\text{Đặt } AA' = h \Rightarrow BD^2 = \frac{h^2}{4} + 7, A'B^2 = h^2 + 1, A'D^2 = \frac{h^2}{4} + 4$$

Do tam giác BDA' vuông tại A' nên $A'B^2 = BD^2 + A'D^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{5}$. Suy ra $V = \sqrt{15}$.

Câu 23. Một khối lăng trụ tam giác có các cạnh đáy bằng 13, 14, 15, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° và có chiều dài bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = 340$. B. $V = 336$. C. $V = 274\sqrt{3}$. D. $V = 124\sqrt{3}$.

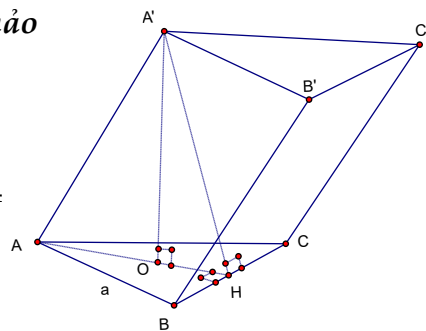
Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$$

Gọi O là hình chiếu của A' trên (ABC)

$$\triangle A'AO \text{ vuông tại } O \text{ cho ta: } A'O = AA' \cdot \sin 30^\circ = 4$$

$$\text{Vậy: } V_{ABC.A'B'C'} = 84 \cdot 4 = 336.$$



Câu 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}$.

- A. $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{4}$. C. $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}$. D. $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}$.

THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ TỨ GIÁC

Dạng 74. Thể tích khối lập phương

Câu 25. Tính thể tích V của khối lập phương cạnh bằng a .

A. $V = \frac{1}{2}a^3$.

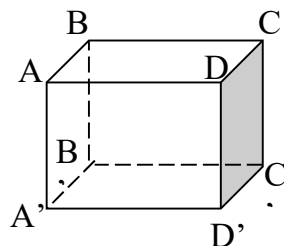
B. $V = \frac{1}{3}a^3$.

C. $V = a^3$.

D. $V = \sqrt{3}a^3$.

Lời giải tham khảo

$$V = AA' \cdot AB \cdot AD = a^3.$$



Câu 26. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AD' = 2a$.

A. $V = a^3$.

B. $V = 8a^3$.

C. $V = 2\sqrt{2}a^3$.

D. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

Lời giải tham khảo

$$AD' = AD\sqrt{2} = 2a \Rightarrow AD = a\sqrt{2} \Rightarrow V = 2a^3\sqrt{2}.$$

Câu 27. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đường chéo bằng a . Tính thể tích V của khối tứ diện $AA'B'C'$.

A. $V = \frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

B. $V = \frac{a^3}{18\sqrt{3}}$.

C. $V = \frac{a^3}{6\sqrt{3}}$.

D. $V = \frac{a^2}{18\sqrt{3}}$.

Lời giải tham khảo

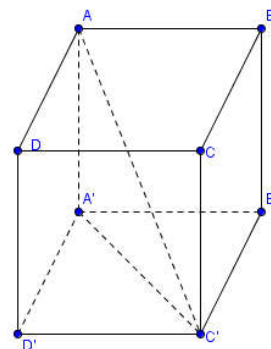
Gọi x là cạnh hình lập phương

$$\text{Ta có } AA'^2 + A'C'^2 = AC'^2$$

$$x^2 + (x\sqrt{2})^2 = a^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{A'B'C'} \cdot AA' = \frac{1}{6}x^3 = \frac{a^3}{18\sqrt{3}}.$$



Câu 28. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AD' = 3a$.

A. $V = a^3$.

B. $V = 3\sqrt{3}a^3$.

C. $V = 2\sqrt{2}a^3$.

D. $V = \frac{27}{2\sqrt{2}}a^3$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Gọi } x \text{ là cạnh của khối lập phương } \Rightarrow AD' = 3a \Rightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow V = 3\sqrt{3}a^3.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 29. Tính thể tích V của khối lập phương có các đỉnh là trọng tâm của các mặt của một khối bát diện đều cạnh a .

A. $V = \frac{8a^3}{27}$.

B. $V = \frac{a^3}{27}$.

C. $V = \frac{16a^3\sqrt{2}}{27}$.

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 30. Khi độ dài cạnh của hình lập phương tăng thêm 2cm thì thể tích của nó tăng thêm 98cm^3 . Tính cạnh a của hình lập phương đã cho.

A. $a = 3\text{cm}$.

B. $a = 5\text{cm}$.

C. $a = 6\text{cm}$.

D. $a = 4\text{cm}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết tổng diện tích các mặt của hình lập phương bằng 150.

A. $V = 25$.

B. $V = 75$.

C. $V = 125$.

D. $V = 100$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5C. Thể tích khối lăng trụ

Câu 32. Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 96. Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

A. $V = 64$.

B. $V = 91$.

C. $V = 84$.

D. $V = 48$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 33. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy nội tiếp đường tròn có chu vi bằng 4π .

A. $V = \pi^3$.

B. $V = 8$.

C. $V = 16\sqrt{2}$.

D. $V = 2\sqrt{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

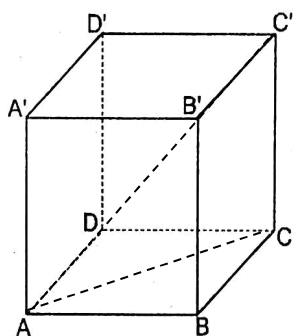
✎ Dạng 75. Thể tích khối lăng trụ

Câu 34. Tính thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h .

- A. $V = Bh$. B. $V = \frac{1}{3} Bh$. C. $V = \frac{1}{2} Bh$. D. $V = \frac{4}{3} Bh$.

Câu 35. Tính thể tích V của khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $AC' = 5a$.

- A. $V = 12a^3$. B. $V = 9a^3$. C. $V = 3a^3$. D. $V = 18a^3$.



Lời giải tham khảo

Chọn đáp án D.

+) $AC = \sqrt{AC'^2 - CC'^2} = 3a$, $ABCD$ là hình vuông nên

$$AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

+) Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = AA' \cdot S_{ABCD} = 4a \cdot \left(\frac{3a}{\sqrt{2}} \right)^2 = 18a^3.$$

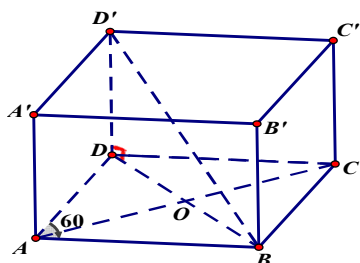
Câu 36. Đáy của một hình hộp là một hình thoi có cạnh bằng 6 cm và góc nhọn bằng 30° , cạnh bên của hình hộp là 10 cm và tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của hình hộp đã cho.

- A. $V = 180\sqrt{2}\text{ cm}^3$. B. $V = 180\text{ cm}^3$.
C. $V = 180\sqrt{3}\text{ cm}^3$. D. $V = 90\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

Câu 37. Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60° . Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Tính thể tích V của hình hộp đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $V = a^3\sqrt{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải tham khảo



Ta có tam giác ABD đều nên: $BD = a$ và $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Theo đề bài $BD' = AC = 2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$,

$$\triangle DD'B \Rightarrow DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 38. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^\circ$. Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30° . Gọi M là trung điểm của BB' . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AM và CC' .

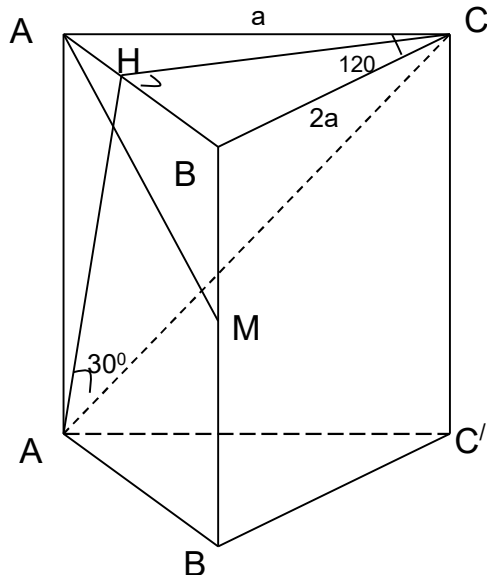
A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{21}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{7}$.

D. $d = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Lời giải tham khảo



+ Kẻ đường cao CH của tam giác ABC . Có $CH \perp AB$; $CH \perp AA'$ suy ra $CH \perp (ABB'A')$. Do đó góc giữa $A'C$ và mp $(ABB'A')$ là góc $\widehat{CA'H} = 30^\circ$

+ Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác ABC :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$

+ $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot CH \Rightarrow CH = a\sqrt{\frac{3}{7}}$

+ Vậy: $d(CC'; AM) = d(CC'; (ABB'A'))$

$d(C; (ABB'A')) = CH = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Câu 39. Cho hình lập phương (H) cạnh a , gọi (B) là hình bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của (H) . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của (H) và (B) . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

C. $\frac{S_1}{S_2} = 2\sqrt{3}$.

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải tham khảo

Độ dài cạnh của bát diện đều bằng một nửa độ dài đường chéo một mặt của hình lập phương.

✎ Dạng 76. Thể tích hình hộp chữ nhật

Câu 40. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì thể tích bằng nhau.
- B. Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì thể tích bằng nhau.
- C. Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì thể tích bằng nhau.
- D. Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì thể tích bằng nhau.

Câu 41. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách d từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải tham khảo

$$S_d = a^2\sqrt{3}, h = \frac{a\sqrt{3}}{2}. V = \frac{3a^3}{2} \text{ suy ra } V_{B_1A_1BD} = \frac{V}{6} = \frac{a^3}{4} = \frac{1}{3} S_{A_1BD} \cdot d(B_1; (A_1BD)), S_{A_1BD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$d(B_1; (A_1BD)) = \frac{3V_{B_1A_1BD}}{S_{A_1BD}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 42. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $A'B = 3a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật $ABCD$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $V = 2a^3\sqrt{6}$. B. $V = a^3\sqrt{6}$. C. $V = \frac{2}{3}a^3\sqrt{6}$. D. $V = 6a^3\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $A'O \perp (ABCD)$. Suy ra $A'O$ là chiều cao của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}.$$

Trong $\triangle ABD$ vuông tại A , ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$.

$$\Rightarrow BD = 2a. \text{ Ta có } BO = \frac{1}{2}BD = a.$$

Trong $\triangle A'OB$ vuông tại O , ta có:

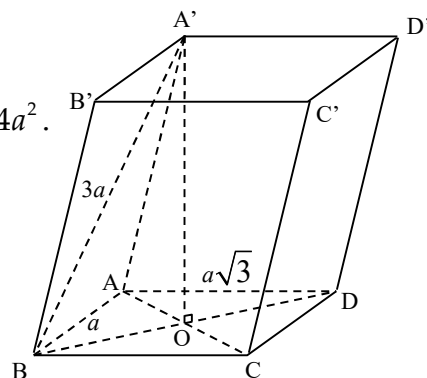
$$A'O^2 = A'B^2 - BO^2 = 9a^2 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow A'O = 2a\sqrt{2}.$$

Chiều cao của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

$$A'O = 2a\sqrt{2}.$$

Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$V = S_{ABCD} \cdot A'O = a^2\sqrt{3} \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{6}.$$



6A. MẶT NÓN

✎ **Dạng 77. Tính độ dài đường sinh, đường cao và bán kính đáy hình nón**

Câu 1. Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối nón chiều cao h và bán kính đáy thay đổi, nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối nón là lớn nhất.

- A. $h = \frac{4R}{3}$. B. $h = R$. C. $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. D. $h = R\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Xét $\triangle IOA$ vuông tại O, ta có

$$IA^2 = OI^2 + OA^2 \Leftrightarrow R^2 = (h - R)^2 + r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 - (h - R)^2 = h(2R - h).$$

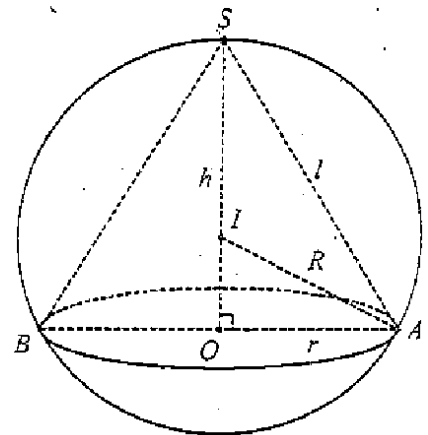
Thể tích của khối nón được tính theo công thức

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h), \quad h \in (0; 2R)$$

$$\text{Xét hàm } f(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h), \quad h \in (0; 2R)$$

Từ bảng biến thiên của $f(h)$ ta có được kết quả

$$\max V = \frac{32\pi R^3}{31} \quad \text{khi } h = \frac{4R}{3}.$$



Câu 2. Một khối nón có diện tích đáy 25cm^2 và thể tích bằng $\frac{125\pi}{3}\text{cm}^3$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

- A. $2\sqrt{5}\text{cm}$. B. $5\sqrt{2}\text{cm}$. C. $\sqrt{5}\text{cm}$. D. $\sqrt{2}\text{cm}$.

Lời giải tham khảo

$$S_{\text{đáy}} = \pi R^2 = 25\pi \Rightarrow R = 5, V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi}{3} \Rightarrow h = 5, l = \sqrt{h^2 + R^2} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

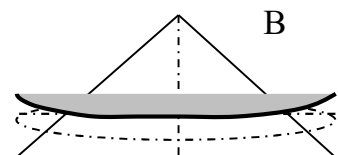
Câu 3. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

- A. $l = a\sqrt{2}$. B. $l = 2a$. C. $l = a\sqrt{3}$. D. $l = 2a\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $l = BC$

$\triangle ABC$ vuông cân tại A, $l = a\sqrt{2}$



**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 4. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = AC = 2a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AC .

A. $l = a\sqrt{2}$.

B. $l = 2a\sqrt{2}$.

C. $l = 2a$.

D. $l = a\sqrt{5}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A với $AC = 3a, BC = 5a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AC .

A. $l = 9a$.

B. $l = a$.

C. $l = a\sqrt{7}$.

D. $l = 5a$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AB .

A. $l = 3a$.

B. $l = 2a$.

C. $l = a\sqrt{3}$.

D. $l = a\sqrt{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6A. Mặt nón

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên đáy là trung điểm O của cạnh BC . Biết rằng $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, đường thẳng SA tạo với đáy một góc 60° . Một hình nón có đỉnh là S , đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC . Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

B. $l = a\sqrt{3}$.

C. $l = a$.

D. $l = 2a$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có chiều cao bằng a . Một khối nón tròn xoay có đỉnh là S , đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và có thể tích $V = \frac{2}{3}\pi a^3$. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

A. $r = a\sqrt{2}$.

B. $r = 2a$.

C. $r = a\sqrt{3}$.

D. $r = 3a$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 9. Tính độ dài đường cao h của hình nón biết bán kính đường tròn đáy bằng a , độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{2}$.

A. $h = a\sqrt{2}$.

B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $h = a\sqrt{3}$.

D. $h = a$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 78. Diện tích xung quanh của hình nón

Câu 10. Cho tam giác ABO vuông tại O có góc $\widehat{BAO} = 30^\circ$, $AB = a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón khi quay tam giác ABO quanh trục AO .

- A. $S_{xq} = \pi a^2$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{4}$. D. $S_{xq} = 2\pi a^2$.

Lời giải tham khảo

$$OB = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}. \quad S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Câu 11. Cho khối nón có thể tích $\frac{100\pi}{81}$. Biết rằng tỉ số giữa đường cao và đường sinh của khối nón bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

- A. $S_{xq} = \frac{10\pi}{9}$. B. $S_{xq} = \frac{10\sqrt{5}\pi}{3}$. C. $S_{xq} = \frac{10\sqrt{5}\pi}{9}$. D. $S_{xq} = \frac{10\pi}{3}$.

Lời giải tham khảo

Theo giả thiết, $\frac{h}{l} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{5}}{3}$

Do đó, $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r = \sqrt{l^2 - \frac{5l^2}{9}} = \frac{2l}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{100\pi}{81} \Rightarrow l^3 = 5\sqrt{5}$

$$\Rightarrow l = \sqrt{5} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = \frac{10\pi}{3}.$$

Câu 12. Trong không gian, cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB = a$, $CD = 2a$, $AD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi K là khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục MN . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của khối K .

- A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}$. B. $S_{xq} = \frac{3\pi a^2}{2}$. C. $S_{xq} = 3\pi a^2$. D. $S_{xq} = \pi a^2$.

Lời giải tham khảo

Gọi S là giao điểm của AD và BC .

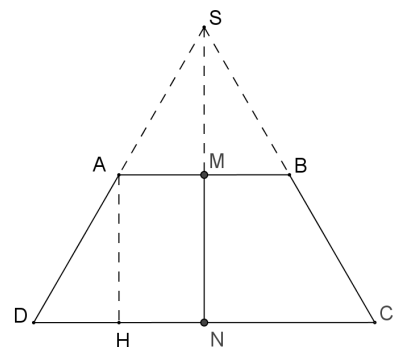
Nếu quay tam giác SCD quanh trục SN , các đoạn thẳng SC, SB lần lượt tạo ra mặt mặt xung quanh của hình nón (H_1) và (H_2) .

Với hình nón (H_1) : $l_1 = SC = 2a$, $r_1 = NC = a$, $h_1 = SN = a\sqrt{3}$.

Với hình nón (H_2) : $l_2 = SB = a$, $r_2 = MB = \frac{a}{2}$, $h_2 = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích xung quanh của khối K là

$$S_{xq} = S_{(H_1)} - S_{(H_2)} = \pi l_1 r_1 - \pi l_2 r_2 = 2\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$



Câu 13. Cho khối cầu tâm I , bán kính R . Gọi S là điểm cố định thỏa mãn $IS = 2R$. Từ S kẻ tiếp tuyến SM với khối cầu (với M là tiếp điểm). Tập hợp các đoạn thẳng SM khi M thay đổi là mặt xung quanh của hình nón đỉnh S . Tính diện tích xung quanh của hình nón đó, biết rằng tập hợp tất cả điểm M là đường tròn có chu vi là $2\pi\sqrt{3}$.

A. $S_{xq} = 6\pi$.

B. $S_{xq} = \frac{9\pi}{2}$.

C. $S_{xq} = 3\pi$.

D. $S_{xq} = 12\pi$.

Lời giải tham khảo

Do tập hợp các điểm M là đường tròn tâm H , chu vi

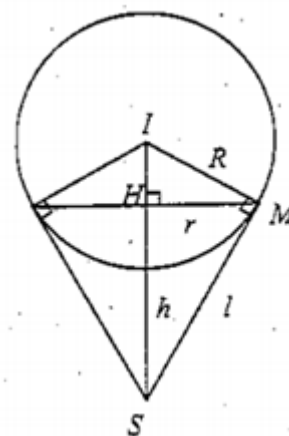
$$2\pi\sqrt{3} \Rightarrow 2\pi MH = 2\pi\sqrt{3} \Rightarrow r = MH = \sqrt{3}.$$

Xét $\triangle ISM$ vuông tại M , ta có :

$$SM^2 = IS^2 - IM^2 = 3R^2 \Rightarrow l = SM = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Hơn nữa, } \frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MI^2} + \frac{1}{MS^2} = \frac{4}{3R^2} \Rightarrow R = 2 \Rightarrow l = 2\sqrt{3}.$$

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = 6\pi$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 14. Một hình tứ diện đều cạnh bằng a có một đỉnh trùng với đỉnh của hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

A. $S_{xq} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^2$.

B. $S_{xq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi a^2$.

C. $S_{xq} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi a^2$.

D. $S_{xq} = \sqrt{3} \pi a^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$. D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{2}$.

Câu 16. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón được sinh ra bởi đoạn thẳng AC' của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh b khi quay xung quanh trục AA' .

A. $S_{xq} = \pi b^2$. B. $S_{xq} = \pi b^2 \sqrt{2}$. C. $S_{xq} = \pi b^2 \sqrt{3}$. D. $S_{xq} = \pi b^2 \sqrt{6}$.

Câu 17. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón biết thiết diện qua trục của nó là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a .

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$. B. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{2}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}$. D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$.

✎ Dạng 79. Diện tích toàn phần của hình nón

Câu 18. Hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh $2a$, diện tích toàn phần là S_1 và mặt cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có diện tích S_2 . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $S_1 = S_2$. B. $S_2 = 2S_1$. C. $S_1 = 2S_2$. D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải tham khảo

Bán kính đáy của hình nón là A . Đường sinh của hình nón là $2a$, nên Ta có $S_1 = 3\pi a^2$

Mặt cầu có bán kính là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $S_2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$

Do vậy $S_1 = S_2$.

Câu 19. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đã cho.

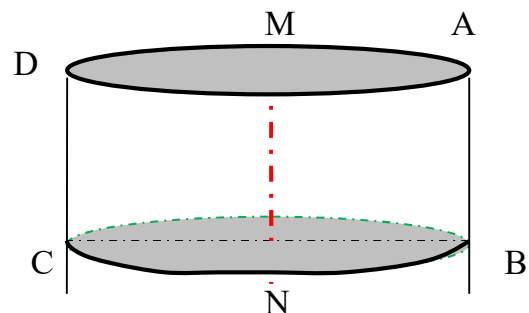
- A. $S_{tp} = 2\pi a^2$. B. $S_{tp} = 4\pi a^2$. C. $S_{tp} = 6\pi a^2$. D. $S_{tp} = \pi a^2$.

Lời giải tham khảo

Diện tích đáy $S_{\diamond} = \pi a^2$

Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi a^2$

Diện tích toàn phần $S_{tp} = 4\pi a^2$



Câu 20. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = \sqrt{2}a$; khi quay tam giác ABC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ABC tạo thành một hình nón tròn xoay có diện tích toàn phần S_{tp} bằng bao nhiêu?

- A. $S_{tp} = \sqrt{2}\pi a^2$. B. $S_{tp} = (\sqrt{2} + 2)\pi a^2$.
C. $S_{tp} = (\sqrt{2} + 1)\pi a^2$. D. $S_{tp} = 2\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải tham khảo

$r = AB = a; S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \sqrt{2}\pi a^2 + \pi a^2 = (\sqrt{2} + 1)\pi a^2$.

Câu 21. Cho hình tròn tâm S , bán kính $R = 2$. Cắt đi $\frac{1}{4}$ hình tròn rồi dán lại để tạo ra mặt xung quanh của một hình nón N . Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón N .

- A. $S_{tp} = 3\pi$. B. $S_{tp} = (3 + 2\sqrt{3})\pi$. C. $S_{tp} = \frac{21\pi}{4}$. D. $S_{tp} = (3 + 4\sqrt{3})\pi$.

Lời giải tham khảo

Xét hình nón N có độ dài đường sinh là $l = R = 2$.

6A. Mặt nón

Do mặt xung quanh của hình nón là $\frac{3}{4}$ hình tròn ban đầu nên ta có hệ thức :

$$\frac{3}{4}(2\pi R) = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{3R}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{tp} = \pi r(l + r) = \pi \frac{3}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{21\pi}{4}.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 22. Một khối nón có thể tích bằng 96π (cm³), tỉ số giữa đường cao và đường sinh là 4 : 5. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón đã cho.

A. $S_{tp} = 90\pi$ (cm²). B. $S_{tp} = 96\pi$ (cm²). C. $S_{tp} = 84\pi$ (cm²). D. $S_{tp} = 98\pi$ (cm²).

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 23. Mặt nón tròn xoay có đỉnh S . Gọi I là tâm của đường tròn đáy. Biết đường sinh bằng $a\sqrt{2}$, góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón đã cho.

A. $S_{tp} = \pi a^2$. B. $S_{tp} = 3\pi a^2$. C. $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{2}$. D. $S_{tp} = \frac{3\pi a^2}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

6A. Mặt nón

Câu 24. Trong không gian, cho hình thang cân $ABCD$ có $AB // CD$, $AB = a$, $CD = 2a$, $AD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi K là khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục MN . Tính diện tích toàn phần S_{tp} của K .

A. $S_{tp} = \frac{9\pi a^2}{4}$.

B. $S_{tp} = \frac{17\pi a^2}{4}$.

C. $S_{tp} = \frac{7\pi a^2}{4}$.

D. $S_{tp} = \frac{11\pi a^2}{4}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Cho khối nón có độ dài đường sinh l , chiều cao h và bán kính đáy r . Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón đã cho.

A. $S_{tp} = \pi rl + 2\pi r$.

B. $S_{tp} = \pi rh + 2\pi r$.

C. $S_{tp} = \pi r^2 + 2\pi r$.

D. $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Dạng 80. Diện tích thiết diện của hình nón

Câu 26. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 4$, có bán kính đáy $r = 3$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón nhưng không qua trục của hình nón và cắt hình nón theo giao tuyến là một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng 2. Tính diện tích S của thiết diện được tạo ra.

A. $S = \sqrt{91}$.

B. $S = 2\sqrt{3}$.

C. $S = \sqrt{19}$.

D. $S = 2\sqrt{6}$.

Lời giải tham khảo

Gọi M là trung điểm của cạnh đáy AB của tam giác cân SAB .

$$\text{Suy ra } OM = \sqrt{r^2 - \frac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow SM = 2\sqrt{6} \Rightarrow S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} SM \cdot AB = 2\sqrt{6}.$$

Câu 27. Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90° . Cắt hình nón bằng một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và đáy của hình nón bằng 60° . Tính diện tích S của thiết diện được tạo ra.

A. $S = \frac{a^2 \sqrt{2}}{3}$.

B. $S = \frac{a^2 \sqrt{2}}{3}$.

C. $S = \frac{3a^2}{2}$.

D. $S = \frac{2a^2}{3}$.

Lời giải tham khảo

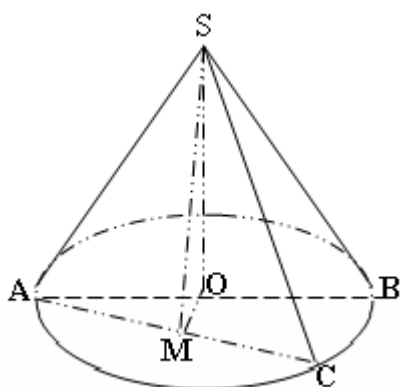
$$\widehat{SMO} = 60^\circ$$

$$SM = \frac{SO}{\sin \widehat{SMO}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$OM = \frac{1}{2} SM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$AC = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} SM \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{2}}{3}.$$



Dạng 81. Diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón

Câu 28. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp mặt phẳng đáy góc 60° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của khối nón tròn xoay đỉnh S , đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

A. $S_{xq} = \pi a^2, V = \frac{\pi}{3} a^3$.

B. $S_{xq} = \frac{2\pi}{3} a^2, V = \frac{\pi}{9} a^3$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi}{3} a^2, V = \frac{\pi}{6} a^3$.

D. $S_{xq} = 2\pi a^2, V = \frac{\pi}{12} a^3$.

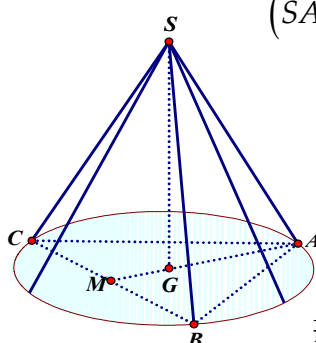
Lời giải tham khảo

Gọi G là trọng tâm ΔABC , suy ra G là tâm đường tròn đáy của hình nón

$$(\widehat{SA, (ABC)}) = (\widehat{SA, GA}) = \widehat{SAG} = 60^\circ \text{ và gọi } M \text{ là trung điểm } BC$$

Bán kính đường tròn đáy của hình nón là

$$R = GA = \frac{2}{3} MA = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Chiều cao của hình nón là $h = SG = AG \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Đường sinh của hình nón là $l = SA = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $S_{xq} = \pi Rl = \pi \frac{a\sqrt{3}}{3} \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a^2}{3}, V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2}{3} a = \frac{\pi a^3}{9}$.

Câu 29. Cho hình nón (N) có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Tính thể tích V và diện tích xung quanh S_{xq} của khối nón (N) .

A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}, S_{xq} = 4\pi a^2$.

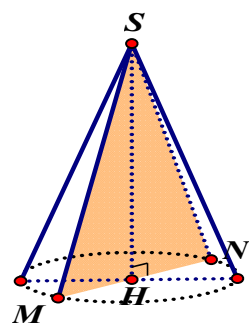
B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}, S_{xq} = 2\pi a^2$.

C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}, S_{xq} = 4\pi a^2$.

D. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}, S_{xq} = 2\pi a^2$.

Lời giải tham khảo

Gọi S là đỉnh và ΔSMN là thiết diện qua trục của hình nón (N)



Chiều cao của hình nón (N) là $h = SH = a\sqrt{3}$ với H là trung điểm MN

Đường sinh của hình nón (N) là $l = SM = 2a$

Bán kính đường tròn đáy của hình nón (N) là $R = MH = a$

Do đó $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$,

$S_{xq} = \pi Rl = \pi a 2a = 2\pi a^2$

Câu 30. Trong không gian cho tam giác IOM số đo góc $\widehat{IOM} = 30^\circ$ và cạnh $IM = a$. Khi quay tam giác IOM quanh cạnh góc vuông OI , thì đường gấp khúc IOM tạo thành một hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của khối nón đã cho.

A. $S = 2\pi a^2; V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

B. $S = 3\pi a^2; V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

C. $S = 2\pi a^2; V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$.

D. $S = 2\pi a^2; V = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $OM = 2a$, $OI = a\sqrt{3}$, A. $S_{xq} = 2\pi a^2; V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 31. Cho hình nón (N) có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của hình nón (N) .

A. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{2}, V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

B. $S_{xq} = 2\pi a^2, V = \frac{\pi a^3}{3}$.

C. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{2}, V = \frac{\pi a^3}{3}$.

D. $S_{xq} = 2\pi a^2, V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp mặt phẳng đáy góc 45° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của hình nón tròn xoay đỉnh S , đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.

A. $S_{xq} = 2\pi a^2, V = \frac{\pi}{24} a^3$.

B. $S_{xq} = \pi a^2, V = \frac{\pi\sqrt{3}}{24} a^3$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi}{4} a^2, V = \frac{\pi\sqrt{6}}{24} a^3$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi}{2} a^2, V = \frac{\pi\sqrt{2}}{24} a^3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 33. Cho hình tứ diện đều $S.ABC$ cạnh a . Tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của hình nón tròn xoay đỉnh S , đáy là đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

A. $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}a^2, V = \frac{\pi}{108}a^3$.

B. $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}a^2, V = \frac{\pi\sqrt{2}}{108}a^3$.

C. $S_{xq} = \frac{2\pi}{3}a^2, V = \frac{\pi\sqrt{3}}{108}a^3$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi}{4}a^2, V = \frac{\pi\sqrt{6}}{108}a^3$.

.....

.....

Dạng 82. Thể tích khối nón

Câu 34. Tính thể tích V của khối nón tròn xoay biết khoảng cách từ tâm của đáy đến đường sinh bằng $\sqrt{3}$ và thiết diện qua trục là một tam giác đều.

A. $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải tham khảo

Bán kính hình nón: $R = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2$, chiều cao hình nón: $h = R \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 35. Trong không gian cho tam giác OIM vuông tại I , $\widehat{IOM} = 30^\circ$, $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh OI thì tạo thành một hình nón tròn xoay. Tính thể tích V của khối nón tròn xoay được tạo thành.

A. $V = \frac{\pi a^3}{\sqrt{3}}$. B. $V = \pi a^3 \sqrt{3}$. C. $V = \frac{2\pi a^3}{\sqrt{3}}$. D. $V = 2\pi a^3 \sqrt{3}$.

Lời giải tham khảo

$$h = OI = a\sqrt{3}, V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\pi a^3}{\sqrt{3}}.$$

Câu 36. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a quay xung quanh cạnh AC của nó. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{9\pi a^3}{18}$. C. $V = \frac{27\pi a^3}{4}$. D. $V = \frac{27\pi a^3}{8}$.

Lời giải tham khảo

Khi quay tam giác đều ABC quanh cạnh AC , khối tròn xoay tạo thành là hai khối nón tròn xoay có trục là AC , đường tròn đáy có bán kính bằng chiều cao hạ từ B .

$$BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OA = \frac{a}{2}; V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Tính thể tích V của hình nón đỉnh S đáy là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

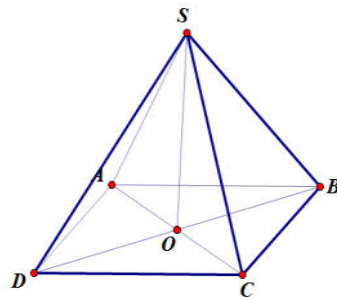
A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{6}$. D. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Lời giải tham khảo

Tam giác SAB đều $\Rightarrow SA = a$;

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$R = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \pi \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$



Câu 38. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a . Tính thể tích V của hình nón đã cho.

- A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$. B. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$. C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$. D. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Lời giải tham khảo

$$l = a; R = \frac{a}{2}; h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}.$$

Câu 39. Tính thể tích V của khối nón có đường sinh bằng 10 và bán kính đáy bằng 6.

- A. $V = 360\pi$. B. $V = 96\pi$. C. $V = 288\pi$. D. $V = 60\pi$.

Lời giải tham khảo

$$l = 10, R = 6, h = \sqrt{l^2 - R^2} = 8 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = 96\pi.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN



Câu 40. Cho khối nón có chiều cao bằng 8 và độ dài đường sinh bằng 10. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

- A. $V = 96\pi$. B. $V = 140\pi$. C. $V = 128\pi$. D. $V = 124\pi$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 41. Cho khối nón có chiều cao bằng 6 và bán kính đường tròn đáy bằng 8. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

- A. $V = 160\pi$. B. $V = 144\pi$. C. $V = 128\pi$. D. $V = 120\pi$.

.....

6A. Mặt nón

Câu 42. Cho khối nón có bán kính đáy là $3a$, đường sinh là $5a$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

- A. $V = 12\pi a^3$. B. $V = 15\pi a^3$. C. $V = 45\pi a^3$. D. $V = 16\pi a^3$.

Câu 43. Khối chóp tứ giác đều (H) có thể tích là V . Tính thể tích $V_{(N)}$ khối nón (N) nội tiếp hình chóp (H) .

- A. $V_{(N)} = \frac{\pi V}{4}$. B. $V_{(N)} = \frac{\pi V}{2}$. C. $V_{(N)} = \frac{\pi V}{12}$. D. $V_{(N)} = \frac{\pi V}{6}$.

Câu 44. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC thu được hình nón tròn xoay. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

- A. $V = \frac{2\pi a^3}{3}$. B. $V = 2\pi a^3$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{5}}{3}$. D. $V = \frac{\pi a^3}{2}$.

6A. Mặt nón

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Tính thể tích V của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $V = \frac{\pi a^2}{3}$.

B. $V = \frac{\pi a^3}{3}$.

C. $V = \frac{\pi a^3}{12}$.

D. $V = \frac{\pi a^2}{12}$.

Câu 46. Một hình nón có diện tích xung quanh bằng 20π (cm²) và diện tích toàn phần bằng 36π (cm²). Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = 12\pi$ (cm³).

B. $V = 6\pi$ (cm³).

C. $V = 16\pi$ (cm³).

D. $V = 56\pi$ (cm³).

Câu 47. Trong không gian, cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB = a$, $CD = 2a$, $AD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi κ là khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục MN . Tính thể tích V của khối κ .

A. $V = \frac{5\pi a^3 \sqrt{3}}{8}$.

B. $V = \frac{5\pi a^3 \sqrt{3}}{16}$.

C. $V = \frac{7\pi a^3}{12}$.

D. $V = \frac{7a^3 \sqrt{3}}{24}$.

6A. Mặt nón

Câu 48. Một khối nón có chiều cao bằng 4 và bán kính đường tròn đáy bằng 6. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = 48\pi$.

B. $V = 144\pi$.

C. $V = 12\pi$.

D. $V = 24\pi$.

Dạng 83. Tỉ số thể tích (khối nón)

Câu 49. Cho mặt nón tròn xoay đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O , bán kính đáy là R có thể tích là V_1 . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua đỉnh S và tạo với mặt đáy một góc 60° . (P) cắt đường tròn đáy tại hai điểm A, B mà $AB = R\sqrt{2}$. Gọi V_2 là thể tích của khối nón sinh bởi tam giác SAB khi quay quanh trục đối xứng của nó. Tính $\frac{V_2}{V_1}$.

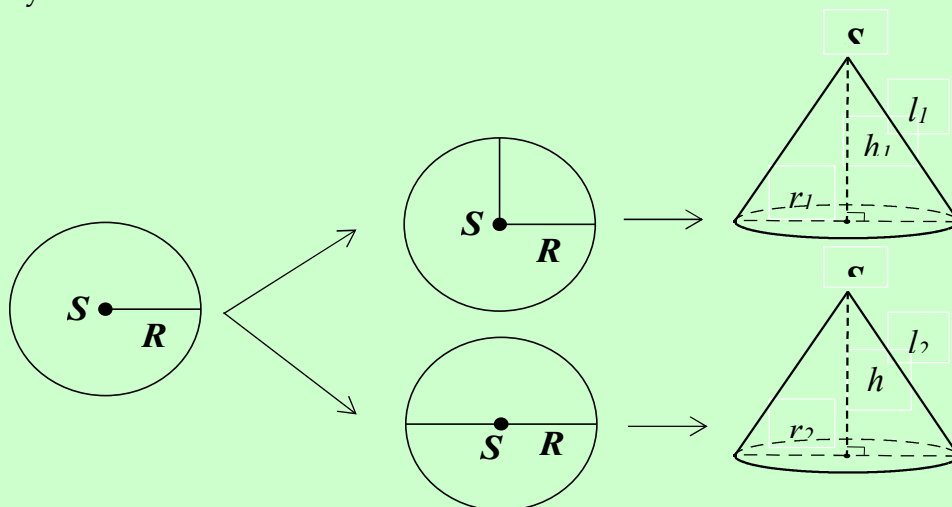
- A. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{2\sqrt{3}}{7}$. D. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải tham khảo

Gọi H là hình chiếu của O lên AB . Khi đó: $OH = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $SH = R\sqrt{2}$, $SO = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot SH = \frac{1}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \text{ Suy ra } \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 50. Từ một hình tròn có tâm S , bán kính R , người ta tạo ra các hình nón theo hai cách sau đây:



- **Cách 1:** Cắt bỏ $\frac{1}{4}$ hình tròn rồi ghép hai mép lại được hình nón N_1 .
- **Cách 2:** Cắt bỏ $\frac{1}{2}$ hình tròn rồi ghép hai mép lại được hình nón N_2 .

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón N_1 và khối nón N_2 . Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9\sqrt{7}}{8\sqrt{3}}$.

Lời giải tham khảo

Cách ghép 1: Xét hình nón N_1 có độ dài đường sinh là $l_1 = R$.

6A. Mặt nón

Do mặt xung quanh của hình nón N_1 là $\frac{3}{4}$ hình tròn bán đầu nên ta có hệ thức:

$$\frac{3}{4}(2\pi R) = 2\pi r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{3R}{4}. \text{ Suy ra } h_1 = \sqrt{l_1^2 - r_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{9R^2}{16}} = \frac{R\sqrt{7}}{4}.$$

Cách ghép 2: Xét hình nón N_2 có độ dài đường sinh là $l_2 = R$. Tương tự, ta cũng tính

$$\text{được: } h_2 = \sqrt{l_2^2 - r_2^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2} = \frac{9\sqrt{7}}{8\sqrt{3}}.$$

Câu 51. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. gọi V_1 là thể tích khối trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$; V_2 là thể tích khối nón có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và đỉnh trùng tâm hình vuông $A'B'C'D'$. Tính tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$.

A. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}.$

B. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{3}.$

C. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{4}.$

D. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{9}.$

✎ Dạng 84. Bài tập tổng hợp về mặt nón

Câu 52. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O , bán kính $R = 5$. Một thiết diện qua đỉnh S sao cho tam giác SAB đều, cạnh bằng 8. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAB) .

- A. $d = \frac{4}{3}\sqrt{13}$. B. $d = \frac{3}{4}\sqrt{13}$. C. $d = 3$. D. $d = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải tham khảo

$SO \perp (OAB)$.

Kẻ $SH \perp AB \Rightarrow OH \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow (SAB) \perp (SOH)$

Kẻ $OI \perp SH \Rightarrow OI \perp (SAB)$ nên $d = OI$

$$\Delta SOA : OS^2 = 64 - 25 = 39$$

$$\Delta OHA : OH^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{39} = \frac{16}{117} \Rightarrow OI = \frac{3}{4}\sqrt{13}.$$

Câu 53. Cho hình trụ tròn xoay, đáy là 2 đường tròn (C) tâm O và (C') tâm O' . Xét hình nón tròn xoay có đỉnh O' và đáy là đường tròn (C) . Xét hai câu :

(I) Nếu thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều $O'AB$ thì thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABB'A'$.

(II) Nếu thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABB'A'$ thì thiết diện qua trục của hình nón là tam giác $O'AB$ vuông cân tại O' .

Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Cả 2 câu sai. D. Cả 2 câu đúng.

Lời giải tham khảo

Gọi $O'AB$ là thiết diện qua trục của hình nón.

$ABB'A'$ là thiết diện qua trục của hình trụ.

Xét (I) : Nếu $\Delta O'AB$ là tam giác đều, $AB = a$ thì $O'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

- $A'A = O'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $ABB'A'$ chỉ là hình chữ nhật. Vậy (I) sai.

Xét (II) : Nếu $ABB'A'$ là hình vuông, $AB = a$, thì $OO' = a$: Sai (tam giác vuông thì đường trung tuyến bằng một nửa cạnh huyền).

Như vậy $\Delta O'AB$ không phải là tam giác vuông cân tại O' : (II) sai.

Câu 54. Cho mặt nón có chiều cao $h = 6$, bán kính đáy $r = 3$. Một hình lập phương đặt trong mặt nón sao cho trục của mặt nón đi qua tâm hai đáy của hình lập phương, một đáy của hình lập phương nội tiếp trong đường tròn đáy của hình nón, các đỉnh của đáy còn lại thuộc các đường sinh của hình nón. Tính độ dài cạnh x của hình lập phương?

- A. $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $x = 6(\sqrt{2} - 1)$. C. $x = 3(2 + \sqrt{2})$. D. $x = 3$.

Lời giải tham khảo

Gọi độ dài của hình lập phương là x , $0 < x < 3\sqrt{2}$. Giải sử hình lập phương

$ABCD.A'B'C'D'$ nằm trong hình nón (như hình vẽ)

Do tam giác SIC đồng dạng với tam giác SOB , ta có:

$$\frac{SI}{SO} = \frac{IC}{ON} \Leftrightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{6}{1+\sqrt{2}} = 6(\sqrt{2} - 1).$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 55. Cho hình nón đỉnh S có đường sinh là a , góc giữa đường sinh và đáy là 30° .

Mặt phẳng (P) hợp với đáy một góc 60° và cắt hình nón theo hai đường sinh SA và SB .

Tính khoảng cách d từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng (P) .

- A. $d = \frac{a}{4}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{12}$. C. $d = \frac{3a}{4}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 56. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = \sqrt{5}$, bán kính đáy $r = 3$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón nhưng không qua trục của hình nón và cắt hình nón theo giao tuyến là một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng 4. Gọi O là tâm của hình tròn đáy. Tính khoảng cách d từ điểm O đến mặt phẳng (P) .

A. $d = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. $d = \sqrt{10}$.

C. $d = \sqrt{5}$.

D. $d = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 57. Cho hình trụ T . Một hình nón N có đáy là một đáy của hình trụ, đỉnh S của hình nón là tâm của đáy còn lại. Biết tỉ số giữa diện tích xung quanh của hình nón và diện tích xung quanh của hình trụ bằng $\frac{3}{2}$. Gọi β là góc ở đỉnh của hình nón đã cho. Tính $\cos \beta$.

A. $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $\cos \beta = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

C. $\cos \beta = \frac{-7}{9}$.

D. $\cos \beta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6B. MẶT TRỤ**Dạng 85. Diện tích xung quanh của hình trụ**

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 6, AD = 4$ quay quanh cạnh AB . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ được tạo thành.

- A. $S_{xq} = 24\pi$. B. $S_{xq} = 32\pi$. C. $S_{xq} = 48\pi$. D. $S_{xq} = 80\pi$.

Lời giải tham khảo

$$r = AD = 4, l = h = AB = 6 \Rightarrow S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 48\pi.$$

Câu 2. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$ và $BC = 2$. Gọi P, Q lần lượt là các điểm trên cạnh AB và CD sao cho $BP = 1, QD = 3QC$. Quay hình chữ nhật $APQD$ xung quanh trục PQ ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ.

- A. $S_{xq} = 10\pi$. B. $S_{xq} = 12\pi$. C. $S_{xq} = 4\pi$. D. $S_{xq} = 6\pi$.

Lời giải tham khảo

Quay hình chữ nhật $APQD$ xung quanh trục PQ ta được một hình trụ có $h = PQ = 2$, $r = AP = 3$ nên có diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 2 = 12\pi$.

Câu 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có bán kính đáy a , thiết diện qua trục là một hình vuông.

- A. $S_{xq} = 2\pi a^2$. B. $S_{xq} = 4\pi a^2$. C. $S_{xq} = \pi a^2$. D. $S_{xq} = 3\pi a^2$.

Lời giải tham khảo

$$h = l = 2a, r = a. \Rightarrow S_{xq} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot 2a = 4\pi a^2.$$

Câu 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có bán kính đáy $r = 10 \text{ cm}$ và chiều cao $h = 30 \text{ m}$.

- A. $S_{xq} = 600\pi (\text{cm}^2)$. B. $S_{xq} = 300\pi (\text{cm}^2)$. C. $S_{xq} = 3000\pi (\text{cm}^3)$. D. $S_{xq} = 600\pi (\text{cm}^3)$.

Lời giải tham khảo

+ Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh = 600\pi$.

Câu 5. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có đường sinh $l = 15$, và mặt đáy có đường kính 10.

- A. $S_{xq} = 150\pi$. B. $S_{xq} = 150\pi^3$. C. $S_{xq} = 150\pi^2$. D. $S_{xq} = 75\pi$.

Lời giải tham khảo

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 5 \cdot 15 = 150\pi$.

Câu 6. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có bán kính đáy 3 cm , đường cao 4 cm .

- A. $S_{xq} = 24\pi (\text{cm}^2)$. B. $S_{xq} = 22\pi (\text{cm}^2)$. C. $S_{xq} = 26\pi (\text{cm}^2)$. D. $S_{xq} = 20\pi (\text{cm}^2)$.

Lời giải tham khảo

$$S_{xq} = 2\pi Rl = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi (\text{cm}^2).$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 7. Cho hình trụ có chiều cao bằng $2R$, biết rằng chiều cao gấp hai lần bán kính đường tròn đáy. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ đã cho.

- A. $S_{xq} = 8\pi R^2$. B. $S_{xq} = 6\pi R^2$. C. $S_{xq} = 4\pi R^2$. D. $S_{xq} = 2\pi R^2$.

Câu 8. Trong không gian cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và CD . Quay hình vuông quanh trục IH ta được một hình trụ tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ đã cho.

- A. $S_{xq} = \pi a^2$. B. $S_{xq} = 2\pi a^2$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}$. D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{3}$.

Câu 9. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều cạnh bằng a .

- A. $S_{xq} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. C. $S_{xq} = \frac{4\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. D. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{3}$.

Câu 10. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có bán kính đáy bằng a , đường sinh bằng $a\sqrt{2}$.

- A. $S_{xq} = 2\pi a^2$. B. $S_{xq} = 2\pi a\sqrt{3}$. C. $S_{xq} = 2\pi a^2 \sqrt{3}$. D. $S_{xq} = 2\pi a^2 \sqrt{2}$.

6B. Mặt trụ

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tính S_{xq} .

A. $S_{xq} = \pi a^2$.

B. $S_{xq} = \pi\sqrt{2}a^2$.

C. $S_{xq} = \pi\sqrt{3}a^2$.

D. $S_{xq} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$.

.....

.....

Câu 12. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V và diện tích xung quanh S_{xq} của lăng trụ tam giác đều ngoại tiếp hình trụ.

A. $V = 3a^3\sqrt{6}$ và $S_{xq} = 6a^2\sqrt{6}$.

B. $V = 3a^3\sqrt{3}$ và $S_{xq} = 2a^2\sqrt{6}$.

C. $V = 2a^3\sqrt{6}$ và $S_{xq} = 3a^2\sqrt{6}$.

D. $V = 6a^3\sqrt{2}$ và $S_{xq} = 3a^2\sqrt{6}$.

.....

.....

Câu 13. Cắt mặt xung quanh của một hình trụ theo một đường sinh rồi trải nó ra trên một mặt phẳng thì ta được một hình chữ nhật. Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ, S_2 là diện tích hình chữ nhật. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2} = 2$.

B. $\frac{S_1}{S_2} = 1$.

C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$.

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$.

.....

.....

Câu 14. Người ta bỏ 3 quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 3 lần đường kính của quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của 3 quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2} = 1$.

B. $\frac{S_1}{S_2} = 2$.

C. $\frac{S_1}{S_2} = 1,5$.

D. $\frac{S_1}{S_2} = 1,2$.

6B. Mặt trụ

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 15. Người ta bỏ 5 quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 5 lần đường kính bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của năm quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ.

Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{S_1}{S_2} = 1$.

C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$.

D. $\frac{S_1}{S_2} = 2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 16. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có đường cao $h = r\sqrt{3}$, bán kính đáy là r .

A. $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi r$.

B. $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi r^2$.

C. $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi r^3$.

D. $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi r^4$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ Dạng 86. Diện tích toàn phần của hình trụ

Câu 17. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình trụ (T).
 Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đã cho.

- A. $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$. B. $S_{tp} = 2\pi r l + \pi r^2$. C. $S_{tp} = 2\pi r l + 2\pi r^2$. D. $S_{tp} = 2\pi r h + \pi r^2$.

Câu 18. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ có bán kính đáy bằng R và thiết diện qua trục là một hình vuông.

- A. $S_{tp} = 4\pi R^2$. B. $S_{tp} = 6\pi R^2$. C. $S_{tp} = 5\pi R^2$. D. $S_{tp} = 2\pi R^2$.

Lời giải tham khảo

$$l = 2R, r = R; S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rl = 6\pi R^2.$$

Câu 19. Mặt phẳng đi qua trục của một hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh $4R$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đã cho.

- A. $24\pi R^2$. B. $20\pi R^2$. C. $16\pi R^2$. D. $4\pi R^2$.

Lời giải tham khảo

Chiều cao của hình trụ là $4R$, bán kính đường tròn đáy là $2R$.

$$\text{Diện tích toàn phần là } S_{tp} = S_{xq} + 2S = 2\pi \cdot 2R \cdot 4R + 2 \cdot \pi \cdot (2R)^2 = 24\pi R^2.$$

Câu 20. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đã cho.

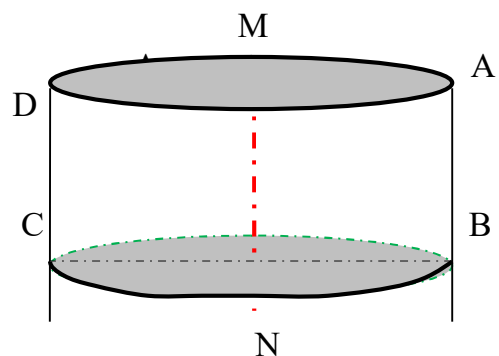
- A. $S_{tp} = 2\pi a^2$. B. $S_{tp} = 4\pi a^2$. C. $S_{tp} = 6\pi a^2$. D. $S_{tp} = \pi a^2$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Diện tích đáy } S_{\diamond} = \pi a^2$$

$$\text{Diện tích xung quanh } S_{xq} = 2\pi a^2$$

$$\text{Diện tích toàn phần } S_{tp} = 4\pi a^2$$



**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 21. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ biết thiết diện đi qua trục của một hình trụ là hình vuông, cạnh $2a$.

A. $S_{tp} = 8\pi a^2$.

B. $S_{tp} = 6\pi a^2$.

C. $S_{tp} = 4\pi a^2$.

D. $S_{tp} = 2\pi a^2$.

Câu 22. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$ và $AD = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đã cho.

A. $S_{tp} = 4\pi$.

B. $S_{tp} = 8\pi$.

C. $S_{tp} = 12\pi$.

D. $S_{tp} = 16\pi$.

Câu 23. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$.

A. $S_{tp} = 2\pi a^2 (1 + \sqrt{3})$.

B. $S_{tp} = \pi a^2 \sqrt{3}$.

C. $S_{tp} = \pi a^2 (1 + \sqrt{3})$.

D. $S_{tp} = \pi a^2 (\sqrt{3} - 1)$.

Câu 24. Trong không gian, cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $3a$ và cạnh bên bằng $4a$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ tam giác đều đã cho.

A. $S_{tp} = a^2 8\sqrt{3}\pi$.

B. $S_{tp} = a\pi (8\sqrt{3} + 6)$.

C. $S_{tp} = 2a\pi (8\sqrt{3} + 6)$.

D. $S_{tp} = a^2 \pi (8\sqrt{3} + 6)$.

6B. Mặt trụ

Câu 25. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ có thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$.

A. $S_{tp} = a^2 \pi \sqrt{3}$. B. $S_{tp} = \frac{27 \pi a^2}{2}$. C. $S_{tp} = \frac{a^2 \pi \sqrt{3}}{2}$. D. $S_{tp} = \frac{13 a^2 \pi}{6}$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✂ Dạng 87. Diện tích thiết diện của hình trụ

Câu 26. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5a$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng $7a$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3a$. Tính diện tích S của thiết diện được tạo nên.

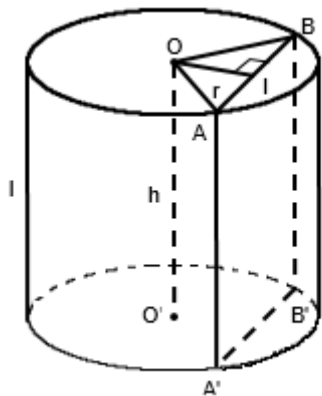
A. $S = 56a^2$.

B. $S = 35a^2$.

C. $S = 21a^2$.

D. $S = 70a^2$.

Lời giải tham khảo



Tính

$$* OA = 5a; AA' = 7a$$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI = 3a$

$$* AA' = 7a \quad * \text{Tính: } AB = 2AI = 2.4a = 8a$$

$$* \text{Tính: } AI = 4a \text{ (do } \triangle OAI \text{ vuông tại } I)$$

$$* S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' = 8 \cdot 7a = 56a^2.$$

Câu 27. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5 \text{ cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7 cm . Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm . Tính diện tích S của thiết diện được tạo nên.

A. $S = 56 \text{ cm}^2$.

B. $S = 60 \text{ cm}^2$.

C. $S = 54 \text{ cm}^2$.

D. $S = 62 \text{ cm}^2$.

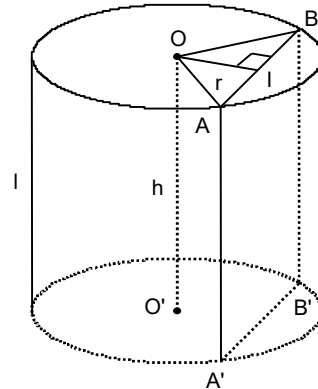
Lời giải tham khảo

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI = 3 \text{ cm}$.

Ta có $AI = 4 \text{ cm}$ (vì tam giác OIA vuông tại I).

Suy ra $AB = 2AI = 8$.

Vậy diện tích thiết diện: $S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' = 8 \cdot 7 = 56 \text{ cm}^2$



**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 28. Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính diện tích đáy của cái lọ hình trụ.

A. $S = 16\pi r^2$.

B. $S = 18\pi r^2$.

C. $S = 9\pi r^2$.

D. $S = 36\pi r^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 29. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{3a}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$. Tính diện tích S thiết diện của hình trụ bị cắt bởi (α) .

A. $S = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$.

B. $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $S = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

D. $S = \frac{4a^2\sqrt{5}}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 30. Cho hình trụ có chiều cao $h = 2$, bán kính đáy $r = 3$. Một mặt phẳng (P) không vuông góc với đáy của hình trụ, lần lượt cắt hai đáy theo đoạn giao tuyến AB và CD sao cho $ABCD$ là hình vuông. Tính diện tích S của hình vuông $ABCD$.

A. $S = 12\pi$.

B. $S = 12$.

C. $S = 20$.

D. $S = 20\pi$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 88. Thể tích khối trụ

Câu 31. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối trụ được tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh cạnh AD .

- A. $V = 3\pi a^3\sqrt{3}$. B. $V = \pi a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = 3\pi a^3$.

Lời giải tham khảo

Khối trụ có bán kính đáy $R = AB = a$; chiều cao $h = AD = a\sqrt{3}$ nên có thể tích $V = \pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 32. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Tính thể tích V của khối trụ được tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh cạnh MN .

- A. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \pi a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải tham khảo

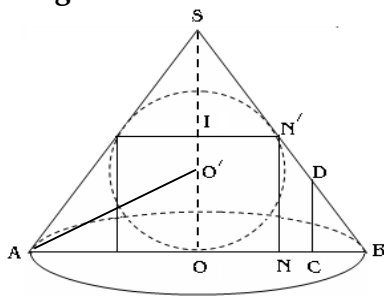
Khối trụ có bán kính đáy $R = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; chiều cao $h = AD = a\sqrt{3}$ nên có thể tích

$$V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 33. Cho hình nón có bán kính đáy R và đường sinh tạo với mặt đáy một góc 60° . Một hình trụ được gọi là nội tiếp hình nón nếu một đường tròn đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón, đáy còn lại nằm trên mặt đáy của hình nón. Biết bán kính của hình trụ bằng một nửa bán kính đáy của hình nón. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{24}$. C. $V = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{\pi R^3}{8}$.

Lời giải tham khảo



$$\Delta SAB \text{ đều} \Rightarrow SA = 2R, SO = R\sqrt{3}$$

$$N: \text{trung điểm } OB; ON: \text{bán kính hình trụ } ON = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow NN' = IO = \frac{1}{2}SO = \frac{R\sqrt{3}}{2};$$

$$V = \pi \cdot ON^2 \cdot IO = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 34. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A ; $AB = AC = a$; đường chéo BC' của mặt bên $BB'C'C$ tạo với mặt bên $AA'C'C$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $V = \pi a^3\sqrt{2}$. C. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải tham khảo

Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ có bán kính đáy $R = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$\widehat{AC'B} = 30^\circ \Rightarrow AC' = a\sqrt{3} \Rightarrow CC' = a\sqrt{2}$$

6B. Mặt trụ

$\Rightarrow$ Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ có bán kính đáy $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ chiều cao của khối trụ $h = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối trụ bằng $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{2}$.

Câu 35. Tính thể tích V của khối trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh $2a$.

A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

B. $V = 4\pi a^3$.

C. $V = 2\pi a^3$.

D. $V = \frac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải tham khảo

Khối trụ có bán kính đáy $R = a$; chiều cao $h = 2a$ nên có thể tích $V = 2\pi a^3$.

Câu 36. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy bằng R và thiết diện qua trục là một hình vuông.

A. $V = 2\pi R^3$.

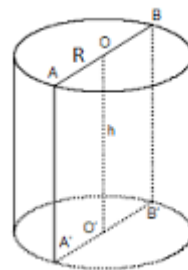
B. $V = \frac{2\pi R^3}{3}$.

C. $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

D. $V = 4\pi R^3$.

Lời giải tham khảo

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot OA^2 \cdot OO' = \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$



Câu 37. Một hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a . Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = \frac{1}{2} a^3 \pi$.

B. $V = \frac{1}{4} a^3 \pi$.

C. $V = \frac{1}{3} a^3 \pi$.

D. $V = a^3 \pi$.

Lời giải tham khảo

Vì hình tròn nội tiếp hình vuông nên có bán kính là $\frac{a}{2}$.

Thể tích khối trụ là $V = B \cdot h = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 38. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy bằng 2 và có chiều cao bằng 4.

A. $V = 8\pi$.

B. $V = 24\pi$.

C. $V = 32\pi$.

D. $V = 16\pi$.

Lời giải tham khảo

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4 \cdot 4 = 16\pi.$$

Câu 39. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O, r) và (O', r') cách nhau một khoảng $2\sqrt{2}a$, trên đường tròn đáy (O, r) lấy A và B sao cho diện tích tam giác $O'AB$ bằng $2a^2$. Tính thể tích V của khối trụ đã cho, biết $AB = a$.

A. $V = 16\pi a^3$.

B. $V = 12\pi a^3$.

C. $V = 8\pi a^3$.

D. $V = \frac{16}{3} \pi a^3$.

Lời giải tham khảo

Gọi H là trung điểm AB . $O'H = 4a$; $r = 2\sqrt{2}a$; $h = 2\sqrt{2}a$; $V = \pi r^2 h = 16\pi a^3$.

Câu 40. Khối trụ có bán kính đáy $R = a$. Thiết diện song song với trục và cách trục khối trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$. B. $V = 2\sqrt{3}\pi a^3$. C. $V = 3\pi a^3$. D. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải tham khảo

Khối trụ có bán kính đáy $R = a$; Thiết diện song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ nên thiết diện chắn trên đáy một dây có độ dài bằng $a\sqrt{3} \Rightarrow$ chiều cao của khối trụ $h = a$. Thể tích khối trụ bằng $3\pi a^3$. Chọn: C.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 41. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 2a, AD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tính thể tích V của khối trụ được tạo thành khi quay hình vuông $ABCD$ quanh trục MN .

- A. $V = 4\pi a^3$. B. $V = 2\pi a^3$. C. $V = \pi a^3$. D. $V = 3\pi a^3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 42. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = 6\pi a^3$. B. $V = 4\pi a^3$. C. $V = 2\pi a^3$. D. $V = 8\pi a^3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

6B. Mặt trụ

Câu 43. Cho hình chữ nhật $ABCD$ cạnh $AB = 4$, $AD = 2$. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, CD . Tính thể tích V của khối trụ được tạo thành khi cho hình chữ nhật quay quanh MN .

A. $V = 4\pi$.

B. $V = 8\pi$.

C. $V = 16\pi$.

D. $V = 32\pi$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 44. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AB = 4a$, $AC = 5a$. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = 16\pi a^3$.

B. $V = 8\pi a^3$.

C. $V = 4\pi a^3$.

D. $V = 12\pi a^3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 45. Cho một khối trụ có khoảng cách giữa hai đáy bằng 10, biết diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π . Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = 160\pi$.

B. $V = 164\pi$.

C. $V = 64\pi$.

D. $V = 144\pi$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 46. Một cái bồn chứa nước hình trụ nằm ngang có thể tích V , chiều cao h . Lượng nước chứa trong bồn có chiều cao $h_1 = \frac{1}{4}h$. Hỏi thể tích nước chứa trong bồn gần bằng bao nhiêu V ?

A. $0.340V$.B. $0.282V$.C. $0.264V$.D. $0.250V$.

Câu 47. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$, $AD = 2$. Quay hình chữ nhật $ABCD$ lần lượt quanh AD và AB , ta được 2 hình trụ xoay có thể tích V_1, V_2 . Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $V_1 = V_2$.B. $V_2 = 2V_1$.C. $V_1 = 2V_2$.D. $2V_1 = 3V_2$.

Câu 48. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của khối trụ (T) . Tính thể tích V của khối trụ (T) .

A. $V = \pi r^2 l$.B. $V = \frac{4}{3} \pi r^2 h$.C. $V = 2\pi r^2 h$.D. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

6B. Mặt trụ

Câu 49. Một hình trụ có chu vi của đường tròn đáy là a , chiều cao của hình trụ gấp 4 lần chu vi đáy. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{\pi}$.

B. $V = 4\pi a^3$.

C. $V = \frac{2a^3}{\pi}$.

D. $V = \frac{2a^2}{\pi^2}$.

Câu 50. Trong không gian, cho hình vuông có cạnh bằng 2 (cm), gọi I, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Khi quay hình vuông đó quanh trục IH ta được một hình trụ. Thể tích V của khối trụ tròn xoay giới hạn bởi hình trụ.

A. $V = \frac{1}{2}\pi$.

B. $V = 4\pi$.

C. $V = 2\pi$.

D. $V = \pi$.

Câu 51. Một khối trụ có thể tích là 20 (đvtt). Tính thể tích V của khối trụ mới tạo thành khi tăng bán kính lên 2 lần.

A. $V = 40$ (đvtt).

B. $V = 80$ (đvtt).

C. $V = 60$ (đvtt).

D. $V = 400$ (đvtt).

6B. Mặt trụ

Câu 52. Một bạn học sinh dùng tấm bìa cứng hình chữ nhật có chiều dài bằng $2\pi R$ và chiều rộng bằng R cuộn lại thành hình trụ có đường sinh bằng R . Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối trụ đã cho.

- A. $V_{\max} = 2\pi R^2$. B. $V_{\max} = \pi R^3$. C. $V_{\max} = 2\pi R^3$. D. $V_{\max} = 3\pi R^3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 53. Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của hình trụ đã cho.

- A. $S_{xq} = 4\pi R^2; V = 2\pi R^3$. B. $S_{xq} = 2\pi R^2; V = 4\pi R^3$.
C. $S_{xq} = 8\pi R^2; V = 2\pi R^3$. D. $S_{xq} = 2\pi R^2; V = 8\pi R^3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 54. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC có $AB = a$; $AC = 2a$; $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi V_1 là thể tích khối lăng trụ; V_2 là thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\sqrt{3}}{14\pi}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}}{7\pi}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}}{14\pi}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

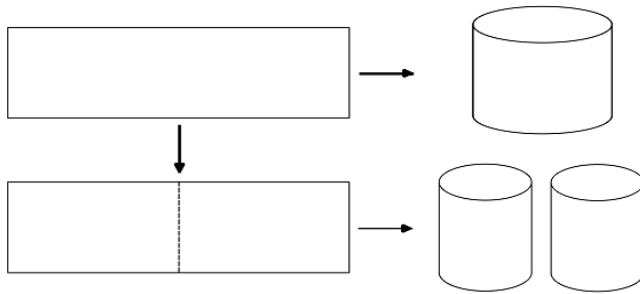
6B. Mật trụ

Câu 55. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $80\text{ cm} \times 360\text{ cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 80 cm , theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

* Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

* Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$.



A. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{V_2}{V_1} = 1$.

C. $\frac{V_2}{V_1} = 2$.

D. $\frac{V_2}{V_1} = 4$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✎ Dạng 89. Bài tập tổng hợp về mặt trụ

Câu 56. Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao cũng bằng R . Một mặt phẳng đi qua tâm của hình trụ, không vuông góc với đáy cắt hai đáy theo hai đoạn giao tuyến là AB và CD . Biết $ABCD$ là hình vuông, tính độ dài cạnh hình vuông $ABCD$.

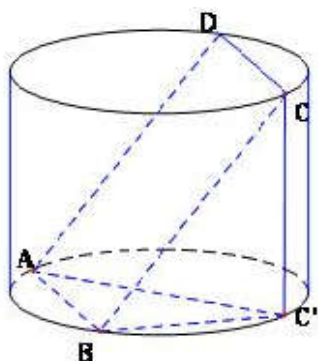
A. $\frac{R\sqrt{10}}{2}$.

B. $\frac{R\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{R\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{3R}{2}$.

Lời giải tham khảo



Gọi C' là hình chiếu của C lên mặt phẳng đáy chứa cạnh AB .

Ta có $AB \perp BC'$ (do $AB \perp (BCC')$).

Suy ra AC' là đường kính của đường tròn đáy.

Suy ra $AC' = 2R$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABC'$ và $\triangle CBC'$ ta có

$$BC'^2 = BC^2 - CC'^2 = BC^2 - R^2$$

$$BC'^2 = AC'^2 - AB^2 = 4R^2 - BC^2$$

$$\text{Suy ra } 2BC^2 = 5R^2 \Leftrightarrow BC = \frac{R\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 57. Giả sử viên phấn viết bảng có dạng hình trụ tròn xoay đường kính đáy bằng 1 cm , chiều dài 6 cm . Người ta làm những hộp carton đựng phấn dạng hình hộp chữ nhật có kích thước $6 \times 5 \times 6\text{ cm}$. Hỏi muốn xếp 350 viên phấn vào 12 hộp, khi đó số viên phấn?

A. Vừa đủ.

B. Thiếu 10 viên.

C. Thừa 10 viên.

D. Không xếp được.

Lời giải tham khảo

Vì chiều cao viên phấn là 6 cm , nên chọn đáy của hộp carton có kích thước 5×6 .

Mỗi viên phấn có đường kính 1 cm nên mỗi hộp ta có thể đựng được $5 \times 6 = 30$ viên.

Số phấn đựng trong 12 hộp là : $30 \times 12 = 360$ viên

Do ta chỉ có 350 viên phấn nên thiếu 10 viên, nghĩa là đựng đầy 11 hộp, hộp 12 thiếu 10 viên.

Câu 58. Cho hình cầu (S) tâm I , bán kính R không đổi. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp hình cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất.

A. $h = R\sqrt{2}$.

B. $h = R$.

C. $h = \frac{R}{2}$.

D. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải tham khảo

6B. Mật trụ

Xét $\triangle IOA$ vuông tại O , ta có

$$IA^2 = OI^2 + OA^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{h^2}{4} + r^2.$$

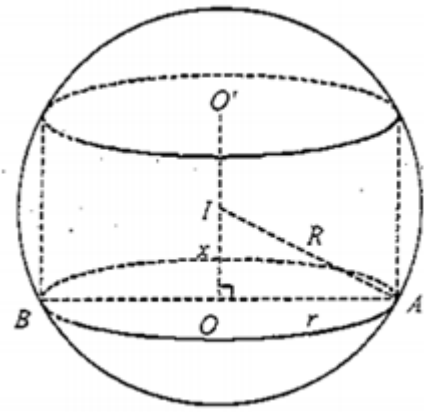
$$\text{Suy ra } r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.$$

Diện tích xung quanh của hình trụ tính bởi công thức

$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi h \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \pi \sqrt{h^2 (4R^2 - h^2)}.$$

$$S_{xq} = \pi \sqrt{h^2 (4R^2 - h^2)} \leq \frac{\pi [h^2 + (4R^2 - h^2)]}{2} = 2\pi R^2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow h^2 = 4R^2 - h^2 \Leftrightarrow h = R\sqrt{2}.$$



Câu 59. Cho khối cầu (S) tâm I , bán kính R không đổi. Một khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.

A. $h = R\sqrt{2}$.

B. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

C. $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

D. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải tham khảo

Xét tam giác $\triangle IOA$ vuông tại O , ta có

$$IA^2 = OI^2 + OA^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{h^2}{4} + r^2.$$

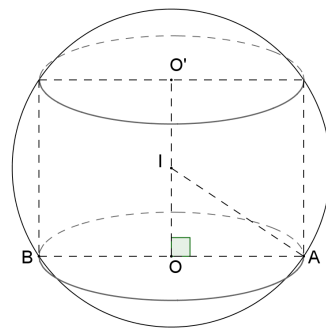
$$\text{Suy ra } r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$$

Thể tích khối trụ được tính bởi công thức:

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h.$$

$$\text{Xét hàm } f(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h, h \in (0; 2R).$$

$$\text{Từ bảng biến thiên của hàm } f(h), \text{ ta có kết quả } \max V = \frac{4\pi r^3 \sqrt{3}}{9} \text{ khi } h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$



Câu 60. Một hình trụ có bán kính R và chiều cao $R\sqrt{3}$. Cho hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30° . Tính khoảng cách d giữa AB và trục của hình trụ.

A. $d = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

B. $d = R\sqrt{3}$.

C. $d = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

D. $d = 3R$.

Lời giải tham khảo

+ Gọi O, O' là tâm của hai đáy $\Rightarrow OA = O'B = R$.

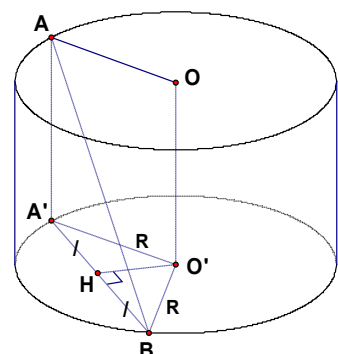
+ Gọi AA' là đường sinh của hình trụ

+ Ta có $O'A' = R$; $AA' = R\sqrt{3}$ và $\widehat{BAA'} = 30^\circ$.

+ Mặt khác $OO' \parallel (ABA')$

$$\Rightarrow d(OO'; AB) = d(OO'; (ABA')) = O'H$$

(với H là trung điểm của $A'B$).



6B. Mặt trụ

+ $\triangle AA'B$ vuông tại $A' \Rightarrow BA' = AA' \cdot \tan 30^\circ = R$.

$$\Rightarrow \triangle BA'O' \text{ đều} \Rightarrow O'H = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 61. Cho hình trụ có chiều cao $h = 5$, bán kính đáy $r = 2$. Một đoạn thẳng có chiều dài bằng 6 và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục của hình trụ.

A. $d = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

B. $d = 2$.

C. $d = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $d = 4\sqrt{2}$.

Câu 62. Cho hình trụ có chiều cao và bán kính đáy cùng bằng a . Gọi M, N là hai điểm trên đường tròn đáy sao cho dây cung MN tạo với trục hình trụ một góc 60° . Tính khoảng cách d từ trục hình trụ đến đường thẳng MN .

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $d = a\sqrt{3}$.

C. $d = \frac{a}{2}$.

D. $d = a$.

Câu 63. Cho hình trụ bán kính R , trục có độ dài $2R$. Hình nón nội tiếp hình trụ có đáy trùng với đường tròn đáy của hình trụ và chiều cao trùng với trục của hình trụ. Hỏi thể tích khối nón bằng bao nhiêu lần thể tích khối trụ?

A. $\frac{1}{5}$ lần.

B. $\frac{1}{3}$ lần.

C. $\frac{1}{4}$ lần.

D. $\frac{1}{6}$ lần.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 64. Cho hình trụ tròn xoay, đáy là 2 đường tròn (C) tâm O và (C') tâm O' . Xét hình nón tròn xoay có đỉnh O' và đáy là đường tròn (C) . Xét hai câu :

(I) Nếu thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều $O'AB$ thì thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABB'A'$.

(II) Nếu thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABB'A'$ thì thiết diện qua trục của hình nón là tam giác $O'AB$ vuông cân tại O' .

Hãy chọn câu đúng.

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả 2 câu sai.

D. Cả 2 câu đúng.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 65. Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

I. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l có tính chất song song và quay quanh đường thẳng Δ cố định được gọi là hình trụ.

II. Cho mặt trụ (C) có trục Δ và bán kính R . Nếu có mặt phẳng (P) vuông góc với Δ thì giao của mặt trụ (C) và (P) là đường tròn bán kính $2R$.

III. Diện tích của mặt cầu có đường kính $2R$ bằng diện tích xung quanh hình trụ có bán kính R , độ dài trục là $2R$.

IV. Mặt trụ tròn xoay có vô số mặt phẳng đối xứng.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 66. Một hình trụ tròn xoay có bán kính $R = 1$. Trên 2 đường tròn (O) và (O') lấy lần lượt 2 điểm A và B sao cho $AB = 2$, góc giữa AB và trục OO' bằng 30° . Xét hai câu:

(I) Khoảng cách giữa OO' và AB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(II) Thể tích của hình trụ là $V = \sqrt{3}$.

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả hai câu đều đúng.

D. Cả hai câu đều sai.

Câu 67. Khi sản xuất vỏ lon sữa có hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Tính bán kính đáy R sao cho thể tích khối trụ đó bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất.

A. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

B. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

C. $R = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$.

D. $R = \sqrt{\frac{V}{\pi}}$.

6C. MẶT CẦU

 Dạng 90. Tính bán kính, đường kính mặt cầu

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và $\widehat{BSD} = 60^\circ$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $R = \frac{2a}{3}$. D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải tham khảo

Gọi O là giao điểm AC và BD

$$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Gọi M là trung điểm SB . Đường trung trực cạnh SB cắt SO tại I . Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$SI = \frac{SM \cdot SB}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Câu 2. Cho mặt cầu (S) có diện tích bằng $8\pi a^2$. Tính bán kính r của mặt cầu (S) .

A. $r = \sqrt{8}a$. B. $r = 2a$. C. $r = a$. D. $r = a\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{8\pi a^2}{4\pi}} = \sqrt{2}a.$$

Câu 3. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45° . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải tham khảo

Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45° . Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính bằng:

Giả sử $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC

$$\Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{SCO} = 45^\circ$$

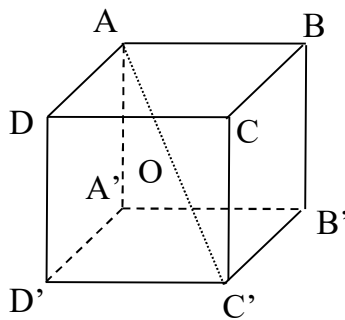
$$\Rightarrow \Delta SOC \text{ vuông cân tại } O \Rightarrow OS = OA = OB = OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $r = \frac{a}{2}$. C. $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $r = a\sqrt{3}$.

Lời giải tham khảo

6C. Mặt cầu



Gọi O là trung điểm của đường chéo AC' thì O là tâm của hình lập phương nên O cách đều các đỉnh của hình lập phương. Vậy mặt cầu đi qua 8 đỉnh hình lập phương có tâm O , bán kính: $r = \frac{AC'}{2}$, $AC' = a\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{55}}{6}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A} = a\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp

$$\Delta ABC \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2r \Rightarrow r = a \Rightarrow R^2 = r^2 + \frac{SA^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{11}}{6}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải tham khảo

Gọi H, G, I, O lần lượt là trung điểm cạnh AB , tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, tâm hình vuông $ABCD$.

$$\Rightarrow HOIG \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow R = IA = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{156}}{12}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{13}}{12}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{12}}{12}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{156}}{13}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = SB = 2a, SC = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

B. $R = a\sqrt{3}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $R = a\sqrt{6}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại B , $AB = a$, $SA = 2a$, SA vuông góc với (ABC) . Xác định tâm I và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. I là trung điểm AC , $R = a\sqrt{2}$.

B. I là trung điểm AC , $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. I là trung điểm SC , $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. I là trung điểm SC , $R = a\sqrt{6}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có $SA = a, AB = b, AC = c$. Tính bán kính r của mặt cầu đi qua các đỉnh S, A, B, C .

A. $r = \frac{2(a+b+c)}{3}$.

B. $r = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

C. $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

D. $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , mặt bên SBC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của BC , $SH = a\sqrt{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{275}}{\sqrt{483}}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{275}}{384}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{275}}{\sqrt{384}}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{384}}{275}$.

6C. Mặt cầu

Câu 12. Cho khối cầu (S) có bán kính r , S là diện tích mặt cầu và V là thể tích của khối cầu. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $V = 4\pi r^3$. B. $S = \frac{4}{3}\pi r^2$. C. $r = \frac{V}{3S}$. D. $r = \frac{3V}{S}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = 3a$. Gọi H là trung điểm của AB . Biết $SH \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{129}}{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{129}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{129}}{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{129}}{9}$.

Câu 14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = 1$, $SA = 2$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $R = \frac{2\sqrt{33}}{11}$. B. $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $R = \frac{2\sqrt{3}}{11}$.

6C. Mặt cầu

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có AC bằng $a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = 2a$.

B. $R = a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $R = \frac{3}{2}a$.

D. $R = \frac{2}{3}a$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 16. Trong không gian, cho hai điểm A, B cố định và độ dài đoạn thẳng AB bằng 4. Biết rằng tập hợp các điểm M sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Tính bán kính R của mặt cầu đã cho.

A. $R = 3$.

B. $R = \frac{9}{2}$.

C. $R = 1$.

D. $R = \frac{3}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 91. Diện tích mặt cầu

Câu 17. Cạnh bên của một hình chóp tam giác đều bằng a tạo với mặt đáy một góc 30° . Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $S_{mc} = \frac{4\pi a^2}{3}$. B. $S_{mc} = \frac{3\pi a^2}{2}$. C. $S_{mc} = 4\pi a^2$. D. $S_{mc} = 2\pi a^2$.

Lời giải tham khảo

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $ABC \Rightarrow SO$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lấy M là trung điểm SA . Vẽ trung trực cạnh SA cắt SO tại I

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

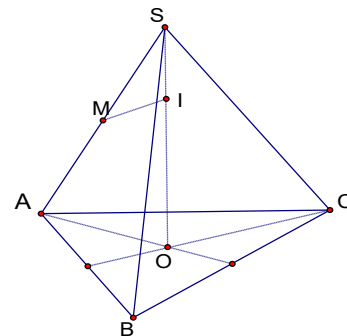
$$SO = SA \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}, \quad AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle SMI$ đồng dạng với $\triangle SOA$

$$\Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{MI}{OA} \Rightarrow MI = \frac{SM \cdot OA}{SO} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$IA = \sqrt{AM^2 + IM^2} = a$$

$$S_{mc} = 4\pi r^2 = 4\pi a^2 \pi.$$



Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết rằng $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, đường thẳng AB' tạo với đáy một góc 60° . Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{3}$. B. $S_{mc} = \frac{7\pi a^2}{4}$. C. $S_{mc} = 7\pi a^2$. D. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{12}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\widehat{AB', (A'B'C')} = \widehat{AB'A'} = 60^\circ$ suy ra $AA' = A'B' \tan \widehat{AB'A'} = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Do tam giác ABC vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$, trong tam giác IOB ta có

$$R = IB = \sqrt{IO^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = 7\pi a^2$$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S_{mc} = 8\pi a^2$. B. $S_{mc} = 16\pi a^2$. C. $S_{mc} = 4\pi a^2$. D. $S_{mc} = 9\pi a^2$.

Lời giải tham khảo

Gọi I là trung điểm SC . Chứng minh được các điểm A, B, D cùng nhìn đoạn SC cố định dưới một góc vuông nên các điểm S, A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu tâm I , đường kính SC . Tính được $SC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow R = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{mc} = 8\pi a^2$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $S_{mc} = 4\pi a^2$. B. $S_{mc} = 32\pi a^2$. C. $S_{mc} = 8\pi a^2$. D. $S_{mc} = 16\pi a^2$.

Lời giải tham khảo

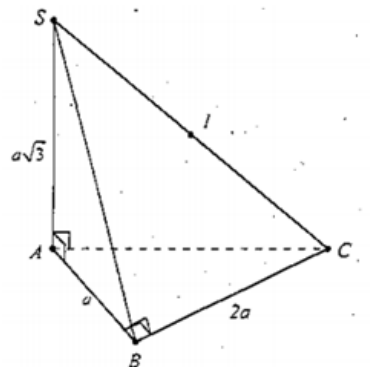
$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow B \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

Khi đó $\angle SAC = \angle SBC = 90^\circ$, suy ra hình chóp $S.ABC$ nội tiếp mặt cầu đường kính SC .

Ta có

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}. \text{ Suy ra } S_{mc} = 4\pi r^2 = 8\pi a^2.$$



Câu 21. Cho tứ diện $SABC$ có $SA = 2a$ và SA vuông góc với (ABC) . Tam giác ABC có $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

- A. $S_{mc} = 9\pi a^2$. B. $S_{mc} = 27\pi a^2$. C. $S_{mc} = 18\pi a^2$. D. $S_{mc} = 36\pi a^2$.

Lời giải tham khảo

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC \quad (1)$$

$$AB^2 + BC^2 = 5a^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ có đường kính

$$SC = \sqrt{4a^2 + 5a^2} = 3a \Rightarrow S_{mc} = 4\pi \left(\frac{SC}{2} \right)^2 = 9\pi a^2.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $S_{mc} = 3\pi a^2$. B. $S_{mc} = 16\pi a^2$. C. $S_{mc} = 2\pi a^2$. D. $S_{mc} = 12\pi a^2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

6C. Mặt cầu

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AC = 6a$, $SA = 8a$, SA vuông góc với mặt đáy. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $S_{mc} = 64\pi a^2$. B. $S_{mc} = \frac{64}{3}\pi a^2$. C. $S_{mc} = 100\pi a^2$. D. $S_{mc} = \frac{100}{3}\pi a^2$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{6}$. B. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{12}$. C. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{9}$. D. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{3}$.

Câu 25. Diện tích đường tròn lớn bằng mấy lần diện tích mặt cầu tương ứng?

- A. 2 lần. B. $\frac{4}{3}$ lần. C. 4 lần. D. $\frac{1}{4}$ lần.

6C. Mặt cầu

Câu 26. Hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh $2a$, diện tích toàn phần là S_1 và mặt cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có diện tích S_2 . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $S_1 = S_2$.

B. $S_2 = 2S_1$.

C. $S_1 = 2S_2$.

D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 27. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 60° và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $G.A'B'C'$.

A. $S_{mc} = \frac{3844}{3888} \pi a^2$. B. $S_{mc} = \frac{3844}{144} \pi a^2$. C. $S_{mc} = \frac{961}{1296} \pi a^2$. D. $S_{mc} = \frac{3844}{1296} \pi a^2$.

Dạng 92. Thể tích khối cầu

Câu 28. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính thể tích V của khối cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{24}$. C. $V = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{9}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$.

Lời giải tham khảo

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Ta có $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ Bán kính khối cầu là: $r = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ Thể tích khối cầu là: $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{24}$.

Câu 29. Cho tứ diện $SABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 3, BC = 4$. Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mp (ABC) và SC hợp với mp (ABC) một góc 45° . Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{5\pi\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{25\pi\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$\Delta ABC : AC = \sqrt{9+16} = 5$$

$$(SAB) \perp (ABC), (SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ \Rightarrow SA = SC = 5$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{SC}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 30. Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh $2a$ có thể tích bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi a^3$. B. $V = 2\sqrt{3}\pi a^3$. C. $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$. D. $V = 4\sqrt{3}\pi a^3$.

Lời giải tham khảo

$$r = \frac{\sqrt{AA'^2 + A'C'^2}}{2} = \sqrt{3}a, V = 4\sqrt{3}\pi a^3.$$

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy góc 60° . Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{8\sqrt{6}}{27}\pi a^3$. B. $V = \frac{8\sqrt{6}}{3}\pi a^3$. C. $V = \frac{2\sqrt{6}}{27}\pi a^3$. D. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải tham khảo

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SO$ là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

$$\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SDO} = 60^\circ \text{ \& } SA = SB = SC = SD \text{ (gt)}$$

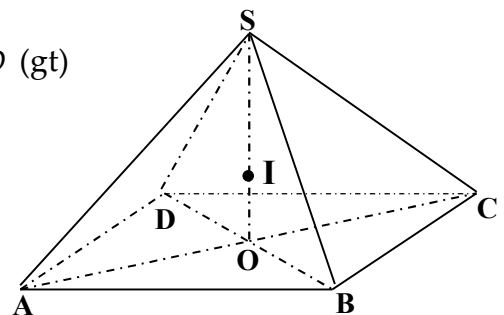
$\Rightarrow \Delta SAC$ và ΔSBD là hai tam giác đều bằng nhau

$$\text{Ta có } AC = a\sqrt{2} \text{ và } SO = AC \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Gọi I tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC

$\Rightarrow I$ cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD

Do đó: $IS = IA = IB = IC = ID = R$



$$\Rightarrow \text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp } S.ABCD \text{ là: } R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu cần tìm: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{6}}{27}\pi a^3.$$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{24\sqrt{21}\pi a^3}{27}$. B. $V = \frac{25\sqrt{21}\pi a^3}{27}$. C. $V = \frac{28\sqrt{21}\pi a^3}{27}$. D. $V = \frac{24\sqrt{21}\pi a^3}{25}$.

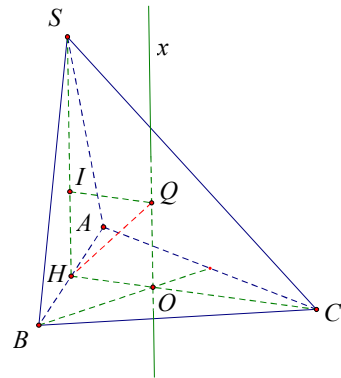
Lời giải tham khảo

Gọi O là trọng tâm của ABC . Qua O kẻ $Ox \parallel SH$, lấy

$$Q \in Ox \text{ sao cho } OH = \frac{1}{3}CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$SH = HC = a\sqrt{3} \Rightarrow SI = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SQ = \sqrt{\frac{7}{3}}a$$

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{7}{3}}a\right)^3 = \frac{28\sqrt{21}\pi a^3}{27}.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\pi a^3}{54}.$

B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{21}}{54}.$

C. $V = \frac{\pi a^3}{3}.$

D. $V = \frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{54}.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a , $SB = 2a$. Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{64\sqrt{14}}{147}a^3.$

B. $V = \frac{16\sqrt{14}}{49}a^3.$

C. $V = \frac{64\sqrt{14}}{147}\pi a^3.$

D. $V = \frac{16\sqrt{14}}{49}\pi a^3.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6C. Mặt cầu

Câu 35. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$. Trên cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm H và K sao cho $BH = 3HA$ và $AK = 3KD$. Trên đường thẳng (d) vuông góc $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK . Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SAHEK$.

A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{13}}{3}$.

B. $V = \frac{54\pi a^3 \sqrt{13}}{3}$.

C. $V = \frac{52\pi a^3 \sqrt{13}}{3}$.

D. $V = \frac{52\pi a^3 \sqrt{12}}{3}$.

Câu 36. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi (dm^3)$, Biết thể tích khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước (hình bên). Tính thể tích V của nước còn lại trong bình.

A. $V = 6\pi (dm^3)$.

B. $V = 12\pi (dm^3)$.

C. $V = 54\pi (dm^3)$.

D. $V = 24\pi (dm^3)$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$ cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{11}$. Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{11\sqrt{11}\pi}{6}$.

B. $V = 32\pi$.

C. $V = \frac{32\pi}{3}$.

D. $V = \frac{256\pi}{3}$.

6C. Mặt cầu

Câu 38. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AA' = 8, BC = 6$. Mặt cầu (S) ngoại tiếp lăng trụ, hình trụ (T) có 2 đáy là 2 đường tròn ngoại tiếp 2 tam giác $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ lệ thể tích t của khối cầu và khối trụ tương ứng với mặt cầu và hình trụ đã cho.

A. $t = \frac{125}{54}$.

B. $t = \frac{125}{27}$.

C. $t = \frac{25}{27}$.

D. $t = \frac{25}{54}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bằng a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

B. $V = \frac{16}{3}\pi a^3$.

C. $V = \frac{32\pi a^3}{3}$.

D. $V = 4\pi a^3$.

Câu 40. Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a .

A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$. C. $V = \pi a^3 \sqrt{3}$. D. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{3}}{8}$.

Dạng 93. Bài tập tổng hợp về mặt cầu

Câu 41. Cho mặt cầu $S(I; R)$ và một điểm A sao cho $IA = 2R$. Từ A kẻ tiếp tuyến AT đến (S) (T là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn thẳng AT .

A. $AT = \frac{R}{2}$. B. $AT = R$. C. $AT = R\sqrt{2}$. D. $AT = R\sqrt{3}$.

Lời giải tham khảo

Tam giác IAT vuông tại T nên $AT = \sqrt{IA^2 - IT^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$.

Câu 42. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, AD = 1$. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ không có điểm chung với hình chữ nhật $ABCD$, song song với cạnh AB và cách AB một khoảng bằng a . Gọi V là thể tích của khối tròn xoay τ , nhận được khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục d . Cho biết $d(AB, d) < d(CD, d)$. Tính a biết rằng thể tích của khối τ gấp 3 lần thể tích của khối cầu có đường kính AB .

A. $a = 3$. B. $a = -1 + \sqrt{2}$. C. $a = \frac{1}{2}$. D. $a = \frac{15}{2}$.

Lời giải tham khảo

Thể tích khối T là $V_T = \pi(1+a)^2 \cdot 2 - \pi a^2 \cdot 2 = 2\pi(1+2a)$

Thể tích khối cầu có bán kính $R = \frac{AB}{2} = 1$ là $V_C = \frac{4\pi}{3}$

Ta có phương trình $V_T = 3V_C \Leftrightarrow 2\pi(1+2a) = 4\pi \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính a biết mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có bán kính bằng 1.

A. $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. B. $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải tham khảo

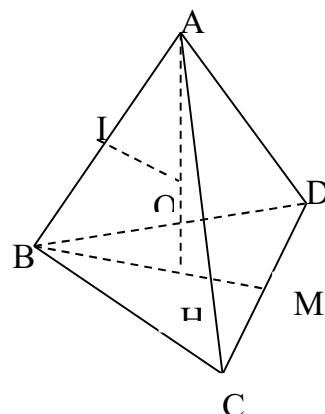
6C. Mặt cầu

Gọi M, H, I lần lượt là trung điểm CD , trọng tâm tam giác BCD và trung điểm AB suy ra AH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD , trong mặt phẳng (ABH) kẻ đường trung trực của AB cắt AH tại O . Khi đó, O chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, bán kính $R = OA = 1$.

$$\text{Ta có: } BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

Xét hai tam giác vuông đồng dạng AIO, AHB ta có:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{IA}{AH} \Rightarrow OA = \frac{AB^2}{2AH} = \frac{a^2 \cdot 3}{2a\sqrt{6}} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$



Câu 44. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và thể tích là $\frac{a^3}{3}$. Gọi t là tỉ số giữa độ dài cạnh bên và độ dài cạnh đáy của hình chóp. Tính t .

A. $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $t = 1$.

C. $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

D. $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải tham khảo

Tính được chiều cao của khối chóp $h = SO = a \Rightarrow l = SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Suy ra $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 45. Cho hình nón có đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O , có bán kính $r = 5$. Thiết diện qua đỉnh là tam giác đều SAB , cạnh bằng 8. Tính khoảng cách d từ O đến (SAB) .

A. $d = \frac{4\sqrt{13}}{3}$.

B. $d = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

C. $d = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

D. $d = 3$.

Lời giải tham khảo

Gọi I là trung điểm cạnh AB , dựng OK vuông góc với SI , $OK = d(O, (SAB))$.

Tính $OI = 3$, $SI = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, $SO = \sqrt{39}$, dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOI , suy ra $d = OK = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh lần lượt là 13, 14, 15. Mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$ tiếp xúc với ba cạnh của tam giác với các tiếp điểm nằm trên ba cạnh đó. Tính khoảng cách d từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng (ABC) .

A. $d = \frac{3}{2}$.

B. $d = 2$.

C. $d = \frac{5}{2}$.

D. $d = 3$.

Lời giải tham khảo

Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) . Gọi r là bán kính của đường tròn (C) . Ta có: $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2} = 21$

6C. Mặt cầu

Do đó, $S_{\triangle ABC} = 84$. Mặt khác ta có: $S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow r = 4$. Khoảng cách từ tâm đến mặt phẳng (ABC) là: $d = \sqrt{R^2 - r^2} = 3$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 47. Cho mặt cầu đường kính $AB = 2R$. Gọi I là điểm trên AB sao cho $AI = h$. Một mặt phẳng vuông góc với AB tại I cắt mặt cầu theo đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm I để thể tích trên đạt giá trị lớn nhất.

A. $AI = \frac{4R}{3}$.

B. $AI = \frac{2R}{3}$.

C. $AI = \frac{R}{3}$.

D. $AI = 2R$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 48. Cho mặt cầu $S(O, R)$ và mặt phẳng (P) , khoảng cách từ O đến (P) bằng R . Một điểm M tùy ý thuộc (S) , đường thẳng OM cắt (P) tại N . Hình chiếu của O trên (P) là I . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $IN = R \Leftrightarrow ON = R\sqrt{2}$.

B. $IN = R \Leftrightarrow ON = 2\sqrt{2}R$.

C. $IN > R$.

D. $\triangle OIN$ là tam giác tù.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 49. Cho khối cầu (S) có bán kính r , S là diện tích mặt cầu và V là thể tích của khối cầu. Mệnh đề nào dưới đây *sai*?

- A. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

B. $S = 4\pi r^2$.

C. $r = \frac{V}{3S}$.

D. $r = \frac{3V}{S}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 50. Trong không gian, xác định tập hợp các điểm M nhìn đoạn thẳng cố định AB dưới một góc vuông.

- A. Tập hợp chỉ có một điểm.

B. Một đường thẳng.

C. Một đường tròn.

D. Mặt cầu đường kính AB bỏ đi hai điểm A, B .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với (ABC) . Điểm nào sau đây là tâm mặt cầu qua các điểm S, A, B, C ?

- A. Trung điểm I của AC .

B. Trung điểm J của AB .

C. Trung điểm K của BC .

D. Trung điểm M của SC .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 52. Mệnh đề nào sau đây *sai*?

- A. Bất kì một hình tứ diện nào cũng có mặt cầu ngoại tiếp.
- B. Bất kì một hình hộp chữ nhật nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.
- C. Bất kì một hình hộp nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.
- D. Bất kì một hình chóp đều nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 53. Mệnh đề nào dưới đây *đúng* về diện tích xung quanh của hình nón?

- A. Tích của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.
- B. Tích của độ dài đường tròn đáy và độ dài chiều cao.
- C. Hai lần tích của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.
- D. Một nửa tích của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.

Câu 54. Đường thẳng d cắt mặt cầu $S(O; r)$ tại hai điểm M, N sao cho khoảng cách từ O đến dây cung bằng $\frac{r}{3}$. Tính độ dài MN .

- A. $MN = \frac{4r\sqrt{2}}{3}$.
- B. $MN = \frac{r\sqrt{2}}{3}$.
- C. $MN = \frac{4r}{3}$.
- D. $MN = \frac{2r\sqrt{2}}{3}$.

6C. Mặt cầu

Câu 55. Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu của tâm I lên (P) và d là khoảng cách từ tâm I đến (P) . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Khi $d > R$ thì H nằm trong mặt cầu. B. Khi $d < R$ thì H thuộc mặt cầu.
C. Khi $d = R$ thì H thuộc mặt cầu. D. Khi $d < R$ thì H nằm ngoài mặt cầu.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

7A. TỌA ĐỘ ĐIỂM – VECTOR

Dạng 94. Độ dài đoạn thẳng

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;3;1), C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn AM .

- A. $AM = 3\sqrt{3}$. B. $AM = 2\sqrt{7}$. C. $AM = \sqrt{29}$. D. $AM = \sqrt{30}$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y; z)$ là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$.

Suy ra $M(-1; 4; 2)$. Suy ra $AM = \sqrt{29}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;0), B(-1;2;-1)$. Tính độ dài đoạn AB .

- A. $AB = \sqrt{5}$. B. $AB = 5$. C. $AB = 1$. D. $AB = 2\sqrt{5}$.

Lời giải tham khảo

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Dạng 95. Tọa độ vectơ

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2;5;3), \vec{b}(-4;1;-2)$. Tính $[\vec{a}, \vec{b}]$.

- A. $[\vec{a}, \vec{b}] = \sqrt{216}$. B. $[\vec{a}, \vec{b}] = \sqrt{405}$. C. $[\vec{a}, \vec{b}] = \sqrt{749}$. D. $[\vec{a}, \vec{b}] = \sqrt{708}$.

Lời giải tham khảo

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \sqrt{749}.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (2; -1; 0), \vec{b} = (-1; -3; 2), \vec{c} = (-2; -4; -3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

- A. $\vec{u} = (5; 3; -9)$. B. $\vec{u} = (-5; -3; 9)$. C. $\vec{u} = (-3; -7; -9)$. D. $\vec{u} = (3; 7; 9)$.

Lời giải tham khảo

Tính $2\vec{a}, -3\vec{b}, \vec{c}$, cộng các vectơ vừa tính.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;1;4), B(2;2;-6), C(6;0;-1)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -67$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 65$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 67$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 49$.

Lời giải tham khảo

$$\overrightarrow{AB} = (0; 1; -10), \overrightarrow{AC} = (4; -1; -5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.4 + 1.(-1) + (-10).(-5) = 49.$$

✎ Dạng 96. Tọa độ giao điểm

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 2 = 0$.

- A. $M(5; -1; -3)$. B. $M(1; 0; 1)$. C. $M(2; 0; -1)$. D. $M(-1; 1; 1)$.

Lời giải tham khảo

$$M \in \Delta \Leftrightarrow M(2-3t; t; -1+2t); M \in (P) \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow M(-1; 1; 1).$$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 7 = 0$. Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- A. $M(3; -1; 0)$. B. $M(0; 2; -4)$. C. $M(6; -4; 3)$. D. $M(1; 4; -2)$.

Lời giải tham khảo

$$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \\ 2x - y - z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = 6 \\ 2y + z = -2 \\ 2x - y - z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3; -1; 0).$$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 3 - t_1 \\ z = 1 - t_1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- A. $A(3; 5; 3)$. B. $A(1; 3; 1)$. C. $A(-3; 5; 3)$. D. $A(1; 2; -3)$.

Lời giải tham khảo

Ta có tọa độ giao điểm A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = 1 + 2t_1 & (1) \\ y = 3 - t_1 & (2) \\ z = 1 - t_1 & (3) \\ x + 2y - 3z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Lấy (1), (2), (3) Thay vào (4) ta được $1 + 2t_1 + 2(3 - t_1) - 3(1 - t_1) + 2 = 0$

Tìm được $t_1 = -2$. Thay vào (1) $\Rightarrow x = -3$; thay vào (2) $\Rightarrow y = 5$, thay vào (3) $\Rightarrow z = 3$.

Vậy $A(-3; 5; 3)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 2), B(0; 1; 1), C(1; 0; 4)$

và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của mặt phẳng (ABC) và

đường thẳng d ,

- A. $M(3; -1; 6)$. B. $M(-1; 3; 6)$. C. $M(6; -1; 3)$. D. $M(3; 1; -6)$.

Lời giải tham khảo

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ bao gồm phương trình đường thẳng d và phương trình mặt phẳng (ABC) .

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- A. $M(1;0;1)$. B. $M(0;0;-2)$. C. $M(1;1;6)$. D. $M(12;9;1)$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có: } (d): \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow (d): \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Vì $M = (d) \cap (P)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \\ 3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \\ 3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow M(0;0;-2).$$

Dạng 97. Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(3;-2;-2)$; $B(3;2;0)$; $C(0;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{MB} = -2\overline{MC}$.

- A. $M\left(1;2;\frac{2}{3}\right)$. B. $M\left(1;-2;\frac{2}{3}\right)$. C. $M\left(1;2;-\frac{2}{3}\right)$. D. $M\left(-1;2;\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x;y;z)$. $\overline{MB} = (3-x; 2-y; -z)$, $\overline{MC} = (-x; 2-y; 1-z)$. Tính được $M\left(1;2;\frac{2}{3}\right)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$; $B(0;2;4)$; $C(4;2;1)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho $AD = BC$.

- A. $D(0;0;0)$ hoặc $D(6;0;0)$. B. $D(0;0;2)$ hoặc $D(8;0;0)$.
C. $D(2;0;0)$ hoặc $D(6;0;0)$. D. $D(0;0;0)$ hoặc $D(-6;0;0)$.

Lời giải tham khảo

Gọi $D(x;0;0)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overline{AD}(x-3;4;0) \\ \overline{BC}(4;0;-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\overline{AD}| = \sqrt{(x-3)^2 + 4^2 + 0^2} \\ |\overline{BC}| = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$; $B(-1;-1;0)$; $C(3;1;-1)$. Tìm tọa độ điểm N trên mặt phẳng (Oxy) sao cho N cách đều ba điểm A, B, C .

- A. $N\left(2; \frac{-7}{4}; 0\right)$. B. $N(2;0;0)$. C. $N\left(2; \frac{7}{4}; 0\right)$. D. $N(0;0;2)$.

Lời giải tham khảo

Điểm $N(x; y; 0)$. Tìm $x; y$ từ hệ hai phương trình $NA = NB = NC$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$ và $A(2;0;1), B(0;-2;3)$. Gọi M là điểm có tọa độ nguyên thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB = 3$. Tìm tọa độ của điểm M .

- A. $M\left(\frac{6}{7}; \frac{-4}{7}; \frac{12}{7}\right)$. B. $M(0;-1;5)$. C. $M(0;1;-3)$. D. $M(0;1;3)$.

Lời giải tham khảo

Đặt $M(a;b;c)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) ta được phương trình $2a - b - c + 4 = 0$;

Hai phương trình còn lại từ giả thiết $MA = MB$ và $MA = 3$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$. Tọa độ M thuộc mặt phẳng (P) sao cho M cách đều ba điểm A, B, C .

- A. $M(-7;3;2)$. B. $M(2;3;-7)$. C. $M(3;2;-7)$. D. $M(3;-7;2)$.

Lời giải tham khảo

Đặt $M(x;y;z)$. Lập hệ phương trình ba ẩn $x;y;z$ từ phương trình mặt phẳng (P) và điều kiện $MA = MB, MA = MC$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;1;4)$; điểm B có tọa độ nguyên thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$ sao cho $AB = \sqrt{27}$. Tìm tọa độ điểm B .

- A. $B(-7;4;-7)$. B. $B(-7;-4;7)$. C. $B(-7;4;7)$. D. $B\left(\frac{13}{7}; -\frac{10}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

Lời giải tham khảo

Chuyển đường thẳng về dạng tham số sau đó đặt tọa độ điểm $B(-1-2t; 1+t; -2+3t)$.

Tìm t từ phương trình khoảng cách $AB = \sqrt{27}$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$. Gọi I là giao điểm của (P) với đường thẳng d . Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) có hoành độ dương sao cho IM vuông góc với d và $IM = 4\sqrt{14}$.

- A. $M(5; 9; -11)$. B. $M(-3; -7; 13)$. C. $M(5; 9; 11)$. D. $M(3; -7; 13)$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3; 1; 0)$, $B(2; 0; 2)$ và trọng tâm $G\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC .

- A. $C(-4; -4; 0)$. B. $C(-2; -2; 1)$. C. $C(1; -2; 1)$. D. $C(2; -2; 3)$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 2; 2)$, $B(0; 0; 7)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$. Có bao nhiêu điểm C thuộc đường thẳng d sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và các điểm $A(1; -1; 2), B(2; -1; 0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác AMB vuông tại M .

A. $M(1; -1; 0)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

B. $M(1; -1; 0)$.

C. $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

D. $M(1; -1; 0)$ hoặc $M\left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và $A(-2; 1; 1), B(-3; -1; 2)$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho tam giác AMB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$. Tìm tọa độ điểm M .

A. $M(2; -1; 5)$.

B. $M(-14; -35; 19); M(2; 1; 5)$.

C. $M(-14; -35; 19)$.

D. $M(-14; -35; 19); M(-2; 1; -5)$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -2; -2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm E thuộc Oy để thể tích tứ diện $ABCE$ bằng 4.

A. $E(0; 4; 0)$, $E(0; -4; 0)$.

B. $E(0; -4; 0)$.

C. $E(0; 4; 0)$.

D. $E(0; 4;)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

7B. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

✍ Dạng 98. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$.

Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) ?

A. $\vec{u} = (1; 2; 3)$.

B. $\vec{u} = (2; 3; -4)$.

C. $\vec{u} = (-1; -2; -3)$.

D. $\vec{u} = (-2; -3; 4)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 3t - 5 \end{cases}$. Vectơ nào

dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) ?

A. $\vec{u} = (1; 0; 3)$.

B. $\vec{u} = (2; 1; -5)$.

C. $\vec{u} = (1; 1; 3)$.

D. $\vec{u} = (1; 1; -5)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{3}$.

Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) ?

A. $\vec{u} = (1; -2; 3)$.

B. $\vec{u} = (2; -3; -1)$.

C. $\vec{u} = (-1; 2; -3)$.

D. $\vec{u} = (1; -2; -3)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng phương trình:

$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) ?

A. $\vec{u} = (2; -1; 5)$.

B. $\vec{u} = (2; -1; 0)$.

C. $\vec{u} = (1; 0; 5)$.

D. $\vec{u} = (1; -1; 5)$.

✎ Dạng 99. Viết phương trình đường thẳng

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(6;-6;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua M và N ?

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Lời giải tham khảo

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và $N(6;-6;1)$ có vectơ chỉ phương

$\vec{a} = \overrightarrow{MN} = (4; -6; 2) = 2(2; -3; 1)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;1)$ và $B(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường thẳng đi qua A và B ?

A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải tham khảo

$\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$. Phương trình AB: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(1;-2;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua A và B ?

A. $(\Delta): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ B. $(\Delta): \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$
C. $(\Delta): \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$ D. $(\Delta): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$

Lời giải tham khảo

Vì Đường thẳng (Δ) đi qua 2 điểm $A(2;1;3)$ và $B(1;-2;1)$ nên có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{BA} = (1; 3; 2)$.

Đồng thời đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(2;1;3)$ nên có phương trình là

$$(\Delta): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$$

Cách khác: Thay tọa độ của điểm A và B vào phương trình đường thẳng (Δ) , chỉ có đáp án A thỏa mãn.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$?

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 - t \end{cases}$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 3)$?

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $M(1; -2; 2016)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$?

A. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2016 - 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 - 6t \\ z = 2016 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -6 - 2t \\ z = 2 + 2016t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -6t \\ z = 2016 + 2t \end{cases}$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox ?

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$.

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$.

Lời giải tham khảo

Gọi B là giao điểm của đường thẳng Δ và trục Ox . Khi đó $B(b;0;0)$.

Vì Δ vuông góc với đường thẳng d nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_d}$ (với $\overrightarrow{AB} = (b-1; -2; -3)$, $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -2)$)

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Do đó $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; -3)$. Chọn vectơ chỉ phương cho đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; 2; 3)$.

Phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 ?

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$.

C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{5}$.

Lời giải tham khảo

Gọi B là giao điểm của d và d_2 . $B \in d_2 \Rightarrow B(1-t; 1+2t; -1+t)$.

$d \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \Rightarrow t = -1$ suy ra $B(2; -1; -2)$.

PT d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; -3; -5)$: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng :

$$d_1 : \frac{x+7}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \text{ và } d_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $M(1; 2; -3)$ đồng thời vuông góc với d_1, d_2 ?

A. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 10)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua A vuông góc và cắt đường thẳng d ?

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-10}{-8}$.

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-10}{-10}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{6}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{6}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7B. Đường thẳng trong không gian

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4; -5; 3)$, hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua A và cắt đường thẳng d_1, d_2 ?

A. $\frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

B. $\frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{7}$.

C. $\frac{x+4}{-1} = \frac{y+5}{5} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x+4}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 1)$ và hai đường thẳng:

$$(\Delta): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{và} \quad (d'): \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua A , vuông góc với (Δ) và cắt đường thẳng (d') ?

A. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$.

B. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

D. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

7B. Đường thẳng trong không gian

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Viết phương trình đường thẳng d song song với $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{5}$, $d_2: \frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng song song với và cắt đường thẳng d_1, d_2 ?

A. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{1}$.

B. $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{1}$.

C. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-3}{1}$.

D. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{1}$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có các đỉnh $A(1; -2; 3), B(2; 1; 0), C(0; -1; -2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường cao AH của tam giác ABC ?

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}$.

B. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{5}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-5}$.

7B. Đường thẳng trong không gian

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;2)$, $B(-2;3;1)$, $C(3;-1;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường cao kẻ từ B ?

A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = 1 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;3;-2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z + 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) ?

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{3}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{3}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{3}$

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-3}$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;-7)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) ?

A. $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+7}{-2}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$

C. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{2}$

Lời giải tham khảo

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2, -3, 3)$ và đi qua $M(0; -1; 4)$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 2017 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) ?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$.

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{3}$.

Lời giải tham khảo

Vector chỉ phương của đường thẳng d là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) nên $\vec{u}_d = \vec{n}_{(P)} = (2; 2; 1)$. Đường thẳng d đi qua $A(1;2;3)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u}_d = (2; 2; 1)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 3 = 0$ và

đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng

thuộc mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d ?

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 5t \\ z = -1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = -1 \end{cases}$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 4 = 0$ và

đường thẳng $d: \frac{x-3}{3} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z-3}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) ?

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$.

7B. Đường thẳng trong không gian

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$, đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 \end{cases} \text{ và mặt phẳng } (P): 2x + y - 2z - 1 = 0. \text{ Phương trình nào dưới đây là phương}$$

trình đường thẳng đi qua M , song song với (P) và vuông góc với đường thẳng d ?

A. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Lời giải tham khảo

Đường thẳng qua điểm M và có vector chỉ phương là vector tích có hướng của vector chỉ phương của đường thẳng d và vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;4)$, mặt phẳng

$(P): 2x + y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{5}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A song song với (P) và cắt đường thẳng Δ ?

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

Lời giải tham khảo

Gọi giao điểm của d và Δ là $B(2 + 3t; 2 + t; 2 + 5t)$. Tìm t từ giả thiết $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$, với $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường

$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , cắt (d) và song song với (P) ?

A. $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + \frac{5}{3}t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 - \frac{5}{3}t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + \frac{5}{3}t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 - \frac{5}{3}t \end{cases}$

7B. Đường thẳng trong không gian**Lời giải tham khảo**

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (P) , suy ra phương trình mp (Q) :

$$2x + y - z - 5 = 0$$

$$\text{Gọi } B = (d) \cap (Q) \Rightarrow B\left(\frac{5}{3}; -1; -\frac{8}{3}\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{3}; -3; -\frac{5}{3}\right).$$

$$(\Delta) \text{ là đường thẳng qua } A, B, \text{ phương trình đường thẳng } (\Delta) \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 - \frac{5}{3}t \end{cases}.$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 4 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{5}$, $d_2: \frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng (P) , đồng thời cắt hai đường thẳng d_1, d_2 ?

A. $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$.

B. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $d: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

D. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Lời giải tham khảo

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d_1, d_2 với mặt phẳng (P) .

Đường thẳng d cần tìm đi qua A và B .

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0; 1); B(1; -1; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) sao cho khoảng cách từ B đến d là lớn nhất?

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$.

C. $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

Lời giải tham khảo

Khoảng cách từ B đến đường thẳng d là lớn nhất nếu AB vuông góc với d .

Đường thẳng d đi qua A và nhận vectơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB}, \vec{n}]$ với $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = -13 + 2t \end{cases}$,

$d': \begin{cases} x = -7 + 3t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 8 \end{cases}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng cắt $d; d'$, đồng

thời vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) ?

A. $\begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ y = \frac{25}{7} + t \\ z = \frac{18}{7} \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ y = -\frac{25}{7} + t \\ z = \frac{18}{7} \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{25}{7} + t \\ z = \frac{18}{7} \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{25}{7} - t \\ z = \frac{18}{7} \end{cases}$

Lời giải tham khảo

Gọi tọa độ giao điểm của đường thẳng và hai đường thẳng d và d' lần lượt là

$A(t; -4 + t; -13 + 2t), B(-1 + 3t'; -1 - 2t'; 8)$, Tìm t và t' từ điều kiện $\overline{AB}$ cùng phương với vectơ $\vec{j} = (0; 1; 0)$ là vectơ pháp tuyến của (Oxz) .

✎ Dạng 100. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad (d'): \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (d') .

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 2$.

Lời giải tham khảo

Vì hai VTCP không cùng phương nên (d) và (d') cắt nhau khi hệ có nghiệm.

Giải hệ t được $m = 0$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4; -2; 4)$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}. \text{ Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua } A, \text{ đồng}$$

thời cắt và vuông góc với đường thẳng d ?

- A. $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$. B. $\Delta: \frac{x+4}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{9}$.
C. $\Delta: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{-1}$. D. $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{1}$.

Lời giải tham khảo

Tìm tọa độ hình chiếu H vuông góc của điểm A xuống d . Đường thẳng cần lập đi qua A, H .

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$(d): \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{1-z}{-2} \quad \text{và} \quad (d'): \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = -1 + 4t \end{cases}. \text{ Mệnh đề nào sau đây là đúng?}$$

- A. (d) và (d') song song với nhau. B. (d) và (d') trùng nhau.
C. (d) và (d') cắt nhau. D. (d) và (d') chéo nhau.

Lời giải tham khảo

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; 2)$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $M(2; -4; 1)$.

Đường thẳng (d') có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}' = (4; 6; 4)$ và đường thẳng (d') đi qua điểm $M'(0; 1; -1)$.

Ta có hai véc tơ $\vec{u} = (2; 3; 2)$ và $\vec{u}' = (4; 6; 4)$ cùng phương và $M(2; -4; 1)$ không nằm trên đường (d') .

Nên (d) và (d') song song với nhau.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và

$d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Đường thẳng d trùng với đường thẳng d' .
- B. Hai đường thẳng d và d' chéo nhau.
- C. Đường thẳng d song song với đường thẳng d' .
- D. Đường thẳng d cắt đường thẳng d' .

Lời giải tham khảo

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' \\ -2 + 3t = -1 - 4t' \\ 6 + 4t = 20 + t' \end{cases}$$

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t' \\ z = 7 + 8t' \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $d_1 \perp d_2$.
- B. $d_1 \equiv d_2$.
- C. $d_1 // d_2$.
- D. d_1, d_2 chéo nhau.

7C. MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 101. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 5 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (2; -1; 1)$. B. $\vec{n} = (2; -1; 0)$. C. $\vec{n} = (2; 0; -1)$. D. $\vec{n} = (2; -1; 5)$.

Lời giải tham khảo

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -1; 0)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2z + z + 2017 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (1; -2; 2)$. B. $\vec{n} = (1; -1; 4)$. C. $\vec{n} = (-2; 2; -1)$. D. $\vec{n} = (2; 2; 1)$.

Lời giải tham khảo

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (-2; 2; -1)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -2y + z - 3 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (-2; 1; -3)$. B. $\vec{n} = (0; 1; -3)$. C. $\vec{n} = (0; -2; -3)$. D. $\vec{n} = (0; -2; 1)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 0; 0)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (1; 3; -2)$. B. $\vec{n} = (-1; 3; -2)$. C. $\vec{n} = (1; -3; -2)$. D. $\vec{n} = (1; -3; 2)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; 1)$ và $C(0; 1; 2)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (2; -1; -3)$. B. $\vec{n} = (2; 1; 1)$. C. $\vec{n} = (2; 1; 3)$. D. $\vec{n} = (-2; -1; 1)$.

✎ Dạng 102. Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(5;1;3)$, $N(1;6;2)$, $P(2;0;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, P ?

A. $4x + 7y + 19z - 84 = 0$.

B. $4x - 7y + 19z - 84 = 0$.

C. $4x + 7y - 19z - 84 = 0$.

D. $4x + 7y + 19z + 84 = 0$.

Lời giải tham khảo

$$\overrightarrow{MN} = (-4; 5; -1), \overrightarrow{MP} = (-3; -1; 1), [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = (4; 7; 19)$$

Phương trình mp(MNP): $4(x - 5) + 7(y - 1) + 19(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y + 19z - 84 = 0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(-1;1;1)$, $C(-3;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C ?

A. $2x + y + 2z - 2 = 0$.

B. $x + y + 2z - 3 = 0$.

C. $x + 2y + z - 3 = 0$.

D. $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Lời giải tham khảo

$$\overrightarrow{AB} = (-4; 1; 1); \overrightarrow{AC} = (-6; 1; 2)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 2)$$

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $x - 3 + 2z + 2y = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;3)$, $B(2;-4;3)$, $C(4;5;6)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C ?

A. $6x + 3y - 13z + 39 = 0$.

B. $6x + 3y - 13z + 39 = 0$.

C. $-6x + 3y - 13z + 39 = 0$.

D. $6x + 3y - 13z = 0$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -6; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 3; 3) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; -9; 39) = -3(6; 3; -13)$

Do đó mp(ABC) đi qua $A(-1;2;3)$ nhận vector $\vec{n}_1 = (6; 3; -13)$ làm VTPT nên có phương trình:

$$6(x + 1) + 3(y - 2) - 13(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y - 13z + 39 = 0.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;6;2), B(5;1;3), C(4;0;6)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C ?

A. $14x + 13y + 9z + 110 = 0$.

B. $14x + 13y + 9z - 110 = 0$.

C. $14x - 13y + 9z - 110 = 0$.

D. $14x + 13y - 9z - 110 = 0$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(4;3;2), C(5;2;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C ?

A. $x - 4y + 5z + 2 = 0$.

B. $x + 4y + 5z - 2 = 0$.

C. $x - 4y - 5z - 2 = 0$.

D. $-x + 4y - 5z + 2 = 0$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C ?

A. $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$.

C. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$.

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1), B(1;1;2), C(2;1;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C ?

A. $x - y + z - 5 = 0$.

B. $-x + y + z = 0$.

C. $x + y - z = 0$.

D. $x - y + z - 2 = 0$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz .

A. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$.

C. $2x + y - z + 1 = 0$.

D. $x = 0$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C ?

A. $x - 2y + 3z = 1$.

B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 6$.

C. $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1$.

D. $6x - 3y + 2z = 6$.

✎ Dạng 103. PT mặt phẳng đi qua 1 điểm và vuông góc với đường thẳng (mặt phẳng) cho trước

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC ?

A. $x - 2y - 5z + 5 = 0$.

B. $x - 2y - 5z = 0$.

C. $x - 2y - 5z - 5 = 0$.

D. $2x - y + 5z - 5 = 0$.

Lời giải tham khảo

$$\overrightarrow{BC}(1;-2;-5)$$

Mặt phẳng vuông góc với BC có dạng $x - 2y - 5z + c = 0$ và đi qua điểm $A(2;1;-1)$

Nên $2 - 2.1 - 5.(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -5$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x - 2y - 5z - 5 = 0$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;2)$, $B(3;1;4)$, $C(1;2;-1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm C và vuông góc với AB ?

A. $2x + y + 2z - 6 = 0$.

B. $2x + y + 2z - 15 = 0$.

C. $2x + y + 2z - 2 = 0$.

D. $2y - 3z - 4 = 0$.

Lời giải tham khảo

$\overrightarrow{AB} = (2;1;2)$, $mp(P)$ vuông góc AB qua C có phương trình: $2x + y + 2z - 2 = 0$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(2;-1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB ?

A. $x - 3y - z + 8 = 0$

B. $x - 3y - z + 2 = 0$

C. $x + y - 2z + 1 = 0$

D. $x + y - 2z - 1 = 0$

Lời giải tham khảo

Mặt phẳng (P) qua $A(1;2;3)$ và nhận $\overrightarrow{AB}(1;-3;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng (P) là: $x - 3y - z + 8 = 0$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$ và $B(2;1;0)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB ?

A. $(P): 3x + y - z + 4 = 0$.

B. $(P): 3x + y - z - 4 = 0$.

C. $(P): 3x + y - z = 0$.

D. $(P): 2x + y - z + 1 = 0$.

Lời giải tham khảo

$\overrightarrow{AB} = (3;1;-1)$, (P) nhận $\overrightarrow{AB} = (3;1;-1)$ làm vector pháp tuyến nên $(P): 3x + y - z + 4 = 0$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$ và $B(0;-1;3)$.

Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB ?

A. $x + y - z + 1 = 0$.

B. $-2x - 2y + 2z + 4 = 0$.

C. $x + y - z + 2 = 0$.

D. $2x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(2;1;1)$.

Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua B và vuông góc với AB ?

A. $x + y - 1 = 0$.

B. $x + y - 3 = 0$.

C. $x + y + 1 = 0$.

D. $x + y + 3 = 0$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-1)$ và $B(3;2;-1)$.

Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua trung điểm của AB và vuông góc với đường thẳng AB ?

A. $x + y - 3 = 0$.

B. $x + y - 3z = 0$.

C. $x + 3y = 0$.

D. $y + 3z = 0$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua $A(-1; -2; 1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) ?

A. $(P): x + 2y + 3z + 2 = 0$.

B. $(P): -3x + y + 2z + 3 = 0$.

C. $(P): -3x + y + 2z - 3 = 0$.

D. $(P): x + 2y + 3z - 2 = 0$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -3; -1)$ và $B(4; -1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của AB ?

A. $2x + 2y + 3z + 1 = 0$.

B. $4x - 4y - 6z + \frac{15}{2} = 0$.

C. $x + y - z = 0$.

D. $4x + 4y + 6z - 7 = 0$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(2; -1; 0)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB ?

A. $x - 2y - z + 2 = 0$.

B. $x - z + 2 = 0$.

C. $x - 2y - z = 0$.

D. $x - 2y - z - 4 = 0$.

Dạng 104. PT mặt phẳng đi qua 2 điểm và song song với đường thẳng (mặt phẳng) cho trước

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(-1;2;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A, B và song song với trục Ox ?

A. $x + 2z - 3 = 0$.

B. $y - 2z + 2 = 0$.

C. $2y - z + 1 = 0$.

D. $x + y - z = 0$.

Lời giải tham khảo

Tích có hướng của hai vecto $[\overrightarrow{AB}, \vec{i}] = (0; 1; -2)$, suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là $y - 2z + 2 = 0$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; -1; 1)$ và $B(3; 1; -1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A, B và song song với trục Ox ?

A. $x + y = 0$.

B. $x + y + z = 0$.

C. $y + z = 0$.

D. $x + z = 0$.

Lời giải tham khảo

PT $mp(P)$ có dạng: $By + Cz + D = 0$. Thay tọa độ điểm A, B ta được $D = 0$

Vậy PT $mp(P)$: $y + z = 0$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 1; -5)$ và $B(0; 0; -1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A, B và song song với trục Ox ?

A. $x + y = 0$.

B. $-x + y = 0$.

C. $x + z = 0$.

D. $4y + z + 1 = 0$.

Lời giải tham khảo

Tìm được vecto pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{i}] = (0; 4; 1)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 5)$ và $B(0; 0; 1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A, B và song song với trục Oy ?

A. $4x + y - z + 1 = 0$.

B. $2x + z - 5 = 0$.

C. $4x - z + 1 = 0$.

D. $y + 4z - 1 = 0$.

.....

.....

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 7 = 0$ và điểm $A(-1; 2; 5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với (P) ?

A. $2x - y + 3z - 11 = 0$.

B. $2x - y + 3z + 11 = 0$.

C. $2x - y + 3z + 15 = 0$.

D. $2x - y + 3z - 9 = 0$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 5; 7)$ và mặt phẳng $(P): 4x - 2y + z - 3 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 5; 7)$ và song song với mặt phẳng (P) ?

A. $4x - 2y + z + 3 = 0$.

B. $4x - 2y + z + 1 = 0$.

C. $4x - 2y + z - 1 = 0$.

D. $4x - 2y + z - 2 = 0$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2; 4; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) ?

A. $2x - 3y + 6z = 0$.

B. $2x + 3y + 6z + 19 = 0$.

C. $2x - 3y + 6z - 2 = 0$.

D. $2x - 3y + 6z + 1 = 0$.

Dạng 105. PT mặt phẳng đi qua 2 điểm và vuông góc với đường thẳng (mặt phẳng) cho trước

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) ?

A. $2y + 3z - 11 = 0$.

B. $y - 2z - 1 = 0$.

C. $-2y - 3z - 11 = 0$.

D. $2x + 3y - 11 = 0$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$. $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -3; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}] = (0; 8; 12)$.

Chọn $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (0; 2; 3)$

Phương trình mặt phẳng $(Q): 2y + 3z - 11 = 0$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 3 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) ?

A. $x - y + z - 6 = 0$.

B. $x - y + z - 4 = 0$.

C. $x - y + z - 2 = 0$.

D. $x - y + z + 2 = 0$.

Lời giải tham khảo

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; -4)$$

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(Q): \vec{n} = (1; -1; -2)$.

Do đó $mp(P)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{p} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = (2; -2; 2)$

$\Rightarrow$ Phương trình tổng quát của $mp(P): x - y + z - 2 = 0$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -1)$, $B(2; -1; 4)$ và mặt phẳng $(\beta): 2x - 3y + z + 5 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) ?

A. $x + 13y + 5z + 5 = 0$.

B. $x + 13y - 5z + 5 = 0$.

C. $x - 13y + 5z + 5 = 0$.

D. $x - 13y - 5z + 5 = 0$.

Lời giải tham khảo

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm A và nhận vectơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB}, \vec{n}]$ với $\vec{n}$ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) .

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) ?

A. $11x + 6y - 2z - 20 = 0$.

B. $11x + 6y + 2z + 20 = 0$.

C. $11x - 6y - 2z - 20 = 0$.

D. $11x - 6y + 2z + 20 = 0$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm O, A và vuông góc với (P) ?

A. $2x - 7y - 6z = 0$.

B. $2x + 4y - 6z = 0$.

C. $2x - 7y + 6z + 1 = 0$.

D. $x + y + z - 4 = 0$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 0; 1)$, $N(5; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 7 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm M, N và vuông góc với (P) ?

A. $x - 2z + 5 = 0$.

B. $-x - 2z + 1 = 0$.

C. $x - 2z + 1 = 0$.

D. $2x - z + 1 = 0$.

Dạng 106. Phương trình mặt phẳng (tổng hợp)

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; -5)$ và hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$, $(Q): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $(P), (Q)$?

A. $x + y + z + 3 = 0$.

B. $2x + y - 2z - 15 = 0$.

C. $2x + y - 2z + 15 = 0$.

D. $2x + y - 2z - 16 = 0$.

Lời giải tham khảo

$$\vec{u}_1(3; -2; 2), \vec{u}_2(5; -4; 3)$$

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}(2; 1; -2)$$

(α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(3; -1; -5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q)

Có dạng: $2x + y - 2z + c = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 1 - 2 \cdot (-5) + c = 0 \Rightarrow c = -15$.

$$(\alpha): 2x + y - 2z - 15 = 0.$$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $A(2; 5; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) chứa d và khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất?

A. $x + 4y + z - 3 = 0$.

B. $x - 4y + z + 3 = 0$.

C. $x - 4y - z - 3 = 0$.

D. $x - 4y + z - 3 = 0$.

Lời giải tham khảo

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Khi đó $H(1 + 2t; t; 2 + 2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d$ (với $\overrightarrow{AH} = (2t - 1; t - 5; 2t - 1)$, $\vec{u}_d = (2; 1; 2)$) Nên $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = (1; -4; 1)$, $H(3; 1; 4)$

Mặt phẳng (P) chứa d và khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi (P) đi qua $H(3; 1; 4)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{AH} = (1; -4; 1)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1 \cdot (x - 3) - 4 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0$$

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(10; 2; -1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) đi qua A , song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất?

A. $7x + y - 5z - 77 = 0$.

B. $7x - y - 5z - 77 = 0$.

C. $7x + y + 5z - 77 = 0$.

D. $7x + y - 5z + 77 = 0$.

Lời giải tham khảo

Gọi H là hình chiếu của A trên d , mặt phẳng (P) đi qua A và $(P) \parallel d$, khi đó khoảng cách giữa d và (P) là khoảng cách từ H đến (P) .

7C. Mặt phẳng trong không gian

Giả sử điểm I là hình chiếu của H lên (P) , ta có $AH \geq HI \Rightarrow HI$ lớn nhất khi $A \equiv I$

Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{AH}$ làm véc tơ pháp tuyến.

$H \in d \Rightarrow H(1+2t; t; 1+3t)$ vì H là hình chiếu của A trên d nên

$AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ ($\vec{u} = (2; 1; 3)$ là véc tơ chỉ phương của d) $\Rightarrow H(3; 1; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(-7; -1; 5)$

Vậy $(P): 7(x-10) + (y-2) - 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 5z - 77 = 0$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2; 1; 0)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và chứa Δ ?

A. $x - 7y - 4z + 9 = 0$.

B. $3x - 5y - 4z + 9 = 0$.

C. $2x - 5y - 3z + 8 = 0$.

D. $4x - 3y - 2z + 7 = 0$.

Lời giải tham khảo

Đường thẳng Δ qua $N(2; 1; 1)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 2)$. Mặt phẳng (P) qua M và có véc tơ pháp tuyến là $[\vec{u}, \overrightarrow{NM}]$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$, $(\beta): 2x - y + z - 12 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β) đồng thời khoảng cách từ $M(2; -3; 1)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{14}$?

A. Có hai mặt phẳng thỏa mãn là $(P): x + 2y - 3z + 16 = 0$ và $(P): x + 2y - 3z - 12 = 0$.

B. Có hai mặt phẳng thỏa mãn là $(P): 2x + y - 3z - 16 = 0$ và $(P): 2x + y - 3z + 12 = 0$.

C. Có hai mặt phẳng thỏa mãn là $(P): 2x + y - 3z + 16 = 0$ và $(P): 2x + y - 3z - 12 = 0$.

D. Có một phẳng thỏa mãn là $(P): x + 2y - 3z - 16 = 0$.

Lời giải tham khảo

Vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; 1; -3)$ mặt phẳng (P) có dạng:

$(P): 2x + y - 3z + D = 0$

Khoảng cách $d_{(M(P))} = \frac{|2 \cdot 2 - 3 - 3 \cdot 1 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{14} \Rightarrow \begin{cases} D = 16 \\ D = -12 \end{cases}$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y + mz - 2 = 0$ và $(Q): x + ny + 2z + 8 = 0$. Tìm giá trị của m và n để (P) song song với (Q) .

A. $m = 2, n = \frac{1}{2}$.

B. $m = 4, n = \frac{1}{4}$.

C. $m = 4, n = \frac{1}{2}$.

D. $m = 2, n = \frac{1}{4}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\frac{2}{1} = \frac{1}{n} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 2, n = \frac{1}{4}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ và

đường thẳng $\Delta_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng Δ_1 và song song với Δ_2 ?

A. $x + y - z + 2 = 0$.

B. $x - y - z + 2 = 0$.

C. $x + y + z + 2 = 0$.

D. $x - y - z + 2 = 0$.

Lời giải tham khảo

Δ_1 đi qua $M_1(1; -1; 2)$ có VTCP $\vec{u}_1 = (1; -1; 0)$.

Δ_2 đi qua $M_2(3; 1; 0)$ có VTCP $\vec{u}_2 = (-1; 2; 1)$. Lí luận $mp(P)$ nhận VPPT là $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (-1; -1; 1)$.

Phương trình $mp(P)$: $x + y - z + 2 = 0$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ và $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 ?

A. $14x - 4y - 8z + 5 = 0$.

B. $14x - 4y - 8z - 1 = 0$.

C. $14x - 4y - 8z + 6 = 0$.

D. $14x - 4y - 8z + 3 = 0$.

Lời giải tham khảo

d_1 đi qua $A(2; 2; 3)$ có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 1; 3)$

d_2 đi qua $B(1; 2; 1)$ có VTCP $\vec{u}_2 = (2; -1; 4)$

Lí luận $mp(P)$ nhận VTPT là $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (7; -2; -4)$

Phương trình $mp(P)$: $7x - 2y - 4z + m = 0$

$mp(P)$ cách đều d_1 và d_2 nên: $d(A; (P)) = d(B; (P)) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow |m - 2| = |m - 1| \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Kết luận (P) : $14x - 4y - 8z + 3 = 0$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + z = 0$ và điểm $D(1; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng song song với (α) và cách D một khoảng bằng $\sqrt{6}$?

A. $\begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 2y - z - 10 = 0 \\ x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ -x - 2y - z - 10 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 10 = 0 \end{cases}$

Lời giải tham khảo

Mặt phẳng (P) có dạng: $x + 2y + z + D = 0$.

7C. Mặt phẳng trong không gian

$$\text{Vì } d(D, (P)) = \frac{|1.1 + 2.0 + 1.3 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{6} \Rightarrow |4 + D| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2 \\ D = -10 \end{cases}$$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng song song với (α) và cách (α) một khoảng bằng 3?

A. $(Q): x + 2y - 2z + 8 = 0$.

B. $(Q): x + 2y - 2z + 2 = 0$.

C. $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$.

D. $(Q): x + 2y - 2z + 5 = 0$.

Lời giải tham khảo

$$(Q) // (P): x + 2y - 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow (P): x + 2y - 2z + m = 0$$

$$\text{Lấy } A(1; 0; 0) \in (P) \Leftrightarrow d((P); (Q)) = d(A; (Q)) = \frac{|1 + m|}{3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ m = -10 \end{cases}$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 5 = 0$, đường thẳng d là giao của hai mặt phẳng $(P_1): x - 2z = 0$ và $(P_2): 3x - 2y + z - 3 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa d ?

A. $11x - 2y - 15z + 3 = 0$.

B. $11x + 2y - 15z - 3 = 0$.

C. $11x - 2y + 15z - 3 = 0$.

D. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi M là tọa độ giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng chứa điểm M và vuông góc với đường thẳng d ?

A. $4x + 3y + z + 2 = 0$.

B. $4x - 3y + z + 2 = 0$.

C. $4x - 3y - z + 2 = 0$.

D. $4x + 3y + z = 0$.

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua các điểm là hình chiếu của điểm M trên các trục tọa độ?

A. $6x - 4y + 3z - 12 = 0$.

B. $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

C. $6x - 4y + 3z - 10 = 0$.

D. $6x - 4y + 3z - 15 = 0$.

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(4; -3; 12)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và chắn trên tia Oz một đoạn dài gấp đôi các đoạn chắn trên các tia Ox, Oy ?

A. $x + y + 2z + 14 = 0$.

B. $x + y + 2z - 14 = 0$.

C. $2x + 2y + z - 14 = 0$.

D. $2x + 2y + z + 14 = 0$.

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) cắt Ox tại A , Oy tại B , Oz tại C . Biết $G(1; 2; 3)$ là trọng tâm của tam giác ABC , phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) ?

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$.

B. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 0$.

C. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} + 1 = 0$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $G(2; 1; -3)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) ?

A. $3x + 6y - 2z - 18 = 0$.

B. $2x + y - 3z - 14 = 0$.

C. $x + y + z = 0$.

D. $3x + 6y - 2z - 6 = 0$.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) cắt Ox tại A , Oy tại B , Oz tại C . Biết trọng tâm của tam giác ABC là $H(1; 2; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) ?

A. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

B. $(P): x + 2y + 3z - 10 = 0$.

C. $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$.

D. $(P): x + 2y + 3z = 0$.

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $C(0;0;3)$ và $M(-1;3;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng qua C, M đồng thời chắn trên các nửa trục dương Ox, Oy các đoạn thẳng bằng nhau.

A. $x + y + 2z - 6 = 0$.

B. $x + y + 2z - 1 = 0$.

C. $x + y + z - 6 = 0$.

D. $x + y + z - 3 = 0$.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B và $d(C, (P)) = d(D, (P))$?

A. $4x + 2y + 7z - 15 = 0; 2x + 3z - 5 = 0$.

B. $4x + 2y + 7z - 15 = 0; 2x + 3z + 5 = 0$.

C. $4x + 2y + 7z + 15 = 0$.

D. $2x + 3z + 5 = 0$.

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn hệ trục như sau: A là gốc tọa độ; trục Ox trùng với tia AB ; trục Oy trùng với tia AD ; trục Oz trùng với tia AA' . Độ dài cạnh hình lập phương là 1. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng $(B'CD')$?

A. $x + z - 2 = 0$.

B. $y - z - 2 = 0$.

C. $x + y + z - 2 = 0$.

D. $x + y + z - 1 = 0$.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $P(4; -1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng chứa trục Ox và điểm P ?

- A. $2x + z = 0$. B. $2x + y = 0$. C. $2y + z = 0$. D. $2x + y + z = 0$.

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8 = 0$ và $(P): 2x - 2y + z - 11 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

- A. $2x - 2y + z + 7 = 0; 2x - 2y + z - 11 = 0$. B. $2x - 2y + z + 3 = 0; 2x - 2y + z - 11 = 0$.
C. $2x - 2y + z + 7 = 0$. D. $2x - 2y + z + 3 = 0$.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 6 = 0$. Hai mặt phẳng nào sau đây tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (P) ?

- A. $x - 2y + 2z + 10 = 0$ và $x - 2y + 2z - 10 = 0$.
B. $x - 2y + 2z + 6 = 0$ và $x - 2y + 2z - 12 = 0$.
C. $x - 2y + 2z + 6 = 0$ và $x - 2y + 2z - 6 = 0$.
D. $x + 2y + 2z - 6 = 0$ và $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng song song trực hoành, vuông góc với mặt phẳng (P) và tiếp xúc mặt cầu (S) ?

A. $y + z + 4\sqrt{2} - 1 = 0$.

B. $y + z - 1 = 0$.

C. $y - z + 4\sqrt{2} + 1 = 0$.

D. $y - z - 1 = 0$.

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng chứa trục hoành và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. $(Q): 4y + 3z = 0$.

B. $(Q): 4y + 3z + 1 = 0$.

C. $(Q): 4y - 3z + 1 = 0$.

D. $(Q): 4y - 3z = 0$.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z + 170 = 0 \text{ và hai đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -13 + 2t \end{cases},$$

$$d_2: \begin{cases} x = -7 + 3t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 8 \end{cases}. \text{ Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt}$$

cầu (S) và song song với hai đường thẳng d_1, d_2 ?

A. $4x + 6y + 5z + 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$.

B. $4x - 6y + 5z + 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$.

C. $4x - 6y - 5z + 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$.

D. $4x + 6y - 5z - 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$.

7C. Mặt phẳng trong không gian

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 2)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

- A. $2x + y + 2z + 10 = 0$; $2x + y + 2z - 14 = 0$.
- B. $2x + y + 2z - 8 = 0$; $2x + y + 2z + 4 = 0$.
- C. $2x + y + 2z - 8 = 0$; $2x + y + 2z + 10 = 0$.
- D. $2x + y + 2z + 4 = 0$; $2x + y + 2z - 14 = 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 107. Vị trí tương đối của mặt phẳng với đường thẳng, mặt phẳng với mặt cầu

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 4y - 6z - 5 = 0$, $(Q): x + 2y - 3z = 0$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) .
- B. (Q) không đi qua A và song song với mặt phẳng (P) .
- C. (Q) đi qua A và không song song với mặt phẳng (P) .
- D. (Q) không đi qua A và không song song với mặt phẳng (P) .

Lời giải tham khảo

$M_p(Q)$ đi qua A và song song với $m_p(P)$.

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): nx + 7y - 6z + 4 = 0$, $(Q): 3x + my - 2z - 7 = 0$. Tìm tất cả giá trị m, n sao cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

- A. $m = \frac{7}{3}; n = 1$.
- B. $m = 9; n = \frac{7}{3}$.
- C. $m = \frac{3}{7}; n = 9$.
- D. $m = \frac{7}{3}; n = 9$.

Lời giải tham khảo

Để mặt phẳng $(P) // (Q)$ thì:
$$\begin{cases} \frac{n}{3} = \frac{-6}{-2} \\ \frac{m}{7} = \frac{-2}{-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 9 \\ m = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho hai mặt phẳng $(P): 3x - y + mz - 9 = 0$, $(Q): 2x + ny + 2z - 3 = 0$. Tìm tất cả giá trị của m và n để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

- A. $m = 3; n = \frac{2}{3}$.
- B. $m = -3; n = \frac{2}{3}$.
- C. $m = 3; n = -\frac{2}{3}$.
- D. $m = -3; n = -\frac{2}{3}$.

Lời giải tham khảo

Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song khi $\frac{3}{2} = \frac{-1}{n} = \frac{m}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): mx + 6y - z - 9 = 0$ và mặt phẳng $(\beta): 6x + 2y + nz - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m và n để hai mặt phẳng (α) và (β) trùng nhau.

- A. $m = 18, n = -\frac{1}{3}$.
- B. $m = 18, n = \frac{1}{3}$.
- C. $m = -18, n = \frac{1}{3}$.
- D. $m = -18, n = -\frac{1}{3}$.

Lời giải tham khảo

7C. Mặt phẳng trong không gian

Ta có:
$$\begin{cases} \frac{m}{6} = 3 \\ \frac{-1}{n} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 18 \\ n = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - mz - 1 = 0$ và $(Q): x + (2m + 1)y + z + 2 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau?

- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Lời giải tham khảo

$$(P) \perp (Q) \Rightarrow 1 + 2(2m + 1) - m = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để (Δ) song song với (P) .

- A. $m \neq 0$. B. $\forall m \in \mathbb{R}$. C. $m = 0$. D. $m > 0$.

Lời giải tham khảo

Đường thẳng (Δ) có $\vec{u}_{\Delta} = (2; -1; 1)$ và $M(1; -2; -1) \in \Delta$. Mặt phẳng (P) có $\vec{n}_P = (1; 1; -1)$.

+) Kiểm tra điều kiện cần: $\Delta // (P) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{n}_P = 0$ (đúng)

+) Điều kiện đủ: $M \notin (P) \Leftrightarrow 1 - 2 - (-1) + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + my + nz - 3 = 0$, m và n là các tham số thực và đường thẳng $(d): \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2}$. Tìm tất cả các giá trị của m và n để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng (d) .

- A. $m = 2$ và $n = 1$. B. $m = \frac{1}{2}$ và $n = 1$.
C. $m = 12$ và $n = 11$. D. $m = -2$ và $n = 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x + my + 3z + 5 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để d vuông góc với (P) .

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -1$.

D. $m = 2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$, mặt phẳng $(P): 6x + 2y + mz + 7 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ .

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = 4$.

D. $m = -20$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 12 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. (P) đi qua tâm của mặt cầu (S) .

B. (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

C. (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn và mặt phẳng (P) không qua tâm (S) .

D. (P) không có điểm chung với mặt cầu (S) .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$, $(\beta): x + y - z + 2 = 0$, $(\gamma): x - y + 5 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

- A. $(\alpha) \perp (\beta)$. B. $(\gamma) \perp (\beta)$. C. $(\alpha) // (\gamma)$. D. $(\alpha) \perp (\gamma)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 108. Tọa độ điểm, khoảng cách, góc (mặt phẳng)

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ hình chiếu của điểm $M(3; -3; 4)$ trên mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$.

- A. $H(1; 1; 2)$. B. $H(2; 1; 0)$. C. $H(0; 0; 1)$. D. $H(3; -3; 4)$.

Lời giải tham khảo

Tọa độ $(1; 1; 2)$ thuộc $mp(P)$; $\overrightarrow{HM} = (2; -4; 2)$ cùng phương với $\vec{n} = (1; -2; 1)$ với $H(1; 1; 2)$.

Vậy tọa độ hình chiếu của M trên $mp(P)$ là $H(1; 1; 2)$.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$. Tìm giá trị t sao cho khoảng cách từ $M(t; 2; -1)$ đến mặt phẳng (P) bằng 1.

- A. $t = -8$. B. $\begin{cases} t = -14 \\ t = -8 \end{cases}$. C. $t = -14$. D. $\begin{cases} t = -20 \\ t = -2 \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Chọn đáp án B.

$$d(M, (P)) = \frac{|t + 11|}{3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -8 \\ t = -14 \end{cases}.$$

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) .

- A. $M'(1; -2; 3)$. B. $M'(1; 0; 3)$. C. $M'(1; 2; 0)$. D. $M'(0; 0; 3)$.

Lời giải tham khảo

Hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ $M'(1; 0; 3)$.

Khi đó tọa độ điểm đối xứng của M qua $mp(Oxz)$ là $M'(1; -2; 3)$.

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho M cách đều hai mặt phẳng $x + 2y - z + 1 = 0$ và mặt phẳng $2x + 2y + z - 5 = 0$.

- A. $M(-4;0;0)$. B. $M(7;0;0)$. C. $M(-6;0;0)$. D. $M(6;0;0)$.

Lời giải tham khảo

Ta có $M(a;0;0)$, $|a+1| = |2a-5| \Rightarrow a=6 \Rightarrow M(6;0;0)$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 1 = 0$ và điểm $M(1;1;2)$. Gọi N là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ của điểm N .

- A. $N\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$. B. $N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$. C. $N\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$. D. $N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): 2x + y + 2z + 5 = 0$. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$. Tính khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

- A. 2. B. -2. C. 6. D. -6.

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): mx + 6y - (m+1)z - 9 = 0$. Tìm các giá trị của m để khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng 1.

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = \frac{1}{3}$.

D. $m = 4$.

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox , (Q) là mặt phẳng chứa trục Oz . Tính góc được tạo bởi hai mặt phẳng $(P), (Q)$ cùng đi qua M .

A. 30° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

Dạng 109. Bài toán về diện tích, thể tích (mặt phẳng)

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3), B(0;0;2), C(1;0;0), D(0;-1;0)$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V = 1$. B. $V = \frac{1}{6}$. C. $V = \frac{1}{3}$. D. $V = \frac{1}{2}$.

Lời giải tham khảo

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA}|$$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (1;0;-2); \overrightarrow{BD} = (0;-1;-2); \overrightarrow{BA} = (1;2;1)$

$$[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (-2;2;-1) \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(-2;2;-1) \cdot (1;2;1)| = \frac{1}{6}.$$

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm không đồng phẳng $A(-2;1;-1); B(0;2;-1); C(0;3;0); D(1;0;a)$. Tìm a để $V_{ABCD} = \frac{3}{2}$.

- A. $a = 0$. B. $a = 1$. C. $a = -3$. D. $a = -4$.

Lời giải tham khảo

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2;1;0) \\ \overrightarrow{AC} = (2;2;1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (1;-2;2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (3;-1;a+1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 5 + 2(a+1)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |5 + 2(a+1)| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -8 \end{cases}$$

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính thể tích V của tứ diện $OABC$ với A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $2x - 3y + 5z - 3 = 0$ với trục Ox, Oy, Oz .

- A. $V = 78$. B. $V = 120$. C. $V = 91$. D. $V = 150$.

Lời giải tham khảo

Ta có $A(15;0;0), B(0;-10;0), C(0;0;6)$.

Diện tích tam giác OBC là $S = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$;

Thể tích khối tứ diện: $V = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 15 = 150$.

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(0;0;3), B(1;1;5), C(-3;0;0), D(0;-3;0)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. B. $S = \frac{9\sqrt{5}}{2}$. C. $S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. D. $S = \frac{9\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\overrightarrow{AC} = (-3;0;-3), \overrightarrow{AB} = (1;1;2)$

7C. Mặt phẳng trong không gian

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] = (-9; -9; 9)$$

$$\text{Do đó: } S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}]| = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ cắt các trục tọa độ lần lượt tại A, B, C . Tính diện tích S của tam giác OAB là (với O là gốc tọa độ).

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = 3$.

D. $S = 6$.

Lời giải tham khảo

$$6x + 3y + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$

$$\Rightarrow A(1; 0; 0), B(0; 2; 0) \Leftrightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 1$$

Câu 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 3), D(4; 4; 4)$. Tính độ dài đường cao h hạ từ D của tứ diện $ABCD$.

A. $h = 9$.

B. $h = 3\sqrt{3}$.

C. $h = 4\sqrt{3}$.

D. $h = 6$.

Lời giải tham khảo

Mặt phẳng $(ABC): x + y + z - 3 = 0$,

$$h = d(D, (ABC)) = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 91. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; a)$, trong đó $a > 0$. Gọi M, N là trung điểm các cạnh $B'C'$ và CD . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $AM \perp BN$.

B. $2AM = BN$.

C. $AM = BN$.

D. $AM // BN$.

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho năm điểm $A(1; 2; 3), B(0; 0; 2), C(1; 0; 0), D(0; -1; 0), E(2015; 2016; 2017)$. Hỏi từ năm điểm này tạo thành bao nhiêu mặt phẳng?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 10.

7C. Mặt phẳng trong không gian

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$; $D(-2;1;-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều 4 điểm đó?

- A. 2 mặt phẳng. B. 7 mặt phẳng. C. 1 mặt phẳng. D. Có vô số mặt phẳng.

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;0)$ và $D(-2;3;-1)$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

- A. $V = \frac{1}{3}$. B. $V = \frac{1}{2}$. C. $V = \frac{1}{6}$. D. $V = \frac{1}{4}$.

7D. MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 110. Tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 16$$

Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| A. $I(2;1;-3), R=4$. | B. $I(2;-1;-3), R=16$. |
| C. $I(-2;-1;3), R=16$. | D. $I(-2;-1;3), R=4$. |

Lời giải tham khảo

Phương trình mặt cầu có dạng $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (Dạng chính tắc)

Khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R .

$\Rightarrow$ Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 16$ có:

- Tâm $I(2;1;-3)$.
- Bán kính $R = \sqrt{16} = 4$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$.

Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| A. $I(0;1;-2), R=2$. | B. $I(0;-1;2), R=2$. |
| C. $I(1;1;2), R=4$. | D. $I(0;1;-2), R=4$. |

Lời giải tham khảo

$\Rightarrow$ Mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ có:

- Tâm $I(0;1;-2)$.
- Bán kính $R = \sqrt{4} = 2$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$

Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| A. $I(-1;2;0)$ và $R=3$. | B. $I(-1;2;0)$ và $R=4$. |
| C. $I(1;2;0)$ và $R=3$. | D. $I(1;2;0)$ và $R=4$. |

Lời giải tham khảo

Phương trình mặt cầu có dạng $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (Dạng tổng quát)

Khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ có:

7D. Mặt cầu trong không gian

- Tâm $I(-1; 2; 0)$.
- Bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2 - (-4)} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0.$$

Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

- A. $I(-2; 4; -6)$ và $R = \sqrt{58}$. B. $I(2; -4; 6)$ và $R = \sqrt{58}$.
C. $I(-1; 2; -3)$ và $R = 4$. D. $I(1; -2; 3)$ và $R = 4$.

Lời giải tham khảo

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ có:

- Tâm $I(1; -2; 3)$.
- Bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 - (-2)} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 2} = \sqrt{16} = 4$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12.$$

Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

- A. (S) đi qua điểm $N(-3; 4; 2)$. B. (S) đi qua điểm $M(1; 0; 1)$.
C. (S) có bán kính $R = 2\sqrt{3}$. D. (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 16.$$

Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .

- A. $I(3; -4; 1)$ và $R = 4$. B. $I(-3; 4; 1)$ và $R = 4$.
C. $I(3; -4; 1)$ và $R = 16$. D. $I(-3; 4; 1)$ và $R = 16$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 6z - 3 = 0.$$

Tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .

A. $I(2; 2; -3)$ và $R = \sqrt{20}$.

B. $I(-4; -4; 6)$ và $R = \sqrt{71}$.

C. $I(4; 4; -6)$ và $R = 71$.

D. $I(-2; -2; 3)$ và $R = \sqrt{20}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (C) là giao tuyến của mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ với mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$. Tìm tọa độ tâm H và tính bán kính r của (C) .

A. $H(-1; 2; 3); r = 8$.

B. $H(-1; 2; -3); r = 4$.

C. $H(-1; -2; 3); r = 2$.

D. $H(-1; -2; 3); r = 9$.

Dạng 111. Viết phương trình mặt cầu

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 2; -3)$ và $A(1; 0; 4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A ?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 5$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 53$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 53$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\overline{AI}(0; -2; 7) \Rightarrow R = AI = \sqrt{53}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 53$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(2; 1; -2)$ và $A(3; 2; -1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A ?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 6 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z - 6 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 6 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z + 6 = 0$.

Lời giải tham khảo

- Bán kính mặt cầu $R = \sqrt{3}$.

- Phương trình mặt cầu có dạng: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 6 = 0$.

 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho A là giao điểm của đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -3)$ và đi qua A ?

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 21$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 21$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1; 2; 0)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I và đường kính bằng 10?

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 100$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 100$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I và đường kính bằng 6??

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 36$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 36$.

Lời giải tham khảo

Theo giả thiết mặt cầu có bán kính bằng 6 nên có bán kính $R = 3$, Tâm mặt cầu là $I(1; -2; 3)$ nên có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$.

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Lời giải tham khảo

Phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc mặt phẳng (P) có bán kính $r = d(A, (P)) = 2$ là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

A. $(x+3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

C. $(x+3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$.

D. $(x+3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 81$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;-3)$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z + 19 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

A. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 14.$

B. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 14.$

C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14.$

D. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14.$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;6;2)$, $B(5;1;3)$, $C(4;0;6)$, $D(5;0;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm D và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) ?

A. $(x+5)^2 + y^2 + (z+4)^2 = \frac{8}{223}.$

B. $(x-5)^2 + y^2 + (z+4)^2 = \frac{4}{223}.$

C. $(x+5)^2 + y^2 + (z-4)^2 = \frac{16}{223}.$

D. $(x-5)^2 + y^2 + (z-4)^2 = \frac{8}{223}.$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$, $D(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) ?

A. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14.$

B. $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 14.$

C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 14.$

D. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14.$

7D. Mặt cầu trong không gian

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu ngoại đi qua bốn điểm O, A, B, C ?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 0$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C ?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 2z = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 2z = 0$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(2;4;0)$, $C(0;0;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ)?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{14}$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(0;4;0)$, $N(2;4;0)$ và $P(0;0;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $O(0;0;0), N, M, P$?

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 16$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 16$.

7D. Mặt cầu trong không gian

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(3;5;2)$, $C(3;1;-3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ)?

A. $\left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 + \left(z + \frac{39}{14}\right)^2 = \frac{1427}{28}$.

B. $\left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 + \left(z + \frac{39}{14}\right)^2 = \frac{2147}{28}$.

C. $\left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 + \left(z + \frac{39}{14}\right)^2 = \frac{2417}{28}$.

D. $\left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 + \left(z + \frac{39}{14}\right)^2 = \frac{1247}{28}$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;6;0)$, $B(0;6;0)$, $C(0;0;-2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C ?

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 11$.

B. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{11}$.

C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 44$.

D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 91$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu tâm $I(2;1;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 3 = 0$. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = \frac{4}{3}$.

B. $R = \frac{2}{9}$.

C. $R = \frac{2}{3}$.

D. $R = 2$.

7D. Mặt cầu trong không gian

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;1), B(0;1;4), C(-1;3;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (P) ?

A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$.

Lời giải tham khảo

Gọi tâm mặt cầu $I(x; -x+2z-4; z)$. Tìm x, z từ hệ hai phương trình $IA = IB = IC$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;4;4), B(-4;1;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A, B ?

A. $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{23}{3}\right)^2 = \frac{901}{36}$.

B. $x^2 + y^2 + \left(z + \frac{23}{6}\right)^2 = \frac{901}{36}$.

C. $x^2 + y^2 + \left(z + \frac{23}{3}\right)^2 = \frac{901}{36}$.

D. $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{23}{6}\right)^2 = \frac{901}{36}$.

Lời giải tham khảo

Đặt tâm. Tìm z từ phương trình $IA = IB$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(2;0;0), B(3;-1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I thuộc mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A, B và gốc tọa độ O ?

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{6}$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 6$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 14$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$.

7D. Mặt cầu trong không gian

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;3;0)$, $B(-2;1;1)$ và $(\Delta): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua A, B có tâm I thuộc đường thẳng (Δ) ?

- A. $\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{10}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{521}{100}$. B. $\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{10}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25}{3}$.
- C. $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{10}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{521}{100}$. D. $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{10}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25}{3}$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng d ?

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$. B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.
- C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5$. D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và điểm $A(2;0;-1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm A và cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 2?

- A. $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{61}{9}$. B. $(x+2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{61}{9}$.
- C. $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{61}{9}$. D. $(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{61}{9}$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 6 = 0$ và điểm $M(1; -1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm nằm trên trục Ox và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm M ?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y + 6z + 12 = 25$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y + 6z + 12 = 36$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; -2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π ?

- A. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 36$. B. $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 9$.
C. $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 16$. D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 25$.

Lời giải tham khảo

Tính khoảng cách d từ điểm I đến mặt phẳng (P) và bán kính r của đường tròn giao tuyến. Bán kính cầu R được tính theo công thức $R = \sqrt{d^2 + r^2}$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; -2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm I sao cho mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π ?

- A. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 25$. B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 16$.
C. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 16$. D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 25$.

Lời giải tham khảo

$(S) \cap (P) = (C)$ có bán kính $r = 4$, $R^2 = r^2 + d^2$, trong đó $d = d(I, (P))$, R là bán kính mặt cầu.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3;1;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm I sao cho mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là một đường tròn có bán kính bằng 2?

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 20$.

B. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 20$.

C. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 18$.

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 18$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-3)$, $B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - y - z + 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm nằm trên đường thẳng AB , bán kính bằng $2\sqrt{11}$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

A. $(S): (x-9)^2 + y^2 + (z-6)^2 = 44$ và $(S): (x+13)^2 + y^2 + (z+16)^2 = 44$.

B. $(S): (x+13)^2 + y^2 + (z+16)^2 = 44$.

C. $(S): (x-9)^2 + y^2 + (z-6)^2 = 44$.

D. $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 44$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm nằm trên d , tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua điểm $A(2;-1;0)$, biết tâm của mặt cầu có cao độ không âm?

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$.

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

7D. Mặt cầu trong không gian

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3; -2; 2)$ và $(P): 2x + y - 2z + 6 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn giao tuyến có bán kính $r = \sqrt{3}$?

- A. $2x + y - 2z + 3 = 0; 2x + y - 2z - 3 = 0$. B. $2x + y - 2z + 5 = 0; 2x + y - 2z - 5 = 0$.
C. $2x + y - 2z + 1 = 0; 2x + y - 2z - 1 = 0$. D. $2x + y - 2z + 7 = 0; 2x + y - 2z - 7 = 0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 2 = 0$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua A và có tâm I ?

- A. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 6$. B. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 6$.
C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 6$. D. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 6$.

✎ Dạng 112. Vị trí tương đối của mặt cầu

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$ tại điểm $M(7, -1, 5)$?

A. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$.

B. $2x + 3y + 6z - 5 = 0$.

C. $6x - 2y - 2z - 50 = 0$.

D. $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Lời giải tham khảo

(S) có tâm $I(1; -3; 2)$. Gọi $mp(P)$ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M(7, -1, 5)$ nên $mp(P)$ có vector pháp tuyến $\overrightarrow{IM} = (6; 2; 3)$ và $M \in mp(P)$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3; 6; 7)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 11 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm M của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) .

A. $M(2; 3; 1)$.

B. $M(3; 2; 1)$.

C. $M(1; 2; 3)$.

D. $M(3; 1; 2)$.

Lời giải tham khảo

Tiếp điểm là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) .

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(P): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với (P) ?

A. $\begin{cases} 4x + 3y - 12z + 78 = 0 \\ 4x + 3y - 12z - 26 = 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} 4x + 3y - 12z - 78 = 0 \\ 4x + 3y - 12z + 26 = 0 \end{cases}$.

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

Lời giải tham khảo

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Mặt phẳng (Q) song song với (P) có phương trình là:
 $4x + 3y - 12z + c = 0$

(S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 4$

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + c|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|c - 26|}{13} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 78 \\ c = -26 \end{cases}$$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ và cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 18 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với (S) ?

A. $2x + 2y - z + 22 = 0$.

B. $2x + 2y - z - 28 = 0$.

C. $2x + 2y - z - 18 = 0$.

D. $2x + 2y - z + 12 = 0$.

Lời giải tham khảo

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ có bán kính $R = 5$

7D. Mặt cầu trong không gian

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên (Q) có phương trình là $(Q): 2x + 2y - z + D = 0; D \neq -18$

Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I, (Q)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 5 \Leftrightarrow |3 + D| = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -18 \\ D = 12 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có phương trình của mặt phẳng (Q) là $(Q): 2x + 2y - z + 12 = 0$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 24 = 0$. Tính khoảng cách lớn nhất $d_{\max}$ từ một điểm thuộc mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) .

- A. $d_{\max} = 2\sqrt{3} + 3$. B. $d_{\max} = 9\sqrt{3} + 2$. C. $d_{\max} = 9\sqrt{3} - 4$. D. $d_{\max} = 3\sqrt{3} + 4$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$.

- A. $m = 0, m = -12$. B. $m = 0$.
C. $m = 3\sqrt{13} - 6, m = -3\sqrt{13} - 6$. D. $m = -4, m = -8$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

7D. Mặt cầu trong không gian

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu tâm I , bán kính 4. Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn giao tuyến.

A. $K\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right), r = 2$.

B. $K\left(-\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right), r = 2\sqrt{3}$.

C. $K\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right), r = 2\sqrt{5}$.

D. $K\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right), r = 2\sqrt{3}$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho $MN = 8$.

A. $m = 12$.

B. $m = 10$.

C. $m = -12$.

D. $m = -10$.

7E. KHOẢNG CÁCH – GÓC – HÌNH CHIẾU

✎ **Dạng 113. Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng**

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M_1(2;3;1)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$. Tính khoảng cách d từ điểm M_1 đến đường thẳng Δ .

- A. $d = \frac{10\sqrt{2}}{3}$. B. $d = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. C. $d = \frac{10}{3}$. D. $d = \frac{10\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải tham khảo

Đường thẳng Δ qua $M_0(-2;1;-2)$ và có VTCP $\vec{a} = (1;2;-2) \Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} = (4;2;2)$

Ta có: $[\overrightarrow{M_0M_1}; \vec{a}] = (-8;10;6)$

$$\Rightarrow d(M_1; \Delta) = \frac{|\vec{a} \cdot [\overrightarrow{M_0M_1}]|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{(-8)^2 + 10^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đến đường thẳng (d) .

- A. $d = \sqrt{3}$. B. $d = \sqrt{2}$. C. $d = 0$. D. $d = 1$.

Lời giải tham khảo

Lập PT mp đi qua $O(0;0;0)$ vuông góc (d) và cắt (d) tại H .

Khoảng cách từ O đến đường thẳng là độ dài đoạn OH .

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0)$, $B(0;0;8)$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0;6;0)$. Tính khoảng cách d từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA .

- A. $d = 4$. B. $d = 5$. C. $d = 6$. D. $d = 7$.

Lời giải tham khảo

Từ $\overrightarrow{AB} = (0;0;6)$ và $A(2;0;0)$ suy ra $C(2;6;0)$, do đó $I(3;3;4)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với OA là: $x - 1 = 0$.

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm của (P) với OA là $K(1;0;0)$.

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến OA là $IK = 5$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;5)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$, $(Q): x + y - z + 5 = 0$. Tính khoảng cách d từ M đến giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $d = \frac{9\sqrt{14}}{7}$. B. $d = \sqrt{\frac{529}{19}}$. C. $d = \frac{\sqrt{529}}{19}$. D. $d = \frac{529}{\sqrt{19}}$.

Lời giải tham khảo

Gọi Giao tuyến là đường thẳng (t) . VTCP của (t) là tích có hướng của hai vectơ pháp tuyến của (P) và (Q) .

Giao tuyến (t) qua $A(-2; -3; 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng (t)

Tính $d = MH = \sqrt{\frac{529}{19}}$.

Dạng 114. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 3 = 0$. Tính khoảng cách d từ M đến (P) .

A. $d = 1$. B. $d = 2$. C. $d = 3$. D. $d = 4$.

Lời giải tham khảo

• $d = d(M, (P)) = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 2$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; -2; 13)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

A. $d = \frac{1}{2}$. B. $d = \frac{4}{3}$. C. $d = 4$. D. $d = \frac{2}{3}$.

Lời giải tham khảo

• $d = d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2(-2) - 13 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{3}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y - 5 = 0$. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

A. $d = \sqrt{5}$. B. $d = 1$. C. $d = 5$. D. $d = -1$.

Lời giải tham khảo

• $d_{(O, (P))} = \frac{|-5|}{\sqrt{9 + 16}} = 1$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2; -4; 3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y + 2z - 3 = 0$. Tính khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

- A. $d = 3$. B. $d = 2$. C. $d = 1$. D. $d = 11$.

Lời giải tham khảo

$$d(M, (P)) = \frac{|2(-2) - (-4) + 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}$,

$(d_2): \frac{-x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $(P): 2x + 4y - 4z - 3 = 0$. Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (P) .

- A. $d = \frac{4}{3}$. B. $d = \frac{7}{6}$. C. $d = \frac{13}{6}$. D. $d = \frac{5}{3}$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Giao điểm } A \text{ của } (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ thỏa: } \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3} \\ \frac{-x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{4}\right) \Rightarrow d_{(A, (P))} = \frac{4}{3}.$$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(2; 4; 5)$, mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 6 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ điểm M có hành độ nhỏ hơn 2, nằm trên đường thẳng d có khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) bằng EM .

- A. $M(1; -2; 3)$. B. $M(1; 2; 3)$. C. $M(17; 6; 11)$. D. $M(-17; 6; -11)$.

Lời giải tham khảo

Đặt điểm $M(-1 + 2t; 3 - t; 2 + t)$. Tìm t từ phương trình $d(M, (P)) = EM$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 3z + 1 = 0$ và điểm $A(1; -2; -3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

- A. $d = \sqrt{14}$. B. $d = 2\sqrt{7}$. C. $d = 14$. D. $d = \sqrt{7}$.

Lời giải tham khảo

Mặt phẳng $(P): 2x - y - 3z + 1 = 0$ và điểm $A(1; -2; -3)$.

$$\text{Khoảng cách } d \text{ từ } A \text{ đến } (P): d = \frac{|2 + 2 + 9 + 1|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 5z + 4 = 0$ và điểm $A(2; -1; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

- A. $d = \frac{24}{\sqrt{13}}$. B. $d = \frac{24}{\sqrt{14}}$. C. $d = \frac{23}{\sqrt{14}}$. D. $d = \frac{23}{\sqrt{11}}$.

7E. Khoảng cách – Góc – Hình chiếu

Khoảng cách d từ A đến (P) : $d = \frac{|2+2+9+1|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 2)$ và mặt phẳng $(P): 4x - y + 3z + 2 = 0$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

A. $d = \frac{26\sqrt{21}}{21}$. B. $d = \frac{21\sqrt{26}}{26}$. C. $d = \sqrt{26}$. D. $d = \sqrt{21}$.

Lời giải tham khảo

$$d(A, (P)) = \frac{|4 \cdot 3 - (-1) + 3 \cdot 2 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{21}{\sqrt{26}} = \frac{21\sqrt{26}}{26}.$$

Dạng 115. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(\alpha): x + y - z + 5 = 0$ và $(\beta): 2x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ?

A. $d = \frac{7\sqrt{3}}{6}$. B. $d = \frac{7}{6}$. C. $d = \frac{\sqrt{17}}{6}$. D. $d = 2\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Chọn $M(0; 0; 5) \in mp(\alpha)$. Tính được: $d((\alpha); (\beta)) = d(M; (\beta))$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 6z - 18 = 0$, $(Q): 2x + 3y + 6z + 10 = 0$. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $d = 6$. B. $d = 5$. C. $d = 3$. D. $d = 4$.

Lời giải tham khảo

Lấy $A(9; 0; 0) \in (P)$

$$d((P); (Q)) = d(A; (Q)) = \frac{|2 \cdot 9 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 10|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 4.$$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 11 = 0$ và $(Q): 2x + 2y - z + 4 = 0$. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $d = 3$. B. $d = 5$. C. $d = 7$. D. $d = 9$.

Lấy $A(-2; 0; 0) \in (Q)$

$$d((P); (Q)) = d(A; (P)) = \frac{|2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 11|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 5.$$

Dạng 116. Bài toán về góc

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

A. 45° .B. 60° .C. 90° .D. 135° .*Lời giải tham khảo*

$$\text{Vì } \cos(AB, CD) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (AB, CD) = 45^\circ$$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;2;6)$, $B(3;-1;0)$, $C(0;-7;0)$, $D(-2;1;-1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua hai điểm A, D và φ là góc giữa (d) và (ABC) . Tính $\sin\varphi$.

A. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}$.B. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{10}}{8}$.C. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$.D. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{10}}{2}$.*Lời giải tham khảo*

$$\overrightarrow{BA} = (0; 3; 6); \overrightarrow{BC} = (-3; -6; 3)$$

$$V_{\text{tpt}, mp(ABC)}: \vec{n} = \frac{1}{9} [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = (5, -2, 1)$$

Ta có $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = (-5; -1; -7)$ là vtcp của đường thẳng AD

- Gọi φ là góc giữa đường thẳng AD và $mp(ABC)$, $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$

$$\text{Khi đó: } \sin\varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| |\vec{n}|} = \frac{|-25 + 2 - 7|}{\sqrt{75} \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $(d): \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tính góc α giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

A. $\alpha = 45^\circ$.B. $\alpha = 30^\circ$.C. $\alpha = 60^\circ$.D. $\alpha = 120^\circ$.*Lời giải tham khảo*

Gọi vector pháp tuyến và vector chỉ phương của (P) và (d) lần lượt là $\vec{n}$, $\vec{u}$. Góc giữa (d)

$$\text{và } (P) \text{ được tính theo công thức } \cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| |\vec{u}|}.$$

Dạng 117. Bài toán về hình chiếu**Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}. \text{ Tìm tọa độ hình chiếu } H \text{ của điểm } A \text{ lên đường thẳng } d.$$

- A. $(2; -3; -1)$. B. $(2; 3; 1)$. C. $(2; -3; 1)$. D. $(-2; 3; 1)$.

*Lời giải tham khảo*Gọi H là hình chiếu của A lên d . $H(6 - 4t; -2 - t; -1 + 2t)$

$$\overrightarrow{AH} = (5 - 4t; -3 - t; -2 + 2t); \quad \overrightarrow{u_d} = (-4; -1; 2)$$

$$\overrightarrow{AH} \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow -4(5 - 4t) + -1(-3 - t) + 2(-2 + 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; -3; 1)$$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -2; 5)$ và đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}. \text{ Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc } H \text{ của điểm } A \text{ lên đường thẳng}$$

 (d) .

- A. $(4; -1; 3)$. B. $(-4; 1; -3)$. C. $(4; -1; -3)$. D. $(-4; -1; -3)$.

*Lời giải tham khảo*Giải hệ gồm PT đường thẳng (d) và PT mp (P) . Ta được tọa độ hình chiếu.**Câu 22.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$ và điểm $A(-1; 2; -1)$. Tìm tọa độ hình chiếu I của điểm A lên Δ .

- A. $I(3; 1; 2)$. B. $I(2; 2; 2)$. C. $I(1; 2; 1)$. D. $I(4; 2; 1)$.

*Lời giải tham khảo*Gọi $I(1 + t; 2; 3 - t)$. Tìm t từ phương trình $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u} = 0$, với $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của Δ .**Câu 23.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 0); B(4; 1; 1)$. Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB .

- A. $OH = \frac{1}{\sqrt{19}}$. B. $OH = \sqrt{\frac{86}{19}}$. C. $OH = \sqrt{\frac{19}{86}}$. D. $OH = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

*Lời giải tham khảo*Ta có: $\overrightarrow{AB}(3; 3; 1)$. PTĐT AB là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow H(1 + 3t; -2 + 3t; t) \Rightarrow \overrightarrow{OH}(1 + 3t; -2 + 3t; t)$

$$\text{Vì } \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow 3 \cdot (1 + 3t) + 3(-2 + 3t) + t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{19}$$

7E. Khoảng cách – Góc – Hình chiếu

$$|\overline{OH}| = \sqrt{\left(\frac{28}{19}\right)^2 + \left(-\frac{29}{19}\right)^2 + \left(\frac{3}{19}\right)^2} = \sqrt{\frac{86}{19}}.$$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1, 2, -1)$, $B(0, 3, 4)$, $C(2, 1, -1)$. Tính độ dài đường cao h từ A đến BC .

- A. $h = \sqrt{6}$. B. $h = \sqrt{\frac{33}{50}}$. C. $h = 5\sqrt{3}$. D. $h = \sqrt{\frac{50}{33}}$.

Lời giải tham khảo

Phương trình tham số BC : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên BC .

Nên $M \in BC$ và $d(A; BC) = AM$; $\overline{AM} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BC} = 0$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 7; -9)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z - 1 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm M trên (P) .

- A. $H(2; 2; 1)$. B. $H(1; 0; 0)$. C. $H(-1; 1; 0)$. D. $H(4; 0; 1)$.

Lời giải tham khảo

Phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) là

$$d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -9 - 3t \end{cases}$$

Tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P) là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -9 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H(4; 0; 1).$$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P) .

- A. $A'(-7; -6; 1)$. B. $A'(-6; -7; 1)$.
C. $A'(7; 6; -1)$. D. $A'(6; -7; 1)$.

Lời giải tham khảo

Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A lên mặt phẳng (P) .

Điểm H là trung điểm của AA' .

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 16x - 12y - 15z - 4 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2; -1; -1)$ lên mặt phẳng (P) . Tính độ dài đoạn AH .

- A. $AH = \frac{11}{25}$. B. $AH = \frac{11}{5}$. C. $AH = \frac{22}{25}$. D. $AH = \frac{22}{5}$.

Lời giải tham khảo

7E. Khoảng cách – Góc – Hình chiếu

$$AH = d(A, (P)) = \frac{|16 \cdot 2 + (-12)(-1) + (-15)(-1) - 4|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}} = \frac{11}{5}.$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;1)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;1;0)$ và $D(0;1;2)$. Tìm tọa độ chân đường cao H của tứ diện $ABCD$ xuất phát từ đỉnh A .

- A. $H(2;1;0)$. B. $H(1;2;1)$. C. $H(1;1;2)$. D. $H(2;1;1)$.

Lời giải tham khảo

Viết phương trình mặt phẳng (BCD) và đường thẳng AH từ đó tìm được giao điểm H .

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $A(-1;3;2)$, $B(-9;4;9)$. Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho $(MA + MB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(-1;2;-3)$. B. $M(1;-2;3)$. C. $M(-1;2;-3)$. D. $M(-1;2;3)$.

Lời giải tham khảo

Ta có A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P)

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) , ta có: $MA' = MA$

Do đó $MA + MB = MA' + MB \geq A'B \Rightarrow \min(MA + MB) = A'B$ khi M là giao điểm của $A'B$ và (P) .

+ Tìm được $A'(3;1;0)$. Phương trình đường thẳng $A'B$:
$$\begin{cases} x = 3 - 12t \\ y = 1 + 3t \\ z = 9t \end{cases}$$

+ $M(-1;2;3)$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ điểm $M \in d_1$ và $N \in d_2$ sao cho đoạn thẳng MN ngắn nhất.

- A. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right)$, $N\left(\frac{69}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right)$. B. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right)$, $N\left(\frac{-69}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right)$.
C. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right)$, $N\left(\frac{69}{35}; \frac{17}{35}; \frac{18}{35}\right)$. D. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$, $N\left(\frac{69}{5}; \frac{-17}{5}; \frac{18}{5}\right)$.

Lời giải tham khảo

$M \in d_1 \Leftrightarrow M(t; t; 2t)$ và $N \in d_2 \Leftrightarrow N(-1 - 2t'; t'; 1 + t')$

MN ngắn nhất $\Leftrightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2

$$\Rightarrow \begin{cases} t - 6t' = 3 \\ 6t - t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{35} \\ t' = \frac{-17}{35} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{-69}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right).$$

8A. BÀI TOÁN VẬN DỤNG VỀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

✎ Dạng 118. Bài toán vận dụng về diện tích

Câu 01. Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi 40 cm . Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có diện tích S là bao nhiêu?

- A. $S = 100\text{ cm}^2$. B. $S = 400\text{ cm}^2$. C. $S = 49\text{ cm}^2$. D. $S = 40\text{ cm}^2$.

Lời giải tham khảo

$$S = ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \left(\frac{20}{2} \right)^2 = 100.$$

Câu 02. Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 384 m^2 để xây nhà. Nhưng vợ ông muốn có khuôn viên sân vườn đẹp nên ông mua thêm về hai phía chiều dài mỗi chiều 3 m và về hai phía chiều rộng mỗi chiều 2 m . Hỏi, để ông A mua được mảnh đất có diện tích nhỏ nhất (tiết kiệm chi phí) thì mảnh đất đó chu vi là bao nhiêu?

- A. 100 m . B. 140 m . C. 98 m . D. 110 m .

Lời giải tham khảo

Gọi x, y là chiều dài, chiều rộng phần đất xây nhà

$$\text{Ta có } \begin{cases} S = (x+6)(y+4) \\ x \cdot y = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = (x+6)\left(\frac{384}{x} + 4\right) \\ y = \frac{384}{x} \end{cases}$$

$$\text{Áp dụng BĐT AM-GM: } S = \left(4x + \frac{2304}{x} \right) + 408 \geq 192 + 408 \Rightarrow S \geq 600$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 4x = \frac{2304}{x} \Leftrightarrow x = 24 \Rightarrow y = 16$$

$$\text{Vậy mảnh đất cần mua có chiều dài là: } 24 + 6 = 30 \text{ (m)}$$

$$\text{Chiều rộng là: } 16 + 4 = 20 \text{ (m)}$$

Khi đó chu vi mảnh đất là 100 m .

Câu 03. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

- A. 50 và 25. B. 35 và 35. C. 75 và 25. D. 50 và 50.

Lời giải tham khảo

Gọi $x\text{ (m)}$ ($0 < x < 50$) là chiều rộng của hình chữ nhật

Khi đó, chiều dài của hình chữ nhật là $100 - 2x$

Nên diện tích của hình chữ nhật là $x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$

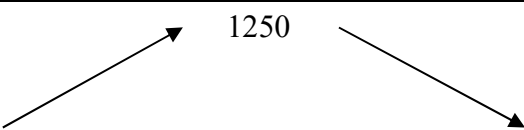
Gọi $f(x) = -2x^2 + 100x$ với điều kiện $0 < x < 100$

$$\Rightarrow f'(x) = -4x + 100. \text{ Cho } f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 100 = 0 \Rightarrow x = 25$$

8A. Bài toán vận dụng về ứng dụng đạo hàm

Bảng biến thiên:

x	0	25	50	
$f'(x)$		+	0	–
$f(x)$			1250	
	0			0



Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max_{(0;50)} f(x) = f(25) = 1250$

Vậy: Để rào khu đất ấy có diện tích lớn nhất theo hình chữ nhật có chiều rộng bằng 25 và chiều dài bằng 50.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 04. Một sợi dây có chiều dài 28 m là được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là tối thiểu.

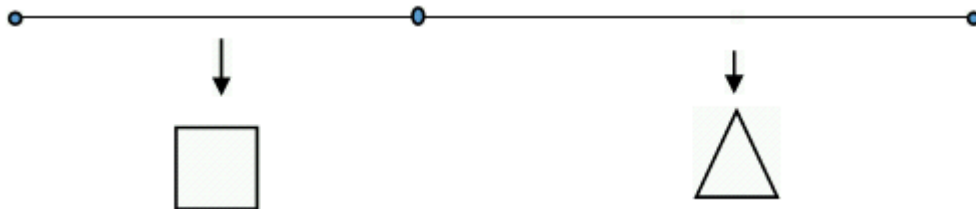
A. 14 .

B. $\frac{196}{4 + \pi}$.

C. $\frac{112}{4 + \pi}$.

D. $\frac{28\pi}{4 + \pi}$.

Câu 05. Một sợi dây có chiều dài là 6 m , được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}\text{ (m)}$.

B. $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}\text{ (m)}$.

C. $\frac{12}{4 + \sqrt{3}}\text{ (m)}$.

D. $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}\text{ (m)}$.

Dạng 119. Bài toán vận dụng về chuyển động của chất điểm

Câu 06. Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 24t$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt.

- A. $18m/s^2$. B. $-18m/s^2$. C. $-6m/s^2$. D. $6m/s^2$.

Lời giải tham khảo

Ta có vận tốc $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 24$. Vận tốc triệt tiêu khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 \end{cases} (L)$

Gia tốc $a(t) = v'(t) = 6t - 6$. Vậy gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là

$$a(4) = 6 \cdot 4 - 6 = 18m/s^2.$$

Câu 07. Một viên đá được thả thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu là $40 m/s$ từ một điểm cao $5 m$ cách mặt đất. Vận tốc của viên đá sau t giây được cho bởi công thức $v(t) = 40 - 10t \text{ m/s}$. Tính độ cao lớn nhất viên đá có thể lên tới so với mặt đất.

- A. $85 m$. B. $80 m$. C. $90 m$. D. $75 m$.

Lời giải tham khảo

Gọi h là quãng đường lên cao của viên đá.

$$v(t) = h'(t) \Rightarrow h(t) = \int v(t) dt = \int (40 - 10t) dt = 40t - 5t^2 + c$$

Tại thời điểm $t = 0$ thì $h = 5$. Suy ra $c = 5$.

$$\text{Vậy } h(t) = 40t - 5t^2 + 5$$

$$h(t) \text{ lớn nhất khi } v(t) = 0 \Leftrightarrow 40 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 4. \text{ Khi đó } h(4) = 85 \text{ m.}$$

Câu 08. Một đoàn tàu đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 72 km/h$ thì hãm phanh chuyển động chậm dần đều, sau 10 giây đạt vận tốc $v_1 = 54 km/h$. Tính thời gian tàu đạt vận tốc $v = 36 km/h$ kể từ lúc hãm phanh.

- A. $30 s$. B. $20 s$.
C. $40 s$. D. $50 s$.

Lời giải tham khảo

Đổi đơn vị: $72 km/h = 20 m/s$; $54 km/h = 15 m/s$; $36 km/h = 10 m/s$

$$a = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = \frac{15 - 20}{10} = -0,5 m/s^2; v_2 = v_0 + at_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_2 - v_0}{a} = \frac{10 - 20}{-0,5} = 20 s.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 09. Một chất điểm chuyển động theo qui luật $s = 6t^2 - t^3$ (trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây mà chất điểm bắt đầu chuyển động). Tính thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 2$.

B. $t = 4$.

C. $t = 1$.

D. $t = 3$.

Câu 10. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \frac{-1}{4}t^4 + 3t^2 - 2t - 4$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm nào, vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

A. $t = \sqrt{2}$.

B. $t = 1$.

C. $t = \sqrt{3}$.

D. $t = 2$.

Câu 11. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300 km . Vận tốc của dòng nước là 6 km/h . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v) = cv^3t$.

Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. 6 km/h .

B. 9 km/h .

C. 12 km/h .

D. 15 km/h .

Câu 12. Một tên lửa bay vào không trung với quỹ đạo đi được quãng đường $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) theo quy tắc sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2t.e^{3t+1}$ (km). Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu? Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian.

A. $5e^4$ (km/s).

B. $3e^4$ (km/s).

C. $9e^4$ (km/s).

D. $10e^4$ (km/s).

Dạng 120. Bài toán vận dụng liên quan đến thể tích

Câu 13. Ta có một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước a (cm), ta muốn cắt đi ở 4 góc 4 hình vuông cạnh bằng x (cm) để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Hỏi, phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

A. $x = \frac{a}{4}$.

B. $x = \frac{a}{5}$.

C. $x = \frac{a}{6}$.

D. $x = \frac{a}{7}$.

Lời giải tham khảo

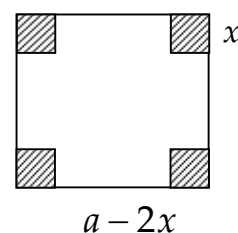
Gọi cạnh của hình vuông bị cắt là x , ($0 < x < a$).

Ta có thể tích hình hộp là: $V = x(a - 2x)^2 = \frac{1}{4} 4x(a - 2x)^2$.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho 3 số: $4x, a - 2x, a - 2x > 0$

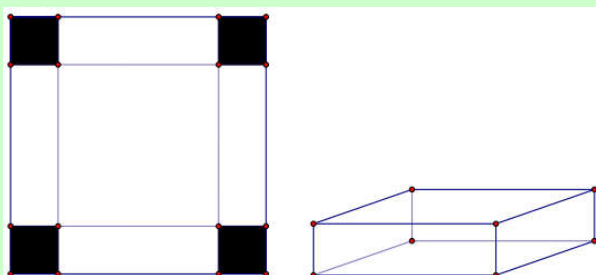
$$\text{Ta có: } V \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4x + a - 2x + a - 2x}{3} \right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8a^3}{27} = \frac{2a^3}{27}$$

$$V \text{ lớn nhất khi và chỉ khi: } 4x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$$



Vậy để thể tích hộp lớn nhất, cần cắt bốn góc bốn hình vuông có cạnh $\frac{a}{6}$.

Câu 14. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 6$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2$.

D. $x = 4$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Thể tích của hộp là } (12 - 2x)^2 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot 4x(12 - 2x)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x + 12 - 2x + 12 - 2x)^3}{27} = 128$$

Dấu bằng xảy ra khi $4x = 12 - 2x \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$ thì thể tích hộp lớn nhất.

Câu 15. Một tấm thiếc hình chữ nhật dài 45 cm, rộng 24 cm được làm thành một cái hộp không nắp bằng cách cắt bốn hình vuông bằng nhau từ mỗi góc và gập mép lên. Hỏi các hình vuông được cắt ra có cạnh là bao nhiêu để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

A. $x = 18$.

B. $x = 5$.

C. $x = 12$.

D. Đáp án khác.

Lời giải tham khảo

8A. Bài toán vận dụng về ứng dụng đạo hàm

Gọi x cm ($0 < x < 12$) là cạnh của các hình vuông bị cắt rời ra. Khi đó, chiều cao của hộp là x , chiều dài là $45 - 2x$, và chiều rộng là $24 - 2x$.

$$\text{Thể tích } V(x) = x(45 - 2x)(24 - 2x) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x.$$

$$\text{Suy ra } V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080.$$

Cho $V'(x) = 0$, suy ra được giá trị x cần tìm là $x = 5$.

$$V''(x) = 24x - 276 \Rightarrow V''(5) = -156 < 0. \text{ Do đó } x = 5 \text{ là điểm cực đại.}$$

Câu 16. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

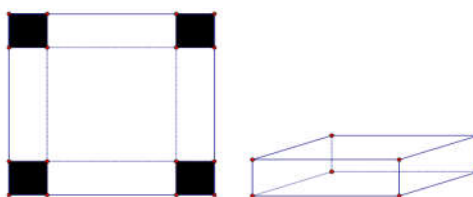
A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải tham khảo



Điều kiện: $0 < x < 9$

$$V = h.B = x.(18 - 2x)^2 = f(x)$$

Bấm mod 7 và tìm được $x = 3$

Cách khác: Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số không âm $4x$; $18 - 2x$; $18 - 2x$

$$V = x.(18 - 2x)^2 = \frac{1}{4}.4x(18 - 2x).(18 - 2x) \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4x + (18 - 2x) + (18 - 2x)}{3} \right)^3 =$$

Dấu "=" xảy ra khi $4x = 18 - 2x \Leftrightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$ thì thể tích lớn nhất

Câu 17. Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích 12 m³ để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu gấp rưỡi chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (không tính đến bề dày của thành bể). Tính kích thước (dài; rộng – tính theo đơn vị m , làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy) phù hợp yêu cầu.

A. Dài $2,42$ m và rộng $1,82$ m.

B. Dài $2,74$ m và rộng $1,71$ m.

C. Dài $2,26$ m và rộng $1,88$ m.

D. Dài $2,19$ m và rộng $1,91$ m.

Lời giải tham khảo

Gọi chiều sâu và chiều rộng của bể lần lượt là $3x$ và $2x$ (m)

$$\text{Chiều dài của bể là } \frac{12}{2x.3x} = \frac{2}{x^2} \text{ (m)}$$

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần của bể phải nhỏ nhất. Ta có

$$S_{tp} = 2 \left(2x.3x + 2x.\frac{2}{x^2}.\frac{2}{x^2} \right) = 2 \left(6x^2 + \frac{10}{x} \right)$$

$$6x^2 + \frac{5}{x} + \frac{5}{x} \geq 3\sqrt[3]{150} \Rightarrow S_{xq} \geq 6\sqrt[3]{150} \text{ (m}^2\text{)}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $6x^2 + \frac{5}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$

Khi đó chiều rộng và chiều dài của bể lần lượt là $2x = 1,88 \text{ m}$; $\frac{2}{x^2} = 2,26 \text{ m}$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 18. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $80 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x (\text{cm})$ để khi gấp lại được một chiếc hộp không nắp. Hỏi, để chiếc hộp có thể tích lớn nhất thì x bằng bao nhiêu?

A. $x = 12$.

B. $x = 11$.

C. $x = 10$.

D. $x = 9$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông như hình bên dưới. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x (\text{cm})$, đường cao là $h (\text{cm})$ và có thể tích là $500 (\text{cm}^3)$. Tìm giá trị của x sao diện tích của mảnh các tông là nhỏ nhất.

A. $x = 5$.

B. $x = 10$.

C. $x = 15$.

D. $x = 20$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

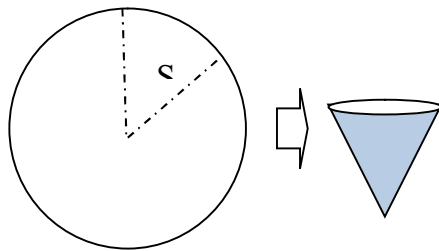
.....

.....

.....

.....

Câu 20. Từ một tấm tôn hình tròn có đường kính bằng 60 cm . Người ta cắt bỏ đi một hình quạt S của tấm tôn đó, rồi gấn các mép vừa cắt lại với nhau để được một cái nón không có nắp (như hình vẽ). Hỏi bằng cách làm đó người ta có thể tạo ra cái nón có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

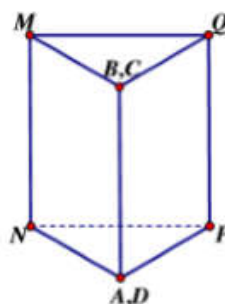
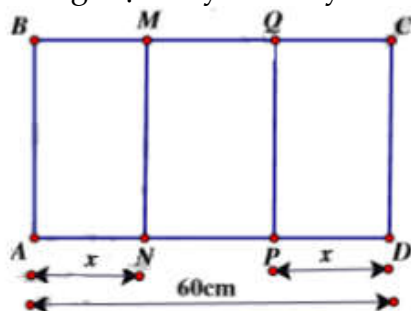


- A. $1800\sqrt{3}\pi\text{ (cm}^3\text{)}$ B. $2480\sqrt{3}\pi\text{ (cm}^3\text{)}$.
C. $2000\sqrt{3}\pi\text{ (cm}^3\text{)}$. D. $1125\sqrt{3}\pi\text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 21. Người ta muốn làm một cái bình thủy tinh hình lăng trụ đứng có nắp đáy, đáy là tam giác đều để đựng 16 lít nước. Để tiết kiệm chi phí nhất (xem tấm thủy tinh làm vỏ bình là rất mỏng) thì cạnh đáy của bình là bao nhiêu?

- A. 4 m . B. 4 dm . C. $2\sqrt[3]{2}\text{ dm}$. D. $2\sqrt[3]{4}\text{ m}$.

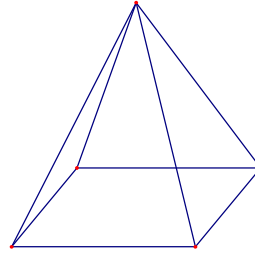
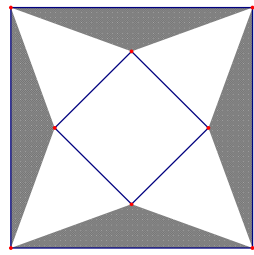
Câu 22. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60\text{ cm}$. Ta gập tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết 2 đáy.



Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?

- A. $x = 20$. B. $x = 18$. C. $x = 25$. D. $x = 4$.

Câu 23. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $1m$ như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x(m)$, sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Tính giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 24. Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh hình trụ với đáy cốc dày $1,5\text{ cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,2\text{ cm}$ và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là $480\pi\text{ cm}^3$ thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?

- A. $75,66\pi\text{ cm}^3$. B. $71,16\pi\text{ cm}^3$. C. $85,41\pi\text{ cm}^3$. D. $84,64\pi\text{ cm}^3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 121. Bài toán vận dụng về tính khoảng cách

Câu 25. Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4m$ được đặt ở độ cao $1,8m$ so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn ảnh). Hỏi, để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất thì vị trí đứng cách màn ảnh là bao nhiêu?

- A. $x = 2,4m$. B. $x = -2,4m$. C. $x = \pm 2,4m$. D. $x = 1,8m$.

Lời giải tham khảo

Với bài toán này ta cần xác định OA

để góc $\widehat{BOC}$ lớn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi

$\tan \widehat{BOC}$ lớn nhất.

Đặt $OA = x$ (m) với $x > 0$, ta có

$$\tan \widehat{BOC} = \tan(\widehat{AOC} - \widehat{AOB}) = \frac{\tan \widehat{AOC} - \tan \widehat{AOB}}{1 + \tan \widehat{AOC} \tan \widehat{AOB}} = \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}.$$
 Xét

hàm số $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$. Bài toán trở thành tìm $x > 0$ để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$$

Ta có bảng biến thiên

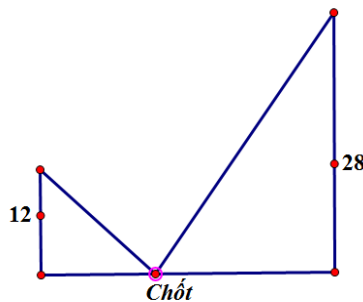
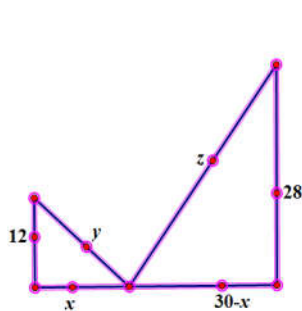
x	0	2,4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{84}{193}$	0

Vậy vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh $2,4m$.

Câu 26. Có hai chiếc cọc cao $12m$ và $28m$, đặt cách nhau $30m$ (xem hình minh họa dưới đây). Chúng được buộc bởi hai sợi dây từ một cái chốt trên mặt đất nằm giữa hai chân cột tới đỉnh của mỗi cột. Gọi x (m) là khoảng cách từ chốt đến chân cọc ngắn. Tìm x để tổng độ dài hai dây ngắn nhất.

- A. $x = 9$. B. $x = 10$. C. $x = 11$. D. $x = 12$.

Lời giải tham khảo



Kí hiệu x là khoảng cách từ chân cột thấp tới chốt buộc; y, z là độ dài hai sợi dây như hình vẽ.

Khi đó khoảng cách từ chốt buộc tới chân cột thứ hai là $30 - x$.

Điều kiện $0 < x < 30; y, z > 0$. Gọi d là tổng độ dài hai sợi dây. Khi đó $d = y + z$

Theo Pitago, ta có $x^2 + 12^2 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 144}$; $(30 - x)^2 + 28^2 = z^2$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684} \quad (0 < x < 30)$$

$$\text{Ta có } d' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 30x + 1684}}$$

$$d' = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} = (30 - x)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 60x + 1684) = (30 - x)^2(x^2 + 144)$$

$$\Leftrightarrow 640x^2 - 8640x - 129600 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -22,5 \notin (0; 30) \end{cases}$$

Lập BBT ta có $\min_{(0;30)} d = d(9) = 50$.

Câu 27. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB 5km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h (xem hình vẽ dưới đây). Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.

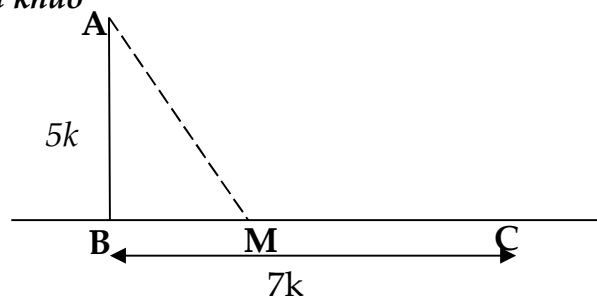
A. $\frac{\sqrt{74}}{4}$.

B. $\frac{29}{12}$.

C. $\sqrt{29}$.

D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải tham khảo



Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính thời gian người canh hải đăng phải đi.

Đặt $BM = x$ thì ta được: $MC = 7 - x$, $AM = \sqrt{x^2 + 25}$. Theo đề bài, Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h , như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

8A. Bài toán vận dụng về ứng dụng đạo hàm

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6} = \frac{3\sqrt{x^2 + 25} - 2x + 14}{12} \text{ với } x \in [0; 7]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được thời gian ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$f'(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2\sqrt{x^2 + 25} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 25} = 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 100 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{5} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 7]$ và ta có:

$$f(0) = \frac{29}{12}, f(2\sqrt{5}) = \frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}, f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$ tại $x = 2\sqrt{5}$. Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M nằm cách B một đoạn $BM = x = 2\sqrt{5}$.

Câu 28. Cho hai vị trí A, B cách nhau $615m$, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là $118m$ và $487m$. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước và mang về B . Tính độ dài đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi.

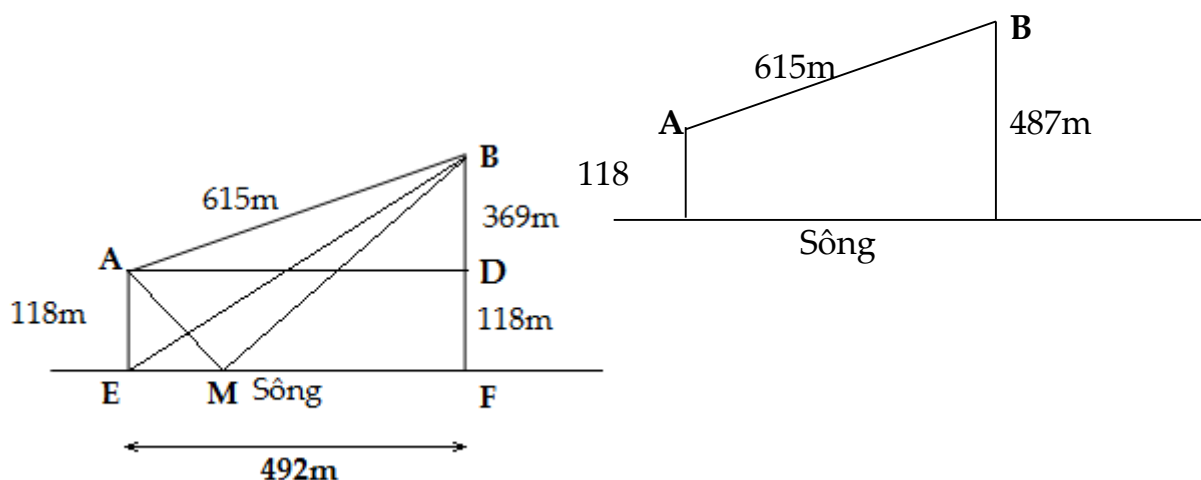
A. $569,5m$.

B. $671,4m$.

C. $779,8m$.

D. $741,2m$.

Lời giải tham khảo



Ta giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B .

Ta dễ dàng tính được $BD = 369$, $EF = 492$. Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \quad \text{với } x \in [0; 492].$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$,

$f(492)$ ta có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8m$.

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ $779,8m$.

✎ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 29. Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Tàu thứ nhất chạy theo hướng nam với vận tốc 6 hải lí/giờ, còn tàu thứ 2 chạy theo hướng về tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao lâu khoảng cách giữa hai con tàu là lớn nhất?

A. $\frac{7}{17}$ giờ.

B. $\frac{17}{7}$ giờ.

C. 2 giờ.

D. 3 giờ.

Câu 30. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C . Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1km. Khoảng cách từ B đến A là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000USD, còn đặt dưới đất mất 3000USD. Hỏi, điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất?

A. $\frac{15}{4}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{19}{4}$.

8A. Bài toán vận dụng về ứng dụng đạo hàm

giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

- A.** 2.225.000. **B.** 2.100.000. **C.** 2.200.000. **D.** 2.250.000.

Lời giải tham khảo

Nếu tăng giá thuê mỗi căn hộ là x (đồng/tháng) thì sẽ có $\frac{2x}{100.000}$ căn hộ bỏ trống.

Khi đó số tiền công ty thu được là: $S = (2.000.000 + x) \left(50 - \frac{2x}{100.000} \right)$

Xét hàm số $f(x) = (2.000.000 + x) \left(50 - \frac{2x}{100.000} \right), \forall x > 0$

$$f'(x) = 10 - \frac{4x}{100.000} = 0 \Leftrightarrow x = 250.000$$

Hàm số $f(x)$ đạt max $\Leftrightarrow x = 250.000$

Giá tiền thuê mỗi căn hộ là: 2.250.000 đ.

Câu 34. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

- A.** 15 mg. **B.** 20 mg. **C.** 25 mg. **D.** 30 mg.

Lời giải tham khảo

$$G(x) = 0,025x^2(30 - x) \text{ với } x > 0 \Rightarrow G'(x) = 1,5x - 0,075x^2$$

$$\text{Lập BBT} \Rightarrow \max_{(0;+\infty)} G(x) = G(20) = 100.$$

Câu 35. Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ km/h thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

- A.** ≈ 15 (km / h). **B.** ≈ 8 (km / h). **C.** ≈ 20 (km / h). **D.** ≈ 6.3 (km / h).

Lời giải tham khảo

Gọi x (km / h) là vận tốc của tàu $\Rightarrow$ thời gian tàu đi 1 km là $\frac{1}{x}$ giờ.

Phần chi phí thứ nhất là: $480 \cdot \frac{1}{x} = \frac{480}{x}$ (ngàn).

Giả sử, phần chi phí thứ 2 kí hiệu là y thì $y = kx^3 \Rightarrow k = \frac{y}{x^3}$.

$$\text{Với } x = 10 \Rightarrow y = \frac{1}{10} \cdot 30 = 3 \text{ (ngàn)} \Rightarrow k = \frac{3}{1000} = 0,003 \Rightarrow y = 0,003x^3.$$

Do đó, tổng chi phí là: $T = \frac{480}{x} + 0,003x^3$. Khảo sát T ta tìm được T đạt GTNN khi $x \approx 15$ (km / h).

8B. BÀI TOÁN VẬN DỤNG VỀ HÀM SỐ LŨY THỪA–MŨ–LÔGARIT

Dạng 123. Bài toán vận dụng về tốc độ tăng trưởng

Câu 01. Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{n.i}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là số dân sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2016 dân số Việt Nam là 94000000 người, tỉ lệ tăng dân số là $i = 1,06\%$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm nữa thì dân số Việt Nam vượt quá 100 triệu người với giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi?

A. 6. B. 5. C. 8. D. 7.

Lời giải tham khảo

Giả sử sau ít nhất n năm nữa thì dân số Việt Nam vượt quá 100 triệu người, áp dụng công thức trên ta có: $94000000.e^{n.0,0106} > 100000000$. Giải bất phương trình ẩn n suy ra $n > 6$.

Câu 02. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của nước Nhật là $0,2\%$. Năm 1998, dân số của Nhật là 125 932 000. Hỏi vào năm nào dân số của Nhật là 140 000 000 ?

A. Năm 2049. B. Năm 2050. C. Năm 2051. D. Năm 2052.

Lời giải tham khảo

$$140000000 = 125932000 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{100}\right)^n \Rightarrow n \approx 53. \text{ Đáp án C. Năm 2051.}$$

Câu 03. Kết quả thống kê cho biết ở thời điểm 2013 dân số Việt Nam là 90 triệu người, tốc độ tăng dân số là $1,1\% / \text{năm}$. Hỏi nếu mức tăng dân số ổn định ở mức như vậy thì dân số Việt Nam sẽ gấp đôi (đạt ngưỡng 180 triệu) vào năm nào?

A. Năm 2050. B. Năm 2077. C. Năm 2093. D. Năm 2070.

Lời giải tham khảo

- Phương pháp: Dân số một quốc gia ban đầu là N_0 , tốc độ tăng dân số là $r\% / \text{năm}$

thì sau n năm, dân số của quốc gia đó được tính theo công thức $N_n = N_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$.

- Cách giải: Gọi n là số năm kể từ năm 2013 để dân số Việt Nam tăng gấp đôi, có có phương trình: $180 = 90 \left(1 + \frac{1,1}{100}\right)^n \Leftrightarrow 1,011^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,011} 2 \approx 63,4$. Ta chọn $n = 64$

(số nguyên nhỏ nhất lớn hơn $63,4$)

Vậy đến năm $2013 + 64 = 2077$ thì dân số Việt Nam sẽ tăng gấp đôi.

Câu 04. Theo số liệu từ Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2015 là 91,7 triệu người. Giả sử tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm của Việt Nam trong giai đoạn 2015 – 2030 ở mức không đổi là $1,1\%$. Hỏi đến năm nào dân số Việt Nam đạt mức 113 triệu người?

A. Năm 2033. B. Năm 2032. C. Năm 2013. D. Năm 2030.

Lời giải tham khảo

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Gọi M là dân số của năm lấy làm mốc tính, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Khi đó dân số sau N năm là Me^{Nr} . Từ đó theo giả thuyết đầu bài ta có $113 = 91,7^{0,011N}$.

Câu 05. Năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người. Tỷ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Biết rằng sự tăng dân số ước tính theo thức $S = Ae^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S : dân số sau N năm, r : tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Hỏi với tỉ lệ tăng dân số như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

- A. 2025. B. 2030. C. 2026. D. 2035.

Lời giải tham khảo

Lấy năm 2001 làm mốc tính, ta có: $A = 78685800, r = 0,017, S = 120.10^6$

Từ bài toán: $120.10^6 = 78685800.e^{N.0,017} \Rightarrow N = 24,825 \approx 25$

Tương ứng với năm: $2001 + 25 = 2026$.

Câu 06. Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Tính số mét khối gỗ khu rừng đó sẽ có sau 5 năm.

- A. $4.10^5.(1+0,04)^{15}$. B. $4.10^5.(1+0,4)^5$. C. $4.10^5.(1-0,04)^5$. D. $4.10^5.(1+0,04)^5$.

Lời giải tham khảo

Gọi trữ lượng gỗ ban đầu là V_0 , tốc độ sinh trưởng hằng năm của rừng là i phần trăm. Ta có:

- Sau 1 năm, trữ lượng gỗ là: $V_1 = V_0 + iV_0 = (1+i)V_0$
- Sau 2 năm, trữ lượng gỗ là: $V_2 = V_1 + iV_1 = (1+i)V_1 = (1+i)^2 V_0$
-
- Sau 5 năm, trữ lượng gỗ là: $V_5 = (1+i)^5 V_0$
- Thay $V_0 = 4.10^5(m^3), i = 4\% = 0,04 \Rightarrow V_5 = 4.10^5(1+0,04)^5$.

Câu 07. Một khu rừng có trữ lượng gỗ 7.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 5% mỗi năm. Tính số mét khối gỗ khu rừng đó sẽ có sau 5 năm.

- A. $7.10^5(1+0,05)^5$. B. $7.10^5.0,05^5$. C. $7.10^5(1-0,05)^5$. D. $7.10^5(2+0,05)^5$.

Lời giải tham khảo

Sau n năm, khu rừng có số mét khối gỗ là: $a(1+i\%)^n$.

Câu 08. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc của dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v) = cv^3t$.

Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

- A. 6 km/h. B. 9 km/h. C. 12 km/h. D. 15 km/h.

Lời giải tham khảo

Vận tốc của cá bơi khi ngược dòng là: $v - 6$ (km/h).

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Thời gian để cá bơi vượt khoảng cách 300 km là $t = \frac{300}{v-6}$

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là:

$$E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v-6} = 300c \cdot \frac{v^3}{v-6} \text{ (jun)}, v > 6$$

$$E'(v) = 600cv^2 \cdot \frac{v-9}{(v-6)^2}$$

$$E'(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \text{ (loại)} \\ v = 9 \end{cases}$$

Câu 09. Nhà bạn Linh có một trang trại nuôi gà. Tỷ lệ tăng đàn hàng năm là 20%. Tính xem sau 10 năm đàn gà nhà bạn Linh có bao nhiêu con, biết rằng lúc đầu trang trại có 1.200 con gà.

A. 7430 con.

B. 7000 con.

C. 7600 con.

D. 7800 con.

Lời giải tham khảo

Gọi S_0 là số lượng gà ban đầu, q là tỉ lệ tăng hàng năm

S_i ($i = 1..10$) là số lượng gà sau i năm

Số lượng gà sau 1 năm là: $S_1 = S_0 + S_0 \cdot q = S_0(1+q)$.

Số lượng gà sau 2 năm là: $S_2 = S_1 + S_1 q = S_0(1+q) + S_0(1+q)q = S_0(1+q)^2$.

...

Vậy sau 10 năm ta được $S_{10} = S_0(1+q)^{10} = 1200 \cdot (1+0,2)^{10} = 7430$.

Câu 10. Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi thời gian để vi khuẩn tăng gấp đôi số ban đầu gần đúng nhất với kết quả nào trong các kết quả sau?

A. 3 giờ 9 phút.

B. 4 giờ 10 phút.

C. 3 giờ 40 phút.

D. 2 giờ 5 phút.

Lời giải tham khảo

Sau 5h có 300 con, suy ra $300 = 100 \cdot e^{5r} \Rightarrow r = \frac{\ln 3}{5} \approx 0,2197$

Vi khuẩn tăng số lượng gấp đôi sau thời gian $t \approx \frac{\ln 200 - \ln 100}{0,2197} \approx 3,15 = 3h15'$

Câu 11. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ tăng lên 300 con. Hỏi sau 10 giờ thì có bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 600.

B. 700.

C. 800.

D. 900.

Lời giải tham khảo

Theo đề ta có:

$$100 \cdot e^{5r} = 300 \Rightarrow \ln(100 \cdot e^{5r}) = \ln 300$$

$$\Rightarrow 5r = \ln \frac{300}{100} \Rightarrow r = \frac{1}{5} \ln 3$$

Sau 10 giờ từ 100 con vi khuẩn sẽ có: $s = 100 \cdot e^{\left(\frac{1}{5} \ln 3\right)10} = 100 \cdot e^{\ln 9} = 900$ con.

Câu 12. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của một cái cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành Nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cái cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100 \cdot (0.5)^{\frac{t}{5750}} (\%)$.

Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Hãy tính niên đại của công trình kiến trúc đó.

- A. 3570 năm. B. 3574 năm. C. 3578 năm. D. 3580 năm.

Lời giải tham khảo

Ta có: $P(t) = 65$. Nên ta có phương trình: $100 \cdot (0.5)^{\frac{t}{5750}} = 65 \Leftrightarrow t = 5750 \cdot \frac{\ln 0.65}{\ln 0.5} \approx 3574$.

Câu 13. Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Giả sử sau 9 giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ cái hồ?

- A. 3. B. $\frac{10^9}{3}$. C. $9 - \log 3$. D. $\frac{9}{\log 3}$.

Lời giải tham khảo

Sau 9 giờ có 10^9 lá bèo (đầy hồ).

Sau n giờ có 10^n lá bèo ($\frac{1}{3}$ hồ).

Suy ra: $10^n = \frac{1}{3} 10^9 \Rightarrow n = 9 - \log 3$.

Câu 14. Khi nuôi một loại virus trong một dưỡng chất đặc biệt sau một khoảng thời gian, người ta nhận thấy số lượng virus có thể được ước lượng theo công thức $m(t) = m_0 \cdot 2^{kt}$, trong đó m_0 là số lượng virus (đơn vị “con”) được nuôi tại thời điểm ban đầu; k là hệ số đặc trưng của dưỡng chất đã sử dụng để nuôi virus; t là khoảng thời gian nuôi virus (tính bằng phút). Biết rằng sau 2 phút, từ một lượng virus nhất định đã sinh sôi thành đàn 112 con, và sau 5 phút ta có tổng cộng 7168 con virus. Hỏi sau 10 phút nuôi trong dưỡng chất này, tổng số virus có được là bao nhiêu?

- A. 7.340.032 con. B. 874.496 con.
C. 2.007.040 con. D. 4.014.080 con.

Lời giải tham khảo

Theo công thức $m(t) = m_0 2^{kt}$ ta có:

$$\begin{cases} 112 = m(2) = m_0 \cdot 2^{2k} \\ 7168 = m(5) = m_0 \cdot 2^{5k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0 = 7 \\ k = 2 \end{cases}$$

Vậy sau 10 phút, tổng số virus có được là suy ra $m(10) = 7 \cdot 2^{2 \times 10} = 7.340.032$ con.

Dạng 124. Bài toán vận dụng về lãi suất ngân hàng

Câu 15. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm, người đó thu được số tiền gấp ba số tiền ban đầu?

- A. 17. B. 18. C. 19. D. 20.

Lời giải tham khảo

Gọi số tiền gửi ban đầu là P . Sau n năm, số tiền thu được là:

$$P_n = P(1 + 0,06)^n = P(1,06)^n$$

Để $P_n = 3P$ thì phải có $(1,06)^n = 3$. Do đó $n = \log_{1,06} 3 \approx 18,85$.

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 19$.

Câu 16. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 7,5% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu lại được số tiền gấp đôi số tiền ban đầu?

- A. 4 năm. B. 6 năm. C. 10 năm. D. 8 năm.

Lời giải tham khảo

Một người gửi số tiền là M với lãi suất r thì sau N kì số tiền người đó thu được cả vốn lẫn lãi là $M(1+r)^N$.

Câu 17. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4% / năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi để nhận được số tiền gấp 3 lần số tiền ban đầu thì người đó cần gửi số tiền trên tối thiểu trong bao nhiêu năm?

- A. 13 năm. B. 14 năm. C. 15 năm. D. 16 năm.

Lời giải tham khảo

Gọi P là tiền vốn ban đầu. $P_n = P(1 + 0,084)^n = 3P \Rightarrow n = \log_{1,084} 3 \approx 13,62$.

Câu 18. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4% năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Lời giải tham khảo

$$P_n = P(1+r)^n \Rightarrow 2P = P(1+r)^n \Leftrightarrow 2 = (1,084)^n \Rightarrow n = \log_{1,084} 2 \approx 9.$$

Câu 19. Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là 10%/ 1 năm. Tết năm nay do ông kẹt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?

- A. 10. B. 15. C. 17. D. 20.

Lời giải tham khảo

Gọi n là số năm ông An đã gửi tiền. Khi đó, số tiền ông rút ra là:

$$100(1 + 0,1)^n = 100.1,1^n \text{ triệu.}$$

Theo giả thiết ta có: $250 \leq 100.1,1^n \leq 260$ hay $\log_{1,1} 2,5 \leq n \leq \log_{1,1} 2,6$ nên $n = 10$.

Câu 20. Một người gửi tiết kiệm với số tiền ban đầu là 100 triệu đồng với lãi suất 8,4%/năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu 200 triệu đồng?

- A. 8 năm. B. 9 năm. C. 10 năm. D. 11 năm.

Lời giải tham khảo

Gọi số tiền ban đầu là m . Sau n năm số tiền thu được $P_n = m(1 + 0,084)^n = m(1,084)^n$

Để số tiền gấp đôi thu được ta có $2m = m(1,084)^n$. Tìm được $n \approx 8,59$.

Vì n là số tự nhiên nên ta được $n = 9$.

Câu 21. Một người gửi vào ngân hàng 100.000.000, kì hạn 1 năm thể thức lãi suất kép, với lãi suất 7,5%/năm. Hỏi nếu để nguyên người gửi không rút tiền ra, và lãi suất không thay đổi thì tối thiểu sau bao nhiêu năm người gửi có được 165.000.000 VND?

- A. 9 năm. B. 6 năm. C. 8 năm. D. 7 năm.

Lời giải tham khảo

Ta có: $T = P.(1 + r)^n \Leftrightarrow 165 = 100.(1 + 7.5\%)^n \Leftrightarrow n \approx 6,9$.

$\Rightarrow$ Cần 7 năm để có đủ số tiền như ý.

Câu 22. Ông Minh đến siêu thị điện máy để mua một cái máy giặt với giá 12 triệu đồng theo hình thức trả góp với lãi suất 2,5%/tháng. Để mua trả góp ông Minh phải trả trước 40% số tiền, số tiền còn lại ông sẽ trả dần trong thời gian 6 tháng kể từ ngày mua, mỗi lần trả cách nhau 1 tháng. Số tiền mỗi tháng ông Minh phải trả là như nhau và tiền lãi được tính theo nợ gốc còn lại ở cuối mỗi tháng. Hỏi, nếu ông Minh mua theo hình thức trả góp như trên thì số tiền phải trả nhiều hơn so với giá niêm yết là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không đổi trong thời gian ông Minh hoàn nợ. (làm tròn đến chữ số hàng nghìn)

- A. 642.000 đồng. B. 520.000 đồng.
C. 480.000 đồng. D. 748.000 đồng.

Lời giải tham khảo

Số tiền ông Minh vay trả góp là: $A = 12.10^6 - 12.10^6.0,4 = 7.200.000$ đồng

Gọi a là số tiền ông Minh phải trả góp hàng tháng.

Hết tháng thứ nhất, số tiền còn nợ là: $N_1 = A(1 + r) - a$

Hết tháng thứ 2, số tiền còn nợ là: $N_2 = N_1(1 + r) - a = A(1 + r)^2 - a(1 + r) - a$

Hết tháng thứ 3, số tiền còn nợ là: $N_3 = A(1 + r)^3 - a(1 + r)^2 - a(1 + r) - a$

.....

Cuối tháng thứ n , số tiền còn nợ là:

$$N_n = A(1 + r)^n - a(1 + r)^{n-1} - a(1 + r)^{n-2} - \dots - a = A(1 + r)^n - a \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Để trả hết nợ sau n tháng thì: $N_n = 0 \Leftrightarrow a = \frac{Ar(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$

$$\Rightarrow a = \frac{7,2.10^6.0,025(1,025)^6}{(1,025)^6 - 1} \approx 1.307.000 \text{ đồng}$$

Vậy số tiền ông B phải trả nhiều hơn khi mua bằng hình thức trả góp là:

$$1.307.000 \times 6 - 7.200.000 = 642.000 \text{ đồng.}$$

Câu 23. Một người hàng tháng gửi vào ngân hàng một khoảng tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền người đó gửi hàng tháng là bao nhiêu?

- A. 635.000 . B. 535.000 . C. 613.000 . D. 643.000 .

Lời giải tham khảo

Sau 1 tháng người đó có số tiền: $T_1 = (1+r)T$

Sau 2 tháng người đó có số tiền:

$$T_2 = (T + T_1)(1+r) = (1+r)T + T_1(1+r) = (1+r)T + (1+r)^2 T$$

Theo quy luật đo sau 15 tháng người đó có số tiền

$$T_{15} = T \left[(1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{15} \right]$$

$$= T(1+r) \left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{14} \right] = T(1+r) \frac{(1+r)^{15} - 1}{r}$$

Thay các giá trị $T_{15} = 10$, $r = 0.006$, suy ra $T \approx 635.000$.

Câu 24. Anh Sơn vay tiền ngân hàng mua nhà trị giá 1 tỉ đồng theo phương thức trả góp. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 12 triệu và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5% tháng thì sau bao lâu anh trả hết nợ?

- A. 3 năm. B. 3 năm 1 tháng. C. 3 năm 2 tháng. D. 3 năm 3 tháng.

Lời giải tham khảo

Gọi n là số tháng anh cần trả với n tự nhiên

Sau tháng thứ nhất anh còn nợ

$$S_1 = 10^9 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100} \right) - 30 \cdot 10^6 = 10^9 \cdot 1,005 - 30 \cdot 10^6 \text{ đồng}$$

Sau tháng thứ hai anh còn nợ

$$S_2 = S_1 \cdot 1,005 - 12 \cdot 10^6 = (10^9 \cdot 1,005 - 30 \cdot 10^6) \cdot 1,005 - 30 \cdot 10^6$$

$$= 10^9 \cdot 1,005^2 - 30 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,005^2 - 1}{0,005} \text{ đồng}$$

Tiếp tục quá trình trên thì số tiền anh Sơn còn nợ sau n tháng sẽ là

$$S_n = 10^9 \cdot 1,005^n - 30 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,005^n - 1}{0,005} = 0$$

$$\Rightarrow 1,005^n = 1,2 \Rightarrow n = \log_{1,005} 1,2 \approx 36,555$$

Do đó sau 37 tháng sẽ trả hết nợ tức 3 năm 1 tháng.

Câu 25. Số tiền 58 000 000đ gửi tiết kiệm trong 9 tháng thì lãnh về được 61758000đ. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu ?

- A. 0,8% . B. 0,7% . C. 0,5% . D. 0,6% .

Lời giải tham khảo

Bài toán lãi suất ngân hàng dựa trên kiến thức về số mũ ở chương trình lớp 12.

Ta có gọi mức lãi suất hàng tháng là $a\%$

Sau tháng thứ nhất số tiền trong tài khoản của người đó là: $58000000 \left(1 + \frac{a}{100} \right)$

Sau tháng thứ hai số tiền trong tài khoản của người đó là: $58000000 \left(1 + \frac{a}{100} \right)^2$

...

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Sau tháng thứ chín số tiền trong tài khoản của người đó là:

$$58000000 \left(1 + \frac{a}{100} \right)^9 = 61758000.$$

$$\Rightarrow a = \left(\sqrt[9]{61758000 : 58000000} - 1 \right) \cdot 100 \approx 0,7.$$

Câu 26. Số tiền 58.000.000đ gửi tiết kiệm trong 8 tháng thì nhận về được 61.329.000đ. Tìm lãi suất hàng tháng.

A. 0.8% .

B. 0,7% .

C. 0,9% .

D. 0,6% .

Lời giải tham khảo

Lãi suất hàng tháng: $r = \sqrt[8]{\frac{61329000}{58000000}} - 1 = 0,7\%.$

Câu 27. Một gia đình có con vào lớp một, họ muốn để dành cho con một số tiền là 250.000.000 để sau này chi phí cho 4 năm học đại học của con mình. Hỏi bây giờ họ phải gửi vào ngân hàng số tiền là bao nhiêu để sau 12 năm họ sẽ được số tiền trên biết lãi suất của ngân hàng là 6,7% một năm và lãi suất này không đổi trong thời gian trên?

A. $P = \frac{250.000.000}{(0,067)^{12}}$ (triệu đồng).

B. $P = \frac{250.000.000}{(1 + 6,7)^{12}}$ (triệu đồng).

C. $P = \frac{250.000.000}{(1,067)^{12}}$ (triệu đồng).

D. $P = \frac{250.000.000}{(1,67)^{12}}$ (triệu đồng).

Lời giải tham khảo

$$P = \frac{250.000.000}{(1,067)^{12}} \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 28. Một người gửi gói tiết kiệm linh hoạt của ngân hàng cho con với số tiền là 500000000 VNĐ, lãi suất 7%/năm. Biết rằng người ấy không lấy lãi hàng năm theo định kỳ số tiết kiệm. Hỏi sau 18 năm, số tiền người ấy nhận về là bao nhiêu? (Biết rằng, theo định kì rút tiền hằng năm, nếu không lấy lãi thì số tiền sẽ được nhập vào thành tiền gốc và số tiết kiệm sẽ chuyển thành kì hạn 1 năm tiếp theo).

A. 4.689.966.000 VNĐ.

B. 3.689.966.000 VNĐ.

C. 2.689.966.000 VNĐ.

D. 1.689.966.000 VNĐ.

Lời giải tham khảo

Áp dụng công thức

$T = A.(1 + r)^n$ với A là tiền gốc ban đầu, r là lãi suất, n là số năm

$$\Rightarrow T = 500000000(1 + 0,07)^{18} = 1.689966000.$$

Câu 29. Bạn An muốn mua một chiếc máy tính xách tay trị giá 15 triệu đồng. Để có tiền mua máy, hàng tháng bạn An tiết kiệm và gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau theo chính sách lãi kép với lãi suất 5% /năm, kỳ hạn 1 tháng. Hỏi để sau một năm có 15 triệu mua máy, bạn An cần gửi vào ngân hàng mỗi tháng số tiền là bao nhiêu?

- A. $\frac{62500}{\left(1 + \frac{5}{12}\%\right)\left[\left(1 + \frac{5}{12}\%\right)^{12} - 1\right]}$ (đồng).
- B. $\frac{62500}{\left(1 + \frac{5}{12}\%\right)\left[\left(1 + \frac{5}{12}\%\right) \cdot 12 - 1\right]}$ (đồng).
- C. $\frac{62500}{12}$ (đồng).
- D. 62500 (đồng).

Lời giải tham khảo

Gọi a là số tiền mà hàng tháng bạn An cần gửi vào ngân hàng và đặt

$r = \frac{5}{12}\%$ /tháng là lãi suất theo kỳ hạn 1 tháng ta có:

- Cuối tháng thứ 1, nếu An nhận thì được số tiền: $A_1 = a(1+r)$
- Cuối tháng thứ 2, nếu An nhận thì được số tiền:

$$A_2 = (A_1 + a)(1+r) = a(1+r)^2 + a(1+r)$$

- Cuối tháng thứ 3, nếu An nhận thì được số tiền:

$$A_3 = (A_2 + a)(1+r) = a(1+r)^3 + a(1+r)^2 + a(1+r)$$

- ... Cuối tháng thứ 12, số tiền An nhận được:

$$A_{12} = a(1+r)^{12} + a(1+r)^{11} + \dots + a(1+r) = \frac{a(1+r)[(1+r)^{12} - 1]}{r}$$

Như vậy ta có: $\frac{a(1 + \frac{5}{12}\%)[(1 + \frac{5}{12}\%)^{12} - 1]}{\frac{5}{12}\%} = 15000000$

$$\Leftrightarrow a = \frac{62500}{(1 + \frac{5}{12}\%)[(1 + \frac{5}{12}\%)^{12} - 1]} \Rightarrow a = \frac{T_n \cdot m}{(1+m)[(1+m)^n - 1]}$$

Câu 30. Một người muốn sau 1 năm phải có số tiền là 20 triệu đồng để mua xe. Hỏi người đó phải gửi vào ngân hàng 1 khoản tiền như nhau hàng tháng là bao nhiêu? Biết lãi suất tiết kiệm là 0,27% / tháng.

- A. 1637640 đồng. B. 1637639 đồng.
- C. 1637641 đồng. D. 1637642 đồng.

Lời giải tham khảo

Cuối tháng thứ I, người đó có số tiền là: $T_1 = a + a \cdot m = a(1+m)$.

Đầu tháng thứ II, người đó có số tiền là:

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

$$a(1+m) + a = a[(1+m) + 1] = \frac{a}{(1+m)^2 - 1} [(1+m)^2 - 1] = \frac{a}{m} [(1+m)^2 - 1]$$

Cuối tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$T_2 = \frac{a}{m} [(1+m)^2 - 1] + \frac{a}{m} [(1+m)^2 - 1] \cdot m = \frac{a}{m} [(1+m)^2 - 1] (1+m)$$

Cuối tháng thứ n, người đó có số tiền cả gốc lẫn lãi là T_n :

$$T_n = \frac{a}{m} [(1+m)^n - 1] (1+m)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(\frac{T_n \cdot m}{a} + 1 + m)}{\ln(1+m)} - 1$$

Áp dụng công thức với $T_n = 20\,000\,000$; $m = 0,27\% = 0,0027$; $n = 12$. ta suy ra:

$$a = 1\,637\,639,629 \text{ đồng.}$$

Câu 31. Lãi suất của một ngân hàng là 6% / năm và 1,4% / quý. Ông A gửi 100 triệu với lãi suất tính theo năm, ông B gửi 100 triệu với lãi suất tính theo quý. Hỏi sau 2 năm, số tiền nhận được của ông A hơn ông B gần với số nào nhất sau đây biết rằng trong khoảng thời gian đó, lãi suất không thay đổi, người gửi không rút lãi tiền lãi sau mỗi kỳ được nhập vào vốn ban đầu?

- A. 596 ngàn đồng.
C. 600 ngàn đồng.

- B. 595 ngàn đồng.
D. 590 ngàn đồng.

Lời giải tham khảo

2 năm = 2 quý.

Sau 2 năm, số tiền ông A nhận được là $100 \cdot 1,06^2$ triệu đồng

Sau 2 năm, số tiền ông B nhận được là $100 \cdot 1,014^8$ triệu đồng

Vậy, sau 2 năm số tiền ông A nhận được hơn ông B là

$$(100 \cdot 1,06^2 - 100 \cdot 1,014^8) \cdot 1000 \approx 595,562 \text{ nghìn đồng}$$

Vậy, chọn đáp án A.

Câu 32. Gửi tiết kiệm ngân hàng với số tiền M , theo thể thức lãi kép liên tục và lãi suất mỗi năm là r thì sau N kì gửi số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi được tính theo công thức $M \cdot e^{Nr}$. Một người gửi tiết kiệm số tiền là 100 triệu đồng theo thể thức lãi kép liên tục, với lãi suất 8% một năm, sau 2 năm số tiền thu về cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

A. $100 \cdot e^{0.16}$ (triệu đồng).

B. $100 \cdot e^{0.08}$ (triệu đồng).

C. $100 \cdot (e^{0.16} - 1)$ (triệu đồng).

D. $100 \cdot (e^{0.08} - 1)$ (triệu đồng).

Lời giải tham khảo

Số vốn ban đầu là M , theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất mỗi năm là r thì sau N kì, số tiền người đó thu được cả vốn lẫn lãi là $M \cdot e^{Nr}$.

Câu 33. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng với lãi suất kép theo quý là 2%. Hỏi sau 2 năm người đó lấy lại được tổng là bao nhiêu tiền?

A. 17,1 triệu.

B. 16 triệu.

C. 117, 1 triệu.

D. 116 triệu.

Lời giải tham khảo

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Lưu ý rằng một năm có 4 quý và lãi suất kép được hiểu là lãi quý sau bằng 2% so với tổng số tiền quý trước. Do đó, ta có ngay số tiền thu được sau 2 năm (8 quý) là:
 $1,02^8 \cdot 100 \approx 117,1$.

Câu 34. Ông Toàn gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng ngân hàng ACB theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ kế tiếp) với lãi suất 14% một năm. Hỏi sau hai năm ông Toàn thu được cả vốn lẫn lãi bao nhiêu (Giả sử lãi suất không thay đổi)?

A. 64,98 (triệu đồng).

B. 65,89 (triệu đồng).

C. 64,89 (triệu đồng).

D. 63,98 (triệu đồng).

Lời giải tham khảo

Áp dụng công thức tính lãi kép, sau hai năm ông Toàn thu được cả vốn lẫn lãi là
 $50(1 + 0,14)^2 = 64,98$ (triệu đồng)

Câu 35. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng. Hỏi nếu theo kì hạn 3 tháng với lãi suất 1,65% một quý thì sau hai năm người đó nhận được số tiền (triệu đồng) là bao nhiêu?

A. $10 \cdot (1,0165)^8$.

B. $10 \cdot (0,0165)^8$.

C. $10 \cdot (1,165)^8$.

D. $10 \cdot (0,165)^8$.

Lời giải tham khảo

Áp dụng công thức lãi kép: $c = p(1 + r)^n$ trong đó p là số tiền gửi, r là lãi suất mỗi kỳ, n là số kỳ gửi, Vậy sau 2 năm (8 quý) người đó thu được số tiền là:

$$c = 10 \left(1 + \frac{1,65}{100} \right)^8.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN ✓

Câu 36. Một người gửi tiết kiệm 500.000.000 đồng với lãi suất 8,4%/ năm (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi và lãi hàng năm được nhập vào vốn). Tính số tiền người đó thu được sau ba năm.

A. 620.000.000 đồng.

B. 626.880.000 đồng.

C. 616.880.352 đồng.

D. 636.880.352 đồng.

Câu 37. Anh T muốn xây một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa, biết lãi suất ngân hàng vẫn không đổi là 8% một năm. Hỏi tại thời điểm hiện tại số tiền ít nhất anh T phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền xây nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu)?

A. 395 triệu đồng.

B. 396 triệu đồng.

C. 397 triệu đồng.

D. 398 triệu đồng.

Câu 38. Ông A có 800 triệu đồng, gửi ngân hàng với lãi suất 10%/năm. Sau 3 năm ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

A. $800 \cdot (1,001)^3$ (triệu đồng).

B. $800 \cdot (1,01)^3$ (triệu đồng).

C. $800 \cdot (1,1)^3$ (triệu đồng).

D. $800 \cdot (1 - 0,1)^3$ (triệu đồng).

Câu 39. Một người gửi ngân hàng 500 triệu đồng với lãi suất kép theo quý là 3%. Hỏi sau 3 năm người đó được tổng bao nhiêu tiền?

A. 701,4 triệu đồng.

B. 712,9 triệu đồng.

C. 821,4 triệu đồng.

D. 696,9 triệu đồng.

Câu 40. Một sinh viên mới ra trường đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 4 triệu/ tháng. Cứ sau 1 năm, lương được tăng thêm 10%. Biết rằng, tiền sinh hoạt phí hàng tháng là 2,5 triệu đồng. Hỏi sau 4 năm, sinh viên đó tiết kiệm được số tiền gần với số nào nhất sau đây?

A. 105 triệu đồng.

B. 106 triệu đồng.

C. 102 triệu đồng.

D. 103 triệu đồng.

Câu 41. Một anh sinh viên được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng là 80 triệu đồng với lãi suất 0.9%/tháng. Hỏi sau đúng 5 năm số tiền trong sổ tiết kiệm là bao nhiêu? Biết rằng trong suốt thời gian đó anh sinh viên không rút một đồng nào cả vốn lẫn lãi.

A. 237.949.345,6 (đồng).

B. 137.949.345,6 (đồng).

C. 126.949.345,6 (đồng).

D. 136.949.345,6 (đồng).

Câu 42. Giả sử bạn An gửi đều đặn một số tiền trích từ 20% lương của An, biết An có lương 10 triệu đồng mỗi tháng. Theo hình thức lãi kép với lãi suất 0.5% tháng. Vậy sau 1 năm thì An nhận được tổng số tiền là bao nhiêu?

- A. $2 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.005) \cdot \frac{(1 + 0.005)^{12} - 1}{0.005}$ (đồng).
- B. $2 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.005) \cdot \frac{0.005}{(1 + 0.005)^{12} - 1}$ (đồng).
- C. $2 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.005) \cdot \frac{(1 + 0.005)^{12} - 1}{12}$ (đồng).
- D. $2 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0.005) \cdot \frac{(1 - 0.005)^{12} - 1}{0.005}$ (đồng).

Câu 43. Ông A có 200 triệu đồng, gửi ngân hàng với lãi suất 8%/năm. Sau 5 năm ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

- A. $200 \cdot (1 + 0.08)^5$ (triệu đồng).
- B. $200 \cdot (1 - 0.08)^5$ (triệu đồng).
- C. $200 \cdot (1 + 0.8)^5$ (triệu đồng).
- D. $200 \cdot (1,8)^5$ (triệu đồng).

Câu 44. Một người gửi số tiền 1 tỷ đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm thì số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Nếu không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi thì sau 5 năm người đó nhận được số tiền là (kết quả làm tròn đến hàng trăm)?

- A. 1 276 281 600.
- B. 1 350 738 000.
- C. 1 298 765 500.
- D. 1 338 226 000.

Câu 45. Một người đầu tư 100 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 13% một năm. Hỏi nếu sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử rằng lãi suất hằng năm không đổi).

A. $100 \left[(1,13)^5 - 1 \right]$ (triệu đồng).

B. $100 \left[(1,13)^5 + 1 \right]$ (triệu đồng).

C. $100 \left[(0,13)^5 - 1 \right]$ (triệu đồng).

D. $100(0,13)^5$ (triệu đồng).

Câu 46. Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 6,80% một năm. Hỏi người đó thu được bao nhiêu triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm gửi? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian người đó gửi.

A. $m = 20(1,068)^5$ (triệu đồng).

B. $m = 20(1,68)^5$ (triệu đồng).

C. $m = 20(0,068)^5$ (triệu đồng).

D. $m = 20(1,0068)^5$ (triệu đồng).

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Câu 47. Mức lạm phát của VN là 12% /3 năm, nghĩa là giá sản phẩm sẽ tăng lên 12% sau mỗi 3 năm. Một ngôi nhà ở TPHCM có giá là 1.000.000.000 (1 tỉ) đồng vào năm 2016. Một người ra trường đi làm với lương khởi điểm là 4.000.000 (4 triệu đồng) một tháng. Giả sử sau 3 năm thì được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của người đó là 50% lương. Hỏi sau bao nhiêu năm đi làm thì người đó tiết kiệm được 1.000.000.000?

A. 28.

B. 27.

C. 26.

D. 25.

Câu 48. Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất ban đầu là 5%/ năm và lãi hàng tháng được nhập vào vốn. Cứ sau 2 năm, lãi suất giảm 0,2%. Hỏi sau 6 năm, tổng số tiền người đó nhận được gần với số nào nhất sau đây?

A. 119,5 triệu đồng.

B. 132,5 triệu đồng.

C. 132 triệu đồng.

D. 119 triệu đồng.

Câu 49. Mức lạm phát của VN là 12% /3 năm, nghĩa là giá sản phẩm sẽ tăng lên 12% sau mỗi 3 năm. Một ngôi nhà ở TPHCM có giá là 1.000.000.000 (1 tỉ) đồng vào năm 2016. Một người ra trường đi làm với lương khởi điểm là 4.000.000 (4 triệu đồng) một tháng. Giả sử sau 3 năm thì được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của người đó là 50% lương. Hỏi sau khi đi làm 21 năm thì người đó tiết kiệm được bao nhiêu tiền?

A. 683.076.312.

B. 823.383.943.

C. 504.000.000.

D. 982.153.418.

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Câu 50. Mức lạm phát của VN là 12% /3 năm, nghĩa là giá sản phẩm sẽ tăng lên 12% sau mỗi 3 năm. Một ngôi nhà ở TPHCM có giá là 1.000.000.000 (1 tỉ) đồng vào năm 2016. Một người ra trường đi làm với lương khởi điểm là 4.000.000 (4 triệu đồng) một tháng. Giả sử sau 3 năm thì được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của người đó là 50% lương.

Nếu muốn mua nhà sau 21 năm đi làm thì lương khởi điểm phải là bao nhiêu? Biết mức lạm phát và mức tăng lương không đổi.

A. 6.472.721 .

B. 12.945.443 .

C. 17.545.090 .

D. 8.772.545 .

Câu 51. Để có một khoản tiền tiêu tết, bạn Hưng quyết định rút lợn để dành tiền. Ngày đầu tiên 10.000 đồng, mỗi ngày sau đó hơn ngày trước 1000 đồng. Sau sáu tháng (180 ngày) bạn Hưng muốn biết mình đã có bao nhiêu tiền nhưng không muốn mở lợn. Vậy số tiền bạn đã để dành được là bao nhiêu?

A. 17.910.000 đồng.

B. 18.910.000 đồng.

C. 19.910.000 đồng.

D. 16.910.000 đồng.

Câu 52. Ông Năm gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là 27 507 768,13 (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu và 180 triệu.

B. 180 triệu và 140 triệu.

C. 200 triệu và 120 triệu.

D. 120 triệu và 200 triệu.

Câu 53. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% một năm. Hỏi rằng người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất $\frac{5}{12}\%$ một tháng?

- A. Nhiều hơn 1811486 đồng.
C. Như nhau.

- B. Ít hơn 1811486 đồng.
D. Nhiều hơn 1811478 đồng.

Câu 54. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách : Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).

B. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

C. $m = \frac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng).

D. $m = \frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Câu 55. Ông A có 650 triệu đồng, gửi ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Hỏi sau 18 tháng ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

A. $650.(1 + 0,06)^{18}$ (triệu đồng).

B. $650.(1 + 0,6)^{1,5}$ (triệu đồng).

C. $650.(1 + 0,06)^{1,5}$ (triệu đồng).

D. $650.(1 + 0,6)^{18}$ (triệu đồng).

Câu 56. Ông An gửi a VNĐ vào ngân hàng với lãi suất 0,5%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu, Hỏi, để sau 10 tháng ông An sẽ nhận được 20 000 000 VNĐ thì a ít nhất là bao nhiêu?

A. 19 026 958.

B. 19 026 959.

C. 19 026 960.

D. 19 026 958,8.

Câu 57. Một người vay vốn ở một ngân hàng với số vốn là 50 triệu đồng, thời hạn 48 tháng, lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ, trả đúng ngày qui định. Hỏi hàng tháng, người đó phải đều đặn trả vào ngân hàng một khoản tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu để đến tháng thứ 48 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng?

A. 1361312 đồng.

B. 1361313 đồng.

C. 1361314 đồng.

D. 1361315 đồng.

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Câu 58. Giả sử tỉ lệ lạm phát của Việt Nam trong 10 năm qua là 5%. Hỏi nếu năm 2007, giá xăng là 12000VND/lít. Hỏi năm 2016 giá tiền xăng là bao nhiêu tiền một lít?

A. 11340, 00 VND/lít.

B. 113400, 00 VND/lít.

C. 18616, 00 VND/lít.

D. 186160, 00 VND/lít.

Dạng 125. Bài toán vận dụng tổng hợp về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

Câu 59. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cabon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cabon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2378 năm.

B. 2300 năm.

C. 2387 năm.

D. 2400 năm.

Lời giải tham khảo

Giả sử khối lượng ban đầu của mẫu đồ cổ chứa Cabon là m_0 , tại thời điểm t tính từ thời điểm ban đầu ta có:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow \frac{3m_0}{4} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow t = \frac{5730 \ln \left(\frac{3}{4} \right)}{-\ln 2} \approx 2378 \text{ (năm)}$$

Đáp án: A.

Câu 60. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1)$, $t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. 24.79 tháng.

B. 23 tháng.

C. 24 tháng.

D. 22 tháng.

Lời giải tham khảo

Theo công thức tính tỉ lệ % thì cần tìm t thỏa mãn:

$$75 - 20 \ln(1+t) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3.25 \Leftrightarrow t \geq 24.79$$

Câu 61. Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}}$, $x \geq 0$. Tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

- A. 333. B. 343. C. 330. D. 323.

Lời giải tham khảo

Khi có 100 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(100) = \frac{100}{1 + 49e^{-1.5}} \approx 9.3799\%$$

Khi có 200 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(200) = \frac{100}{1 + 49e^{-3}} \approx 29.0734\%$$

Khi có 500 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(500) = \frac{100}{1 + 49e^{-7.5}} \approx 97.3614\%$$

Câu 62. Cường độ một trận động đất M được cho bởi công thức: $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở gần đó đo được 6 độ Richter. Trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất này?

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. 20. D. 100.

Lời giải tham khảo

Gọi cường độ và biên độ trận động đất ở San Francisco là M và A , trận động đất còn lại là M_1 và A_1 ta có:

$$2 = 8 - 6 = M - M_1 = \lg A - \lg A_0 - (\lg A_1 - \lg A_0) = \lg \frac{A}{A_1} \Rightarrow \frac{A}{A_1} = 10^2 = 100. \text{ Chọn D.}$$

Câu 63. Cường độ một trận động đất M (richer) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$ với A là biên độ rung chấn tối đa, và A_0 một biên độ chuẩn. Đầu thế kỉ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richer. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh gấp 4 lần. Tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ.

- A. 8,9. B. 33,2. C. 2,075. D. 11.

Lời giải tham khảo

Theo công thức tính $M = \log A - \log A_0 = \log \frac{A}{A_0}$.

Ta có: $M_F = \log \frac{A_F}{A_0} = 8$ và $A_{NM} = 4A_F$ nên $M_{NM} = \log \frac{A_{NM}}{A_0} = \log \frac{4A_F}{A_0} = \log 4 + \log \frac{A_F}{A_0} \approx 8,9$

Câu 64. Năm 1982 người ta đã biết số $p = 2^{756839} - 1$ là số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất biết được vào thời điểm đó). Hỏi, khi viết số đó trong hệ thập phân thì số nguyên tố đó có bao nhiêu chữ số?

- A. 227834. B. 227843. C. 227824. D. 227842.

Lời giải tham khảo

Ta có: $p + 1 = 2^{756839} \Rightarrow \log(p + 1) = 756839 \cdot \log 2 \approx 227823,68$

8B. Bài toán vận dụng về hàm số lũy thừa – mũ – lôgarit

$$\Rightarrow p+1 \approx 10^{227823,68} \Rightarrow 10^{227823} < p+1 < 10^{227824}$$

Vậy viết p trong hệ thập phân có 227824 số.

Câu 65. Số các chữ số của số 2^{337549} là bao nhiêu?

A. 101.613 chữ số. B. 233.972 chữ số. C. 101.612 chữ số. D. 233.971 chữ số.

Lời giải tham khảo

Số các chữ số của số n được cho bởi công thức $[\log n] + 1$, trong đó $[x]$ là phần nguyên của số thực x , ví dụ $[2,99] = 2$, $[3,01] = 3$. Vậy số các chữ số của 2^{337549} là

$$[\log 2^{337549}] + 1 = [337549 \log 2] + 1 = 101.613.$$

Câu 66. Gọi m là số chữ số cần dùng khi viết số 2^{30} trong hệ thập phân và n là số chữ số cần dùng khi viết số 30^2 trong hệ nhị phân. Tính tổng $m + n$.

A. 18. B. 20. C. 19. D. 21.

Lời giải tham khảo

- Phương pháp: Số chữ số cần dùng khi viết số A trong hệ thập phân là $[\log A] + 1$ với $[x]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x .

Tổng quát: số chữ số cần dùng khi viết số A trong hệ n -phân là $[\log_n A] + 1$

- Cách giải: Dựa vào 2 kết quả trên ta có

$$m = [\log 2^{30}] + 1 = [30 \log 2] + 1 = 10$$

$$n = [\log_2 30^2] + 1 = [2 \log_2 30] + 1 = 10 \Rightarrow m + n = 20.$$

8C. BÀI TOÁN VẬN DỤNG VỀ NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

Dạng 126. Bài toán vận dụng về vận động của chất điểm

Câu 01. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $25m/s$. Gia tốc trọng trường là $9,8m/s^2$. Tính quãng đường s mà viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

- A. $s = \frac{3125}{98} m$. B. $s = \frac{3125}{49} m$. C. $s = \frac{125}{49} m$. D. $s = \frac{6250}{49} m$.

Lời giải tham khảo

Quãng đường một vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = t_0(s)$ đến thời điểm $t = t_1(s)$ với vận tốc $v(t) (m/s)$ được tính theo công thức $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$.

Ở đây vận tốc $v(t) = 25 - 9,8t$.

Câu 02. Bạn Hùng ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5 (m/s)$. Tính quãng đường s mà máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10.

- A. 246 m. B. 252 m. C. 1134 m. D. 966 m.

Lời giải tham khảo

$$S = \int_4^{10} (3t^2 + 5) dt = 966.$$

Câu 03. Một vật chuyển động với vận tốc $10 (m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2 (m/s^2)$. Tính quãng đường s mà vật di chuyển trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

- A. 3600 m. B. $\frac{4300}{3} m$. C. $\frac{1750}{3} m$. D. $\frac{1450}{3} m$.

Lời giải tham khảo

Quãng đường một vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = t_0(s)$ đến thời điểm $t = t_1(s)$ với vận tốc $v(t) (m/s)$ được tính theo công thức $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$.

Ở đây vận tốc $v(t)$ là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$.

Câu 04. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2 \sin 2t$ (m / s). Tính quãng đường s (mét) mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s).

A. $s = \frac{3\pi}{4} - 1$.

B. $s = \frac{3\pi}{4}$.

C. $s = \frac{3\pi}{4} + 1$.

D. $s = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải tham khảo

Quãng đường một vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = t_0$ (s) đến thời điểm $t = t_1$ (s) với vận tốc $v(t)$ (m/s) được tính theo công thức $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$.

Câu 05. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2 \sin 2t$ (m / s). Tính quãng đường s mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s).

A. $\frac{3\pi}{4}$ (m).

B. $\frac{3\pi}{4} - 1$ (m).

C. $\frac{\pi}{4} - 2$ (m).

D. $\frac{3\pi}{4} + 1$ (m).

Lời giải tham khảo

$$S = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t) dt = \frac{3\pi}{4} - 1.$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN** ✓

Câu 06. Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Tính quãng đường s mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm vật dừng lại.

- A. $s = 2560$ m . B. $s = 1280$ m . C. $s = 3840$ m . D. $s = 2840$ m .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 07. Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn 72 km/h , phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là 72 km/h , vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 2t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường s mà ô tô di chuyển từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ 72 km/h .

- A. 100 m . B. 125 m . C. 150 m . D. 175 m .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 08. Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Tính quãng đường s mà vật di chuyển trong $3s$ trước khi dừng hẳn.

- A. 16 m . B. 130 m . C. 170 m . D. 45 m .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 09. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường s mà ô tô di chuyển được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

- A. $0,2 \text{ m}$. B. 2 m . C. 10 m . D. 20 m .

8C. Bài toán vận dụng về nguyên hàm – tích phân

Câu 10. Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Tính quãng đường s mà ô tô di chuyển được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

- A. 24 m . B. 12 m . C. 6 m . D. $0,4 \text{ m}$.

Câu 11. Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc 20 m/s thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Tính quãng đường s mà vật ca nô di chuyển được từ lúc hết xăng đến lúc dừng hẳn.

- A. 10 m . B. 20 m . C. 30 m . D. 40 m .

Câu 12. Một ô tô đang chạy với tốc độ 36 km/h thì hãm phanh, chuyển động chậm dần đều với phương trình vận tốc $v = 10 - 0,5t \text{ (m/s)}$. Tính quãng đường s mà ô tô di chuyển được đến khi dừng hẳn.

- A. 100 m . B. 200 m . C. 300 m . D. 400 m .

Dạng 127. Bài toán vận dụng về diện tích hình học

Câu 13. Cổng trường ĐHBK Hà nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8m$, chiều cao $12,5m$. Tính diện tích của cổng S .

- A. $S = 100 m^2$. B. $S = 200 m^2$. C. $S = \frac{100}{3} m^2$. D. $S = \frac{200}{3} m^2$.

Lời giải tham khảo

Xem cổng trường là một Parabol có dạng là đường cong: $x = ay^2$.

$$S = 2 \int_0^{12,5} \sqrt{\frac{x}{a}} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_0^{12,5} = \frac{200}{3} m^2.$$

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính giá trị của $P = a + b + c$.

- A. $P = 11$. B. $P = 12$. C. $P = 13$. D. $P = 14$.

Lời giải tham khảo

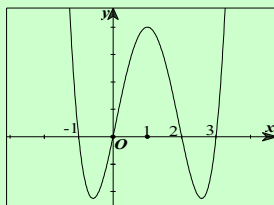
Ta có

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^1 (x^3 + x) d(\sqrt{x^2 + 1}) \\ &= (x^3 + x) \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} (3x^2 + 1) dx = 2\sqrt{2} - 3S - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Tiếp tục sử dụng công thức tích phân từng phần để tính $T = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$ được

$$a = 3, b = 2, c = 8 \Rightarrow P = 3 + 2 + 8 = 13.$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới:



Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị lớn nhất?

- A. $\int_{-1}^3 |f(x)| dx$. B. $\left| \int_{-1}^3 f(x) dx \right|$. C. $\int_2^3 |f(x)| dx$. D. $\int_0^3 |f(x)| dx$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Sử dụng t/c } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, (a < b)$$

Câu 16. Tính diện tích S hình elip giới hạn bởi $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

A. $S = \frac{7\pi}{4}$.

B. $S = 4\pi$.

C. $S = \frac{\pi}{2}$.

D. $S = 2\pi$.

Lời giải tham khảo

Ta có rút y theo x ta được $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$:

Do (E) có tính đối xứng qua các trục Ox và Oy nên: $S = 4 \int_0^2 \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi$.

Dạng 128. Bài toán vận dụng tổng hợp về tích phân

Câu 17. Một lực $40N$ cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm đến 15 cm . Tính công W sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài 15 cm đến 18 cm .

A. $1.56J$.

B. $1.57J$.

C. $1.58J$.

D. $1.59J$.

Lời giải tham khảo

Theo định luật Hooke, khi chiếc lò xo bị kéo căng thêm x (m) so với độ dài tự nhiên thì chiếc lò xo trở lại một lực $f(x) = kx$. Khi kéo căng lò xo từ 10 cm đến 15 cm thì nó bị kéo căng thêm $5\text{ cm} = 0.05\text{ m}$. Bằng cách này ta được $f(0.05) = 40$, bởi vậy $0.05k = 40 \Leftrightarrow k = 800$.

Do đó $f(x) = 800x$ và công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15 cm đến 18 cm là:

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x dx = 800 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{0.05}^{0.08} = 1.56J.$$

Câu 18. Tại một thành phố nhiệt độ (theo $^{\circ}F$) sau t giờ, tính từ 8 giờ đến 20 giờ được cho bởi công thức $f(t) = 50 + 14 \sin \frac{\pi t}{12}$. Tính nhiệt độ trung bình T trong khoảng thời gian trên.

A. $T = 50 - \frac{\pi}{14}$.

B. $T = 50 - \frac{14}{\pi}$.

C. $T = 50 + \frac{14}{\pi}$.

D. $T = 50 + \frac{\pi}{14}$.

Lời giải tham khảo

Nhiệt độ TB được tính theo công thức sau: $\frac{1}{20-8} \int_8^{20} \left(50 + 14 \cdot \sin \frac{\pi t}{12} \right) dt = 50 - \frac{14}{\pi}$.

Câu 19. Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày tại ngày thứ t là với số lượng là $F(t)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(t) = \frac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?

A. 5433,99 và không cứu được.

B. 1499,45 và cứu được.

C. 283,01 và cứu được.

D. 3716,99 và cứu được.

Lời giải tham khảo

Số con HP tại ngày thứ t là $F(t) = 500 \ln(2t + 1) + 2000$. Khi đó $F(15) \approx 3717 < 4000$.

Câu 20. Một đám vi khuẩn tại ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn là bao nhiêu con?

- A. 10130. B. 5130. C. 5154. D. 10129.

Lời giải tham khảo

Thực chất đây là một bài toán tìm nguyên hàm. Cho $N'(x)$ và đi tìm $N(x)$

Ta có: $\int \frac{2000}{1+x} dx = 2000 \cdot \ln|1+x| + 5000$ (Do ban đầu khối lượng vi khuẩn là 5000).

Với $x = 12$ thì số lượng vi khuẩn là ≈ 10130 con.

Câu 21. Tốc độ sinh sản trung bình sau thời gian t năm của loài hươu Krata được mô tả bằng hàm số $v(t) = 2 \cdot 10^3 \cdot e^{-t} \cdot t$. Số lượng hươu $L(t)$ con được tính qua công thức:

$\frac{dL(t)}{dt} = v(t)$. Hỏi rằng, sau 20 năm số lượng tối thiểu sẽ là bao nhiêu biết rằng ban đầu có 17 con hươu Krata?

- A. 2017. B. 1000. C. 2014. D. 1002.

Lời giải tham khảo

$$\frac{dL}{dt} = v(t) = 2 \cdot 10^3 e^{-t} t \Rightarrow L(x) - L(0) = \int_0^x 2 \cdot 10^3 e^{-t} t dt$$

$$\Rightarrow L(x) = L(0) - 2 \cdot 10^3 \left((te^{-t}) \Big|_0^x - \int_0^x e^{-t} dt \right)$$

$$\Rightarrow L(x) = L(0) - 2 \cdot 10^3 \left(xe^{-x} - (-e^{-t}) \Big|_0^x \right)$$

$$\Rightarrow L(x) = L(0) - 2 \cdot 10^3 (xe^{-x} + e^{-x} - 1)$$

$$x = 20; L(0) = 17 \Rightarrow L(20) = 2017$$

Câu 22. Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t+1}$. Tính mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây.

- A. $\frac{243}{4}$ cm. B. $\frac{243}{8}$ cm. C. 30 cm. D. 60 cm.

Lời giải tham khảo

$$h(t) = \int \sqrt[3]{2t+1} dt = \frac{3}{8} (2t+1) \sqrt[3]{2t+1} + C$$

Lúc đầu ($t = 0$) bể không có nước ($h(0) = 0$)

$$\Rightarrow C = -\frac{3}{8} \Rightarrow h(t) = \frac{3}{8} (2t+1) \sqrt[3]{2t+1} - \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow h(13) = 30.$$

Câu 23. Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tính mức nước của bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng trăm).

A. $h = 2,66$. B. $h = 5,34$. C. $h = 3,42$. D. $h = 7,12$.

Lời giải tham khảo

Giả thiết suy ra: $h(t) = \int \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}dt = \frac{3}{20}(t+8)^{\frac{4}{3}} - \frac{12}{5}$. Nên $h(6) \approx 2,66$.

8D. BÀI TOÁN VẬN DỤNG VỀ KHỐI NÓN – KHỐI TRỤ - KHỐI CẦU

Dạng 129. Bài toán vận dụng về khối nón

Câu 01. Người ta đặt được vào một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Tính bán kính đáy r của hình nón đã cho.

A. $r = \frac{8a}{3}$.

B. $r = \sqrt{2}a$.

C. $r = 2\sqrt{2}a$.

D. $r = \frac{4a}{3}$.

Lời giải tham khảo

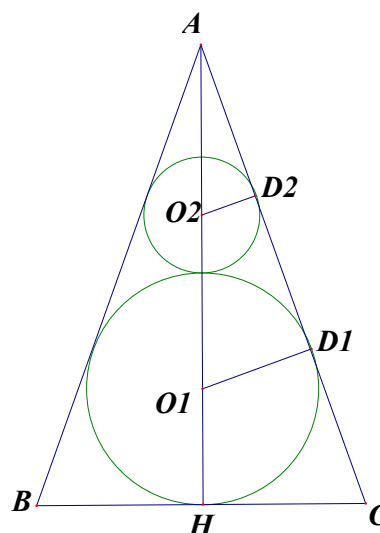
Giả sử thiết diện qua trục của hình nón là $\triangle ABC$ với A là đỉnh nón, BC là đường kính đáy nón. H là tâm đáy O_1, O_2 lần lượt là tâm của mặt cầu lớn và nhỏ, D_1, D_2 lần lượt là tiếp điểm của AC với (O_1) và (O_2) . Cần tính $r = HC$.

Vì $O_1D_1 \parallel O_2D_2$ và $O_1D_1 = 2O_2D_2$ nên O_2 là trung điểm $AO_1 \Rightarrow AO_1 = 2O_1O_2 = 2.3a = 6a$

$$O_1D_1 = 2a, AH = AO_1 + O_1H = 8a$$

$$AD_1 = \sqrt{AO_1^2 + O_1D_1^2} = 4a\sqrt{2}$$

$$\triangle AO_1D_1 \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{O_1D_1}{CH} = \frac{AD_1}{AH} \Rightarrow r = CH = 2\sqrt{2}a.$$



Câu 02. Một vật N_1 có dạng hình nón có chiều cao bằng 40 cm . Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích N_1 . Tính chiều cao h của hình nón N_2 .

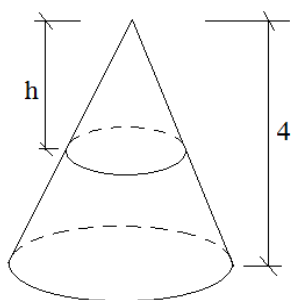
A. $h = 5\text{ cm}$.

B. $h = 10\text{ cm}$.

C. $h = 20\text{ cm}$.

D. $h = 40\text{ cm}$.

Lời giải tham khảo



Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của N_1 và N_2 và r_1, r_2 lần lượt là bán kính đáy của N_1, N_2 ta có:

$$\frac{1}{8} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_2^2 \cdot h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot 40} = \frac{r_2^2 h}{r_1^2 \cdot 40}.$$

Mặt khác ta có: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h}{40}$

8D. Bài toán vận dụng về khối nón – trụ – cầu

Do đó ta có: $\frac{1}{8} = \left(\frac{h}{40}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{h}{40} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = 20 \text{ cm}.$

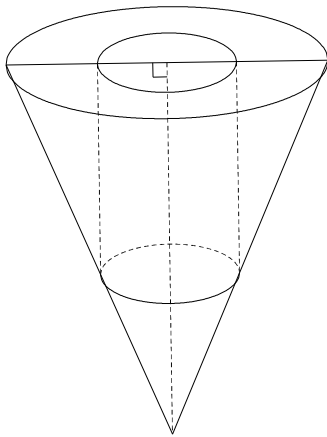
Câu 03. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của nón (như hình dưới) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước.

A. $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2}(dm^3).$

B. $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}(dm^3).$

C. $S_{xq} = 4\pi(dm^3).$

D. $S_{xq} = \frac{4\pi}{2}(dm^3).$



Lời giải tham khảo

- Gọi bán kính đáy hình nón là R , chiều cao h

Ta có $h = 3R$

- Chiều cao của khối trụ là $h_1 = 2R$, bán kính đáy là r

- Trong tam giác OHA có $H'A' \parallel HA$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{H'A'}{HA} = \frac{OH'}{OH} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$

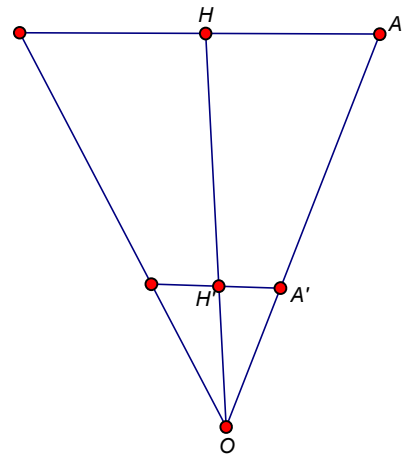
- Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h_1 = \frac{2\pi R^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow R = 2$

- Đường sinh của hình nón là

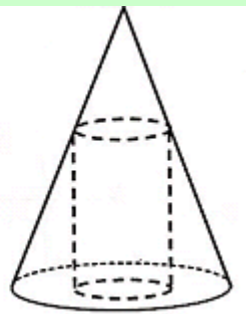
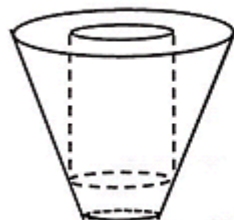
$$l = OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{9R^2 + R^2} = 2\sqrt{10}$$

- Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước

$$S_{xq} = \pi R l = 4\pi\sqrt{10}.$$



Câu 04. Khi sản xuất hộp mì tôm, các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống ở dưới đáy hộp để nước chảy xuống dưới và ngấm vào vắt mì, giúp mì chín. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của một hộp mì tôm (hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa). Vắt mì tôm có hình một khối trụ, hộp mì tôm có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao 9cm và bán kính đáy 6cm. Nhà sản xuất đang tìm cách để sao cho vắt mì tôm có thể tích lớn nhất trong hộp với mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó?



A. $V = 36\pi$.

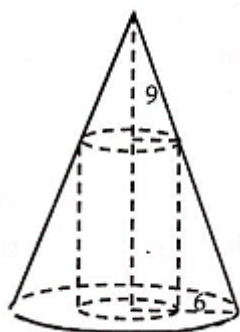
B. $V = 54\pi$.

C. $V = 48\pi$.

D. $V = \frac{81}{2}\pi$.

Lời giải tham khảo

Đây thực chất là bài toán khối trụ nội tiếp khối nón, ta có kí hiệu các kích thước như sau:



Ta có thể tích vắt mì tôm được tính bằng $V = B.h = \pi r^2.h$

Đây là ứng dụng của bài toán tìm GTLN, GTNN trên một khoảng (đoạn) xác định:

Ta sẽ đưa thể tích về hàm số một biến theo h hoặc r . Trước tiên ta cần đi tìm mối liên hệ giữa h và r . Nhìn vào hình vẽ ta thấy các mối quan hệ vuông góc và song song, dùng định lí

Thales ta sẽ có: $\frac{h}{9} = \frac{6-r}{6} \Leftrightarrow h = \frac{18-3r}{2}$

Khi đó $V = f(r) = \pi r^2 \cdot \frac{18-3r}{2} = -\frac{3\pi r^3}{2} + 9\pi r^2$ với $0 < r < 6$

$f'(r) = -\frac{9}{2}\pi r^2 + 18\pi r = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 4 \end{cases}$

Khi đó ta không cần phải vẽ BBT ta cũng có thể suy ra được với $r = 4$ thì V đạt GTLN, khi đó $V = 48\pi$.

Câu 05. Hoàn có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Hoàn muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Hoàn phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau (diện tích chỗ dán nhỏ không đáng kể). Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất.

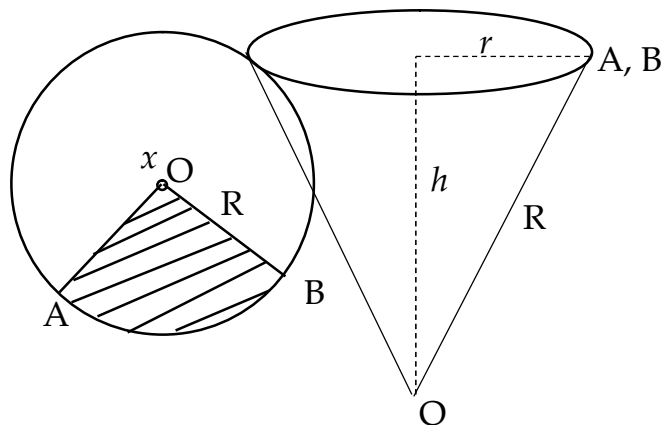
A. $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{3}$.

C. $x = \frac{\pi}{2}$.

D. $x = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải tham khảo



$$l_{AB} = Rx; r = \frac{Rx}{2\pi}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{24\pi^2} R^3 \sqrt{x^4(4\pi^2 - x^2)} = \frac{1}{24\sqrt{2}\pi^2} R^3 \sqrt{x^2 \pi^2 (8\pi^2 - 2x^2)}$$

$$\text{Để } V \text{ lớn nhất thì } x^2 = 8\pi^2 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}.$$

Câu 06. Cho hình nón tròn xoay có đỉnh S và đáy là đường tròn $C(O; R)$ với $R = a$ ($a > 0$), $SO = 2a$, $O' \in SO$ thỏa mãn $OO' = x$ ($0 < x < 2a$), mặt phẳng (α) vuông góc với SO tại O' cắt hình nón tròn xoay theo giao tuyến là đường tròn (C') . Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là đường tròn (C') đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{a}{2}$.

B. $x = a$.

C. $x = \frac{a}{3}$.

D. $x = \frac{2a}{3}$.

Lời giải tham khảo

Theo Định lý Ta-lét $\frac{R'}{R} = \frac{2a - x}{2a}$. Suy ra $R' = \frac{R}{2a}(2a - x)$.

Khi đó thể tích khối nón đỉnh O đáy là đường tròn (C') là

$$V = \frac{1}{3}\pi x \left[\frac{R}{2a}(2a - x) \right]^2 = \frac{\pi R^2}{12a^2} x(2a - x)^2.$$

Xét $f(x) = x(2a - x)^2$ trên $(0; 2a)$ ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{2a}{3}$.

Câu 07. Giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính R .

A. $V_{\max} = \frac{1}{3}\pi R^3$.

B. $V_{\max} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

C. $V_{\max} = \frac{4\sqrt{2}}{9}\pi R^3$.

D. $V_{\max} = \frac{32}{81}\pi R^3$.

Lời giải tham khảo

Gọi bán kính đáy của khối nón là a thì $0 < a \leq R$. Ta có

$$V \leq \frac{1}{3}\pi a^2 \left(R + \sqrt{R^2 - a^2} \right) = \frac{\pi R^3}{3} t^2 \left(1 + \sqrt{1 - t^2} \right) \text{ với } t = \frac{a}{R} \in (0; 1].$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 \left(1 + \sqrt{1 - t^2} \right)$ trên $(0; 1]$ sẽ thu được kết quả.

Câu 08. Một đĩa tròn bằng thép trắng có bán kính bằng R . Người ta phải cắt đĩa theo một hình quạt, sau đó gấp lại thành hình nón để làm một cái phễu. Cung tròn α của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để thể tích cái phễu lớn nhất?

- A. $\alpha \approx 66^\circ$. B. $\alpha \approx 294^\circ$. C. $\alpha \approx 12,56^\circ$. D. $\alpha \approx 2,8^\circ$.

Lời giải tham khảo

Gọi x là độ dài đường tròn đáy của cái phễu (bằng chu vi đĩa tròn trừ đi độ dài cung hình quạt bị cắt đi) $\Rightarrow x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$ (r là bán kính đường tròn đáy hình nón).

Đường sinh của hình nón chính bằng bán kính đĩa là R .

$$\text{Đường cao hình nón: } h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Khảo sát hàm V ta tìm được V đạt GTLN khi $x = \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}$.

$$\text{Suy ra, độ dài cung hình quạt bị cắt là: } 2\pi R - \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi R - \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}}{2\pi R} \cdot 360 \approx 66^\circ.$$

Dạng 130. Bài toán vận dụng về khối trụ

Câu 09. Cần phải thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng nước sạch có dung tích V (cm^3). Hỏi bán kính R của đáy trụ nhận giá trị nào sau đây để tiết kiệm vật liệu nhất?

- A. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$. B. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. C. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$. D. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Lời giải tham khảo

Bài toán yêu cầu xác định giá trị của bán kính đáy là R , sao cho S_{p} nhỏ nhất.

Gọi h là chiều cao của hình trụ, ta có: $V = \pi R^2 h$.

$$S_{\text{tp}} = 2S_d + S_{\text{xq}} = 2\pi R^2 + \pi R h = 2\pi \left(\frac{V}{\pi R} + R^2 \right) = 2\pi \left(\frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} + R^2 \right) \geq 6\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

Dấu “=” xảy ra ta có $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 10. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Hỏi muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính R của đáy gần số nào nhất?

- A. $R = 0,5$. B. $R = 0,6$. C. $R = 0,8$. D. $R = 0,7$.

Lời giải tham khảo

Bài toán yêu cầu xác định giá trị của bán kính đáy là R , sao cho S_{p} nhỏ nhất.

Gọi h là chiều cao của hình trụ, ta có: $2 = \pi R^2 h$.

$$S_{\text{tp}} = 2S_d + S_{\text{xq}} = 2\pi R^2 + \pi R h = 2\pi \left(\frac{2}{\pi R} + R^2 \right) = 2\pi \left(\frac{2}{2\pi R} + \frac{2}{2\pi R} + R^2 \right) \geq 6\pi \sqrt[3]{\frac{4}{4\pi^2}}$$

8D. Bài toán vận dụng về khối nón – trụ – cầu

Dấu “=” xảy ra ta có $R = \sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Câu 11. Một nhà sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích 10000 cm^3 . Biết rằng bán kính của nắp đậy sao cho nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất có giá trị là α . Hỏi giá trị α gần với giá trị nào nhất dưới đây?

- A. $a \approx 11.677$. B. $a \approx 11.674$. C. $a \approx 11.676$. D. $a \approx 11.675$.

Lời giải tham khảo

Ta có:

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần của hình trụ phải là bé nhất

Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + 2.S_d \\ &= 2\pi R.l + 2\pi R^2 \\ &= 2\pi.a.l + 2\pi.a^2 \end{aligned}$$

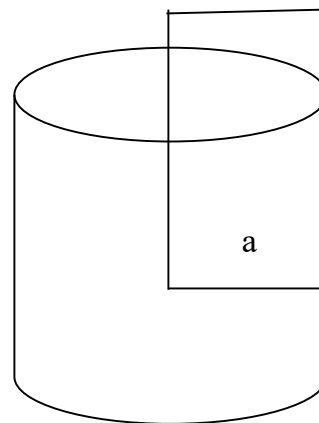
Thể tích của hình trụ là 10000 cm^3 nên ta có:

$$\begin{aligned} (\pi.R^2).l &= 10000 \Leftrightarrow l = \frac{10000}{\pi.R^2} \\ \Rightarrow S_{tp} &= 2\pi.a.\frac{10000}{\pi.a^2} + 2\pi.a^2 = \frac{20000}{a} + 2\pi.a^2 \end{aligned}$$

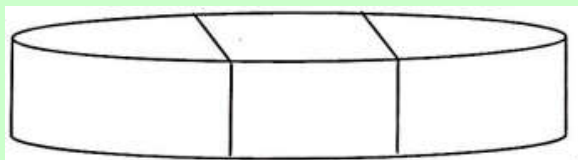
Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{20000}{a} + 2\pi.a^2$

$$y' = \frac{-20000}{a^2} + 4\pi a$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -20000 + 4\pi a^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 = \frac{5000}{\pi} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$$

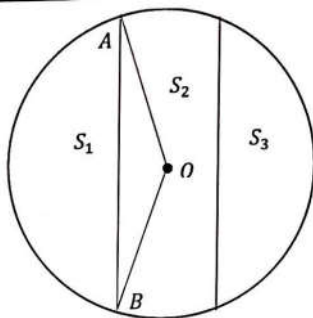


Câu 12. Trong ngày trung thu, bố bạn Nam đem về cho bạn Nam một chiếc bánh trung thu. Nam rất vui vẻ vì điều đó, tuy nhiên để kích thích tinh thần toán học của bạn Nam, bố bạn Nam đưa ra một bài toán như sau: Giả sử chiếc bánh có hình trụ đứng, đây là hình tròn đường kính 12 cm , chiều cao 2 cm . Bạn Nam phải cắt chiếc bánh thành 3 phần bằng nhau, cách cắt phải tuân thủ quy tắc. Nam chỉ được cắt đúng hai nhát, mặt phẳng 2 nhát dao phải vuông góc với đáy và song song với nhau. Như vậy, theo cách cắt thì sẽ có hai miếng giống nhau và một việc khác hình thù, 3 miếng có cùng chung thể tích. Hỏi khoảng cách giữa 2 mặt phẳng nhát cắt gần nhất với giá trị bao nhiêu?



- A. $3,5 \text{ cm}$. B. 3 cm . C. $3,2 \text{ cm}$. D. $3,44 \text{ cm}$.

Lời giải tham khảo



Thực chất bài toán là chia hình tròn thành 3 phần bằng nhau như hình vẽ:

Vì các miếng bánh có cùng chiều cao nên diện tích đáy của các miếng bánh phải bằng nhau và bằng $\frac{1}{3}$ diện tích chiếc bánh ban đầu.

Trong hình vẽ thì ta có $OA = OB = 6$ và $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{\pi \cdot OA^2}{3} = 12\pi$

Đặt $AOB = \alpha \in (0, \pi)$ thì ta có:

$$S_1 + S_{\triangle OAB} = S_{OAB}$$

$$\Leftrightarrow 12\pi + \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin \alpha = \frac{OA^2 \cdot \pi}{2\pi} \cdot \alpha$$

$$\Leftrightarrow 12\pi + 18 \sin \alpha = 18\alpha$$

Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE trên máy tính ta tìm được giá trị $\alpha \approx 2,605325675$

Khoảng cách 2 nhát dao là $x = OA \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \approx 3,179185015$

Câu 13. Một hình trụ tròn xoay bán kính $R = 1$. Trên 2 đường tròn đáy (O) và (O') lấy A và B sao cho $AB = 2$ và góc giữa AB và trục OO' bằng 30° .

Xét hai khẳng định:

(I): Khoảng cách giữa $O'O$ và AB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(II): Thể tích của khối trụ là $V = \sqrt{3} \pi$

Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

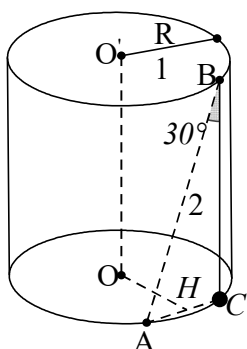
A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều sai.

D. Cả (I) và (II) đều đúng.

Lời giải tham khảo



Kẻ đường sinh BC thì $OO' \parallel (ABC)$. Vì (ABC) vuông góc với (OAC) nên kẻ $OH \perp AC$ thì $OH \perp (ABC)$. Vậy $d(OO', AB) = OH$

$$\triangle ABC: BC = AB \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}; AC = AB \cdot \sin 30^\circ = 1,$$

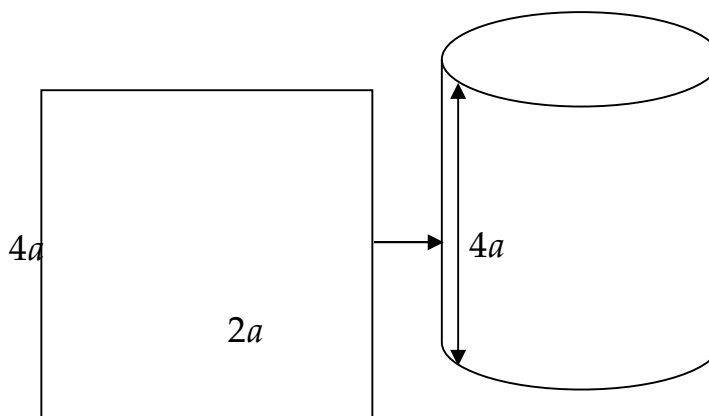
$\triangle OAC$ là tam giác đều, có cạnh bằng 1, nên $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$: (I) đúng.

$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ nên (II) đúng.

Câu 14. Một miếng bìa hình chữ nhật có các kích thước $2a$ và $4a$. Uốn cong tấm bìa theo bề rộng (hình vẽ) để được hình trụ không đáy. Ký hiệu V là thể tích của khối trụ tạo ra. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

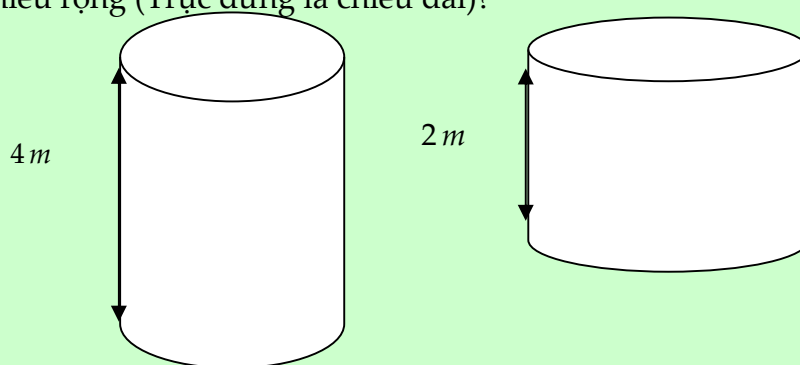
- A. $V = 4\pi a^3$. B. $V = 16\pi a^3$. C. $V = \frac{4a^3}{\pi}$. D. $V = \frac{a^3}{16\pi}$.

Lời giải tham khảo



Chu vi của đáy bằng $2a = 2\pi R$. Ta tính được $R = \frac{a}{\pi}$. Chiều cao $h = 4a$, từ đó ta tính được $V = \frac{4a^3}{\pi}$.

Câu 15. Một người gò một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài $4m$ và chiều rộng $2m$ thành một cái thùng hình trụ đặt trên nền nhà để đựng lúa. Nếu gò tấm nhôm theo chiều dài (Trục đứng là chiều rộng) thì số lúa đựng được như thế nào so với tấm nhôm được gò theo chiều rộng (Trục đứng là chiều dài)?



Gò theo chiều rộng

Gò theo chiều dài

- A. Số lúa đựng được bằng nhau. B. Số lúa đựng được bằng một nửa.
C. Số lúa đựng được gấp hai lần. D. Số lúa đựng được gấp bốn lần.

Lời giải tham khảo

Gọi R là bán kính đường tròn đáy khi gò tấm nhôm theo chiều dài:

$$4 = 2R, \text{ ta được } R = \frac{2}{\pi}, V_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \pi \cdot 2 = \frac{8}{\pi} (m^3)$$

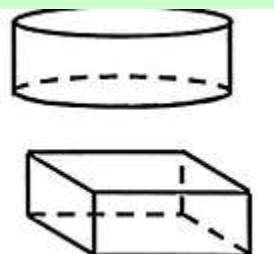
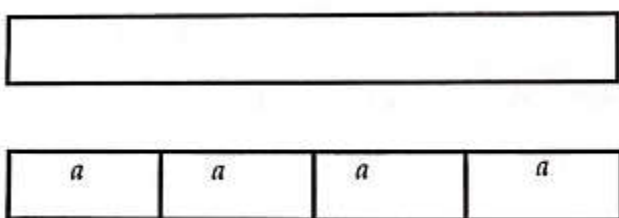
Gọi R' là bán kính đường tròn đáy khi gò tấm nhôm theo chiều rộng: ta có

$$R' = \frac{1}{\pi}. \text{ Ta được } V_2 = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \pi \cdot 4 = \frac{4}{\pi} (m^3). \text{ Vậy } V_1 = \frac{1}{2} V_2.$$

Câu 16. Bé Thảo có một tấm bìa có chiều dài 20 cm , chiều rộng 1 cm . Bé muốn gấp một cái hộp nhỏ xinh để bỏ kẹp tóc vào hộp đó tặng quà cho mẹ ngày 20 tháng 10. Anh Phương đã chỉ cho bé hai cách gấp hộp.

Cách thứ nhất: là bé cuộn tấm bìa thành một cái hộp hình trụ không có 2 đáy có thể tích V_1 .

Cách thứ hai: là bé gấp tấm bìa một hình hộp chữ nhật có thể tích V_2 có các kích thước như hình vẽ. Hãy tìm tỉ số thể tích của 2 hộp để biết được gấp theo cách nào sẽ có thể tích lớn hơn.



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{\pi}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = 4\pi$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$.

Lời giải tham khảo

Chiều dài của tấm bìa là 20 cm tức là chu vi đáy hộp hình trụ và đáy hộp hình hộp là 20 cm .

Do 2 khối có cùng chiều cao nên tỉ số thể tích sẽ tính theo tỉ số diện tích đáy của hai hình.

Để tính được diện tích hình tròn đáy của khối hộp hình trụ, ta phải đi tìm bán kính đáy. Theo giả thiết chu vi cho là $20 = 2\pi \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{10}{\pi}$. Khi đó $S_1 = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{100}{\pi^2} = \frac{100}{\pi}$.

Diện tích đáy của hình hộp $S_2 = 5 \cdot 5 = 25$.

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{100}{\pi} ; 25 = \frac{4}{\pi}$.

Câu 17. Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính diện tích đáy của cái lọ hình trụ.

A. $16\pi r^2$.

B. $18\pi r^2$.

C. $9\pi r^2$.

D. $36\pi r^2$.

Lời giải tham khảo

Theo giả thiết ta có bán kính của đường tròn đáy $R = 3r$

$\Rightarrow$ Diện tích đáy hình trụ: $S = \pi R^2 = 9\pi r^2$.

Câu 18. Từ $37,26\text{ cm}^3$ thủy tinh. Người ta làm một chiếc cốc hình trụ có đường kính 8 cm với đáy cốc dày $1,5\text{ cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,2\text{ cm}$. Tính chiều cao của chiếc cốc.

A. 10 cm .

B. 8 cm .

C. 15 cm .

D. 12 cm .

Lời giải tham khảo

Thể tích đáy là $V = \pi \cdot 16 \cdot 1,5 = 24\pi\text{ cm}^3$

Phần thủy tinh làm thành cốc là: $37,26\pi\text{ cm}^3 - 24\pi\text{ cm}^3 = 13,26\pi\text{ cm}^3$

8D. Bài toán vận dụng về khối nón – trụ – cầu

Gọi chiều cao của thành cốc không kể đáy là x ta có $x = \frac{13,26}{16 - (3,8)^2} = 8,5$

Vậy chiều cao của cốc là: $8,5 + 1,5 = 10 \text{ cm}$.

Câu 19. Người ta cần đổ một ống bi thoát nước hình trụ với chiều cao 200 cm và độ dày của thành bi là 10 cm và đường kính của bi là 60 cm . Tính lượng bê tông cần phải đổ của bi đó là.

- A. $0,1\pi \text{ m}^3$. B. $0,18\pi \text{ m}^3$. C. $0,14\pi \text{ m}^3$. D. $V = \pi \text{ m}^3$.

Lời giải tham khảo

Lượng bê tông cần đổ là: $\pi h(R^2 - r^2) = \pi \cdot 200 \cdot (30^2 - 20^2) = \pi \cdot 100000 \text{ cm}^3 = 0,1\pi \text{ m}^3$.

Câu 20. Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 17 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh 14 cm ; sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa tổng hợp vào xung quanh) mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 30 cm . Biết chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 390 cm . Tính lượng vữa hỗn hợp cần dùng (tính theo đơn vị m^3 , làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

- A. $1,3 \text{ m}^3$. B. $2,0 \text{ m}^3$. C. $1,2 \text{ m}^3$. D. $1,9 \text{ m}^3$.

Lời giải tham khảo

Với cột bê tông hình lăng trụ: Đáy của mỗi cột là hình lục giác đều có diện tích bằng 6 tam giác đều cạnh 14 cm , mỗi tam giác có diện tích là $\frac{14^2 \sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$

Với cột bê tông đã trát vữa hình trụ: Đáy của mỗi cột là hình tròn bán kính 15 cm nên có diện tích là $15^2 \pi (\text{cm}^2)$

Số lượng vữa cần trát thêm vào tất cả 17 cột, mỗi cột cao 290 cm là:

$$17 \cdot 390 \left(15^2 \pi - 6 \cdot \frac{14^2 \sqrt{3}}{4} \right) = 1,31 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 1,31 \text{ m}^3$$

Dạng 131. Bài toán vận dụng về khối cầu

Câu 21. Khi thiết kế vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí làm vỏ lon là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng V mà diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính R của đường tròn đáy khối trụ bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. B. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. C. $\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$. D. $\sqrt{\frac{V}{\pi}}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot R^2}$; $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$

Xét hàm: $f(x) = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$.

Ta có $f(x)$ đạt Min khi $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 22. Cho hình lăng trụ tam giác đều có chín cạnh đều bằng a . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. $V = \frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{54}$. B. $V = \frac{7\pi a^3 \sqrt{3}}{54}$. C. $V = \frac{7\pi a^3 \sqrt{7}}{54}$. D. $V = \frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{18}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{54}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{2}$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và đường trung tuyến AM của tam giác ABC bằng $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tính thể tích V của khối cầu tạo bởi mặt cầu (S) .

A. $V = \pi\sqrt{6}a^3$. B. $V = \pi 2\sqrt{2}a^3$. C. $V = \pi 2\sqrt{3}a^3$. D. $V = \pi 2\sqrt{6}a^3$.

Lời giải tham khảo

Từ công thức tính độ dài trung tuyến ta suy ra được: $B = a$.

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2.$$

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có: $r = \frac{BA \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{ABC}} = a$

Gọi R là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ ta có:

$$R = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a$$

$$\Rightarrow \text{Thể tích khối cầu: } V = \pi\sqrt{6} \cdot a^3.$$

Câu 24. Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật (tổng diện tích các mặt), S_2 là diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đó. Tính giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{S_2}{S_1}$.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải tham khảo

Hướng dẫn: Gọi các kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$

$$S_1 = 2(ab + bc + ca), S_2 = (a^2 + b^2 + c^2)\pi. \text{ Ta có } \frac{S_2}{S_1} \geq \frac{\pi}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{S_2}{S_1}$ bằng $\frac{\pi}{2}$.

8E. BÀI TOÁN VẬN DỤNG VỀ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

Dạng 132. Bài toán vận dụng viết phương trình mặt phẳng

Câu 01. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$ và $A'(0;0;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng CD' và tạo với mặt phẳng $(BB'D'D)$ một góc lớn nhất?

A. $x - y + z = 0$.

B. $x - y + z - 2 = 0$.

C. $x + 2y + z - 3 = 0$.

D. $x + 3y + z - 4 = 0$.

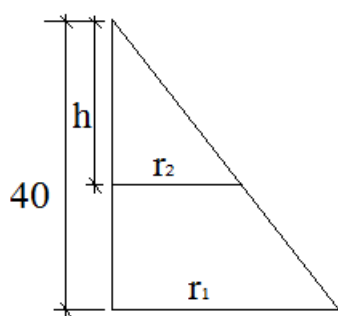
Lời giải tham khảo

Ta có: $B(1;0;0)$, $B'(1;0;1)$, $C(1;1;0)$, $D'(0;1;1)$.

Do đó $(BB'D'D)$ có phương trình: $x + y - 1 = 0$

(P) tạo với $(BB'D'D)$ một góc lớn nhất

$\Leftrightarrow (P)$ vuông góc với $(BB'D'D)$.



Vậy (P) chứa CD' và vuông góc với $(BB'D'D)$

nên phương trình (P) là: $x - y + z = 0$.

Câu 02. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(2;5;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ M đến mp (P) lớn nhất?

A. $x - 4y - z + 1 = 0$.

B. $x + 4y + z - 3 = 0$.

C. $x - 4y + z - 3 = 0$.

D. $x + 4y - z + 1 = 0$.

Lời giải tham khảo

Ta có khoảng cách từ M đến mặt phẳng bất kỳ chứa Δ không vượt quá khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ và khoảng cách đó sẽ đạt giá trị lớn nhất khi mặt phẳng này chứa Δ và nhận $\overrightarrow{MH}$ làm vector pháp tuyến trong đó H là hình chiếu của M lên Δ .

Ta có $H(3;1;4)$ và $\overrightarrow{MH}(1;-4;1)$.

Câu 03. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 2017 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất?

A. $(Q): x + y - z + 4 = 0$.

B. $(Q): x + y - z - 4 = 0$.

C. $(Q): 2x + y - 3z - 4 = 0$.

D. $(Q): 2x - y - z - 4 = 0$.

Lời giải tham khảo

Nhận xét: $0^\circ \leq ((P), (Q)) \leq 90^\circ$, nên góc $((P), (Q))$ nhỏ nhất khi $\cos((P), (Q))$ lớn nhất.

$(Q): ax + b(y - 4) + cz = 0; A \in (Q) \Rightarrow a = 2b + c$

Ta có $\cos((P), (Q)) = \frac{|2a - b - 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Nếu $b = 0 \Rightarrow \cos((P), (Q)) = 0 \Rightarrow ((P), (Q)) = 90^\circ$

Nếu $b \neq 0 \Rightarrow \cos((P), (Q)) = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{b}\right) + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{c}{b} + 1\right)^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $b = -c; a = -c$, nên phương trình mp (Q) là: $x + y - z - 4 = 0$.

Câu 04. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất?

A. $2x - y + 2z - 1 = 0$.

B. $10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

C. $2x + y - z = 0$.

D. $-x + 6y + 4z + 5 = 0$.

Lời giải tham khảo

Gọi A là giao điểm của d và (P) , m là giao tuyến của (P) và (Q) . Lấy điểm I trên d .

Gọi H là hình chiếu của I trên (P) , dựng HE vuông góc với m , suy ra $\varphi = \widehat{IEH}$ là góc giữa (P) và (Q)

• $\tan \varphi = \frac{IH}{HE} \geq \frac{IH}{HA}$. Dấu "=" xảy ra khi $E \equiv A$.

Khi đó đường thẳng m vuông góc với d , chọn $\vec{u}_m = [\vec{d}_d; \vec{n}_p]$

$\vec{n}_Q = [\vec{u}_d; \vec{u}_m]$.

Câu 05. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(4;3;4)$, song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. $2x + y + 2z - 19 = 0$.

B. $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

C. $2x + 2y + z - 18 = 0$.

D. $2x + y - 2z - 10 = 0$.

Lời giải tham khảo

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là vectơ pháp tuyến của (P)

Ta có $-3a + 2b + 2c = 0$

Điều kiện tiếp xúc ta có $|3a + b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Từ đó suy ra $2b = c, b = 2c$

Suy ra hai mặt phẳng ở A và C .

C loại vì chứa Δ .

Dạng 133. Bài toán vận dụng tổng hợp về tọa độ không gian Oxyz

Câu 06. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1;2;0)$, $B(2;1;1)$, $C(3;1;0)$ và $D(5;-1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua hai điểm A và B và cách đều C và D.

- A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số mặt phẳng.

Lời giải tham khảo

Kiểm tra ta được AB song song với CD nên có vô số mặt phẳng đi qua hai điểm A và B và cách đều C và D.

Câu 07. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(0;0;0)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC) , (BCD) , (CDA) , (DAB) ?

- A. 8. B. 5. C. 1. D. 4.

Lời giải tham khảo

Gọi $I(x; y; z)$ cách đều 4 mặt ta có $|x| + |y| + |z| = \frac{|x + y + z - 1|}{\sqrt{3}}$, phương trình có 8 nghiệm.

Câu 08. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$ và $D(3;1;4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng chia tứ diện ABCD thành 2 phần có thể tích bằng nhau?

- A. 4 mặt phẳng. B. 6 mặt phẳng.
C. 8 mặt phẳng. D. Có vô số mặt phẳng.

Lời giải tham khảo

Trên các cạnh AB , AC , AD lấy lần lượt M , N , P sao cho $\frac{MN}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{CB} = \frac{1}{2}$ thì $mp(MNP)$ chia khối tứ diện ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau có vô số mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu.

Câu 09. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$ và $D(3;1;4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

- A. 1 mặt phẳng. B. 4 mặt phẳng.
C. 7 mặt phẳng. D. Có vô số mặt phẳng.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -1)$; $\overrightarrow{AD} = (2; 3; 4)$.

Khi đó: $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -24 \neq 0$ do vậy A, B, C, D không đồng phẳng

Do đó có 7 mặt phẳng cách đều 4 điểm đã cho bao gồm.

- +) Mặt phẳng qua trung điểm của AD và song song với mặt phẳng (ABC)
- +) Mặt phẳng qua trung điểm của AB và song song với mặt phẳng (ACD)
- +) Mặt phẳng đi qua trung điểm của AC và song song với mặt phẳng (ABD)

8E. Bài toán vận dụng về tọa độ không gian Oxyz

- + Mặt phẳng đi qua trung điểm của AB và song song với mặt phẳng (BCD)
- + Mặt phẳng qua trung điểm của AB và CD đồng thời song song với BC và AD
- + Mặt phẳng qua trung điểm của AD và BC đồng thời song song với AB và CD
- + Mặt phẳng qua trung điểm của AC và BD đồng thời song song với BC và AD

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ và mặt phẳng (P) qua M cắt Ox , Oy , Oz tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ (với $a, b, c > 0$). Với giá trị nào của a, b, c thì thể tích khối tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ) nhỏ nhất?

A. $a = 9, b = 6, c = 3$.

B. $a = 6, b = 3, c = 9$.

C. $a = 3, b = 6, c = 9$.

D. $a = 6, b = 9, c = 3$.

Lời giải tham khảo

Phương trình mặt phẳng là $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì đó mặt (P) đi qua $M(1;2;3)$ nên ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ (1)

Nên thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V = \frac{1}{6}a.b.c$ (2)

Ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{a.b.c}} \Leftrightarrow \frac{a.b.c}{6} \geq 27$. Vậy thể tích lớn nhất là: $V = 27$.

Vậy $a = 3; b = 6; c = 9$. Phương trình là: $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 4z + 16 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-1}$ và điểm $M(2;3;1)$. Gọi A là điểm thuộc đường thẳng d , B là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ điểm A biết tam giác MAB cân tại M .

A. $A(3;1;3)$.

B. $A(1;-3;5)$.

C. $A(2;-1;4)$.

D. $A(0;-5;6)$.

Lời giải tham khảo

Gọi H là trung điểm AB và A' là điểm đối xứng của A qua M .

Khi đó: $\begin{cases} MH // A'B \\ MH \perp AB \end{cases} \Rightarrow A'B \perp AB \Rightarrow A' \in (P)$.

Vì M là trung điểm AA' nên $A'(-t+3; -2t+9; t-3)$. Mà $A' \in (P) \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A(3;1;3)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 5 = 0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho qua M kẻ tiếp tuyến đến mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N thỏa mãn MN nhỏ nhất. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $M(-1;-3;-1)$.

B. $M(1;3;1)$.

C. Không tồn tại điểm M .

D. Điểm M thuộc một đường tròn có tâm $(-1;-2;-3)$, bán kính bằng 1 thuộc (P) .

Lời giải tham khảo

Tâm của (S) là $I(1; -1; 1)$ và bán kính của (S) là $R = 1$.

Ta có: $MN^2 = IM^2 - R^2 \geq IH^2 - R^2$

Trong đó H là hình chiếu của I trên (P)

Vậy: MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) . Vậy $M(-1; -3; -1)$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{3}$ mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ O đến (α) đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ giao điểm M của (α) và trục Ox .

- A. $M(3; 0; 0)$. B. $M(6; 0; 0)$. C. $M\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right)$. D. $M(9; 0; 0)$.

Lời giải tham khảo

Gọi (α) là mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: (α)

Tọa độ hình chiếu của O trên đường thẳng là M . Ta có tọa độ M là: $M(3; 3; -3)$

Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng cần lập ta có: $d(O, (\alpha)) = OH \leq OM$.

Vậy khoảng cách lớn nhất bằng $OM \Rightarrow (\alpha): x + y - z - 9 = 0$

Vậy tọa độ giao điểm của (α) với Ox là $N(9; 0; 0)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung. Có bao nhiêu điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho qua điểm đó kẻ tiếp tuyến đến mặt cầu (S) thỏa mãn khoảng cách từ điểm đó đến tiếp điểm đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. 1 điểm. B. 2 điểm.
C. không có điểm nào. D. có vô số điểm.

Lời giải tham khảo

Gọi điểm M thuộc mặt phẳng (P) . kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm).

$MA^2 = MI^2 - R^2$ (với I là tâm cố định, R không đổi) MA nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, khi M là hình chiếu của I trên (P) (chú ý mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung)

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0; 1), B(1; -1; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đi qua A và song song với (P) , đồng thời khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất?

- A. $\frac{x+1}{31} = \frac{y}{12} = \frac{z-2}{-4}$. B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{12} = \frac{z}{11}$.
C. $\frac{x}{21} = \frac{y+3}{11} = \frac{z-1}{-4}$. D. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Lời giải tham khảo

Đường thẳng d cần viết nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P) .

8E. Bài toán vận dụng về tọa độ không gian Oxyz

Pt (Q) là: $x - 2y + 2z + 1 = 0$. Để khoảng cách từ B đến d là nhỏ nhất thì d phải đi qua A và điểm H là hình chiếu vuông góc của B trên (Q).

Ta có $H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Phương trình d là phương trình đường thẳng qua AH.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$; $B(5; 4; 4)$ và mặt phẳng (P): $2x + y - z + 6 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc (P), tính giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2$.

A. 60.

B. 50.

C. $\frac{200}{3}$.

D. $\frac{2968}{25}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \geq 2d^2(I; (P)) + \frac{AB^2}{2} = 60$ với I là trung điểm của AB.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(1; 1; 2)$. Tập hợp tất cả các điểm M trên mặt phẳng (α): $3x + 6y - 6z - 1 = 0$ sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ là hình nào trong các hình sau?

A. một đường tròn.

B. một mặt cầu.

C. một điểm.

D. một mặt phẳng.

Lời giải tham khảo

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow 3MG^2 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = 0 \Leftrightarrow MG = \frac{1}{3}$$

Vì $d(G, (\alpha)) = \frac{1}{3}$ nên M là hình chiếu của G trên (α): $3x + 6y - 6z - 1 = 0$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$, $B(3; 4; 4)$ và mặt phẳng (P): $2x + y - z + 6 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(-2; 1; 1)$.

B. $M(-3; 1; 1)$.

C. $M(-2; 1; 3)$.

D. $M(3; -1; 1)$.

Lời giải tham khảo

Áp dụng công thức $2(MA^2 + MB^2) = 4MI^2 + AB^2$ với I là trung điểm của đoạn AB.

Vậy để $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Hay M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

$I(2; 3; 1)$, ta tìm được $M(-2; 1; 3)$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(0; 4; 0)$ và mặt phẳng (P): $2x - y - 2z + 2015 = 0$. Gọi α là góc nhỏ nhất giữa mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng (P). Tính giá trị của $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{9}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{6}$.

C. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải tham khảo

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm B nên có phương trình dạng

$$ax + b(y - 4) + cz = 0 \quad (Q) \quad (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$$

Mà điểm A cũng thuộc (Q) nên $a \cdot 1 + b(2 - 4) + c(-1) = 0 \Leftrightarrow a = 2b + c \quad (1)$.

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) : $\vec{n}_P = (2; -1; -2)$

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) : $\vec{n}_Q = (a; b; c)$

Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Khi đó ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|2a - b - 2c|}{3 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (2)$$

Thế $a = 2b + c \quad (1)$ vào (2) ta được

$$\cos \alpha = \frac{|3b|}{3 \cdot \sqrt{5b^2 + 4bc + 2c^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4bc + 2c^2}}$$

+) Nếu $b = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$.

$$+) \text{ Nếu } b \neq 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{b}\right) + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{b}\right) + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{c}{b} + 1\right)^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1A. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1C	2D	3C	4A	5C	6B	7A	8B	9D	10C
11D	12A	13D	14A	15B	16D	17C	18D	19B	20D
21D	22A	23A	24A	25C	26A	27C	28D	29B	30A
31B	32D	33A	34C	35D	36A	37A	38C	39D	40A
41A	42D	43D	44A	45B	46D	47A	48A	49A	50D
51D	52D	53B	54C	55C	56A	57C	58C	59A	60C
61A	62C	63C	64A	65A	66A	67A	68B	69B	70A
71C	72B	73A	74B	75A	76A	77D	78D	79B	80C
81B	82A	83C	84D	85A	86C	87D	88A	89A	90A
91B	92C	93D							

1B. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1A	2D	3A	4A	5A	6A	7D	8D	9D	10B
11C	12C	13A	14C	15C	16A	17C	18A	19B	20B
21A	22C	23C	24C	25B	26A	27B	28A	29A	30A
31D	32C	33A	34A	35A	36D	37A	38C	39A	40C
41D	42C	43A	44D	45D	46A	47D	48B	49D	50A
51D	52D	53C	54B	55A	56C	57A	58C	59B	60D
61C	62D								

1C. GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

1C	2C	3A	4A	5C	6A	7B	8D	9C	10B
11A	12A	13D	14B	15C	16B	17A	18C	19C	20D
21D	22C	23D	24B	25D	26C	27B	28A	29B	30C
31B	32B	33B	34C	35D	36C	37D	38B	39B	40A
41B	42D	43A	44A	45A	46A	47B	48C	49B	50B

1D. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

1B	2B	3A	4B	5B	6A	7D	8D	9C	10C
11A	12B	13B	14B	15B	16B	17D	18C	19B	20C
21B	22B	23B	24B	25C	26B	27B	28B	29C	30D
31D	32B	33C	34C	35D	36D	37B	38A	39D	

1E. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1C	2D	3C	4C	5B	6B	7D	8C	9A	10B
11A	12D	13A	14B	15C	16C	17A	18C	19C	

1F. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO

1C	2B	3B	4D	5C	6A	7A	8C	9D	10D
11D	12D	13C	14C	15A	16B	17A	18D	19A	20C
21A	22D	23B	24A	25B	26A	27B	28B	29C	30C
31B	32A	33A	34D	35A	36D	37A	38B	39B	40A
41A	42B	43D	44B	45B	46C	47A	48C	49A	50A
51A	52B	53A	54A						

1G. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1C	2B	3C	4B	5C	6B	7A	8C	9C	10B
11A	12D	13A	14D	15D	16A	17A	18A		

3A. NGUYÊN HÀM

1A	2A	3D	4C	5A	6C	7A	8A	9D	10B
11B	12C	13D	14A	15B	16A	17C	18C	19C	20C
21C	22A	23B	24A	25D	26D	27B	28A	29C	30C
31B	32B	33A	34B	35D	36D	37A	38A	39A	40B
41A	42C	43C	44B	45D	46B	47B	48B	49A	50D
51B	52B	53B	54A	55D	56A	57C	58D	59A	60D
61B	62D	63B	64D	65B	66B	67B	68B		

3B. TÍCH PHẦN

1B	2A	3D	4B	5A	6B	7B	8A	9A	10B
11D	12A	13A	14C	15D	16A	17C	18C	19C	20D
21A	22D	23C	24C	25C	26A	27C	28D	29C	30A
31C	32A	33C	34B	35B	36A	37A	38B	39A	40C
41B	42B	43B	44D	45C	46D	47D	48C	49A	50C
51D	52D	53D	54C	55D	56B	57A	58C	59C	60A
61B	62C	63D	64A	65D	66D	67A	68D	69C	70B
71A	72B	73D	74B	75A	76C	77B	78A	79C	80C
81A									

3C. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1C	2B	3D	4B	5A	6C	7B	8B	9D	10C
11C	12A	13D	14B	15D	16C	17A	18B	19C	20A
21A	22B	23A	24B						

3D. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

1C	2A	3B	4C	5A	6C	7A	8D	9C	10C
11B	12C	13C	14A	15D	16A	17B	18A	19B	20A
21B	22C	23D	24D	25A	26D	27B	28A	29C	30C

4A. TÍNH TOÁN VỚI SỐ PHỨC

1C	2A	3A	4A	5B	6A	7D	8A	9B	10C
11C	12B	13B	14A	15A	16A	17C	18A	19A	20A
21D	22D	23D	24D	25D	26B	27D	28B	29A	30C
31B	32B	33D	34C	35D	36A	37D	38C	39B	40A

41A	42A	43B	44B	45A	46B	47A	48C	49C	50C
51D	52A	53B	54C	55A	56A	57D	58C	59C	60C
61A	62C	63C	64B	65C	66B	67D	68B	69A	70B
71D	72B	73A	74A	75A	76C	77D	78A	79A	80D

81A	82B	83A	84A	85D	86A	87A	88C	89C	90A
91C	92B	93A	94C	95C	96A	97D	98A	99A	100C
101A	102A	103A	104C	105C	106A	107C	108D	109C	110A
111D	112A	113A	114D	115A	116A	117A	118C	119A	120A

121A	122A	123A	124B	125B	126C	127D	128B	129C	130C
131C	132C								

4B. TẬP HỢP ĐIỂM – BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

1B	2A	3A	4A	5B	6A	7D	8B	9B	10D
11D	12A	13B	14B	15A	16B	17D	18B	19A	20B
21D	22A	23D	24B	25D	26C	27C	28D	29C	30A
31A	32A	33A	34D	35D	36C	37B	38B	39B	40C
41C	42B	43C	44D	45A	46C	47A	48A	49D	50D
51A	52B	53C	54A						

4C. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM PHỨC

1A	2C	3D	4D	5A	6A	7C	8A	9A	10D
11A	12A	13A	14A	15A	16A	17B	18B	19A	20C
21A	22C	23C	24A	25B	26C	27A	28A	29A	30B
31A	32A	33A	34C	35B	36C	37A	38A	39A	40A
41C	42D	43B	44D	45A	46B	47C	48A	49C	50C
51B	52B								

5A. BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH & GÓC

1D	2C	3A	4B	5B	6A	7D	8A	9A	10B
11B	12A	13D	14D	15A	16A	17C	18B	19D	20A
21A	22A	23D							

5B. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1B	2A	3B	4C	5B	6C	7B	8B	9D	10C
11C	12B	13B	14A	15C	16C	17D	18D	19B	20D
21D	22D	23C	24A	25C	26D	27A	28C	29A	30A
31A	32B	33B	34A	35A	36A	37C	38D	39C	40C
41C	42C	43C	44C	45B	46B	47B	48C	49D	50D
51A	52D	53A	54C	55B	56B	57A	58C	59D	60A
61A	62C	63B	64D	65B	66A	67C	68A	69A	70A
71D	72C	73D	74B	75B	76B	77D	78D		

5C. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

1A	2A	3B	4A	5C	6B	7B	8A	9B	10C
11C	12A	13B	14D	15A	16A	17B	18C	19A	20C
21D	22C	23B	24D	25C	26C	27B	28B	29D	30A
31C	32A	33C	34A	35D	36D	37A	38D	39C	40B
41A	42A								

6A. MẶT NÓN

1A	2B	3A	4B	5D	6B	7D	8A	9D	10B
11D	12B	13A	14C	15C	16D	17A	18A	19B	20C
21C	22B	23A	24D	25A	26D	27A	28B	29B	30A
31C	32D	33D	34B	35A	36A	37B	38A	39B	40A
41C	42B	43B	44A	45C	46C	47D	48A	49A	50D
51B	52B	53C	54B	55A	56D	57C			

6B. MẶT TRỤ

1C	2B	3B	4D	5A	6A	7C	8A	9A	10D
11B	12A	13B	14A	15B	16B	17C	18B	19A	20B
21B	22D	23A	24D	25B	26A	27A	28C	29B	30C
31B	32D	33A	34A	35C	36A	37B	38D	39A	40C
41A	42A	43B	44D	45A	46C	47C	48A	49A	50C
51B	52B	53A	54A	55A	56A	57B	58A	59B	60A
61C	62C	63B	64C	65B	66A	67A			

6C. MẶT CẦU

1A	2A	3B	4A	5C	6B	7B	8A	9B	10C
11C	12A	13B	14D	15A	16A	17B	18C	19A	20C
21D	22C	23B	24D	25C	26C	27B	28B	29D	30A
31C	32A	33C	34A	35D	36D	37A	38D	39C	40B
41A	42A								

7A. TỌA ĐỘ ĐIỂM – VECTO

1C	2A	3C	4A	5D	6D	7A	8C	9A	10B
11A	12A	13A	14D	15B	16C	17A	18A	19C	20A
21D	22A								

7B. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1B	2A	3A	4B	5C	6A	7A	8C	9C	10B
11A	12A	13B	14A	15A	16A	17D	18D	19C	20C
21D	22B	23D	24A	25A	26A	27B	28B	29A	30C
31A	32A	33A	34D	35B					

7C. MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

1B	2C	3D	4A	5B	6A	7D	8A	9B	10D
11C	12D	13A	14D	15C	16C	17A	18A	19A	20B
21A	22C	23D	24A	25B	26C	27A	28C	29A	30C
31C	32A	33C	34D	35C	36A	37A	38B	39D	40A
41A	42C	43C	44A	45D	46D	47A	48D	49A	50A
51C	52A	53A	54A	55A	56A	57C	58C	59C	60D
61A	62A	63A	64B	65A	66D	67C	68A	69A	70A
71B	72C	73A	74D	75C	76A	77B	78A	79D	80A
81B	82A	83A	84B	85B	86B	87D	88A	89A	90B
91A	92D	93B	94B						

7D. MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

1A	2A	3A	4D	5A	6A	7A	8A	9D	10C
11A	12B	13B	14A	15B	16B	17B	18D	19A	20A
21A	22D	23C	24D	25A	26D	27C	28D	29B	30A
31A	32C	33B	34D	35D	36B	37B	38D	39A	40C
41A	42C	43A	44D	45C	46A	47C	48C		

7E. KHOẢNG CÁCH – GÓC – HÌNH CHIẾU

1A	2A	3B	4B	5B	6B	7B	8C	9A	10B
11A	12B	13B	14A	15D	16B	17A	18C	19B	20C
21A	22B	23B	24D	25C	26A	27B	28D	29D	30B

8A. TOÁN THỰC TẾ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

01A	02A	03A	04C	05A	06A	07A	08B	09A	10A
11B	12D	13C	14C	15B	16A	17C	18C	19B	20C
21A	22A	23A	24A	25A	26A	27D	28C	29A	30B
31A	32C	33D	34B	35A					

8B. TOÁN THỰC TẾ: LŨY THỪA - MŨ – LOGARIT

01A	02C	03B	04A	05C	06D	07A	08B	09A	10A
11D	12B	13C	14A	15C	16C	17B	18D	19A	20B
21D	22A	23A	24B	25B	26B	27C	28D	29A	30A

31A	32A	33C	34A	35A	36D	37A	38B	39B	40D
41D	42A	43A	44D	45A	46A	47A	48B	49A	50B
51A	52A	53A	54A	55C	56A	57B	58C	59A	60A
61A	62D	63A	64C	65A	66B				

8C. TOÁN THỰC TẾ: TÍCH PHÂN

01B	02D	03B	04A	05B	06B	07B	08D	09C	10B
11D	12A	13D	14C	15A	16D	17A	18B	19D	20A
21A	22C	23A							

8D. TOÁN THỰC TẾ: NÓN - TRỤ - CẦU

01C	02C	03B	04C	05A	06D	07A	08A	09C	10D
11D	12C	13D	14C	15C	16A	17C	18A	19A	20A
21A	22A	23A	24C						

8E. TOÁN THỰC TẾ: TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

01A	02C	03B	04B	05A	06D	07A	08D	09C	10C
11A	12A	13D	14A	15D	16A	17C	18C	19D	