

BÀI 1. LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm lũy thừa

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương, a là một số thực tùy ý. **Lũy thừa** bậc n của a là tích của n thừa số a .

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số } a}; a^1 = a$$

Trong biểu thức a^n , a được gọi là **cơ số**, số nguyên n là **số mũ**

Với $a \neq 0$, $n=0$ hoặc n là một số nguyên âm, lũy thừa bậc n của số a là số a^n xác định bởi: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Chú ý:

□ Kí hiệu 0^0 , 0^n (n nguyên âm) không có nghĩa.

□ Với $a \neq 0$ và n nguyên, ta có $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

2. Phương trình $x^n = b$

a) Trường hợp n lẻ: Với mọi số thực b , phương trình có nghiệm duy nhất

b) Trường hợp n chẵn

- Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm
- Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$
- Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau

3. Căn bậc n

a) **Khái niệm:** Với n nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.

Ta thừa nhận hai khẳng định sau:

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n . Căn đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là căn bậc số học của a) và $-\sqrt[n]{a}$.

b) **Tính chất căn bậc n :** Với $a, b \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0);$$

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0); \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0)$; Đặc biệt $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & (n \text{ lẻ}) \\ |a|, & (n \text{ chẵn}) \end{cases}$$

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và r là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên, còn n là

một số nguyên dương. Khi đó, lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ: (SGK)

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Cho a, b là những số dương; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Nếu $a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Các phép toán biến đổi lũy thừa

1. Phương pháp:

Ta cần nắm các công thức biến đổi lũy thừa sau:

- Với $a \neq 0; b \neq 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ta có

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

- Với $a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0); \quad \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0);$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0); \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$$

Công thức đặc biệt

$$f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} \text{ thì } f(x) + f(1-x) = 1.$$

Thật vậy, ta có:

$$f(1-x) = \frac{\frac{a}{a^x}}{\frac{a}{a^x} + \sqrt{a}} = \frac{a}{a + \sqrt{a} \cdot a^x} \Rightarrow f(1-x) = \frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}}$$

$$\text{Nên: } f(x) + f(1-x) = 1.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Viết biểu thức $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{16^{0,75}}$ về dạng lũy thừa 2^m ta được $m = ?$.

A. $-\frac{13}{6}$.

B. $\frac{13}{6}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $-\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\frac{\sqrt{2^3 \sqrt{4}}}{16^{0,75}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2^2}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{2^3} = 2^{\frac{-13}{6}}.$$

Bài tập 2. Cho $x > 0; y > 0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}}$ về dạng y^n . Ta có $m - n = ?$

A. $-\frac{11}{6}$

B. $\frac{11}{6}$

C. $\frac{8}{5}$

D. $-\frac{8}{5}$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{103}{60}} \Rightarrow m = \frac{103}{60}$$

$$y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}} = y^{\frac{4}{5}} : \left(y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{1}{12}} \right) = y^{-\frac{7}{60}} \Rightarrow n = -\frac{7}{60} \Rightarrow m - n = \frac{11}{6}$$

Bài tập 3. Biết $4^x + 4^{-x} = 23$ tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$:

A. 5.

B. $\sqrt{27}$.

C. $\sqrt{23}$.

D. 25.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\text{Do } 2^x + 2^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Nên } 2^x + 2^{-x} = \sqrt{(2^x + 2^{-x})^2} = \sqrt{2^{2x} + 2 + 2^{-2x}} = \sqrt{4^x + 4^{-x} + 2} = \sqrt{23 + 2} = 5.$$

Bài tập 4. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 2}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{(a^{\frac{1}{2}} + 1)}{a^{\frac{1}{2}}}$, ($a > 0, a \neq \pm 1$), có

dạng $P = \frac{m}{a + n}$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là:

A. $m + 3n = -1$.

B. $m + n = -2$.

C. $m - n = 0$.

D. $2m - n = 5$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 2}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{(a^{\frac{1}{2}} + 1)}{a^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} - 1} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{a - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } m = 2; n = -1.$$

thừa với số mũ hữu tỉ có dạng $x^{\frac{a}{b}}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, biểu thức liên hệ giữa a và b là:

- A.** $a + b = 509$. **B.** $a + 2b = 767$. **C.** $2a + b = 709$. **D.** $3a - b = 510$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{3}{2}} \\
& = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{7}{4}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{7}{8}} \\
& = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{15}{8}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{15}{16}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{31}{16}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{31}{32}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{63}{32}} \\
& = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{63}{64}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{127}{64}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{127}{128}} = \sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{255}{128}} = \sqrt{x}^{\frac{255}{128}} = x^{\frac{255}{256}}. \text{ Do đó } a = 255, b = 256.
\end{aligned}$$

Nhận xét: $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}}}} = x^{\frac{2^8-1}{2^8}} = x^{\frac{255}{256}}$.

Bài tập 6. Cho $a > 0$; $b > 0$. Viết biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ về dạng a^m và biểu thức $b^{\frac{2}{3}}:\sqrt{b}$ về dạng b^n . Ta có $m+n=?$

- A.** $\frac{1}{3}$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}\Rightarrow m=\frac{5}{6}; b^{\frac{2}{3}}:\sqrt{b}=b^{\frac{2}{3}}:b^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{6}}\Rightarrow n=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow m + n = 1$$

Bài tập 7. Viết biểu thức $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}}$ về dạng 2^x và biểu thức $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ về dạng 2^y . Ta có $x^2 + y^2 = ?$

- A.** $\frac{2017}{567}$ **B.** $\frac{11}{6}$ **C.** $\frac{53}{24}$ **D.** $\frac{2017}{576}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2^3}} = 2^{\frac{3}{8}} \Rightarrow x = \frac{3}{8}; \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{11}{6}} \Rightarrow y = \frac{11}{6} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{53}{24}$

Bài tập 8. Cho $a = 1 + 2^{-x}$, $b = 1 + 2^x$. Biểu thức biểu diễn b theo a là:

- A. $\frac{a-2}{a-1}$. B. $\frac{a-1}{a}$. C. $\frac{a+2}{a-1}$. D. $\frac{a}{a-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $a = 1 + 2^{-x} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $2^x = \frac{1}{a-1}$

Do đó: $b = 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a-1}$.

Bài tập 9. Cho các số thực dương a và b . Biểu thức thu gọn của biểu thức

$P = \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right)$ có dạng là $P = xa + yb$. Tính $x + y$?

- A. $x + y = 97$. B. $x + y = -65$. C. $x - y = 56$. D. $y - x = -97$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\left(2a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(3b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \left(4a^{\frac{1}{2}} - 9b^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(4a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(9b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16a - 81b. \end{aligned}$$

Do đó: $x = 16, y = -81$.

Bài tập 10. Cho các số thực dương phân biệt a và b . Biểu thức thu gọn của biểu thức

$P = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$ có dạng $P = m\sqrt[4]{a} + n\sqrt[4]{b}$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là:

- A. $2m - n = -3$. B. $m + n = -2$. C. $m - n = 0$. D. $m + 3n = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} \\ &= \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{2\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - 2\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}. \end{aligned}$$

Do đó $m = -1; n = 1$.

Bài tập 11: Cho $f(x) = \frac{2018^x}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Tính giá trị biểu thức sau đây ta được

$$S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

- A. $S = 2018$. B. $S = 2019$. C. $S = 1009$. D. $S = \sqrt{2018}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f(1-x) = \frac{\sqrt{2018}}{2018^x + \sqrt{2018}} \Rightarrow f(x) + f(1-x) = 1$

Suy ra $S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right) = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) +$
 $+ f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right) = 1009.$

Bài tập 12: Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$ ta được

- A. -2. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $9^x + 9^{-x} = 23 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{-x} = 5 \\ 3^x + 3^{-x} = -5 \text{ (loại)} \end{cases}$

Từ đó, thế vào $P = \frac{5+(3^x+3^{-x})}{1-(3^x+3^{-x})} = \frac{5+5}{1-5} = -\frac{5}{2}.$

Dạng 2: So sánh, đẳng thức và bất đẳng thức đơn giản

1. Phương pháp

Ta cần lưu ý các tính chất sau

Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Khi đó

- $a > 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta;$
- $0 < a < 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Với $0 < a < b, m \in \mathbb{Z}$ ta có:

- $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0;$ $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$
- Với $a < b, n$ là số tự nhiên lẻ thì $a^n < b^n$
- Với a, b là những số dương, n là một số nguyên dương khác không $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$

Chú ý: Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Với giá trị nào của a thì đẳng thức $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}$ đúng?

A. $a = 1$.

B. $a = 2$.

C. $a = 0$.

D. $a = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \left[a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{17}{24}} \rightarrow \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} \Leftrightarrow a = 2. \\ \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} = 2^{\frac{5}{24}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{17}{24}} \end{cases}$$

Bài tập 2. Cho số thực $a \neq 0$. Với giá trị nào của x thì đẳng thức $\frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) = 1$ đúng?

A. $x = 1$.

B. $x = 0$.

C. $x = a$.

D. $x = \frac{1}{a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) = 1 &\Leftrightarrow a^x + \frac{1}{a^x} = 2 \Leftrightarrow (a^x)^2 - 2a^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Bài tập 3. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$.

A. $a = 0$.

B. $a < 0$.

C. $a > 1$.

D. $0 < a < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}} > a^{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}} > a^{\frac{6}{15}} \longrightarrow a > 1.$$

Bài tập 4. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $(a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $a > 2$.

B. $a > 1$.

C. $1 < a < 2$.

D. $0 < a < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}, \text{ kết hợp với } (a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}. \text{ Suy ra hàm số đặc trưng } y = (a-1)^x \\ \text{đồng biến } \longrightarrow \text{ cơ số } a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2. \end{aligned}$$

Bài tập 5. Nếu $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{2}} > b^{\sqrt{3}}$. Tìm mỗi các điều kiện của đáp án a và b

A. $a < 1; 0 < b < 1$.

B. $a > 1; b < 1$.

C. $0 < a < 1; b < 1$.

D. $a > 1; 0 < b < 1$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Vì } \begin{cases} \frac{1}{2} > \frac{1}{6} \\ a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{6}} \end{cases} \Rightarrow a > 1 \text{ và } \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ b^{\sqrt{2}} > b^{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 < b < 1$$

Bài tập 6. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}$

A. $a > 2$.

B. $a > 0$.

C. $a > 1$.

D. $1 < a < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}$ và số mũ không nguyên nên $(a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}$ khi $a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2$.

Bài tập 7. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$

A. $\begin{cases} -\frac{1}{2} < a < 0 \\ a < -1 \end{cases}$.

B. $-\frac{1}{2} < a < 0$.

C. $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a < -1 \end{cases}$.

D. $a < -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $-3 < -1$ và số mũ nguyên âm nên $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$ khi

$$\begin{cases} 0 < 2a+1 < 1 \\ 2a+1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < a < 0 \\ a < -1 \end{cases}.$$

Bài tập 8. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2$

A. $0 < a < 1$.

B. $a > 0$.

C. $a > 1$.

D. $a < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2 \Leftrightarrow a^{0,2} < a^2$$

Do $0,2 < 2$ và có số mũ không nguyên nên $a^{0,2} < a^2$ khi $a > 1$.

HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm hàm lũy thừa

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Chú ý: Tập xác định của hàm số lũy thừa phụ thuộc vào giá trị của α

- Với α nguyên dương thì tập xác định là $\mathbb{R}$
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Với α không nguyên thì tập xác định là $(0; +\infty)$

Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x > 0$. Do đó, hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x} (n \in \mathbb{N}^*)$. Bài tập $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc 3, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$; còn hàm số lũy thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định khi $x > 0$

2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

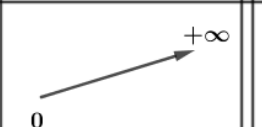
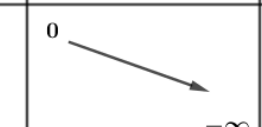
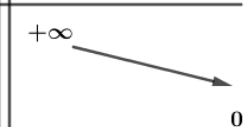
$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= \alpha \cdot x^{\alpha-1} \text{ với } x > 0; \quad (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u', \text{ với } u > 0 \\ (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \text{ với mọi } x > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn, với mọi } x \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \\ (\sqrt[n]{u})' &= \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \text{ với mọi } u > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn, với mọi } u \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ}\end{aligned}$$

3. Khảo sát hàm số lũy thừa

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

$\alpha \in \mathbb{N}^*$	
$\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}^*$	$\alpha = 2n+1, n \in \mathbb{N}$
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.	Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
Sự biến thiên:	Sự biến thiên:
$y = x^{2n} \Rightarrow y' = 2n \cdot x^{2n-1}$	$y = x^{2n+1} \Rightarrow y' = (2n+1) \cdot x^{2n} \Rightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in D$
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$.	$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D .
Bảng biến thiên	Bảng biến thiên

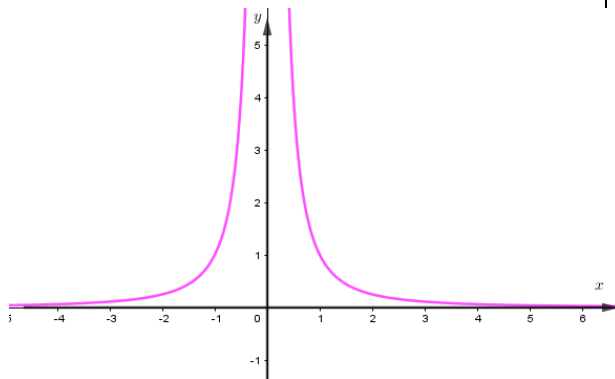
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table> Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. Đồ thị:	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'	$-$	0	$+$	y	$+\infty$	0	$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table> Đồ thị:	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'	$+$	0	$+$	y	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$																						
y'	$-$	0	$+$																						
y	$+\infty$	0	$+\infty$																						
x	$-\infty$	0	$+\infty$																						
y'	$+$	0	$+$																						
y	$-\infty$	0	$+\infty$																						
$\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$																									
$\alpha = 2k, k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$\alpha = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$																								
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sự biến thiên: $y = x^{2n} \Rightarrow y' = 2n.x^{2n-1}$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là TCN.}$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ là TCD.}$ Bảng biến thiên	Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sự biến thiên: $y = x^{2k+1} \Rightarrow y' = (2k + 1).x^{2k} \Rightarrow y' < 0 \quad \forall x \in D$ $\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên D. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là TCN.}$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ là TCD.}$ Bảng biến thiên																								

x	$-\infty$	0	$+\infty$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		-	y'	-		-
y				y			

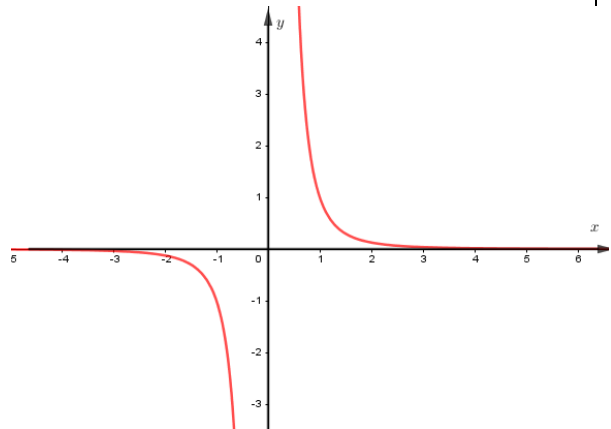
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đồ thị:



Đồ thị:



$\alpha \notin \mathbb{Z}$

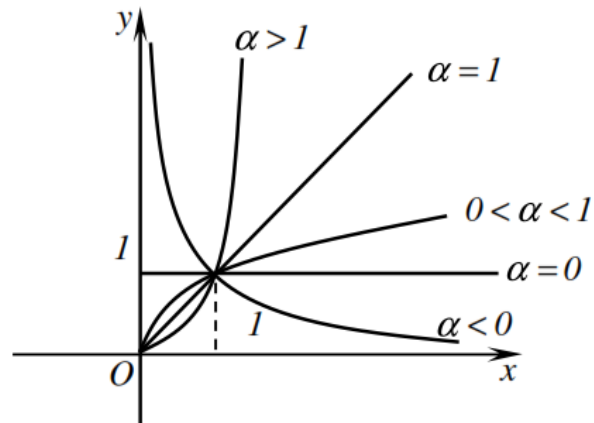
Trong giới hạn chương trình ta chỉ khảo sát trên $(0; +\infty)$.

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Tập khảo sát: $D = (0; +\infty)$. Sự biến thiên: $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$. $\Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận. Bảng biến thiên	Tập khảo sát: $D = (0; +\infty)$. Sự biến thiên: $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0 \Rightarrow$ TCN: $y = 0$. Bảng biến thiên

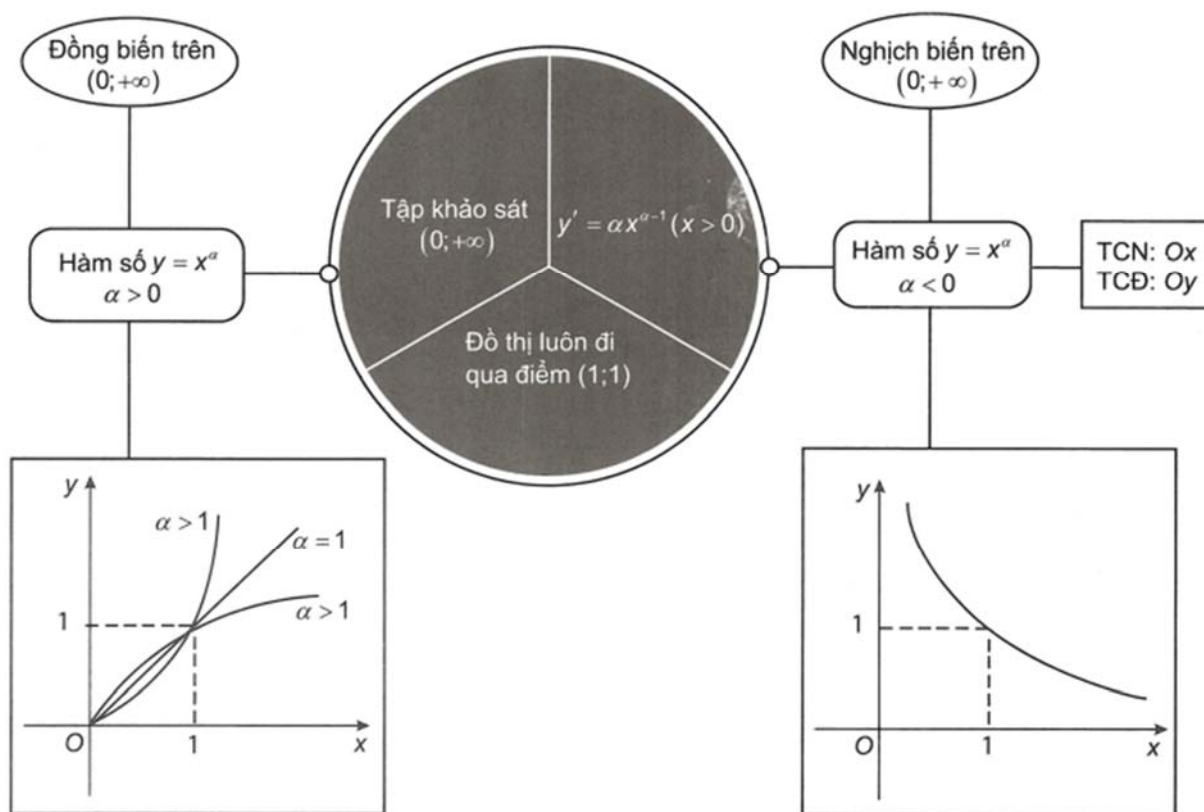
x	0	$+\infty$
y'		+
y	0	$+\infty$

x	0	$+\infty$
y'		-
y	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(1;1)$.



HÀM SỐ LŨY THỪA



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

1. Phương pháp giải

Ta tìm điều kiện xác định của hàm số $y = [f(x)]^\alpha$, dựa vào số mũ α của nó như sau:

- Nếu α là số nguyên dương thì không có điều kiện xác định của $f(x)$.
- Nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0 thì điều kiện xác định là $f(x) \neq 0$.
- Nếu α là số không nguyên thì điều kiện xác định là $f(x) > 0$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (x^2 + m)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. mọi giá trị m . B. $m \neq 0$. C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Để hàm số $y = (x^2 + m)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $x^2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{4-x^2} + 3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + x + 1$.

A. $D = [-2; 2]$.

B. $D = [-2; 2] \setminus \{1\}$.

C. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

D. $D = (-2; 2) \setminus \{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-2; 2] \setminus \{1\}$.

Bài tập 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x-2)^{\sqrt{5}} + (x^2-9)^{\frac{3}{5}} + x^2 - 5x - 2$.

A. $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

B. $D = (2; +\infty)$.

C. $D = (3; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \begin{cases} x < -3 \\ x > 3 \end{cases} \\ x > 3 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (3; +\infty)$.

Bài tập 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 5x + 4)^{\sqrt{2}-3} - \sqrt{x^2 + 3x + 7} + x^{-3} + x^2 - 2x + 1$.

A. $D = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty) \setminus \{0\}$.

B. $D = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

C. $D = (1; 4)$.

D. $D = [1; 4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases} \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty) \setminus \{0\}$.

Bài tập 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2018; 2018)$ để hàm số $y = (x^2 - 2x - m + 1)^{\sqrt{5}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A. 4036. B. 2018. C. 2017. D. Vô số

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì số mũ $\sqrt{5}$ không phải là số nguyên nên hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \text{ (luôn đúng vì } a = 1 > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - (-m + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 0$$

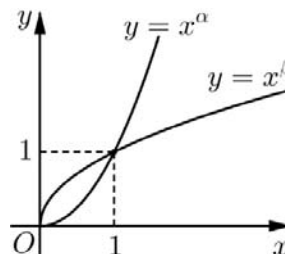
$$\text{Mà } \begin{cases} m \in (-2018; 2018) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, \dots, 2017\}.$$

Vậy có 2017 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Dạng 2: Đồ thị hàm số lũy thừa

Bài tập 1. Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên $(0; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < \beta < \alpha < 1$.
B. $\alpha < 0 < \beta < 1$.
C. $0 < \beta < 1 < \alpha$.
D. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số

- $y = x^\alpha$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nằm trên đường thẳng $y = x$ nên $\alpha > 1$.
- $y = x^\beta$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nằm dưới đường thẳng $y = x$ nên $0 < \beta < 1$.

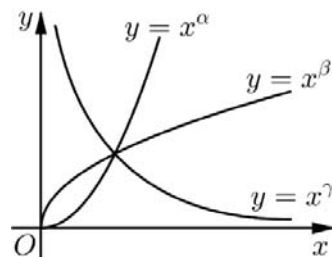
Vậy $0 < \beta < 1 < \alpha$.

Bài tập 2. Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ trên $(0; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\gamma < \alpha < \beta$.
B. $\beta < \gamma < \alpha$.

C. $\alpha < \gamma < \beta$.

D. $\gamma < \beta < \alpha$.



Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số

- $y = x^\gamma$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên $\gamma < 0$.
- như câu trên ta có $0 < \beta < 1 < \alpha$. Vậy $\gamma < 0 < \beta < 1 < \alpha$.

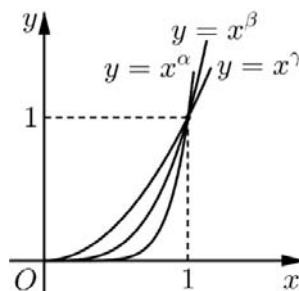
Bài tập 3. Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ trên $(0; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\gamma < \beta < \alpha < 0$.

B. $0 < \gamma < \beta < \alpha < 1$.

C. $1 < \gamma < \beta < \alpha$.

D. $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Dựa vào đồ thị, ta có

- Với $0 < x < 1$ thì

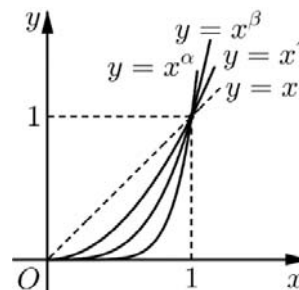
$$x^\alpha < x^\beta < x^\gamma < x^1 \longrightarrow \alpha > \beta > \gamma > 1.$$

- Với $x > 1$ thì

$$x^1 < x^\gamma < x^\beta < x^\alpha \longrightarrow 1 < \gamma < \beta < \alpha.$$

Vậy với mọi $x > 0$, ta có $\alpha > \beta > \gamma > 1$.

Nhận xét. Ở đây là so sánh với đường $y = x = x^1$.



Bài tập 4. Cho hàm số $y = (x-1)^{-\frac{1}{4}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$.

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Cho các khẳng định sau:

- i) Hàm số xác định với mọi x .
- ii) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$.
- iii) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- iv) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có khẳng định ii) và iv) là đúng.

- i) sai vì hàm số đã cho xác định khi $x > 0$.
 - iii) sai vì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
-

BÀI 3. LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm lôgarit

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b , và ký hiệu là $\log_a b$.

Nhận xét: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$ ($a, b > 0, a \neq 1$)

Bài tập: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

Chú ý: Không có lôgarit của số âm và số 0.

2. Tính chất

Cho $a, b > 0, a \neq 1$. Ta có:

$$\begin{array}{ll} \log_a a = 0; & \log_a a = 1 \\ a^{\log_a b} = b; & \log_a (a^\alpha) = \alpha \end{array}$$

3. Quy tắc tính lôgarit

a. Lôgarit của một tích

Cho $a, b_1, b_2 > 0$ với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Chú ý: Định lý trên có thể mở rộng cho tích của n số dương:

$$\log_a (b_1 \dots b_n) = \log_a b_1 + \dots + \log_a b_n$$

trong đó $a, b_1, b_2, \dots, b_n > 0, a \neq 1$.

b. Lôgarit của một thương

Cho $a, b_1, b_2 > 0$ với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Đặc biệt: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ ($a > 0, b > 0$).

c. Lôgarit của một lũy thừa

Bài tập:

$$\bullet \log_\pi \frac{1}{2} + \log_\pi 2 = \log_\pi \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \log_\pi 1 = 0;$$

$$\begin{aligned} \bullet \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \dots + \log_3 \frac{7}{8} + \log_3 \frac{8}{9} \\ = \log_3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \right) \end{aligned}$$

$$= \log_3 \frac{1}{9} = -2.$$

Bài tập:

$$\bullet \log_5 \frac{125}{25} = \log_5 125 - \log_5 25 = 3 - 2 = 1;$$

$$\bullet \log_7 \frac{1}{49} = -\log_7 49 = -2.$$

Bài tập:

Cho hai số dương a, b , $a \neq 1$. Với mọi α , ta có:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

4. Đổi cơ số

Cho $a, b, c > 0; a \neq 1; c \neq 1$, ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Đặc biệt:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1);$$

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \quad (\alpha \neq 0).$$

$$\bullet \log_2 8^3 = 3 \log_2 8 = 3.3 = 9;$$

$$\bullet \log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4}.3 = \frac{3}{4}.$$

Bài tập:

$$\bullet \log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3};$$

$$\bullet \log_3 27 = \frac{1}{\log_{27} 3} = 3;$$

$$\bullet \log_{128} 2 = \log_{2^7} 2 = \frac{1}{7} \log_2 2 = \frac{1}{7}.$$

5. Lôgarit thập phân – lôgarit tự nhiên

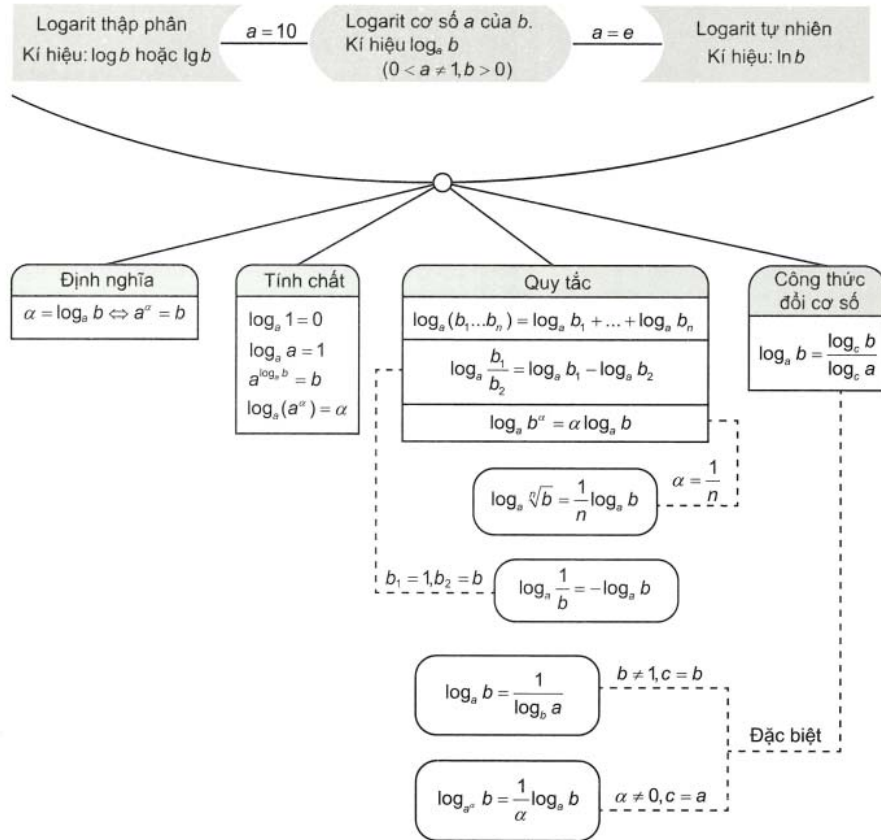
a. Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Với $b > 0$, $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

b. Lôgarit tự nhiên

Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e . Với $b > 0$, $\log_e b$ được viết là $\ln b$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính giá trị của biểu thức không có điều kiện. Rút gọn biểu thức.

1. Phương pháp giải

Để tính $\log_a b$ ta có thể biến đổi theo một trong các cách **Bài tập:**

sau:

- $b = a^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a b = \log_a a^\alpha = \alpha$;

- $\log_{32} 128 = \log_{2^5} 2^7 = \frac{7}{5}$;

- $a = b^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a b = \log_{b^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}$;

- $32^{\log_2 9} = 2^{5 \log_2 9} = 9^5$.

- $a = c^\alpha$, $b = c^\beta$, từ đó ta suy ra

$$\log_a b = \log_{c^\alpha} c^\beta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

- Để tính $b^{\log_a c}$, ta biến đổi $b = a^\alpha$, từ đó suy ra

$$b^{\log_a c} = a^{\alpha \log_a c} = c^\alpha$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho $a, b, c, d > 0$. Rút gọn biểu thức $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a}$ ta được

A. $S = 1$.

B. $S = 0$.

C. $S = \ln \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right)$.

D. $S = \ln(abcd)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} \right) = \ln 1 = 0$.

Bài tập 2: Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ bằng

A. 6

B. 24

C. 12.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = \log_{\frac{1}{a^2}} b^3 \cdot \log_b a^4 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot \log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} = 24$.

Bài tập 3: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Biến đổi biểu

thức $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được

A. $P = -5 + 3\sqrt{3}$.

B. $P = -1 + \sqrt{3}$.

C. $P = -1 - \sqrt{3}$.

D. $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có:

$$P = \frac{\log_a \sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\frac{1}{2}(\log_a b - 1)}{\log_a \sqrt{b} - 1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Bài tập 4 : Biến đổi biểu thức $P = \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ (với $0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1$)

ta được

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Sử dụng các quy tắc biến đổi lôgarit ta có:

$$\begin{aligned} P &= \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2} \\ &= \frac{1}{2} [\log_a a^{10} + \log_a b^2] + 2 [\log_a a - \log_a \sqrt{b}] + 3 \cdot (-2) \log_b b \\ &= \frac{1}{2} [10 + 2 \log_a b] + 2 \left[1 - \frac{1}{2} \log_a b \right] - 6 = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 5. Rút gọn biểu thức $P = (\log_b^3 a + 2 \log_b^2 a + \log_b a)(\log_a b - \log_{ab} b) - \log_b a$ với $0 < a, b \neq 1$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 0$. D. $P = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= (\log_b^3 a + 2 \log_b^2 a + \log_b a)(\log_a b - \log_{ab} b) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b^2 a + 2 \log_b a + 1) \left(\log_a b - \frac{1}{\log_b ab} \right) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b a + 1)^2 \left(\log_a b - \frac{1}{\log_b a + 1} \right) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b a + 1)^2 \left(\frac{\log_a b (\log_b a + 1) - 1}{\log_b a + 1} \right) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b a + 1) (\log_a b \log_b a + \log_a b - 1) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b a + 1) \log_a b - \log_b a \\ &= \log_b a + 1 - \log_b a = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 6. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1} (4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng:

A. $\frac{15}{4}$.

B. 5.

C. 4.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Ta có $4a^2 + b^2 \geq 4ab$, với mọi $a, b > 0$. Dấu '=' xảy ra khi $b = 2a$ (1).

Khi đó

$$2 = \log_{2a+2b+1} (4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1)$$

$$\geq \log_{2a+2b+1} (4ab + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\log_{2a+2b+1} (4ab + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1) \geq 2$.

Dấu '=' xảy ra khi $\log_{2a+2b+1} (4ab + 1) = 1 \Leftrightarrow 4ab + 1 = 2a + 2b + 1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $8a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$. Suy ra $b = \frac{3}{2}$. Vậy $a + 2b = \frac{15}{4}$.

Bài tập 7. Cho $a^{\log_3 7} = 27$, $b^{\log_7 11} = 49$, $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính

$$S = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}.$$

A. $S = 33$.

B. $S = 469$.

C. $S = 489$.

D. $S = 3141$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Ta có:

$$a^{\log_3 7} = 27 \Leftrightarrow \log_3 7 = \log_a 27 \Leftrightarrow \log_3 7 \cdot \log_3 7 = \log_a 27 \cdot \log_3 7$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 7)^2 = 3 \log_a 3 \cdot \log_3 7 \Leftrightarrow (\log_3 7)^2 = \log_a 7^3 \Rightarrow a^{(\log_3 7)^2} = a^{\log_a 7^3} = 7^3.$$

$$\text{Tương tự ta có } b^{\log_7 11} = 49 \Rightarrow b^{(\log_7 11)^2} = 11^2; b^{\log_{11} 25} = \sqrt{11} \Rightarrow c^{(\log_{11} 25)^2} = 5.$$

$$\text{Vậy } S = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2} = 7^3 + 11^2 + 5 = 469.$$

Bài tập 8. Đặt $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$, $Q = \log_7 \frac{1}{2} + \log_7 \frac{2}{3} + \dots + \log_7 \frac{2014}{2015} + \log_7 \frac{2015}{2016}$. Tính Q

theo a, b .

A. $5a + 2b - 1$.

B. $5a - 2b - 1$.

C. $5a + 2b + 1$.

D. $-5a - 2b - 1$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } Q = \log_7 \frac{1}{2} + \log_7 \frac{2}{3} + \dots + \log_7 \frac{2014}{2015} + \log_7 \frac{2015}{2016}$$

$$= (\log_7 1 - \log_7 2) + (\log_7 2 - \log_7 3) + \dots + (\log_7 2014 - \log_7 2015) + (\log_7 2015 - \log_7 2016)$$

$$= \log_7 1 - \log_7 2016 = -\log_7 2016 = -(\log_7 32 \cdot 9 \cdot 7) = -(\log_7 32 + \log_7 9 + \log_7 7)$$

$$= -(\log_7 2^5 + \log_7 3^2 + 1) = -5\log_7 2 - 2\log_7 3 - 1 = -5a - 2b - 1.$$

Bài tập 9. Cho hai số thực dương a, b ($a \neq 1$) thỏa mãn các điều kiện $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$.

Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 12$.

B. $S = 10$.

C. $S = 16$.

D. $S = 18$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \log_a b = \frac{b}{4} \\ \log_2 a = \frac{16}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^{\frac{b}{4}} \\ a = 2^{\frac{16}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \left(2^{\frac{16}{b}}\right)^{\frac{b}{4}} \\ a = 2^{\frac{16}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2^{\frac{16}{b} \cdot \frac{b}{4}} \\ a = 2^{\frac{16}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 16 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Vậy ta có $S = 16 + 2 = 18$.

Bài tập 10. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 20x + 2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log(x_1 + x_2) - \log x_1 - \log x_2$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 0.

D. 10.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } P = \log(x_1 + x_2) - \log x_1 - \log x_2 = \log(x_1 + x_2) - \log(x_1 \cdot x_2) = \log \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}.$$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 20x + 2 = 0$ nên ta có $x_1 + x_2 = 20$;
 $x_1 \cdot x_2 = 2$.

$$\text{Vậy ta có } P = \log \frac{20}{2} = 1.$$

Bài tập 11. Cho $M = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{16}} x}$. Tính M .

A. $M = \frac{272}{\log_a x}$.

B. $M = \frac{136}{\log_a x}$.

C. $M = \frac{1088}{\log_a x}$.

D. $M = \frac{272}{3 \log_a x}$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{16}} x} = \log_x a + \log_x a^2 + \dots + \log_x a^{16} \\ &= \log_x a + \log_x a^2 + \dots + \log_x a^{16} = \log_x a + 2 \log_x a + \dots + 16 \log_x a \\ &= (1 + 2 + \dots + 16) \log_x a = \frac{16(1+16)}{2} \log_x a = \frac{136}{\log_a x}. \end{aligned}$$

Bài tập 12. Với x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $x \log_{1512} 2 + y \log_{1512} 3 + z \log_{1512} 7 = 1$.
 Tính giá trị của biểu thức $Q = x + y + 3z$.

A. 1512.

B. 12.

C. 9.

D. 7.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Ta có

$$\begin{aligned} x \log_{1512} 2 + y \log_{1512} 3 + z \log_{1512} 7 = 1 &\Leftrightarrow \log_{1512} 2^x + \log_{1512} 3^y + \log_{1512} 7^z = \log_{1512} 1512 \\ &\Leftrightarrow \log_{1512} 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z = \log_{1512} 1512 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z = 1512 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } Q = 3 + 3 + 1 \cdot 3 = 9.$$

Bài tập 13. Giá trị biểu thức $P = \frac{1}{\log_2 2017!} + \frac{1}{\log_3 2017!} + \dots + \frac{1}{\log_{2017} 2017!}$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\log_2 2017!} + \frac{1}{\log_3 2017!} + \dots + \frac{1}{\log_{2017} 2017!} = \log_{2017!} 2 + \log_{2017!} 3 + \dots + \log_{2017!} 2017 \\ &= \log_{2017!} (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2017) = \log_{2017!} 2017! = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 14. Giả sử $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Giá trị của biểu thức

$\log \sin x + \log \cos x + \log \tan x$ là

- A. $-\frac{3}{\sqrt{10}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. C. $\frac{3}{10}$. D. -1 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}.$$

$$\text{Khi đó } \log \sin x + \log \cos x + \log \tan x = \log (\sin x \cdot \cos x \cdot \tan x) = \log \sin^2 x \log \frac{1}{10} = -1.$$

Bài tập 15. Cho $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \frac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số

nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

- A. $S = 4$. B. $S = 19$. C. $S = 10$. D. $S = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_{54} 168 &= \frac{\log_7 (24 \cdot 7)}{\log_7 54} = \frac{\log_7 24 + 1}{\log_7 54} = \frac{\log_7 12 \log_{12} 24 + 1}{\log_7 54} \\ &= \frac{\log_7 12 \log_{12} 24 + 1}{\log_7 12 \log_{12} 54} = \frac{xy + 1}{x \cdot \log_{12} 54} \end{aligned}$$

$$\text{Tính } \log_{12} 54 = \log_{12} (27 \cdot 2) = 3 \log_{12} 3 + \log_{12} 2 = 3 \log_{12} \frac{3 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 24}{2 \cdot 12 \cdot 24} + \log_{12} \frac{24}{12}.$$

$$= 3 \log_{12} \frac{12^3}{24^2} + \log_{12} \frac{24}{12} = 3(3 - 2 \log_{12} 24) + (\log_{12} 24 - 1) = 8 - 5 \log_{12} 24 = 8 - 5y.$$

$$\text{Do đó: } \log_{54} 168 = \frac{xy+1}{x(8-5y)} = \frac{xy+1}{-5xy+8x}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \Rightarrow S=a+2b+3c=15. \\ c=8 \end{cases}$$

Bài tập 16. Với a, b thỏa mãn để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ ax+b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x_0 = 1$. Khi đó

giá trị biểu thức $S = \log_2(3a+2b)$ bằng?

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = 3$.

D. $S = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 1$ suy ra:

$$+ \text{Hàm số liên tục tại } x_0 = 1: \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a+b=1 \quad (1).$$

$$+ \text{Tồn tại giới hạn } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax+b-1}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax+b-(a+b)}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$S = \log_2(3a+2b) = \log_2 4 = 2.$$

Dạng 2. Đẳng thức chứa logarit

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho $x, y > 0$ và $x^2 + 4y^2 = 12xy$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_2(x+2y) = \log_2 x + \log_2 y + 1$.

B. $\log_2\left(\frac{x+2y}{4}\right) = \log_2 x - \log_2 y$.

C. $\log_2(x+2y) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y).$

D. $4\log_2(x+2y) = \log_2 x + \log_2 y.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $x, y > 0$, ta có: $x^2 + 4y^2 = 12xy \Leftrightarrow (x+2y)^2 = 16xy$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y)^2 = \log_2 16xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x+2y) = 4 + \log_2 x + \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y).$$

Bài tập 2: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính

$$M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x+3y)}.$$

A. $M = \frac{1}{4}.$

B. $M = 1.$

C. $M = \frac{1}{2}.$

D. $M = \frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x-3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y.$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x+3y)} = \frac{1 + \log_{12} 3y + \log_{12} y}{2 \log_{12} 6y} = \frac{\log_{12} 12 + \log_{12} 3 + \log_{12} y + \log_{12} y}{2(\log_{12} 6 + \log_{12} y)} \\ &= \frac{\log_{12} 36 + 2 \log_{12} y}{\log_{12} 36 + 2 \log_{12} y} = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 3: Cho biểu thức $B = 3^{\log_3 a} - \log_5 a^2 \cdot \log_a 25$ với a là số dương, khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $B \geq 2a + 5.$

B. $\log_{a^2-4} B = 1.$

C. $B = a - 4.$

D. $B > 3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} B &= 3^{\log_3 a} - \log_5 a^2 \cdot \log_a 25 = a - 2 \log_5 a \cdot \log_a 25 = a - 2 \log_5 a \cdot \log_a 5^2 = a - 4 \log_5 a \cdot \log_a 5 \\ &= a - 4. \end{aligned}$$

Vậy $B = a - 4.$

Bài tập 4: Gọi c là cạnh huyền, a và b là hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

- A. $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$.
 B. $\log_{b+c} a + \log_{b-c} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{b-c} a$.
 C. $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$.
 D. $\log_{b+c} a + \log_{b-c} a = 4 \log_{b+c} a \cdot \log_{b-c} a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c^2 - b^2 = a^2 \Leftrightarrow (c+b) \cdot (c-b) = a^2 \Leftrightarrow \log_a (c+b) \cdot (c-b) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_a (b+c) + \log_a (c-b) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a (b+c)} + \frac{1}{\log_a (c-b)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a \text{ (đpcm).}$$

Bài tập 5: Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\log_{12} 35 = \frac{3b+2ac}{c+2}$.
 B. $\log_{12} 35 = \frac{3b+3ac}{c+2}$.
 C. $\log_{12} 35 = \frac{3b+2ac}{c+3}$.
 D. $\log_{12} 35 = \frac{3b+3ac}{c+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a ; \log_8 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b ; \log_2 3 = c$$

$$\log_{12} 35 = \frac{\log_3 5}{\log_3 12} = \frac{\log_3 5 + \log_3 7}{\log_3 3 + \log_3 4} = \frac{3a + \frac{\log_2 7}{\log_2 3}}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{3a + \frac{3b}{c}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3ac + 3b}{c + 2}.$$

Bài tập 6: Cho $\log_{\frac{1}{4}} (y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1$, với $y > 0, y > x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $3x = 4y$.
 B. $x = 3y$.
 C. $x = \frac{3}{4}y$.
 D. $y = \frac{3}{4}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\log_{\frac{1}{4}} (y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow -\log_4 (y-x) + \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 y = 1 + \log_4 (y-x)$$

$$\Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 4 \cdot (y-x) \Leftrightarrow y = 4(y-x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y.$$

Bài tập 7: Số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a = \log_{12} b = \log_{16} (a+b)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$.
 B. $\frac{a}{b} \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.
 C. $\frac{a}{b} \in (9; 12)$.
 D. $\frac{a}{b} \in (9; 16)$.

Hướng dẫn giải.**Chọn B.**

Giả sử $\log_4 a = \log_{12} b = \log_{16} (a+b) = t$. Khi đó, ta có: $a = 4^t; b = 12^t; a+b = 16^t$. Từ đây,

ta có phương trình: $4^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^t + \left(\frac{3}{4}\right)^t = 1 (*)$.

Vế trái của phương trình (*) nghịch biến nên (*) có 1 nghiệm duy nhất là $t = 1$. Suy ra

$$a = 4; b = 12 \text{ suy ra } \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{2}{3}\right).$$

Bài tập 8: Có tất cả bao nhiêu số dương a thỏa mãn đẳng thức

$$\log_2 a + \log_3 a + \log_5 a = \log_2 a \cdot \log_3 a \cdot \log_5 a.$$

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Ta có

$$\log_2 a + \log_3 a + \log_5 a = \log_2 a \cdot \log_3 a \cdot \log_5 a$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a + \log_3 2 \cdot \log_2 a + \log_5 2 \cdot \log_2 a = \log_2 a \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 a \cdot \log_5 a$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a \cdot (1 + \log_3 2 + \log_5 2) = \log_2 a \cdot \log_3 5 \cdot \log_5^2 a$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a \cdot (1 + \log_3 2 + \log_5 2 - \log_3 5 \cdot \log_5^2 a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 0 \\ 1 + \log_3 2 + \log_5 2 - \log_3 5 \cdot \log_5^2 a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \log_5 a = \pm \sqrt{\frac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 5^{\pm \sqrt{\frac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 5}}} \end{cases}.$$

Bài tập 9: Cho n là một số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \cdot \log_a 2019$$

A. 2017.

B. 2019.

C. 2016.

D. 2018.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Đặt

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \cdot \log_a 2019$$

(*).

$$\text{Ta có } n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = n^3 \log_a 2019.$$

$$\text{Vậy VT } (*) = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_a 2019 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \cdot \log_a 2019.$$

Hay từ (*) ta có

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \cdot \log_a 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \cdot \log_a 2019 \Leftrightarrow n^2(n+1)^2 = 2^2 \cdot 1008^2 \cdot 2017^2$$

$$\Leftrightarrow n^2(n+1)^2 = 2016^2 \cdot 2017^2 \Leftrightarrow n^2 + n - 4066272 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2016 \\ n = -2017 \end{cases} \Rightarrow n = 2016 \quad (\text{vì } n \in \mathbb{N}^*).$$

Bài tập 10: Cho $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy$, với $xy > 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $x > y$. B. $x < y$. C. $x = y$. D. $x = y^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy \Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

Dạng 3. Biểu thị biểu thức theo một biểu thức đã cho và từ đó tìm GTLN, GTNN

1. Phương pháp giải

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2}(2x-4y) = 1$. Tính $P = \frac{x}{y}$ khi biểu thức

$S = 4x + 3y - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = \frac{8}{5}$. B. $P = \frac{9}{5}$. C. $P = -\frac{13}{4}$. D. $P = \frac{17}{44}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_{x^2+y^2}(2x-4y) = 1 \Rightarrow 2x - y = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

Khi đó ta có

$$S = 4x + 3y - 5 = 4(x-1) + 3(y+2) - 7 \leq \sqrt{(4^2 + 3^2)((x-1)^2 + (y+2)^2)} - 7 = 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} \\ 4x+3y-5=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy ta có } P = \frac{x}{y} = \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{13}{4}.$$

Bài tập 2. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$

- A. $P_{\min} = 19$. B. $P_{\min} = 13$. C. $P_{\min} = 14$. D. $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Với điều kiện đề bài, ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2 \log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 4 \left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)\right]^2 + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= 4 \left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có $P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)(4t^2 + 6t + 3)}{t^2}$$

Vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$.

Bài tập 3. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.

B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

C. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{9}$.

D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(1-xy) - \log_3(x+2y) = 3(xy-1) + (x+2y) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3(1-xy) - \log_3(x+2y) = 3(xy-1) + (x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3(1-xy) + 3(1-xy) = \log_3(x+2y) + (x+2y)$$

Xét $f(t) = \log_3 t + t, (t > 0)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$$

$$\text{Suy ra : } f(3(1-xy)) = f(x+2y) \Leftrightarrow 3-3xy = x+2y \Leftrightarrow x = \frac{3-2y}{1+3y}$$

$$\text{Điều kiện } \frac{1-xy}{x+2y} > 0 \Leftrightarrow \frac{5y-2}{6y^2+3} > 0 \Leftrightarrow y > \frac{2}{5}$$

$$P = x + y = y + \frac{3-2y}{1+3y}$$

$$P' = 1 + \frac{-11}{(1+3y)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1-\sqrt{11}}{3} \\ y = \frac{-1+\sqrt{11}}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Bài tập 4. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn điều kiện $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$

Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a+b+c$ bằng

- A. 3. B. $3.2^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$. C. 4. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x \log_2 x - \log_2^3 c$ với $x \in [1; 2]$.

Ta có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3 \log_2 x - \frac{3}{\ln 2} - \frac{3 \log_2^2 x}{x \ln 2}$;

$$f''(x) = 6x - \frac{3}{x \ln 2} - \frac{6 \log_2 x}{x^2 \ln^2 2} + \frac{3 \log_2^2 x}{x^2 \ln 2}.$$

Vì $f'''(x) = 6 \left(1 - \frac{1}{x^3 \ln^3 2} \right) + \frac{3}{x^2 \ln 2} + \frac{6 \log_2 x (3 - \log_2 x)}{x^3 \ln^2 2} > 0 \forall x \in [1; 2]$ nên

$$f''(x) \geq f''(1) \approx 1,67 > 0.$$

Như vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến và có nghiệm duy nhất trên $[1; 2]$ vì $f'(1) < 0; f'(2) > 0$ và có đồ thị lõm trên $[1; 2]$. Do đó ta có bảng biến thiên

x	1	x_0	2
$f(x)$	1	$f(x_0)$	1

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy rằng $f(x) \leq 1$ cho nên

$$P \leq 3 + \log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 2$ và các hoán vị.

Bài tập 5. Trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$. Với giá trị nào của m thì tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$?

A. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

B. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ và $(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

C. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ và $\sqrt{10} + \sqrt{2}$.

D. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $4x + 4y - 4 \geq 0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 4 \geq x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2 \quad (C_1).$$

Miền nghiệm của bất phương trình là hình tròn (cả bờ) (C_1) có tâm $I_1(2; 2)$ bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

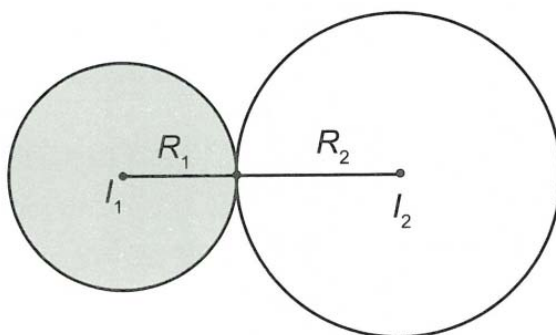
Mặt khác: $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m \quad (*)$.

Với $m = 0$ thì $x = -1; y = 1$ (không thỏa mãn $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$).

Với $m > 0$ thì $(*)$ là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1; 1)$ bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

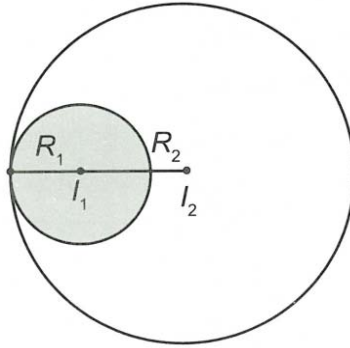
Để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thì (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

Trường hợp 1: (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.



Khi đó: $R_1 + R_2 = I_1 I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

Trường hợp 2: (C_1) nằm trong (C_2) và hai đường tròn tiếp xúc trong.



Khi đó: $R_2 - R_1 = I_1 I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

Vậy $m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ và $m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 6. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) \text{ bằng}$$

A. $P_{\min} = 19$.

B. $P_{\min} = 13$.

C. $P_{\min} = 14$.

D. $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có:

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2}{\log_a \frac{a}{b}} \right)^2 + 3(\log_b a - 1)$$

$$= \left(\frac{2}{1 - \log_a b} \right)^2 + 3(\log_b a - 1).$$

Đặt $\log_a b = t$ ($0 < t < 1$). Khi đó $P = \frac{4}{(1-t)^2} + \frac{3}{t} - 3 = f(t)$ với $0 < t < 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{8}{(1-t)^3} - \frac{3}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	15	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $P_{\min} = 15$.

Bài tập 7. Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 \geq 3 \text{ và } \log_{x^2+y^2} \left[x(4x^2 - 3x + 4y^2) - 3y^2 \right] \geq 2$$

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$.

Khi đó biểu thức $T = 2(M + m + 1)$ có giá trị gần nhất số nào sau đây?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D

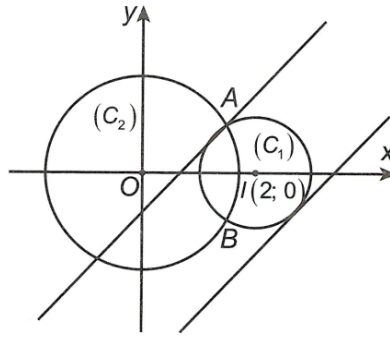
Ta có $\log_{x^2+y^2} \left[x(4x^2 - 3x + 4y^2) - 3y^2 \right] \geq 2 \Leftrightarrow \log_{x^2+y^2} \left[(x^2 + y^2)(4x - 3) \right] \geq 2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(4x - 3) \geq (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 \leq 1.$$

Tập hợp các số thực x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 3 \\ (x - 2)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ những điểm thuộc miền trong hình tròn (C_1)

có tâm $I(2;0)$, bán kính $R_1 = 1$ và nằm ngoài hình tròn (C_2) có tâm $O(0;0)$ và bán kính

$$R_2 = \sqrt{3}.$$



Biểu thức: $P = x - y \Rightarrow x - y - P = 0$ là họ đường thẳng Δ song song với đường $y = x$.

Các giao điểm của hai hình tròn là $A\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi đường thẳng Δ đi qua A.

Khi đường thẳng Δ qua điểm A, ta có: $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - P_{\min} = 0 \Rightarrow P_{\min} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

P đạt giá trị lớn nhất khi đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C_1) ta có:

$$d(I; \Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|2 - P|}{\sqrt{1 + 1}} = 1 \Leftrightarrow P = 2 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow P_{\max} = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } T = 2(M + m + 1) = 2\left(2 + \sqrt{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right) \approx 10.$$

BÀI 4. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số mũ

Định nghĩa

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) được gọi là hàm số mũ cơ số a .

Tập xác định

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Đạo hàm

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi x .

Đặc biệt: $(e^x)' = e^x$.

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

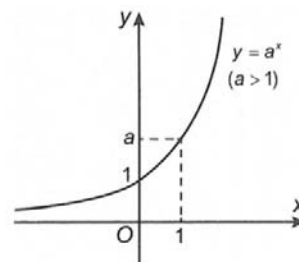
$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1).$$

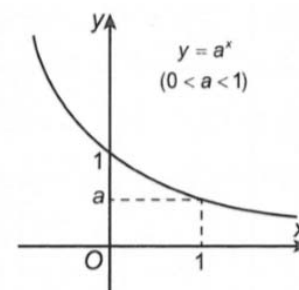
Sự biến thiên

- Khi $a > 1$ hàm số luôn đồng biến.
- Khi $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến.



Đồ thị

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox và luôn đi qua các điểm $(0;1)$, $(1;a)$ và nằm phía trên trục hoành.



2. Hàm số lôgarit

Định nghĩa

Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .

Tập xác định

Tập xác định: $(0; +\infty)$.

Đạo hàm

Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0; a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi x dương và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Đặc biệt: $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

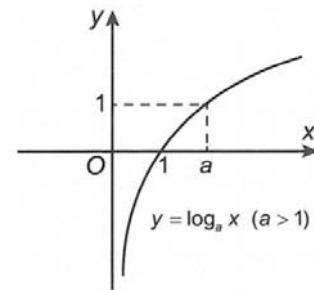
Giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1).$$

Sự biến thiên

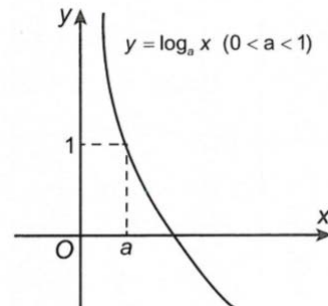
- Khi $a > 1$ hàm số luôn đồng biến.
- Khi $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến.



Đồ thị

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm $(1; 0)$, $(a; 1)$ và nằm bên phải trục tung.

Nhận xét: Đồ thị của các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.



Ứng dụng

1. Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn

lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $S_n = A + nAr = A(1 + nr)$

2. Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $S_n = A(1 + r)^n$.

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right);$$

3. Tiền gửi hàng tháng: Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào một thời gian cố định.

$$r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1;$$

Công thức tính: Đầu mỗi tháng, khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép r (% / tháng) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n .

$$A = \frac{S_n}{(1 + r)^n}$$

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n \cdot r}{A(1 + r)} + 1 \right);$$

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n \cdot r}{A(1 + r)} + 1 \right);$$

$$A = \frac{S_n \cdot r}{(1 + r) \left[(1 + r)^n - 1 \right]}$$

Ta có
$$S_n = \frac{A}{r} \left[(1 + r)^n - 1 \right] (1 + r)$$

4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng).
Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng.

Công thức tính:
$$X = \left[A(1 + r)^n - S_n \right] \frac{r}{(1 + r)^n - 1}.$$

Khi đó số tiền còn lại sau n tháng là

$$S_n = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

5. Vay vốn trả góp: Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng). Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

Công thức tính: Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng

nên ta có
$$S_n = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Đề sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0.$$

Suy ra mỗi lần hoàn nợ số tiền là
$$X = \frac{A(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}.$$

6. Bài toán tăng lương: Một người được lãnh lương khởi điểm là A (đồng/tháng). Cứ sau n tháng thì lương người đó được tăng thêm r (%) / tháng). Hỏi sau kn tháng, người đó lĩnh được bao nhiêu tiền?

Công thức tính: Lương nhận được sau kn tháng là

$$S_{kn} = An \cdot \frac{(1+r)^k - 1}{r}.$$

7. Bài toán tăng trưởng dân số

Công thức tính tăng trưởng dân số:

$$X_m = X_n (1+r)^{m-n}, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n$$

Trong đó: r % là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m ;

X_m dân số năm m , X_n dân số năm n .

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là
$$r\% = m-n \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1$$

8. Lãi kép liên tục

Gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r (%) / năm) thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$S_n = A(1+r)^n.$$

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}$ % thì số tiền thu được sau n năm là:

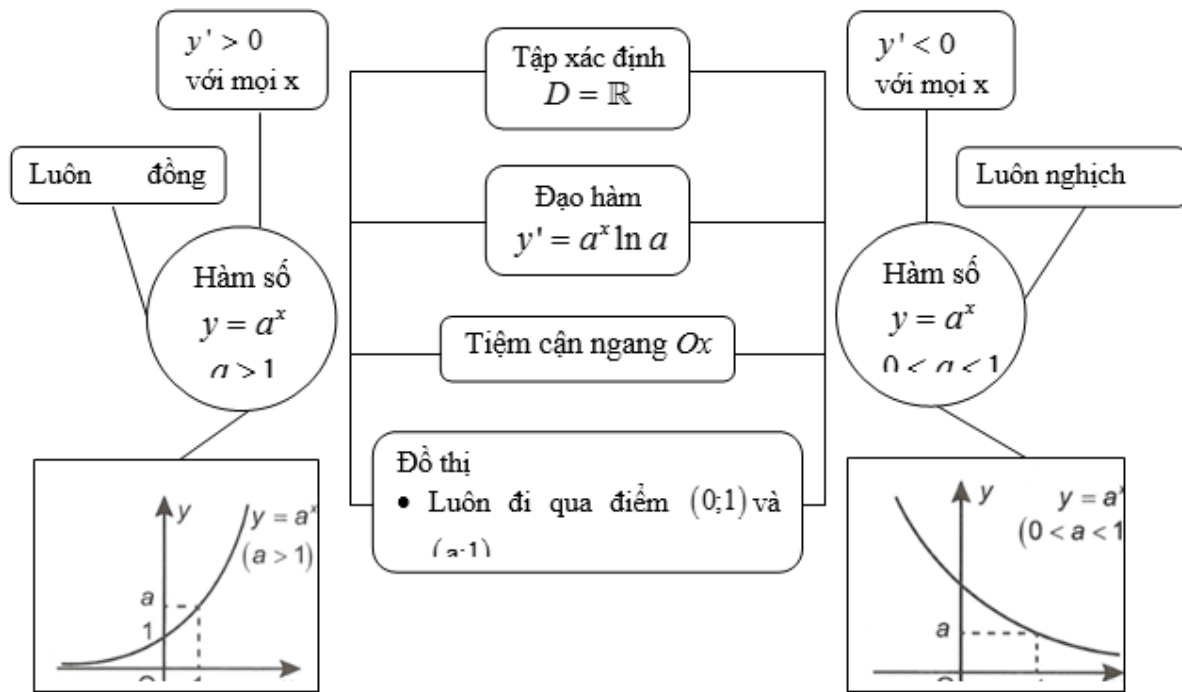
$$S_n = A \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{m \cdot n}$$

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \rightarrow +\infty$, gọi là hình thức lãi kép liên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là:

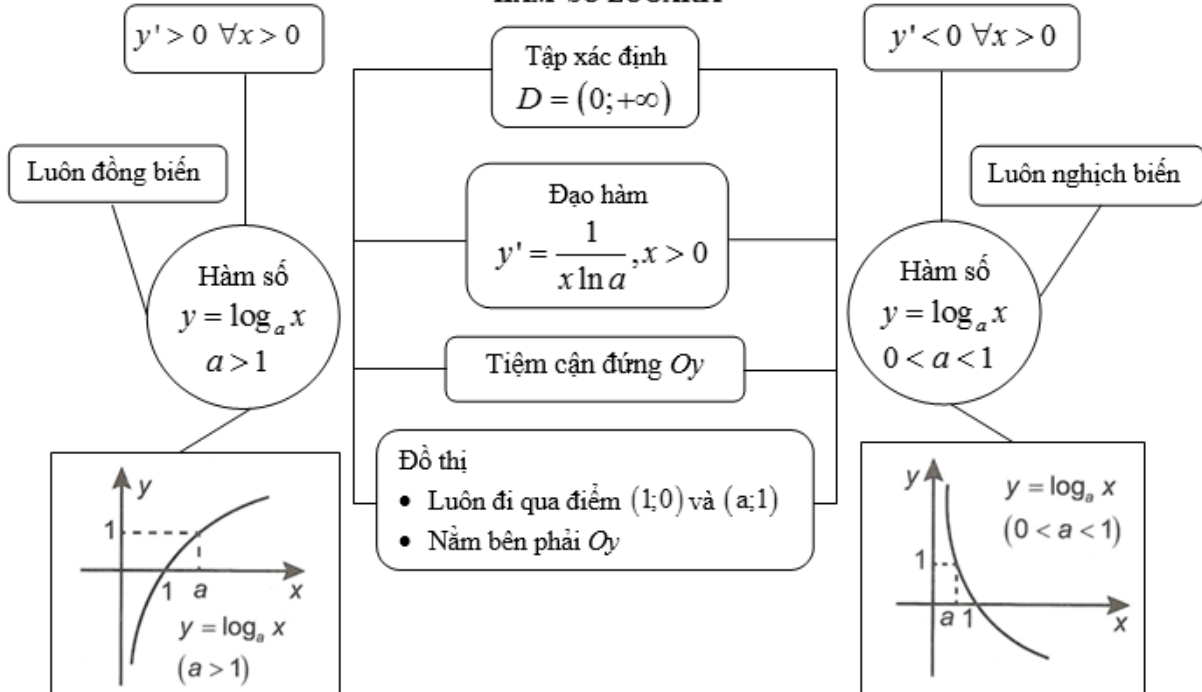
$$\boxed{S = Ae^{n.r}} \text{ (công thức tăng trưởng mũ).}$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

HÀM SỐ MŨ



HÀM SỐ LÔGARIT



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số chứa mũ – lôgarit.

1. Phương pháp giải

* Hàm số $y = a^x$ ($a > 0; a \neq 1$) có tập xác định là $\mathbb{R}$.

* Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0; a \neq 1$) có tập xác định là $(0; +\infty)$.

* Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

Áp dụng tính chất

- Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

* Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định trên khoảng D .

- Cô lập tham số m .
- Sử dụng phương pháp khảo sát hàm số.

2. Bài tập

Bài tập 1: Điều kiện xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\log_9 \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{2}}}$ là

A. $x < -3$

B. $x > -1$

C. $-3 < x < -1$

D. $0 < x < 3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 \frac{2x}{x+1} > \frac{1}{2} \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x+1} > 9^{\frac{1}{2}} \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$$

Bài tập 2: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 5

B. 2

C. 4

D. 3

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 4m^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$

Bài tập 3: Tìm m để hàm số $y = \log_2[(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3]$ có tập xác định $D = \mathbb{R}.$

A. $m \leq -2$

B. $m > -2$

C. $m < -2$

D. $m \geq -2$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$.

Trường hợp 1: $a \neq 0.$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ 4(m+2)^2 - 4(m+2)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Trường hợp 2: $a = 0 \Leftrightarrow m = -2$, ta có

$(*) \Leftrightarrow 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (đúng), nhận $m = -2$

Vậy $m \geq -2.$

Bài tập 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}?$

A. 9

B. 10

C. 11

D. 8

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi $4^x - 2^x + m > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$

Đặt $t = 2^x, t > 0.$

Khi đó (1) trở thành $t^2 - t + m > 0 \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m > -t^2 + t \forall t \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m > \max_{(0; +\infty)} f(t) = \frac{1}{4} \text{ với } f(t) = -t^2 + t.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{1;2;3;...;8;9\}$.

Bài tập 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(-10;10)$ để hàm số

$$y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3} \text{ xác định trên khoảng } (0; +\infty)?$$

A. 13

B. 11

C. 12

D. 10

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định $\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3 \neq 0, \forall x \in (0; +\infty) \quad (*)$.

Đặt $t = \log_3 x, t \in \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow mt^2 - 4t + m + 3 = 0$ vô nghiệm.

Trường hợp 1: $m = 0$. Phương trình có nghiệm (loại $m = 0$).

Trường hợp 2: $m \neq 0$. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m(m + 3) < 0 \Leftrightarrow m < -4 \text{ hoặc } m > 1.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; 2; 3; \dots; 8; 9\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên thỏa mãn.

Bài tập 6: Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi.

A. $m \geq \frac{1}{4}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $m > 0$.

D. $m < \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi.

$$4^x - 2^x + m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 2^x - 4^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > \max(2^x - 4^x) = \frac{1}{4}.$$

Bài tập 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \log_3 x$, khi đó $x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3} \text{ trở thành } y = \frac{1}{mt^2 - 4t + m + 3}.$$

Hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi hàm

số $y = \frac{1}{mt^2 - 4t + m + 3}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow f(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \text{ vô nghiệm.}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow m < -4; m > 1.$$

Bài tập 8: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + \sqrt{x^2 - 10x + 25}}$ là:

- A. $(5; +\infty)$. B. $(-\infty; 5)$. C. $\mathbb{R}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Viết lại } y = \frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + \sqrt{x^2 - 10x + 25}} = \frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + \sqrt{(x-5)^2}} = \frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + |x - 5|}.$$

Biểu thức $\frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + |x - 5|}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - 16 > 0 \\ x - 5 + |x - 5| \neq 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 16 \\ |x - 5| \neq 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 4 \\ 5 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Suy ra hàm số có tập xác định là $(5; +\infty)$.

Bài tập 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{(x-m) \log_2 [x^2 - 2(2m-1)x + 4m^2]}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho xác định với mọi $x \in (1; +\infty)$.

- A. $m \in (-\infty; 2)$. B. $m \in (-1; 1]$. C. $m \in (-\infty; 1)$. D. $m \in (-\infty; 1]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y = \frac{1}{(x-m) \log_2 [x^2 - 2(2m-1)x + 4m^2]}$ xác định với $\forall x \in (1; +\infty)$ khi

$$\begin{cases} x - m \neq 0 \\ x^2 - 2(2m - 1)x + 4m^2 > 0 \text{ (lđ)} \text{ với } \forall x \in (1; +\infty) \\ x^2 - 2(2m - 1)x + 4m^2 \neq 1 \text{ (lđ)} \end{cases}$$

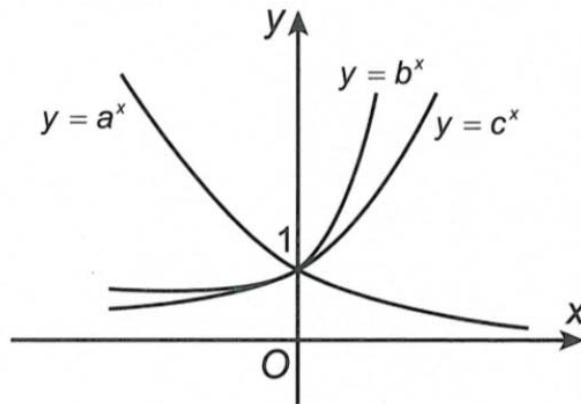
$$\Leftrightarrow m \notin (1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 1$$

Dạng 2: Đồ thị hàm số

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ sau



Mệnh đề nào đúng?

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

Hướng dẫn giải

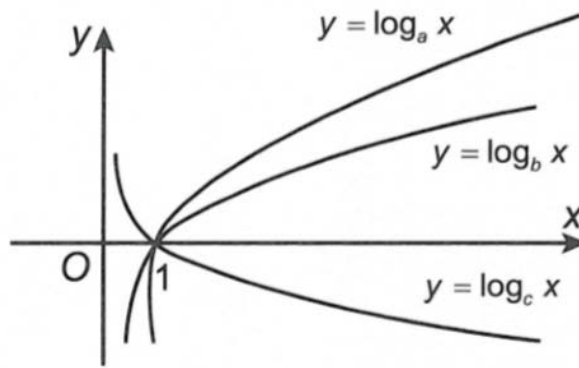
Chọn B.

Ta có: $y = a^x$ nghịch biến nên $0 < a < 1$.

Mặt khác, $y = b^x, y = c^x$ đồng biến, đồng thời cho $x = 1 \Rightarrow y = b > y = c$.

Vậy $a < c < b$

Bài tập 2: Từ các đồ thị $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ đã cho ở hình vẽ sau:



Khả định nào sau đây đúng?

A. $0 < a < b < 1 < c$

B. $0 < c < 1 < a < b$

C. $0 < c < a < 1 < b$

D. $0 < c < 1 < b < a$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

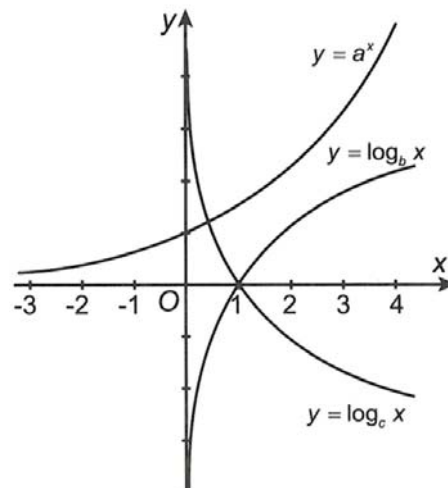
Ta có: $y = \log_c x$ nghịch biến nên $0 < c < 1$.

Mặt khác, $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ đồng biến nên $a, b > 1$ đồng thời cho $y = 1$ thì $x = a < x = b$.

Vậy $0 < c < 1 < a < b$.

Bài tập 3: Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.

Chọn mệnh đề đúng?



A. $b < c < a$

B. $a < c < b$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y = \log_c x$ nghịch biến nên $0 < c < 1$ còn $y = \log_b x$ và $y = a^x$ đồng biến nên $b > 1$ và $a > 1$.

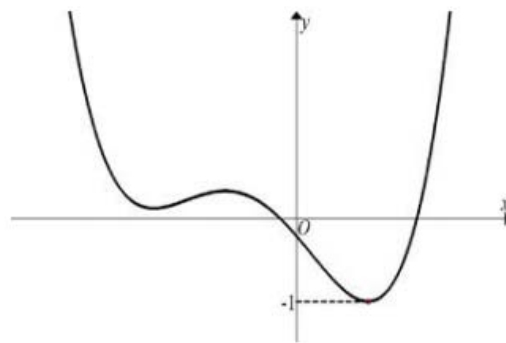
Xét $y = a^x$: Với $x = 1 \Rightarrow y = a \Rightarrow 1 < a < 2$.

Xét $y = \log_b x$: Với $y = 1 \Rightarrow x = b \Rightarrow b = 2$.

Do đó $a < b$

Vậy $c < 1 < a < b$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} - 4^{f(x)}$.



A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $y = g(x) = 3^{f(x)} - 4^{f(x)}$.

Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

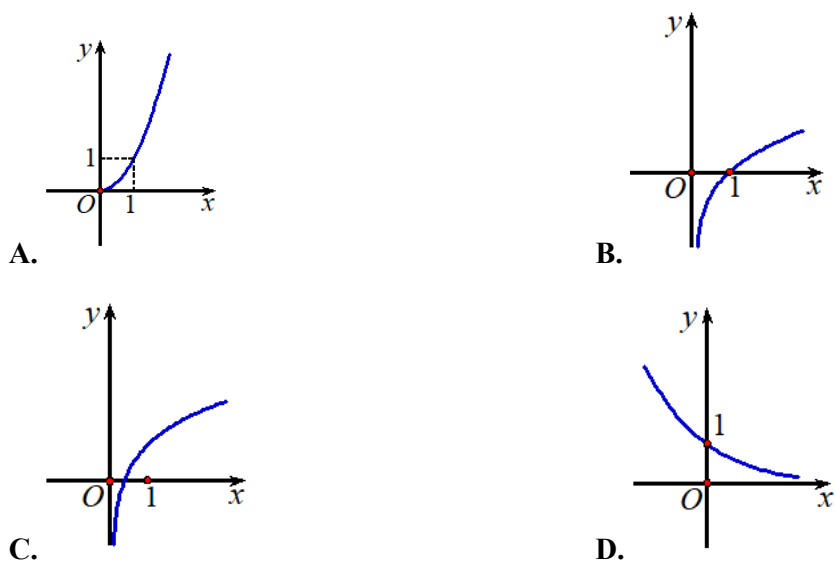
$$\text{Ta có } y' = f'(x) \cdot [3^{f(x)} \cdot \ln 3 - 4^{f(x)} \cdot \ln 4] \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 3^{f(x)} \cdot \ln 3 - 4^{f(x)} \cdot \ln 4 = 0 \end{cases}$$

$$3^{f(x)} \cdot \ln 3 - 4^{f(x)} \cdot \ln 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{f(x)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right) \approx -0,8. \text{ Phương trình này}$$

có hai nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên hàm số

$y = 3^{f(x)} - 4^{f(x)}$ có năm điểm cực trị.

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Tìm đồ thị đó?



Hướng dẫn giải

Chọn C.

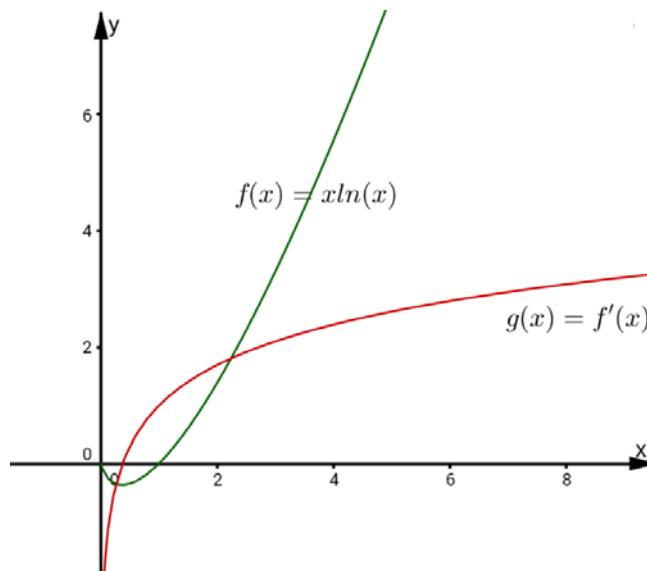
Tập xác định $D = (0; +\infty)$

Ta có $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = g(x) = \ln x + 1$.

Ta có $g(1) = 1$ nên đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$. Loại hai đáp án B và D

Và $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x) + 1]$. Đặt $t = \frac{1}{x}$. Khi $x \rightarrow 0^+$ thì $t \rightarrow +\infty$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right) + 1 \right] = -\lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln(t)] + 1 = -\infty$ nên loại đáp án A.



Cách 2 : Ta nhận thấy $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = g(x) = \ln x + 1$ nằm bên phải trục tung và không đi qua $(1; 0)$. Vậy chọn đáp án **C**.

Dạng 3: Xét tính đơn điệu, cực trị, GTLN và GTNN của hàm số mũ, logarit

1. Phương pháp.

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm tập xác định

Bước 2: Tìm đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i làm cho $f'(x) = 0$ hoặc không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập BBT.

Bước 4: Kết luận.

Ngoài ra cần chú ý tính chất của hàm số mũ và hàm số logarit:

+) Hàm số $y = a^x$ và hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên TXĐ $\Leftrightarrow a > 1$.

+) Hàm số $y = a^x$ và hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên TXĐ $\Leftrightarrow 0 < a < 1$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi a , b lần lượt là số điểm cực đại và số điểm cực tiểu của hàm số $y = (x^3 + 3x + 1)e^{-2x}$. Tính $2a - b$.

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y = (x^3 + 3x + 1)e^{-2x}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (x^3 + 3x + 1)' e^{-2x} + (x^3 + 3x + 1)(e^{-2x})' = (3x^2 + 3)e^{-2x} - 2e^{-2x}(x^3 + 3x + 1).$$

$$= e^{-2x}(-2x^3 + 3x^2 - 6x + 1); y' = 0 \text{ có một nghiệm là } x_0.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y'		0	
		$+$	$-$
y		3	

$-\infty \swarrow \quad \searrow \quad -\infty$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực đại và 0 điểm cực tiểu.

Vậy $2a - b = 2$.

Bài tập 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

- A. $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -\frac{1}{e^2}$. B. $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -e$. C. $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -\frac{1}{e}$. D. $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -\frac{1}{2e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

•Đạo hàm $y' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left(\frac{1}{e}; e\right) \\ x = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \left(\frac{1}{e}; e\right) \end{cases}$

•Tính các giá trị: $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2}$, $y(e) = e^2$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

•Vậy $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -\frac{1}{2e}$.

Bài tập 3. Cho $1 < x < 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$.

- A. 82. B. 96. C. 64. D. 81.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$P = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x} = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot (\log_2 8 - \log_2 x) = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot (3 - \log_2 x)$$

Đặt $t = \log_2 x$, do $1 < x < 64$ nên $0 < t < 6$.

$$f(t) = t^4 + 12t^2(3-t) \text{ với } 0 < t < 6.$$

$$f'(t) = 4t^3 - 36t^2 + 72t; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \\ t = 6 \end{cases}$$

t	0	3	6
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 81$.

Bài tập 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{3^{-x} - 3}{3^{-x} - m}$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

A. $m < \frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3} < m < 3$.

C. $m \leq \frac{1}{3}$.

D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y = \frac{3^{-x} - 3}{3^{-x} - m} = \frac{3 \cdot 3^x - 1}{m \cdot 3^x - 1}$

Đặt $t = 3^x$. Vì $x \in (-1; 1)$ nên $t \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Khi đó $y = \frac{3t - 1}{mt - 1} \Rightarrow y' = \frac{m - 3}{(mt - 1)^2}$

+ Với $m = 0$ thỏa mãn.

+ Với $m \neq 0$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 0 \\ \left[\frac{1}{m} \leq \frac{1}{3} \right] \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{1}{3} \right] \setminus \{0\}. \\ \left[\frac{1}{m} \geq 3 \right] \end{cases}$

Bài tập 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Không tồn tại m .

B. $m \geq \frac{1}{2}$.

C. $m \leq -\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - 2mx + 2$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = [\ln(x^2 + 1) - 2mx + 2]' = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2m$$

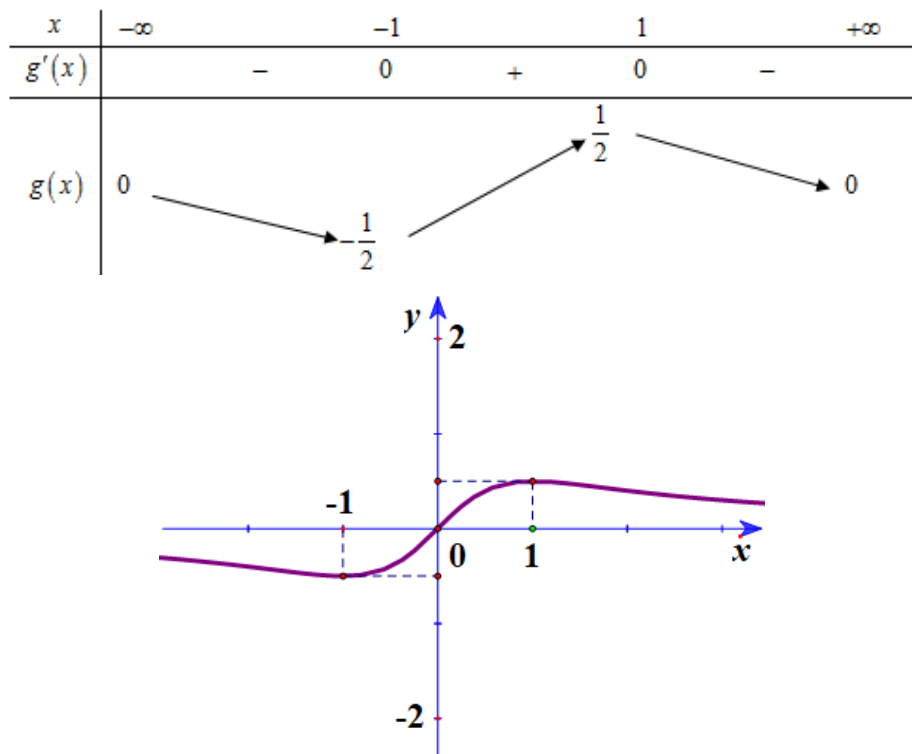
Để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} - 2m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} \geq m, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Lập bảng biến thiên của $g(x)$:



Theo bảng biến thiên trên thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ hay $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0; \ln 4]$ bằng 6.

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = e^x$, với $x \in [0; \ln 4] \Rightarrow t \in [1; 4]$. Khi đó $f(x) = |t^2 - 4t + m| = |g(t)|$.

Có $g'(t) = 2t - 4 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Ta có bảng biến thiên

t	1	2	4
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$			

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[0;4]} |g(t)| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 10 \end{cases}$.

Bài tập 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (20x^2 + 20x - 1283)e^{40x}$ trên tập hợp các số tự nhiên là:

A. -1283.

B. $-163.e^{280}$.

C. $157.e^{320}$.

D. $-8.e^{300}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = (40x + 20)e^{40x} + 40(20x^2 + 20x - 1283)e^{40x} = 20e^{40x}(40x^2 + 42x - 2565)$

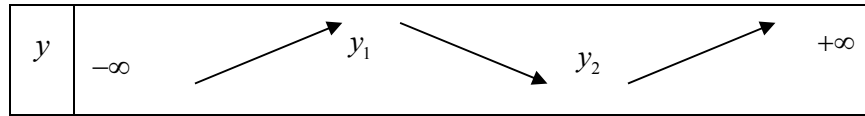
$$y' = 0 \Leftrightarrow 40x^2 + 42x - 2565 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ x = -\frac{171}{20} \end{cases}$$

Đặt $y_1 = y\left(-\frac{171}{20}\right)$; $y_2 = y\left(\frac{15}{2}\right)$

$$y(7) = -163.e^{280}; y(8) = 157.e^{320}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{171}{20}$	$\frac{15}{2}$	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+



Dựa vào bảng biến thiên ta có Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (20x^2 + 20x - 1283)e^{40x}$ trên tập hợp các số tự nhiên là $-163.e^{280}$.

Bài tập 8. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = 4^x - 2^{x+2} - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2} \ln 2\right]$.

B. $(-\infty; 0]$.

C. $(-\infty; -2 \ln 2]$.

D. $\left(-\infty; -\frac{3}{2} \ln 2\right]$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y = 4^x - 2^{x+2} - mx + 1 \Rightarrow y' = 4^x \ln 4 - 4 \cdot 2^x \ln 2 - m = (4^x - 2 \cdot 2^x) \ln 4 - m$

Theo đề $y' \geq 0, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow (4^x - 2 \cdot 2^x) \ln 4 - m \geq 0, \quad \forall x \in (-1; 1)$

$\Leftrightarrow m \leq (4^x - 2 \cdot 2^x) \ln 4 = g(x), \quad \forall x \in (-1; 1)$

$\Leftrightarrow m \leq \min_{(-1; 1)} g(x)$

$\min_{(-1; 1)} g(x) = -\ln 4.$

Bài tập 9. Giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{e^x - m - 2}{e^x - m^2}$ đồng biến trên khoảng

$\left(\ln \frac{1}{4}; 0\right)$ gần nhất với số nào sau đây:

A. 0,03.

B. 1.

C. -0,45.

D. -1,01.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $e^x = t$. Suy ra $y = \frac{t - m - 2}{t - m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

$y' = \frac{-m^2 + m + 2}{(t - m^2)^2}.$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ cần:

$$\begin{cases} -m^2 + m + 2 > 0 \\ m \notin \left(\frac{1}{4}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \geq 1 \\ m \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 2 \\ -1 < m \leq \frac{1}{4} \end{cases}. \text{ Suy ra chọn C.}$$

Bài tập 10. Cho hàm số $y = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $m < 3e^2 + 1$.

B. $3e^2 + 1 \leq m \leq 3e^3 + 1$.

C. $3e^3 + 1 \leq m < 3e^4 + 1$.

D. $m \geq 3e^4 + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (e^{3x} - (m-1)e^x + 1)'$$

$$= y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (3e^{3x} - (m-1)e^x).$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow$

$$y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (3e^{3x} - (m-1)e^x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) (*), \quad \text{mà}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln\left(\frac{4}{2017}\right) < 0 \end{cases}. \quad \text{Nên } (*) \Leftrightarrow 3e^{3x} - (m-1)e^x \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} + 1 \leq m, \forall x \in (1; 2).$$

• Đặt $g(x) = 3e^{2x} + 1, \forall x \in (1; 2), g(x) = 3e^{2x} \cdot 2 > 0, \forall x \in (1; 2)$.

x	1	2
$g'(x)$		
$g(x)$		

Vậy (*) xảy ra khi $m \geq g(2) \Leftrightarrow m \geq 3e^4 + 1$.

Dạng 4: Tìm GTLN và GTNN của hàm số mũ, logarit nhiều biến

1. Phương pháp

PP1: Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển như: Côsi, Bunhiacôpski và một số BĐT quen thuộc khác

PP2: Sử dụng phương pháp dồn biến:

+) Biến đổi biểu thức đã cho theo một biểu thức chung mà ta đặt là biến t .

+) Biểu diễn biểu thức đã cho theo t ta được hàm $f(t)$. Tìm điều kiện cho t .

+) Lập bảng biến thiên của $f(t)$. Suy ra kết quả.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho 2 số dương a và b thỏa mãn $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$. Giá trị nhỏ nhất của $S = a + b$ là.

- A. $\min S = 8$. B. $\min S = 14$. C. $\min S = 12$. D. $\min S = 16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } \begin{cases} \log_2(a+1) = x \\ \log_2(b+1) = y \end{cases} \Rightarrow x + y \geq 6.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a+1 = 2^x \\ b+1 = 2^y \end{cases} \Rightarrow a+b+2 = 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} = 2\sqrt{2^6} = 16 \Rightarrow a+b \geq 14.$$

Bài tập 2. Cho các số thực m, n thỏa mãn $m > n > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_{\frac{m}{n}}^2(m^2) + 3\log_n\left(\frac{m}{n}\right).$$

- A. $P_{\min} = 13$. B. $P_{\min} = 15$. C. $P_{\min} = 16$. D. $P_{\min} = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do $m > n > 1$ nên ta có.

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{m}{n}}^2(m^2) + 3\log_n\left(\frac{m}{n}\right) = \left(2\log_{\frac{m}{n}} m\right)^2 + 3(\log_n m - 1) \\ &= \frac{4}{\left(\log_m \frac{m}{n}\right)^2} + 3(\log_n m - 1) = \frac{4}{(1 - \log_m n)^2} + \frac{3}{\log_m n} - 3. \end{aligned}$$

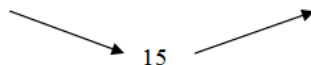
$$\text{Do } m > n > 1 \text{ nên } \begin{cases} \log_m n < \log_m m = 1 \\ \log_m n > \log_m 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{3}{x} - 3 \text{ trên } (0;1).$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{8}{(1-x)^3} - \frac{3}{x^2}.$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{(1-x)^3} - \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^3 - x^2 + 9x - 3}{x^2(1-x)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Bảng biến thiên.

x	0	$\frac{1}{3}$	1
y'	-	0	+
y			

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $P_{\min} = 15$.

Bài tập 3. Cho ba số thực $a, b, c \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu

thức. $P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) + \log_b \left(c - \frac{1}{4}\right) + \log_c \left(a - \frac{1}{4}\right)$.

A. $P_{\min} = 1$.

B. $P_{\min} = 3$.

C. $P_{\min} = 3\sqrt{3}$.

D. $P_{\min} = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Với mọi $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$ ta có $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq x - \frac{1}{4}$.

Lấy logarit 2 vế, ta được $\log_t x^2 \leq \log_t \left(x - \frac{1}{4}\right)$ (với $t \in (0; 1)$) (*).

Áp dụng BĐT (*) ta được: $\log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2 = 2 \log_a b$.

$$\log_b \left(c - \frac{1}{4}\right) \geq \log_b c^2 = 2 \log_b c$$

$$\log_c \left(a - \frac{1}{4}\right) \geq \log_c a^2 = 2 \log_c a$$

Suy ra $P \geq 2[\log_a b + \log_b c + \log_c a] \geq 2.3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 6 = P_{\min}$.

Bài tập 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)^2$ với a, b là các số thực

thỏa mãn $\sqrt{b} > a > 1$.

A. 30.

B. 40.

C. 60.

D. 50.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $(\log_a b^2)^2 = 4(\log_a b)^2$. Đặt $\log_a b = t$.

$$\begin{aligned}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} &= \frac{1}{2} \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} b - \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} a \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\log_b \frac{\sqrt{b}}{a}} - \frac{1}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} \right) \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - \log_b a} - \frac{1}{\frac{1}{2} \log_a b - 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 - 2 \log_b a} - \frac{2}{\log_a b - 2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \log_a b - 6 + 4 \log_b a}{\log_a b + 4 \log_b a - 4} \right) \\&= \frac{1}{2} \frac{2t - 6 + \frac{4}{t}}{t + \frac{4}{t} - 4} = \frac{1}{2} \frac{2(t^2 - 3t + 2)}{t^2 - 4t + 4} = \frac{(t-1)(t-2)}{(t-2)^2} = \frac{t-1}{t-2}.\end{aligned}$$

Ta được $P = 4t^2 + 6 \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^2$.

Với $\sqrt{b} > a > 1 \Rightarrow b > a^2$ (*) Lấy log cơ số $a > 1$ hai vế của (*) ta được $\log_a b > 2$ nên $t > 2$.

*) Xét hàm số $f(t) = 4t^2 + 6 \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^2, t \in D = (2; +\infty)$.

Ta được.

$$f'(t) = 8t - \frac{12(t-1)}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow 8t(t^2 - 4t + 4) - 12(t-1) = 0 \Leftrightarrow 8t^3 - 32t^2 + 20t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Do $t > 2$ nên $f'(t) = 0$ có nghiệm $t = 3$.

Ta có $\lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty; f(3) = 60; \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 60.

Bài tập 5. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

A. $P_{\min} = \frac{11}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{27}{5}$. C. $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$. D.

$P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1) \Leftrightarrow \log_3 (x+1) + x + 1 = \frac{9}{y+1} + \log_3 \frac{9}{y+1}$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$, $t > 1$; $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$, $\forall t > 1$.

Suy ra $f(x+1) = f\left(\frac{9}{y+1}\right) \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{8-y}{y+1} \Rightarrow P = \frac{8-y}{y+1} + 2y = \frac{2y^2 + y + 8}{y+1}$.

Bảng biến thiên của hàm số $P = \frac{2y^2 + y + 8}{y+1}$, $y > 1$

x	1	$\frac{-2 + \sqrt{18}}{2}$	$+\infty$
y'		- 0 +	
y	$\frac{11}{2}$	$-3 + 6\sqrt{2}$	$+\infty$

Vậy $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

Bài tập 6. Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng:

A. 9.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 > 1 \\ 2x + y \geq x^2 + 2y^2 \end{cases} \quad (I), \quad \begin{cases} 0 < x^2 + 2y^2 < 1 \\ 0 < 2x + y \leq x^2 + 2y^2 \end{cases} \quad (II).$

Xét $T = 2x + y$.

TH1: $(x; y)$ thỏa mãn (II) khi đó $0 < T = 2x + y \leq x^2 + 2y^2 < 1$.

TH2: $(x; y)$ thỏa mãn (I) $x^2 + 2y^2 \leq 2x + y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \leq \frac{9}{8}$. Khi đó.

$$2x + y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \frac{9}{4} \leq \sqrt{(2^2 + \frac{1}{2}) \left[(x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \right]} + \frac{9}{4} \leq \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$$

Suy ra : $\max T = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x; y) = (2; \frac{1}{2})$.

Bài tập 7. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $1 > a \geq b > 0$. Tính giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức sau $T = \log_a^2 b + \log_{a.b} a^{36}$.

A. $T_{\min} = 16$.

B. $T_{\min} = 13$.

C. $T_{\min}$ không tồn tại.

D. $T_{\min} = 19$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$T = \log_a^2 b + \log_{a.b} a^{36} = \log_a^2 b + \frac{36}{\log_a ab} = \log_a^2 b + \frac{36}{1 + \log_a b}.$$

Đặt $t = \log_a b$, vì $1 > a \geq b > 0 \Rightarrow \log_a b \geq \log_b b \Rightarrow t \geq 1$.

$$\text{Xét } f(t) = t^2 + \frac{36}{1+t} \Rightarrow f'(t) = 2t - \frac{36}{(1+t)^2}. \text{ Cho } f'(t) = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$\text{Hàm số } f(t) \text{ liên tục trên } [1; +\infty) \text{ có } \begin{cases} f(1) = 19 \\ f(2) = 16 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \min_{[1; +\infty)} f(t) = 16 \Rightarrow \min_{[1; +\infty)} T = 16.$$

Bài tập 8. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

B. $k \in (2; 3)$.

C. $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

D. $k \in (-1; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a ab + \sqrt{1 - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}.$$

Khi $b = a^k \Rightarrow P = 1 + k + \sqrt{1 - k}$. Đặt $t = \sqrt{1 - k}$. Với $k \leq 1$.

$$\Rightarrow P = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

$$\Rightarrow \max P = \frac{9}{4}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{4} \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Bài tập 9. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min} = 19$.

B. $P_{\min} = 13$.

C. $P_{\min} = 14$.

D. $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Với điều kiện đề bài, ta có.

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right) = \left[2 \log_{\frac{a}{b}} a \right]^2 + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right) = 4 \left[\log_{\frac{a}{b}} \left(\frac{a}{b} \cdot b \right) \right]^2 + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right) \\ &= 4 \left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b \right]^2 + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có $P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)(4t^2 + 6t + 3)}{t^2}.$$

Vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$.

Bài tập 10. Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $2^a + 4^b + 8^c = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c$. Giá trị của biểu thức $4^M + \log_M m$ bằng

A. $\frac{2809}{500}$.

B. $\frac{281}{50}$.

C. $\frac{4096}{729}$.

D. $\frac{14}{25}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$2^a + 4^b + 8^c = 4 \Leftrightarrow 2^a + 2^{2b} + 2^{3c} = 4.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2^a \\ y = 2^{2b} \\ z = 2^{3c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x, y, z \geq 1 \end{cases}.$$

$$S = a + 2b + 3c = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = \log_2 (xyz).$$

$$\text{Ta có } xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 = \left(\frac{4}{3} \right)^3 \Rightarrow S \leq 3 \log_2 \frac{4}{3}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } x = y = z = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Do đó } M = 3 \log_2 \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = 2b = 3c = \log_2 \frac{4}{3}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
 xyz &= (x-1)(y-1)(z-1) + (x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) + (x+y+z) - 2 \\
 &= (x-1)(y-1)(z-1) + (x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) + 2 \geq 2.
 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x=1; y=1; z=2 \\ x=1; y=2; z=1 \\ x=2; y=1; z=1 \end{cases}.$$

Suy ra $m=1$.

Vậy $4^M + \log_M m = \left(\frac{4}{3}\right)^6 = \frac{4096}{729}$.

Bài tập 11. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} = \frac{1}{4}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c + 4d$. Giá trị của biểu thức $\log_2 m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-a} + 2^{-2b} + 2^{-3c} + 2^{-4d} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2^{-a} \\ y = 2^{-2b} \\ z = 2^{-3c} \\ t = 2^{-4d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = \frac{1}{4} \\ x, y, z, t > 0 \end{cases}.$$

$$S = a + 2b + 3c + 4d = -(\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z + \log_2 t) = -\log_2 (xyzt).$$

$$\text{Ta có } xyzt \leq \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4 = \frac{1}{16^4} = 2^{-16} \Rightarrow S \geq 16.$$

Dấu bằng xảy ra $x = y = z = t = \frac{1}{16}$.

$$\text{Do đó } m = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = \frac{4}{3} \\ d = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 12. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}.$$

A. $P_{\min} = 20$.

B. $P_{\min} = 10$.

C. $P_{\min} = 18$.

D. $P_{\min} = 12$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } P = \frac{4}{2 \log_{bc} a} + \frac{1}{\frac{1}{2} \log_{ac} b} + \frac{8}{\log_{ab} c} = 2 \log_a bc + 2 \log_b ac + 8 \log_c ab$$

$$= 2 \log_a b + 2 \log_a c + 2 \log_b a + 2 \log_b c + 8 \log_c a + 8 \log_c b$$

$$= (2 \log_a b + 2 \log_b a) + (2 \log_a c + 8 \log_c a) + (2 \log_b c + 8 \log_c b).$$

Vì a, b, c là các số thực lớn hơn 1 nên: $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b > 0$.

Do đó

áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$P \geq 2\sqrt{2 \log_a b \cdot 2 \log_b a} + 2\sqrt{2 \log_a c \cdot 8 \log_c a} + 2\sqrt{2 \log_b c \cdot 8 \log_c b} = 4 + 8 + 8 = 20.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \log_a b = \log_b a \\ \log_a c = 4 \log_c a \\ \log_b c = 4 \log_c b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a^2 \\ c = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{c} > 1.$$

Vậy $P_{\min} = 20$.

Dạng 5: Bài toán lãi suất

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1: Một người gửi tiết kiệm số tiền 80 000 000 đồng với lãi suất 6,9% một năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được cộng vào tiền gốc, hỏi sau 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

A. 105370000 đồng

B. 111680000 đồng

C. 107667000 đồng

D. 116570000 đồng

Ghi nhớ:

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$S_n = A(1+r)^n$$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi A là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất hàng năm.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ nhất là $S_1 = A + A.r = A(1 + r)$.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ hai là $S_2 = S_1 + S_1.r = A(1 + r)^2$.

...

Số tiền gốc và lãi người đó rút ra được sau 5 năm là

$$S_5 = A.(1 + r)^5 = 80000000.(1 + 6,9\%)^5 \approx 111680799 \text{ (đồng)}$$

Bài tập 2: Một người gửi ngân hàng 100 triệu với lãi suất 0,5% một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được cộng vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?

- A. 45 tháng B. 46 tháng C. 47 tháng D. 44 tháng

Hướng dẫn giải

Chọn A

Sau n tháng, tổng số tiền gốc và lãi là: $100(1 + 0,5\%)^n$.

Theo đề bài: $100(1 + 0,5\%)^n > 125 \Leftrightarrow n > \log_{(1+0,5\%)} \frac{125}{100} \approx 44,74$

Vậy sau ít nhất 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

Từ công thức lãi kép

$$S_n = A(1 + r)^n, \text{ ta suy ra}$$

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right).$$

Bài tập 3: Bác Toàn gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000 đồng. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

- A. 0.8% B. 0,6% C. 0,7% D. 0,5%

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi r là lãi suất tiền gửi của ngân hàng theo tháng. A , S_n lần lượt là số tiền gửi ban đầu và số tiền sau $n = 9$ tháng. Áp dụng công thức lãi kép ta có

Từ công thức lãi kép

$$S_n = A(1 + r)^n, \text{ ta có}$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1.$$

$$S_n = A(1+r)^n \Leftrightarrow 61758000 = 58000000(1+r)^9$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[9]{\frac{61758000}{58000000}} - 1 \approx 7.10^{-3} = 0,7\%$$

Vậy lãi suất ngân hàng hàng tháng là 0,7%

Bài tập 4: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% mỗi tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh trả hết nợ ngân hàng?

- A. 65 B. 66 C. 67 D. 68

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $A = 500$ triệu là số tiền đã vay, $X = 10$ triệu là số tiền trả trong mỗi tháng và $r = 0,85\%$ là lãi suất ngân hàng, n là số tháng anh An phải trả hết nợ.

Theo đề bài:

Cuối tháng thứ nhất anh An còn nợ số tiền là

$$A + Nr - X = A(1+r) - X.$$

Cuối tháng thứ hai anh An còn nợ số tiền là

$$[A(1+r) - X] + [A(1+r) - X]r - X = A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1].$$

Cuối tháng thứ ba anh An còn nợ số tiền là

$$[A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1]](1+r) - X = A(1+r)^3 - X[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$$

...

Cuối tháng thứ n anh An còn nợ số tiền là

$$A(1+r)^n - X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1]$$

Bài toán vay vốn trả góp:

Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng). Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

Cách tính số tiền còn lại sau n tháng là:

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì

$$A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0.$$

Suy ra

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{X}{X - Ar} \right).$$

Đề sau n tháng, anh An trả hết nợ thì

$$A(1+r)^n - X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n = X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1]$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n = X \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{X}{X - Ar} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \left(\frac{X}{X - Ar} \right)$$

$$\text{Áp dụng ta có: } n = \log_{(1+0,0085)} \left(\frac{10}{10 - 500.0,0085} \right) \Leftrightarrow n \approx 65,38.$$

Vậy anh An phải trả trong vòng 66 tháng.

Bài tập 5: Bác An có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Bác gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý; 200 triệu còn lại bác gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, bác rút tất cả số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, bác An thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi? (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

- A. 75,304 triệu đồng B. 75,303 triệu đồng
C. 470,656 triệu đồng D. 475,304 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn A

Công thức tính lãi kép là $S_n = A(1+r)^n$.

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm theo kì hạn quý là:

$$S_1 = 200(1 + 2,1\%)^4 \text{ triệu đồng}$$

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm theo kì hạn tháng là:

$$S_2 = 200(1 + 0,73\%)^{12} \text{ triệu đồng}$$

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm là $S_1 + S_2$ triệu đồng.

Tổng số tiền bác An thu được sau 2 năm là

$$S = (S_1 + S_2)(1 + 0,73\%)^{12} = 475,304 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy tiền lãi bác An thu được sau 2 năm là $L = S - 400 = 75,304$ triệu đồng.

Bài tập 6: Một người vay ngân hàng số tiền 350 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 8 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 0,79% một tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Hỏi số tiền phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 2921000 đồng B. 7084000 đồng
C. 2944000 đồng D. 7140000 đồng

Hướng dẫn giải

Chọn D

Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất nên đây là bài toán vay vốn trả góp cuối kỳ.

Gọi A là số tiền vay ngân hàng, B là số tiền trả trong mỗi chu kỳ, $d = r\%$ là lãi suất cho số tiền chưa trả trên một chu kỳ, n là số kỳ trả nợ.

Số tiền còn nợ ngân hàng (tính cả lãi) trong từng chu kỳ như sau:

+ Đầu kỳ thứ nhất là A

+ Cuối kỳ thứ nhất là $A(1 + d) - B$.

+ Cuối kỳ thứ hai là

$$[A(1 + d) - B](1 + d) - B = A(1 + d)^2 - B[(1 + d) + 1]$$

+ Cuối kỳ thứ ba là

$$[A(1 + d)^2 - B[(1 + d) + 1]](1 + d) - B = A(1 + d)^3 - B[(1 + d)^2 + (1 + d) + 1]$$

...

+ Theo giả thiết quy nạp, cuối kỳ thứ n là

$$A(1 + d)^n - B[(1 + d)^{n-1} + \dots + (1 + d) + 1] = A(1 + d)^n - B \frac{(1 + d)^n - 1}{d}$$

Vậy số tiền còn nợ (tính cả lãi) sau n chu kỳ là

$$A(1+d)^n - B \frac{(1+d)^n - 1}{d}.$$

Người đó trả hết nợ ngân hàng khi $A(1+d)^n - B \frac{(1+d)^n - 1}{d} = 0$

$$\Leftrightarrow 350.1,0079^n - 8. \frac{1,0079^n - 1}{0,0079} = 0 \Leftrightarrow n \approx 53,9.$$

Tức là phải mất 54 tháng người này mới trả hết nợ.

Cuối tháng thứ 53, số tiền còn nợ (tính cả lãi) là

$$S_{53} = 350.1,0079^{53} - 8. \frac{1,0079^{53} - 1}{0,0079} \text{ (triệu đồng)}$$

Kì trả nợ tiếp theo là cuối tháng thứ 54, khi đó phải trả số tiền S_{53} và lãi của số tiền này nữa là $S_{53} + 0,0079.S_{53} = S_{53}.1,0079 \approx 7,139832$ (triệu đồng).

Bài tập 7: Ông A vay dài hạn ngân hàng 300 triệu, với lãi suất 12% năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một năm kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một năm, số tiền hoàn ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 4 năm kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

$$\text{A. } m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1} \text{ (triệu đồng)} \quad \text{B. } m = 36(1,12)^2 \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{C. } m = \frac{36(1,12)^3 - 1}{(1,12)^3} \text{ (triệu đồng)} \quad \text{D. } m = \frac{300(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1} \text{ (triệu đồng)}$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Số tiền nợ sau năm thứ nhất: $T_1 = 300(1+12\%) - m = 300p - m$, với $p = 1+12\% = 1,12$.

Số tiền nợ sau năm thứ hai: $T_2 = (300p - m)p - m = 300p^2 - mp - m$

Số tiền nợ sau năm thứ ba:

$$T_3 = (300p^2 - mp - m)p - m = 300p^3 - mp^2 - mp - m$$

Trả hết nợ sau năm thứ tư: $(300p^3 - mp^2 - mp - m)p - m = 0$

$$\Leftrightarrow 300p^4 - mp^3 - mp^2 - mp - m = 0 \Leftrightarrow 300p^4 - m(p^3 + p^2 + p + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 300p^4 - m \cdot \frac{(p^4 - 1)}{p - 1} = 0 \Leftrightarrow 300(1,12)^4 = m \cdot \frac{[(1,12)^4 - 1]}{0,12}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{300(1,12)^4 \cdot (0,12)}{(1,12)^4 - 1} \Leftrightarrow m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1}.$$

Bài tập 8: Một người mỗi đầu tháng gửi vào ngân hàng T triệu đồng với lãi suất kép 0,6% một tháng. Biết cuối tháng thứ 15 thì số tiền cả gốc lẫn lãi sẽ thu về là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số nào nhất trong các số sau đây?

A. 535000 đồng

B. 635000 đồng

C. 613000 đồng

D. 643000 đồng

Hướng dẫn giải

Chọn B

Sau tháng gửi đầu tiên số tiền cả gốc và lãi thu được là $T(1+r)$

Sau tháng thứ hai số tiền cả gốc và lãi thu được là $T(1+r)^2 + T(1+r)$.

...

Sau tháng thứ 15, số tiền cả gốc và lãi thu được là

$$T(1+r)^n + T(1+r)^{n-1} + \dots + T(1+r).$$

Để số tiền cả gốc lẫn lãi thu về là 10 triệu đồng thì

Bài toán tiền gửi ngân hàng:

Đầu mỗi tháng, khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép r (% / tháng) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là

$$S_n = \frac{A}{r} [(1+r)^n - 1](1+r).$$

$$T(1+r)^{15} + T(1+r)^{14} + \dots + T(1+r) = 10000000$$

$$\Leftrightarrow T(1+r) \frac{(1+r)^{15} - 1}{r} = 10000000 \Rightarrow T \approx 635.000 \text{ (đồng)}.$$

Bài tập 9: Một huyện A có 100 000 dân. Với mức tăng dân số bình quân 1,8% năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số sẽ vượt 150 000 dân.

- A. 22 B. 23 C. 27 D. 28

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử sau n năm nữa thì dân số sẽ vượt 150 000 dân.

Áp dụng công thức: $X' = X(1+r)^n$.

$$\text{Suy ra } n = \log_{1+r} \left(\frac{X'}{X} \right) = \log_{1+1,8\%} \frac{150000}{100000} = 22,72796911.$$

Bài tập 10: Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục Thống kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là 90728900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030, dân số của Việt Nam là:

- A. 106118331 người B. 198049810 người
C. 107232574 người D. 108358516 người

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng công thức: $X_{2030} = X_{2014}(1+r)^n$

Trong đó: $X_{2014} = 90728900$; $r = 1,05$; $n = 16$

Ta được dân số đến hết năm 2030 là: $X_{2030} = 107232574$.

Bài tập 11: Trong vật lý, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kỳ bán rã (tức là

Công thức tính tăng trưởng dân số:

$$X_m = X_n(1+r)^{m-n}$$

$$(m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n)$$

Trong đó: $r\%$ là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m ; X_m dân số năm m , X_n dân số năm n .

khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cabon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu gam?

- A. $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ B. $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{t \ln 2}{5730}}$
- C. $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100t}{5730}}$ D. $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{100t}{5730}}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo công thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ ta có:

$$m(t) = 100 \cdot \frac{1}{2}^{\frac{t}{5730}}$$

Bài tập 12: Cường độ ánh sáng đi qua môi trường khác không khí (chẳng hạn sương mù, nước,...) sẽ giảm dần tùy thuộc độ dày của môi trường và hằng số μ gọi là khả năng hấp thụ của môi trường, tùy thuộc môi trường thì khả năng hấp thụ tính theo công thức $I = I_0 e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và được tính bằng đơn vị mét. Biết rằng nước biển có $\mu = 1,4$. Hãy tính cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu khi từ độ sâu 2m xuống đến 20m?

- A. $e^{25,2}$ B. $e^{22,5}$ C. $e^{32,5}$ D. $e^{52,5}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cường độ ánh sáng thay đổi khi từ độ sâu x_1 đến độ sâu x_2 là:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 e^{-\mu x_1}}{I_0 e^{-\mu x_2}} = e^{\mu(x_2 - x_1)}.$$

Thay $x_1 = 2$; $x_2 = 20$, $\mu = 1,4$ ta có $\frac{I_1}{I_2} = e^{25,2}$.

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ cơ bản là phương trình có dạng $a^x = b$ ($a > 0; a \neq 1$)

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có duy nhất một nghiệm $x = \log_a b$;
- Nếu $b = 0$ hoặc $b < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x), (a > 0, a \neq 1)$$

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$$\alpha a^{2x} + \beta a^x + \gamma = 0. \text{ Đặt } t = a^x, (t > 0)$$

c) Logarit hóa

$$\text{Nếu phương trình cho ở dạng } a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}.$$

II. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Phương trình logarit cơ bản: là phương trình có dạng $\log_a x = b$ với $0 < a \neq 1$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

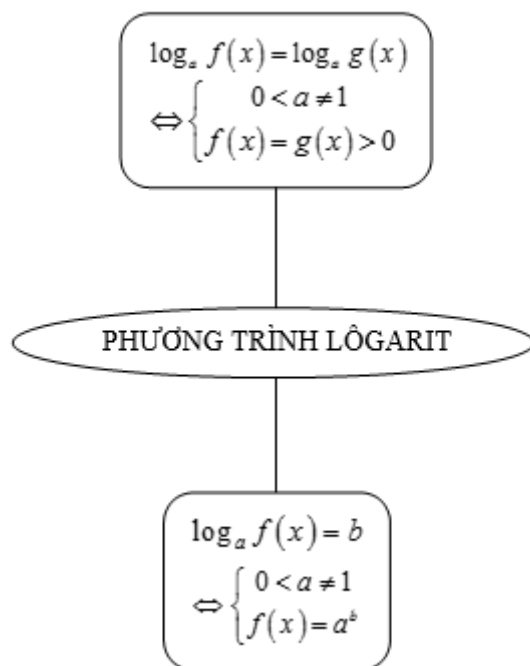
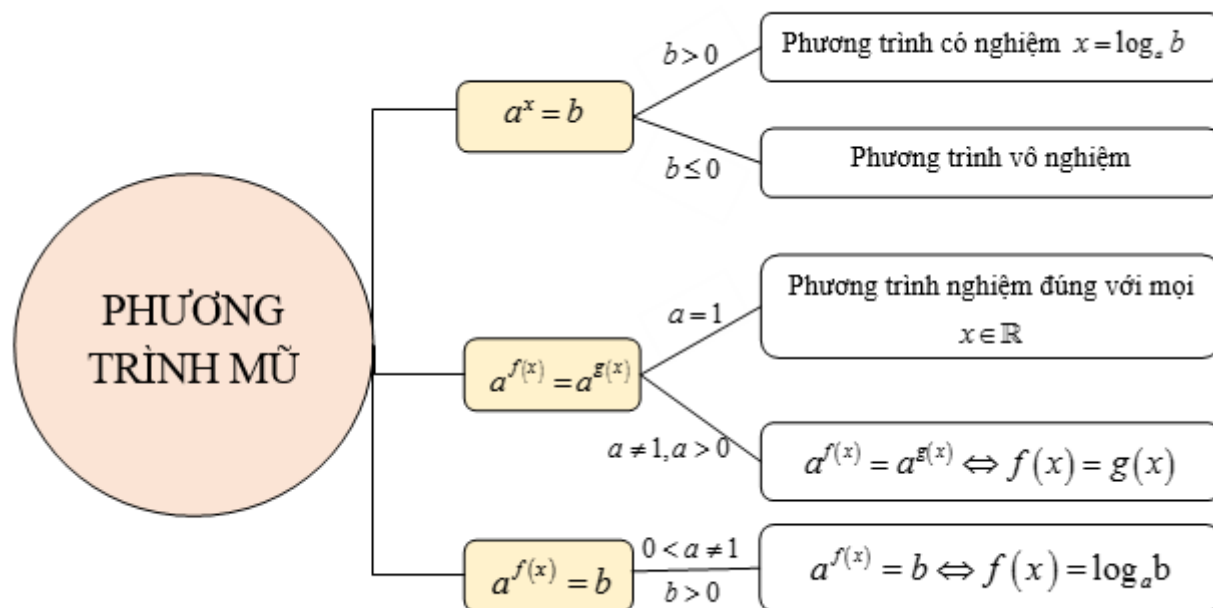
b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$$\alpha \log_a^2 x + \beta \log_a x + \gamma = 0. \text{ Đặt } t = \log_a x, (x > 0)$$

c) Mũ hóa

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

HỆ THỐNG HÓA BẢNG SƠ ĐỒ



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

Phương pháp đưa phương trình mũ về cùng cơ số

- Biến đổi các hàm số có mặt trong phương trình về cùng cơ số, sau đó rút gọn, đưa về dạng cơ bản hoặc về dạng: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. (Với $0 < a \neq 1$). (Thường gặp)

- Nếu cơ số a thay đổi thì: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$ (Ít gặp).

Phương pháp đưa phương trình loga về cùng cơ số

Biến đổi phương trình để đưa về dạng cơ bản đã nêu hoặc là dạng: $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm tích số của tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$

A. -1.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7} \Leftrightarrow 7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 7^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Khi đó tích các nghiệm là: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1$.

Bài tập 2. Cho phương trình $(7+4\sqrt{3})^{x^2+x-1} = (2+\sqrt{3})^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình có hai nghiệm không dương.

B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải

Chọn A

Do $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$(2 + \sqrt{3})^{2(x^2+x-1)} = (2 + \sqrt{3})^{x-2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương.

Bài tập 3. Phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Vô nghiệm. B. Một nghiệm. **C. Hai nghiệm.** D. Ba nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-4 < x < 4$ và $x \neq -1$.

$$\text{Ta có } \log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3 \Leftrightarrow \log_2 (4|x+1|) = \log_2 [(4-x)(4+x)]$$

$$\Leftrightarrow 4|x+1| = 16 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1) = 16 - x^2 \\ 4(x+1) = x^2 - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 12 = 0 \\ x^2 - 4x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \\ x = 2 + 2\sqrt{6} \\ x = 2 - 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 2 - 2\sqrt{6}$.

Bài tập 4. Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$ là

- A.** $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. B. $S = \{2\}$. C. $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$. D. $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow -2x+1=2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Cách trắc nghiệm: Nhập VT phương trình vào máy tính, dùng nút Calc thử các nghiệm.

Bài tập 5. Phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25 \cdot (\sqrt{2})^{7x}$ có tích các nghiệm bằng?

- A. $\frac{4}{7}$. B. $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2}{7}$. D. $\frac{1}{2}$.
-

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25 \cdot (\sqrt{2})^{7x} \Leftrightarrow 2^{3 \cdot \frac{2x-1}{x+1}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7x}{2}} \Leftrightarrow 2^{3 \cdot \frac{2x-1}{x+1}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7x}{2}} \Leftrightarrow 2^{3 \cdot \frac{2x-1}{x+1}} = 2^{\frac{7x-4}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2x-1}{x+1} = \frac{7x-4}{2} \Leftrightarrow 7x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Vậy tích các nghiệm bằng $1 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$.

Bài tập 6. Tìm số nghiệm của phương trình $27^{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{\sqrt{3}^{7x}}{243}$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq 1$.

$$\text{Ta có: } 27^{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{3^{\frac{7x}{2}}}{3^5} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-6}{x-1}} = 3^{\frac{7x-10}{2}} \Leftrightarrow \frac{3x-6}{x-1} = \frac{7x-10}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6x - 12 = (7x - 10)(x - 1) \Leftrightarrow 7x^2 - 23x + 22 = 0 \text{ (PT vô nghiệm)}$$

Bài tập 7. Cho phương trình $2\log_3(x^3 + 1) = \log_3(2x - 1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(x + 1)$. Tổng các nghiệm của phương trình là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^3 + 1 > 0 \\ (2x - 1)^2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } 2\log_3(x^3 + 1) = \log_3(2x - 1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x^3 + 1) = 2\log_3|2x - 1| + 2\log_3(x + 1) \Leftrightarrow \log_3(x^3 + 1) = \log_3|2x - 1|(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 1 = |2x - 1|(x + 1)$$

Trường hợp 1: $x > \frac{1}{2}$. Ta có: $x^3 + 1 = |2x - 1|(x + 1) \Leftrightarrow x^3 + 1 = (2x - 1)(x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 1. \text{ So sánh điều kiện nên } x = 2 \vee x = 1.$$

Trường hợp 2: $x < \frac{1}{2}$. Ta có: $x^3 + 1 = |2x - 1|(x + 1) \Leftrightarrow x^3 + 1 = (1 - 2x)(x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ So sánh điều kiện nên } x = 0.$$

Kết luận: Tổng các nghiệm của phương trình là $0 + 1 + 2 = 3$.

Bài tập 8. Cho n là số nguyên dương và $a > 0$, $a \neq 1$. Tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019.$$

A. $n = 2017$.

B. $n = 2016$.

C. $n = 2018$.

D. $n = 2019$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow \log_a 2019 + 2 \cdot \log_a 2019 + 3 \cdot \log_a 2019 + \dots + n \cdot \log_a 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot \log_a 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} - 2033136 \right) \cdot \log_a 2019 = 0 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 2033136 \Leftrightarrow n^2 + n - 4066272 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2016 \\ n = -2017 \end{cases}.$$

Do n là số nguyên dương nên $n = 2016$.

Bài tập 9. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2\log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0$ là:

A. 8.

B. $8 + \sqrt{2}$.

C. $8 - \sqrt{2}$.

D. $4 + \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 5 \end{cases}.$$

$$2\log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\log_4[(x-3)(|x-5|)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(|x-5|) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-5) = 1 & \text{khi } x > 5 \\ (x-3)(5-x) = 1 & \text{khi } 3 < x < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 1 & \text{khi } x > 5 \\ -x^2 + 8x - 15 = 1 & \text{khi } 3 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + \sqrt{2} \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $8 + \sqrt{2}$.

Bài tập 10. Giải phương trình $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2018} x} = 2018$ có nghiệm là

- A. $x = 2018.2018!$. **B.** $x = \sqrt[2018]{2018!}$. C. $x = 2017!$. **D.** $x = (2018!)^{2018}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2018} x} = 2018 \Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x 3 + \dots + \log_x 2018 = 2018$$

$$\Leftrightarrow \log_x (2.3 \dots 2018) = 2018 \Leftrightarrow \log_x (2018!) = 2018 \Leftrightarrow x^{2018} = 2018! \Leftrightarrow x = \sqrt[2018]{2018!}.$$

Bài tập 11. Số nghiệm của phương trình: $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là

- A. 0. B. 2. C. 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có: } \log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log_2 x)^{\frac{3}{2}} = 4 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ thỏa điều kiện.}$$

Bài tập 12. Phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}} = \frac{9}{16}$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tổng $S = x_1 + x_2$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Đk: $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Xét phương trình } \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}} &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{x}} = \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{x}} &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{4}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) và $1 \cdot (-4) < 0$ nên

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 2$. Vậy $S = 2$.

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

Loại 1: Phương trình có dạng $b_k a^{kf(x)} + b_{k-1} a^{(k-1)f(x)} + \dots + b_1 a^{f(x)} + b_0 = 0$

Khi đó ta đặt: $t = a^{f(x)}$ điều kiện: $t > 0$. Ta được một phương trình đại số ẩn t , giải pt đại số này ta biết được nghiệm của phương trình ẩn t .

Nếu có nghiệm t thì cần xét xem có thỏa điều kiện $t > 0$ hay không. Nếu thỏa điều kiện thì giải phương trình $t = a^{f(x)}$ để tìm nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ: $4^{x+1} - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^{x+1})^2 - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

Đặt $t = 2^{x+1}$. Điều kiện $t > 0$. Ta có $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$

☞ Với $t = 2$ ta có $2^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0$

☞ Với $t = 4$ ta có $2^{x+1} = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0$ và $x = 1$.

Loại 2: Phương trình đưa được về dạng: $\alpha_1 a^{f(x)} + \frac{\alpha_2}{a^{f(x)}} + \alpha_3 = 0$

Hướng giải: Đặt $t = a^{f(x)}$.

Ví dụ 1: Giải phương trình $5^{x-1} + 5^{3-x} = 26 \Leftrightarrow \frac{5^x}{5} + \frac{125}{5^x} - 26 = 0$

Đặt $t = 5^x; t > 0$ Ta được phương trình: $\frac{t}{5} + \frac{125}{t} - 26 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2}{5} - 26t + 125 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 125 & (\text{nhận}) \\ t = 5 & (\text{nhận}) \end{cases}$

☞ Với $t = 125$ ta có $5^x = 125 \Leftrightarrow x = 3$.

☞ Với $t = 5$ ta có $5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 1$ và $x = 3$.

Lưu ý: Một số những cặp số là nghịch đảo của nhau. Ví dụ: $\sqrt{2} \pm 1$; $2 \pm \sqrt{3}$; $3 \pm \sqrt{8}$,...

Loại 3: Phương trình có dạng: $\alpha_1 a^{2f(x)} + \alpha_2 (ab)^{f(x)} + \alpha_3 b^{2f(x)} = 0$

Hướng giải: Chia cả hai vế cho $b^{2f(x)}$ ta được phương trình $\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + \alpha_3 = 0$

Ta đặt: $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$ điều kiện: $t > 0$, giải phương trình ẩn t , sau đó tìm nghiệm x .

Chú ý: Cũng có thể chia hai vế phương trình cho: $(ab)^{f(x)}$ hoặc: $a^{2f(x)}$.

Ví dụ: Giải phương trình $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$.

$$9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2 (\text{Vô nghiệm}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Một số dạng phương trình logarit sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ thường gặp:

Ví dụ 1: Giải phương trình $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$.

Phân tích: Ta nhận thấy trong phương trình chỉ có một hàm số lôgarit duy nhất, đó là $\lg x$. Vì vậy ta giải pt bằng cách đặt $t = \lg x$.

Đặt $t = \lg x$ đk $t \neq 5$ và $t \neq -1$. Ta được phương trình:

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Leftrightarrow \frac{-t+11}{(5-t)(1+t)} = 1 \Rightarrow -t+11 = 5-4t-t^2 \Leftrightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 & (\text{thỏa điều kiện}) \\ t=3 & (\text{thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

☞ Với $t = 2$ ta có $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$

☞ Với $t = 3$ ta có $\lg x = 3 \Leftrightarrow x = 1000$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 100$; $x = 1000$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log_2^2(x-1)^2 + \log_2(x-1)^3 = 7$.

Điều kiện: $x > 1$

$$\log_2^2(x-1)^2 + \log_2(x-1)^3 = 7 \Leftrightarrow 4\log_2^2(x-1) + 3\log_2(x-1) - 7 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(x-1), \text{ ta được phương trình: } 4t^2 + 3t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-7}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Với } t = 1 \quad \text{ta có } \log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \text{Với } t = \frac{-7}{4} \text{ ta có } \log_2(x-1) = \frac{-7}{4} \Leftrightarrow x-1 = 2^{\frac{-7}{4}} \Leftrightarrow x = 1 + 2^{\frac{-7}{4}}. \text{ Kết luận:....}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ có tích các nghiệm là:

A. -1.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x} + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{2x} - 2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}-1 \\ (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là -1.

Bài tập 2. Phương trình $9^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 4^{x+1} = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Phương trình có 2 nghiệm nguyên.

B. Phương trình có 2 nghiệm vô tỉ.

C. Phương trình có 1 nghiệm dương.

D. Phương trình có 2 nghiệm dương.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 9^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 4^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 4 \cdot 4^x = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{9^x}{4^x} - 13 \cdot \frac{6^x}{4^x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Bài tập 3. Tính tổng của tất cả các nghiệm thực của phương trình $(3^x - 9)^3 + (9^x - 3)^3 = (9^x + 3^x - 12)^3$.

- A. 3. **B.** $\frac{7}{2}$. C. 4. D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 3^x - 9 \\ b = 9^x - 3 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 \Leftrightarrow 3ab(a+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a+b = 0 \end{cases}.$$

- $a = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- $b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
- $a + b = 0 \Leftrightarrow 9^x + 3^x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x = -4 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình là $\frac{7}{2}$.

Bài tập 4. Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$ bằng

- A. $\frac{7}{25}$. B. $\frac{630}{625}$. **C.** $\frac{1}{125}$. D. 630.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0 < x \neq 1$, ta có:

$$\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x + \log_{25}^2 x \cdot \log_x 125 = 1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x + \frac{3}{2}\log_{25} x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{25} x = \frac{1}{2} \\ \log_{25} x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{25^2} \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là: $\frac{1}{125}$.

Bài tập 5. Phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$

A. Có hai nghiệm dương.

B. Vô nghiệm.

C. Có một nghiệm âm. **D.** Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm dương.

Bài tập 6. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} + 2^{x^2-x-2} = 4^{x^2-x-1} + 1$. Số phần tử của tập S là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Xét phương trình: } 2^{x^2-x} + 2^{x^2-x-2} = 4^{x^2-x-1} + 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} + \frac{2^{x^2-x}}{4} = 4^{x^2-x-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{x^2-x} + 2^{x^2-x} = 4 \cdot 4^{x^2-x-1} + 4 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x^2-x} = 2^{2(x^2-x)} + 4$$

$$\Leftrightarrow 2^{2(x^2-x)} - 5 \cdot 2^{x^2-x} + 4 = 0. \text{ Đặt } t = 2^{x^2-x}, t > 0$$

$$\text{Phương trình trở thành: } t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 4 \Rightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-1; 0; 1; 2\}$ có 4 phần tử.

Bài tập 7. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x} - 6^{\log x} - 18.3^{2\log x} = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi đánh giá về a .

A. $(a-10)^2 = 1$.

B. $a^2 + a + 1 = 2$.

C. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}$.

D. $a = 10^2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Chia hai vế cho $3^{2\log x}$ ta được phương trình:

$$4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2\log x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = -2 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}.$$

Bài tập 8. Biết phương trình $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = (x_1)^{x_2}$

A. $T = 64$.

B. $T = 32$.

C. $T = 8$.

D. $T = 16$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Ta có: $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7 \Leftrightarrow 2\log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} = 7$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x - 7\log_2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2}; x_2 = 8 \Rightarrow T = (x_1)^{x_2} = (\sqrt{2})^8 = 16.$$

Bài tập 9. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^2+1} - 5.2^{x^2+3x} + 2^{6x+1} = 0$ bằng

A. 4.

B. 10.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x^2+1} - 5.2^{x^2+3x} + 2^{6x+1} = 0 \Leftrightarrow 2.2^{2x^2} - 5.2^{x^2+3x} + 2.2^{6x} = 0$.

Vì $2^{6x} > 0$, chia cả 2 vế của phương trình cho 2^{6x} , ta được $2.2^{2x^2-6x} - 5.2^{x^2-3x} + 2 = 0$.

Đặt $t = 2^{x^2-3x}$, điều kiện $t > 0$.

Ta có phương trình: $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(N) \\ t = \frac{1}{2}(N) \end{cases}$.

+ Với $t = 2 \Rightarrow 2^{x^2-3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

+ Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{x^2-3x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng 6.

Bài tập 10. Cho phương trình $\log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1$. Khi đặt $t = \log_5(5^x - 1)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2 - 1 = 0$.

B. $t^2 + t - 2 = 0$.

C. $t^2 - 2 = 0$.

D. $2t^2 + 2t - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

$\log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1 \quad (1)$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

Ta có $\log_{25}(5^{x+1} - 5) = \log_{5^2}(5 \cdot 5^x - 5) = \frac{1}{2}(\log_5(5^x - 1) + 1)$.

Đặt $t = \log_5(5^x - 1)$ ($t > 0$).

Phương trình (1) trở thành $t \cdot \frac{1}{2}(t + 1) = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$.

Bài tập 11. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x} - 6^{\log x} - 18.3^{2\log x} = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a ?

A. $(a-10)^2 = 1$.

B. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}$.

C. $a^2 + a + 1 = 2$.

D. $a = 10^2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > 0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\log x}$ ta được $4\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} - 18 = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}$, $t > 0$.

Ta có $4t^2 - t - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{4} \\ t = -2(L) \end{cases}$.

Với $t = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

Vậy $a = 100 = 10^2$.

Bài tập 12. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$

A. $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

B. 1.

C. $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{\log_2 x + 1} = t$, ($t \geq 0$) $\Rightarrow \log_2 x = t^2 - 1$ ta có phương trình

$$(t^2 - 1)^2 + t = 1 \Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t(t^3 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2 - 2t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = 1 \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 0$ thì $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1}$.

Với $t = 1$ thì $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 2^0$.

Với $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ thì $\log_2 x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $2^{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$.

Bài tập 13. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 2^{1 + \cos^2 x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $4 \leq m \leq 3\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{2} \leq m \leq 5$.

C. $0 < m \leq 5$.

D. $4 \leq m \leq 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{\sin^2 x} + 2^{1 + \cos^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 2^{2 - \sin^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + \frac{4}{2^{\sin^2 x}} = m \quad (*)$.

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$, $t \in [1; 2]$, $(*)$ trở thành $t + \frac{4}{t} = m$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t}$ với $t \in [1; 2]$. Ta có $f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} = \frac{t^2 - 4}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin (1; 2) \\ t = -2 \notin (1; 2) \end{cases}$.

Khi đó $f(1) = 5$; $f(2) = 4$. Do đó $\min_{[1; 2]} f(t) = 4$ và $\max_{[1; 2]} f(t) = 5$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t \in [1; 2]$

$\Leftrightarrow \min_{[1; 2]} f(t) \leq m \leq \max_{[1; 2]} f(t) \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 5$.

Vậy: $4 \leq m \leq 5$.

Bài tập 14. Cho phương trình $4^{\sqrt{1-x^2}} - (m-2) \cdot 2^{\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để phương trình có nghiệm?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \in [-1; 1]$.

Với $\forall x \in [-1; 1]$ thì $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$, do đó, $2^0 \leq 2^{\sqrt{1-x^2}} \leq 2^1$ hay $1 \leq 2^{\sqrt{1-x^2}} \leq 2$.

Đặt $t = 2^{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow t \in [1; 2]$. Phương trình trở thành: $t^2 - (m-2)t + 2m+1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = m(t-2) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 2t + 1}{t-2} = m \text{ (do } t=2 \text{ không là nghiệm của phương trình).}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{t-2}$ trên $[1; 2]$.

$$\text{Có } f'(x) = \frac{t^2 - 4t - 5}{(t-2)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [1; 2) \\ x = 5 \notin [1; 2) \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên

Do đó, để phương trình đã cho có nghiệm thì $m \leq -4$.

Suy ra, giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để phương trình có nghiệm là

$$m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4\}.$$

Vậy có 7 giá trị cần tìm của m .

Bài tập 15. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 2m = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0 \text{ phương trình trở thành } t^2 - 2m \cdot t + 2m = 0 \quad (2).$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ điều kiện là phương trình (2) có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$ thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 8$. Vậy điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ -\frac{b}{a} = 2m > 0 \\ \frac{c}{a} = 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Bài tập 16. Cho phương trình $\log_2^2 x - (m^2 - 3m)\log_2 x + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$.

A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_2^2 x - (m^2 - 3m)\log_2 x + 3 = 0 \quad (1).$$

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Đặt } \log_2 x = t. \text{ Ta được phương trình } t^2 - (m^2 - 3m)t + 3 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Ta có: } x_1 x_2 = 16 \Leftrightarrow \log_2(x_1 x_2) = 4 \Leftrightarrow \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 4.$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$.

$$\text{Vậy suy ra } m^2 - 3m = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài tập 17. Giá trị của m để phương trình $9^x + 3^x + m = 0$ có nghiệm là:

A. $m > 0$.

B. $m < 0$.

C. $m > 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 3^x$ với $t > 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t + m = 0$ (*).

Phương trình đề cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có ít nhất một nghiệm dương.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 + t \text{ có } f'(t) = 2t + 1. \text{ Xét } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$				0		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $t^2 + t = -m$ có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Bài tập 18. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi phương trình $t^2 - 2m.t + 2m = 0$ có 2 nghiệm $t > 0$ thỏa mãn $t_1.t_2 = 2^{x_1}.2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 8$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1.t_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

Bài tập 19. Với điều kiện nào sau đây của m thì phương trình $9^x - m.3^x + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $|m| > 2\sqrt{6}$.

B. $|m| > \sqrt{6}$.

C. $m > \sqrt{6}$.

D. $m > 2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3^x (t > 0)$ thì phương trình trở thành $t^2 - mt + 6 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 24 > 0 \\ m > 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2\sqrt{6} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt{6}.$$

Bài tập 20. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình $9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m > 1$ hoặc $m < \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{6}}{2}$.
C. $\frac{1}{2} < m < 1$. **D.** $m > \frac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m < \frac{3-\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0 \Leftrightarrow 9^{(x-1)^2} - (2m+1)15^{(x-1)^2} + (4m-2)25^{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2(x-1)^2} - (2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} + 4m-2 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$. Do $(x-1)^2 \geq 0$ nên $0 < t \leq 1$.

Phương trình có dạng: $t^2 - (2m+1)t + 4m-2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2m-1 \end{cases}$. Do $0 < t \leq 1$ nên $t = 2m-1$.

Để phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt thì $0 < 2m-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$.

Bài tập 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4 \cdot 4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $-1 < m < \frac{-1}{2}$. **B.** $m > 4+3\sqrt{2}$ hoặc $m < 4-3\sqrt{2}$.

C. $4-3\sqrt{2} < m < 4+3\sqrt{2}$. **D.** $m > -1$ hoặc $m < \frac{-1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại phương trình ta được: $\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2+2x+1} + (2m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1} - (6m+3) = 0$.

Ta không lấy giá trị $x = 0$ nên tại $m = 0$ đường thẳng $y = m$ vẫn cắt đồ thị tại duy nhất một điểm (điểm tiếp xúc tại $x = 3$).

Bài tập 23. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là

A. $\{3\}$.

B. $\{2\}$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2^{x^2}$. Do $x^2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$.

Ta có phương trình $t^2 - 4t + 6 - m = 0$ (1).

Do với mỗi $t > 1$ thì có hai nghiệm $x = \pm \sqrt{\log_2 t}$, còn với $t = 1$ chỉ có một nghiệm $x = 0$. Nên để phương trình ban đầu có đúng 3 nghiệm thì phương trình (1) có một nghiệm $t_1 = 1$ và một nghiệm $t_2 > 1$.

Phương trình (1) có nghiệm $t = 1$ khi $1 - 4 + 6 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Thay $m = 3$ vào (1), ta có: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$. Vậy $m = 3$ thỏa mãn.

Bài tập 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ có nghiệm thực?

A. 9.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} m + e^x \geq 0 \\ m + \sqrt{m + e^x} \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{m + e^x}$ ($t \geq 0$) ta suy ra: $\begin{cases} m + t = e^{2x} \\ t^2 = m + e^x \end{cases}$

$\Rightarrow e^{2x} - t^2 = t - e^x \Leftrightarrow (e^x - t)(e^x + t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - t = 0 & (1) \\ e^x + t + 1 = 0 & (2) \end{cases}$.

Phương trình (2) vô nghiệm vì $e^x + t + 1 > 0$.

Phương trình (1) tương đương với $e^x = t \Leftrightarrow e^x = \sqrt{m + e^x} \Leftrightarrow m = e^{2x} - e^x$ (3)

Phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x$ (*) có nghiệm thực khi phương trình (3) có nghiệm thực.

Xét hàm số $f(x)=e^{2x}-e^x$ với $x \in \mathbb{R}$, ta có: $f'(x)=2e^{2x}-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) \Leftrightarrow e^{2x}-e^x$ là

Lập bảng biến thiên

Số nghiệm của (3) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=e^{2x}-e^x$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình (3) có nghiệm khi $m \geq -\frac{1}{4}$.

Kết hợp với giả thiết m là số nguyên nhỏ hơn 10 ta suy ra $m \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Dạng 3: Phương pháp logarit hóa, mũ hóa

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1. Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 4$.

B. $S = 5$.

C. $S = 6$.

D. $S = 8$.

3. Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 0$.

$$\text{Phương trình } 27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72 \Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)} \cdot 2^x = 3^2 \cdot 2^3 \Leftrightarrow \frac{3^{\frac{3x-3}{x}}}{3^2} = \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2} = 2^{3-x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = \log_3 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = -(x-3) \log_3 2 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{x} + \log_3 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ -\log_3 2 = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3(N) \\ x=-\log_2 3(N) \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$. Vậy tổng $S = a + b = 5$.

Bài tập 2. Phương trình $\log_2(5-2^x) = 2-x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $P = x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

A. 11.

B. 9.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2^x < 5$

$$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 2.$$

Bài tập 3. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2} \cdot 3^{-x} = 1$. Tìm S.

A. $S = \log_7 3$.

B. $S = \log_3 7$.

C. $S = \log_2 3$.

D. $S = \log_3 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

$$7^{x^2} \cdot 3^{-x} = 1 \Leftrightarrow \log_3(7^{x^2} \cdot 3^{-x}) = \log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 7^{x^2} + \log_3 3^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \log_3 7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x \log_3 7 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\log_3 7} = \log_7 3 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là $S = \log_7 3$.

Lấy logarit cơ số 3
hoặc cơ số 7 hai vế.

Bài tập 4. Phương trình $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$ có một nghiệm dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Giá trị của $P = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

A. $P = 8$.

B. $P = 5$.

C. $P = 13$.

D. $P = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15 \Leftrightarrow \frac{3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}}}{3 \cdot 5} = 1 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \log_3 \left(3^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{x-1} + \log_3 5^{\frac{x-1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x-1 + \frac{x-1}{x} \cdot \log_3 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \cdot \log_3 5 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\log_3 5 \end{cases}$$

Vậy $a = 3, b = 5$ suy ra $a + 2b = 13$.

Dạng 4: Phương biến đổi thành tích

1. Phương pháp

(thường sử dụng trong trường hợp hai vế không cùng cơ số).

Hướng giải: Biến đổi phương trình về dạng:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b. (0 < a, b \neq 1, 0 < c \neq 1).$$

Lưu ý: Ta thường lôgarit hóa hai vế với cơ số a hoặc b.

2. Bài tập

Bài tập 1. Giải phương trình $\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 35.

B. 5.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

$$\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x \Leftrightarrow (\log_2 x + x - 3)(\log_3 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \log_2 x + x - 3 = 0 \end{cases}$$

Ta có hàm số $f(x) = \log_2 x + x$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $f(2) = 3$ nên phương trình $\log_2 x + x - 3 = 0$ có một nghiệm $x = 2$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng 5.

Bài tập 2. Số nghiệm của phương trình $4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2x} + 25 \cdot 2^x = 100 + 100^{\frac{x}{2}}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. vô nghiệm.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2x} + 25 \cdot 2^x = 100 + 100^{\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 5^x + 25 \cdot 2^x = 100 + 10^x \Leftrightarrow (4 - 2^x) \cdot (5^x - 25) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Bài tập 3. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x \cdot \log_3 (2x-1) = 2 \log_2 x$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐK: } x > \frac{1}{2}.$$

$$\log_2 x \cdot \log_3 (2x-1) = 2 \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot (\log_3 (2x-1) - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_3 (2x-1) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x-1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (n)} \\ x = 5 \text{ (n)} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài tập 3. Biết n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x - 3^{-x} = 2 \cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x + 9^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx$.

A. 4036.

B. 2018.

C. 4035.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

$$9^x + 9^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx \Leftrightarrow 9^x + 9^{-x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} = 2 + 2 \cos 2nx$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3^{-x})^2 = 4 \cos^2 nx \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 3^{-x} = 2 \cos nx \text{ (1)} \\ 3^x - 3^{-x} = -2 \cos nx \text{ (2)} \end{cases}$$

Khi đó nếu (1) và (2) có nghiệm chung thì $3^x - 3^{-x} = 3^{-x} - 3^x \Leftrightarrow 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = 0$

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $3^0 - 3^0 = 2 \cos 0 \Leftrightarrow 0 = 2$, tức là (1) và (2) không có nghiệm chung.

Mặt khác ta thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ sẽ là nghiệm của (2)

Mà (1) có 2018 nghiệm nên (2) cũng có 2018 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4036 nghiệm.

Bài tập 4. Cho phương trình $\log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 |x - \sqrt{x^2 - 1}|$. Biết phương trình có

một nghiệm là 1 và một nghiệm còn lại có dạng $x = \frac{1}{2} (a^{\log_b c} + a^{-\log_b c})$ (với a, c là các số nguyên tố và $a > c$). Khi đó giá trị của $a^2 - 2b + 3c$ bằng:

A. 0.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2 - 1}|$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 6 \cdot \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) [\log_3 6 \cdot \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0 & (1) \\ \log_3 6 \cdot \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 6 = -1 \Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 3$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 2^{\log_6 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2^{\log_6 3} \\ x^2 - 1 = (2^{\log_6 3} - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(2^{\log_6 3} + 2^{-\log_6 3}).$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}). \text{ (thỏa mãn } (*))$$

Như vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 1$, $x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$.

Khi đó $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$. Vậy $a^2 - 2b + 3c = 3$.

Bài tập 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2 - 7x + 12} + 3^{2x - x^2} = 9 \cdot 3^{10 - 5x} + m$ có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S .

A. 3.

B. Vô số.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $m.3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9.3^{10-5x} + m \Leftrightarrow m(3^{x^2-7x+12} - 1) - 3^{2x-x^2}(3^{x^2-7x+12} - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (3^{x^2-7x+12} - 1)(m - 3^{2x-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-7x+12} - 1 = 0 \\ m - 3^{2x-x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ 2x - x^2 - \log_3 m = 0 (*) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt, ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: (*) có một nghiệm $x = 3$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4.

Thay $x = 3$ vào (*) ta được $\log_3 m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}$. Khi đó (*) trở thành

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (Thỏa yêu cầu).}$$

Trường hợp 2: (*) có một nghiệm $x = 4$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4.

Thay $x = 4$ vào (*) ta được $\log_3 m = -8 \Leftrightarrow m = 3^{-8}$.

Khi đó (*) trở thành $-x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$ (Thỏa yêu cầu).

Trường hợp 3: (*) có nghiệm kép khác 3 và 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - \log_3 m = 0 \\ \log_3 m \neq -3 \\ \log_3 m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Bài tập 6. Phương trình $\ln\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{8}\right) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x - \frac{1}{2} > 0 \\ x + \frac{1}{2} > 0 \\ x + \frac{1}{4} > 0 \\ x + \frac{1}{8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{4} \\ x > -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Khi đó:

$$\ln\left(x-\frac{1}{2}\right).\ln\left(x+\frac{1}{2}\right).\ln\left(x+\frac{1}{4}\right).\ln\left(x+\frac{1}{8}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \\ \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)=0 \\ \ln\left(x+\frac{1}{4}\right)=0 \\ \ln\left(x+\frac{1}{8}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}=1 \\ x+\frac{1}{2}=1 \\ x+\frac{1}{4}=1 \\ x+\frac{1}{8}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{4} \\ x=\frac{7}{8} \end{cases}.$$

So với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Bài tập 7. Gọi a là một nghiệm của phương trình $(26+15\sqrt{3})^x + 2(7+4\sqrt{3})^x - 2(2-\sqrt{3})^x = 1$. Khi đó giá trị của biểu thức nào sau đây là đúng?

- A.** $a^2 + a = 2$. **B.** $\sin^2 a + \cos a = 1$. **C.** $2 + \cos a = 2$. **D.** $3^a + 2a = 5$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } (26+15\sqrt{3})^x + 2(7+4\sqrt{3})^x - 2(2-\sqrt{3})^x = 1.$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{3x} + 2(2+\sqrt{3})^{2x} - 2(2+\sqrt{3})^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{4x} + 2(2+\sqrt{3})^{3x} - (2+\sqrt{3})^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(2+\sqrt{3})^{3x} - 1\right] \left[(2+\sqrt{3})^x + 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \sin^2 a + \cos a = 1.$$

Bài tập 8. Gọi A là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho tập nghiệm của phương trình $x.2^x = x(x-m+1) + m(2^x-1)$ có hai phần tử. Tìm số phần tử của A .

- A.** 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét phương trình } x.2^x = x(x-m+1) + m(2^x-1)$$

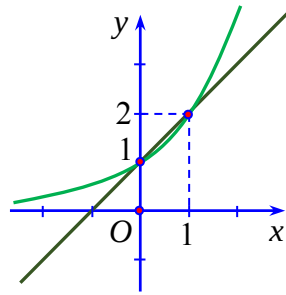
$$\Leftrightarrow (x-m)(2^x - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 2^x = x + 1 \end{cases}$$

Mà phương trình $2^x = x + 1$ có hai nghiệm là $x = 0$; $x = 1$.

Thật vậy: dựa vào hình vẽ

○ Với $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$ thì $2^x \geq x + 1$, đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

○ Với $0 < x < 1$ thì $2^x < x + 1 \Rightarrow$ phương trình $2^x = x + 1$ vô nghiệm.



Do đó tập A có hai phần tử khi $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Dạng 5: Phương pháp sử dụng tính đơn điệu

1. Phương pháp

* Ta thường sử dụng các tính chất sau:

- Tính chất 1: Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = C$ có không quá một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = C$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = C$)
- Tính chất 2: Nếu hàm f tăng trong khoảng $(a;b)$ và hàm g là hàm một hàm giảm trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.
(do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$)

2. Bài tập

Bài tập 1. Số nghiệm của phương trình $2018^x + x^2 = \sqrt{2016 + \sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = 2018^x + x^2 - \sqrt{2016 + \sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}}$, $D = \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x) = 2018^x \cdot \ln 2018 + 2x$

M, A, B liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2018^x \cdot \ln 2018 + 2x$$

$$f''(x) = 2018^x \cdot \ln^2 2018 + 2 > 0, \forall x$$

Từ đó $f'(x)$ đồng biến trên D mà $f'(-1) \cdot f'(0) < 0$ nên $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; 0)$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm, mặt khác nhập hàm số vào TABLE của casio (START -10 END 10 STEP 1), ta được:

3 4 5 Math F(X) -8 -7 -6 18.959 3.9595 -9.04	10 11 12 Math F(X) -1 0 1
--	--

-44.03

-44.04

1973.9

Dựa vào TABLE ta được
$$\begin{cases} f(-7) \cdot f(-6) < 0 \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho chỉ có hai nghiệm trên hai khoảng $(-7; -6)$ và $(0; 1)$.

Chú ý: Máy tính hiển thị “Insufficient MEM” thì tiến hành cài đặt để không xuất hiện $g(x)$ bằng cách bấm SHIFT MODE mũi tên xuống, 5, 1.

Bài tập 2. Tập nghiệm của phương trình $\log(x^2 - x - 6) + x = \log(x + 2) + 4$ là:

A. $\{1\}$.

B. $\{4\}$.

C. $\{3\}$.

D. $\{2\}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log(x + 2)(x - 3) + x = \log(x + 2) + 4 \Leftrightarrow \log(x - 3) = 4 - x(*).$$

Vế trái của phương trình cuối là hàm tăng, còn vế phải là hàm giảm nên nghiệm của phương trình (nếu có) là duy nhất.

Bằng cách nhẩm nghiệm ta chọn kết quả $x = 4$.

Bài tập 3. Cho x, y là các số thực thỏa $\log_2 x = 3 \log_6 y = 3 \log(x + y)$. Tìm giá trị $T = x - y$.

A. $T = 28$.

B. $T = 22$.

C. $T = 34$.

D. $T = 30$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \log_2 x = 3 \log_6 y = 3 \log(x+y) = 3t \Rightarrow \begin{cases} x = 8^t \\ y = 6^t \\ x+y = 10^t \end{cases} \Rightarrow 8^t + 6^t = 10^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t = 1 \quad (1).$$

Nhận xét: $t = 2$ là nghiệm của phương trình (1).

Với $t > 2$: $\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$. Vậy $t > 2$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $t < 2$: $\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t > \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$. Vậy $t < 2$ không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất của (1).

$$\text{Khi đó, ta có } \begin{cases} x = 8^2 = 64 \\ y = 6^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow T = x - y = 28.$$

Bài tập 4. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017; 2017]$.

A. 1284.

B. 4034.

C. 1285.

D. 4035.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } 2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$$

Đặt $\sin^2 x = t$ với $t \in [0; 1]$, ta có phương trình

$$2^t + \frac{3}{3^t} = 4 \cdot 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t = 4. \text{ Vì hàm số } f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t \text{ nghịch biến với } t \in [0; 1]$$

nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 0$. Do đó $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [-2017; 2017]$ nên ta có $-2017 \leq k\pi \leq 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017}{\pi} \leq k \leq \frac{2017}{\pi}$ nên có 1285 giá trị nguyên của k thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

Bài tập 5. Tìm số nghiệm của phương trình $2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2017^x + 2018^x = 2017 - x$.

A. 1.

B. 2016.

C. 2017.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2017^x + 2018^x$

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + \dots + 2018^x \ln 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y = 2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2017^x + 2018^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $g(x) = 2017 - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0) = g(0) = 2017$.

Do đó, phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài tập 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\frac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x}$ có nghiệm duy nhất.

A. $a \in \mathbb{R}$.

B. $-1 < a < 0$.

C. $a > 0$.

D. không tồn tại a .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x} \Leftrightarrow a = (3^x + 3^{-x})(3^x - 3^{-x}) \Leftrightarrow a = 3^{2x} - 3^{-2x} \quad (1)$.

Xét hàm số $f(x) = 3^{2x} - 3^{-2x}$.

Có $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^{-2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra với mọi giá trị của a thì (1) luôn có nghiệm duy nhất.

Bài tập 7. Số nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{2} + x - \ln(x^2 - 2) = 2018$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x^2 - 2)$ với $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = x + 1 - \frac{2x}{x^2 - 2}$; $f''(x) = 1 + \frac{2x^2 + 4}{(x^2 - 2)^2} > 0, \forall x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Nên suy ra hàm số $f'(x) = x + 1 - \frac{2x}{x^2 - 2}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Mặt khác $f'(2) \cdot f'(\sqrt{3}) = 1 \cdot (1 - \sqrt{3}) < 0$ và $f'(-3) \cdot f'(-2) = -\frac{8}{7} \cdot 1 < 0$ nên $f'(x)$ có đúng một nghiệm $a \in (-\infty; -\sqrt{2})$ và đúng một nghiệm $b \in (\sqrt{2}; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên

Ta có $f(a) < f(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2} - \sqrt{3} < 2018$ và $f(b) < f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2} + \sqrt{3} < 2018$

Bài tập 8. Tìm số thực a để phương trình: $9^x + 9 = a3^x \cos(\pi x)$, chỉ có duy nhất một nghiệm thực

A. $a = -6$.

B. $a = 6$.

C. $a = -3$.

D. $a = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình. Ta có $9^{x_0} + 9 = a \cdot 3^{x_0} \cos(\pi x_0)$.

Khi đó $2 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

$$\text{Thật vậy } 9^{2-x_0} + 9 = a3^{2-x_0} \cos[\pi(2-x_0)] \Leftrightarrow \frac{81}{9^{x_0}} + 9 = a \frac{9}{3^{x_0}} \cos(\pi x_0)$$

$$\Leftrightarrow 9^{x_0} + 9 = a \cdot 3^{x_0} \cos(\pi x_0).$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow a = -6$.

Ngược lại, với $a = -6$, phương trình $9^x + 9 = -6 \cdot 3^x \cos(\pi x) \Leftrightarrow 3^x + \frac{9}{3^x} = -6 \cos(\pi x)$.

$$+ 3^x + \frac{9}{3^x} \geq 6$$

$$+ -6 \cos(\pi x) \leq 6$$

Khi đó dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3^x + \frac{9}{3^x} = 6 \\ \cos \pi x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $9^{x_0} + 9 = a \cdot 3^{x_0} \cos(\pi x_0)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = -6$.

Bài tập 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1 \Leftrightarrow e^{2x+y+1} + (2x + y + 1) = e^{3x+2y} + (3x + 2y)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng: $f(2x + y + 1) = f(3x + 2y) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 3x + 2y \Leftrightarrow y = 1 - x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được: $\log_2^2 x - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình có dạng: $t^2 - (m + 4)t + m^2 + 4 = 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{8}{3}$.

Do đó có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Bài tập 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x + 2y - 1) - (m + 6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$.

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y} + (3x + 5y) = e^{x+3y+1} + (x + 3y + 1)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng: $f(3x + 5y) = f(x + 3y + 1) \Leftrightarrow 3x + 5y = x + 3y + 1 \Leftrightarrow 2y = 1 - 2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được: $\log_3^2 x - (m + 6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình có dạng: $t^2 - (m + 6)t + m^2 + 9 = 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Bài tập 11. Gọi $x_0 = \frac{a+b\sqrt{3}}{c}$ là một nghiệm lớn hơn 1 của phương trình $2x \left[\left(\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{1-x} + 1 \right] = 2x^2 - 1$.

Giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$.

B. $P = 0$.

C. $P = 2$.

D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$2x \left[\left(\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{1-x} + 1 \right] = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{x-1} + 1 = x - \frac{1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}} + \frac{1}{2x} = 3^{x-1} + x - 1 \quad (1). \text{ Xét hàm số } f(t) = 3^t + t \quad (t \neq 0), \quad f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2x}\right) = f(x-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=1, b=1, c=2. \text{ Vậy } P=4.$$

Bài tập 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\ln(m + \ln(m+x)) = x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m \geq 0$.

B. $m > 1$.

C. $m < e$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\ln(m + \ln(m+x)) = x \quad (1)$.

Điều kiện $x > e^{-m} - m$.

Đặt $\ln(m+x) = y$ ta được $e^y - m = x$. Thay vào (1) ta được $\ln(m+y) = x \Leftrightarrow e^x - m = y$.

Ta có hệ $\begin{cases} e^x - m = y \\ e^y - m = x \end{cases} \Rightarrow e^x - e^y = y - x \Rightarrow e^x + x = e^y + y$. Do hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên

$\mathbb{R}$ nên suy ra $x = y \Rightarrow x = \ln(x+m) \Leftrightarrow e^x - x = m$.

Xét hàm số $g(x) = e^x - x$; $g'(x) = e^x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

BBT

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Suy ra phương trình có nhiều nhất là hai nghiệm $\Leftrightarrow m > 1$. (chú ý nghiệm luôn thỏa điều kiện).

Bài tập 13. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$$

Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3.

B. Vô số.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

Ta có:

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 5x + 1) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2). \text{ Điều này đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:

- Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi

$$-\frac{25}{4} < m-1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 14. Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_m(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A. Vô số.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$\text{Đặt } t = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \text{ thì } t' = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{(x - \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} \ln 2} < 0$$

BBT:

x	1	$+\infty$
t'		-
t	0	$-\infty$

Do $x > 2 \Rightarrow t < \log_2(2 - \sqrt{3})$.

Phương trình trở thành $t \cdot \log_5 2^t = \log_m \frac{1}{2^t} \Leftrightarrow t \cdot \log_5 2 = -\log_m 2 \Leftrightarrow \log_5 m = -\frac{1}{t}$

Ycbt $\log_5 m < -\frac{1}{\log_2(2 - \sqrt{3})} \Leftrightarrow m < 5^{-\frac{1}{\log_2(2 - \sqrt{3})}}$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ và $m \neq 1$ nên $m = 2$.

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{3m + 27} \sqrt[3]{3m + 27} \cdot 2^x = 2^x$ có nghiệm thực?

A. 6.

B. 4.

C. Vô số.

D. Không tồn tại m .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \sqrt[3]{3m+27}\sqrt[3]{3m+27.2^x} = 2^x \Leftrightarrow 27\sqrt[3]{3m+27.2^x} = 2^{3x} - 3m. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } 2^x = u, \text{ điều kiện: } u > 0 \text{ và } \sqrt[3]{3m+27.2^x} = v \Rightarrow v^3 = 3m+27u. \quad (2)$$

$$(1) \text{ trở thành } u^3 = 27v + 3m. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (3) và (2) suy ra } u^3 - 27v &= v^3 - 27u \Leftrightarrow (u-v) \cdot (u^2 + uv + v^2 + 27) = 0 \\ &\Leftrightarrow u = v. \end{aligned}$$

$$\text{Do } u^2 + uv + v^2 + 4 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3v^2}{4} + 27 > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}, \text{ nên}$$

$$\sqrt[3]{3m+27u} = u \Leftrightarrow m = \frac{u^3 - 27u}{3}, \text{ với } u > 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(u) = \frac{u^3 - 27u}{3} \text{ với } u > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(u) = \frac{1}{3}(3u^2 - 27); f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 3 \text{ do } u > 0.$$

Suy ra $\min_{(0;+\infty)} f(u) = -54$. Do đó có vô số giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm thực.

Bài tập 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m.2^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. Vô số.

B. 0.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } 4^x - m.2^x + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - m.2^x + 2m - 5 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0, \text{ phương trình thành } t^2 - mt + 2m - 5 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } f(t) = t^2 - mt + 2m - 5$$

Nhận xét rằng với một giá trị $t > 0$ ta tìm được một nghiệm x nên để phương trình có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_2 > t_1 > 0$ đồng thời $t_1 < 1 < t_2$ (vì $2^{x_1} < 2^0 < 2^{x_2}$). Từ đó, ta có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ 1. f(t) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(2m - 5) > 0 \\ 2m - 5 > 0 \\ m > 0 \\ 1. (1 - m + 2m - 5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 20 > 0 \\ m > \frac{5}{2} \\ m > 0 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Bài tập 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1} (*)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 3. B. Vô số. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $t = 2^x, t > 0$, phương trình (*) $\Leftrightarrow t + 3 = m\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ xác định trên tập $D = (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1-3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
y'			$+$	0	$-$
y			3	$\sqrt{10}$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $1 < m \leq 3$ hoặc $m = \sqrt{10}$ phương trình có nghiệm duy nhất nên có hai giá trị nguyên của tham số m .

Bài tập 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $2.4^{\sqrt{x}-1} - 5.2^{\sqrt{x}-1} + m = 0, (*)$ có nghiệm?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t = 2^{\sqrt{x}-1}$, điều kiện $t \geq \frac{1}{2}$ vì $\sqrt{x}-1 \geq -1$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 2t^2 - 5t = -m$.

Xét hàm số $y = -2t^2 + 5t$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $y' = -4t + 5$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$	
y'			+	0	-
y			2	$\frac{25}{8}$	$-\infty$

Do đó phương trình có nghiệm khi $m \leq \frac{25}{8}$.

BÀI 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

2. Cách giải bất phương trình mũ đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

b) Đặt ẩn phụ

$$\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \lambda = 0. \text{ Đặt } t = a^{f(x)}, (t > 0)$$

c) Phương pháp logarit hóa

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \cdot \log_a b \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \cdot \log_a b \end{cases}$$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Bất phương pháp logarit cơ bản

2. Cách giải một số bất phương trình logarit đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

b) Phương pháp mũ hóa

$$\log_a f(x) > b \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp biến đổi tương đương đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

a. Bất phương trình mũ cơ bản

$$\bullet \text{ Bất phương trình } a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \quad \text{(hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] \leq 0 \end{cases}).$$

$$\bullet \text{ Bất phương trình } a^{f(x)} < b \text{ (với } b > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \leq \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) \geq \log_a b \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Bất phương trình } a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \\ a > 1 \\ b > 0 \\ f(x) > \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ b > 0 \\ f(x) < \log_a b \end{cases}.$$

b. Bất phương trình logarit cơ bản

$$\bullet \text{ Bất phương trình } \log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) \leq g(x) \\ 0 < a < 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \quad \text{(hoặc } \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] \leq 0 \end{cases}).$$

$$\bullet \text{ Bất phương trình } \log_a f(x) \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) \geq a^b \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Bất phương trình } \log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b \end{cases}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho bất phương trình $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1; 3)$?

A. 35.

B. 36.

C. 34.

D. 33.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{bpt} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 + m > 0 \\ \log_7[7(x^2 + 2x + 2)] > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 6x - 5 \\ 6x^2 + 8x + 9 > m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > \max_{(1;3)} f(x) \\ m < \min_{(1;3)} g(x) \end{cases}, \text{ với } f(x) = -x^2 - 6x - 5; g(x) = 6x^2 + 8x + 9 \end{aligned}$$

Xét sự biến thiên của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$

○ $f'(x) = -2x - 6 < 0, \forall x \in (1; 3) \Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$

$$\Rightarrow \max_{(1;3)} f(x) = f(1) = -12$$

○ $g'(x) = 12x + 8 > 0, \forall x \in (1; 3) \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; 3)$

$$\Rightarrow \min_{(1;3)} g(x) = g(1) = 23$$

Khi đó $-12 < m < 23$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-11; -10; \dots; 22\}$

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 2. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S là

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{BPT có tập nghiệm } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \quad (1) \\ (7-m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0 \quad (2) \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta'_1 = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 - m > 0 \\ \Delta'_2 = 4 - (7 - m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 7 - m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq 5.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} m > 2 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5, \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = \{3; 4; 5\}.$$

Vậy $S = 3 + 4 + 5 = 12$.

Bài tập 3. Bất phương trình $\log_2 \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 1} \geq 0$ có tập nghiệm là $T = \left(\frac{1}{4}; a\right] \cup [b; +\infty)$. Hỏi $M = a + b$ bằng

A. $M = 12$.

B. $M = 8$.

C. $M = 9$.

D. $M = 10$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } \log_2 \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 10x + 9}{4x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geq 0 \\ 4x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x \leq 1 \\ x \geq 9 \end{cases}$$

$$\text{Nên } T = \left(\frac{1}{4}; 1\right] \cup [9; +\infty) \Rightarrow M = a + b = 1 + 9 = 10.$$

Bài tập 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1$ là:

A. $S = [1; \sqrt{5}]$.

B. $S = (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

C. $S = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

D. $S = [-\sqrt{5}; -1) \cup (1; \sqrt{5}]$.

Lời giải**Chọn B**

$$* \text{ ĐKXD: } \begin{cases} \log_2(x^2 - 1) > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

$$\text{Bất phương trình } \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty).$$

$$* \text{ Kết hợp điều kiện ta được: } x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty).$$

Bài tập 5. Bất phương trình $\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi:

A. $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$.

B. $0 < a < 2\sqrt{2}$.

C. $0 < a < 2$.

D. $-2 < a < 2$.

Lời giải**Chọn D**

$$\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1) \text{ nghiệm đúng với mọi số thực } x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ 2x^2 + 3 > x^2 + ax + 1 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ x^2 - ax + 2 > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 < 0 \\ a^2 - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2.$$

Bài tập 6. Bất phương trình $(3^x - 1)(x^2 + 3x - 4) > 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 6?

A. 9.

B. 5.

C. 7.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$(3^x - 1)(x^2 + 3x - 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 1 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -4 \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -4 < x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x - 1 < 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -4 < x < 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện nghiệm nguyên nhỏ hơn 6 ta thấy các giá trị thỏa là $\{-3; -2; -1; 2; 3; 4; 5\}$.

Bài tập 7. nghiệm của bất phương trình $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x}$ là

A. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

B. $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

C. $(-1; 0)$.

D. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Do } x^2 + \frac{1}{2} > 0 \forall x \text{ nên } \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2} = 1 \\ x^2 + \frac{1}{2} > 1 \\ 2x^2 + x + 1 \leq 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \\ x \in [-1; 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Bài tập 8. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ là

A. 1.

B. 0.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \geq 0 \\ x-2 > 0 \\ x^2-3x-10 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x < 14$$

Vậy tập tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $\{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$.

Bài tập 9. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2+x+3) \leq \log_m(3x^2-x)$ với m là tham số thực dương khác 1, biết $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

A. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

B. $S = [-1; 0] \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

C. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$.

D. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

Lời giải

Chọn D

Do $x=1$ là nghiệm nên ta có $\log_m 6 \leq \log_m 2 \Rightarrow 0 < m < 1$.

$$\text{Bất phương trình tương đương với } \begin{cases} 2x^2+x+3 \geq 3x^2-x \\ 3x^2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \leq 0 \\ 3x^2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x < 0; x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3} < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right].$$

Bài tập 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình: $1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $-1 < m \leq 0$.

B. $-1 < m < 0$.

C. $2 < m \leq 3$.

D. $2 < m < 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \log_5(5x^2+5) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m > 0 \\ 5x^2+5 \geq mx^2+4x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m > 0 \quad (1) \\ (m-5)x^2+4x+(m-5) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Để bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ điều kiện là cả (1) và (2) đều thỏa mãn

$$\text{với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Điều kiện là } \begin{cases} 0 < m < 5 \\ 4 - m^2 < 0 \\ 4 - (m - 5)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Bài tập 11. Bất phương trình $\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi:

- A. $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$. B. $0 < a < 2\sqrt{2}$. C. $0 < a < 2$. D. $-2 < a < 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ 2x^2 + 3 > x^2 + ax + 1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ x^2 - ax + 2 > 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 < 0 \\ a^2 - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2.$$

Bài tập 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên không dương của m để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x + m) + \log_5(2 - x) = 0$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu tập con?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\log_{\frac{1}{5}}(x + m) + \log_5(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \\ x + m > 0 \\ \log_5(2 - x) = \log_5(x + m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -m \\ 2 - x = x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -m \\ x = \frac{2 - m}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{2 - m}{2} < 2 \\ \frac{2 - m}{2} > -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Mà m là số nguyên không dương nên $m \in \{-1; 0\}$. Suy ra $S = \{-1; 0\}$.

Vậy số tập con của S bằng $2^2 = 4$.

Chú ý:

- Các tập con của S là: $\emptyset, \{-1\}, \{0\}, S$.
- Một tập hợp có n phần tử thì số tập con của nó là 2^n .

Bài tập 13. Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

A. $m > 9$.

B. $m < 2$.

C. $0 < m < 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

ĐK tham số $m : m > 0$

$$\text{Ta có: } \log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2(3^x + 1) < m$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2(3^x + 1)$, $\forall x \in (-\infty; 0)$ có $f' = \frac{3^x \cdot \ln 3}{(3^x + 1) \ln 2} > 0$, $\forall x \in (-\infty; 0)$

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	$-\infty$	0
f'		+
f	0	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m \geq 1$.

Bài tập 14. Nghiệm của bất phương trình $\log_2(\sqrt{3x+1} + 6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x})$ là

A. $1 \leq x \leq \frac{369}{49}$.

B. $x \geq \frac{369}{49}$.

C. $x \leq 1$.

D. $x \leq \frac{369}{49}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 10$. (*)

$$\text{Ta có } \log_2(\sqrt{3x+1} + 6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x}) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + 6 \geq 14 - 2\sqrt{10-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} \geq 8 - 2\sqrt{10-x} \Leftrightarrow 3x+1 \geq 64 - 32\sqrt{10-x} + 4(10-x) \text{ (Do (*))}$$

$$\Leftrightarrow 32\sqrt{10-x} \geq 103 - 7x \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} 1024(10-x) \geq 10609 + 49x^2 - 1442x$$

$$\Leftrightarrow 49x^2 - 418x + 369 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{369}{49}.$$

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R} : 1 + \log_6(x^2 + 1) \geq \log_6(mx^2 + 2x + m)$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $mx^2 + 2x + m > 0$.

$$\text{Ta có } 1 + \log_6(x^2 + 1) \geq \log_6(mx^2 + 2x + m) \Leftrightarrow \log_6[6(x^2 + 1)] \geq \log_6(mx^2 + 2x + m)$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 + 1) \geq mx^2 + 2x + m \Leftrightarrow (m-6)x^2 + 2x + m - 6 \leq 0.$$

$$\text{Điều kiện bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 2x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} & (1) \\ (m-6)x^2 + 2x + m - 6 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$$

♦ Giải (1): Do $m = 0$ không thỏa (1) nên $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = 1 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$

♦ Giải (2): Do $m = 6$ không thỏa (2) nên:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ \Delta' = 1 - (m-6)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ -m^2 + 12m - 35 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 5. \\ m \geq 7 \end{cases}$$

Suy ra $1 < m \leq 5.$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

a. Bất phương trình mũ

$$\text{Tổng quát: } f[a^{g(x)}] = 0 \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}.$$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$
- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

b. Bất phương logarit

$$\text{Tổng quát: } f[\log_a f(x)] = 0 \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a f(x) \\ f(t) = 0 \end{cases}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm số các nghiệm nguyên của bất phương trình $4.3^{\log(100x^2)} + 9.4^{\log(10x)} < 13.6^{1+\log x}$.

A. 10.

B. 9.

C. 8.

D. 11

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x > 0$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow 4.3^{2.\log(10x)} + 9.2^{2.\log(10x)} < 13.6^{\log(10x)} \Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log(10x)} - 13.\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} + 9 < 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} > 0$ thì phương trình trở thành:

$$4t^2 - 13t + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < \frac{9}{4}.$$

$$\text{Do đó } 1 < \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 1 < \log(10x) < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 10$$

Số các nghiệm nguyên của bất phương trình là 8.

Bài tập 2. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

A. $m \in (0; +\infty)$. **B.** $m \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **D.** $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x > \sqrt{2}$ nên $\log_2 x > \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Do đó $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$(1) \text{ thành } (1+t)^2 - 2(m+1)t - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt - 1 < 0 \quad (2)$$

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

$f(t) = t^2 - 2mt - 1 = 0$ có $ac < 0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1 < 0 < t_2$.

$$\text{Khi đó cần } \frac{1}{2} < t_2 \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 + 1} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}.$$

$$\textbf{Cách 2: } t^2 - 2mt - 1 < 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2 - 1}{2t} < m \left(t > \frac{1}{2}\right)$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0; +\infty)$ ta được $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Bài tập 3. Cho bất phương trình: $9^x + (m-1).3^x + m > 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x > 1$.

A. $m \geq -\frac{3}{2}$. **B.** $m > -\frac{3}{2}$. **C.** $m > 3 + 2\sqrt{2}$. **D.** $m \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3^x$

Vì $x > 1 \Rightarrow t > 3$ Bất phương trình đã cho thành: $t^2 + (m-1)t + m > 0$ nghiệm đúng $\forall t \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - t}{t+1} > -m \text{ nghiệm đúng } \forall t > 3.$$

Xét hàm số $g(t) = t - 2 + \frac{2}{t+1}, \forall t > 3, g'(t) = 1 - \frac{2}{(t+1)^2} > 0, \forall t > 3$. Hàm số đồng biến trên

$$[3; +\infty) \text{ và } g(3) = \frac{3}{2}. \text{ Yêu cầu bài toán tương đương } -m \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}.$$

Bài tập 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7} < m(\log_4 x^2 - 7) \text{ chứa khoảng } (256; +\infty).$$

A. 7.

B. 10.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - 6 \log_2 x - 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x < -1 \\ \log_2 x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 128 \end{cases}$$

Với điều kiện trên bất phương trình trở thành $\sqrt{\log_2^2 x - 6 \log_2 x - 7} < m(\log_2 x - 7)$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$ thì $t > 8$ vì $x \in (256; +\infty)$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)(t-7)} < m(t-7) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{t+1}{t-7}} < m, \forall t > 8. \text{ Đặt } f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-7}}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max_{(8; +\infty)} f(t)$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-7}}$ trên khoảng $(8; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{-4}{(t-7)^2} \cdot \sqrt{\frac{t-7}{t+1}} < 0, \forall t > 8 \Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(8; +\infty)$

Do đó $\max_{(8; +\infty)} f(t) = f(8) = 3 \Rightarrow m \geq 3.$

Mà $m \in [0; 10]$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 10\}.$

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2.5^x - 2) \geq m$ có nghiệm với mọi $x \geq 1.$

A. $m \geq 6.$

B. $m > 6.$

C. $m \leq 6.$

D. $m < 6.$

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện của bất phương trình: $x > 0.$

Ta có $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2.5^x - 2) \geq m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] \geq m$ (1).

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$, với $x \geq 1$ ta có $t \geq 2.$ Khi đó (1) trở thành $m \leq t^2 + t$ (2).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[2; +\infty)$ ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [2; +\infty).$

Do đó để bất phương trình đã cho có nghiệm với mọi $t \geq 2$ thì $m \leq \min_{[2; +\infty)} f(t)$ hay $m \leq 6.$

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2 - 3x + m}} + 2.3^{\sqrt{x^2 - 3x + m} - 2 + x} < 3^{2x - 3}$ có nghiệm?

A. 6 .

B. 4 .

C. 9 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện $x^2 - 3x + m \geq 0$ (*)

$$9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3} \Leftrightarrow 3^{2(\sqrt{x^2-3x+m}-x)} + \frac{2}{9}.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} - \frac{1}{27} < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} < 3^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} - x < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} < x-2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x + m < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x > 2 \\ x < 4 - m \end{cases} \Rightarrow 4 - m > 2 \Leftrightarrow m < 2.$$

Do m nguyên dương nên $m = 1$ thỏa mãn (*).

Bài tập 7. Bất phương trình $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10.

A. 7 .

B. 8 .

C. 9 .

D. 6 .

Lời giải

Chọn A

Điều kiện của bất phương trình là $x > 0$. Khi đó $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x} - \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 1} \leq 1$$

Đặt $t = \log_2 x$. Ta có $\frac{t-1}{t} - \frac{2t}{t-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2 - 2t^2}{t(t-1)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2 - 2t^2}{t(t-1)} - 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t^2 - t + 1}{t(t-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ t > 1 \end{cases}$$

Trả lại ẩn ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 0 < \log_2 x \leq \frac{1}{2} \\ \log_2 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 1 < x \leq \sqrt{2} \\ x > 2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $x > 0$ ta có $0 < x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $1 < x \leq \sqrt{2}$ hoặc $x > 2$.

Khi đó bất phương trình có 7 nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10.

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m-1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \leq 3$.B. $m \geq 1$.C. $-1 \leq m \leq 4$.D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $\Leftrightarrow m.4^x + 4(m-1).2^x + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m(4^x + 4.2^x + 1) > 1 + 4.2^x$

$$\Leftrightarrow m > \frac{1 + 4.2^x}{4^x + 4.2^x + 1}$$

Đặt $2^x = t$ (Điều kiện $t > 0$). Khi đó $m > \frac{4t+1}{t^2+4t+1}$. Để bất phương trình ban đầu nghiệm đúng

$\forall x \in \mathbb{R}$ thì bất phương trình $m > \frac{4t+1}{t^2+4t+1}$ nghiệm đúng $\forall t > 0$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{4t+1}{t^2+4t+1} \Rightarrow f'(t) = -\frac{4t^2+2t}{(t^2+4t+1)^2} < 0, \forall t > 0.$$

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó $m > \frac{4t+1}{t^2+4t+1} \forall t > 0$ khi và chỉ khi $m \geq f(0) = 1$

Bài tập 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0]$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{4^{x-1}}{2^x + 1} \Leftrightarrow m < \frac{4^x}{4(2^x + 1)}.$$

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m < \frac{t^2}{4(t+1)}, \forall t \in (0; +\infty)$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t^2}{4(t+1)}, t > 0, f'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên (Bổ sung các dấu mũi tên trong bbt là $\pm\infty$ vào nhé)

t	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$			
$f'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên có $m \leq 0$.

Bài tập 10. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

A. $m \in (0; +\infty)$.

B. $m \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x > \sqrt{2}$ nên $\log_2 x > \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Do đó $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$(1) \text{ thành } (1+t)^2 - 2(m+1)t - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt - 1 < 0 \quad (2)$$

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

$f(t) = t^2 - 2mt - 1 = 0$ có $ac < 0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1 < 0 < t_2$.

$$\text{Khi đó cần } \frac{1}{2} < t_2 \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 + 1} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}.$$

$$\textbf{Cách 2: } t^2 - 2mt - 1 < 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2 - 1}{2t} < m \left(t > \frac{1}{2}\right)$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0; +\infty)$ ta được $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Bài tập 11. Tìm giá trị gần đúng tổng các nghiệm của bất phương trình sau:

$$\left(\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \right) (24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016) \leq 0$$

A. 12,3.

B. 12.

C. 12,1.

D. 12,2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Ta có $24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016$

$$= (x^3 - x^2)^2 + (x^3 - 1)^2 + 22x^6 + 26x^4 + 1997x^2 + 2015 > 0, \forall x.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \right) \leq 0.$$

Đặt $t = \log_x \frac{22}{3}$, ta có bất phương trình

$$\sqrt{2t^2 - 2t + 5} + \sqrt{2t^2 - 4t + 4} \leq \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{(1-t)^2 + 1^2} \leq \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Đặt $\vec{u} = \left(t - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $\vec{v} = (1-t; 1)$. Ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\frac{13}{2}}.$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{t-\frac{1}{2}}{1-t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t-1=3-3t \Leftrightarrow t=\frac{4}{5} \Rightarrow x=\left(\frac{22}{3}\right)^{\frac{5}{4}}=12,06$.

Bài tập 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m \leq 0$ có nghiệm thực.

A. $m \geq 2$.

B. $m \leq 3$.

C. $m \leq 5$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x + 3 - 2m \leq 0$

Đặt $2^x = t$ ($t > 0$).

Ta có bất phương trình tương đương với $t^2 - 2mt + 3 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 3}{2t + 2} \leq m$

Xét $f(t) = \frac{t^2 + 3}{2t + 2}$ trên $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{2t^2 + 4t - 6}{(2t + 2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	1	$+\infty$

Vậy để bất phương trình có nghiệm thực thì $m \geq 1$.

Bài tập 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (1; 64)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m < 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m \geq 0$.

Đặt $\log_2 x = t$, khi $x \in (1; 64)$ thì $t \in (0; 6)$.

Khi đó, ta có $t^2 + t + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -t^2 - t$ (*).

Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t$ với $t \in (0; 6)$.

Ta có $f'(t) = -2t - 1 < 0, \forall t \in (0; 6)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	6
$f'(t)$		-
$f(t)$	0	42

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (1; 64)$ khi và chỉ khi bất phương trình (*) đúng với mọi $t \in (0; 6) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Bài tập 14. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số thực m để bất phương trình

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 (\log_4 x^2 - 3) \text{ có nghiệm duy nhất thuộc } [32; +\infty)?$$

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 8 \end{cases}.$$

Hàm số xác định trên $[32; +\infty)$.

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 (\log_4 x^2 - 3) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3} \geq m^2 (\log_2 x - 3).$$

Đặt $t = \log_2 x$. Khi $x \geq 32$, ta có miền giá trị của t là $[5; +\infty)$.

$$\text{Bất phương trình có dạng: } \sqrt{t^2 - 2t - 3} \geq m^2 (t - 3) \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}{t - 3} \Leftrightarrow m^2 \leq \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+1}{t-3}$ trên $[5; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{-4}{(t-3)^2}$ nên hàm số nghịch biến trên $[5; +\infty)$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ và $f(5) = 3$ nên ta có $1 < f(t) \leq 3$.

Do với mỗi t có duy nhất một giá trị x nên để bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc $[32; +\infty)$ khi và chỉ bất phương trình $m^2 \leq \sqrt{f(t)}$ có nghiệm duy nhất trên $[5; +\infty)$.

Khi đó: $m^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{3}$. Do đó không có số nguyên dương m thỏa mãn.

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

$$9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3} \text{ có nghiệm?}$$

A. 6.

B. 4.

C. 9.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x^2 - 3x + m \geq 0$ (*)

$$9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3} \Leftrightarrow 3^{2(\sqrt{x^2-3x+m}-x)} + \frac{2}{9} \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} - \frac{1}{27} < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} < 3^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} - x < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} < x - 2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x + m < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x > 2 \\ x < 4 - m \end{cases} \Rightarrow 4 - m > 2 \Leftrightarrow m < 2.$$

Do m nguyên dương nên $m = 1$ thỏa mãn (*).

Bài tập 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \geq m$ có nghiệm với mọi $x \geq 1$.

A. $m \geq 6$.

B. $m > 6$.

C. $m \leq 6$.

D. $m < 6$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của bất phương trình: $x > 0$.

Ta có $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \geq m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] \geq m$ (1).

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$, với $x \geq 1$ ta có $t \geq 2$. Khi đó (1) trở thành $m \leq t^2 + t$ (2).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[2; +\infty)$ ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [2; +\infty)$.

Do đó để bất phương trình đã cho có nghiệm với mọi $t \geq 2$ thì $m \leq \min_{[2; +\infty)} f(t)$ hay $m \leq 6$.

Bài tập 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m \cdot 4^x + (m - 1) \cdot 2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \leq 3$.

B. $m \geq 1$.

C. $-1 \leq m \leq 4$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\Leftrightarrow m \cdot 4^x + 4(m - 1) \cdot 2^x + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m(4^x + 4 \cdot 2^x + 1) > 1 + 4 \cdot 2^x$

$$\Leftrightarrow m > \frac{1 + 4 \cdot 2^x}{4^x + 4 \cdot 2^x + 1}$$

Đặt $2^x = t$ (Điều kiện $t > 0$). Khi đó $m > \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1}$. Để bất phương trình ban đầu nghiệm đúng

$\forall x \in \mathbb{R}$ thì bất phương trình $m > \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1}$ nghiệm đúng $\forall t > 0$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1} \Rightarrow f'(t) = -\frac{4t^2 + 2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0, \forall t > 0.$$

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó $m > \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1} \forall t > 0$ khi và chỉ khi $m \geq f(0) = 1$

Bài tập 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0]$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{4^{x-1}}{2^x + 1} \Leftrightarrow m < \frac{4^x}{4(2^x + 1)}$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m < \frac{t^2}{4(t+1)}, \forall t \in (0; +\infty)$.

Đặt $f(t) = \frac{t^2}{4(t+1)}, t > 0, f'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên (Bổ sung các dấu mũi tên trong bbt là $\pm\infty$ vào nhé)

t	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$					0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên có $m \leq 0$.

Dạng 3: Phương pháp logarit hóa

1. Phương pháp

Với bất phương trình $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \cdot \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \cdot \log_a b \end{cases}$

2. Bài tập

Bài tập 1. Nghiệm của bất phương trình $8^{\frac{x}{x+2}} > 36 \cdot 3^{2-x}$ là

A. $\begin{cases} -3 < x < 2 \\ x > 4 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} -\log_2 6 < x < -2 \\ x > 4 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} -4 < x < -2 \\ x > 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -\log_3 18 < x < -2 \\ x > 4 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $8^{\frac{x}{x+2}} > 36 \cdot 3^{2-x} \Leftrightarrow 2^{\frac{x-4}{x+2}} > 3^{4-x} \Leftrightarrow \log_3 2^{\frac{x-4}{x+2}} > \log_3 3^{4-x}$

$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} \log_3 2 > 4-x \Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{\log_3 2}{x+2} + 1 \right) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ \log_3 2 \\ \frac{\log_3 2}{x+2} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 4 \\ \frac{\log_3 2 + 2 + x}{x+2} < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 4 \\ \frac{\log_3 18 + x}{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 4 \\ -\log_3 18 < x < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -\log_3 18 < x < -2 \end{cases}$$

Bài tập 2. Bất phương trình $2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}} < 10$ có tập nghiệm là $(-\infty; -b) \cup (-a; a)$. Khi đó $b - a$ bằng

A. $\log_2 5$.

B. $-\log_5^2$.

C. 1.

D. $2 + \log_2 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } 2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}} < 10 \Leftrightarrow \frac{2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}}}{2 \cdot 5} < 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x+1}} < 1 \Leftrightarrow \log_5 \left(2^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x+1}} \right) < \log_5 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \log_5 2 + \frac{x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(\log_5 2 + \frac{1}{x+1} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1) \cdot (x \cdot \log_5 2 + \log_5 2 + 1)}{x+1} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\log_2 10$	-1	1	$+\infty$
VT	$-$	$+$	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $\frac{(x-1) \cdot (x \cdot \log_5 2 + \log_5 2 + 1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -\infty < x < -\log_2 10 \end{cases}$.

Do đó $\begin{cases} a = 1 \\ b = \log_2 10 \end{cases} \Rightarrow b - a = \log_2 5$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018; 2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng

với mọi $x \in (1; 100)$: $(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x}$.

A. 2018.

B. 4026.

C. 2013.

D. 4036.

Lời giải

Chọn A

$$(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x} \Leftrightarrow \left(m + \frac{\log x}{10}\right)(\log x + 1) \geq \frac{11}{10} \log x \Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11 \log x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0.$$

Do $x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2)$. Do đó

$$10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1}.$$

Đặt $t = \log x$, $t \in (0; 2)$, xét hàm số $f(t) = \frac{10t - t^2}{t + 1}$. Ta có: $f'(t) = \frac{10 - 2t - t^2}{(t + 1)^2} > 0 \forall t \in (0; 2)$.

$$\text{Do đó } f(0) < f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{16}{3}.$$

$$\text{Để } 10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1} \text{ đúng với mọi } x \in (1; 100) \text{ thì } 10m \geq \frac{16}{3} \Rightarrow m \geq \frac{8}{15}.$$

Do đó $m \in \left[\frac{8}{15}; 2018\right]$ hay có 2018 số thỏa mãn.

Dạng 4: Phương pháp sử dụng tính đơn điệu

1. Phương pháp

Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$, $\forall u, v \in D$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$, $\forall u, v \in D$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2 - 15x + 100} - 2^{x^2 + 10x - 50} + x^2 - 25x + 150 < 0$

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a = 2x^2 - 15x + 100$; $b = x^2 + 10x - 50$ ta có bất phương trình:

$$2^a - 2^b + a - b < 0 \Leftrightarrow 2^a + a < 2^b + b \Leftrightarrow a < b$$

(do hàm số $y = 2^x + x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$)

$$\text{Với } a < b \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0$$

$\Leftrightarrow x \in (10; 15)$. Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Bài tập 2. Tìm số nguyên m nhỏ nhất để bất phương trình $\log_3(x^2 + x + 1) + 2x^3 \leq 3x^2 + \log_3 x + m - 1$ (ẩn x) có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3(x^2 + x + 1) + 2x^3 \leq 3x^2 + \log_3 x + m - 1 \quad (1)$$

Điều kiện $x > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2 \leq m - 1 \Leftrightarrow \log_3\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2 \leq m - 1.$$

Xét $f(x) = \log_3\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2$, với $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \ln 3} + 6x^2 - 6x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $x \in (0; 1) \Rightarrow f'(x) < 0$; với $x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy bất phương trình có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. Vậy $m = 2$.

Bài tập 3. Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a \in (2; 3]$.

B. $a \in (8; +\infty)$.

C. $a \in (6; 7]$.

D. $a \in (-6; -5]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ suy ra } t \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Bất phương trình } x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t + a \ln t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \ln t \geq -t - 1$$

Trường hợp 1: $t = 1$ khi đó $a \ln t \geq -t - 1$ luôn đúng với mọi a .

Trường hợp 2: $\frac{3}{4} \leq t < 1$

$$\text{Ta có } a \ln t \geq -t - 1, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{-t - 1}{\ln t}, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t) = -\frac{\ln t - 1 - \frac{1}{t}}{\ln^2 t} \geq 0, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right)$ do đó

$$a \leq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{-7}{4 \ln \frac{3}{4}}$$

Trường hợp 3: $t > 1$

Ta có $a \ln t \geq -t-1, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow a \geq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1; +\infty)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t) = -\frac{\ln t - 1 - \frac{1}{t}}{\ln^2 t}, \forall t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $g(t) = \ln t - 1 - \frac{1}{t} \Leftrightarrow g'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} > 0$

Vậy $g(t) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $g(1) = -2; \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ vậy $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm trên $(1; +\infty)$

Do đó $f'(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm là t_0 . Khi đó $\ln t_0 = \frac{t_0 + 1}{t_0}$ suy ra $f(t_0) = -t_0$

Bảng biến thiên

t	1	t_0	$+\infty$
f'		+	0
f		$-\infty$	$-\infty$

Vậy $a \geq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow a \geq -t_0$.

Vậy $-t_0 \leq a \leq \frac{-7}{4 \ln \frac{3}{4}}$.

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a \in (6; 7]$.

Bài tập 4. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x}$ có nghiệm

là $m \in \left[\frac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tổng $S = a + b$ là:

A. $S = 13$.

B. $S = 15$.

C. $S = 9$.

D. $S = 11$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \leq m$.

Xét $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x}$ với $x \in \mathbb{R}$. Do $\begin{cases} \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} \geq \frac{1}{28} \\ \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \geq \frac{5}{7} \end{cases}$ nên $f(x) \geq \frac{4}{28} + \frac{5}{7}$ hay

$f(x) \geq \frac{6}{7}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{6}{7}$. Bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min_{\mathbb{R}} f(x) \Leftrightarrow m \geq \frac{6}{7}$ hay

$m \in \left[\frac{6}{7}; +\infty\right) \Rightarrow S = 13$.

Bài tập 5. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq m \cdot 3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

A. $m \leq 4$.

B. $m \geq 4$.

C. $m \leq 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn A

Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{\sin^2 x} > 0$, ta được

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} \geq m$$

Xét hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}$ là hàm số nghịch biến.

Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ nên $1 \leq y \leq 4$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m \leq 4$. Chọn đáp án A

Bài tập 6. Tìm số nguyên m nhỏ nhất để bất phương trình $\log_3(x^2 + x + 1) + 2x^3 \leq 3x^2 + \log_3 x + m - 1$ (ẩn x) có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3(x^2 + x + 1) + 2x^3 \leq 3x^2 + \log_3 x + m - 1 \quad (1)$$

Điều kiện $x > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2 \leq m - 1 \Leftrightarrow \log_3\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2 \leq m - 1.$$

Xét $f(x) = \log_3\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2$, với $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \ln 3} + 6x^2 - 6x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $x \in (0; 1) \Rightarrow f'(x) < 0$; với $x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy bất phương trình có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. Vậy $m = 2$.

Bài tập 7. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(\sqrt{x^2-x+4}+1) + 2\log_5(x^2-x+5) < 3$ là $(a; b)$.

Khi đó tổng $a+2b$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \log_3(\sqrt{x^2-x+4}+1) + 2\log_5(x^2-x+5)$.

$$\Rightarrow f'(x) = (2x-1) \left(\frac{1}{2(\sqrt{x^2-x+4}+1)\sqrt{x^2-x+4}\ln 3} + \frac{2}{(x^2-x+5)\ln 5} \right)$$

$$\text{Dễ đánh giá } g(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x^2-x+4}+1)\sqrt{x^2-x+4}\ln 3} + \frac{2}{(x^2-x+5)\ln 5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	—	0	+
y	2		5

Có $f(0) = f(1) = 3$ và dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$

Vậy $a = 0; b = 1$; suy ra $a + 2b = 2$

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a ($a > 0$) thỏa mãn $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)^a$.

A. $0 < a < 1$.

B. $1 < a < 2017$.

C. $a \geq 2017$.

D. $0 < a \leq 2017$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)^a$$

$$\Rightarrow 2017 \log_2 \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right) \leq a \log_2 \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 \left(2^a + \frac{1}{2^a} \right)}{a} \leq \frac{\log_2 \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}} \right)}{2017}.$$

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\log_2 \left(2^x + \frac{1}{2^x} \right)}{x} = \frac{\log_2 (4^x + 1) - x}{x} = \frac{\log_2 (4^x + 1)}{x} - 1.$

Ta có
$$y' = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{\left(\frac{4^x + 1}{x^2} \right)' \cdot x - \ln(4^x + 1)}{x^2} \right] = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{4^x \cdot \ln 4 \cdot x - (4^x + 1) \ln(4^x + 1)}{x^2 (4^x + 1)} \right] < 0$$

$$y' = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{4^x \cdot \ln 4^x - (4^x + 1) \ln(4^x + 1)}{x^2 (4^x + 1)} \right] < 0, \forall x > 0.$$

Nên $y = f(x)$ là hàm giảm trên $(0; +\infty)$.

Do đó $f(a) \leq f(2017), (a > 0)$ khi $0 < a \leq 2017$.

Bài tập 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (1; 64)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m < 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m \geq 0$.

Đặt $\log_2 x = t$, khi $x \in (1; 64)$ thì $t \in (0; 6)$.

Khi đó, ta có $t^2 + t + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -t^2 - t$ (*).

Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t$ với $t \in (0; 6)$.

Ta có $f'(t) = -2t - 1 < 0, \forall t \in (0; 6)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	6
$f'(t)$	-	
$f(t)$	0	-42

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (1; 64)$ khi và chỉ khi bất phương trình (*) đúng với mọi $t \in (0; 6) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Bài tập 10. Giả sử $S = (a, b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}$. Khi đó $b - a$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 6+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \cdot D = (0; 3]$.

$$5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6+x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 5x + x\sqrt{6+x-x^2} \log_2 x > x(x-1) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6+x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(5-x \log_2 x) + \sqrt{6+x-x^2} (x \log_2 x - 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow (5-x \log_2 x) \left(x-1-\sqrt{6+x-x^2} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5-x \log_2 x > 0 \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2} > 0 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} 5-x \log_2 x < 0 \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2} < 0 \end{cases} (II) \end{cases}.$$

□ Giải hệ (I).

$$\begin{cases} 5-x \log_2 x > 0 (1) \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2} > 0 (2) \end{cases}$$

Giải (1) $5-x \log_2 x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = x \left(\frac{5}{x} - \log_2 x \right) = xg(x)$ với $x \in (0; 3]$

Ta có $g'(x) = -\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x \ln 2} < 0 \forall x \in (0; 3]$.

Lập bảng biến thiên

x	0	3
$g'(x)$	-	
$g(x)$	 $\frac{5}{3} - \log_2 3 \approx 0,08$	

Vậy $f(x) = x \left(\frac{5}{x} - \log_2 x \right) > 0 \forall x \in (0; 3]$.

Xét bất phương trình (2): $\sqrt{6+x-x^2} < x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6+x-x^2 < (x-1)^2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-5 > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{5}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ (I) là $D = \left(\frac{5}{2}; 3\right]$.

□ Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy $S = \left(\frac{5}{2}, 3\right]$.

$$b - a = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9; 9)$ của tham số m để bất phương trình

$3\log x \leq 2\log\left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 6.

B. 7.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x} - (1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m > \frac{(1-x)}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\log x^3 \leq \log\left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} \leq \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x}\right) + \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}.$$

Vì vậy $m \geq \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ trên $(0; 1)$ ta được $f(x) \geq \sqrt{2} \approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.