

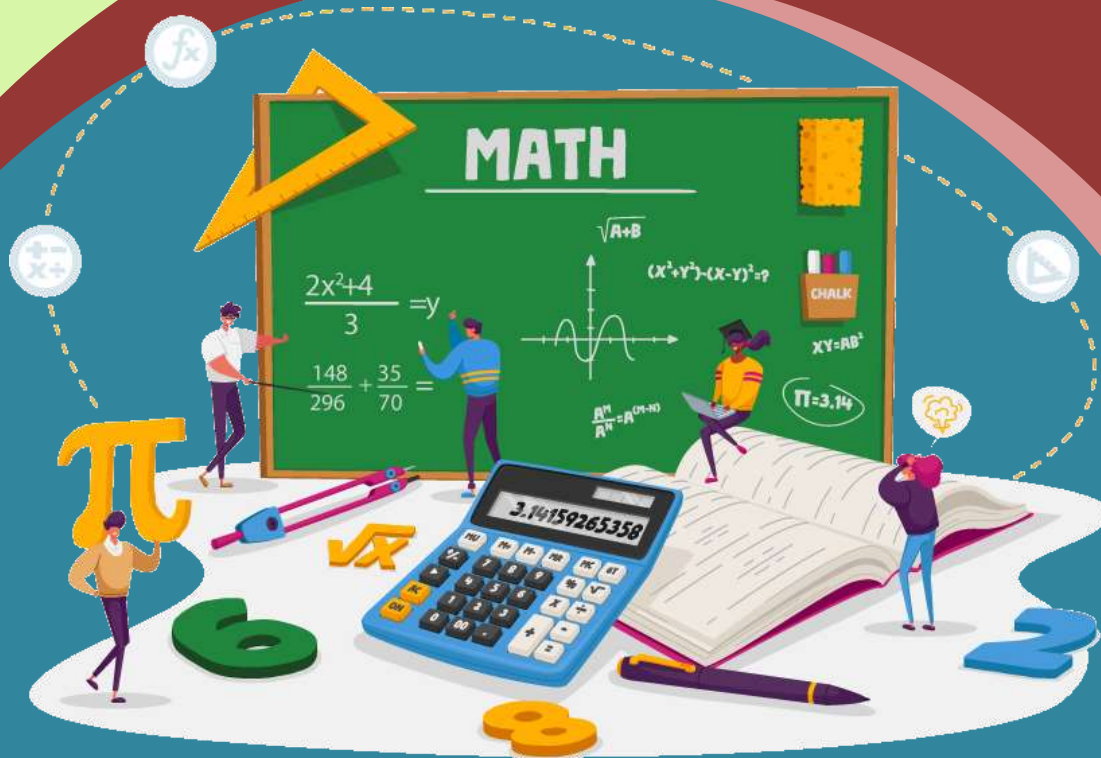
LÊ BÁ BẢO
TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

NGÂN HÀNG CÂU HỎI

SỐ PHỨC

BÀI TOÁN TÌM SỐ PHỨC

- ✎ LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
- ✎ CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT



Ngân hàng câu hỏi:
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÌM SỐ PHỨC
NỘI DUNG ĐỀ BÀI

- Câu 1:** Cho số phức z thỏa mãn $2z - i\bar{z} = 3i$. Mô đun của z bằng
A. $\sqrt{5}$. B. 5. C. $\sqrt{3}$. D. 3.
- Câu 2:** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = \sqrt{2}|z - 1 + i|$. Mô đun của z bằng
A. 4. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.
- Câu 3:** Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z^2 = \bar{z}(4 + 7i)$. Tính $|z|$.
A. $\sqrt{65}$. B. $\sqrt{56}$. C. 65. D. 56.
- Câu 4:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = |z + \bar{z}| = 1$?
A. 0. B. 1. C. 4. D. 3.
- Câu 5:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$?
A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.
- Câu 6:** Cho số phức z thỏa mãn $(|z| + i)z = \sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{5}{2} < |z| < \frac{7}{2}$.
- Câu 7:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $3z + \bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$?
A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.
- Câu 8:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$ và $|z - 1 - 10i| = 5$?
A. 2. B. 0. C. 1. D. Vô số.
- Câu 9:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|(1+i)z - 2 + 4i| = 3\sqrt{2}$ và $z - \frac{2}{|z|}i = 1 - 2zi$?
A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 10:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 11:** Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$, thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng
A. 6. B. 5. C. $\sqrt{26}$. D. 10.
- Câu 12:** Cho số phức $z = 1 + i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1 = a + 5i, z_2 = b$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b > 1$) thỏa mãn $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính $b - a$.
A. $b - a = 5\sqrt{3}$. B. $b - a = 2\sqrt{3}$. C. $b - a = 4\sqrt{3}$. D. $b - a = 3\sqrt{3}$.
- Câu 13:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - 2022i| = 2023$ và z^2 là số thuần ảo?
A. 1. B. 0. C. 4. D. 2.
- Câu 14:** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2 + i)(1 - 2i)$ là một số thực. Tính $P = |a| + |b|$.

- A.** $P = 5$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 4$.
- Câu 15:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|\bar{z} - 2i| = 3$ và $(zi - 4i + 5)3i$ là số thực?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 16:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{13}$ và $(z - 2i)(\bar{z} - 4i)$ là số thuần ảo?
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.
- Câu 17:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo và $(z + i)(\bar{z} - 2)$ là số thực?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.
- Câu 18:** Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Tìm môđun của số phức $\omega = z_1 + z_2 - 6 + 10i$.
A. $|\omega| = 10$. **B.** $|\omega| = 32$. **C.** $|\omega| = 16$. **D.** $|\omega| = 8$.
- Câu 19:** Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z - m| = 4$ và $\frac{z}{z - 6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S .
A. 0. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 14.
- Câu 20:** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \bar{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một
A. đường thẳng. **B.** đường tròn. **C.** parabol. **D.** hypebol.
- Câu 21:** Cho số phức z thỏa mãn $(z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng
A. $4\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.
- Câu 22:** Biết số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$ (*). Tập hợp các điểm biểu diễn z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng
A. 25π . **B.** 9π . **C.** 4π . **D.** 16π .
- Câu 23:** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2 + i)z - 3i$ là một đường tròn có bán kính bằng r . Tìm bán kính r .
A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 25.
- Câu 24:** Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = 1$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w = \frac{z + 2 + 3i}{1 + iz}$ là một đường tròn có bán kính bằng
A. 1. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 20.
- Câu 25:** Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng (Oxy) biểu diễn các số phức z và $(1 + i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.
A. $|z| = 4$. **B.** $|z| = 4\sqrt{2}$. **C.** $|z| = 2$. **D.** $|z| = 2\sqrt{2}$.
- Câu 26:** Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0, thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng Oxy. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Tam giác OMN nhọn và không đều. **B.** Tam giác OMN đều.
C. Tam giác OMN tù. **D.** Tam giác OMN vuông.

- Câu 27:** Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn hai số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN = 2\sqrt{2}$. Gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của OM . Tính $l = KH$.
- A. $l = 3\sqrt{2}$. B. $l = 6\sqrt{2}$. C. $l = \sqrt{41}$. D. $l = \sqrt{5}$.
- Câu 28:** Cho số phức z thỏa $|z+1-i| = |2\bar{z}+2-3i|$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i).z + 2 - 3i$ là một đường tròn. Bán kính đường tròn đó thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(1; 2)$. B. $(3; 4)$. C. $(2; 3)$. D. $(0; 1)$.
- Câu 29:** Cho số phức z thỏa $|z+1-i| = |2\bar{z}+2-3i|$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i).z + 2 - 3i$ là một đường tròn. Bán kính đường tròn đó thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(1; 2)$. B. $(3; 4)$. C. $(2; 3)$. D. $(0; 1)$.
- Câu 30:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là
- A. $4\pi - 4$. B. $8\pi - 8$. C. $2\pi - 4$. D. $8\pi - 4$.
- Câu 31:** Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng
- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 2.
- Câu 32:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng 2. Môđun của z thuộc tập nào dưới đây?
- A. $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$. B. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right\}$. C. $\{\sqrt{2}; 2\}$. D. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right\}$.
- Câu 33:** Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z+2w| = 3, |2z+3w| = 5$ và $|z+3w| = 4$. Tính giá trị biểu thức $P = z.\bar{w} + \bar{z}.w$.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 34:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+1-3i| = |z-1-i|$ và $\frac{z-3}{z+2}$ là một số thuần ảo?
- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.
- Câu 35:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3 + 2i|z|^2 = 0$?
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 6.
- Câu 36:** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là
- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.
- Câu 37:** Cho số phức z thỏa mãn $|z-1| = 5, \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{5}{17}$ và z có phần ảo dương. Tìm tổng phần thực và phần ảo của z .
- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

- Câu 38:** Cho z là số phức có mô-đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô-đun của số phức w là
A. 2015. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2017.
- Câu 39:** Cho số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z+w}$. Khi đó $\left| \frac{z}{w} \right|$ bằng
A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Câu 40:** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z|=10$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 . Diện tích $\triangle AOB$ bằng
A. $25\sqrt{3}$. **B.** 50. **C.** 25. **D.** $50\sqrt{3}$.
- Câu 41:** Có bao nhiêu số nguyên m để tồn tại 2 số phức z thỏa mãn $|z-m+i|=|z-1+2mi|$ và $|z|=\frac{3}{2}$?
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 42:** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|+|z-i|=4$. Gọi (C) là đường cong tạo bởi tất cả các điểm biểu diễn số phức $(z-2i)(2i+1)$ khi z thay đổi. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) .
A. $S=5\pi\sqrt{7}$. **B.** $S=10\pi\sqrt{7}$. **C.** $S=5\pi\sqrt{14}$. **D.** $S=10\pi\sqrt{14}$.
- Câu 43:** Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|^2 = \frac{z \cdot \bar{z}}{2}$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega = (1+2i)z+1$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .
A. $I(0; -2), R=\sqrt{5}$. **B.** $I(1; -4), R=\sqrt{10}$.
C. $I(0; 2), R=\sqrt{5}$. **D.** $I(-1; -4), R=\sqrt{10}$.
- Câu 44:** Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z-2-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.
A. $R=8$. **B.** $R=4$. **C.** $R=2\sqrt{2}$. **D.** $R=2$.
- Câu 45:** Có bao nhiêu số phức z có phần thực và phần ảo đều là các số nguyên thỏa mãn $|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$ và $|z|\leq 10$?
A. 12. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 5.
- Câu 46:** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$, (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng
A. 2. **B.** 10. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{130}$.

Câu 47: Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó và trục hoành.

- A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 48: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6$ và $|z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1 và iz_2 . Biết $\angle MON = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

- A. $T = 36\sqrt{2}$. B. $T = 36\sqrt{3}$. C. $24\sqrt{3}$. D. 18.

Câu 49: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là

- A. $\sqrt{2} + 1$ B. $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 50: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.

- A. $M + m = 63$. B. $M + m = 48$. C. $M + m = 50$. D. $M + m = 41$.

HẾT

Huế, 15h15' Ngày 19 tháng 3 năm 2023

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $2z - i\bar{z} = 3i$. Mô đun của z bằng:

A. $\sqrt{5}$.

B. 5.

C. $\sqrt{3}$.

D. 3.

Lời giải:

Đặt $z = a + bi$.

$$2z - i\bar{z} = 3i \Leftrightarrow 2(a + bi) - i(a - bi) = 3i \Leftrightarrow 2a - b + i(2b - a) = 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ 2b - a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}.$$

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = \sqrt{2}|z - 1 + i|$. Mô đun của z bằng

A. 4.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Ta có: } |x + yi - 2 + 2i| = \sqrt{2}|x + yi - 1 + i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 2(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

$$\text{Suy ra } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2.$$

Câu 3: Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z^2 = \bar{z}(4 + 7i)$. Tính $|z|$.

A. $\sqrt{65}$.

B. $\sqrt{56}$.

C. 65.

D. 56.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } z^2 = \bar{z}(4 + 7i) \Rightarrow |z^2| = |\bar{z}(4 + 7i)| \Leftrightarrow |z|^2 = |\bar{z}| \cdot |4 + 7i| \Leftrightarrow |z| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}.$$

Câu 4: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = |z + \bar{z}| = 1$?

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Giả sử } z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = 2x.$$

$$\text{Bài ra ta có } \begin{cases} |z| = 1 \\ |z + \bar{z}| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ |2x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó có 4 số phức thỏa mãn là } z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Câu 5: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:

Gọi số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a-b=0$$

$$\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow b = 1$$

Suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy $z = 1+i$

Vậy có 1 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $(|z|+i)z = \sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}$. **C.** $|z| < \frac{1}{2}$. **D.** $\frac{5}{2} < |z| < \frac{7}{2}$.

Lời giải:

Gọi $|z| = m \geq 0$. Khi đó $(|z|+i)z = \sqrt{2}$ được viết lại thành $(m+i)z = \sqrt{2}$.

Lấy module 2 vế ta có

$$|m+i| \cdot |z| = |\sqrt{2}| \Leftrightarrow m\sqrt{m^2+1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m^2(m^2+1) = 2 \Leftrightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \\ m^2 = -2 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Do $m \geq 0$ nên ta có $m = 1$, suy ra $|z| = 1$. Vậy $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 7: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $3z + \bar{z} = (2+i\sqrt{3})|z|$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải:

Gọi $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Theo bài ra ta có $3z + \bar{z} = (2+i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow 4a + 2bi = (2+i\sqrt{3})\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 2\sqrt{a^2+b^2} \\ 2b = \sqrt{3(a^2+b^2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ 4a^2 = a^2+b^2 \\ 4b^2 = 3(a^2+b^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ 3a^2 = b^2 \end{cases}$$

Vậy có vô số số phức z thỏa mãn điều kiện đã cho.

Câu 8: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z-10+2i| = |z+2-14i|$ và $|z-1-10i| = 5$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải:

Đặt $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết $|z-10+2i| = |z+2-14i| \Leftrightarrow (a-10)^2 + (b+2)^2 = (a+2)^2 + (b-14)^2$.

$$\Leftrightarrow -24a + 32b - 96 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}b - 4.$$

Ta có: $|z-1-10i| = 5 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-10)^2 = 25 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}b-5\right)^2 + b^2 - 20b + 100 = 25.$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}b^2 - \frac{100}{3}b + 100 = 0 \Leftrightarrow b = 6.$$

Suy ra $a = 4$. Vậy có một số phức thỏa mãn.

Câu 9: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|(1+i)z - 2 + 4i| = 3\sqrt{2}$ và $z - \frac{2}{|z|}i = 1 - 2zi$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Ta có: $|(1+i)z - 2 + 4i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z + 1 + 3i| = 3$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn z thuộc đường tròn tâm $I(-1; -3); R_1 = 3$.

$$z - \frac{2}{|z|}i = 1 - 2zi \Leftrightarrow (1 + 2i)z = 1 + \frac{2}{|z|}i \Leftrightarrow |(1 + 2i)z| = \left|1 + \frac{2}{|z|}i\right|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot |z| = \sqrt{1 + \frac{4}{|z|^2}} \Leftrightarrow 5|z|^2 - 1 - \frac{4}{|z|^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ |z| = -4/5 (l) \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 1$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn z thuộc đường tròn tâm $O(0; 0); R_2 = 1$.

Vì $IO = \sqrt{10}; R_1 + R_2 = 4$ nên $|R_1 - R_2| < IO < R_1 + R_2$

$\Rightarrow$ 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

Câu 10: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Ta có: $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z \Leftrightarrow z(|z| - 7 + i) = 6|z| + (|z| - 2)i$ (1).

Lấy môđun hai vế ta được: $|z|\sqrt{(|z| - 7)^2 + 1^2} = \sqrt{(6|z|)^2 + (|z| - 2)^2}$.

Đặt: $t = |z|; t \geq 0$ ta được: $t\sqrt{(t - 7)^2 + 1^2} = \sqrt{(6t)^2 + (t - 2)^2}$.

$$\Leftrightarrow t^2(t^2 - 14t + 50) = 37t^2 - 4t + 4 \Leftrightarrow t^4 - 14t^3 + 13t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^3 - 13t^2 + 4) = 0(*)$$

Bấm máy tính phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt dương.

Ứng với một giá trị t dương thế vào (1) ta tìm ra một số phức $z = \frac{6|z| + (|z| - 2)i}{|z| - 7 + i}$.

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Câu 11: Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$, thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 6.

B. 5.

C. $\sqrt{26}$.

D. 10.

Lời giải:

Trước hết ta tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết:

$$|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i| \Leftrightarrow |i| \cdot |z - 3 - 6i| = |2z - 6 - 9i| \Leftrightarrow |z - 3 - 6i| = |2z - 6 - 9i| \quad (1)$$

Đặt $z = x + iy$ thay vào (1) ta được:

$$|x + iy - 3 - 6i| = |2(x + iy) - 6 - 9i| \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = (2x - 6)^2 + (2y - 9)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1.$$

Như vậy điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C): $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1 \Leftrightarrow |z - z_0| = R$.

Trong đó: $z_0 = 3 + 4i$ và $R = 1$. Điểm I biểu diễn số phức $z_0 = 3 + 4i$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_1 và B là điểm biểu diễn số phức z_2 khi đó ta có:

$IA = IB = R = 1$; $AB = |z_1 - z_2| = 2 = 2R$. Suy ra AB là một đường kính của đường tròn (C).

Khi đó ta có I là trung điểm của AB tức là: $z_1 + z_2 = 2z_0 = 6 + 8i$.

Suy ra: $P = |z_1 + z_2| = 10$.

Câu 12: Cho số phức $z = 1 + i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1 = a + 5i, z_2 = b$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b > 1$) thỏa mãn $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính $b - a$.

A. $b - a = 5\sqrt{3}$.

B. $b - a = 2\sqrt{3}$.

C. $b - a = 4\sqrt{3}$.

D. $b - a = 3\sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + 4^2 = (b-1)^2 + 1 \\ (b-a)^2 + 25 = 3[(1-a)^2 + 16] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (1-a)^2 = 15 \\ (b-1)^2 + 2(b-1)(1-a) + (1-a)^2 = 3(1-a)^2 + \frac{23}{15}[(b-1)^2 - (1-a)^2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (1-a)^2 = 15 \\ 8(b-1)^2 - 30(b-1)(1-a) + 7(1-a)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (1-a)^2 = 15 \\ \begin{cases} b-1 = \frac{1}{4}(1-a) \\ b-1 = \frac{7}{2}(1-a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{7\sqrt{3}}{3} + 1 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

Câu 13: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - 2022i| = 2023$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 1.

B. 0.

C. 4.

D. 2.

Lời giải:

Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số thuần ảo nên $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2$

$|z - 2022i| = 2023 \Leftrightarrow |a + (b - 2022)i| = 2023 \Leftrightarrow a^2 + (b - 2022)^2 = 2023^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 - 4044b - 4045 = 0 \quad (1)$

Do $2(-4045) < 0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu hay

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} b = b_1 \quad (b_1 < 0) \\ b = b_2 \quad (b_2 > 0) \end{cases}$$

Với $b = b_1$ thì $a^2 = b_1^2 \Leftrightarrow a_{1,2} = \pm \sqrt{b_1^2}$.

Với $b = b_2$ thì $a^2 = b_2^2 \Leftrightarrow a_{3,4} = \pm\sqrt{b_2^2}$

Vậy có 4 số phức z cần tìm.

Câu 14: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P = |a| + |b|$.

A. $P = 5$.

B. $P = 7$.

C. $P = 8$.

D. $P = 4$.

Lời giải:

Ta có: $|z| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$ (1).

Mặt khác: $z(2+i)(1-2i) = (a+bi)(4-3i) = (4a+3b) + (4b-3a)i$.

$z(2+i)(1-2i)$ là số thực nên $4b-3a = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3a}{4}$.

Thay vào (1) ta được $a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow |a| = 4 \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow P = 7$.

Câu 15: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|\bar{z} - 2i| = 3$ và $(zi - 4i + 5)3i$ là số thực?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Ta có: $|\bar{z} - 2i| = 3$ nên z biểu diễn bởi M nằm trên đường tròn (C) , tâm $I(0; -2)$, $R = 3$.

Ta có: $w = (zi - 4i + 5)3i = (-y + xi - 4i + 5)i = (-x + 4) + i(-y + 5)$ là số thực nên w biểu diễn bởi điểm A nằm trên đường thẳng $-y + 5 = 0$ (d).

Vì $d(I; d) = \frac{|-(-2) + 5|}{\sqrt{1^2}} = 7 > R$ nên đường thẳng d không cắt đường tròn $(I; R)$.

Vậy không có số phức z nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{13}$ và $(z - 2i)(\bar{z} - 4i)$ là số thuần ảo?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 4.

Lời giải:

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z| = \sqrt{13} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 13$ (1).

Mà $(z - 2i)(\bar{z} - 4i) = (x + yi - 2i)(x - yi - 4i) = (x^2 + y^2 + 2y - 8) + (-6x)i$ là số thuần ảo khi

$x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 13 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$.

Từ $y = -\frac{5}{2}$ thay vào (1) ta được
$$\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 17: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo và $(z + i)(\bar{z} - 2)$ là số thực?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:

Đặt $z = x + yi$ suy ra $(z + 2i)^2 = (x + yi + 2i)^2 = [x + (y + 2)i]^2 = x^2 - (y + 2)^2 + 2x(y + 2)i$

Ta có $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo suy ra:

$$x^2 - (y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = (y + 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ x = -(y + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x - 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (z + i)(\bar{z} - 2) &= (x + yi + i)(x - yi - 2) = [x + (y + 1)i][(x - 2) - yi] \\ &= x(x - 2) + y(y + 1) + [-xy + (x - 2)(y + 1)]i = (x^2 - 2x + y^2 + y) + (x - 2y - 2)i \end{aligned}$$

Ta có $(z + i)(\bar{z} - 2)$ là số thực suy ra: $x - 2y - 2 = 0$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra hệ phương trình: } \begin{cases} \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x - 2 \end{cases} \quad (1) \\ x - 2y - 2 = 0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ x = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Tìm môđun của số phức $\omega = z_1 + z_2 - 6 + 10i$.

A. $|\omega| = 10$.

B. $|\omega| = 32$.

C. $|\omega| = 16$.

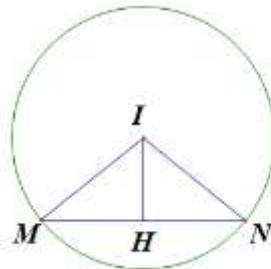
D. $|\omega| = 8$.

Lời giải:

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ là đường tròn (C) tâm $I(3; -5)$ bán kính $R = 5$.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 suy ra M, N nằm trên đường tròn (C) .

Gọi H là trung điểm của MN suy ra $IH \perp MN$.



$$\text{Do } |z_1 - z_2| = 6 \Rightarrow MN = 6 \Rightarrow MH = NH = 3 \Rightarrow IH = \sqrt{IM^2 - MH^2} = 4.$$

$$\omega = z_1 + z_2 - 6 + 10i = z_1 - (3 - 5i) + z_2 - (3 - 5i)$$

$$\Rightarrow |\omega| = |\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}| = |2\overrightarrow{IH}| = 2IH = 8.$$

Câu 19: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z - m| = 4$ và $\frac{z}{z - 6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S .

A. 0.

B. 12.

C. 6.

D. 14.

Lời giải:

Điều kiện: $z \neq 6$.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $|z - m| = 4 \Leftrightarrow |x - m + yi| = 4 \Leftrightarrow (x - m)^2 + y^2 = 16$ (C).

Vậy (C) có tâm $I(m; 0)$, bán kính $R = 4$.

$$\text{Mặt khác: } \frac{z}{z-6} = 1 + \frac{6}{z-6} = 1 + \frac{6}{x-6+yi} = 1 + \frac{6(x-6-yi)}{(x-6)^2 + y^2} = 1 + \frac{6(x-6)}{(x-6)^2 + y^2} - \frac{6y}{(x-6)^2 + y^2}i.$$

Khi đó $\frac{z}{z-6}$ là số thuần ảo khi phần thực bằng 0 hay $1 + \frac{6(x-6)}{(x-6)^2 + y^2} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 + y^2 + 6(x-6) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9 \text{ (C')}.$$

Vậy: (C') có tâm $I'(3; 0)$, bán kính $R' = 3$.

$$\text{Do đó: } \overline{II'} = (3-m; 0) \Rightarrow II' = |m-3|.$$

Có một số phức z thỏa mãn $\Leftrightarrow$ (C) và (C') tiếp xúc trong hoặc tiếp xúc ngoài.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} II' = |R - R'| = 1 \\ II' = R + R' = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-3| = 1 \\ |m-3| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 2 \\ m = 10 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow S = 12.$$

Câu 20: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A. đường thẳng.

B. đường tròn.

C. parabol.

D. hypebol.

Lời giải:

$$\text{Giả sử } z = x + yi \text{ (} x, y \in \mathbb{R} \text{)} \Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = 2x.$$

$$\text{Bài ra ta có } 2|x-1+yi| = |2x+2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |2x+2|$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 4x.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng

A. $4\sqrt{2}$.

B. 0.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$$

$$(z+3-i)(\bar{z}+1+3i) = (x+yi+3-i)(x-yi+1+3i)$$

$$= [(x+3)+(y-1)i] \cdot [(x+1)+(-y+3)i]$$

$$= (x+3)(x+1) - (y-1)(-y+3) + [(x+3)(-y+3) + (y-1)(x+1)]i$$

$(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực nên

$$(x+3)(-y+3) + (y-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow -xy + 3x - 3y + 9 + xy + y - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0.$$

Suy ra tập các điểm biểu diễn của z là đường thẳng Δ có phương trình $x - y + 4 = 0$.

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng Δ : $d(O; \Delta) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 22: Biết số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$ (*). Tập hợp các điểm biểu diễn z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng

A. 25π .

B. 9π .

C. 4π .

D. 16π .

Lời giải:

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow z - 3i + 1 = x + 1 + (y - 3)i \Rightarrow |z - 3i + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2}$

(*) $\Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq (x + 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 25$.

Gọi (C_1) là đường tròn $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$; (C_2) là đường tròn $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn z là hình vành khăn giới hạn bởi (C_1) và (C_2) và có diện tích là $S = 25\pi - 9\pi = 16\pi$.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2 + i)z - 3i$ là một đường tròn có bán kính bằng r . Tìm bán kính r .

A. $\sqrt{5}$.

B. 5.

C. $\sqrt{10}$.

D. 25.

Lời giải:

Đặt $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $w = (2 + i)z - 3i \Leftrightarrow x + yi = (2 + i)z - 3i \Leftrightarrow z = \frac{x + (y + 3)i}{2 + i}$.

Nên, từ $|z| = \sqrt{5}$ ta có: $\left| \frac{x + (y + 3)i}{2 + i} \right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|x + (y + 3)i|}{|2 + i|} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + (y + 3)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0; -3)$ và bán kính $r = 5$.

Cách khác: $|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left| \frac{w + 3i}{2 + i} \right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w + 3i| = 5 \Leftrightarrow MI = 5$ với M và I là điểm biểu diễn

w và $-3i \Rightarrow r = 5$

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = 1$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w = \frac{z + 2 + 3i}{1 + iz}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1.

B. $\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. 20.

Lời giải:

Ta có $w = \frac{z + 2 + 3i}{1 + iz} \Leftrightarrow z(1 - iw) = w - 2 - 3i \Leftrightarrow z = \frac{w - 2 - 3i}{1 - iw}$.

Suy ra $|z - i| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 2 - 3i}{1 - iw} - i \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-2 - 4i}{1 - iw} \right| = 1 \Leftrightarrow |1 - iw| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |w + i| = 2\sqrt{5}$ (1)

Giả sử $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 20$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn có bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Câu 25: Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng (Oxy) biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

A. $|z| = 4$.

B. $|z| = 4\sqrt{2}$.

C. $|z| = 2$.

D. $|z| = 2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng (Oxy) biểu diễn các số phức z và $(1+i)z \Rightarrow |z| = OA; |(1+i)z| = OB$.

$$AB = |(1+i)z - z| = |iz| = |z|.$$

$$\Delta OAB \text{ có } OA = OB \text{ và } OA^2 + AB^2 = OB^2$$

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại A .

$$\text{Khi đó: } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot AB = \frac{1}{2} |z|^2 = 8 \Leftrightarrow |z| = 4.$$

Câu 26: Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0, thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng Oxy . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tam giác OMN nhọn và không đều.

B. Tam giác OMN đều.

C. Tam giác OMN tù.

D. Tam giác OMN vuông.

Lời giải:

$$\text{Cách 1: } z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow MN^2 = OM \cdot ON \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 = z_2 (z_1 - z_2) \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2| \cdot |z_1 - z_2| \Leftrightarrow OM^2 = ON \cdot MN \quad (2)$$

$$\text{Tương tự ta có: } ON^2 = OM \cdot MN \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) ta có: } \frac{OM^2}{ON^2} = \frac{ON}{OM} \Leftrightarrow OM = ON. \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4) ta có: } MN^2 = OM^2 \Leftrightarrow MN = OM.$$

Từ đó suy ra: $OM = ON = MN$.

Vậy ΔOMN đều.

$$\text{Cách 2: Ta có } z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2\right)^2 + \frac{3}{4}z_2^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right) \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{cases} \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2| \Leftrightarrow MN = ON. \quad (2)$$

Cũng từ (1) ta suy ra $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow OM = ON$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\triangle OMN$ đều.

Câu 27: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn hai số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN = 2\sqrt{2}$. Gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của OM . Tính $l = KH$.

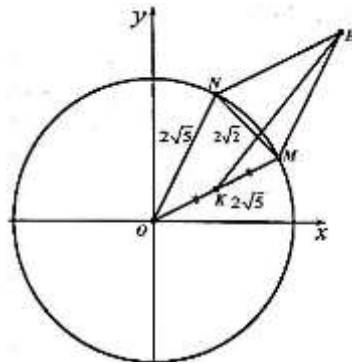
A. $l = 3\sqrt{2}$.

B. $l = 6\sqrt{2}$.

C. $l = \sqrt{41}$.

D. $l = \sqrt{5}$.

Lời giải:



Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 20$ nên tập hợp điểm biểu diễn số phức là một đường tròn tâm O bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Khi đó điểm M, N nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Xét tam giác OMN :

$$\text{Ta có: } \cos \angle MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } \angle MON + \angle OMH = 180^\circ \text{ nên } \cos \angle OMH = -\frac{4}{5}.$$

Xét tam giác HNK có: $HK^2 = MH^2 + MK^2 - 2MH \cdot MK \cdot \cos \angle OMH$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow HK &= \sqrt{MH^2 + MK^2 - 2MH \cdot MK \cdot \cos \angle OMH} = \sqrt{ON^2 + \left(\frac{1}{2}OM\right)^2 - 2ON \cdot \frac{1}{2}OM \cdot \cos \angle OMH} \\ &= \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{41} \end{aligned}$$

Câu 28: Cho số phức z thỏa $|z+1-i| = |2\bar{z}+2-3i|$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i) \cdot z + 2 - 3i$ là một đường tròn. Bán kính đường tròn đó thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(3; 4)$.

C. $(2; 3)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải:

Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\text{Từ } w = (1+i) \cdot z + 2 - 3i \Rightarrow z = \frac{w - 2 + 3i}{1+i} = \left(\frac{1-i}{2}\right)w + \frac{1+5i}{2} \quad (1)$$

$$\text{Theo giả thiết: } |z+1-i| = |2\bar{z}+2-3i| \Leftrightarrow |z+1-i| = |2\bar{z}+2+3i| \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có: $\left| \frac{1-i}{2} \cdot w + \frac{3}{2}(1+i) \right| = |(1-i) \cdot w + 3 + 8i| \Leftrightarrow |w + 3i| = |2w + 11i - 5|$

Vậy diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = 36\pi$.

Câu 29: Cho số phức z thỏa $|z+1-i| = |2\bar{z}+2-3i|$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i) \cdot z + 2 - 3i$ là một đường tròn. Bán kính đường tròn đó thuộc khoảng nào sau đây?

A. (1; 2).

B. (3; 4).

C. (2; 3).

D. (0; 1).

Lời giải:

Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\text{Từ } w = (1+i) \cdot z + 2 - 3i \Rightarrow z = \frac{w - 2 + 3i}{1+i} = \left(\frac{1-i}{2} \right) w + \frac{1+5i}{2} \quad (1)$$

$$\text{Theo giả thiết: } |z+1-i| = |2\bar{z}+2-3i| \Leftrightarrow |z+1-i| = |2\bar{z}+2+3i| \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có: } \left| \frac{1-i}{2} \cdot w + \frac{3}{2}(1+i) \right| = |(1-i) \cdot w + 3 + 8i| \Leftrightarrow |w + 3i| = |2w + 11i - 5|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (2x-5)^2 + (2y+11)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x + \frac{38}{3}y + \frac{137}{3} = 0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I\left(\frac{10}{3}; \frac{-19}{3}\right)$, bán kính

$$R = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức

$$z \text{ thỏa mãn } \begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}. \text{ Diện tích của hình phẳng } (H) \text{ là}$$

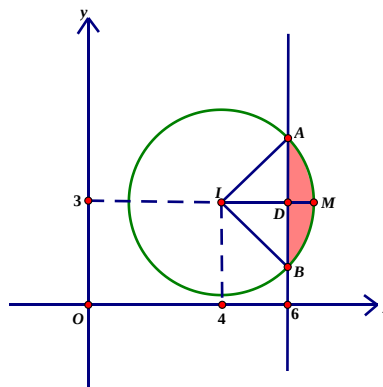
A. $4\pi - 4$.

B. $8\pi - 8$.

C. $2\pi - 4$.

D. $8\pi - 4$.

Lời giải:



Cách 1:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ là điểm $M(x; y)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x| \geq 12 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq -6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 8 \end{cases}.$$

Hình phẳng (H) là hình tô đậm trên hình vẽ.

Ta có $IA = IB = 2\sqrt{2}$, $ID = 2$ và $AB = 2AD = 2\sqrt{IA^2 - ID^2} = 4$, suy ra $\angle AIB = \frac{\pi}{2}$.

Gọi S_1 là diện tích hình quạt AIB . Ta có $S_1 = \frac{1}{4}\pi R^2 = 2\pi$.

Diện tích tam giác AIB là $S_2 = \frac{1}{2}IA.IB = 4.$

Vậy diện tích hình phẳng (H) là $S_{(H)} = S_1 - S_2 = 2\pi - 4$.

Cách 2:

Hình phẳng (H) được biểu thị là phần tô màu trên hình vẽ (kể cả bờ), là hình giới hạn bởi đường tròn (C) có tâm $I(4;3)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và đường thẳng $x = 6$.

$$\text{Ta có } (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 8 - (x-4)^2 \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{8 - (x-4)^2}.$$

(C) cắt đường thẳng $y = 3$ tại 2 điểm có tọa độ $(4 \pm 2\sqrt{2}; 3)$

Gọi S_0 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3 + \sqrt{8 - (x - 4)^2}$, $y = 3$, $x = 6$, $x = 4 + 2\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có } S_{(H)} = 2.S_0 = 2. \int_6^{4+2\sqrt{2}} \left(\sqrt{8-(x-4)^2} \right) dx \approx 2,2831.$$

Câu 31: Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A.1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải:

Đặt $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } w &= \frac{z+2}{z-2i} = \frac{a+2+bi}{a+(b-2)i} = \frac{(a+2+bi)[a-(b-2)i]}{a^2+(b-2)^2} \\ &= \frac{a(a+2)+b(b-2)+[-(a+2)(b-2)+ab]i}{a^2+(b-2)^2}\end{aligned}$$

$$w \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2)+b(b-2)=0 & (1) \\ a^2+(b-2)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2a - 2b = 0$.

Suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 32: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng 2. Môđun của z thuộc tập nào dưới đây?

- A. $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$. B. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right\}$. C. $\{\sqrt{2}; 2\}$. D. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right\}$.

Lời giải:

Điều kiện $z \neq -1$.

Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng tọa độ

Oxy. Đặt $|z|^2 = t$. Ta có $w = \frac{1+iz}{1+z} \Leftrightarrow w(1+z) = 1+iz \Leftrightarrow z(w-i) = 1-w$ (1).

$$(1) \Rightarrow |z(w-i)| = |1-w| \Leftrightarrow |z(x+(y-1)i)| = |1-x-yi|$$

$$\Leftrightarrow t[x^2+y^2-2y+1] = x^2+y^2-2x+1 \Leftrightarrow (t-1)(x^2+y^2) + 2x-2yt+t-1=0 \quad (2).$$

Do tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính bằng 2 nên $t \neq 1$.

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow x^2+y^2 + \frac{2}{t-1}x - \frac{2}{t-1}yt + 1 = 0.$$

$$\text{Theo đề bài ta được } \left(-\frac{1}{t-1}\right)^2 + \left(\frac{t}{t-1}\right)^2 - 1 = 4 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Câu 33: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z+2w|=3$, $|2z+3w|=5$ và $|z+3w|=4$. Tính giá trị biểu thức $P = z\bar{w} + \bar{z}w$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

Đặt $|z|^2 = a; |w|^2 = b$ với $a; b \geq 0$. Ta có:

$$|z+2w|=3 \Rightarrow (z+2w)(\bar{z}+2\bar{w}) = 9 \Rightarrow z\bar{z} + 2(z\bar{w} + \bar{z}w) + 4w\bar{w} = 9 \Rightarrow a + 2P + 4b = 9.$$

$$|2z+3w|=5 \Rightarrow (2z+3w)(2\bar{z}+3\bar{w}) = 25 \Rightarrow 4z\bar{z} + 6(z\bar{w} + \bar{z}w) + 9w\bar{w} = 25$$

$$\Rightarrow 4a + 6P + 9b = 25.$$

$$|z+3w|=4 \Rightarrow (z+3w)(\bar{z}+3\bar{w}) = 16 \Rightarrow z\bar{z} + 3(z\bar{w} + \bar{z}w) + 9w\bar{w} = 16 \Rightarrow a + 3P + 9b = 16.$$

$$\text{Vậy ta có hệ sau: } \begin{cases} a + 2P + 4b = 9 \\ 4a + 6P + 9b = 25 \\ a + 3P + 9b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ P = 2 \\ b = 1 \end{cases}. \text{ Do đó } P = 2.$$

Câu 34: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=|z-1-i|$ và $\frac{z-3}{z+2}$ là một số thuần ảo?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải:

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z .

$$|z+1-3i|=|z-1-i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow x-y+2=0 \quad (\Delta).$$

$$\frac{z-3}{z+2} = \frac{x+yi-3}{x+yi+2} = \frac{(x-3+yi).(x+2-yi)}{(x+2)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x-6}{(x+2)^2+y^2} + \frac{5y}{(x+2)^2+y^2}i.$$

$$\frac{z-3}{z+2} \text{ là một số thuần ảo } \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -2 \\ \frac{x^2+y^2-x-6}{(x+2)^2+y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -2 \\ x^2+y^2-x-6=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, bán kính $R = \frac{5}{2}$ và $M \neq D$.

$d(I, (\Delta)) = \frac{5}{2\sqrt{2}} < R$ nên (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt trong đó có điểm D .

Vậy có một số phức z thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 35: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3 + 2i|z|^2 = 0$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 6.

Lời giải:

Ta có $z^3 + 2i|z|^2 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -2i|z|^2$ (*).

Lấy mô-đun hai vế có:

$$|z^3| = |-2i|z|^2| \Leftrightarrow |z|^3 = 2|z|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Thay(*)}} \begin{cases} z^3 = 0 \\ z^3 + 8i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 2i \\ z = \sqrt{3} \pm i \end{cases}.$$

Câu 36: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } z^4 = |z| (*) \Leftrightarrow |z|^4 = |z| \Leftrightarrow |z|(|z|^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}.$$

$$+) |z| = 0 \xrightarrow{\text{Thay(*)}} z = 0.$$

$$+) |z| = 1 \xrightarrow{\text{Thay(*)}} z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases}.$$

$\Rightarrow S$ có 5 phần tử.

Câu 37: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{5}{17}$ và z có phần ảo dương. Tìm tổng phần thực và phần ảo của z .

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải:

Gọi $z = a + bi$ $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$.

Ta có

$$|z-1|=5 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a = 24 \quad 1$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{5}{17} \Leftrightarrow \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi} = \frac{5}{17} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2+b^2} = \frac{5}{17} \Leftrightarrow a^2+b^2 - \frac{34}{5}a = 0 \quad 2$$

Trừ vế - vế của 1 cho 2 ta có $a = 5 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a + b = 8$.

Câu 38: Cho z là số phức có mô-đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô-đun của

số phức w là

A. 2015.

B. 0.

C. 1.

D. 2017.

Lời giải:

Ta có $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Rightarrow (z+w)^2 = zw \Leftrightarrow w^2 + wz + z^2 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{-z \pm z\sqrt{3}i}{2}$.

• Với $w = \frac{-z - z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \frac{|-z - z\sqrt{3}i|}{2} = |-z| \cdot \frac{|1 + i\sqrt{3}|}{2} = |z| = 2017$.

• Với $w = \frac{-z + z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \frac{|-z + z\sqrt{3}i|}{2} = |-z| \cdot \frac{|1 - i\sqrt{3}|}{2} = |z| = 2017$.

Câu 39: Cho số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z+w}$. Khi đó $\left| \frac{z}{w} \right|$ bằng

A. 3.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải:

Với hai số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$, ta có:

$$\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z+w} \Leftrightarrow \frac{w+3z}{zw} = \frac{6}{z+w} \Leftrightarrow (w+3z)(z+w) = 6zw \Leftrightarrow 3z^2 - 2zw + w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{w}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z}{w} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \\ \frac{z}{w} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \end{cases}$$

Suy ra $\left| \frac{z}{w} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 40: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z| = 10$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho

$\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 . Diện tích $\triangle AOB$ bằng

A. $25\sqrt{3}$.

B. 50.

C. 25.

D. $50\sqrt{3}$.

Lời giải:

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(C): (O; 10)$. Suy ra $A, B \in (C)$.

Từ giả thiết, ta đặt $\frac{z_1}{z_2} = mi, (m \in \mathbb{R}) \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |m| \Leftrightarrow |m| = 1$

Ta có $OA = OB = |z_1| = |z_2| = 10$, $AB = |z_2 - z_1| = |z_2 - miz_2| = |z_2| |1 - mi| = 10 \cdot \sqrt{1 + m^2} = 10\sqrt{2}$.

Suy ra ΔAOB vuông tại O . Vậy $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 50$.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên m để tồn tại 2 số phức z thỏa mãn $|z - m + i| = |z - 1 + 2mi|$ và $|z| = \frac{3}{2}$?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải:

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} |(a - m) + (b + 1)i| = |(a - 1) + (b + 2m)i| \\ |a + bi| = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - m)^2 + (b + 1)^2 = (a - 1)^2 + (b + 2m)^2 \\ a^2 + b^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m - 2)a + (4m - 2)b - 3m^2 = 0 \quad (1) \\ a^2 + b^2 = \frac{9}{4} \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình đường thẳng, phương trình (2) là phương trình đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{3}{2}$.

Để tồn tại số phức z thỏa mãn đề bài thì đường thẳng có phương trình (1) phải cắt đường tròn có phương trình (2)

$$\text{Nghĩa là } d(O, (1)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|-3m^2|}{\sqrt{(2m-2)^2 + (4m-2)^2}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m^2 \leq \sqrt{(m-1)^2 + (2m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow m^4 \leq 5m^2 - 6m + 2 \Leftrightarrow (m-1)^2(m^2 + 2m - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{3} \leq m \leq -1 + \sqrt{3}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 42: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - 1| + |z - i| = 4$. Gọi (C) là đường cong tạo bởi tất cả các điểm biểu diễn số phức $(z - 2i)(2i + 1)$ khi z thay đổi. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) .

A. $S = 5\pi\sqrt{7}$.

B. $S = 10\pi\sqrt{7}$.

C. $S = 5\pi\sqrt{14}$.

D. $S = 10\pi\sqrt{14}$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } (z - 2i)(2i + 1) = x + yi \Rightarrow \begin{cases} z - 2i = \frac{x + yi}{2i + 1} \Rightarrow z - i = \frac{x - 2 + (y + 1)i}{2i + 1} \\ z - 1 = \frac{x + yi}{2i + 1} + 2i - 1 = \frac{x - 5 + yi}{2i + 1} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |z - 1| + |z - i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = 4\sqrt{5} \quad (1)$$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $(z - 2i)(2i + 1)$ khi z thay đổi.

$$F_1(2; -1), F_2(5; 0).$$

$$\text{Từ (1) ta có: } MF_1 + MF_2 = 4\sqrt{5}.$$

Do đó quỹ tích điểm M là elip nhận F_1, F_2 là hai tiêu điểm.

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\sqrt{5} = 2a \Rightarrow a = 2\sqrt{5} \\ F_1 F_2 = 2c = \sqrt{10} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{70}}{2} \end{cases}$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S_{(C)} = \pi ab = 5\pi\sqrt{14}$.

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|^2 = \frac{z \cdot \bar{z}}{2}$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega = (1+2i)z+1$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

A. $I(0; -2), R = \sqrt{5}$.

B. $I(1; -4), R = \sqrt{10}$.

C. $I(0; 2), R = \sqrt{5}$.

D. $I(-1; -4), R = \sqrt{10}$.

Lời giải:

Gọi $\omega = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Theo đề bài ta có $\omega = (1+2i)z+1$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\omega-1}{1+2i} \Leftrightarrow z = \frac{(x-1)+yi}{1+2i}$$

Từ đó ta có: $|z+1|^2 = \frac{z \cdot \bar{z}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{(x-1)+yi}{1+2i} + 1 \right|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)+yi}{1+2i} \cdot \frac{(x-1)-yi}{1+2i} \Leftrightarrow \left| \frac{(x-1)+yi}{1+2i} + 1 \right|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^2 + y^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + (y+2)^2}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^2 + y^2}{5} \Leftrightarrow 2[x^2 + (y+2)^2] = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+4)^2 = 10$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức ω là một đường tròn có tâm và bán kính là $I(-1; -4); R = \sqrt{10}$.

Câu 44: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z-2-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. $R = 8$.

B. $R = 4$.

C. $R = 2\sqrt{2}$.

D. $R = 2$.

Lời giải:

Giả sử A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Theo giả thiết ta có

A, B thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$, bán kính $r = 5$ và $AB = 6$.

Gọi M là trung điểm của AB khi đó M cũng là điểm biểu diễn số phức $u = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{w}{2}$.

$$\text{Lại có } IM^2 = IA^2 - AM^2 = r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow IM = 4.$$

Vậy M thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$ bán kính $r' = 4$.

Suy ra các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2 = 2u$ là một đường tròn bán kính $R = 2r' = 8$.

Câu 45: Có bao nhiêu số phức z có phần thực và phần ảo đều là các số nguyên thỏa mãn $|z+i| + |z-3i| = |z+4i| + |z-6i|$ và $|z| \leq 10$?

A. 12.

B. 2.

C. 10.

D. 5.

Lời giải:

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , $A(0;-1)$, $B(0;3)$, $C(0;-4)$, $D(0;6)$.

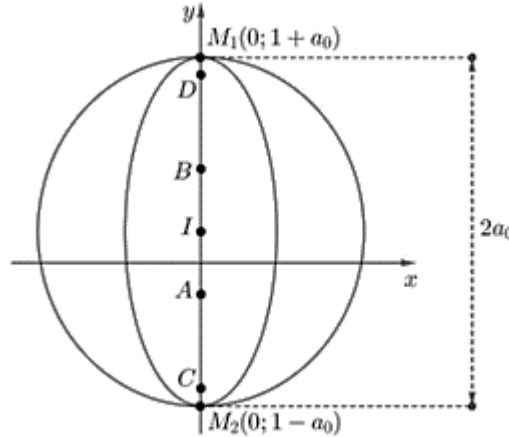
Ta có $|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i| \Leftrightarrow MA+MB=MC+MD$.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $MC+MD \geq CD=10$.

Do đó $MA+MB=MC+MD=2a_0$ ($a_0 \geq 5$).

Vì vậy M thuộc hai elip $(E_1), (E_2)$ có cùng độ lớn là $2a_0$ và tâm của hai elip này trùng nhau

tại $I(0;1)$ là trung điểm của AB, CD . Do đó $M = (E_1) \cap (E_2) \Rightarrow \begin{cases} M_1(0;1+a_0) \\ M_2(0;1-a_0) \end{cases}$



Trường hợp 1: $M(0;1+a_0) \Rightarrow |z| \leq 10 \Leftrightarrow |1+a_0| \leq 10 \Leftrightarrow 5 \leq a_0 \leq 9$ trường hợp này có 5 số phức thỏa mãn.

Trường hợp 2: $M(0;1-a_0) \Rightarrow |z| \leq 10 \Leftrightarrow |1-a_0| \leq 10 \Leftrightarrow 5 \leq a_0 \leq 12$ trường hợp này có 12 số phức thỏa mãn.

Vậy có tổng 12 số phức thỏa mãn.

Câu 46: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$, (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

- A.** 2. **B.** 10. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{130}$.

Lời giải:

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$|z-1|=\sqrt{34} \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 34; |z+1+mi|=|z+m+2i| \Leftrightarrow 2(m-1)x + 2(2-m)y + 3 = 0.$$

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là giao điểm của đường tròn

$(C): (x-1)^2 + y^2 = 34$ và đường thẳng $d: 2(m-1)x + 2(2-m)y + 3 = 0$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1 và z_2 . Suy ra $(C) \cap d = \{A, B\}$.

Mặt khác $|z_1-z_2|=AB \leq 2R=2\sqrt{34}$ do đó $\max|z_1-z_2|=2\sqrt{34} \Leftrightarrow AB=2R \Leftrightarrow I(1;0) \in d$.

$$\text{Từ đó ta có } m = -\frac{1}{2} \text{ nên } d: 3x - 5y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 6 + 3i \\ z_2 = -4 - 3i \end{cases}$$

Vậy $|z_1+z_2|=2$.

Câu 47: Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó và trục hoành.

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

Điểm $M(m + 3; m^2 - 1)$ biểu diễn số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$ nên ta có

$$x = m + 3; y = m^2 - 1 \text{ từ đó } y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8.$$

Vậy điểm M thuộc đường Parabol $y = x^2 - 6x + 8$.

Hoành độ giao điểm của và trục hoành là nghiệm phương trình

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi và trục hoành là $S = \int_2^4 |x^2 - 6x + 8| dx = \frac{4}{3}$.

Câu 48: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6$ và $|z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1 và iz_2 . Biết $\angle MON = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

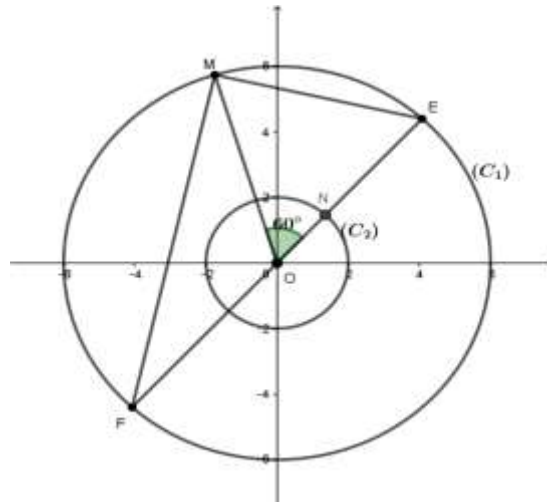
A. $T = 36\sqrt{2}$.

B. $T = 36\sqrt{3}$.

C. $24\sqrt{3}$.

D. 18.

Lời giải:



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và iz_2 , gọi E, F lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $3iz_2$ và $-3iz_2$.

Theo bài ra ta có:

$|z_1| = 6$ nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R = 6$, gọi là đường tròn (C_1) ; $|z_2| = 2 \Rightarrow |iz_2| = |i| \cdot |z_2| = 2$ do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức iz_2 thuộc đường tròn tâm O , bán kính $r = 2$, gọi là đường tròn (C_2) .

Lại thấy: $|3iz_2| = 6$ và $|-3iz_2| = 6$ suy ra các điểm E, F thuộc đường tròn (C_1) .

Hơn nữa: $3iz_2$ và $-3iz_2$ là các số phức đối nên EF là một đường kính của (C_1) .

Mặt khác: $\overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{ON}$ nên N nằm giữa O và $E \Rightarrow \angle MOE = 60^\circ$, suy ra tam giác MOE là tam giác đều cạnh bằng 6 và tam giác MEF vuông tại M .

- Khi đó: $T = |z_1^2 + 9z_2^2| = |z_1^2 - (3iz_2)^2| = |z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2| = ME \cdot MF$.

- Nhận thấy: $ME \cdot MF = 2 \cdot S_{\triangle MEF} = 4 \cdot S_{\triangle MOE} = 4 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$. Vậy $T = 36\sqrt{3}$.

Câu 49: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là

- A. $\sqrt{2} + 1$ B. $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$ **C. $\frac{3}{2}$** D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

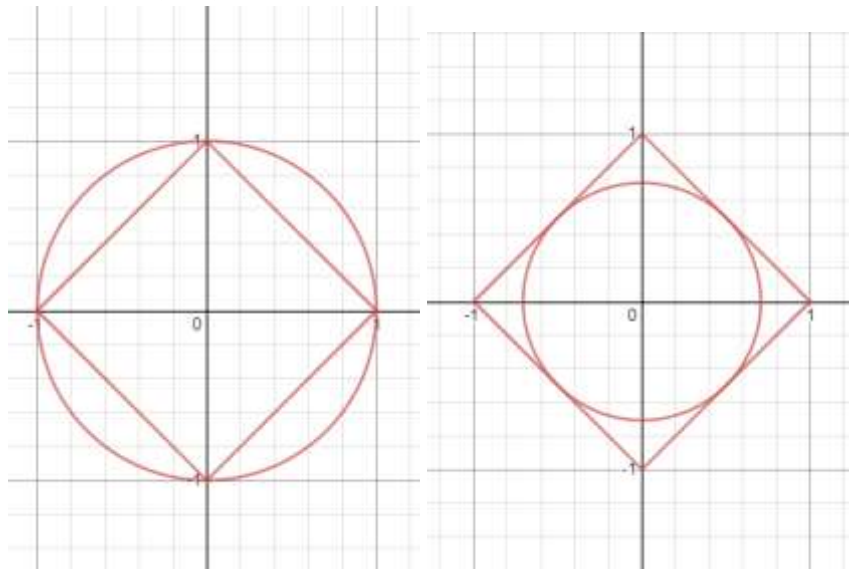
Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2 \Leftrightarrow |2x| + |2yi| = 2 \Leftrightarrow |x| + |y| = 1. (1)$$

$$\text{Đặt } z' = z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m = |z|^2 + z - \bar{z} - m.$$

z' là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0. Tức là: $x^2 + y^2 = m$. (2)

Tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn (1) là hình vuông tâm là gốc tọa



Để có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời (1) và (2) thì (2) phải là một đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông nói trên. Tức là $m > 0$ và $\sqrt{m} = 1$ hoặc $\sqrt{m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{3}{2}$.

Câu 50: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.

- A. $M + m = 63$. **B. $M + m = 48$** C. $M + m = 50$. D. $M + m = 41$.

Lời giải:

Cách 1. Ta có phương trình đường tròn $(C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9$.

Mặt khác $F = 4a + 3b - 1 = 4(a-4) + 3(b-3) + 24 \Leftrightarrow F - 24 = 4(a-4) + 3(b-3)$.

Ta có $[4(a-4) + 3(b-3)]^2 \leq (4^2 + 3^2)[(a-4)^2 + (b-3)^2] = 25 \cdot 9 = 225$.

$\Rightarrow -15 \leq 4(a-4) + 3(b-3) \leq 15 \Leftrightarrow -15 \leq F - 24 \leq 15 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$.

Khi đó $M = 39$, $m = 9$.

Vậy $M + m = 48$.

Cách 2. Ta có $F = 4a + 3b - 1 \Rightarrow a = \frac{F+1-3b}{4}$

$$(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{F+1-3b}{4} - 4 \right)^2 + b^2 - 6b + 9 = 9$$

$$\Leftrightarrow 25b^2 - 2(3F+3)b + F^2 + 225 = 0$$

$$\Delta' = (3F+3)^2 - 25F^2 - 5625$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -16F^2 + 18F - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39.$$

HẾT

Huế, 15h15' Ngày 19 tháng 3 năm 2023