PHẦN 2

CÁC BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM. GTLN – GTNN.

Trong phần 2 này chúng ta nghiên cứu các bài toán có nội dung về quỹ tích và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Thông thường: Các bài toán tập hợp điểm cũng chính là các bài toán về min – max bởi vì khi tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện nhất định thì sẽ đạt min – max. Tuy nhiên: Bài toán tập hợp điểm thiên về vị trí tương đối và tính toán, còn bài toán về min – max thiên về khảo sát hàm số và bất đẳng thức. Từ đó chúng ta cũng thấy được phương pháp giải có đặc trưng riêng

• Bài toán tập hợp điểm: Thường sử dụng phương pháp véc tơ, các định lý trong tam giác, hình bình hành, sự đối xứng, song song, vuông góc, …

• Bài toán min – max: Thường sử dụng phương pháp khử dần ẩn (Thêm biến, đổi biến, dồn biến), khảo sát cực trị, bất đẳng thức B.C.S , Mincopxki, …

Như vậy trong phần này các bài toán có mức độ Vận dụng – Vận dụng cao. Để giải nhanh thì chúng ta không chỉ nắm vững kiến thức mà còn sử dụng một số công thức tính nhanh, kỹ năng sử dụng CASIO. Nếu chỉ làm tự luận thì cũng có kết quả nhưng thi trắc nghiệm thì thời gian không nhiều!. Các em cần tính tổng thời gian của quy trình giải một bài toán khó như sau:

- *Đọc hiểu đề và yêu cầu của bài toán*: Đọc để hiểu nội dung của bài toán là gì?
- *Tái hiện kiến thức*: Trong bài toán chúng ta cần thiết những kiến thức nào?
- *Xác định các yếu tố cần giải*: Chẳng hạn mặt cầu thì cần biết tâm, bán kính,…
- *Biến đổi, tính toán*: Đây là quy trình cuối cùng dẫn đến kết quả và trả lời, có nhiều khi phải vẽ hình minh họa thì càng mất nhiều thời gian.

Trong phần này, các bài toán có chọn lọc và được biên soạn theo chủ đề: Điểm – mặt phẳng, Điểm – Mặt cầu, Điểm – Đường thẳng, và tổ hợp của các yếu tố trên. Trong phần 1, tôi đã đưa ra một số kiến thức bổ xung và công thức tính nhanh, nên phần này tôi không nêu ra. Tuy nhiên, trong phần này cũng có kiến thức bổ xung hữu ích để giúp chúng ta giải nhanh, từ đó mới tiết kiệm được thời gian toàn bài thi. Đặc biệt trong phần này ta nghiên cứu bài toán mà tạm gọi là "**Định luật phản xạ ánh sáng đối với gương phẳng**".

I. BỔ XUNG - BÀI TOÁN VỀ TÂM TỈ CỰ.

1. Kiến thức bổ xung.

Với hai điểm A, B và α, β là các số sao cho $\alpha+\beta \neq 0$. Điểm I thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ gọi là **tâm tỉ cự** của hai điểm A, B. Khi đó tọa độ I tính theo công thức:

$$x_I=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta},\ y_I=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta},\ z_I=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}.$$

Chứng minh: (Hoàn toàn tương tự với bộ n điểm)

$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+\beta\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{OI}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ hay ta có $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$. Chuyển về tọa độ ta có đpcm.

Chú ý:

✓ Điểm I thuộc đường thẳng AB. Nếu đặt $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=k$ thì $\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1-k$ và ta có $\overrightarrow{OI}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$.

✓ Đặc biệt khi $\alpha=\beta=1$ thì I là trung điểm của AB. Mở rộng đối với ba điểm A, B, C và bộ $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ ta có $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ thì I là **tâm tỉ cự** của ba điểm đó. Hơn nữa với tam giác ABC thì ta hay sử dụng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, với $\alpha=\beta=\gamma=1$.

2. Các ví dụ giải toán.

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(4;-3;2)$, $B(2;5;-1)$. Tìm tọa độ điểm K thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}=\vec{0} \Leftrightarrow x_K=\frac{x_A-2x_B}{1-2}, y_K=\frac{y_A-2y_B}{1-2}, z_K=\frac{z_A-2z_B}{1-2} \Rightarrow K(0;13;-4).$$

Lưu ý.

Để tránh sai sót về dấu, dùng Casio ghi $\frac{A-2B}{1-2}$ CALC nhập $4=2=$ (lần 1 hoành độ tương ứng của A, B) CALC lần 2 nhập tung độ, CALC lần 3 nhập cao độ.

Ví dụ 2. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $E(3;-3;5)$, $F(7;1;3)$. Tìm tọa độ điểm K thuộc trục Oy sao cho $\left|3\overrightarrow{KE}-2\overrightarrow{KF}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IE}-2\overrightarrow{IF}=\vec{0} \Rightarrow I(-5;-11;9)$.

Khi đó $\left|3\overrightarrow{KE}-2\overrightarrow{KF}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IE}\right)-2\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IF}\right)\right|=\left|\overrightarrow{KI}\right|=KI$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ K là hình chiếu của I trên trục Oy, vậy điểm K cần tìm là $K(0;-11;0)$.

Ví dụ 3. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(2;0;-1)$, $B(5;-7;-1)$, $C(-1;-5;-7)$ và M là một điểm thay đổi trên mặt phẳng Oxy. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow G(2;-4;-3)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G trên Oxy $\Leftrightarrow M(2;-4;0)$ và khi đó $MG=|-3|=3$. Vậy $P_{\min}=9$.

Ví dụ 4. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $P(1;4;-3)$, $Q(-5;2;5)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Ox sao cho $\left|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $(-2;3;0)$. **B.** $(0;3;0)$. **C.** $(-6;0;0)$. **D.** $(-2;0;0)$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của PQ ta có tọa độ $I(-2;3;1)$.

Khi đó $\left|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}\right|=2MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên trục hoành. Vậy tọa độ $M(-2;0;0)$. **Chọn D.**

Ví dụ 5. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;-1;0)$, $B(5;0;1)$, $C(3;2;-1)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $6\overrightarrow{MA}-11\overrightarrow{MB}+9\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là

A. $(4;-3;5)$ **B.** $(-3;-4;-5)$ **C.** $(-4;3;-5)$ **D.** $(4;3;-5)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $6\overrightarrow{MA}-11\overrightarrow{MB}+9\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow x_M=\dfrac{6x_A-11x_B+9x_C}{6-11+9};...\Leftrightarrow M(-4;3;-5)$. **Chọn C.**

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;-3)$, $B(1;0;2)$, $C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\dfrac{11}{5}$. **D.** $x+y=\dfrac{11}{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-k+1-k\\y=2k\\-2=-3k+2(1-k)\end{cases}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{4}{5},x=\dfrac{-3}{5},y=\dfrac{8}{5}\Rightarrow x+y=1$. **Chọn A.** (Có thể cộng x + y từ hệ mà không cần giải)

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết tọa độ $M(x;y;z)$ để $T=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6. **B.** $\dfrac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}\Rightarrow I\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{14}{4};0\right)$.

Ta có $T=4MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ nên T nhỏ nhất khi M trùng I. Vậy $x+y+z=\dfrac{21}{4}$.

3. Bài tập đề nghị.

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(3;4;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(2;7;-2)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là

A. $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2};3\right)$. **C.** $M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};3\right)$. **D.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-3\right)$.

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(-2;1;1)$, $B(4;3;-3)$, $C(5;0;5)$. M là điểm thuộc trục hoành sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó hoành độ điểm M thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(5;7)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$ Nếu điểm E thỏa nãm đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$. **D.** $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$.

Câu 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1;-3;3)$; $B(2;-4;5)$, $C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a+b+c$ bằng.

A. -5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x,y thì A,B,M thẳng hàng.

A. $x=4;y=7$. **B.** $x=-4;y=-7$. **C.** $x=4;y=-7$. **D.** $x=-4;y=7$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9;-5;7)$. **B.** $M(9;5;7)$. **C.** $M(-9;5;-7)$. **D.** $M(9;-5;-5)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

A. $M(0;1;-4)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M(0;1;-2)$. **D.** $M(0;1;4)$.

Câu 9: Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(1;2;0)$. **B.** $M(0;0;-1)$. **C.** $M(1;3;-1)$. **D.** $M(1;3;0)$.

....

II. BÀI TOÁN VỀ TỔ HỢP VÉC TƠ.

1. Đặc điểm dạng toán và ví dụ.

• Đặc điểm dạng toán:

Những biểu thức có dạng tổ hợp các véc tơ hay tổ hợp bình phương các véc tơ thì chúng ta đều có thể **dồn điểm** đưa về tâm tỉ cự để giải. Cụ thể như: $\left|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right|$ hoặc như $\alpha\overrightarrow{MA}^2+\beta\overrightarrow{MB}^2+\gamma\overrightarrow{MC}^2$ với $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

• Phương pháp giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ khi đó biến đổi biểu thức thành: $\left|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right|=\left|\alpha+\beta+\gamma\right|.MI$ hoặc như

$\alpha\overrightarrow{MA}^2+\beta\overrightarrow{MB}^2+\gamma\overrightarrow{MC}^2=\left(\alpha+\beta+\gamma\right).MI^2+\alpha IA^2+\beta IB^2+\gamma IC^2$, đến đây ta biện luận M theo điểm I.

Ví dụ 8. [MH2_2017_BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

A. $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{AM}{BM}=2$. **C.** $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{AM}{BM}=3$.

Hướng dẫn giải

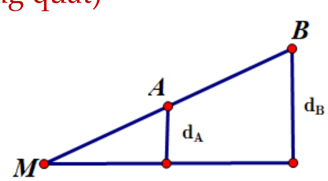
Cách 1. (Tâm tỉ cự)

Gọi tọa độ $M(x;0;z)$, ta có ba điểm A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2k+5(1-k)\\0=3k+6(1-k)\\z=k+2(1-k)\end{cases}\Leftrightarrow k=2,x=-9,z=0\Leftrightarrow M(-9;0;0).$$

Khi đó $\dfrac{AM}{BM}=\sqrt{\dfrac{7^2+3^2+1^2}{14^2+6^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$. **Chọn A.**

Cách 2. (Vị trí tương đối – Tổng quát)



Xét tam giác đồng dạng, ta có $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{d_a}{d_b}=\dfrac{d\left(A,(Oxz)\right)}{d\left(B,(Oxz)\right)}=\dfrac{|3|}{|6|}=\dfrac{1}{2}$. **Chọn A.**

Lời bình.

Theo cách 1 thì chúng ta thực hiện nhiều biến đổi và tính toán nên mất nhiều thời gian không cần thiết. Trong cách 2 thì chúng ta sử dụng tính chất hình học nên ngắn gọn và nhanh chóng hơn nhiều.

Mở rộng bài toán trên ta có hai bài toán xuất hiện tương đối nhiều trong các bài kiểm tra hay đề thi là: Tìm $\min\left(MA+MB\right)$ hoặc $\max\left|MA-MB\right|$. Các bài toán này ta giải tương tự, tuy nhiên có khác. Nhưng trước hết ta xét các bài toán liên quan đến "Tâm tỉ cự" có dạng dồn điểm suy ra dồn biến.

Ví dụ 9. **[THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;2;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(3;5;-1)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{CM}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $2b+c$ bằng

A. -1. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=4MI$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I trên Oyz. Do đó tọa độ $M\left(0;\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)\Rightarrow 2b+c=4$.

Ví dụ 10. **[THPT Lê Lai – Thanh Hóa]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0)$, $B(0;0;3)$, $C(0;-3;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(-3;-3;3)$. **B.** $M(3;3;-3)$. **C.** $M(3;-3;3)$. **D.** $M(-3;3;3)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(-3;3;3)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=MI$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I trên (P). Mặt khác ta có I thuộc (P) nên M trùng I. **Chọn D.**

Ví dụ 11. **[Đề tham khảo -BGD]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 145 **B.** 135 **C.** 105 **D.** 108

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $I(-1;1;1)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Ta có $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I trên (P).

Ghi $-\frac{2x-y+2z-8}{9}$ CALC nhập tọa độ I bấm STO M bấm AC

Ghi $2\left((2M+x-2)^2+(-M+y+2)^2+(2M+z-4)^2\right)=$ kết quả $2AM^2=12$.

Sửa thành $3\left((2M+x+3)^2+(-M+y-3)^2+(2M+z+1)^2\right)=$ kết quả $3BM^2=123$

Vậy $\min\left(2MA^2+3MB^2\right)=12+123=135$.

Ví dụ 12. **[Chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa]** Trong hệ trục $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42. **B.** 14. **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $G(-1;-1;3)$ là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3MG$ nhỏ nhất khi MG là khoảng cách từ G đến (P).

Ghi $3\times\frac{|x+2y-2z-5|}{3}$ CALC nhập tọa độ G, kết quả bằng 14. **Chọn B**.

Ví dụ 13. [Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-1;3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Khi biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AM bằng

A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{6}$. C. 6. D. 2.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Phương pháp véc tơ.

Gọi I(0 ; 0 ; 1) là tâm mặt cầu, bán kính $R=1$, ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=(0;0;6)=\overrightarrow{IK}$.

Ta có : $MA^2+MB^2+MC^2=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}$.

Vậy để tổng nhỏ nhất thì $\overrightarrow{MI},\overrightarrow{IK}$ ngược hướng nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{IK}=t(0;0;6), t>0$

Suy ra $t=\frac{R}{IK}=\frac{1}{6}\Rightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{6}(0;0;6)=(0;0;1)\Rightarrow M(0;0;2)\Rightarrow AM=\sqrt{2}$. **Chọn A**.

Cách 2. Khảo sát - BĐT.

Gọi $M(x;y;z)\in(S)$, từ giả thiết ta có $-1\le z-1\le 1$. Đặt $T=MA^2+MB^2+MC^2$, ta có

$T=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2+(x+1)^2+y^2+(z-4)^2+x^2+(y+1)^2+(z-3)^2$

$T=3x^2+3y^2+4+3(z-1)^2-12(z-1)+1+4+9=21-12(z-1)\ge 9$.

Dấu bằng tại $z-1=1, x=y=0\Leftrightarrow M(0;0;2)\Rightarrow MA=\sqrt{2}$.

Ví dụ 14. [THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị] Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$. B. $M(2;0;5)$. C. $M(3;-2;7)$. D. $M(3;0;4)$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Tâm tỉ cự.

Gọi $I(2;-1;4)$ là trung điểm của AB. Ta có $MA^2+MB^2=2MI^2+IA^2+IB^2$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I trên d.

Ghi $\frac{x-2y+2z}{9}$ CALC (nhập bộ khi thay I vào tử của d) $1=-3=1==$ STO M bấm AC

Ghi $1+M:2-2M:3+2M===$ ta được $M(2;0;5)$. **Chọn B**.

Cách 2. Khảo sát Parabol.

Gọi $M(1+t;2-2t;3+2t)\in d$, khi đó $MA^2+MB^2=(t-2)^2+(2t-4)^2+5t^2+2(2t-2)^2$ là Parabol đối với t, nên đạt GTNN tại $t=-\frac{-4-16-16}{2.18}=1\Rightarrow M(2;0;5)$. **Chọn B**.

Ví dụ 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;-2;6); B(2;4;2); M \in (\alpha): x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất, khi đó tọa độ của M là

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$. **B.** $(4;3;1)$. **C.** $(1;3;4)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x;y;z) \in (\alpha) \Rightarrow x+2y-3z=7$ (1).

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) = x^2+y^2+z^2+12-6x-2y-8z$

$=(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2-14 = \frac{1}{14}(1+4+9)\left[(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\right]-14$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \overset{B.C.S}{\geq} \frac{1}{14}(x+2y-3z-3-2+12)^2-14 \overset{(1)}{=} \frac{1}{14}.14^2-14=0$. Dấu bằng có khi và chỉ khi $(x;y;z)\in(\alpha) \& \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-3} \Leftrightarrow M(4;3;1)$. **Chọn B.**

Cách 2. Tâm tỉ cự

Gọi $I(3;1;4)$ là trung điểm của AB. Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$ hay

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I trên (α).

Ghi $-\frac{x+2y-3z-7}{14}$ CALC (nhập tọa độ I) STO M bấm AC

Ghi $M+x:2M+y:-3M+z$ bấm = = = ta được $M(4;3;1)$. **Chọn B.**

Nhận xét.

Trong cách 1, chúng ta biến đổi đai số tích $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ thành "dạng mặt cầu" sau đó còn phải suy nghĩ áp dụng bất đẳng thức B.C.S hợp lý để sử dụng giả thiết, ngoài ra khi tìm tọa độ của M thì còn phải tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng. Trong cách 2, chúng ta phân tích véc tơ hợp lý thì ngắn gọn và dễ hiểu hơn nhiều.

Ví dụ 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$ và $B(3;-3;3)$. Xét điểm M thay đổi sao cho $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Giá trị lớn nhất của OM bằng

A. $12\sqrt{3}$ **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** $5\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Phương pháp véc tơ.

Từ giả thiết ta có:

$9\overrightarrow{AM}^2 = 4\overrightarrow{BM}^2 \Leftrightarrow 9\left(OM^2+OA^2-2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}\right) = 4\left(OM^2+OB^2-2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}\right)$

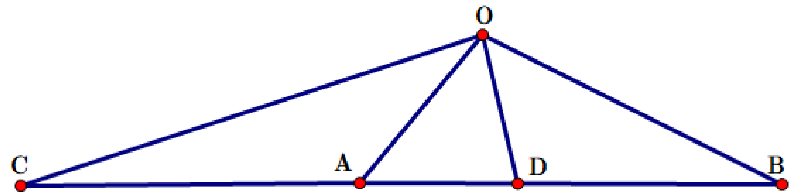
$\Leftrightarrow 5OM^2 = 4OB^2 - 9OA^2 + 2\overrightarrow{OM}\left(9\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}\right)$ (1).

Từ đó OM lớn nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}$ và $9\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}=(-30;30;-30)$ cùng hướng.

Ta có: $4OB^2-9OA^2=0$, đặt $\overrightarrow{OM}=t(-1;1;-1)$, từ (1) $\Rightarrow 15t^2=0+180t \Rightarrow t=\frac{180}{15}=12$.

Vậy $\overrightarrow{OM}=12(-1;1;-1) \Rightarrow OM=12\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Cách 2. Phương pháp hình học.



Nhận xét được $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}=\frac{OA}{OB}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$, do đó gọi D là chân đường phân giác trong của góc O tam giác AOB, C là chân đường phân giác ngoài của góc O của tam giác thì M trùng C. Tọa độ $3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Rightarrow C(-12;12;-12)\equiv M\Rightarrow OM=12\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 17. Trong không gian xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(0;0;2)$, $B(0;2;0)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x-y+4=0$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Tâm I mặt cầu thuộc mặt phẳng trung trực của AB có phương trình $(Q): 2y-2z=0$. Do đó, từ phương trình (P) và (Q), ta có tọa độ $I(x;x+4;x+4)$, suy ra:

$R=AI=\sqrt{x^2+(x+4)^2+(x+2)^2}=\sqrt{3x^2+12x+20}\geq 2\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 18. Trong không gian tọa độ $(Oxyz)$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;4)$ và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C sao cho $OB=4OC$. Khi V_{OABC} nhỏ nhất, mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$. Tính $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$?

A. $\frac{37}{102}$. B. $\frac{303}{8}$. C. 21. D. $\frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$, với $m,n,p>0, n=4p$.

Hay ta viết lại (P): $\frac{x}{m}+\frac{y}{4p}+\frac{z}{p}=1$, mà mp$(P)$ đi qua M nên $\frac{2}{m}+\frac{1}{4p}+\frac{4}{p}=1$.

Ta có $1=\frac{2}{m}+\frac{17}{8p}+\frac{17}{8p}\geq 3\sqrt[3]{\frac{2.17.17}{m.64p^2}}\Rightarrow \frac{1}{6}m.4p^2\geq \frac{1}{6.16}.27.2.17.17$

Suy ra $\min V_{OABC}=\frac{1}{6}.4mp^2=\frac{2601}{16}$ khi $\frac{2}{m}=\frac{17}{8p}=\frac{1}{3}\Rightarrow m=6, p=\frac{51}{8}$.

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=m+n+p=m+5p=6+\frac{255}{8}=\frac{303}{8}$. **Chọn B.**

Nhận xét.

Bài toán tổng quát: mặt phẳng (P) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và $\frac{x_0}{m}+\frac{y_0}{n}+\frac{z_0}{p}=1$, với $m,n,p>0, x_0,y_0,z_0>0$. Khi áp dụng bất đẳng thức AM-GM, và chẳng hạn $m=kn$, thì khi đó $\frac{z_0}{p}=\frac{1}{3}\Rightarrow p=3z_0$, còn lại hai thành phần kia ta quy đồng rồi suy ra n.

Đến đây các em cần có cách nhìn nhận khái quát để giải ra nhanh nhất mà không phải biến đổi tự luận như trên.

Ví dụ 19. **[THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C thỏa mãn $OA = 2OB$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. $\dfrac{64}{27}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{81}{16}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\min V_{OABC} = \dfrac{1}{6}.abc$ tại : $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow c = 3$ và $\dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow b = \dfrac{9}{4}, a = \dfrac{9}{2}$.

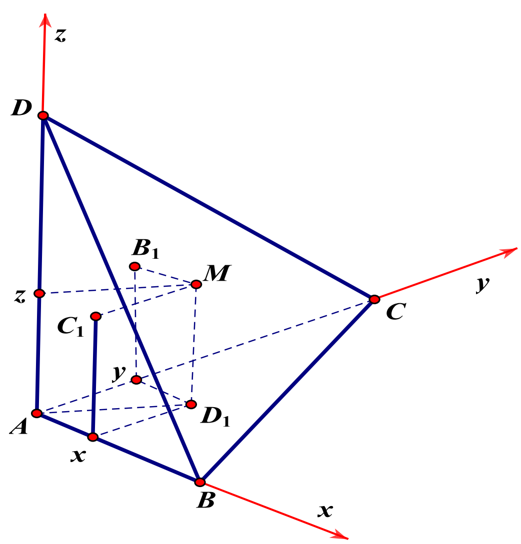
Khi đó $\min V_{OABC} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{9}{2}.\dfrac{9}{4}.3 = \dfrac{81}{16}$. **Chọn D.**

Ví dụ 20. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a, AC = 2a, AD = 3a$. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD, qua M kẻ các đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt song song với AB, AC, AD và cắt các mặt phẳng tương ứng $(ACD), (ABD), (ABC)$ tại B_1, C_1, D_1. Thể tích khối $MB_1C_1D_1$ lớn nhất bằng

A. $\dfrac{a^3}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3}{9}$ **C.** $\dfrac{a^3}{27}$ **D.** $\dfrac{2a^3}{9}$.

Hướng dẫn giải

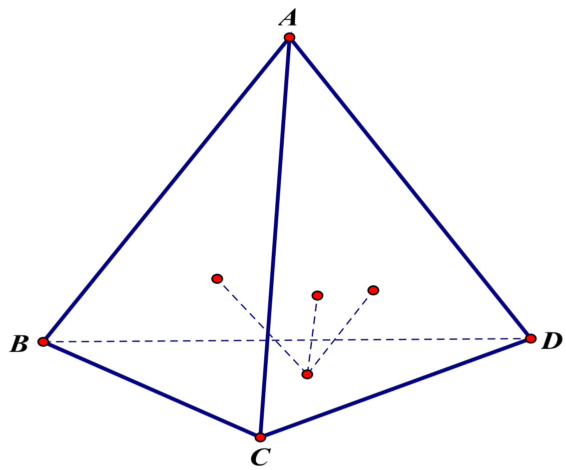
Cách 1. Hệ tọa độ.



Lấy $a = 1$. Dựng hệ tọa độ Axyz như hình vẽ, với $B(1;0;0), C(0;2;0), D(0;0;3)$, khi đó phương trình mặt phẳng (BCD) là $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z = 6$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng đó sao cho $x, y, z > 0$ và thể tích khối $MB_1C_1D_1$ là:

$$V_{MB_1C_1D_1} = \frac{1}{6}xyz = \frac{6x.3y.2z}{216} \le \frac{1}{27}\frac{(6x+3y+2z)^3}{216} = \frac{1}{27}$$. Nên $\max V_{MB_1C_1D_1} = \dfrac{a^3}{27}$. **Chọn C.**

Cách 2. Hình học tổng hợp (Cổ điển).



Đặt $MB_1 = x, MC_1 = y, MD_1 = z$. Ta có $V_{ABCD} = V_{M.ACD} + V_{MABD} + V_{M.ABC}$.

Khi đó $V_{ABCD} = x.\frac{6a^2}{6} + y.\frac{3a^2}{6} + z.\frac{2a^2}{6} = \frac{1}{6}.a.2a.3a = a^3 \Rightarrow 6x + 3y + 2z = 6a$ (1).

Mặt khác ta có d_1, d_2, d_3 lần lượt song song với AB, AC, AD nên góc giữa các đường thẳng đó chính là góc giữa các mặt bên $(ACD), (ABD), (ABC)$ và đều bằng 90^o. Do đó thể tích: $V_{MB_1C_1D_1} = \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{216}.6x.3y.2z \leq \frac{1}{216}.\frac{1}{27}(6x+3y+2z)^3 \overset{(1)}{=} \frac{a^3}{27}$. **Chọn C.**

....

2. Bài tập kiểm tra.

Câu 10: **[THPT Chuyên Thái Bình]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;3;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 14 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MO^2 + MA^2$ là

A. 26. B. 89. C. 45. D. 24.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-2;\ 2;\ 3); B(1;\ -1;\ 3); C(3;\ 1;\ -1)$. Điểm $M \in (P): x + 2z - 8 = 0$ sao cho giá trị của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó điểm M cách $(Q): -x + 2y - 2z - 6 = 0$ một khoảng bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. 2. C. $\frac{4}{3}$. D. 4.

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - y + z + 1 = 0$, các điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2), C(-2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $S = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $(3a + 2b + c)$ bằng

A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $-\frac{25}{4}$. D. $-\frac{25}{2}$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;1;-1)$. và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 15: [THPT An Lão Hải Phòng] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x-y-2z+3=0$?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{121}{54}$ **C.** 24 **D.** $\frac{91}{54}$.

Câu 16: [THPT Yên Định-Thanh Hóa] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$ và ba điểm $A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 17: [Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(5;2;-4)$. **B.** $M(-1;-1;-1)$. **C.** $M(1;0;-2)$. **D.** $M(3;1;-3)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;2;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x-y-3=0$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu (S) là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(15;-1;4)$, $B(7;6;3)$, $C(6;-3;6)$, $D(8;14;-1)$ và $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ khi $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 9. **B.** -5. **C.** 16. **D.** 2.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Khi điểm M thay đổi thuộc (S), tìm giá trị lớn nhất của biểu thức MA^2+2MB^2.

A. 80. **B.** 56. **C.** 82. **D.** 50.

Câu 21: [Lê Hồng Phong-Nam Định] Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(3;\ 0;-1)$, $C(0;\ 21;-19)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. Điểm $M(a;\ b;\ c)$ thuộc (S) sao cho biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. $a+b+c=\frac{14}{5}$. **B.** $a+b+c=0$. **C.** $a+b+c=\frac{12}{5}$. **D.** $a+b+c=12$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$, M là điểm thay đổi thuộc (S). Gọi $P_{max}, P_{\min}$ lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Giá trị $P_{max}-P_{\min}$ bằng

A. 64. B. 60. C. 68. D. 48.

Câu 23: **[THPT Kim Liên – Hà Nội]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác gốc O sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất.

A. $2x-y+2z-3=0$.
B. $4x-y-z-6=0$.
C. $2x+y+2z-6=0$.
D. $x+2y+2z-6=0$.

Câu 24: **[THPT Trần Phú – Hà Tĩnh]** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1;1;4)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C phân biệt sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Tính thể tích nhỏ nhất đó.

A. 72. B. 108. C. 18. D. 36.

....

3. Hướng dẫn bài tập kiểm tra.

Câu 10: **[THPT Chuyên Thái Bình]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P):3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(2;1;1)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Đặt $T=MA^2+MB^2+3MC^2$, ta có:

$T=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I trên (P).

Ghi $-\dfrac{3x-3y-2z-12}{22}$ CALC nhập tọa độ I, STO M bấm AC

Ghi $(3M+x)+(-3M+y)+(-2M+z)=$ kết quả bằng 3. **Chọn A**.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;3;3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y+z-14=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MO^2+MA^2$ là

A. 26. B. 89. C. 45. D. 24.

Hướng dẫn giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$, tọa độ $I(1;1;1)$ và tìm hình chiếu của I trên (P).

Ghi $-\dfrac{2x+2y+z-14}{9}$ CALC (nhập tọa độ I) $1=1=1==$ STO M.

Ghi $2\left((2M+x)^2+(2M+y)^2+(M+z)^2\right)+(2M+x-3)^2+(2M+y-3)^2+(M+z-3)^2$

Bấm = ta được 45. **Chọn C**.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-2;\ 2;\ 3); B(1;-1;3); C(3;\ 1;-1)$. Điểm $M\in(P): x+2z-8=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T=2MA^2+MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó điểm M cách $(Q): -x+2y-2z-6=0$ một khoảng bằng

A. $\frac{2}{3}$.　　B. 2.　　C. $\frac{4}{3}$.　　D. 4.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(1;1;1)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta tìm M là hình chiếu của I trên (P).

Ghi $-\frac{x+0y+2z-8}{5}$ CALC (nhập tọa độ I) $1=1=1==$ STO M.

Ghi $\frac{|-x+2y-2z-6|}{3}$ CALC nhập $M+x=0M+y=2M+z==$ kết quả 4. **Chọn D.**

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho $(P):\ x-y+z+1=0$, $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$ và $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $S=2MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. giá trị $(3a+2b+c)$ bằng

A. $\frac{25}{4}$.　　B. $\frac{7}{4}$.　　C. $-\frac{25}{4}$.　　D. $-\frac{25}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $I\left(0;\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta tìm hình chiếu của I trên (P).

Ghi $-\frac{x-y+z+1}{3}$ CALC (nhập tọa độ I) $0=\frac{3}{4}=\frac{5}{4}==$ STO M.

Bấm $3(M+x)+2(-M+y)+(M+z)$ bấm = kết quả $\frac{7}{4}$. **Chọn B.**

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;1;-1)$. và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

A. 4.　　B. 3.　　C. 2.　　D. 1.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(-3;-2;8)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Ta tìm hình chiếu của I trên (P). Ghi $-\frac{x+y+z-1}{3}$ CALC (nhập tọa độ I) $-3=-2=8==$ STO M.

Ghi $9(M+x)+3(M+y)+6(M+z)$ bấm = kết quả 3. **Chọn B.**

Câu 15: **[THPT An Lão-Hải Phòng]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x-y-2z+3=0$?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{121}{54}$　　C. 24　　D. $\frac{91}{54}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{-1}{6}\right)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta tìm hình chiếu của I trên (P).

Ghi $-\frac{x+y+z+2}{3}$ CALC (nhập tọa độ I) $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=\frac{-1}{6}==$ STO M.

Ghi $\frac{\left|2(M+x)-(M+y)-2(M+z)+3\right|}{3}$ bấm = kết quả $\frac{91}{54}$. **Chọn D.**

Câu 16: [THPT Yên Định-Thanh Hóa] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=-t\end{cases}$ và ba điểm $A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Tâm tỉ cự.

Gọi $I(1;1;2)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta tìm hình chiếu của I trên (d).

Ghi $\frac{-x+y-z}{3}$ CALC (nhập tọa độ $\overrightarrow{M_0I}$) $0=-1=2==$ STO M.

(Chú ý $a+b+c=3-t$ nên) ghi $3-M$ bấm = kết quả 4. **Chọn B.**

Cách 2. Khảo sát.

Giả sử $M(1-t;2+t;-t)\in d$.

Ta có: $P=(t+5)^2+(t+2)^2+t^2+2\left[2(t-1)^2+t^2\right]+3\left[(t-1)^2+(t+2)^2+(t+4)^2\right]$ là Parabol.

Nên P đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=-\frac{10+4-8+30}{2.18}=-1$, khi đó $M(2;1;1)\Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 17: [Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(5;2;-4)$. **B.** $M(-1;-1;-1)$. **C.** $M(1;0;-2)$. **D.** $M(3;1;-3)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $I\left(\frac{2}{3};\frac{-5}{3};\frac{5}{3}\right)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Ta tìm hình chiếu của I trên Δ.

Ghi $\frac{2x+y-z}{6}$ CALC (nhập tọa độ $\overrightarrow{M_0I}$) $\frac{2}{3}-1=-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}+2==$ STO M.

ghi $2M+1:M:-M-2$ bấm $===$ kết quả $M(-1;-1;-1)$. **Chọn B.**

Câu 18: Trong không gian xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;2;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P):x-y-3=0$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu (S) là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Tâm I mặt cầu thuộc mặt phẳng trung trực của AB có phương trình $(Q): x+z=4$. Do đó từ phương trình của (P) và (Q) ta có tọa độ $I(x;x-3;4-x)$, suy ra:

$R=AI=\sqrt{(x-1)^2+(x-5)^2+(x-3)^2}=\sqrt{3x^2-18x+35}\geq 2\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(15;-1;4)$, $B(7;6;3)$, $C(6;-3;6)$, $D(8;14;-1)$ và $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ khi $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 9. **B.** -5. **C.** 16. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Gọi I(1 ; -2 ; 3) là tâm mặt cầu, ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=(32;24;0)=\overrightarrow{IK}$. Ta có :

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}$.

Vậy để tổng nhỏ nhất thì $\overrightarrow{MI},\overrightarrow{IK}$ ngược hướng nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{IK}=t(32;24;0), t>0$

nên $t=\dfrac{R}{IK}=\dfrac{5}{40}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow \overrightarrow{IM}=\dfrac{1}{8}(32;24;0)=(4;3;0)\Rightarrow M(5;1;3)\Rightarrow a+b+c=9$. **Chọn A.**

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Khi điểm M thay đổi thuộc (S), tìm giá trị lớn nhất của biểu thức MA^2+2MB^2.

A. 80. **B.** 56. **C.** 82. **D.** 50.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Phương pháp véc tơ.

Gọi $I(-1;0;1)$ là tâm mặt cầu, ta có $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=(6;-3;2)=\overrightarrow{IK}$. Ta có :

$T=MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}=42+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}$.

Vậy để tổng lớn nhất thì $\overrightarrow{MI},\overrightarrow{IK}$ cùng hướng. Nên $\max T=42+2.1.7=56$. **Chọn B.**

Cách 2. Khảo sát – Khử bậc hai đưa về mặt phẳng.

Gọi $M(x;y;z)$, ta có $T=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2+2\left[x^2+(y+2)^2+(z-3)^2\right]$

$T=3(x^2+y^2+z^2)-6x+6y-10z+37=3(-1-2x+2z)-6x+6y-10z+37$

$\Leftrightarrow -12x+6y-4z+34-T=0\Rightarrow d(I,(P))=\dfrac{|T-42|}{14}\leq 1\Rightarrow T\leq 14+42=56$. **Chọn B.**

Câu 21: **[THPT Lê Hồng Phong-Nam Định]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(3;\ 0;-1)$, $C(0;\ 21;-19)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. $M(a;\ b;\ c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. $a+b+c=\dfrac{14}{5}$. **B.** $a+b+c=0$. **C.** $a+b+c=\dfrac{12}{5}$. **D.** $a+b+c=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $I(1;\ 1;\ 1)$ là tâm mặt cầu, bán kính $R=1$.

Ta có $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 6MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 + 2.\overrightarrow{MI}.\left(3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)$.

Đặt $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = (0;18;-24) = \overrightarrow{IK}$, khi đó T nhỏ nhất nếu $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IK}$ cùng hướng. Ta có $\overrightarrow{IM} = t.\overrightarrow{IK}, t > 0 \Rightarrow t = \dfrac{R}{IK} = \dfrac{1}{30} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{30}(0;18;-24) = \left(0;\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$.

Từ đó $M\left(1;\dfrac{8}{5};\dfrac{1}{5}\right) \Rightarrow a+b+c = \dfrac{14}{5}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi $P_{max}, P_{\min}$ lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Giá trị $P_{max} - P_{\min}$ bằng

A. 64. **B.** 60. **C.** 68. **D.** 48.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(1;\ 2;\ -1)$ là tâm mặt cầu, bán kính $R = 3$.

Ta có $P = 2MA^2 - MB^2 = MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + 2.\overrightarrow{MI}.\left(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right)$.

Đặt $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = (4;3;0) = \overrightarrow{IK}$. Khi đó P lớn nhất, nhỏ nhất nếu $\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IK}$ tương ứng cùng hướng và ngược hướng. Từ đó $P_{max} - P_{\min} = 4.R.IK = 60$. **Chọn B.**

Câu 23: [THPT Kim Liên – Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác gốc O sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất.

A. $2x - y + 2z - 3 = 0$. **B.** $4x - y - z - 6 = 0$.

C. $2x + y + 2z - 6 = 0$. **D.** $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\min V_{OABC} = \dfrac{1}{6}.abc$ tại : $\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow a = 6, b = c = 3$.

Khi đó phương trình $(P): \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0$. **Chọn D.**

Câu 24: [THPT Trần Phú – Hà Tĩnh] Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1;1;4)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C phân biệt sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Tính thể tích nhỏ nhất đó.

A. 72. **B.** 108. **C.** 18. **D.** 36.

Hướng dẫn giải

Ta có $\min V_{OABC} = \dfrac{1}{6}.abc$ tại : $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{4}{c} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow a = b = 3, c = 12$.

Khi đó $\min V_{OABC} = \dfrac{1}{6}.3.3.12 = 18$. **Chọn C.**

III. BÀI TOÁN VỀ QUỸ TÍCH – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI.

1. Đặc điểm dạng toán và ví dụ.

• Đặc điểm dạng toán:

Những bài toán cần biện luận theo tham số hoặc biến đổi đại số hay xét vị trí tương đối để tìm GTLN, GTNN hoặc tính toán khác. Ở đây chúng ta chỉ xét đơn lẻ các khoảng cách (Nếu có), mà không phải tổng - hiệu các khoảng cách. Phần sau ta sẽ nghiên cứu bài toán "**Định luật phản xạ ánh sáng đối với gương phẳng**".

• Phương pháp giải:

Tâm tỉ cự là điểm mà chúng ta cũng cần lưu ý. Ngoài ra ta còn vẽ các yếu tố phụ để giải toán: Các yếu tố thường cần vẽ là vuông góc, song song, đối xứng, bằng nhau. Tương ứng với các yếu tố đó là các tính chất hình học của một số hình; lập các phương trình đường; tìm giao điểm; . . .

Ví dụ 21. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+3y-z-1=0$ và các điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

A. $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=-3t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1+7t\\y=2t\\z=t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=1+7t\\y=-2t\\z=t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên d, ta có $BK \le BA$ nên khoảng cách lớn nhất khi d vuông góc với BA, d nằm trong (α), suy ra $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{n_P}\right]$.

MENU 9 1 2 nhập $1=2=3=$ và $1=3=1=$ ta có x = 7, y = -2 nên $\overrightarrow{u_d}=(7;-2;1)$.

Ví dụ 22. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+8x-6y-4z-11=0$ và hai điểm $A(1;2;3), B(-1;2;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B và khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

A. $(P): 3x-y-2z+5=0$. **B.** $(P): 3x+y-2z+1=0$.

C. $(P): 3x+y+2z-11=0$. **D.** $(P): 3x-y+2z+5=0$.

Hướng dẫn giải.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của tâm I lên mp(P) và đường thẳng AB, ta có $IH \le IK$ nên IH lớn nhất bằng IK hay $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{n_P}$.

Tọa độ điểm I(- 4; 3; 2), $\overrightarrow{BA}=(2;\ 0;\ 3)$.

Ghi $\dfrac{2x+0y+3z}{4+9}$ CALC (nhập tọa độ $\overrightarrow{AI}$) $-5=1=-1==$ Sto M

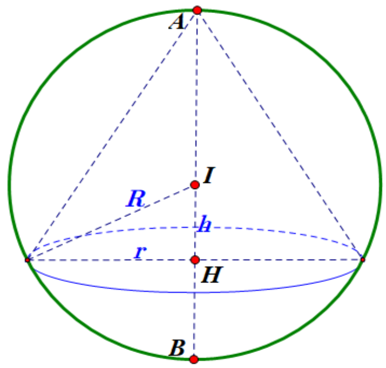
ghi $1+2M+4:2+0M-3:3+3M-2$ bấm $===$ ta có $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{n_P}=(3;-1;-2)$.

Phương trình (P) là: 3x - y - 2z + 5 = 0. **Chọn A.**

Ví dụ 23: [**Đề tham khảo 2021 – BGD**] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A, đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB. Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $2x+by+cz+d=0$. Giá trị của $b+c+d$ bằng

A. -21. **B.** -12. **C.** -18. **D.** -15.

Hướng dẫn giải.



Gọi $h=IH=d(I,(P))$, r là bán kính đáy nón, $R=IA=3$ là bán kính mặt cầu.

Ta có $AH=3+h,\ r^2=9-h^2$ và thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi(3+h)(9-h^2)$.

Ta có : $(3+h)(3+h)(6-2h)\le\left(\frac{3+h+3+h+6-2h}{3}\right)^3=64\Rightarrow V\le\frac{1}{6}\pi.64=\frac{32\pi}{3}$.

Dấu bằng có khi $3+h=6-2h\Rightarrow h=1\Rightarrow AH=4$.

Mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của nón có $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$.

Đặt $\overrightarrow{AH}=t(2;2;1),t>0$ suy ra $t=\frac{4}{3}\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow H\left(\frac{16}{3};\frac{11}{3};\frac{10}{3}\right)$.

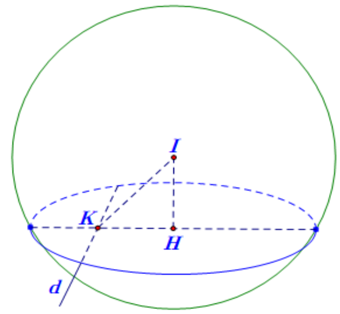
Phương trình (P) là: $2x+2y+z-18=0$. Vậy $b+c+d=-15$. **Chọn D.**

Ví dụ 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=27$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Phương trình của (P) là $ax+by-z+c=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a+b+c=1$. **B.** $a+b+c=-6$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=2$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm mặt cầu, H là tâm đường tròn giao tuyến và là hình chiếu của I trên (P). Kẻ IK vuông góc với d.



Đường tròn có bán kính nhỏ nhất khi (*P*) cách xa *I* nhất, mà $IH \le IK$ .Vậy ta phải có $H \equiv K$ và (*P*) có một vtpt $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{IK}$.

Ghi $\frac{2(x-1)+y+2(z-2)}{9}$ CALC (nhập tọa độ *I*) $2=5=3==$ STO M

ghi $1+2M-2:M-5:2+2M-3$ bấm $===$ ta có tọa độ véc tơ $\overrightarrow{IK}=(1;-4;1)$

$\Rightarrow (P): -x+4y-z+3=0 \Rightarrow a+b+c=-1+4+3=6$. **Chọn C.**

Ví dụ 25. [Đề 2017 - BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$ **B.** $T=4$ **C.** $T=5$ **D.** $T=2$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(1;2;3)$ là tâm mặt cầu. Kẻ IH, IK lần lượt vuông góc với (P) và AB thì ta có $IH \le IK$, do đó để đường tròn giao tuyến có bán kính nhỏ nhất thì (P) cách xa tâm *I* nhất, hay $\max d(I,(P)) = IK$, khi đó $\overrightarrow{IK}$ là một VTPT của (P).

Ghi $\frac{x-y+2z}{6}$ CALC nhập $1=1=3==$ STO M, bấm AC ghi $M-1:-M-1:2M-3$ bấm $===$ ta được $\overrightarrow{IK}=(0;-2;-1)$, suy ra $(P): 0x+2y+z-2=0$. **Chọn A.**

Ví dụ 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z=0$ và điểm $M(0;1;0)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất. Gọi $N(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc đường tròn (C) sao cho $ON=\sqrt{6}$. Tính y_0.

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.**3.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Mặt cầu có tâm $I(-1;2;1), R=\sqrt{6}$. Hạ IH vuông góc với (P) thì $IH \le IM$. Để đường tròn giao tuyến có chu vi nhỏ nhất thì *I* cách xa (*P*) nhất, như thế ta phải có $\overrightarrow{IH} \equiv \overrightarrow{IM}$ và là vtpt của (*P*). Phương trình $(P): x-y-z=-1$.

Ta có $NO=NI=\sqrt{6}=R$ nên *N* thuộc mặt phẳng trung trực của *OI*, phương trình là: $(Q): -x+2y+z=3$.

Suy ra *N* thuộc *d* là giao tuyến của (*P*) và (*Q*), cộng các vế ta được $y=2$.

Ví dụ 27. Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y-z+6=0$; $(Q): 2x+3y-2z+1=0$. Gọi (S) là mặt cầu cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm $H(-1;2;3)$, bán kính $r=8$ và cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính lớn nhất. Phương trình mặt cầu (S) là:

A. $(S): x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$. B. $(S): x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=67$.

C. $(S): x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=64$. D. $(S): x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=64$.

Hướng dẫn giải.

Gọi I là tâm mặt cầu (S), I thuộc (Q) thì (S) cắt (Q) giao tuyến là đường tròn lớn.

Mặt khác điểm I thuộc đường thẳng d qua H và vuông góc với (P) nên có tọa độ $I(-1+x;2-x;3-x)$, cho thuộc (Q) suy ra $x=1$.

Suy ra $I(0;1;2)$ và $R^2=3x^2+r^2=67$. **Chọn B.**

Ví dụ 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x+2y+z-7=0$ và đi qua hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;5;3)$. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) bằng

A. $\frac{\sqrt{546}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{763}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{345}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{470}}{3}$.

Hướng dẫn.

Phương trình trung trực của AB là $(Q): x+3y+2z=16$. Suy ra tâm I mặt cầu thuộc đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q). Phương trình $d: \frac{x+2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-9}{1}$.

Ta có $\min R=\min IA=d(A,d)$, ghi $\sqrt{x^2+y^2+z^2-\frac{(x-y+z)^2}{3}}$ CALC nhập 3 = 2 = -8 = kết quả $\frac{\sqrt{546}}{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;5)$, $B(1;2;4)$ và mặt cầu $(S_m): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-m)^2=\frac{m^2}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$.

A. $m=8-4\sqrt{3}$. B. $m=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. C. $m=1$. D. $m=3-\sqrt{3}$.

Hướng dẫn.

Gọi $M(x;y;z)$, ta có $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2-(x-1)^2-(y-2)^2-(z-4)^2=9$

Suy ra $M\in(P): x+y+z-4=0$.

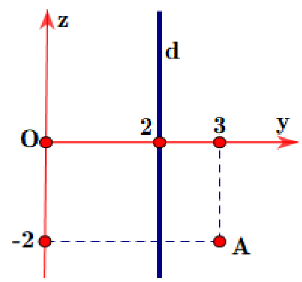
Mặt khác $M\in(S_m)$ có tâm $I(1;1;m), R^2=\frac{m^2}{4}$ nên $d^2\le R^2 \Leftrightarrow \frac{(m-2)^2}{3}\le\frac{m^2}{4}$.

Giải ra ta có $8-4\sqrt{3}\le m\le 8+4\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 30. [Đề 2019-BGD] Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(-2;0;-2)$. **B.** $M(0;4;-2)$. **C.** $Q(0;2;-5)$. **D.** $N(0;-2;-5)$.

Hướng dẫn giải.



Để khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất thì điểm A, d và trục Oz đồng phẳng và khi đó: $d(A,d)=d(A,Oz)-d(d,Oz)=1$.

Phương trình $d: x=0, y=2, z=t$. Khi đó d đi qua điểm $Q(0;2;-5)$. **Chọn C.**

Ví dụ 31. Trong không gian $Oxyz$, điểm M(x; y; z) di động trên d là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(\alpha): 3x-y+4z+1=0$ và $(\beta): 2x+3y+z+7=0$. Tìm giá nhỏ nhất của $T=x^2+y^2+z^2$

A. $\frac{34}{9}$. **B.** $\frac{82}{27}$. **C.** $\frac{461}{121}$. **D.** $\frac{74}{19}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $T=x^2+y^2+z^2=OM^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất và chính là khoảng cách từ O đến d. Ta có: $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(-13;5;11)$.

Phương trình mp(P) qua O và vuông góc với d là $-13x+5y+11z=0$.

Giải hệ ba ẩn bởi ba mặt phẳng, ta được $M\left(\frac{-7}{9};\frac{-16}{9};\frac{-1}{9}\right)$ nên $T=\frac{34}{9}$.

Ví dụ 32. [THPT Chuyên Vĩnh Phúc] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB}=90°$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

A. 2. **B.** 4. **C.** 4π. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Mặt cầu có bán kính $R=\sqrt{1+1+9-7}=2$. Tam giác AMB vuông tại M nên để diện tích lớn nhất thì AB là đường kính mặt cầu. Ta có:

$$S_{AMB}=\frac{1}{4}.2AM.BM\le\frac{1}{4}\left(AM^2+BM^2\right)=\frac{1}{4}AB^2=4.$$

Ví dụ 33. [Chuyên Lê Quý Đôn- Quảng Trị] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-y+2=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;1)$. Điểm $C(a;b;-2)\in(P)$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $a+b$.

A. 2. B. -3. C. 1. D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $C(x;x+2;-2)\in(P)$, ta có: $\overrightarrow{BA}=(0;2;2),\overrightarrow{BC}=(x-1;x+2;-3)$. Từ đó diện tích ABC là : $S=\frac{1}{2}\sqrt{8\left[(x-1)^2+(x+2)^2+9\right]-(2x-2)^2}=\sqrt{3x^2+6x+27}\geq 2\sqrt{6}$.

$\min S=2\sqrt{6}\Leftrightarrow x=-1\Leftrightarrow C(-1;1;-2)\Rightarrow a+b=0$.

Ví dụ 34. [Học mãi] Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T).

A. $r=4$. B. $r=2$. C. $r=\sqrt{3}$. D. $r=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)=2(2;-1;2)=2\overrightarrow{n_P}$ nên AB vuông góc với (P). Gọi D là giao điểm của AB và (P), theo tính chất cát tuyến và tiếp tuyến, ta có : $DC^2=DA.DB$ không đổi, do đó $r=DC=\sqrt{DA.DB}$.

Với $DA=d(A,(P))=2, DB=d(B,(P))=8$, suy ra $r=\sqrt{2.8}=4$.

Ví dụ 35. [HSG tỉnh Nam Định] Trong không gian $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi, khác 0 và thỏa mãn $a+b+c=6$. Gọi tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là I. Giá trị nhỏ nhất của OI bằng:

A. 3. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $I(x;\ y;\ z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $OABC$, nếu dựng thêm hình hộp chữ nhật có ba cạnh OA, OB, OC thì I là tâm của hình hộp, hay ta có $I(x;\ y;\ z)=I\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2};\ \frac{c}{2}\right)$.

Suy ra $x+y+z=\frac{a+b+c}{2}=3\Rightarrow OI=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq\sqrt{\frac{1}{3}(x+y+z)^2}=\sqrt{3}$.

Ví dụ 36. [THPT Yên Khánh-Ninh Bình] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$ tại điểm M có tọa độ dương. Mặt phẳng (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là:

A. 24. B. 27. C. 64. D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do tính đối xứng nên T nhỏ nhất khi $a=b=c>0$. Khi đó phương trình (P) theo đoạn chắn là: $x+y+z-a=0$. Điều kiện tiếp xúc $d(O,(P))=\frac{|a|}{\sqrt{3}}=R=1\Rightarrow a=\sqrt{3}$.

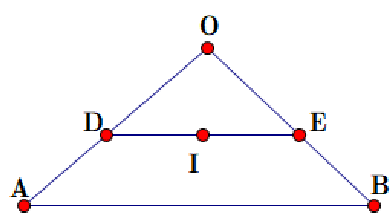
Vậy $\min T=\left(1+a^2\right)^3=4^3=64$.

Ví dụ 37. [Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(0;1;-1)$. Hai điểm D,E thay đổi trên các đoạn OA,OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm của đoạn DE có tọa độ là

A. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$. **B.** $I\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3};0\right)$. **C.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};0\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có $OA=OB=\sqrt{2}$ nên tam giác OAB cân tại O, do vai trò ngang nhau nên DE nhỏ nhất khi $OD=OE$. Tỉ số diện tích $\frac{S_{ODE}}{S_{OAB}}=\left(\frac{OD}{OA}\right)^2=\frac{1}{2}$, suy ra $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OB}$

Từ đó: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, suy ra tọa độ $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$.

Ví dụ 38. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;1;3)$, mặt phẳng $(P):x+my+(2m+1)z-m-2=0$, m là tham số thực. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (P). Khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất, tính $a+b$.

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 0.

Hướng dẫn.

Chọn C

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng cố định $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$. Kẻ AH, AK lần lượt vuông góc với (P) và d, khi đó $AH\le AK$ nên khoảng cách AH lớn nhất bằng AK.

Ta cần xác định $H(a;b;c)$ là hình chiếu của A trên d, khi đó $a+b=3+3t$.

Ghi $\frac{x+2y-z}{6}$ bấm CALC nhập $0=0=3==$ ta được $t=-\frac{1}{2}$ nên $a+b=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ lần lượt có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$, $x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z+5=0$. Xét các mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với cả hai mặt cầu đã cho. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm mà tất cả các $mp(P)$ đi qua. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=-\frac{5}{2}$. **B.** $S=\frac{5}{2}$. **C.** $S=-\frac{9}{2}$. **D.** $S=\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn.

Các mặt cầu: (S_1) có tâm $I_1(1;1;1), R_1=5$, (S_2) có tâm $I_2(3;-2;-1), R_2=3$. Ta có $I_1I_2=\sqrt{17}<R_1+R_2$ nên $(S_1),(S_2)$ cắt nhau. Các mặt phẳng (P) luôn đi qua điểm M thuộc đường thẳng I_1I_2 thỏa mãn $\overrightarrow{MI_1}=\frac{5}{3}\overrightarrow{MI_2}$. Tọa độ $M\left(6;-\frac{13}{2};-4\right)$. **Chọn C.**

Ví dụ 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;7)$, $B\left(\frac{-5}{7};\frac{-10}{7};\frac{13}{7}\right)$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I đi qua hai điểm A, B sao cho OI nhỏ nhất. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (S), giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2a-b+2c$ là

A. 7. **B.** 18. **C.** 156. **D.** 6.

Hướng dẫn.

Chọn B

Phương trình trung trực của BA là $(P):\frac{12}{7}x+\frac{24}{7}y+\frac{36}{7}z=\frac{54-\frac{25+100+169}{49}}{2}=24$.

Hay rút gọn thành $(P): x+2y+3z-14=0$. Vì OI nhỏ nhất nên I là hình chiếu của O trên (P), ở đây dễ tìm được $I(1;2;3)$. Suy ra $R=IA=4$.

Từ đó $T=6+2(a-1)-(b-2)+2(c-3)\le 6+\sqrt{9\left[(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2\right]}=18$.

Ví dụ 41. [Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{5}{6}$, mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Điểm M thuộc đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Giá trị lớn nhất của $d(M;\Delta)$ là

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn.

Mặt cầu có tâm $I(1;-1;0), R^2=\frac{5}{6}$. Hạ IH vuông góc với (P), $IH=d(I,(P))=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến là: $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đường thẳng Δ vuông góc với (P) và cắt (P) tại K; $d(I,\Delta)=HK=\sqrt{2}=2r$.

Khi đó $\max d(M,\Delta)=3r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 42. Trong không gian hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d':\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d và (α) tạo với d' một góc lớn nhất là

A. $x-z+1=0$. B. $x-4y+z-7=0$.

C. $5x-2y-4z+1=0$. D. $3x-2y-2z-1=0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Cách 1. Trắc nghiệm Casio.

Ta kiểm được các mặt phẳng đều chứa d (có $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=0$ và đi qua điểm $(1;-1;2)$). Tính $\sin^{-1}\left(\dfrac{|A+2B+C|}{\sqrt{6}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$ CALC nhập vtpt trong đáp án, $\max\varphi\approx 35,26^o$.

Cách 2. Khử dần ẩn.

Giả sử vtpt $\overrightarrow{n_\alpha}=(a;b;c)$ vuông góc $\overrightarrow{u_d}$ nên $2a+b+2c=0\Rightarrow b=-2a-2c$. Ta có:

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_{d'}},\overrightarrow{n_\alpha}\right)\right|=\frac{|a+2b+c|}{\sqrt{6}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{3|a+c|}{\sqrt{6}.\sqrt{5a^2+8ac+5c^2}},$$ với $a^2+c^2\neq 0$.

Do vai trò ngang nhau, khi $a=c$ thì $\max(\sin\varphi)=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Chọn $c=1,a=1,b=-4$ và phương trình $(\alpha):x-4y+z-7=0$. **Chọn B.**

Nhận xét.

Trong cách 2, ta khử dần ẩn từ a,b,c về còn hai ẩn a,c; Tổng quát: phải xét trường hợp $a=0\cup a\neq 0$ rồi chia cả tử và mẫu cho a để đưa về một ẩn $t=\dfrac{c}{a}$, tiếp theo là khảo sát hàm số biến t. Sau đây là cách 3 sử dụng một ẩn.

Cách 3. Khảo sát.

Gọi $A(a-1;2a;a+1)=d'\cap(\alpha)$, điểm $M(1;-1;2)\in d$ $\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(a-2;2a+1;a-1)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u_d}\right]=(3a+3;2;-3a-4)$.

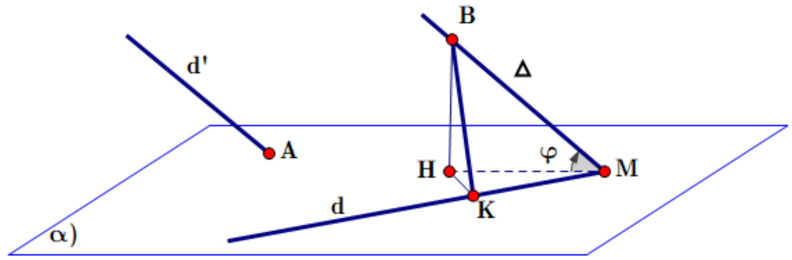
Khi đó $\sin\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{u_{d'}}\right)\right|=\dfrac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{(3a+3)^2+4+(3a+4)^2}}$ lớn nhất nếu Parabol nhỏ nhất: $P=18a^2+42a+29$, tại $a=-\dfrac{42}{36}=-\dfrac{7}{6}$.

Vậy $\overrightarrow{n_\alpha}=-\dfrac{1}{2}(1;-4;1)$ và phương trình $(\alpha):x-4y+z=7$.

Cách 4. Vẽ yếu tố phụ.

Qua $M\in d$ vẽ đường thẳng $\Delta//d'$, lấy điểm $B\in\Delta$ và kẻ $BH\perp(\alpha),BK\perp d$.

Ta có $\sin\varphi=\dfrac{BH}{BM}\le\dfrac{BK}{BM}$, dấu bằng có khi $BH\equiv BK$.



Gọi (P) là mp(Δ,d), ta có $\overrightarrow{n_P}=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-1;0;1)$. Ta có $(\alpha)\perp(P), d\subset(\alpha)$ nên:

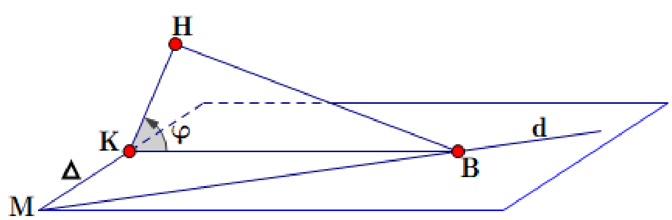
$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(1;-4;1)$, phương trình $(\alpha): x-4y+z=7$.

Ví dụ 43. [KTNLGV THPT Lý Thái Tổ] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x-y-2z-2=0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{7\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn.

Giả sử $(P)\cap(Q)=\Delta$, trong mặt phẳng (P) thì $d\cap\Delta=M$. Trên d lấy điểm B và hạ BH, BK vuông góc với (Q) và Δ. Khi đó $\widehat{BKH}=\varphi$ là góc giữa (P) và (Q).



Ta có $\sin\varphi=\frac{BH}{BK}\ge\frac{BH}{BM}$, dấu bằng có khi $K\equiv M$. Khi đó $\Delta\perp d$ nên $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_Q}\right]$.

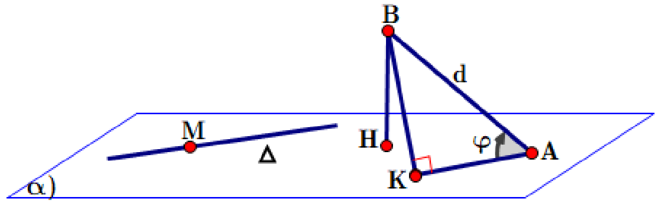
Tính được $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;0;3)$ hoặc chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;0;1)$. Suy ra $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(1;1;-1)$ do đó phương trình $(P): x+y-z+3=0$. Vậy $d(A,(P))=\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 44. [Chuyên Nguyễn Trãi-Hải Dương] Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=4+3t\\z=-3-2t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases}x=1\\y=-t'\\z=2t'\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=8+5t'\\y=-3-4t'\\z=2+t'\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t'\\y=1-t'\\z=3-2t'\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+5t'\\y=1-4t'\\z=3+2t'\end{cases}$.

Hướng dẫn.

Giả sử $d\cap(\alpha)=A$, trên d lấy điểm B và hạ BH vuông góc với (α) và $BK\perp KA$ sao cho đường thẳng $AK//\Delta$. Khi đó $\widehat{BAK}=\varphi$ là góc giữa Δ và d.



Ta có $\sin\varphi = \frac{BK}{BA} \ge \frac{BH}{BA}$, dấu bằng có khi $K \equiv H$. Khi đó $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{AH}$. Ta có đường thẳng AH là giao tuyến của (P) chứa d và vuông góc (α).

$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = (1;2;3)$ nên $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = (5;-4;1)$. **Chọn B.**

Ví dụ 45. [Chu Văn An – Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2)$, $B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+6y+12z+9=0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=-2+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2 \\ y=1-4t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+4t \\ z=-2-t \end{cases}$.

Hướng dẫn.

Mặt cầu có tâm $I(0;-3;-6)$, bán kính $R=6$. Ta lại có $\overrightarrow{IA}=(2;4;4) \Rightarrow IA=6$. Khi đó A là tiếp điểm và d nằm trong tiếp diện của mặt cầu tại A. Phương trình tiếp diện là $(P): x+2y+2z=0$.

Hạ $BH \perp (P), BK \perp d$ thì $BK \ge BH$ do đó d cần tìm là đường thẳng AH.

Ghi $-\frac{x+2y+2z}{9}$ CALC nhập $5=1=1==$ STO M,

ghi M + x – 2 : 2M + y – 1 : 2M + z + 2 bấm = = = suy ra $\overrightarrow{AH}=(2;-2;1)$. **Chọn C.**

....

2. Bài tập kiểm tra.

Câu 25. **[Sở GD Hà Nội]** Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2<m<6$. **B.** $m>6$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-6<m<2$.

Câu 27. **[THTT Số 4-487]** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90°. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2;-1;3)$. **B.** $I(-1;-2;3)$. **C.** $K(3;0;15)$. **D.** $J(-3;2;7)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$, mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+2}{-4}$. Đường thẳng d đi qua A, song song với Δ và cắt (P) tại B. Điểm M di động trên (P) sao cho tam giác AMB luôn vuông tại M. Độ dài đoạn MB có giá trị lớn nhất bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $18.\sqrt{5}$. **D.** $17.\sqrt{3}$.

Câu 29. **[Sở GD Bắc Giang]** Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

A. $\sqrt{3}-1$. **B.** $\sqrt{3}+1$. **C.** $4-2\sqrt{3}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(2;-2;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N. Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Tính giá trị $P=2a-5b+10c$ là

A. 45. **B.** 42. **C.** -45. **D.** -50.

Câu 31. **[Mộ Đức – Quảng Ngãi]** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 32. **[SGD Hà Tĩnh]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó

A. $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-y+z+3=0$, $(Q):x+2y-2z-5=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. $9+5\sqrt{3}$. **B.** 28. **C.** 14. **D.** $3+5\sqrt{3}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2\sqrt{7}$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-7=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất với I là tâm của mặt cầu (S). Phương trình của Δ là

A. $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1\\z=-2+t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=-2\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=-2\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1\\z=-2-t\end{cases}$.

Câu 36. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-10=0$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B và cắt (S) theo một thiết diện là đường tròn (C). Đường thẳng AB cắt (C) tại hai điểm E, F. Điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho tam giác MEF cân tại M, MH là đường cao ứng với cạnh EF. Khi (C) có diện tích nhỏ nhất thì phương trình của MH là

A. $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=2-t\end{cases}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha): ax+by-z+c=0$. Tính $P=a-b+c$

A. $P=8$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-4$.

Câu 38. [Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa] Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax+by+cz+3=0$. Tính $T=a+b+c$.

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;a;b)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b$.

A. $T=0$ **B.** $T=-1$ **C.** $T=1$ **D.** $T=-2$.

Câu 40. [SGD Quảng Nam] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-4z=0$, đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;\ 3;\ 1)$ thuộc (P). Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u}=(a;\ b;\ 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=-3$. **B.** $a+2b=0$. **C.** $a+2b=4$. **D.** $a+2b=7$.

Câu 41. [Chuyên Hùng Vương – Gia Lai] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;7;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;-4)$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;5;0); B(3;3;6)$ và $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Gọi C là điểm trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất. Khoảng cách giữa 2 điểm A và C là

A. 29. **B.** $\sqrt{33}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** 7.

Câu 43. [THPT Lục Ngạn-Bắc Giang] Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C. Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $3\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và cách A một khoảng lớn nhất.

A. $(\alpha): x+y+3z+5=0$. **B.** $(\alpha): 4x-7y+z=0$.

C. $(\alpha): 6x+6y+18z+5=0$. **D.** $(\alpha): -4x+7y+z=0$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$ và cắt hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$ lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất.

A. $\begin{cases} x=12-t \\ y=5 \\ z=-9+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=6-t \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=-\dfrac{9}{2}+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=6 \\ y=\dfrac{5}{2}-t \\ z=-\dfrac{9}{2}+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=6-2t \\ y=\dfrac{5}{2}+t \\ z=-\dfrac{9}{2}+t \end{cases}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$; $d_2:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$; $d_3:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$. Đường thẳng d vuông góc với d_3, cắt hai đường thẳng d_1,d_2 theo một đoạn AB. Đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất là?

A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{10}$.

Câu 47. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=2+t\\z=-1-2t\end{cases}$, $d_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-2}{-1}$ và điểm $N(4;4;1)$. Gọi d là đường thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2, điểm $M(a;b;c)$ thuộc d. Khi độ dài MN ngắn nhất thì $a+b+c$ bằng?

A. 5. B. 6. C. 4. D. 9.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$. B. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z+2}{7}$. C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{7}$. D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z}{7}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$. C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$. D. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho (P) tạo với $d:\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$ một góc lớn nhất?

A. $19x-17y-20z-77=0$. B. $19x-17y-20z+34=0$.

C. $31x-8y-5z+91=0$. D. $31x-8y-5z-98=0$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ sao cho (Q) tạo với (P) góc nhỏ nhất.

A. $2x-y+2z+1=0$. B. $10x-7y+13z+3=0$.

C. $2x+y-z=0$. D. $-x+6y+4z+5=0$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q):2x-y-2z-2=0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 53. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;4;1)$, $B(7;-4;-3)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$. Điểm $M(a;b;c),(a>2)$ di động trên (P) sao cho MAB vuông tại M. Khi tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất thì tổng $a+2b+3c$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 4.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON=12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 55. [Chuyên ĐHSP Hà Nội] Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1;2;4) và hai điểm M, B thỏa mãn $MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Giả sử điểm M thay đổi trên đường thẳng $d:\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{1}$. Khi đó điểm B thay đổi trên đường thẳng có phương trình là

A. $\frac{x+7}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+12}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. **D.** $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-12}{1}$.

Câu 56. [Hàn Thuyên - Bắc Ninh] Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;2;0), B(2;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Khi đó giá trị $a+4b+c$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 57. [Đặng Thúc Hứa – Nghệ An] Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta:\begin{cases} x=1+3a+at \\ y=-2+t \\ z=2+3a+(1+a)t \end{cases}$. Biết rằng khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm bán kính mặt cầu đó.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, m là tham số thực. Các mặt phẳng (P), (P') chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại T, T'. Khi m thay đổi thì độ dài TT' nhỏ nhất là

A. $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{13}}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{13}}{5}$. **D.** $\frac{5\sqrt{13}}{4}$.

Câu 59. [Sở GD Bạc Liêu] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $r=2$. Xét đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, m là tham số thực. Giả sử $(P),(Q)$

là mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M, N. Khi đó đoạn MN ngắn nhất, hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1;0;4)$ đến đường thẳng d.

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{237}}{21}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{273}}{21}$.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=m-1+t \end{cases}$. Gọi T là tập tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau góc lớn nhất. Tính tổng các phần tử của tập hợp T.

A. 3. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

Câu 61. [SGD Bắc Ninh] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B, C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC). Gọi điểm B' là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AC. Biết rằng quỹ tích các điểm B' là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r=\dfrac{\sqrt{60}}{10}$. **B.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{70}}{10}$. **D.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-my+z+6m+3=0$ và $(\beta): mx+y-mz+3m-8=0$ (với m là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng Oxy. Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng Oxy. Tính giá trị biểu thức $P=10a^2-b^2+3c^2$.

A. $P=56$. **B.** $P=9$. **C.** $P=41$. **D.** $P=73$.

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P):(1+m)x+(1-m)y-(1+3m)z-(2-8m)=0$, điểm $A(-4;-2;7)$. Biết tập hợp các hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) là một đường tròn. Đường kính lớn nhất của đường tròn đó bằng:

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{7}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 64. [Đề thi thử VTED] Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+10=0$ và $(\beta):\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{1-m}+\dfrac{z}{1}=1$. Biết rằng khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 12.

....

3. Hướng dẫn bài tập kiểm tra.

Câu 25. **[Sở GD Hà Nội]** Cho hai điểm A,B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=9\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}\Rightarrow IB=\frac{1}{8}AB=\frac{1}{2},IA=\frac{9}{2}$.

Từ $MA=3MB$ ta có: $MI^2+IA^2+2.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=9\left(MI^2+IB^2+2.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}\right)$.

$8MI^2=IA^2-9IB^2\Rightarrow MI^2=\frac{9}{4}\Rightarrow MI=\frac{3}{2}$. Vậy bán kính mặt cầu bằng $\frac{3}{2}$. **Chọn D.**

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2<m<6$. **B.** $m>6$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-6<m<2$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Khảo sát.

Ta có $d\left(A,(P)\right)=\frac{|3m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}}$. Vào **MENU 8** khảo sát hàm số, ta có $\max d\left(A,(P)\right)=\frac{\sqrt{42}}{3}\approx 2,16025$ khi $m=5$. **Chọn A.**

Cách 2. Quỹ tích - Vị trí tương đối.

Ta có (P) luôn chứa đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=1+t\\ z=-t\end{cases}$ cố định. Kẻ AH,AK lần lượt vuông góc với (P) và d thì ta có $AH\le AK$, do đó $\max d\left(A,(P)\right)=AK$, khi đó $\overrightarrow{AK}$ là một véc tơ pháp tuyến của (P).

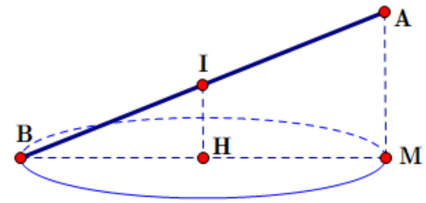
Ghi $\frac{x+y-z}{3}$ CALC nhập $1=0=2==$ STO M, bấm AC ghi $M-1:M:-M-2$ bấm $===$ ta được $\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{3}(4;1;5)$, suy ra $\frac{m-1}{4}=\frac{1}{1}=\frac{m}{5}\Rightarrow m=5$. **Chọn A.**

Câu 27. **[THTT Số 4-487]** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90°. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2;-1;3)$. **B.** $I(-1;-2;3)$. **C.** $K(3;0;15)$. **D.** $J(-3;2;7)$.

Hướng dẫn giải.

Theo giả thiết thì M thuộc mặt cầu đường kính AB, tâm I là trung điểm AB. Gọi H là tâm đường tròn giao tuyến thì M thuộc đường tròn tâm H, có B cố định nên MB lớn nhất khi MB là đường kính của đường tròn tâm H, hay M là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Ta cần viết phươmh trình đường thẳng BM.



Vào **MENU 9 1 2** nhập $2 = 2 = 1 = \& 3 = 4 = 4 =$ ta có $\overrightarrow{n_Q} = (-4;5;2)$ là vtpt của mp(Q) chứa A, B và vuông góc với (P). Phương trình $(Q): -4x + 5y + 2z = 0$. Từ các phương trình (P) và (Q), cho $x = t \Rightarrow y = -2, z = 5 + 2t$, cũng là phương trình của MB, và đi qua điểm $I(-1;-2;3)$. **Chọn B**.

Nhận xét.

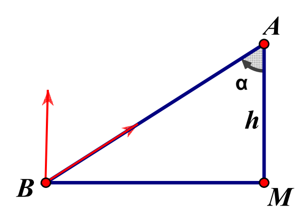
Đây là bài toán rất tốt để rèn luyện kiến thức về tọa độ không gian Oxyz, đòi hỏi đầy đủ về điểm - Đường thẳng - mặt phẳng - mặt cầu - giao tuyến - hình chiếu - vuông góc - song song tức là kiến thức khá cơ bản và tổng hợp trong một bài toán. Ngoài ra không kém phần trừu tượng, do đó cũng cần đòi hỏi kỹ năng giải nhanh, có thể không khó nhưng giải thông thường thì tốn khá nhiều thời gian.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+2}{-4}$. Đường thẳng d đi qua A, song song với Δ và cắt (P) tại B. Điểm M di động trên (P) sao cho tam giác AMB luôn vuông tại M. Độ dài đoạn MB có giá trị lớn nhất bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $18.\sqrt{5}$. **D.** $17.\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.

Điểm M thuộc đường tròn giao tuyến của (P) với mặt cầu đường kính AB nên MB có giá trị lớn nhất bằng đường kính của đường tròn giao tuyến, hay M là hình chiếu vuông góc của A trên (P).



Ta có $BM = h.\tan\alpha = h.\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

Ghi $\dfrac{|2x+2y-z+9|}{3}$ CALC (nhập tọa độ A) 1 = 2 = - 3 = = Sto D. Bấm ▲ sửa thành $\dfrac{|2x+2y-z|}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ CALC (nhập tọa độ $\vec{u}$) 3 = 4 = - 4 = = Sto E.

Ghi $\dfrac{D\sqrt{1-E^2}}{E} =$ ta có kết quả $\sqrt{5}$. **Chọn A**.

Câu 29. [Sở GD Bắc Giang] Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

A. $\sqrt{3}-1$. **B.** $\sqrt{3}+1$. **C.** $4-2\sqrt{3}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 2. Quỹ tích - Vị trí tương đối.

Trong không gian $Oxyz$, xét $M(x;y;z)\in(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và điểm $N(a;b;c)\in(\alpha):x+y+z-3=0$. Khi đó $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=NM^2$.

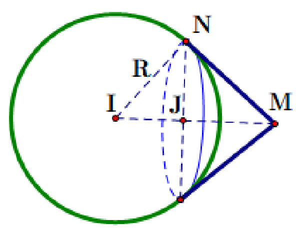
Gọi $I(-1;-1;2)$ là tâm mặt cầu, ta có $d(I,(\alpha))=\sqrt{3}>R=1$, suy ra $\min MN=\sqrt{3}-1$ và do đó $\min P=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(2;-2;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N. Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Tính giá trị $P=2a-5b+10c$ là

A. 45. **B.** 42. **C.** -45. **D.** -50.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Phương pháp véc tơ.



Gọi $I(-3;2;5)$ là tâm mặt cầu, bán kính $R=6$. Ta có $IN^2=\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IM}$, đặt $\overrightarrow{IJ}=t\overrightarrow{IM}$ thì $t=\frac{R^2}{IM^2}=\frac{36}{45}=\frac{4}{5}$, suy ra $\overrightarrow{IJ}=\frac{4}{5}(5;-4;-2)\Rightarrow J\left(1;\frac{-6}{5};\frac{17}{5}\right)$.

Vậy $P=2a-5b+10c=42$. **Chọn B.**

Câu 31. [Mộ Đức – Quảng Ngãi] Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r=\frac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $r=\frac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(1;-2;1)$ là trung điểm AB, $K(-1;0;2)$ là trung điểm của CD. Ta có:

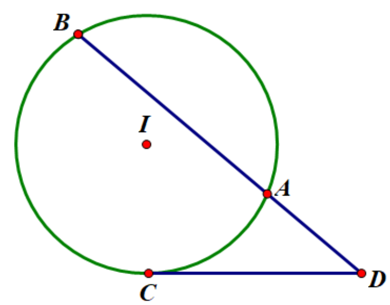
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=1\Leftrightarrow MI^2=1+\frac{1}{4}AB^2\Leftrightarrow MI=2$. Suy ra M thuộc mặt cầu tâm I bán kính $R=2$.

Tương tự M thuộc mặt cầu tâm K, bán kính $R'=2$. Do đó M thuộc đường tròn giao tuyến, bán kính $r=\sqrt{R^2-\left(\frac{IK}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 32. [SGD Hà Tĩnh] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó

A. $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\frac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Hướng dẫn giải.



Gọi D là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P), trong mặt phẳng (ABC) thì giao tuyến với mặt cầu là một đường tròn. Áp dụng tính chất tiếp tuyến và cát tuyến ta có: $DC=\sqrt{DA.DB}=R$ không đổi, nên C thuộc đường tròn tâm D, bán kính R.

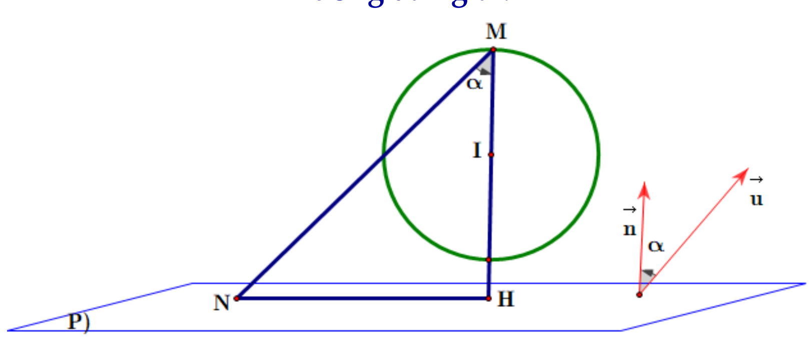
Ta có $\frac{DB}{DA}=\frac{d_B}{d_A}=\frac{d(B,(P))}{d(A,(P))}=\frac{|-6|}{|-2|}=3 \Leftrightarrow \frac{DA+AB}{DA}=3 \Leftrightarrow DA=\frac{AB}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

Suy ra $R=\sqrt{2\sqrt{3}.6\sqrt{3}}=6$. **Chọn B.**

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$, $(Q): x+2y-2z-5=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. $9+5\sqrt{3}$. **B.** 28. **C.** 14. **D.** $3+5\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=5$; $d(I,(P))=3\sqrt{3}>R$. MN có vtcp $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-2)$ không đổi, $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$. Gọi H là hình chiếu của M trên (P).

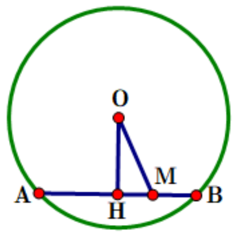
Đặt $\widehat{NMH} = \alpha$, ta có $MN = \dfrac{MH}{\sin\alpha}$ nên $MN_{max} \Leftrightarrow MH_{max} = R + IH = 5 + 3\sqrt{3}$.

Ta có $\sin\alpha = \left|\cos\left(\vec{u}, \vec{n}\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy $MN_{max} = \left(5 + 3\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = 9 + 5\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S = \sqrt{7}$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 2\sqrt{7}$. **D.** $S = 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.



Gọi H là trung điểm AB, giả sử M thuộc đoạn HB, thì $S_{OAB} = OH.AH$. Mà $OH \le OM$ và $AH \le AM$, suy ra: $S_{\max} = OM.AM = 1.\sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{7}$. **Chọn A.**

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 7 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất với I là tâm của mặt cầu (S). Phương trình của Δ là

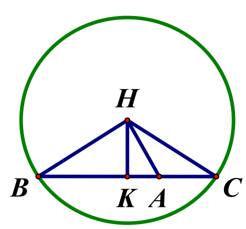
A. $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -2 + t \end{cases}$. **B.** $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$. **C.** $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 \end{cases}$. **D.** $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -2 - t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Nhận xét điểm A nằm bên trong mặt cầu, giao tuyến của (P) và (S) là một đường tròn tâm H bán kính r không đổi. Gọi K là trung điểm của BC thì:

$S_{IBC} = BK.IK = BK.\sqrt{IH^2 + HK^2}$. Ta có $BK \le BA$ và $HK \le HA$, suy ra

$S_{\max} = BA.\sqrt{IH^2 + HA^2} \Leftrightarrow K \equiv A \Rightarrow \Delta \perp HA$. Tọa độ $I(1;2;0)$.



Ghi $-\dfrac{x + y + z + 1}{3}$ CALC nhập $1 = 2 = 0 ==$ Sto M, bấm $M + x : M + y : M + z ===$

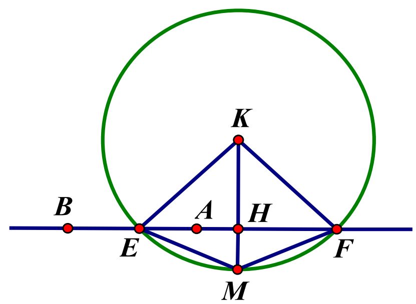
Ta được $H(0;1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{HA} = (0;0;-1)$ suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{HA}\right] = (1;-1;0)$. **Chọn B.**

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-10=0$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B và cắt (S) theo một thiết diện là đường tròn (C). Đường thẳng AB cắt (C) tại hai điểm E, F. Điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho tam giác MEF cân tại M, MH là đường cao ứng với cạnh EF. Khi (C) có diện tích nhỏ nhất thì phương trình của MH là

A. $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\Delta: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$. **C.** $\Delta: \begin{cases} x=-1-t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$. **D.** $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=2-t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Nhận xét điểm A nằm trong mặt cầu, điểm B nằm ngoài mặt cầu. Điểm M là trung điểm cung $\overset{\frown}{EF}$. Gọi K là tâm đường tròn (C) thì *KM* cắt *EF* tại *H*, ta cần viết phương trình *KM*.



Khi hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất thì bán kính *KE* nhỏ nhất, khi đó mặt phẳng (P) cách xa tâm *I* nhất. Mà $IK \le IH$ nên ta có $K \equiv H$ suy ra $\overrightarrow{IH}$ là vtpt của mp(P).

Ta có $I(1;1;-2)$, $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$. Ghi $\frac{x+y+z}{3}$ CALC nhập $0=0=-3=$ Sto M

Bấm $1+M:1+M:1+M===$ ta có $H(0;0;0)$ suy ra $\overrightarrow{IH}=(-1;-1;2)$.

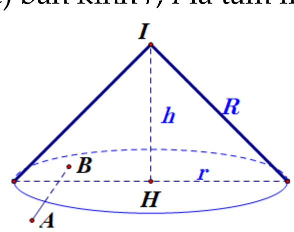
Ta lại có $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IH}\right]$ nên $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;1;0)$. **Chọn C** (vì cho t = - 1 ta có điểm H).

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha): ax+by-z+c=0$. Tính $P=a-b+c$

A. $P=8$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-4$.

Hướng dẫn giải.

Gọi *H* là tâm đường tròn (C) bán kính *r*, *I* là tâm mặt cầu bán kính *R*. Đặt *IH* = *h*.



Ta có $r^2 = R^2 - h^2$ và thể tích khối nón đỉnh I là $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi h(R^2 - h^2)$.

Suy ra $maxV = \frac{2R^3\pi\sqrt{3}}{27} = 18\pi \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} = 3$.

Mặt phẳng $(\alpha): ax + by - z + c = 0$ đi qua hai điểm A, B nên ta có:

$\begin{cases} 4 + c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha): 2x + by - z - 4 = 0$, do đó $h = d(I, (\alpha)) = \frac{|2b + 5|}{\sqrt{5 + b^2}} = 3 \Rightarrow b = 2$

Vậy $P = a - b + c = -4$. **Chọn D.**

Câu 38. [Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -2.

Hướng dẫn giải.

Gọi I là tâm mặt cầu, H là tâm đường tròn giao tuyến và là hình chiếu của I trên (P), kẻ IK vuông góc với AB. Đường tròn có bán kính nhỏ nhất khi (P) cách xa I nhất, mà $IH \le IK$ .Vậy ta phải có $H \equiv K$ và (P) có một vtpt $\overrightarrow{IK}$.

Ghi $\frac{2(x-1) - 2y + 0(z-2)}{8}$ CALC (nhập tọa độ I) $1 = 2 = 3 =$ STO M

ghi $1 + 2M - 1 : -2M - 2 : 2 + 0M - 3$ bấm $= = =$ ta có tọa độ véc tơ $\overrightarrow{IK} = (-1;-1;-1)$

$\Rightarrow (P): -x - y - z + 3 = 0 \Rightarrow a + b + c = -3$. **Chọn B.**

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; a; b)$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b$.

A. $T = 0$ **B.** $T = -1$ **C.** $T = 1$ **D.** $T = -2$.

Hướng dẫn giải.

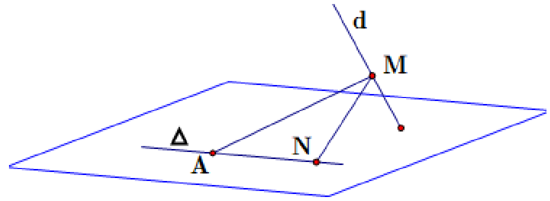
Để AB nhỏ nhất thì AB cách xa tâm O nhất, gọi H là trung điểm AB thì $OH \le OM$, do đó ta cần có $AB \perp OM$, suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{n_P}\right] = (1;-1;0)$. Vậy $T = a + b = -1$. **Chọn B.**

Câu 40. [SGD Quảng Nam] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 4z = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;\ 3;\ 1)$ thuộc mặt phẳng (P). Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a;\ b;\ 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = -3$. **B.** $a + 2b = 0$. **C.** $a + 2b = 4$. **D.** $a + 2b = 7$.

Hướng dẫn giải

Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của Δ và d. Ta có $MN \le MA$ do đó MA là đoạn vuông góc chung cần tìm. Trong đó M là hình chiếu của A trên d.



Ghi $\frac{2x-y+z}{6}$ CALC nhập $0=4=-2==$STO M bấm AC

Ghi $2M+1-1:-M-1-3:M+3-1===$ ta được $\overrightarrow{AM}=(-2;-3;1)$.

Vào **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $1=1=4=$ dòng hai $-2=-3=-1=$

ta có $\vec{u}=(11;-7;1)$ nên $a+2b=-3$. **Chọn A.**

Câu 41. **[Chuyên Hùng Vương – Gia Lai]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;7;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;-4)$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ nằm trong mp(P) đi qua M và vuông góc với đường thẳng d. Phương trình $(P):2x+2y-z+9=0$.

Kẻ $AK\perp\Delta, AH\perp(P)\Rightarrow AK\ge AH$ do đó yêu cầu bài toán ta có Δ đi M và H.

Ghi $-\frac{2x+2y-z+9}{9}$ nhập $1=2=-3==$ STO M

bấm AC ghi $2M+x+2:2M+y+2:-M+z-1===$ ta được $(-1;0;-2)$. **Chọn C.**

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;5;0);B(3;3;6)$ và $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Gọi C là điểm trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất. Khoảng cách giữa 2 điểm A và C là

A. 29. **B.** $\sqrt{33}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** 7.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Khảo sát.

Lấy điểm $C(-1+2x;1-x;2x)\in d$, ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;6),\overrightarrow{AC}=(-2+2x;-4-x;2x)$.

Ta có: $S=\frac{1}{2}\sqrt{44\left[(-2+2x)^2+(-4-x)^2+4x^2\right]-(-4+4x+8+2x+12x)^2}$

$S=\sqrt{18x^2-36x+216}\ge\sqrt{198}=3\sqrt{22}$.

Suy ra $\min S=3\sqrt{22}\Leftrightarrow x=1$, khi đó $\overrightarrow{AC}=(0;-5;2)\Rightarrow AC=\sqrt{29}$. **Chọn C.**

Câu 43. [THPT Lục Ngạn-Bắc Giang] Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C. Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $3\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $b,c>0$. Phương trình $(P): bcx+2cy+2bz-2bc=0$.

Vì (P) qua M nên $bc=2(b+c)$. Do vai trò ngang nhau nên $b=c=4$. Kẻ đường cao AH trong tam giác ABC, ta có: tọa độ $H(0;2;2) \Rightarrow AH=\sqrt{OH^2+OA^2}=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$.

nên min $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}.4\sqrt{2}.2\sqrt{3}=4\sqrt{6}$. **Chọn C**.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và cách A một khoảng lớn nhất.

A. $(\alpha): x+y+3z+5=0$. **B.** $(\alpha): 4x-7y+z=0$.

C. $(\alpha): 6x+6y+18z+5=0$. **D.** $(\alpha): -4x+7y+z=0$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Trắc nghiệm loại trừ.

Loại các đáp án B, C, D vì không đi qua M(1; 0; -2). Vậy **chọn A**.

Cách 2. Vị trí tương đối.

Gọi AH, AK là khoảng cách từ A lần lượt đến (α) và d. Ta có $AH \le AK$ nên yêu cầu bài toán ta phải có $AH \equiv AK$, suy ra (α) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AK}$.

ghi $\frac{2x+y-z}{6}$ CALC (nhập tọa độ $\overrightarrow{M_0A}$) $1=1=3==$ Sto M.

Ghi $1+2M-2:M-1:-2-M-1===$

Ta được $\vec{n}=(-1;-1;-3)$ và $(\alpha): x+y+3z+5=0$. **Chọn A.**

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$ và cắt $d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-2}$ lần lượt tại hai điểm A,B sao cho AB ngắn nhất.

A. $\begin{cases} x=12-t \\ y=5 \\ z=-9+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=6-t \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{5}{2}-t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=6-2t \\ y=\frac{5}{2}+t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $A(2a+1;a;-2-a)$ và $B(b+1;3b-2;2-2b)$ lần lượt thuộc d_1, d_2.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(2a-b;a-3b+2;2b-a-4)$ vuông góc với $\vec{n}=(1;1;1)$ suy ra $2a-b+a-3b+2+2b-a-4=0\Leftrightarrow b=a-1$. Khi đó $\overrightarrow{BA}=(a+1;-2a+5;a-6)$ và độ dài $\overrightarrow{BA}^2=(a+1)^2+(-2a+5)^2+(a-6)^2=6a^2-30a+62\Rightarrow BA_{\min}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{2}$.

Do đó $\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}(-1;0;1)$, Δ đi qua $A\left(6;\dfrac{5}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$. **Chọn B.**

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$; $d_2:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$; $d_3:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$. Đường thẳng d vuông góc với d_3; cắt hai đường thẳng d_1,d_2 theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất là?

A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $A(1+a;-2a;1+a)\in d_1, B(2-b;3b;-1-2b)\in d_2$ là các giao điểm với d cần tìm.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1-a-b;2a+3b;-2-a-2b)\perp\overrightarrow{u_3}=(2;1;1)$

nên $2-2a-2b+2a+3b-2-a-2b=0\Leftrightarrow -a-b=0\Leftrightarrow a=-b$, khi đó

$\overrightarrow{AB}=(1;b;-2-b)\Rightarrow AB^2=2b^2+4b+5\geq 3\Rightarrow \min AB=\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 47. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=2+t\\z=-1-2t\end{cases}$, $d_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-2}{-1}$ và điểm $N(4;4;1)$. Gọi d là đường thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2, điểm $M(a;b;c)$ thuộc d. Khi độ dài MN ngắn nhất thì $a+b+c$ bằng?

A. 5. B. 6. C. 4. D. 9.

Hướng dẫn giải.

Vào **MENU 9 1 2** nhập: $1=1=2=$ và $4=-3=1=$ suy ra $\overrightarrow{u_d}=(1;1;1)$. Gọi AB là đoạn vuông góc chung, với $A(2+a;2+a;-1-2a)\in d_1, B(2+4b;2-3b;2-b)\in d_2$ ta có $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{u_d}=(1;1;1)$ suy ra:

$4b-a=-3b-a=3+2a-b\Rightarrow a=-1,b=0$. Vậy phương trình $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

M là hình chiếu vuông góc của N trên d. Trong **MENU 1** ghi

$\dfrac{x+y+z}{3}$ CALC nhập $2=2=-1==$ Sto M, bấm $6+3M=$ kết quả bằng 9. **Chọn D.**

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}$. B. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+2}{7}$.

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{7}$. D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{-7}$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $\overrightarrow{u_d}=(a,b,c)$ khi đó ta có $2a-b-c=0\Rightarrow c=2a-b$, $\left|\overrightarrow{u_d}\right|=\sqrt{5a^2+2b^2-4ab}$.

Từ đó ta có $\cos\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_\Delta}\right)=\frac{5a-4b}{3\sqrt{5a^2+2b^2-4ab}}\Rightarrow\cos^2\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_\Delta}\right)=\frac{25a^2-40ab+16b^2}{9\left(5a^2+2b^2-4ab\right)}$

$\cos^2\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_\Delta}\right)=\frac{25t^2-40t+16}{9\left(5t^2-4t+2\right)}=f(t)\Rightarrow\max f(t)=f\left(\frac{-1}{5}\right)=\frac{25}{27}$, khi đó 5a = -b.

Cho a = 1, b = -5, c = 7 ta có $\overrightarrow{u_d}=(1;-5;7)$. **Chọn A.**

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$. C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$. D. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Hướng dẫn giải.

Giả sử d cắt Δ_1 tại $B(1+2t;2+t;-2-t)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2+2t;2+t;-1-t)$ và ta có:

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right)\right|=\frac{|-2-2t+4+2t-2-2t|}{3\sqrt{(2t+2)^2+(t+2)^2+(t+1)^2}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}=\frac{2}{3}\sqrt{f(t)}.$$

Suy ra $\max f(t)=\frac{9}{5}$ tại $t=\frac{-9}{7}$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=\frac{-1}{7}(4;-5;-2)$. **Chọn C.**

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho (P) tạo với $d:\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$ một góc lớn nhất?

A. $19x-17y-20z-77=0$. B. $19x-17y-20z+34=0$.

C. $31x-8y-5z+91=0$. D. $31x-8y-5z-98=0$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. (Khử dần ẩn)

Giả sử d cắt (P) tại $A(3t-3;t+1;2t-2)$, $M_0(3;0;-1)\in\Delta$ suy ra $\overrightarrow{M_0A}=(3t-6;t+1;2t-1)$.

Gọi VTPT của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{M_0A},\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(-t+5;-7t+17;5t-13)$.

Gọi φ là góc tạo bởi (P) và d ta có:

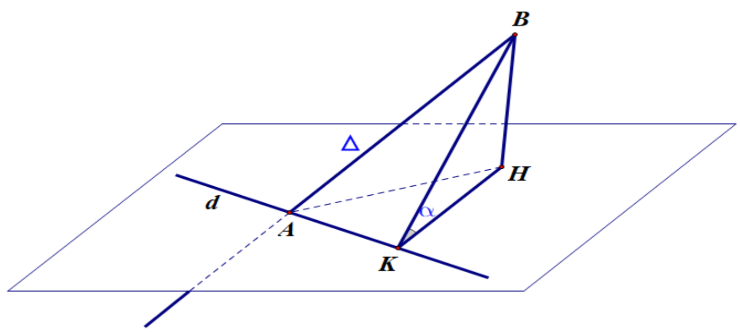
$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{u_d}\right)\right|=\frac{6}{\sqrt{14}.\sqrt{(t-5)^2+(7t-17)^2+(5t-13)^2}}.$$

Xét $f(t)=75t^2-378t+483$ đạt nhỏ nhất tại $t=\frac{63}{25}$ nên $\vec{n}=\left(\frac{62}{25};\frac{-16}{25};\frac{-10}{25}\right)$ Hay chọn $\vec{n}=(31;-8;-5)$ và phương trình(P): $31x-8y-5z-98=0$. **Chọn D.**

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ sao cho (Q) tạo với (P) góc nhỏ nhất.

A. $2x - y + 2z + 1 = 0$.
B. $10x - 7y + 13z + 3 = 0$.
C. $2x + y - z = 0$.
D. $-x + 6y + 4z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải.



Gọi A là giao điểm của Δ và (P), d là giao tuyến của (Q) và (P). Lấy điểm B thuộc Δ và kẻ $BH \perp (P)$ và $BK \perp d$. Khi đó $\widehat{BKH} = \alpha$ là góc giữa (Q) và (P).

Ta có $\tan\alpha = \frac{HB}{HK} \ge \frac{HB}{HA}$, dấu bằng có khi K trùng A hay d vuông góc với Δ. Khi đó: $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}; \overrightarrow{n_P}\right] = (-1; 6; 4)$ và $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}; \overrightarrow{u_d}\right] = (10; -7; 13)$. **Chọn B.**

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

A. $\sqrt{3}$.
B. $\sqrt{6}$.
C. $2\sqrt{3}$.
D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. (Khảo sát hàm số)

Giả sử $\overrightarrow{n_P} = (a; b; c) \Rightarrow a - 2b - c = 0$. Gọi φ là góc giữa (P) và (Q).

Ta có $\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right)\right| = \frac{|2a - b - 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4bc + 2c^2}}$.

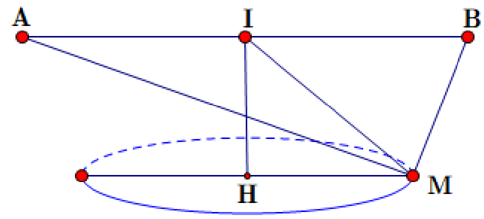
Xét $b \ne 0$ thì $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2t^2 + 4t + 5}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\max\cos\varphi$ đạt tại $t = \frac{c}{b} = -1 \Rightarrow c = -b$.

Cho $b = 1 \Rightarrow c = -1, a = 1$ và $(P): x + y - z + 3 = 0$. Vậy $d\left(A, (P)\right) = \sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;4;1)$, $B(7;-4;-3)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$. Điểm $M(a;b;c), (a > 2)$ di động trên (P) sao cho MAB vuông tại M. Khi tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất thì tổng $a + 2b + 3c$ bằng

A. 2.
B. -4.
C. -2.
D. 6.

Hướng dẫn giải.



Kiểm tra đường thẳng AB song song với (P), M thuộc giao tuyến của mặt cầu đường kính AB với (P). Gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu của I trên (P).

Ta có $I(5;0;-1), H\left(\frac{7}{3};-\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right), \overrightarrow{IA}=(-2;4;2)=2(-1;2;1) \Rightarrow IM^2=24, IH^2=\frac{64}{3}$.

Ta có $MH=\sqrt{IM^2-IH^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Chọn $\overrightarrow{HM}=t(1;-2;-1), t>0$ suy ra $t=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}=\frac{2}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{HM}=\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3};\frac{-2}{3}\right)$ suy ra tọa độ $M(3;-4;1) \Rightarrow a+2b+3c=-2$. **Chọn C.**

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON=12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1$ (1).

Gọi $N(x;y;z)$, thì $\overrightarrow{OM}=t.\overrightarrow{ON}=(tx;ty;tz), t>0$. Mà $OM.ON=12$ suy ra $t=\frac{12}{ON^2}$.

Do đó tọa độ $M\left(\frac{12x}{ON^2};\frac{12y}{ON^2};\frac{12z}{ON^2}\right)$ thay vào (1) ta có: $\frac{6x+3y+2z}{ON^2}=1$

$\Leftrightarrow ON^2=6x+3y+2z \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x-3y-2z=0$.

Vậy N thuộc mặt cầu cố định tâm $I\left(3;\frac{3}{2};1\right)$, bán kính $R=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}=\frac{7}{2}$.

Câu 55. [Chuyên ĐHSP Hà Nội] Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1; 2; 4) và hai điểm M, B thỏa mãn $MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Giả sử điểm M thay đổi trên đường thẳng $d:\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{1}$. Khi đó điểm B thay đổi trên đường thẳng có phương trình là

A. $\frac{x+7}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+12}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. **D.** $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-12}{1}$.

Hướng dẫn giải.

Từ hệ thức $MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Rightarrow MA.\overrightarrow{MA}=-MB.\overrightarrow{MB}$ vì MA, MB là các đoạn thẳng nên hai véc tơ $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ có hướng ngược nhau, hay là $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB},k<0$. Mà $MA.\overrightarrow{MA}=-MB.\overrightarrow{MB}$ suy ra $MA^4=MB^4\Rightarrow MA=MB$ từ đó ta được $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$ hay A và B đối xứng nhau qua M.

Gọi $M\left(2t-3;2t+1;t-4\right)\in d\Rightarrow B\left(4t-7;4t;2t-12\right)\in\begin{cases}x=-7+2t\\y=2t\\z=-12+t\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 56. [Hàn Thuyên - Bắc Ninh] Trong không gian Oxyz, cho điểm $A\left(2;2;0\right),B\left(2;0;-2\right)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng $\left(P\right)$ sao cho $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Khi đó giá trị $a+4b+c$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải.

Phương trình mp trung trực của BA là $0x+2y+2z=\dfrac{OB^2-OA^2}{2}=0\Leftrightarrow y+z=0$.

Cho $z=t\Rightarrow y=-t$ thay vào $\left(P\right)$ suy ra M thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=-t\\z=t\end{cases}$.

Ta luôn có $x+4y+z=1\Leftrightarrow a+4b+c=1$. **Chọn A.**

Nhận xét.

Trong trường hợp thay đổi câu hỏi chẳng hạn như $2a+4b+3c$ thì ta cần giải chi tiết nhờ góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Ta có:

$$\overrightarrow{AM}=\left(3t-1;-t-2;t\right),\overrightarrow{BM}=\left(3t-1;-t;t+2\right)\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\left(3t-1\right)^2+2\left(t^2+2t\right)}{\left(3t-1\right)^2+t^2+\left(t+2\right)^2}$$

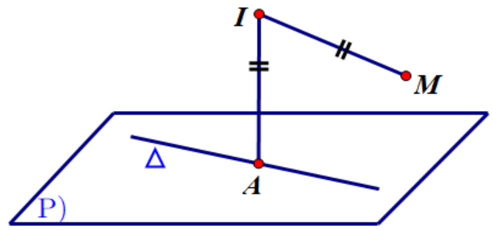
$\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)=\dfrac{11t^2-2t+1}{11t^2-2t+5}=1-\dfrac{4}{11t^2-2t+5}$. Suy ra $\widehat{AMB}$ lớn nhất khi và chỉ khi $t=\dfrac{1}{11}\Rightarrow 2a+4b+3c=2+5t=\dfrac{27}{11}$. (Có thể giải dựa vào ΔAIB, I là trung điểm AB).

Câu 57. [Đặng Thúc Hứa – Nghệ An] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+3a+at\\y=-2+t\\z=2+3a+(1+a)t\end{cases}$. Biết rằng khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định qua điểm $M\left(1;1;1\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm bán kính mặt cầu đó.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng cố định $(P):x+y-z+3=0$ và Δ luôn đi qua điểm cố định $A(1;-5;-1)$. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với (P) ta có phương trình d là $x=1+t,y=-5+t,z=-1-t$.



Lấy điểm $I(1+t;-5+t;-1-t) \Rightarrow MI = \sqrt{t^2+(t-6)^2+(t+2)^2}$ và tính khoảng cách đến (P)

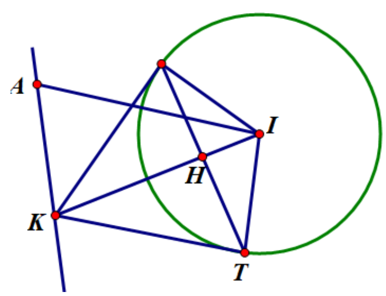
$$\frac{|t+1+t-5+t+1+3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{t^2+(t-6)^2+(t+2)^2} \Rightarrow 3t^2 = 3t^2 - 8t + 40 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow I(6;0;-6)$$

Hay ta có $R = \sqrt{3}|t| = 5\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 58. Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$, m là tham số thực. Các mặt phẳng (P), (P') chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại T, T'. Khi m thay đổi thì độ dài TT' nhỏ nhất là

A. $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{13}}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{13}}{5}$. **D.** $\frac{5\sqrt{13}}{4}$.

Hướng dẫn giải



Gọi K là hình chiếu của tâm I trên d, H là trung điểm của TT′, ta có:

$$R^2 = IT^2 = IH.IK = \sqrt{R^2-HT^2}.IK \Rightarrow HT = R\sqrt{1-\frac{R^2}{IK^2}} \Rightarrow TT' = 2R\sqrt{1-\frac{R^2}{IK^2}}.$$

Ta có $TT'_{\min} \Leftrightarrow \left(\frac{R}{IK}\right)_{max} \Leftrightarrow IK_{\min} = IE$, trong đó E là hình chiếu của I trên mặt phẳng cố định $(\alpha): x+y+z-1=0$ chứa d. Ta có $IE = d(I,(\alpha)) = \frac{5}{\sqrt{3}} > 2 = R$.

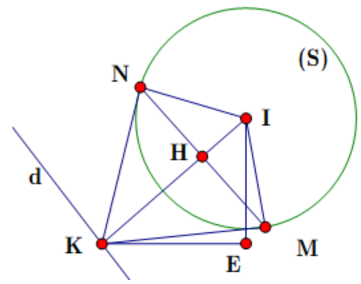
Vậy $TT'_{\min} = 4\sqrt{1-\frac{4.3}{25}} = \frac{4\sqrt{13}}{5}$. **Chọn C.**

Câu 59. [Sở GD Bạc Liêu] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $r=2$. Xét đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$, m là tham số thực. Giả sử $(P),(Q)$

là mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M, N. Khi đó đoạn MN ngắn nhất, hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1;0;4)$ đến đường thẳng d.

A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{237}}{21}$. D. $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có d nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-1=0$ cố định. Gọi H là trung điểm của MN, K là hình chiếu của tâm $I(1;2;3)$ trên d.

Ta có $r^2 = IK.IH = IK.\sqrt{r^2 - MH^2} \Leftrightarrow MH = r\sqrt{1-\left(\frac{r}{IK}\right)^2}$, suy ra $MN = 2r\sqrt{1-\left(\frac{r}{IK}\right)^2}$.

Để MN nhỏ nhất thì $\frac{r}{IK}$ lớn nhất $\Leftrightarrow IK$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IK = IE$, trong đó IE là khoảng cách từ I đến (α). Khi đó d đi qua E là hình chiếu của I trên (α).

Ghi $-\frac{x+y+z-1}{3}$ CALC (nhập tọa độ I) STO M, bấm M+1 : M +2 : M + 3 = = = ta được tọa độ $E\left(\frac{-2}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ thay vào d ta có $m=\frac{1}{5}$. Khi đó chọn $\overrightarrow{u_d} = (5;-1;-4)$.

Ghi $\sqrt{x^2+y^2+z^2-\frac{(5x-y-4z)^2}{25+1+16}}$ CALC (nhập tọa độ $\overrightarrow{M_0B}$) 0 = 0 = 4 = được $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Nhận xét.

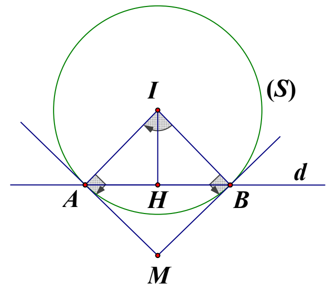
Bài toán không quá khó nhưng mất rất nhiều thời gian để giải (Kể cả dùng Casio), chỉ thích hợp ôn tập, không thích hợp thi trắc nghiệm.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = m-1+t \end{cases}$. Gọi T là tập tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau góc lớn nhất. Tính tổng các phần tử của tập hợp T.

A. 3. B. -3. C. -5. D. -4.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$. Góc giữa hai mặt phẳng lớn nhất bằng 90^o, do đó IAMB tạo thành hình vuông. Suy ra $IH=d(I,d)=\frac{R}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

$IH^2=(-1)^2+0^2+(-1-m)^2-\frac{(1+0-1-m)^2}{3}=2 \Leftrightarrow m^2+2m+2-\frac{m^2}{3}=2$

$\Leftrightarrow 2m^2+6m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-3 \end{array}\right.$. Vậy tổng các phần tử của tập hợp T bằng -3.

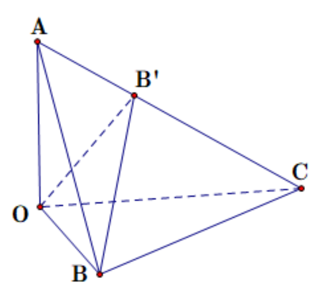
Câu 61. **[SGD Bắc Ninh]** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B, C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC). Gọi điểm B' là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AC. Biết rằng quỹ tích các điểm B' là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r=\frac{\sqrt{60}}{10}$. **B.** $r=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{70}}{10}$. **D.** $r=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Nhận xét rằng đường thẳng OA vuông góc với d. Vẽ mp(P) chứa d và vuông góc với OA, phương trình (P) là $x+y+z=0$. Ta thấy mp(P) đi qua O, mà mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC) nên $\widehat{BOC}=90^o$ hay $OB\perp OC$.



Ta có B' thuộc mặt cầu (S) đường kính OA có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác B' thuộc mặt phẳng (ABC) chứa A và d. Phương trình (ABC): $2x+5y-z-6=0$. Vậy $B'\in(C)=(S)\cap(ABC)$ có $r=\sqrt{R^2-h^2}$.

với $h=d(I;(ABC))=\frac{\sqrt{30}}{10}$ nên $r=\sqrt{R^2-h^2}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 62. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - my + z + 6m + 3 = 0$ và $(\beta): mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ (với m là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng Oxy. Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng Oxy. Tính giá trị biểu thức $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2$.

A. $P = 56$. **B.** $P = 9$. **C.** $P = 41$. **D.** $P = 73$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Viết lại $(\alpha): mx - m^2y + mz + 6m^2 + 3m = 0$, cộng theo vế với (β) ta được:

mp$(P): 2mx + (1-m^2)y + 6m^2 + 6m - 8 = 0$, đây là mặt phẳng vuông góc với mp(Oxy) và chứa Δ'. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;0)$, bán kính R sao cho $d(I,(P)) = R$. Ta có:

$$R^2 = \frac{\left[2ma + (1-m^2)b + 6m^2 + 6m - 8\right]^2}{4m^2 + (m^2-1)^2} = \frac{\left[(6-b)m^2 + 2m(a+3) + b - 8\right]^2}{(m^2+1)^2}.$$

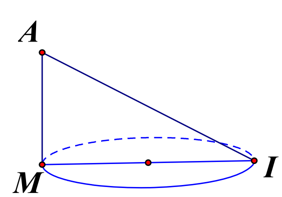
Chọn $a = -3, b = 7$ ta được $R^2 = 1 \Leftrightarrow R = 1$ với mọi m. Khi đó $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2 = 41$.

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): (1+m)x + (1-m)y - (1+3m)z - (2-8m) = 0$, điểm $A(-4;-2;7)$. Biết tập hợp các hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) là một đường tròn. Đường kính lớn nhất của đường tròn đó bằng:

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{7}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại mặt phẳng (P) thành: $x + y - z - 2 + m(x - y - 3z + 8) = 0$ do đó (P) luôn đi qua một đường thẳng d là giao của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 2 = 0$ và $(\beta): x - y - 3z + 8 = 0$. Phương trình của là $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi M là điểm chiếu vuông góc của A trên (P), I là hình chiếu của A trên d thì AM vuông góc với IM nên M thuộc mặt cầu đường kính AI.



Ta có $AM = \frac{\left|-4(1+m) - 2(1-m) + 7(1+3m) - (2-8m)\right|}{\sqrt{(1+m)^2 + (1-m)^2 + (1+3m)^2}} = \frac{|27m-1|}{\sqrt{11m^2 + 6m + 3}}$.

Khi m = 1/27 thì AM = 0, nghĩa là $MI \equiv AI = 5\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 64. **[Đề thi thử VTED]** Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+10=0$ và $(\beta): \frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 12.

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu, bán kính R. Ta thấy $\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1-m)^2}+1}=\frac{1}{m(1-m)}-1$.

$R=d(I,(\beta))=\frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{1-m}+c-1\right|}{\frac{1}{m(1-m)}-1}$, thay m bởi $1-m$ suy ra $a=b$.

Khi đó: $R=\frac{\left|\frac{a}{m(1-m)}+c-1\right|}{\frac{1}{m(1-m)}-1}\Rightarrow c-1=-a, R=|a|$. Mặt khác $R=d(I,(\alpha))=\frac{|a+2c+10|}{3}$,

suy ra $|-a+12|=3|a|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-6\\a=3\end{array}\right.$. Vậy $R_1+R_2=6+3=9$. **Chọn C.**

Nhận xét.

Ở đây ta thấy vai trò ngang nhau của a,b và của m và $1-m$ nên để khoảng cách không đổi thì $a=b$, hơn nữa để rút gọn với mẫu thức thì $c-1=-a$. Ta có thể chỉ ra các tâm $I_1(-6;-6;7)$ & $I_2(3;3;-2)$.

……………………………………………………………..

IV. BÀI TOÁN VỀ TỔNG – HIỆU KHOẢNG CÁCH.

1. Đặc điểm dạng toán và ví dụ.

• Đặc điểm dạng toán:

Những bài toán có dạng tổng các khoảng cách hoặc hiệu các khoảng cách hay các yếu tố liên quan khác. Ở đây chúng ta thường gặp là tìm $\min\left(MA+MB\right)$ hoặc $\max\left|MA-MB\right|$ hay khó hơn là $\min\left(\alpha MA+\beta MB\right)$ hoặc tổng nhiều khoảng cách.

• Phương pháp giải:

Tâm tỉ cự là điểm mà chúng ta cũng cần lưu ý. Ngoài ra ta còn vẽ các yếu tố phụ để giải toán: Các yếu tố thường cần vẽ là vuông góc, song song, đối xứng, bằng nhau. Tương ứng với các yếu tố đó là các tính chất hình học của một số hình; lập các phương trình đường; tìm giao điểm. Đặc biệt là bất đẳng thức B.C.S, Mincopxki, khảo sát, . . .

✓ Đối với tổng $MA+MB$: Chúng ta thường chọn tâm tỉ cự $d_b.\overrightarrow{IA}+d_a.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, trong đó d_a, d_b lần lượt là khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ (hoặc đường thẳng Δ).

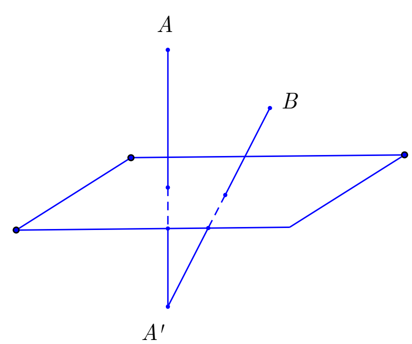
✓ Đối với hiệu $\left|MA-MB\right|$: Chúng ta thường đánh giá $\left|MA-MB\right|\le AB$, dấu bằng có khi M, A, B thẳng hàng và M ngoài đoạn AB.

Vì bài toán liên quan đến khoảng cách nên chúng ta cần chú ý tính "**vuông góc**" của quỹ tích các đường.

Ví dụ 46. [THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ] Trong không gian độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right): x-2y+z-1=0$ và điểm $A\left(0;-2;3\right)$, $B\left(2;0;1\right)$. Điểm $M\left(a;b;c\right)$ thuộc $\left(P\right)$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng:

A. $\frac{41}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 3.

Hướng dẫn giải.



Ta có A, B nằm một phía của $\left(P\right)$. Gọi A' đối xứng với A qua $\left(P\right)$ suy ra $A'\left(-2;2;1\right)$.

Ta có $MA+MB=MA'+MB\ge A'B$. Dấu bằng xảy ra khi $M=A'B\cap\left(P\right)$.

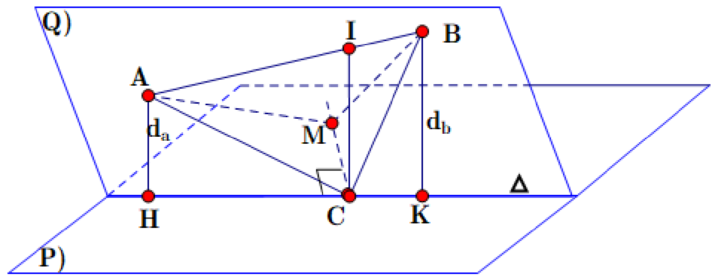
Xác định được $M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$. Suy ra $a^2+b^2+c^2=\frac{9}{4}$. **Chọn B.**

Nhận xét.

Thoạt nhìn cách giải tuy ngắn gọn, tức là nêu cách giải và đưa ra đáp số tính sẵn, nhưng thực tế quá trình tính toán thì mất nhiều thời gian. Bài toán còn phát biểu tương đương "Tìm M thuộc (P) để chu vi tam giác AMB nhỏ nhất".

Sau đây ta phân tích hình học và vị trí tương đối để thấy rõ bản chất của bài toán, ngoài ra còn liên quan đến cách giải khác, bài toán khác và cách giải tổng quát.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A,B và vuông góc với (P), $\Delta=(Q)\cap(P)$, các điểm H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên (P).



Nếu M ngoài Δ thì hạ MC vuông góc với Δ, nên $MA+MB>CA+CB$ và khi đó $MA+MB$ không đạt nhỏ nhất. Nếu M thuộc Δ nhưng ngoài đoạn HK thì $MA+MB>HA+HB$ hoặc $MA+MB>KA+KB$, khi đó $MA+MB$ cũng không đạt nhỏ nhất. Vậy ta phải có M thuộc đoạn HK. Đặt $HK=l, CK=t$, ta có:

$$CA+CB=\sqrt{{d_a}^2+(l-t)^2}+\sqrt{{d_b}^2+t^2}\ge\sqrt{(d_a+d_b)^2+(l-t+t)^2}$$ (Mincopxki).

Dấu bằng có khi $\frac{d_a}{d_b}=\frac{l-t}{t}=\frac{l}{t}-1\Leftrightarrow t=\frac{d_b}{d_a+d_b}.l$. Ta cũng có : $\frac{d_a}{d_b}=\frac{IA}{IB}$.

Cách 2. (Phương pháp quỹ tích + đại số)

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;-2)$, suy ra phương trình (Q) chứa A, B và vuông góc với (P) là:

$(Q): x+2y+3z-5=0$. Nên giao tuyến $(Q)\cap(P)=\Delta:\begin{cases}x=3+4t\\y=1+t\\z=-2t\end{cases}$. Đến đây ta có:

$$AM+BM=\sqrt{21t^2+42t+27}+\sqrt{21t^2+14t+3}\ge\frac{3\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$$, đạt được khi $t=-\frac{1}{2}$.

Khi đó tọa độ $M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$. Suy ra $a^2+b^2+c^2=\frac{9}{4}$. **Chọn B**.

(Khi MA + MB nhỏ nhất thì cũng có MA : MB = 3 : 1 = $d_a:d_b$)

Cách 3. (Tổng quát + CASIO)

Ghi $x-2y+z-1$ CALC nhập tọa độ A, kết quả 6, CALC nhập tọa độ B, kết quả 2.

Gọi I là điểm sao cho $2\overrightarrow{IA}+6\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên (P). Ghi $-\frac{x-2y+z-1}{6}$ CALC (nhập tọa độ *I*) STO M, bấm AC

Ghi $(M+x)^2+(-2M+y)^2+(M+z)^2$ bấm = ta được $\frac{9}{4}$. **Chọn B**.

Ví dụ 47. [THPT Chuyên Hà Tĩnh] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA=MB$ sao cho $MB+MC$ nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$

A. $P=4$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=5$.

Hướng dẫn giải.

M thuộc mặt phẳng trung trực của AB có phương trình (P): $2x+y-3=0$.

Ghi $2x+y-3$ CALC nhập tọa độ B, kết quả là 5, CALC nhập tọa độ C, kết quả là 10.

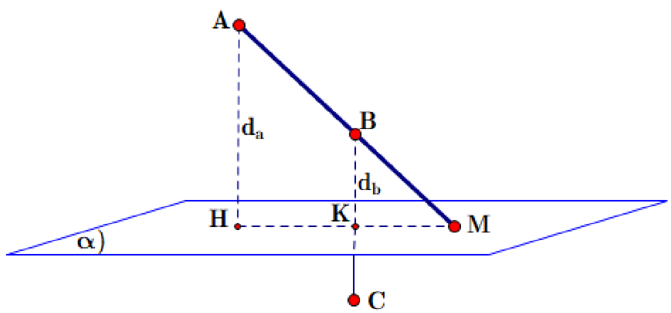
Gọi I là điểm sao cho $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow I\left(\frac{11}{3};\frac{7}{3};3\right)$. M là hình chiếu của I trên (P).

Ghi $-\frac{2x+y+0z-3}{5}$ CALC (nhập tọa độ I) STO M, bấm AC

Ghi $2M+x+M+y+0M+z$ bấm = ta được 5. **Chọn D**.

Lời bình.

Đối với mặt phẳng thì chúng ta có khái niệm hai điểm "Cùng phía hoặc khác phía", nhưng đối với đường thẳng thì sao?. Do đó ta có phương pháp tổng quát cho bài toán tìm $\min(MA+MB)$ hoặc $\max|MA-MB|$ với vị trí của điểm M cần tìm thuộc mp(P) hoặc đường thẳng Δ bất kể cùng phía hay khác phía. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B trên (P) (hoặc Δ). Đặt $AH=d_a, BK=d_b$ và $t=d_a/d_b$.



Đối với bài $\min(MA+MB)$: Vị trí M **thuộc đoạn** HK và thỏa mãn hệ thức véc tơ $\overrightarrow{HM}+t\overrightarrow{KM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OH}+t\overrightarrow{OK}}{1+t}$.

Đối với bài $\max|MA-MB|$: Vị trí M **ngoài đoạn** HK và thỏa mãn hệ thức véc tơ $\overrightarrow{HM}-t\overrightarrow{KM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OH}-t\overrightarrow{OK}}{1-t},(t\neq1)$.

Khi đó chỉ cần tìm H,K thì xác định được M. Các tọa độ H,K ta có thể gán vào các phím tương ứng A,B trong máy tính CASIO.

Ví dụ 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;3;2)$, $B(2;-1;6)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA+MB$ bé nhất. Tính $P=a^2+b^3-c^4$.

A. $P=129$. **B.** $P=-48$. **C.** $P=33$. **D.** $P=48$.

Hướng dẫn giải.

Cách 2. Tổng quát - Tâm tỉ cự.

Ta có tỉ số $t=\frac{d_a}{d_b}=\frac{|2|}{|6|}=\frac{1}{3}$. Hình chiếu $H(6;3;0)$, $K(2;-1;0)$ của A và B trên (Oxy).

Điểm M thuộc (Oxy) thỏa mãn $\overrightarrow{HM}+t\overrightarrow{KM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OH}+t\overrightarrow{OK}}{1+t}=\frac{3\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}}{3+1}$.

Đến đây ta tìm được $a=5$, $b=2$. Vậy $P=a^2+b^3-c^4=33$. **Chọn C.**

(Xem thêm **Ví dụ 8** và **Câu 30**).

Ví dụ 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(5;-1;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) và $|MA-MB|$ lớn nhất. Giá trị abc bằng

A. 1. **B.** 12. **C.** 24. **D.** -24.

Hướng dẫn giải.

Cách 2. Tổng quát.

Ghi $x+y+z-1$ CALC nhập tọa độ A, kết quả -3. CALC nhập tọa độ B, kết quả 1.

Ta có tỉ số $t=d_a/d_b=3/1=3$. Tìm hình chiếu *H*, *K* của *A*, *B* trên (*P*).

Ghi $-\dfrac{x+y+z-1}{3}$ bấm = STO B, Bấm ▲ CALC nhập tọa độ A STO A.

Tọa độ *M* thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OH}-3\overrightarrow{OK}}{1-3}$.

Đến đây ta ghi: $\dfrac{(A+1)-3(B+5)}{1-3}$ bấm = thì $a=6$, sửa thành $\dfrac{(A-3)-3(B-1)}{1-3}$ bấm = thì $b=-1$, sửa thành $\dfrac{(A+0)-3(B-2)}{1-3}$ bấm = thì $c=-4$. Vậy $abc=24$. **Chọn C.**

Ví dụ 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$ và hai điểm $A(1;0;-1)$, $B(2;1;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

A. 30. **B.** 10. **C.** 22. **D.** 6.

Hướng dẫn giải.

Ghi $x^2+y^2+z^2-\dfrac{(2x-y+z)^2}{6}$ CALC nhập $0=-1=-1==$ ta có $d_a^{\,2}=2$. CALC nhập $1=0=1==$ có $d_b^{\,2}=\dfrac{1}{2}$ nên tỉ số $t=\dfrac{d_a}{d_b}=\dfrac{\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}=2$.

Sửa lại là $\dfrac{(2x-y+z)}{6}$ bấm = STO B, bấm ▲ bấm CALC nhập lại $0=-1=-1==$STO A.

Điểm M thuộc d thỏa mãn $\overrightarrow{HM}-2\overrightarrow{KM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OH}-2\overrightarrow{OK}}{1-2}=-\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{OK}$. Đến đây ghi: $-(1+2A)+2(1+2B)$ bấm = thì $a=3$, sửa thành $-(1-A)+2(1-B)$ bấm = thì $b=0$, sửa thành $-(A)+2(B)$ bấm = thì $c=1$. Do đó tọa độ $M(3;0;1)$.

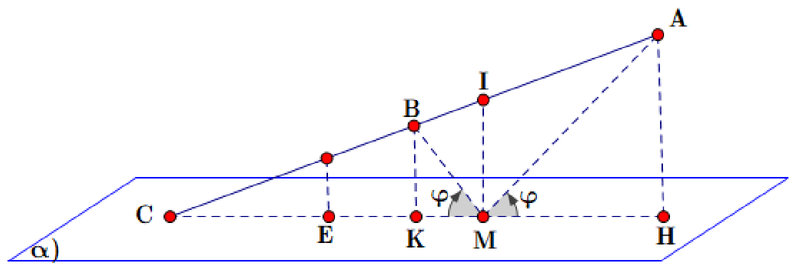
Vậy $P=a^2+b^2+c^2=10$. **Chọn B.**

Ví dụ 51. **[THPT Chuyên ĐH Vinh]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10;6;-2)$, $B(5;10;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y+z-12=0$. Điểm M di động trên (α) sao cho MA, MB luôn tạo với (α) các góc bằng nhau. Biết rằng M luôn thuộc một đường tròn (ω) cố định. Hoành độ của tâm đường tròn (ω) bằng

A. -4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 10.

Hướng dẫn giải.

Ghi $2x+2y+z-12$ CALC nhập tọa độ A, kết quả 18. CALC nhập tọa độ B, kết quả 9. Tỉ số $t=18/9=2$. Gọi C là giao điểm của đường thẳng AB với (α), M thuộc đoạn HK thỏa mãn bài toán, khi đó:



$\tan\varphi = \frac{AH}{MH} = \frac{BK}{MK} \Rightarrow \frac{AH}{BK} = \frac{MH}{MK} = \frac{IA}{IB} = 2$ (Điểm I như hình vẽ). Suy ra I cố định và M thuộc đường tròn (ω) tâm E giao tuyến của mặt cầu đường kính CI với (α).

Ta cũng có CA = 2CB nên E là trung điểm CM. Ta có $\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Rightarrow C(0;14;-16)$.

Ta có $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{OK}}{1+2}$. Tìm tọa độ H, K., ghi $-\frac{2x+2y+z-12}{9}$ bấm = STO B.

Bấm ▲ CALC nhập tọa độ A, STO A.

ghi $\frac{(2A+10)+2(2B+5)}{1+2}$ bấm = kết quả $x_M=4$. Suy ra $x_E=2$. **Chọn C.**

Ví dụ 52. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho A (1; 5; 0), B (3; 3; 6), đường thẳng $d: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ và điểm M thuộc d. Tìm tọa độ của M để chu vi tam giác AMB nhỏ nhất?

A. $M(1;0;2)$. **B.** $M(2;4;3)$. **C.** $M(-3;2;-2)$. **D.** $M(1;4;3)$.

Hướng dẫn giải.

Cần xác định vị trí M để MA + MB min. Phương trình $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ (nháp)

Ghi $x^2+y^2+z^2-\frac{(2x-y+2z)^2}{9}$ CALC (thay A vào tử d) $2=4=0=$ kết quả 20.

CALC (thay B vào tử d) $4=2=6=$ kết quả 20. Đến đây gọi I(2; 4; 3) là trung điểm AB.

Bấm ◀ Trở về sửa thành $\frac{(2x-y+2z)}{9}$ CALC nhập $3=3=3=$ kết quả $t=1$. **Chọn A.**

Ví dụ 53. [Lương Thế Vinh - Hà Nội] Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho A (1; 4; 2), B (-1; 2; 4), đường thẳng $d:\begin{cases} x=5-4t \\ y=2+2t \\ z=4+t \end{cases}$ và điểm M thuộc d. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMB

A. $2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $6\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

Nhận xét: Do độ dài AB không đổi nên diện tích tam giác AMB nhỏ nhất nếu khoảng cách từ M đến AB nhỏ nhất.

Cách 2 (Tâm tỉ cự).

Phương trình chính tắc của $d:\frac{x-5}{-4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{1}$ (nháp).

Tính các khoảng cách lần lượt từ A, B đến d, nhập công thức

$\sqrt{x^2+y^2+z^2-\frac{(-4x+2y+z)^2}{16+4+1}}$ CALC (thay A vào tử của d) $-4=2=-2=$ kết quả $\frac{2\sqrt{105}}{7}$

CALC (thay B vào tử của d) $-6=0=0=$ kết quả $\frac{2\sqrt{105}}{7}$. Do đó $d_a=d_b$.

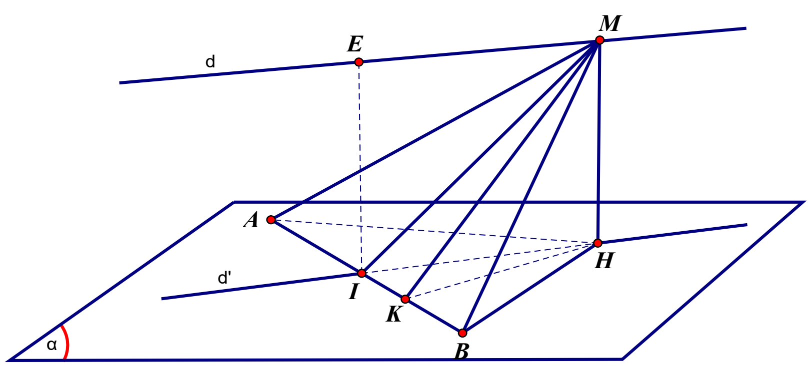
Đến đây gọi I(0; 3; 3) là trung điểm AB.

CALC nhập $-5=1=-1=$ kết quả $h=\sqrt{6}$. Mặt khác $AB=2\sqrt{3}$.

Suy ra $S_{\min}=\frac{1}{2}AB.h=\frac{1}{2}.2\sqrt{3}.\sqrt{6}=3\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Nhận xét.

Phương pháp VD 52 và VD 53 dựa vào cơ sở khái quát sau:



Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và $(\alpha)//d$, d' là hình chiếu vuông góc của d trên (α), H là hình chiếu của M trên (α), K là hình chiếu của M trên AB.

Ta có $MH=h$ không đổi và $MA=\sqrt{h^2+AH^2}=\sqrt{h^2+HK^2+AK^2}$, tương tự, ta có $MA+MB=\sqrt{h^2+HK^2+AK^2}+\sqrt{h^2+HK^2+BK^2}\geq\sqrt{4h^2+4HK^2+AB^2}\geq\sqrt{4h^2+AB^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi (do tỉ số 1:1) $HK=0, AK=BK \Leftrightarrow H\equiv K\equiv I$ (trung điểm AB).

Khi đó $M\equiv E$ và IE là đoạn vuông góc chung của AB và d.

Chu vi AMB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Diện tích AMB nhỏ nhất (vì $MK\geq IE$). Tuy nhiên khi thi trắc nghiệm ta không thể trình bầy đầy đủ, chỉ sử dụng kết quả.

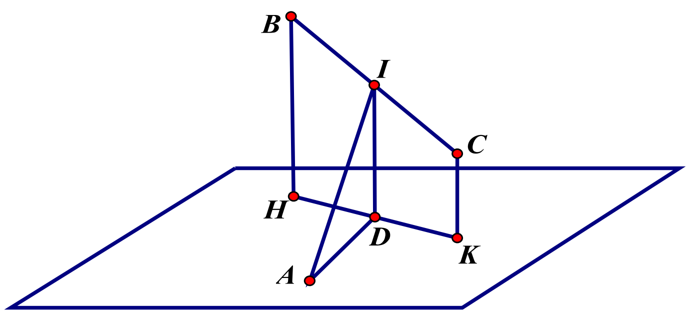
Ví dụ 54. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1); B(3;-2;0); C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất, biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $G(-2;0;3)$. B. $F(3;0;-2)$. C. $E(1;3;1)$. D. $H(0;3;1)$.

Hướng dẫn giải.

Gọi BH, CK là khoảng cách từ B, C đến (P). Gọi I(2; 0; -1) là trung điểm của BC.

ID là khoảng cách từ I đến (P), khi đó BHKC là hình thang có ID là đường trung bình nên BH + CK = 2ID



Ta có $ID \le IA$ suy ra mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{AI} = (1;0;-2)$ làm véc tơ pháp tuyến, phương trình $(P): x - 2z + 1 = 0$ và (P) đi qua $E(1;3;1)$. **Chọn C.**

Ví dụ 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và hai điểm $A(0;8;2)$, $B(9;-7;23)$. Gọi mặt phẳng (P) đi qua A và (P) tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất. Giả sử $\vec{n} = (1;m;n)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P), khi đó tích mn là

A. 2. B. -2. C. -4. D. 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình (P) là $1(x-0) + m(y-8) + n(z-2) = 0$. Do (P) tiếp xúc với (S) nên ta có:

$d(I,(P)) = R \Rightarrow \dfrac{|5 - 11m + 5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \sqrt{72}$. Khoảng cách từ B đến (P) là:

$$d(B,(P)) = \frac{|9 - 15m + 21n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \frac{|5 - 11m + 5n + 4(1 - m + 4n)|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

Suy ra $d(B,(P)) \le \dfrac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} + \dfrac{4|1-m+4n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \le \sqrt{72} + 4.\dfrac{\sqrt{(1+1+16)(1+m^2+n^2)}}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = 18\sqrt{2}$.

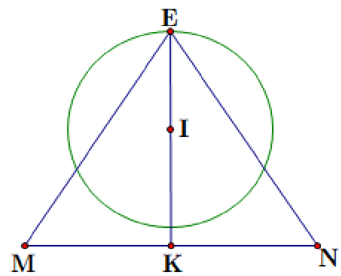
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} (5-11m+5n)(1-m+4n) > 0 \\ \dfrac{1}{1} = \dfrac{m}{-1} = \dfrac{n}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = -1, n = 4$.

Ví dụ 56. [THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ và hai điểm $M(4;-4;2)$, $N(6;0;6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM+EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E.

A. $x-2y+2z+8=0$. **B.** $2x+y-2z-9=0$. **C.** $2x+2y+z+1=0$. **D.** $2x-2y+z+9=0$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;2)$ và bán kính $R=3$. Ta có $IM=IN=3\sqrt{5}$ nên ΔIMN cân.



Gọi K là trung điểm của MN $\Rightarrow K(5;-2;4)$ và ta có $EM+EN$ lớn nhất khi $\overrightarrow{IE}=t\overrightarrow{IK}, t<0$.

Do đó $t=-\dfrac{R}{IK}=-\dfrac{1}{2}$, suy ra $\overrightarrow{IE}=-\dfrac{1}{2}(4;-4;2)=(-2;2;-1)\Rightarrow E(-1;4;1)$, khi đó tiếp diện đi qua E và có vtpt $\vec{n}=(2;-2;1)$ và phương trình $2x-2y+z+9=0$. **Chọn D.**

Cách 2.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(3;-6;0), \overrightarrow{IN}=(5;-2;4)$ suy ra $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=(8;-8;4)=2\overrightarrow{IK}$ và:

$$P=\sqrt{EM^2}+\sqrt{EN^2}=\sqrt{EI^2+IM^2+2\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IM}}+\sqrt{EI^2+IN^2+2\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IN}}$$

$$P=\sqrt{54-2\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IM}}+\sqrt{54-2\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IN}}\le\sqrt{(1^2+1^2)\left(108-2\overrightarrow{IE}.(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN})\right)}.$$

$$P\le\sqrt{2\left(108-4\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IK}\right)}\le\sqrt{2(108+4IE.IK)}=6\sqrt{10}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IK}$ ngược hướng, ta có $\overrightarrow{IE}=t\overrightarrow{IK}=t(4;-4;2)$, suy ra $t=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{IE}=(-2;2;-1)\Rightarrow E(-1;4;1)$ (Thỏa mãn $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IN}=-18$). Phương trình tiếp diện là: $2x-2y+z+9=0$. **Chọn D.**

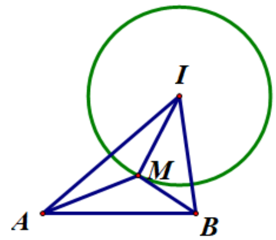
Ví dụ 57. Cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và hai điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2.MB$?

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(-1;4;0), R=2\sqrt{2}$ là tâm và bán kính mặt cầu, ta có $\overrightarrow{IA}=(4;-4;0)$.

Xét $AM^2=\overrightarrow{IM}^2+\overrightarrow{IA}^2-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA}=40-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA}$.



Đặt $\overrightarrow{IA} = 4\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = (1;-1;0) \Leftrightarrow C(0;3;0)$. Khi đó điểm C nằm trong mặt cầu, B ngoài mặt cầu và $AM^2 = 40 - 8\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC} = 4\left(8 + 2 - 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}\right) = 4CM^2 \Leftrightarrow AM = 2CM$.

$P = MA + 2MB = 2(MC + MB) \ge 2BC = 6\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Cách 2. (Tổng quát)

Tính $\overrightarrow{IA} = (4;-4;0), \overrightarrow{IB} = (5;-2;1)$ nên $\cos\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = \dfrac{7}{2\sqrt{15}} \Rightarrow \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = \alpha \approx 25,4^o$.

Đặt $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IM}\right) = t \Rightarrow \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}\right) = \alpha - t$, ta có: $P = \sqrt{40 - 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA}} + 2\sqrt{38 - 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IB}}$.

$P = \sqrt{40 - 32\cos(\alpha - t)} + 2\sqrt{38 - 8\sqrt{15}\cos t}$. Dùng CASIO để tìm min, ta có

$\min P \approx 8.48528 = 6\sqrt{2}$ tại $t \approx 7.8^o$. **Chọn B.**

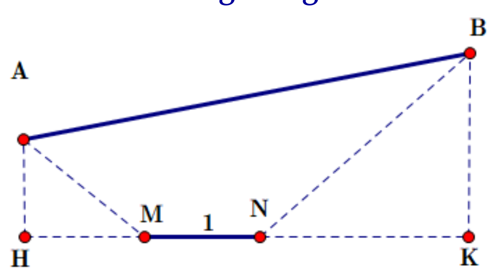
Nhận xét.

Cách 2 và máy "Casio sẽ xài tất tần tật" các loại biểu thức $\sqrt{2}MA + \sqrt{3}MB$, ...

Ví ụ 58. [Chuyên ĐHSP Hà Nội] Trong không gian *Oxyz*, cho các điểm A(1;3;2), B(−2;−1;4) và hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MN = 1. Giá trị nhỏ nhất của $AM^2 + BN^2$ là

A. 28. **B.** 25. **C.** 36. **D.** 20.

Hướng dẫn giải.



Gọi $H(1;3;0), K(-2;-1;0)$ là hình chiếu của A, B trên mp(Oxy), độ dài $HK = 5$.

Ta chọn vị trí M, N thuộc đoạn HK như hình vẽ, đặt $HM = a, NK = b$ thì $a + b = 4$.

Khi đó $AM^2 + BN^2 = AH^2 + a^2 + b^2 + KB^2 = 4 + 16 + a^2 + b^2$, suy ra:

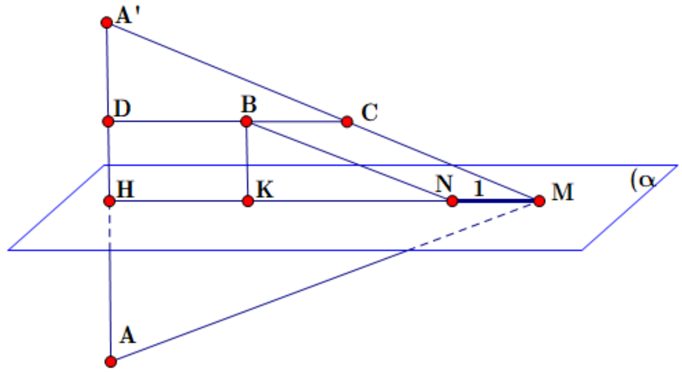
$AM^2 + BN^2 \ge 20 + \dfrac{1}{2}(a+b)^2 = 20 + 8 = 28$. **Chọn A.**

Ví dụ 59. [Đề - 2021 – BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và $B(-2;1;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MN = 2$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{53}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Vẽ yếu tố phụ.



Vì A, B khác phía đối với mp(Oxy) nên lấy $A'(1;-3;4)$ đối xứng với A qua (Oxy).

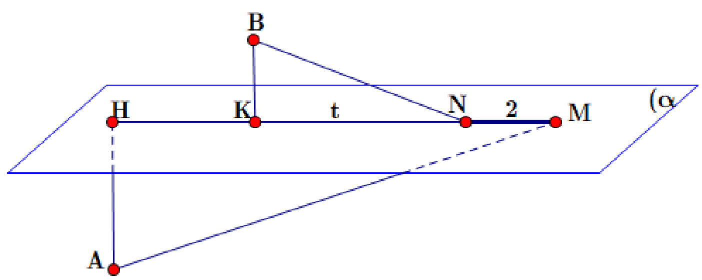
Vẽ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NM}$, khi đó $|AM - BN| = |A'M - CM| \le A'C$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A′, C, M thẳng hàng.

Gọi $H(1;-3;0), K(-2;1;0)$ là hình chiếu của A, B trên mp(Oxy), độ dài $HK = 5$. Suy ra $CD = 5 + 2 = 7 \Rightarrow A'C = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$. **Chọn D.**

Nhận xét.

Cách giải trên khá phức tạp, yêu cầu các em cần "hình dung" được vị trí tương đối của các điểm A, B, M, N và mp(Oxy); ngoài ra phải vẽ hình minh họa và tính toán nên mất nhiều thời gian làm bài. Có nghĩa là chúng ta "chạy theo đề bài" để giải mà chưa "chủ động" để giải toán.

Cách 2. Tổng quát – Khảo sát hàm số.



Gọi $H(1;-3;0), K(-2;1;0)$ là hình chiếu của A, B trên mp(Oxy), độ dài $HK = 5$.

Ta chọn M, N ngoài đoạn HK (Điểm M càng xa điểm A càng tốt, điểm N càng gần B càng tốt; Kể cả A và B cùng phía hay khác phía đối với (α), chúng ta cần quan tâm ở đây là $d_a > d_b$). Đặt $KN = t \ge 0$, ta xét hàm số:

$$f(t) = AM - BN = \sqrt{(7+t)^2 + 16} - \sqrt{t^2 + 4} \Rightarrow f'(t) = \frac{7+t}{\sqrt{(7+t)^2 + 16}} - \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 7$. Suy ra $max f(t) = f(7) = \sqrt{53}$. **Chọn D.**

Cách 3. Tổng quát – Bất đẳng thức.

Khi thiết lập được hàm số, thì dùng BĐT Mincopxki ta có:

$$f(t) = \sqrt{(t+7)^2 + (2+2)^2} - \sqrt{t^2 + 4} \le \sqrt{t^2 + 2^2} + \sqrt{7^2 + 2^2} - \sqrt{t^2 + 4} = \sqrt{53}$$

Đẳng thức có khi $\frac{t}{7} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow t = 7$.

Lời bình.

Khi $\left|AM-BN\right|$ lớn nhất thì ta có các tam giác AHM, BKN đồng dạng, tỉ số bằng 2. Khi đó: $HM=2KN \Leftrightarrow 7+t=2t \Leftrightarrow t=7$, nên $AM-BN=BN=\sqrt{53}$. Như vậy ta vẫn có tỉ số $\frac{HM}{KN}=\frac{AH}{BK}=2$. Vậy đây xem như một cách giải (Thừa nhận kết quả).

Các bài toán trên có đặc điểm: $\frac{HM}{NK}=\frac{AM}{BN}=\frac{d_a}{d_b}=t$. Hay ta có $\frac{HM}{AM}=\frac{KN}{BN}$, nói cách khác, các đường thẳng AM, BN cùng tạo với (P) một góc bằng nhau φ. Mà ta có $\sin\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{n_P}\right)\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{n_P}\right)\right|$. Ta tạm gọi là "**Định luật phản xạ ánh sáng đối với gương phẳng**!": Tia phản xạ của AM sẽ theo phương BN; Tia phản xạ của BN sẽ theo phương AM.

Trong trường hợp khi $MN=0 \Leftrightarrow N\equiv M$, có nghĩa là một điểm M di động trên (α), ta quy về bài toán "Tìm M thuộc (α) hoặc Δ để $\left|AM-BM\right|$ lớn nhất". Khi đó ta giải quyết bài toán theo cách tổng quát như trên (Có thể dùng CASIO để tìm max). Tia AM, BM hoặc trùng nhau hoặc đối xứng nhau qua mặt phẳng (P) hoặc mặt phẳng pháp tuyến của (P) tại M; Kể cả bài toán $\min\left(AM+BM\right)$.

Tóm lại: Cho hai tam giác đồng dạng là OK!

…………………………………………………………..

2. Bài tập kiểm tra.

Câu 65. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;3), B(5;2;-1)$ và hai điểm *M*, *N* thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho điểm $I(1;2;0)$ luôn là trung điểm của *MN*. Khi biểu thức $P=MA^2+2NB^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính $T=2x_M-4x_N+7y_M-y_N$

A. $T=-10$ **B.** $T=-12$ **C.** $T=-11$ **D.** $T=-9$.

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-1;4;-3)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\left|MA-MB\right|$ lớn nhất. Tọa độ M là

A. $M(-5;1;0)$. **B.** $M(5;1;0)$. **C.** $M(5;-1;0)$. **D.** $M(-5;-1;0)$.

Câu 67. [Chu Văn An – Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $\left|MA-MB\right|$ đạt giá trị lớn nhất $T_{\max}$. Khi đó $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max}=\sqrt{57}$. **B.** $T_{\max}=3$. **C.** $T_{\max}=2\sqrt{6}-3$. **D.** $T_{\max}=3\sqrt{6}$.

Câu 68. [Sở GD Hà Tĩnh] Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;0;0), B(0;-1;0), C(0;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+7=0$. Xét $M\in(P)$, giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$ bằng

A. $\sqrt{22}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{19}$.

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A(1;2;-1), B(7;-2;3) và đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x+3y-4=0$ và $(Q): y+z-4=0$. Điểm $I \in (d)$ sao cho tam giác ABI có chu vi nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất đó bằng:

A. $9+2\sqrt{17}$. **B.** $2(\sqrt{30}+\sqrt{17})$. **C.** $2(\sqrt{30}+\sqrt{13})$. **D.** $7\sqrt{6}$.

Câu 70. [THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa] Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi $M(a;b;c) \in \Delta$ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T = a+b+c$?

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=4$. **D.** $T=5$.

Câu 71. [Nguyễn Khuyến Tp.HCM] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất thì độ dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;1;0)$, song song với mặt phẳng $(P): x-y-z=0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0;2;0)$, $N(4;0;0)$ tới đường thẳng d có giá trị nhỏ nhất. Vecto chỉ phương $\vec{u}$ của d có tọa độ là

A. $(1;0;1)$. **B.** $(2;1;1)$. **C.** $(3;2;1)$. **D.** $(0;1;-1)$.

Câu 73. [THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-6;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+7=0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P). Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là.

A. $B(0;0;1)$. **B.** $B(0;0;-2)$. **C.** $B(0;0;-1)$. **D.** $B(0;0;2)$.

Câu 74. Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm điểm $A(-4;4;0)$, $B(2;0;4)$, $C(1;2;-1)$ và $D(7;-2;3)$. Giả sử M là điểm di động trên đường thẳng AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MC+MD$.

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $7\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{30}$.

Câu 75. [THPT Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình] Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;-4;-2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1-8t \end{cases}$. Điểm $I(a,b,c)$ thuộc d thỏa mãn $IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=a+b+c$ bằng

A. $\frac{23}{58}$. **B.** $-\frac{43}{58}$. **C.** $\frac{65}{29}$. **D.** $-\frac{21}{58}$.

Câu 76. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;10)$, $B(4;6;5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của AM.

A. $\sqrt{10}$. B. 10. C. $6\sqrt{3}$. D. $8\sqrt{2}$.

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$. Gọi (C) là tập hợp các điểm $M\in(S)$ để $|MA-2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{7}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 78. **[Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai]** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-4;-1;3)$, $B(-1;-2;-1)$, $C(3;2;-3)$ và $D(0;-3;-5)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D, ba điểm A, B, C nằm về cùng phía so với (α). Biết tổng khoảng cách từ A, B, C đến (α) lớn nhất, trong các điểm sau, điểm nào thuộc mặt phẳng (α)?

A. $E_1(7;-3;-4)$. B. $E_2(2;0;-7)$. C. $E_3(-1;-1;-6)$. D. $E_4(36;1;-1)$.

Câu 79. **[Lê Quý Đôn- Đà Nẵng]** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34$. Biết $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Tính tích số $x_0y_0z_0$.

A. 16. B. 18. C. 14. D. 12.

Câu 80. **[Chuyên Sơn La]** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(2;3;4)$. Đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2+2y-2=0$ nằm trong mặt phẳng (P). Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.

Câu 81. **[Đề TNTHPT 2021 – BGD]** Trong không gian, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-3)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=1$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$ B. $\sqrt{41}$. C. $\sqrt{37}$ D. $\sqrt{61}$.

Câu 82. **[Sở GD Hà Tĩnh]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-8y+9=0$ và hai điểm $A(5;10;0)$, $B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $MA+3MB$ bằng

A. $\frac{11\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{22\sqrt{2}}{3}$. C. $22\sqrt{2}$. D. $11\sqrt{2}$.

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;2)$, $C(1;-1;4)$, đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-6z+10=0$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho $T=MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;1;0)$, $B(2;0;-1)$, $C(0;2;-1)$, $D(0;0;-2)$. Với mỗi điểm M tùy ý, đặt $T=MA+MB+MC+MD$. Gọi $M_0(a;b;c)$ sao cho T đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+5b+c$ bằng

A. 7. B. 4. C. 3. D. -13.

Câu 85. [THPT Chuyên Tuyên Quang] Cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$ và ba điểm $A(2;0;0),B(0;4;0),C(0;0;6)$. Điểm $M(a;b;c)\in d$ thỏa mãn $MA+2MB+3MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=\dfrac{148}{49}$. **B.** $S=\dfrac{49}{148}$. **C.** $S=-\dfrac{50}{49}$. **D.** $S=-\dfrac{49}{50}$.

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;1;0)$, $B(4;4;-3)$, $C(2;3;-2)$ và đường thẳng $(d):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt phẳng (α). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α). Tìm giá trị lớn nhất của $T=d_1+2d_2+3d_3$.

A. $T_{\max}=2\sqrt{21}$. **<u>B</u>.** $T_{\max}=6\sqrt{14}$. **C.** $T_{\max}=\sqrt{14}+3\sqrt{21}$. **D.** $T_{\max}=\sqrt{203}$.

Câu 87. [SGD Thanh Hóa] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P=MA+MB+MC+\sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$. **B.** $OM=\sqrt{26}$. **<u>C</u>.** $OM=\sqrt{14}$. **D.** $OM=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$.

Câu 88. [SGD Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính bằng 2. Mặt phẳng (P) thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1), (S_2). Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P). Giá trị $M+m$ bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **<u>C</u>.** 9. **D.** 8.

Câu 89. [TH & TT SỐ 8] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ và các điểm $A(2;3;-4)$, $B(4;6;-9)$. Gọi C,D là các điểm thay đổi trên Δ sao cho $CD=\sqrt{14}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất. Khi đó tọa độ trung điểm M của CD là

A. $M\left(\dfrac{79}{35};\dfrac{64}{35};\dfrac{102}{35}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{181}{5};\dfrac{-104}{5};\dfrac{-42}{5}\right)$.

C. $M\left(\dfrac{101}{28};\dfrac{13}{14};\dfrac{69}{28}\right)$. **<u>D</u>.** $(2;2;3)$.

....

<u>3. Hướng dẫn bài tập kiểm tra.</u>

Câu 65. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;3),B(5;2;-1)$ và hai điểm *M*, *N* thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho điểm $I(1;2;0)$ luôn là trung điểm của *MN*. Khi biểu thức $P=MA^2+2NB^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính $T=2x_M-4x_N+7y_M-y_N$

<u>A</u>. $T=-10$ **B.** $T=-12$ **C.** $T=-11$ **D.** $T=-9$.

Hướng dẫn giải.

Giả sử các điểm $M\left(1-x;2-y;0\right),N\left(1+x;2+y;0\right),x^2+y^2\neq 0$. Khi đó

$$P=x^2+\left(y-1\right)^2+9+2\left(x^2-8x+y^2+17\right)+x\left(4-x\right)-y\left(y-1\right)-3$$

$$P=2x^2-12x+2y^2-y+41=2\left(x-3\right)^2+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{183}{8}\geq\frac{183}{8}$$

Vậy $\min P=\frac{183}{8}\Leftrightarrow x=3,y=\frac{1}{4}\Leftrightarrow M\left(-2;\frac{7}{4};0\right),N\left(4;\frac{9}{4};0\right)\Rightarrow T=-10$. **Chọn A.**

Lời bình.

Ở đây ta chọn phương pháp khử dần ẩn, biến đổi đưa về "dạng mặt cầu" nên tương đối ngắn gọn. Ngoài ra nếu gọi H,K là hình chiếu của A,B trên mp(Oxy) thì ta vẫn có $HM/KN=d_a/d_b=3/1$.

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(3;2;1\right)$, $B\left(-1;4;-3\right)$. Lấy điểm $M\left(a;b;c\right)$ thuộc mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ sao cho $\left|MA-MB\right|$ lớn nhất. Tọa độ M là

A. $M\left(-5;1;0\right)$. **B.** $M\left(5;1;0\right)$. **C.** $M\left(5;-1;0\right)$. **D.** $M\left(-5;-1;0\right)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có tỉ số $t=\frac{d_a}{d_b}=\frac{\left|1\right|}{\left|-3\right|}=\frac{1}{3}$ nên gọi C là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow C\left(5;1;\frac{5}{2}\right)$. Khi đó điểm M cần tìm là hình chiếu của C trên $\left(Oxy\right)$ nên tọa độ $M\left(5;1;0\right)$. **Chọn B.**

Câu 67. **[Chu Văn An – Hà Nội]** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A\left(1;2;-5\right)$, $B\left(-1;0;2\right)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $\left|MA-MB\right|$ đạt giá trị lớn nhất $T_{\max}$. Khi đó $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max}=\sqrt{57}$. **B.** $T_{\max}=3$. **C.** $T_{\max}=2\sqrt{6}-3$. **D.** $T_{\max}=3\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Khảo sát hàm số.

Lấy điểm $M\left(x;x+1;x\right)\in\Delta$, ta có: $MA=\sqrt{3x^2+6x+27}$ và $MB=\sqrt{3x^2+6}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=MA-MB=\sqrt{3x^2+6x+27}-\sqrt{3x^2+6}$, tính đạo hàm:

$$f'\left(x\right)=\frac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x+27}}-\frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}};f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+27}}=\frac{x}{\sqrt{3x^2+6}}.$$

Giải ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. Suy ra $T_{\max}=3$.

(Có thể vào **MENU 8** để tìm min, max của $f\left(x\right)$).

Cách 2. Bất đẳng thức.

Ta viết lại MA và áp dụng bất đẳng thức Mincopxki:

$$MA=\sqrt{\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}+\sqrt{6}\right)^2}\leq\sqrt{\left(\sqrt{3}x\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=MB+3$$

Suy ra $MA-MB\leq 3$. Đẳng thức có khi $\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow x=1$.

Cách 3. Tổng quát.

Ghi $x^2+y^2+z^2-\frac{(x+y+z)^2}{3}$ CALC (nhập bộ khi thay A vào tử Δ) $1=1=-5=$ kết quả $d_a^{\ 2}=24$, CALC (thay B vào tử Δ) $-1=-1=2=$ kết quả $d_b^{\ 2}=6$.

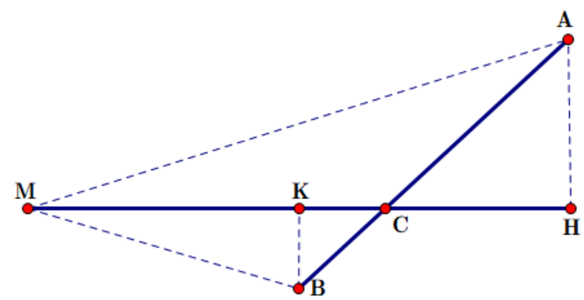
Từ đó tỉ số: $t=d_a/d_b=2\sqrt{6}/\sqrt{6}=2$. Tìm tọa độ hình chiếu H, K của A, B trên Δ.

Sửa lại $\frac{(x+y+z)}{3}$ bấm $=$ STO B, bấm ▲ CALC nhập lại $1=1=-5==$ STO A.

Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MH}-2\overrightarrow{MK}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OH}-2\overrightarrow{OK}}{1-2}$. Đến đây ta ghi:

$\frac{A-2B}{1-2}:\frac{A+1-2(B+1)}{1-2}$ bấm $==$ ta có $x_M=1$, $y_M=2$ nên tọa độ $M(1;2;1)$.

Suy ra $\max T=|MA-MB|=6-3=3$.



Lời bình.

Trong cách 3 tuy trình bầy tương đối dài, nhưng thực tế ta chỉ ghi nháp tỉ số t và biểu thức véc tơ, còn lại là bấm máy Casio. Ngoài ra ta có thể tìm được $\Delta\cap AB=C\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ và bất đẳng thức $|MA-MB|\le AB$ luôn đúng, nhưng C thuộc đoạn thẳng AB nên dấu bằng không xảy ra. Cụ thể trong bài trên, chúng ta không thể có đẳng thức $|MA-MB|=AB=\sqrt{57}$, mà chỉ có thể là $|MA-MB|=3$.

Cách 4. Vị trí tương đối.

Trường hợp $\Delta\cap AB=C$ thuộc đoạn AB, ta có: $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=2$, nghĩa là: Δ là đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$. Trường hợp $\Delta\cap AB=C$ ngoài đoạn AB, thì M trùng C, do đó ta luôn có $\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=\left(\overrightarrow{BM},\vec{u}\right)$. Suy ra tìm tọa độ $M(x;x+1;x)$ theo công thức: $\cos\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=\cos\left(\overrightarrow{BM},\vec{u}\right)\Leftrightarrow\frac{x-1+x-1+x+5}{2}=\frac{x+1+x+1+x-2}{1}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy tọa độ $M(1;2;1)$, nên $\max T=MB=3$.

Cách 5. Tổng quát.

Gọi D là điểm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DB}$, tức B là trung điểm của DA.

Tọa độ $D(-3;-2;9)$, ta tìm hình chiếu M của D trên Δ. Ghi $\frac{x+y+z}{3}$ CALC nhập -3 = -3 = 9 = = STO D, bấm D : D + 1 : D = = = kết quả $M(1;2;1)$, nên $\max T=MB=3$.

Câu 68. **[Sở GD Hà Tĩnh]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;0), B(0;-1;0), C(0;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+7=0$. Xét $M \in (P)$, giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$ bằng

A. $\sqrt{22}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{19}$.

Hướng dẫn giải.

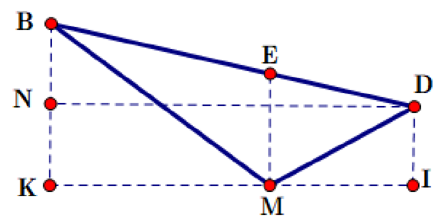
Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, tọa độ $D(-1;1;1)$. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $MB+MD$. Tỉ số $t=\dfrac{d_B}{d_D}=\dfrac{9}{4}$.

Gọi E là điểm trên đường thẳng BD sao cho $\overrightarrow{EB}+\dfrac{9}{4}\overrightarrow{ED}=\vec{0} \Leftrightarrow E\left(-\dfrac{9}{13};\dfrac{5}{13};\dfrac{9}{13}\right)$.

Khi đó M là hình chiếu của E trên (P). Ghi $-\dfrac{2x-2y+z+7}{9}$ nhập tọa độ E STO E, bấm 2E + x : -2E + y : E + z = = = kết quả tọa độ $M\left(-\dfrac{25}{13};\dfrac{21}{13};\dfrac{1}{13}\right)$.

Từ đó min($MB+MD$) $=\dfrac{9\sqrt{22}+4\sqrt{22}}{13}=\sqrt{22}$. **Chọn A.**

Cách 2. Bất đẳng thức.



Theo bất đẳng thức Mincopxki, ta có :

$$MB+MD=\sqrt{BK^2+KM^2}+\sqrt{DI^2+MI^2}\ge\sqrt{(BK+DI)^2+(KM+MI)^2}$$

Suy ra $\min T=\sqrt{(d_B+d_D)^2+KI^2}$

$$\min T=\sqrt{(d_B+d_D)^2+BD^2-(d_B-d_D)^2}=\sqrt{BD^2+4d_B.d_D}=\sqrt{6+4.3.\frac{4}{3}}=\sqrt{22}.$$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A(1;2;-1), B(7;-2;3) và đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x+3y-4=0$ và $(Q): y+z-4=0$. Điểm $I\in(d)$ sao cho tam giác ABI có chu vi nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất đó bằng:

A. $9+2\sqrt{17}$. **B.** $2(\sqrt{30}+\sqrt{17})$. **C.** $2(\sqrt{30}+\sqrt{13})$. **D.** $7\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $I\in(d)$ cần tìm, suy ra tọa độ $I(2+3t;-2t;4+2t)$ và tính tổng:

$$AI+BI=\sqrt{(1+3t)^2+(2t+2)^2+(2t+5)^2}+\sqrt{(3t-5)^2+(2-2t)^2+(1+2t)^2}.$$

Dùng CASIO, thì $\min(AI+BI)=2\sqrt{30}$, chu vi nhỏ nhất là $2(\sqrt{30}+\sqrt{17})$. **Chọn B.**

Câu 70. **[THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa]** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Gọi $M(a;b;c)\in\Delta$ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$?

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=4$. **D.** $T=5$.

Hướng dẫn giải

Do AB không đổi nên chu vi MAB nhỏ nhất khi $MB+MC$ nhỏ nhất.

Ghi $x^2+y^2+z^2-\frac{(2x-y+2z)^2}{9}$ CALC (nhập bộ khi thay A vào tử của Δ) $2=4=0==$ kết quả 20, CALC (nhập bộ khi thay B vào tử của Δ) $4=2=6==$ kết quả 20. Đến đây gọi $I(2;4;3)$ là trung điểm AB. Bấm ◂ quay về sửa thành $\frac{(2x-y+2z)}{9}$ CALC nhập $3=3=3==$ STO M bấm AC ghi $-1+2M+1-M+2M=$ kết quả bằng 3. **Chọn B.**

Câu 71. **[Nguyễn Khuyến Tp.HCM]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=2-t\end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất thì độ dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Hướng dẫn giải.

Vì AB không đổi nên ta cần tìm vị trí của C sao cho giá trị của tổng $CA+CB$ nhỏ nhất.

Ta có $T=AC+BC=\sqrt{2(t-2)^2+9}+\sqrt{t^2+(t-2)^2+2}=\sqrt{2t^2-8t+17}+\sqrt{2t^2-4t+6}\ge 3\sqrt{3}$.

Dấu bằng có khi $t=\frac{7}{5}$. Do đó $CM=\sqrt{\left(t-\frac{6}{5}\right)^2+2+t^2}=2$. **Chọn C.**

Nhận xét.

Kinh nghiệm khi áp dụng bất đẳng thức Mincopxki là gì? Ta có thể phân tích trong hai căn như sau: $\left(a-\sqrt{2}t\right)^2$ và $\left(\sqrt{2}t-b\right)^2$ suy ra vế phải là $(a-b)^2$, triệt tiêu tham số *t*. Các số *a, b* ta tìm dễ dàng (Xem thêm Câu 68 và Câu 74).

Cách 2. Tâm tỉ cự.

Ghi $x^2+y^2+z^2-\frac{(x+0y-z)^2}{2}$ CALC nhập $2=3=-2=$ có $d_a{}^2=9$. CALC nhập $0=-\sqrt{2}=-2=$ có $d_b{}^2=4$. Gọi I là điểm sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, tọa độ $I(\frac{4}{5};\frac{6-2\sqrt{2}}{5};0)$.

Sửa thành $\frac{(x+0y-z)}{2}$ CALC nhập $\frac{4}{5}=\frac{6-2\sqrt{2}}{5}=-2=$ ta được $t=\frac{7}{5}$.

Vậy M là hình chiếu của I trên d, tọa độ $M(\frac{7}{5};0;\frac{3}{5})$ nên $CM=2$.

Nhận xét.

Khi tổng $CA+CB$ nhỏ nhất thì ta cũng có $\frac{AC}{BC}=\frac{d_a}{d_b}=\frac{3}{2}$, khi đó ta chỉ việc giải phương trình: $2\sqrt{2(t-2)^2+9}=3\sqrt{t^2+(t-2)^2+2}$ bằng SHIFT SOLVE được $t=1.4=\frac{7}{5}$.

Tuy nhiên chúng ta phải biết được tỉ số khoảng cách và còn phải biết biểu thức thì mới giải nhanh được nghiệm. Nói cách khác: Đây xem như một cách giải và là sự kết hợp của cách 2 và cách 1.

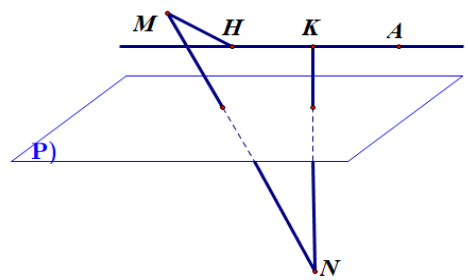
Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;1;0)$, song song với mặt phẳng $(P): x-y-z=0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0;2;0), N(4;0;0)$ tới đường thẳng d có giá trị nhỏ nhất. Vecto chỉ phương $\vec{u}$ của d có tọa độ là

A. $(1;0;1)$. **B.** $(2;1;1)$. **C.** $(3;2;1)$. **D.** $(0;1;-1)$.

Hướng dẫn giải.

Gọi mp (Q) qua A và song song với (P), có phương trình $x-y-z-1=0$.

MH, NK là các khoảng cách từ M, N đến d. Ta có $MH+NK \ge d(M,(Q))+d(N,(Q))$.



Hạ $ME \perp (Q)$ suy ra đường thẳng d cần tìm đi qua A và E.

Tọa độ của E trên (Q) là $E(1;1;-1) \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{EA}=(1;0;1)$.

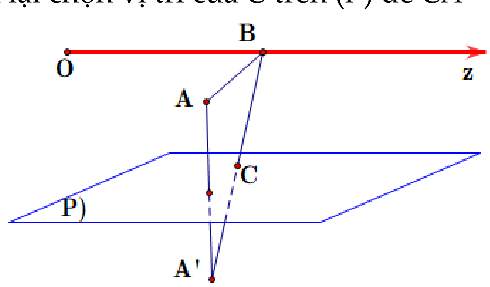
Câu 73. **[THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-6;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+7=0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P). Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là.

A. $B(0;0;1)$. **B.** $B(0;0;-2)$. **C.** $B(0;0;-1)$. **D.** $B(0;0;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Nhận xét mặt phẳng (P) song song với trục Oz. Ta có AB ngắn nhất nếu B là hình chiếu của A trên Oz, còn lại chọn vị trí của C trên (P) để $CA + CB$ nhỏ nhất.



Lấy A' đối xứng với A qua (P) thì $CA+CB=CA'+CB\geq A'B$, ngoài ra $A'B$ vuông góc với Oz nên chu vi CAB nhỏ nhất khi C, A' và B thẳng hàng. Vậy tọa độ $B(0;0;1)$.

Câu 74. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm điểm $A(-4;4;0)$, $B(2;0;4)$, $C(1;2;-1)$ và $D(7;-2;3)$. Giả sử M là điểm di động trên đường thẳng AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MC+MD$.

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $7\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{30}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Khảo sát - BĐT

Ta có phương trình (AB): $x=2+3t, y=-2t, z=4+2t$. Lấy điểm M thuộc AB và tính

$$CM+DM=\sqrt{(1+3t)^2+(2t+2)^2+(2t+5)^2}+\sqrt{(5-3t)^2+(2-2t)^2+(-1-2t)^2}.$$

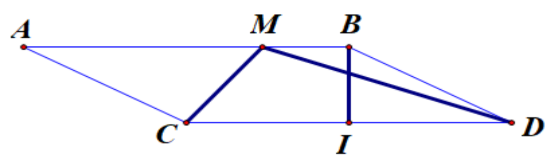
$$CM+DM=\sqrt{17t^2+34t+30}+\sqrt{17t^2-34t+30}.$$

$$CM+DM=\sqrt{(\sqrt{17}t+\sqrt{17})^2+\sqrt{13}^2}+\sqrt{(\sqrt{17}-\sqrt{17}t)^2+\sqrt{13}^2}\geq\sqrt{\left(2\sqrt{17}\right)^2+\left(2\sqrt{13}\right)^2}=2\sqrt{30}.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\dfrac{\sqrt{17}+\sqrt{17}t}{\sqrt{17}-\sqrt{17}t}=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=1\Leftrightarrow t=0$. **Chọn D.**

Cách 2. Xét vị trí tương đối.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(6;-4;4)=\overrightarrow{CD}\Rightarrow ABDC$ là hình bình hành. Gọi $I(4;0;1)$ là trung điểm CD, vị trí M cần tìm là hình chiếu vuông góc của I trên AB.



Ghi $\dfrac{3(x-2)-2y+2(z-4)}{9+4+4}$ CALC nhập tọa độ I ta có $t=0$ do đó điểm $M(2;0;4)\equiv B$.

Tính được $\min(CM+DM)=2BD=2\sqrt{30}$. **Chọn D.**

Câu 75. [THPT Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình] Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;-1;2), B(3;-4;-2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+4t\\y=-6t\\z=-1-8t\end{cases}$. Điểm $I(a,b,c)$ thuộc d thỏa mãn $IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{23}{58}$ **B.** $-\dfrac{43}{58}$ **C.** $\dfrac{65}{29}$ **D.** $-\dfrac{21}{58}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Tâm tỉ cự.

Ghi $x^2+y^2+z^2-\dfrac{(4x-6y-8z)^2}{116}$ CALC nhập $-1=-1=3==$ có $d_a{}^2=\dfrac{198}{29}$. CALC nhập $1=-4=-1==$ có $d_b{}^2=\dfrac{198}{29}$. Gọi K là trung điểm AB, tọa độ $K(2;\dfrac{-5}{2};0)$.

Sửa thành $\dfrac{(4x-6y-8z)}{116}$ CALC nhập $0=-5/2=1==$ STO M (ở đây $t=\dfrac{7}{116}$).

I là hình chiếu của K trên d, ghi $2+4M+(-6M)+(-1-8M)$ bấm = có $T=\frac{23}{58}$. **Chọn A.**

Cách 2. Vị trí tương đối.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)//\overrightarrow{u_d}$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của AB cắt d tại I, phương trình là: $2x-3y-4z=\frac{23}{2}$. Ghi $2(2+4x)-3(-6x)-4(-1-8x)=\frac{23}{2}$

SHIFT SOLVE và sửa thành $(2+4x)+(-6x)+(-1-8x)$ bấm = ta có $\frac{23}{58}$. **Chọn A.**

Câu 76. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;10)$, $B(4;6;5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của AM.

A. $\sqrt{10}$. **B.** 10. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

Tính khoảng cách từ A, B đến (Oxy) thì $d_A=2d_B$. Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Tọa độ $I\left(3;5;\frac{20}{3}\right)$, điểm M là hình chiếu của I trên (Oxy) nên có tọa độ $M(3;5;0)$. Từ đó $AM=6\sqrt{3}$. **Chọn C.** (Xem thêm Ví dụ 51)

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-3)^2=8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$. Gọi (C) là tập hợp các điểm $M\in(S)$ để $|MA-2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $r=2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{IA}=(4;4;0)$.

Ta có $AM^2=\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IA}\right)^2=IM^2+IA^2-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA}=40-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA}$.

Đặt $\overrightarrow{IA}=4\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow\overrightarrow{IC}=\frac{1}{4}(4;4;0)=(1;1;0)\Leftrightarrow C(1;1;3)$. Khi đó điểm C nằm trong mặt cầu và $AM^2=40-8\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}=4\left(8+2-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}\right)=4CM^2\Leftrightarrow MA=2MC$.

Suy ra $|MA-2MB|=2|MC-MB|\geq 0$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow MC=MB$ hay M thuộc mặt phẳng trung trực của BC, có phương trình (P): $2z=4\Leftrightarrow(P):z-2=0$.

Vậy M thuộc $(C)=(P)\cap(S)$. Ta có $d(I,(P))=h=1$, nên $R=\sqrt{r^2-h^2}=\sqrt{7}$.

Câu 78. **[Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai]** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-4;-1;3)$, $B(-1;-2;-1)$, $C(3;2;-3)$ và $D(0;-3;-5)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D và ba điểm A, B, C nằm về cùng phía so với (α). Biết tổng khoảng cách từ A, B, C đến (α) lớn nhất, trong các điểm sau, điểm nào thuộc mặt phẳng (α)?

A. $E_1(7;-3;-4)$. **B.** $E_2(2;0;-7)$. **C.** $E_3(-1;-1;-6)$. **D.** $E_4(36;1;-1)$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình $(\alpha): a(x+0)+b(y+3)+c(z+5)=0$. Do ba điểm A, B, C nằm về cùng phía so với (α) nên tổng các khoảng cách là:

$$d=d_A+d_B+d_C=\frac{\left|a(x_A+x_B+x_C+0)+b(y_A+y_B+y_C+9)+c(z_A+z_B+z_C+15)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d=\frac{\left|a(-2)+b(8)+c(14)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2\left|a(-1)+b(4)+c(7)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le 2\sqrt{(-1)^2+4^2+7^2}=2\sqrt{66}.$$

Dấu bằng có khi và chỉ khi

$\frac{a}{-1}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}\Rightarrow \vec{n}=(-1;4;7)\Rightarrow(\alpha):-(x+0)+4(y+3)+7(z+5)=0$. **Chọn A.**

Câu 79. [Lê Quý Đôn- Đà Nẵng] Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34$. Biết $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Tính tích số $x_0y_0z_0$.

A. 16. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 12.

Hướng dẫn giải.

Biến đổi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=34\Leftrightarrow 4(-8-x)+3(1-y)-3(1-z)=34$

$\Leftrightarrow M\in(P): 4x+3y-3z+66=0$.

Cách 1. Tổng quát - Tâm tỉ cự.

Ghi $4x+3y-3z+66$ CALC nhập tọa độ A, kết quả 34. CALC nhập tọa độ B, kết quả 68. Ta có tỉ số $t=\frac{d_a}{d_b}=\frac{34}{68}=\frac{1}{2}$. Gọi D thỏa mãn $\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\vec{0}\Leftrightarrow D(-18;1;-1)$. Ta tìm hình chiếu M của D trên (P). Ghi $-\frac{4x+3y-3z+66}{16+9+9}$ bấm CALC nhập tọa độ D, kết quả 0. Vậy điểm M trùng D nên $x_0y_0z_0=18$. **Chọn B.**

Câu 80. [Chuyên Sơn La] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2+2y-2=0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải.

Trừ các vế mặt cầu thì phương trình $(P): x=0$ hay là (Oyz). Gọi $H(0;0;0)$, $K(0;3;4)$ là hình chiếu của A,B trên (P) và M,N thuộc đoạn HK, với $HK=5$.

Đặt $HM=t\Rightarrow KN=5-1-t=4-t$. Khi đó $AM+BN=\sqrt{1^2+t^2}+\sqrt{2^2+(4-t)^2}$.

Áp dụng BĐT Mincopxki, ta có: $AM+BN\ge\sqrt{(1+2)^2+(t+4-t)^2}=5$.

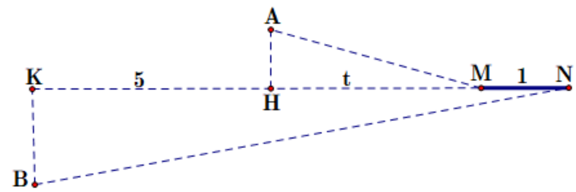
Đẳng thức có khi $\frac{4-t}{t}=\frac{2}{1}\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$. **Chọn A.**

Câu 81. **[Đề TNTHPT 2021 – BGD]** Trong không gian, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-3)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=1$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$ **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{37}$ **D.** $\sqrt{61}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên mp(Oxy). Vị trí các điểm như hình vẽ.



Ta có tỉ số $\dfrac{d_a}{d_b}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow 3HM=2KN$. Đặt $HM=t\Rightarrow KN=6+t\Rightarrow 3t=2t+12\Rightarrow t=12$.

Vậy $\max(BN-AM)=\dfrac{1}{2}AM=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+12^2}=\sqrt{37}$. **Chọn C.**

(Xem thêm Ví dụ 51, Ví dụ 59 và Câu 67, Câu 68)

Câu 82. **[Sở GD Hà Tĩnh]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-8y+9=0$ và hai điểm $A(5;10;0),B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $MA+3MB$ bằng

A. $\dfrac{11\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{22\sqrt{2}}{3}$. **C.** $22\sqrt{2}$. **D.** $11\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

Tâm $I(-1;4;0),R=2\sqrt{2}$, tính $\overrightarrow{IA}=(6;6;0)$.

$MA=\sqrt{\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IA}\right)^2}=\sqrt{IM^2+IA^2-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA}}=\sqrt{80-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA}}$.

Đặt $\overrightarrow{IA}=9\overrightarrow{IC}\Rightarrow\overrightarrow{IC}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};0\right)\Leftrightarrow C\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{14}{3};0\right)$ thì C nằm trong mặt cầu và:

$MA=\sqrt{80-18\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}}=3\sqrt{\dfrac{80}{9}-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}}=3\sqrt{8+\dfrac{8}{9}-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}}=3MC$.

Vậy $P=3(MC+MB)\ge 3BC=11\sqrt{2}$. **Chọn D.**

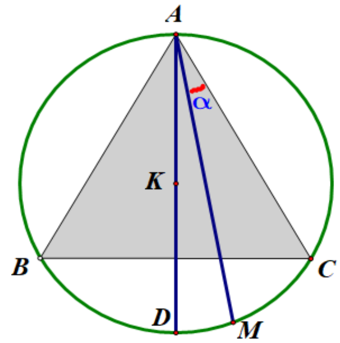
Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;2)$, $C(1;-1;4)$, đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P):x+y+z-4=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x-6z+10=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho $T=MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải.

Kiểm tra được ba điểm *A*, *B*, *C* đều thuộc mặt phẳng (P) và đều thuộc mặt cầu (S) hay chúng đều thuộc đường tròn (C) tâm *K*, bán kính *r*.

Mặt khác ta có $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}$ hay tam giác *ABC* đều, nội tiếp đường tròn (C).



Giả sử điểm *M* thuộc cung *BC*, đặt $\widehat{MAC} = \alpha \Rightarrow \widehat{MAB} = 60^o - \alpha$, ta có:

$MB + MC = 2r\sin\left(60^o - \alpha\right) + 2r\sin\alpha \Rightarrow T \le DA + 2r\sin\left(60^o - \alpha\right) + 2r\sin\alpha$

Hay $T \le 2r\left[1 + \sin\left(60^o - \alpha\right) + \sin\alpha\right] = 2r\left[1 + 2\sin\left(30^o\right)\cos(30^o - \alpha)\right]$

$T \le 2r\left[1 + \cos(30^o - \alpha)\right] \le 4r \Rightarrow \max T = 4r \Leftrightarrow \alpha = 30^o \Leftrightarrow M \equiv D$ là trung điểm cung *BC*.

Tương tự ta có thêm hai trường hợp trên hai cung còn lại. **Chọn A**.

Nhận xét.

Bài toán không quá khó nhưng phải xét vị trí tương đối giữa các đối tượng hình học nên mất nhiều thời gian, do đó các em cần có kỹ năng giải toán nhanh. Khi xét điểm *M* trên cung *BC* thì bằng cảm tính ta có thể chọn được *M* trùng với *D* để tổng *T* lớn nhất, nhưng việc chứng minh không dễ!. Khi câu hỏi ra như vậy thì xét được tam giác đều, ta chọn luôn đáp án là 3. Khi hỏi giá trị của tổng thì maxT = 4r.

Khi bài toán cho tổng của nhiều đoạn thẳng thì hầu như chúng ta phải xét vị trí tương đối giữa các điểm để tìm ra "mối quan hệ đặc biệt". Điều này hết sức quan trọng, và là "điểm mấu chốt" để giải quyết bài toán, nếu không thì làm sao mà giải?.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;1;0)$, $B(2;0;-1)$, $C(0;2;-1)$, $D(0;0;-2)$. Với mỗi điểm M tùy ý, đặt $T = MA + MB + MC + MD$. Gọi $M_0(a;b;c)$ sao cho T đạt giá trị nhỏ nhất. Lúc đó, tổng $a + 5b + c$ bằng

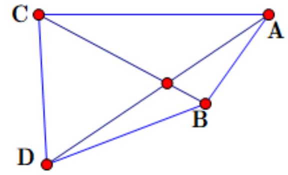
A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** -13.

Hướng dẫn giải.

Chọn C

Vào **MENU 9 1 3** giải hệ ba ẩn, ta có mặt phẳng (ABC): $x + y - 2z = 2$, đi qua điểm D, nên 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng, bốn điểm tạo thành tứ giác. Tính:

$\overrightarrow{BA} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{CA} = (3;-1;1)$, $\overrightarrow{DA} = (3;1;2)$, $\overrightarrow{CB} = (2;-2;0)$, $\overrightarrow{DB} = (2;0;1)$, $\overrightarrow{DC} = (0;2;1)$.



Suy ra AD > AC > BC > BD = DC > AB nên ta có tứ giác ABDC có hai đường chéo AD và BC cắt nhau tại điểm M cần tìm, vì $T=(MA+MD)+(MB+MC)\ge AD+BC$.

Ta có $AD:\begin{cases}x=3t\\ y=t\\ x=-2+2t\end{cases}$ giao với $BC:\begin{cases}x=2+t'\\ y=-t'\\ z=-1\end{cases}$ tại $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};-1\right)$. Vậy $a+5b+c=3$.

Câu 85. **[THPT Chuyên Tuyên Quang]** Cho đường thẳng $d:\frac{x}{6}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ và ba điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6)$. Điểm $M(a;b;c)\in d$ thỏa mãn $MA+2MB+3MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=\frac{148}{49}$. **B.** $S=\frac{49}{148}$. **C.** $S=-\frac{50}{49}$. **D.** $S=-\frac{49}{50}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $M(6t;3t+1;2t)\in d$ và ta cần tính $S=11t+1$ khi $MA+2MB+3MC=T$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$T=\sqrt{(6t-2)^2+(3t+1)^2+4t^2}+2\sqrt{36t^2+(3t-3)^2+4t^2}+3\sqrt{36t^2+(3t+1)^2+(2t-6)^2}$

$T=\sqrt{49t^2-18t+5}+2\sqrt{49t^2-18t+9}+3\sqrt{49t^2-18t+37}$. Dễ thấy các Parabol đồng thời đạt nhỏ nhất tại $t=\frac{9}{49}$ và $T_{\min}=\frac{2\sqrt{41}+12\sqrt{10}+6\sqrt{433}}{7}$. Khi đó $S=\frac{148}{49}$. **Chọn A.**

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;1;0)$, $B(4;4;-3)$, $C(2;3;-2)$ và đường thẳng $(d):\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt phẳng (α). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α). Tìm giá trị lớn nhất của $T=d_1+2d_2+3d_3$.

A. $T_{\max}=2\sqrt{21}$. **B.** $T_{\max}=6\sqrt{14}$. **C.** $T_{\max}=\sqrt{14}+3\sqrt{21}$. **D.** $T_{\max}=\sqrt{203}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi mp$(\alpha):a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0$, trong đó $\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow a=2b+c$ (1).

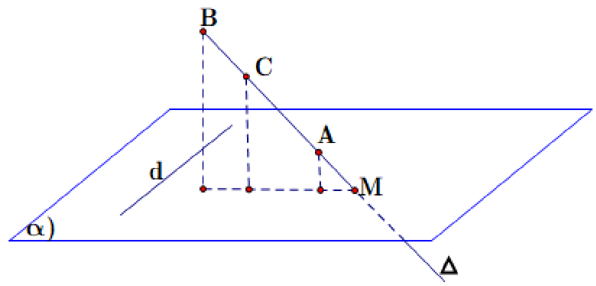
Ta có $d_1+2d_2+3d_3=\frac{|-3a-c|+2|3a+3b-4c|+3|a+2b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, vì A, B, C cùng phía với (α) nên $T=\frac{|6a+12b-18c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (2). Thay (1) vào (2), ta có: $T=\frac{12|2b-c|}{\sqrt{(2b+c)^2+b^2+c^2}}$

$T=12\sqrt{\frac{4b^2-4bc+c^2}{5b^2+4bc+2c^2}}\Rightarrow \max T=12\sqrt{\frac{7}{2}}=6\sqrt{14}\Leftrightarrow\frac{b}{c}=-\frac{2}{3}$. **Chọn B.**

Nhận xét.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(6;3;-3)$ cùng phương $\overrightarrow{AC}=(4;2;-2)$ do đó ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

Giả sử (α) cắt Δ tại M trên tia đối của tia AC, đặt BC = a, AC = 2a, MA = b.



Ta có $\dfrac{d_1}{d_3}=\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{b}{b+2a}$ (1) ; $\dfrac{2d_2}{d_3}=\dfrac{2MB}{MC}=\dfrac{2(b+3a)}{b+2a}$ (2) .

Từ (1) và (2) suy ra $d_1+2d_2=3d_3 \Rightarrow T=6d_3$. Suy ra T lớn nhất khi (α) đi qua A.

Phương trình (α) là: $x+2y-3z=0 \Rightarrow \max T=6d(C,(\alpha))=6\sqrt{14}$. **Chọn B.**

Câu 87. [SGD Thanh Hóa] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P=MA+MB+MC+\sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$. **B.** $OM=\sqrt{26}$. **C.** $OM=\sqrt{14}$. **D.** $OM=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{DA}=(6;0;0)$, $\overrightarrow{DB}=(0;2;0)$, $\overrightarrow{DC}=(0;0;3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh D. Giả sử $M(x+1;y+2;z+3)$. Ta có $MA=\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}\ge|x-6|\ge 6-x$,

$MB=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\ge|y-2|\ge 2-y$; $MC=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\ge|z-3|\ge 3-z$,

$\sqrt{3}MD=\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\ge\sqrt{(x+y+z)^2}\ge x+y+z$.

Do đó $P\ge(6-x)+(2-y)+(3-z)+(x+y+z)=11$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11, khi và chỉ khi $x=y=z=0$. Nên $OM=\sqrt{14}$.

Câu 88. [SGD Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1), (S_2). Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P). Giá trị $M+m$ bằng

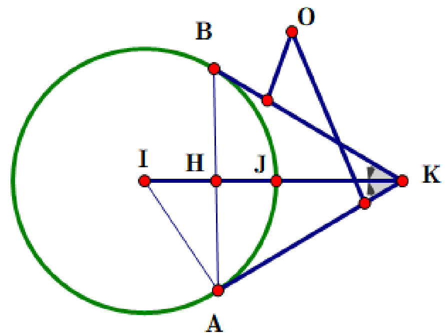
A. $\sqrt{15}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** 9. **D.** 8.

Hướng dẫn giải.

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{IJ}=(0;0;4)\Rightarrow IJ=4=R_1$ suy ra tâm J thuộc mặt cầu (S_1). Giả sử đường thẳng IJ cắt (P) tại K, ta có: $\dfrac{KI}{KJ}=\dfrac{R_1}{R_2}=2\Rightarrow \overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{IJ}=(0;0;8)\Rightarrow K(2;1;9)$.

Phương trình mp(OIJ): $x-2y=0$. Gọi A, B là hai tiếp điểm trong mp(OIJ), khi đó KAB là tam giác đều. Đường thẳng AB qua H thuộc IJ và dễ thấy H là trung điểm IJ, tọa độ $H(2;1;3)$.



Phương trình AB: $\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=3\end{cases}$ cắt (S_1) khi $(2t-2)^2+(t-1)^2+2^2=16\Rightarrow 5(t-1)^2=12$.

mp(P) qua K, vtpt $\overrightarrow{IA}$ là $(P):(2a-2)(x-2)+(a-1)(y-1)+2(z-9)=0$ và tương tự:

Phương trình $(P'):(2b-2)(x-2)+(b-1)(y-1)+2(z-9)=0$. Từ đó:

$$M+m=\frac{3|a+5|}{\sqrt{5(a-1)^2+4}}+\frac{3|b+5|}{\sqrt{5(b-1)^2+4}}=\frac{3|a+5|+3|b+5|}{\sqrt{12+4}}=\frac{3}{4}(|a+5|+|b+5|).$$

Trong đó $a=1+\sqrt{\dfrac{12}{5}}, b=1-\sqrt{\dfrac{12}{5}}$ nên $M+m=\dfrac{3}{4}(6+6)=9.$

Câu 89. [TH & TT SỐ 8] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ và các điểm $A(2;3;-4)$, $B(4;6;-9)$. Gọi C,D là các điểm thay đổi trên Δ sao cho $CD=\sqrt{14}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất. Khi đó tọa độ trung điểm M của CD là

A. $M\left(\dfrac{79}{35};\dfrac{64}{35};\dfrac{102}{35}\right)$.

B. $M\left(\dfrac{181}{5};\dfrac{-104}{5};\dfrac{-42}{5}\right)$.

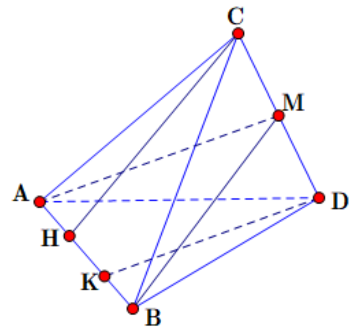
C. $M\left(\dfrac{101}{28};\dfrac{13}{14};\dfrac{69}{28}\right)$.

D. $(2;2;3)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có các diện tích tam giác ACD, BCD không đổi, mặt phẳng (BCD) và điểm A cố định nên thể tích khối tứ diện $ABCD$ không đổi. Gọi I, r là tâm và bán kinh mặt cầu nội tiếp tứ diện thì:

$r=\dfrac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4}$, trong đó $S_1=S_{ACD};S_2=S_{BCD};S_3=S_{CAB};S_4=S_{DAB}$.



Gọi CH, DK là các đường cao của các tam giác CAB, DAB. Ta có r lớn nhất khi $S_3 + S_4$ nhỏ nhất hay tổng $CH + DK = h_1 + h_2$ nhỏ nhất.

Phương trình $(AB): \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$. Gọi $M(3t-1; -2t+4; -t+4)$ là trung điểm của CD. Dễ thấy $CD = \left|\overrightarrow{u_\Delta}\right| = \sqrt{14}$.

Ta có $\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2}\vec{u} \Rightarrow C\left(3t - \frac{5}{2}; -2t+5; -t+\frac{9}{2}\right), D\left(3t+\frac{1}{2}; -2t+3; -t+\frac{7}{2}\right)$ nên:

$$h_1^2 = \left(3t - \frac{9}{2}\right)^2 + (-2t+2)^2 + \left(-t + \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{\left(5t - \frac{91}{2}\right)^2}{38} = \frac{507}{38}t^2 - \frac{1521}{38}t + \frac{6387}{152}$$

$$h_2^2 = \left(3t - \frac{3}{2}\right)^2 + (-2t)^2 + \left(-t + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{\left(5t - \frac{81}{2}\right)^2}{38} = \frac{507}{38}t^2 - \frac{507}{38}t + \frac{2331}{152}$$

Suy ra $h_1 + h_2 = \sqrt{\frac{507}{38}t^2 - \frac{1521}{38}t + \frac{6387}{152}} + \sqrt{\frac{507}{38}t^2 - \frac{507}{38}t + \frac{2331}{152}} \geq 2\sqrt{\frac{2331}{152}} = \frac{3\sqrt{9842}}{38}$.

Vậy $CH + DK = h_1 + h_2$ nhỏ nhất tại $t = 1 \Rightarrow M(2;2;3)$. **Chọn D**.

Lời bình.

Bài toán trên nếu biện luận theo vị trí tương đối bằng dựng hình hình học không gian thì sẽ gặp khó khăn lớn và dài dòng nên thi trắc nghiệm không hợp lý. Tuy nhiên nếu ta tham số hóa được tổng $CH + DK = h_1 + h_2 = f(t)$ thì vào **MENU 8** ta sẽ khảo sát được $f(t)$, kể cả như vậy thì cũng rất dài và tốn thời gian, các số lớn và không đẹp.

IV. BÀI TOÁN TỔNG HỢP CUỐI PHẦN 2.

1. Đề bài.

Câu 90. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Câu 91. **[Đoàn Thượng – Hải Dương]** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ bằng

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 92. **[HSG Nam Định]** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P=a-2b+4c$.

A. $P=23$. **B.** $P=31$. **C.** $P=11$. **D.** $P=13$.

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Câu 94. **[SGD Thanh hóa]** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;5)$, $B(-1;3;2)$, $C(-2;1;3)$ và $D(5;7;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $T=4MA^2+5MB^2-6MC^2+MD^4$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$ bằng

A. 12. **B.** 11. **C.** -11. **D.** 9.

Câu 95. **[Chuyên Quang Trung- Bình Phước]** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ và $\Delta':\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi trong không gian, gọi a,b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ'. Biểu thức a^2+2b^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_0(x_0,y_0,z_0)$. Khi đó giá trị x_0+y_0 bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 96. **[Nho Quan A - Ninh Bình]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;-1), B(-1;-3;1)$. Giả sử C,D là hai điểm di động trên mặt phẳng $(P):2x+y-2z-1=0$ sao cho $CD=4$ và A,C,D thẳng hàng. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của tam giác BCD. Khi đó tổng S_1+S_2 có giá trị bằng

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{37}{3}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Câu 97. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{5}{6}$, mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$ và điểm $A(1;1;1)$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Giá trị lớn nhất của AM là:

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\sqrt{\frac{35}{6}}$

Câu 98. **[Yên Phong-Bắc Ninh]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 99. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+z^2=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$ bằng:

A. 12. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** 24. **D.** $24\sqrt{2}$.

Câu 100. **[ĐH - Quốc Tế]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(-3;2;1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến (d) và từ B đến (d) là lớn nhất. Khi đó phương trình đường thẳng (d) là

A. $\frac{x-1}{-5}=y-2=\frac{z}{4}$. **B.** $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-3}{-2}$. **D.** $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$.

Câu 101. **[SP Đồng Nai]** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(5;7;3)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $M(3;4;3)$. **D.** $M(7;13;5)$.

Câu 102. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $(MA+2MB)$ bằng

A. $2\sqrt{82}$. **B.** $3\sqrt{79}$. **C.** $5\sqrt{79}$. **D.** $3\sqrt{82}$.

Câu 103. **[Hậu Lộc 2-Thanh Hóa]** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ với $(S_2):x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. Hai điểm M, N thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $\sqrt{34}-1$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 3.

Câu 104. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(5;3;-2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt (S) hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng: $2x+my+nz-p=0$. Khi đó, $T=m+n+p$ bằng:

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;-2;-7)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Câu 107. **[Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$, $(Q):-x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. 5. **B.** 29. **C.** 13. **D.** 3.

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P):2y-z=0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 109. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2),B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$. Xét các điểm M,N di động trên (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2+3BN^2$ bằng

A. 49,8. **B.** 45. **C.** 53. **D.** 55,8.

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ và $MN=4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$.

A. $\sqrt{41}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{17}$.

Câu 111. **[SGD Thanh Hóa]** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $d:\begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\dfrac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\dfrac{2}{3}$.

2. Hướng dẫn giải bài tập cuối phần 2.

Câu 90. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Hướng dẫn.

Chọn C

Tính $\overrightarrow{IA}=(1;-5;1),\overrightarrow{IB}=(-4;0;-4)\Rightarrow 2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=(-10;-10;-10)=\overrightarrow{IK}$.

Khi đó $T=2MA^2+3MB^2=5MI^2+2IA^2+3IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}=165+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}$.

Để T nhỏ nhất thì $\overrightarrow{MI},\overrightarrow{IK}$ ngược hướng, suy ra:

$\min T=165-2.R.IK=165-2.\sqrt{3}.10\sqrt{3}=105$.

Câu 91. **[Đoàn Thượng – Hải Dương]** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ bằng

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Hướng dẫn.

Gọi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+3\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow I\left(\dfrac{-1}{6};\dfrac{1}{12};\dfrac{7}{12}\right)$.

Khi đó $S=6MI^2+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}$.

Để S nhỏ nhất thì MI nhỏ nhất, suy ra $M\left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{12};0\right)$. Vậy $T=-1$. **Chọn D.**

Câu 92. **[HSG Nam Định]** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P=a-2b+4c$.

A. $P=23$. **B.** $P=31$. **C.** $P=11$. **D.** $P=13$.

Hướng dẫn.

Gọi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)-5\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow I\left(1;\dfrac{5}{2};\dfrac{17}{4}\right)$.

Khi đó $S=-2MI^2+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}-5\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}$.

Để S lớn nhất thì MI nhỏ nhất, suy ra $M\left(1;\dfrac{5}{2};\dfrac{17}{4}\right)\equiv I$. Vậy $P=13$. **Chọn D.**

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Hướng dẫn.

Chọn C

Tính $\overrightarrow{IA}=(0;0;1), \overrightarrow{IB}=(1;1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=(2;2;-1)=\overrightarrow{IK}$.

Khi đó $T=MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}=\frac{31}{4}+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}$.

Để T nhỏ nhất thì $\overrightarrow{MI},\overrightarrow{IK}$ ngược hướng, suy ra:

$\min T=\frac{31}{4}-2.R.IK=\frac{31}{4}-2.\frac{1}{2}.3=\frac{19}{4}$.

Câu 94. **[SGD Thanh hóa]** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;5)$, $B(-1;3;2)$, $C(-2;1;3)$ và $D(5;7;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $T=4MA^2+5MB^2-6MC^2+MD^4$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$ bằng

A. 12. **B.** 11. **C.** -11. **D.** 9.

Hướng dẫn.

Chọn A.

Gọi $4\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow I(5;7;4)\equiv D$.

Khi đó $T=3MD^2+4DA^2+5DB^2-6DC^2+MD^4$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của D trên mp(Oxy). Tọa độ $M(5;7;0)$ nên $a+b+c=12$.

Câu 95. **[Chuyên Quang Trung- Bình Phước]** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ và $\Delta'=\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi trong không gian, gọi a,b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ'. Biểu thức a^2+2b^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_0(x_0,y_0,z_0)$. Khi đó giá trị x_0+y_0 bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn.

Ta có Δ và Δ' chéo nhau, gọi $A(a;a;a+1)\in\Delta, B(b+1;2b;b)\in\Delta'$ sao cho AB là đoạn vuông góc chung. Tính $\overrightarrow{AB}=(b+1-a;2b-a;b-1-a)$ cùng phương $\vec{u}=(1;0;-1)$, suy ra: $a=2b=0$ và $A(0;0;1),B(1;0;0)$. Lấy M thuộc đoạn AB thì $a=MA,b=MB$.

Khi đó $MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}\right)$. Chọn $M\equiv I$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow I\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)$. Vậy $x_0+y_0=\frac{2}{3}$. **Chọn C.**

Câu 96. [Nho Quan A - Ninh Bình] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;-1), B(-1;-3;1)$. Giả sử C,D là hai điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-1=0$ sao cho $CD=4$ và A,C,D thẳng hàng. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của tam giác BCD. Khi đó tổng S_1+S_2 có giá trị bằng

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{37}{3}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Hướng dẫn.

Chọn A

Do $CD=4$ không đổi nên ta tìm $h=d(B,CD)$ lớn nhất và nhỏ nhất.

Ta có $\max h = BA = 3$ và $\min h = d(B,(P)) = \frac{8}{3}$.

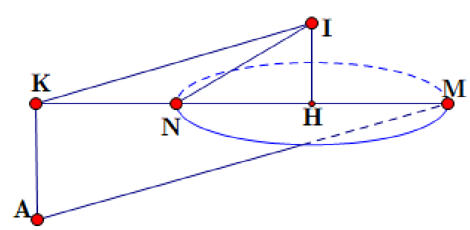
Khi đó $S_1+S_2 = \frac{1}{2}.CD.(BA+BH) = \frac{34}{3}$.

Câu 97. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{5}{6}$, mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và điểm $A(1;1;1)$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Giá trị lớn nhất của AM là:

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\sqrt{\frac{35}{6}}$

Hướng dẫn.

Chọn D



Mặt cầu có tâm $I(1;-1;0), R^2=\frac{5}{6}$. Hạ IH, AK vuông góc với (P). Tọa độ $K\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Suy ra $KI^2=\frac{7}{3} > IM^2 = IN^2 = \frac{5}{6}$ nên điểm K nằm ngoài đoạn MN.

Bán kính đường tròn giao tuyến là: $r = MH = \sqrt{R^2-IH^2} = \sqrt{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $KH = \sqrt{KI^2-IH^2} = \sqrt{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}} = \sqrt{2}$. Từ đó suy ra AM lớn nhất là:

$$\max AM^2 = AK^2 + (KH+r)^2 = \frac{4}{3} + \left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{35}{6} \Leftrightarrow \max AM = \sqrt{\frac{35}{6}}.$$

Câu 98. **[Yên Phong-Bắc Ninh]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn.

Vào **MENU 9 1 2** viết phương trình $(ABC): x-y+z=1$.

Mặt phẳng trung trực của AB là $2x+2y+0z=6$.

Mặt phẳng trung trực của CA là $2x-2y-4z=-10$. Giải hệ ba ẩn ta có tâm đường tròn (ABC) là $H(1;2;2)$. Trục đường tròn là $\Delta:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=2+t \end{cases}$.

Mọi $M\in\Delta$ đều thỏa mãn giả thiết đã cho. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu $I(3;2;3)$ đến Δ, ta có $IK=d(I,\Delta)=\sqrt{2}>R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $\min MN=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 99. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+z^2=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$ bằng:

A. 12. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** 24. **D.** $24\sqrt{2}$.

Hướng dẫn.

Gọi $G(0;0;0)$ là trọng tâm tam giác ABC, $H(0;2;0)$ là trung điểm của DE. Khi đó:

$P=6(MG+MH)$, mà GH là đường kính của mặt cầu tâm $I(0;1;0)$.

Ta có $MG+MH\le\sqrt{(1^2+1^2)(MG^2+MH^2)}=\sqrt{2GH^2}=2\sqrt{2}$. Vậy $\max P=12\sqrt{2}$.

Câu 100. **[ĐH - Quốc Tế]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(-3;2;1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến (d) và từ B đến (d) là lớn nhất. Khi đó phương trình đường thẳng (d) là

A. $\frac{x-1}{-5}=y-2=\frac{z}{4}$. **B.** $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-3}{-2}$. **D.** $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$.

Hướng dẫn.

Ta có $d(A,d)\le AM; d(B,d)\le BM\Rightarrow max\left(d(A,d)+d(B,d)\right)=AM+BM$. Khi đó (d) đi qua M và vuông góc với $(ABM): x+13y-2z=21$. **Chọn C.**

Câu 101. [SP Đồng Nai] Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(5;7;3)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $M(3;4;3)$. **D.** $M(7;13;5)$.

Hướng dẫn.

Ta có $D(1;1;1)$ thuộc mặt phẳng $(ABC): 2x+3y+z=6$.

Ta có $max(d(A,\Delta)+d(B,\Delta)+d(C,\Delta)) = AD+BD+CD$. Khi đó $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$ đi qua điểm $M(5;7;3)$. **Chọn A.**

Câu 102. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $(MA+2MB)$ bằng

A. $2\sqrt{82}$. **B.** $3\sqrt{79}$. **C.** $5\sqrt{79}$. **D.** $3\sqrt{82}$.

Hướng dẫn.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(0;2;-6)$, gọi $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}=\left(0;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow C\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Điểm C bên trong (S).

Ta có $AM^2 = IA^2+IM^2-2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM} = 40+10-8\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IM} = 4\left(10+\frac{5}{2}-2\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IM}\right) = 4MC^2$

Suy ra $MA=2MC$ và $S=MA+2MB=2(MB+MC)\geq 2BC=3\sqrt{82}$. **Chọn D.**

Câu 103. [Hậu Lộc 2-Thanh Hóa] Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $\mathrm{A}(0;0;2)$ và $\mathrm{B}(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ với $(S_2): \mathrm{x}^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. Hai điểm M, N thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $\sqrt{34}-1$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 3.

Hướng dẫn.

Trừ các vế hai mặt cầu, ta có phương trình $(P): z=0$, tức là mặt phẳng (Oxy).

Hạ AH, BK vuông góc với (P), tọa độ $H(0;0;0), K(3;4;0)$ và $HK=5$.

Chọn M,N thuộc đoạn HK, đặt $NK=t \Rightarrow HM=4-t$.

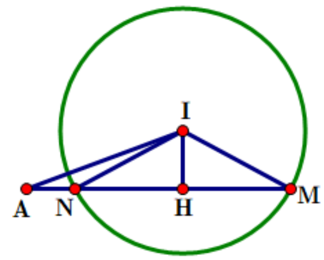
Khi đó $AM+BN=\sqrt{2^2+(4-t)^2}+\sqrt{1^2+t^2}\geq\sqrt{(2+1)^2+(4-t+t)^2}=5$. **Chọn B.**

Câu 104. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(5;3;-2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt (S) hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

Hướng dẫn.

Mặt cầu tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$. Ta có $IA^2=34$.



Gọi H là trung điểm MN và chọn vị trí M, N như hình vẽ. Khi đó:

$S=4AN+AM=4(AH-HN)+AH+HM=5AH-3HN$

$S=5\sqrt{34-IH^2}-3\sqrt{9-IH^2}=5\sqrt{34-t^2}-3\sqrt{9-t^2}$.

Khảo sát hàm số trên $[0;3)$ thì $S_{\min}=5\sqrt{34}-9\approx 20.155$ tại $t=0$. **Chọn D.**

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng: $2x+my+nz-p=0$. Khi đó, $T=m+n+p$ bằng:

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Hướng dẫn.

(α) qua $D(4;2;1)$ nên ta có: $p=8+2m+n$. Nên $(\alpha):2(x-4)+m(y-2)+n(z-1)=0$.

Tổng các khoảng cách là $d=\dfrac{|2(6-12)+m(3-6)+n(6-3)|}{\sqrt{4+m^2+n^2}}$ (Vì tử số cùng dấu).

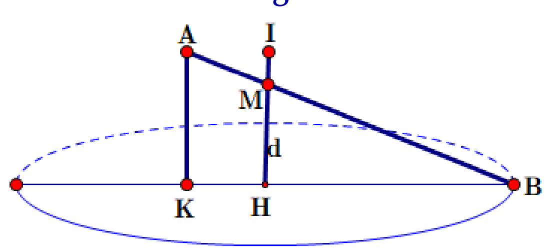
Hay $d=\dfrac{3|2.2+1.m+(-1).n|}{\sqrt{4+m^2+n^2}}\le\dfrac{3\sqrt{(2^2+1^2+(-1)^2)(4+m^2+n^2)}}{\sqrt{4+m^2+n^2}}=3\sqrt{6}$.

Đẳng có khi $\dfrac{2}{2}=\dfrac{m}{1}=\dfrac{n}{-1}\Leftrightarrow m=1,n=-1\Rightarrow p=9$. Vậy $T=m+n+p=9$. **Chọn A.**

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;-2;-7)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Hướng dẫn.



Mặt cầu có tâm $I(-3;-4;-5)$, bán kính $R=27$. Ta lại có d đi qua I và vuông góc với (P) tại tâm H của đường tròn giao tuyến.

Hạ $AK \perp (P)$, có $AK = 5\sqrt{29}$, $IH = 5\sqrt{29}$, $AI = HK = 3 = d(A,d), HB = \sqrt{R^2 - IH^2} = 2$.

Khi đó $\min(MA + MB) = AB = \sqrt{AK^2 + KB^2} = \sqrt{725 + 25} = 5\sqrt{30}$. **Chọn A.**

Câu 107. **[Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$, $(Q): -x + y + z - 1 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. 5. **B.** 29. **C.** 13. **D.** 3.

Hướng dẫn.

Giao tuyến của (P) và (Q) là $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$. Tính các khoảng cách từ A, B đến Δ, ta có $t = \frac{d_a}{d_b} = 1$. Gọi $I(1;1;1)$ là trung điểm AB, điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên Δ. Mà $I \in \Delta$ nên $M(1;1;1) \equiv I$. Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 3$. **Chọn D.**

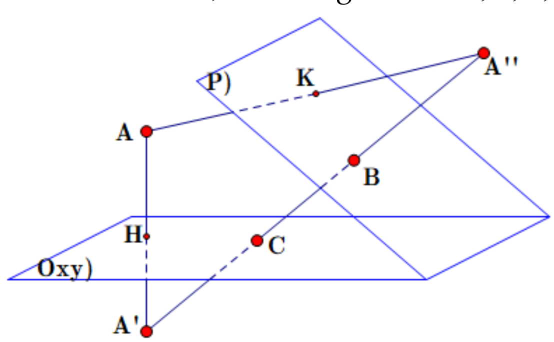
Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 2y - z = 0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn.

Gọi $A'(1;4;-3)$ đối xứng với $A(1;4;3)$ qua mp(Oxy). K là hình chiếu vuông góc của A trên (P), tọa độ $K(1;2;4)$. Lấy $A''(1;0;5)$ đối xứng với A qua (P). Khi đó:

$AC + CB + BA = A'C + CB + BA'' \geq A'A''$, dấu bằng có khi A', C, B, A'' thẳng hàng.



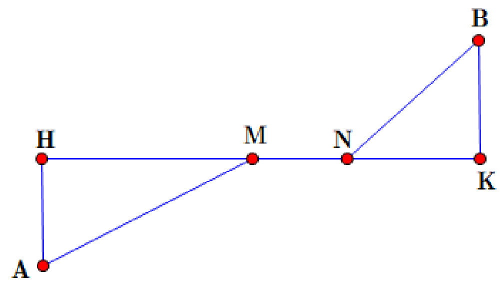
Ta có $A'A'' = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$. **Chọn C.**

Câu 109. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2), B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$ bằng

A. $49,8$. **B.** 45. **C.** 53. **D.** $55,8$.

Hướng dẫn.

Hạ AH, BK vuông góc với (P), chọn M, N thuộc đoạn HK.



Tính được $AH = BK = 3; HK = \sqrt{BA^2 - (AH + BK)^2} = 3$. Đặt $NK = t \Rightarrow HM = 2 - t$.

Ta có $T = 2AM^2 + 3BN^2 = 2\left[9 + (2-t)^2\right] + 3\left(9 + t^2\right) = 5t^2 - 8t + 53$.

Suy ra $\min T = \dfrac{249}{5} = 49,8$. **Chọn A.**

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0;1;1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

A. $\sqrt{41}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{17}$.

Hướng dẫn.

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{MN} = t(0;1;1), t > 0; MN = 4\sqrt{2} \Rightarrow t = 4 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;4;4)$; $\overrightarrow{BA} = (3;-2;2)$.

Đặt $-\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BA} = (-3;-2;-6) = \overrightarrow{AC}$, khi đó $\overrightarrow{AM}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NM}\right)^2$

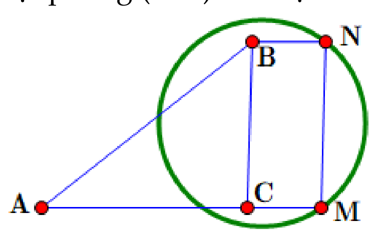
$AM^2 = \left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = BN^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AC} = BN^2 + 49 + 2\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\max AM^2$ khi $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Khi đó $\max AM^2 = BN^2 + 49 + 2.BN.7 = (BN + 7)^2 \Leftrightarrow \max AM = BN + 7$.

Cách 2.

Ta có $\overrightarrow{MN} = t(0;1;1), t > 0; MN = 4\sqrt{2} \Rightarrow t = 4 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;4;4)$. Điểm A ngoài mặt cầu, điểm B trong mặt cầu. Mặt phẳng (ABI) cắt mặt cầu là đường tròn lớn.



Dựng hình bình hành MNBC, khi đó $|AM - BN| = |AM - CM| \le AC$, dấu bằng có khi A, C, M thẳng hàng.

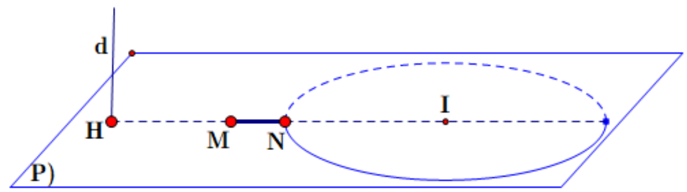
Ta có $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{MN} = (0;-4;-4)$, suy ra $C(1;0;-2) \Rightarrow \overrightarrow{CA} = (3;2;6) \Rightarrow CA = 7$.

Câu 111. [SGD Thanh Hóa] Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=2-t\\z=1\end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn.

Gọi D sao cho $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}=\vec{0}\Leftrightarrow D(0;-1;9)$; gọi C sao cho $\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow C(2;3;5)$. Khi đó điểm N thuộc đường tròn giao tuyến của (P) và mặt cầu đường kính CD. Tâm mặt cầu $I(1;1;7)\in(P)$, bán kính $R=3$.



Gọi $H(1;1;1)=(P)\cap d$, khi đó $HI=6=d(I,d)$. Mà $d(M,d)=2$ nên chọn $M\in HI$ và $HM=\frac{1}{3}HI=2\Rightarrow IM=4>R$. Vậy $\min MN=4-3=1$. **Chọn A.**

V. PHỤ LỤC.

✎ Phương pháp chung để giải bài toán quỹ tích và min - max là: Các yếu tố di động – di chuyển – thay đổi phải được "ràng buộc – gắn liền" với các yếu tố cố định – không đổi; Từ đó tìm ra mối quan hệ cần thiết để giải, phương châm là "Lấy bất biến ứng vạn biến".

Nói vui một tí: Trước kia thì "Tề Thiên Đại Thánh" bay nhảy tự do – tùy ý, bây giờ "Tôn Ngộ Không theo sư phụ" thì bị tròng một cái vòng kim cô nên chỉ còn "Tự do trong khuôn khổ".

✈ Phương pháp đặc biệt hóa

Trong thi trắc nghiệm, chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp đặc biệt hóa, nghĩa là: Bài toán đúng trong trường hợp tổng quát thì cũng đúng trong các trường hợp riêng. Khi đó chúng ta rút gọn một số biến đổi và lập luận trung gian sẽ dẫn đến kết quả nhanh hơn.

- Cho tham số vài giá trị riêng để xem xét

- Đặc biệt hóa từ biểu thức; vai trò ngang nhau của các điểm; tính đối xứng của các biến.

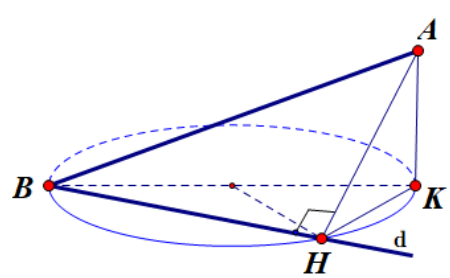
Ví dụ 60. **[Đề_2017_BGD]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$ và $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=1$. **B.** $R=\sqrt{6}$. **C.** $R=\sqrt{3}$. **D.** $R=2$.

Hướng dẫn.

Chọn B

Đề bài cho các yếu tố cố định là hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Đường thẳng d thay đổi trong (P) và quay quanh điểm B, nói cách khác điểm H thay đổi và thuộc mặt cầu đường kính AB, đồng thời nằm trong (P), nên thuộc đường tròn giao tuyến cố định. Suy ra $R=\frac{1}{2}BK$, với K là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

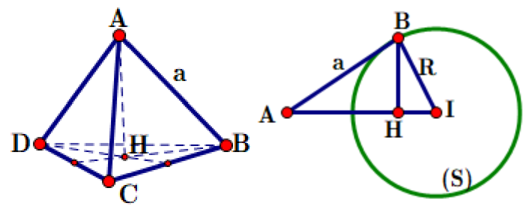


Ghi $\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2+z^2-\frac{(x+y+z)^2}{3}}$ CALC nhập tọa độ A, kết quả $R=\sqrt{6}$.

Ví dụ 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-4}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{14}{3}$. Gọi $A(x_0;y_0;z_0)$, $(x_0>0)$ là điểm thuộc d, từ A kẻ ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có các tiếp điểm B,C,D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều. Giá trị của biểu thức $P=x_0+y_0+z_0$ là

A. 6. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 8.

Hướng dẫn.



Đặt cạnh tứ diện đều là a, ta có $AB^2=AI.AH=AI.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, với H là tâm tam giác BCD.

Suy ra $AI=\dfrac{3a}{\sqrt{6}}\Rightarrow AI^2=\dfrac{3a^2}{2}=a^2+R^2\Rightarrow a^2=2R^2$. Do đó $IA^2=3R^2=14$.

Ta có tâm $I(1;2;3)$, điểm $M_0(4;4;4)\in d$ có $IM_0{}^2=14\Rightarrow A\equiv M_0$. Vậy $x_0+y_0+z_0=12$.

Ví dụ 62. **[Đề_2018_BGD]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 72. **B.** 216. **C.** 108. **D.** 36.

Hướng dẫn.

Ta có bán kính mặt cầu $R=IA=3\sqrt{3}$. Nếu dựng hình hộp chữ nhật có ba cạnh AB, AC và AD thì điểm I cũng là tâm hình hộp. Khi đó thể tích khối lập phương là lớn nhất, cạnh $a=\dfrac{d}{\sqrt{3}}=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}=6$. Suy ra $\max V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}.6^3=36$.

Nhận xét.

Các em có thể đặt $AB=a$, $AC=b$ và $AD=c$ thì $a^2+b^2+c^2=4R^2$, sau đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM dẫn đến điểm rơi $a=b=c$. Cuối cùng cho kết quả như trên.

Ví dụ 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết rằng có một đường thẳng Δ cố định nằm trong mặt phẳng $(P):(m^2+1)x-(2m^2-2m+1)y+(4m+2)z-m^2+2m=0$ khi m thay đổi. Đường thẳng d đi qua $M(1;-1;1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;b;c)$, d vuông góc với Δ và cách O một khoảng lớn nhất. Giá trị của $T=b+c$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Hướng dẫn.

Chọn C

Bài cho điểm M và Δ cố định, tuy nhiên ta còn phải tìm Δ.

Cho $m=1$, ta có mp$(P_1):2x-y+6z+1=0$; cho $m=0$, ta có mp$(P_2):x-y+2z=0$.

Suy ra $\Delta=(P_1)\cap(P_2)$, có phương trình $\Delta:\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$.

Ta có $d(O,d)\le OM$ nên theo yêu cầu ta phải có $d\perp OM$ $\Rightarrow \vec{u}=\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(-1;5;6)$.

Vậy $T=b+c=11$.

Ví dụ 64. [MH2_2017_BGD] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0$; $n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R=1$. **B.** $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\frac{3}{2}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn.

Chọn A

Mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn: $nx+my+mnz-mn=0$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu, bán kính R, ta có $R=ID=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}$ (1).

Nhận xét: $\sqrt{m^2+n^2+(mn)^2}=\sqrt{(m+n)^2-2mn+(mn)^2}=1-mn$. Tính $R=d(I,(ABC))$, ta có: $R=\frac{|n(a-1+1)+m(b-1+1)+mnc-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+(mn)^2}}=\frac{|n(a-1)+m(b-1)+mnc+1-mn|}{1-mn}$ (2).

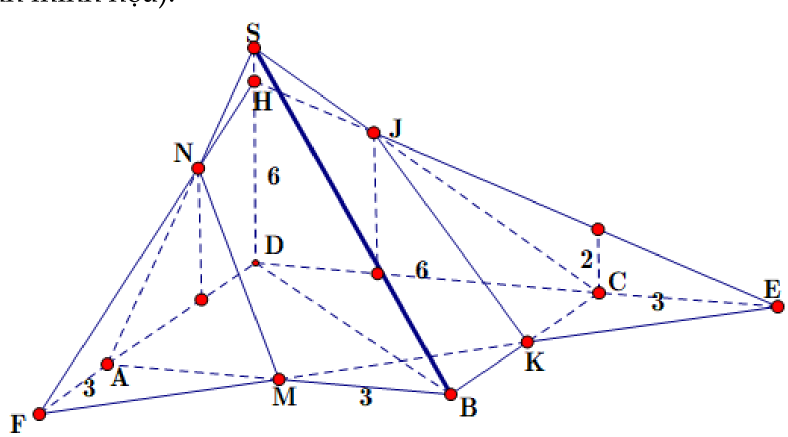
Từ (1) và (2) nếu chọn $a=b=1,c=0$ thì $R=ID=d(I,(ABC))=1$. Vậy $I(1;1;0),R=1$.

Ví dụ 65. [SGD Thanh Hóa] Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích $84a^3$ và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm AB, điểm J thuộc SC sao cho $JC=2JS$, điểm H thuộc SD sao cho $HD=6HS$. Mặt phẳng (MJH) chia khối chóp thành hai phần, tính thể tích phần chứa đỉnh S của khối chóp

A. $18a^3$. **B.** $24a^3$. **C.** $21a^3$. **D.** $17a^3$.

Hướng dẫn.

Chọn D (Hình minh họa).



Để giải nhanh ta chọn chiều cao $SD=7$, đáy là hình vuông cạnh $AB=6$. Khi đó:

$V_{H.DEF}=81$ và $2V_{J.CKE}=2.\frac{1}{3}.\frac{2.7}{3}.\frac{9}{2}=14$. Thể tích cần tìm $V=84-(81-14)=17$.

PHÂN TÍCH – MỞ RỘNG BÀI TOÁN $\min\left(MA+MB\right)$ hoặc $\max\left|MA-MB\right|$

CÂU HỎI: **[THPT Chu Văn An – Hà Nội]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(0;-1;2\right), B\left(1;1;2\right)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M\left(a;b;c\right)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $P=a+2b+3c$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Phân tích

Bài toán quy về khảo sát khoảng cách $d\left(M,\left(AB\right)\right)$ nhỏ nhất, chúng ta đã nghiên cứu cách giải tổng quát cho bài này (Sử dụng Casio sẽ nhanh hơn). Ở đây ta muốn **nghiên cứu câu hỏi**: Tổng $T=MA+MB$ nhỏ nhất. **Mở rộng hơn là** $T=MA+2MB$ nhỏ nhất.

A. Bài toán tổng $T=MA+MB$ nhỏ nhất.

Tham số hóa điểm M, ta quy về xét hàm số $f\left(t\right)=AM+BM=\sqrt{u}+\sqrt{v}$. Khi giải bằng các số cụ thể, ta sẽ không phát hiện được "cái gốc" của hàm $f\left(t\right)$ là gì. Tuy nhiên không khó lắm, ta có thể đưa ra biểu thức như sau:
$f\left(t\right)=\sqrt{\vec{u}^2t^2-2\left(\overrightarrow{M_0A}.\vec{u}\right)t+M_0A^2}+\sqrt{\vec{u}^2t^2-2\left(\overrightarrow{M_0B}.\vec{u}\right)t+M_0B^2}$. Đương nhiên ta cũng không cần nêu ra đối với mọi cho học sinh, làm phức tạp thêm vấn đề, vả lại bài toán cũng không thường xuyên gặp (Tùy đối tượng học sinh).

➢ **Dùng Casio khảo sát**:

Máy tính cho giá trị gần đúng về giá trị của $f\left(t\right)$, nhưng không cho giá trị đúng của t, nên không biết tọa độ đúng của M. Trong trường này, ta vẫn tính gần đúng được $P=a+2b+3c=6t+2$.

➢ **Dùng BĐT Mincopxki**:

Ta phải biến đổi trong hai căn thành dạng
$f\left(t\right)=\sqrt{\left(at-b\right)^2+c^2}+\sqrt{\left(b'-at\right)^2+c'^2}$. Việc làm này không khó, và ta quan tâm điểm rơi: $\frac{at-b}{b'-at}=\pm\sqrt{\left|\frac{c}{c'}\right|}$ (1). Khi đó lấy dấu (+) hay dấu (-) ?. Như thế ta phải thử trực tiếp $t=\alpha\cup t=\beta$ (Giải ra từ (1)) vào hàm số, sau đó chọn t. Vậy phương pháp này là tự luận, hỗ trợ Casio tìm t, cũng tương đối mất nhiều thời gian.

➢ **Dùng đạo hàm**:

Tính $f'\left(t\right)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}+\frac{v'}{2\sqrt{v}}$, tìm nghiệm của đạo hàm bằng Casio thì nhanh, hàm số có một điểm cực tiểu duy nhất. Chẳng hạn máy cho $t\approx-0.538461538461$ thì khi đó ta cũng không biết được $t=-\frac{7}{13}$ là số hữu tỉ. Hiển nhiên ta cũng tính được gần đúng $P=a+2b+3c=6t+2$.

Nếu giải phương trình vô tỉ $\frac{u'}{\sqrt{u}} = -\frac{v'}{\sqrt{v}}$ bằng tự luận thì cũng mất nhiều thời gian, cũng có một số học sinh không giải được. Sau đây là kết quả ta có thể tham khảo: ta có $u'.v' < 0$ và nghiệm t của đạo hàm thỏa mãn $\frac{u'}{v'} = -\sqrt{\frac{\Delta_u}{\Delta_v}}$ (Δ_u, Δ_v là các biệt thức). Như thế dùng đạo hàm cũng không dễ dàng.

✓ Áp dụng bài toán trên thử xem sao: $f(t) = \sqrt{3t^2 - 2t + 3} + \sqrt{3t^2 - 8t + 6}$. Nghiệm của đạo hàm $\frac{6t-2}{6t-8} = -\sqrt{\frac{2^2 - 4\times3\times3}{8^2 - 4\times3\times6}} = -2$, suy ra $t = 1$. Tọa độ $M(0;1;2)$ thì tổng $T = f(t) = MA + MB$ nhỏ nhất và bằng 3.

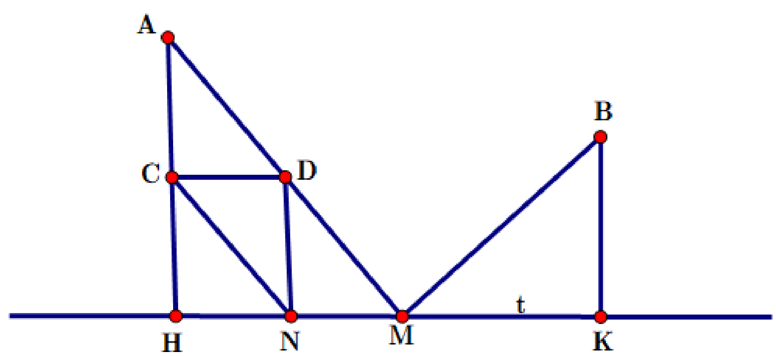
✓ Trường hợp tìm giá trị lớn nhất $|f(t)| = |MA - MB|$ thì giải phương trình $\frac{6t-2}{6t-8} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$. Tọa độ $M\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$, khi đó $\max|MA - MB| = \frac{\sqrt{33}}{3}$.

Như vậy: Thi trắc nghiệm thì dùng kết quả, qua ba bước là OK luôn!. Ta có thể bồi dưỡng thêm cho HS khá – giỏi.

B. Bài toán mở rộng $T = MA + 2MB$ nhỏ nhất.

Chú ý là ta có thể đổi hệ số, chẳng hạn $T = MB + \frac{1}{2}MA$. **Khi đó ta đi xét bài toán** **min** $T = \frac{1}{2}(2MB + MA)$.

➢ **Trở về bài toán** $T = MA + MB$ **nhỏ nhất,** ta giải tổng quát theo "định luật phản xạ ánh sáng đối với gương phẳng" thì: hai tam giác AHM và BKM đồng dạng, tia tới AM thì tia phản xạ là MB.



Bây giờ ta gọi C, N lần lượt là trung điểm của HA, HM thì ta cũng có hai tam giác đồng dạng CHN và BKM. Đặt $MK = t$ thì $HN = \frac{HK - t}{2}$, như thế ta hoàn toàn tìm được t. Bài toán hoàn toàn được giải quyết. Điểm M cần tìm trong bài toán $\min T = MA + 2MB$ **không thay đổi so với bài min** $T = MA + MB$.

➢ **Xét phương pháp đạo hàm**:

Hàm số bây giờ là $f(t) = AM + 2BM = \sqrt{u} + 2\sqrt{v} = \sqrt{u} + \sqrt{4v}$, như thế ta quy về $f(t) = \sqrt{u} + \sqrt{v^*}$, ở đây v^* là v mới và $v^* = 4v$.

✓ Áp dụng bài toán trên thử xem sao: $f(t)=\sqrt{3t^2-2t+3}+\sqrt{12t^2-32t+24}$.

Nghiệm của đạo hàm $\frac{6t-2}{24t-32}=-\sqrt{\frac{2^2-4\times3\times3}{32^2-4\times12\times24}}=-\frac{1}{2}$, suy ra $t=1$. Tọa độ $M(0;1;2)$ thì tổng $T=f(t)=MA+2MB$ nhỏ nhất và bằng 4.

Nhận xét: Điểm $M(0;1;2)$ không đổi, giá trị $T=MA+2MB$ là khác. Tương tự, điểm $M\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$ không đổi trong bài toán $\max|MA-2MB|$.

Lời bình.

Bài toán $\min(MA+MB)$ hoặc $\max|MA-MB|$ với $M\in(\alpha)$ hoặc như $\min(MA+2MB)$ hay $\max|MA-2MB|$ thì chúng ta giải quyết theo hình chiếu vuông góc H,K nhanh hơn (Hỗ trợ Casio), nhưng nếu tham số hóa thì phải viết phương trình đường thẳng giao tuyến, khi đó sẽ dài và mất thời gian.

....

CHÚC MỌI NGƯỜI THÀNH CÔNG!