HÌNH HỌC 12.

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1. GẮN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ VÀO CÁC HÌNH ĐA DIỆN CÓ SẴN MÔ HÌNH TAM DIỆN VUÔNG

Phương pháp

Bước 1: Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ thích hợp. Trong đó gốc tọa độ là giao điểm chung của ba đường đôi một vuông góc với nhau, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt nằm trên ba đường đó.

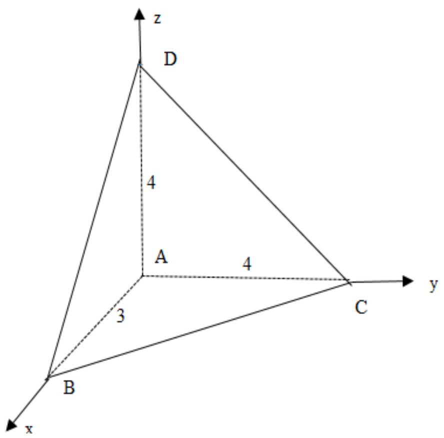
Bước 2: Xác định các toạ độ điểm toạ độ của các véc tơ có liên quan.

Bước 3: Sử dụng các kiến thức về toạ độ để giải quyết các bài toán có liên quan.

Loại 1. Hình chóp có đáy là tam giác

VÍ DỤ 1

Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4(cm); AB = 3(cm); BC = 5(cm)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).



Tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, BC = 5$ nên tam giác ABC vuông tại A. Do đó tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

Chọn hệ trục như hình vẽ. Khi đó: $A(0;0;0), B(3;0;0), C(0;4;0), D(0;0;4)$

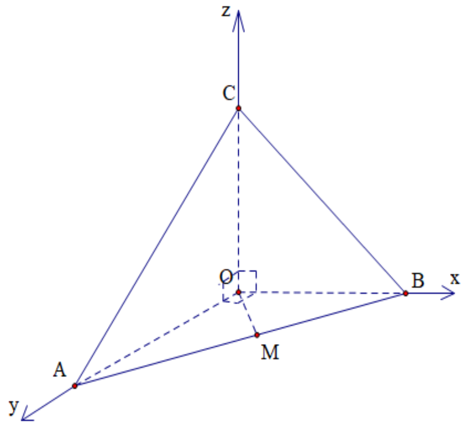
Phương trình mặt phẳng $(BCD): \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$.

Vậy $d(A,(BCD)) = \dfrac{|4.0 + 3.0 + 3.0 - 12|}{\sqrt{16+9+9}} = \dfrac{12}{\sqrt{34}}$.

VÍ DỤ 2

Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$

Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$.



Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có $O(0;0;0), A(0;a;0), \mathrm{B}(\mathrm{a};0;0), \mathrm{C}(0;0;a), M(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0)$

Ta có : $\overrightarrow{BC}=(-\mathrm{a};0;\mathrm{a});\overrightarrow{OM}=(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0)$

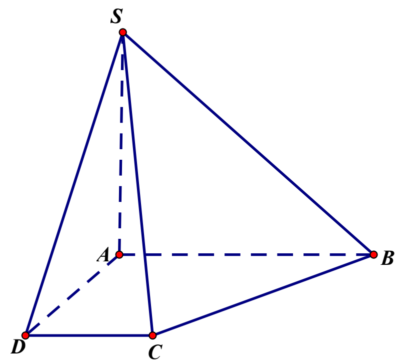
$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM})=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{BC}|.|\overrightarrow{OM}|}=\frac{\frac{-a^2}{2}}{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM})=120^0.$$

Loại 2. Hình chóp có đáy là hình thang .

Ví DỤ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB=2a, CD=DA=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải :



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A\equiv O(0;0;0), D(a;0;0), B(0;2a;0), S(0;0;2a)$, thì $C(a;a;0)$

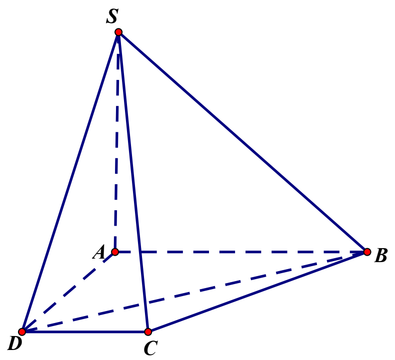
Ta có $\overrightarrow{SB}=(0;2a;-2a), \overrightarrow{SC}=(a;a;-2a), \overrightarrow{SD}=(a;0;-2a)$, $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=(-2a^2;-2a^2;-2a^2)$,

$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=(-2a^2;0;-a^2)$. Suy ra mặt phẳng (SBC) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(1;1;1)$, mặt phẳng (SCD) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(2;0;1)$.

Ta có $\cos\left(\left(SBC\right),\left(SCD\right)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\dfrac{|3|}{\sqrt{3}.\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$.

Ví DỤ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB=2a, CD=DA=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD, SC.



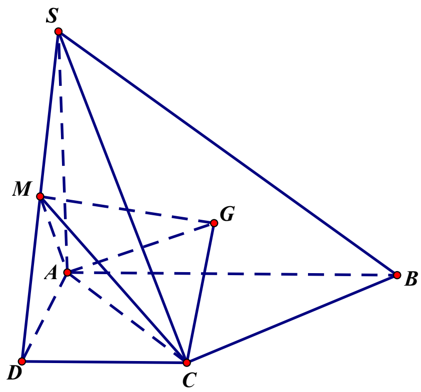
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A\equiv O\left(0;0;0\right), D\left(a;0;0\right), B\left(0;2a;0\right), S\left(0;0;2a\right)$, thì $C\left(a;a;0\right)$

Ta có $\overrightarrow{BD}=\left(a;-2a;0\right),\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-2a\right),\overrightarrow{SB}=\left(0;2a;-2a\right),\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right]=\left(4a^2;2a^2;3a^2\right)$,

$\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right]\overrightarrow{SB}=-2a^3$, $\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right]\right|=\sqrt{29}a^2$. Suy ra $d\left(BD,SC\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right]\overrightarrow{SB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\dfrac{2a^3}{\sqrt{29}a^2}=\dfrac{2a}{\sqrt{29}}$

Ví DỤ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB=2a, CD=DA=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi M là trung điểm SD, G là trọng tâm tam giác ΔSBC. Tính thể tích khối tứ diện $ACMG$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A\equiv O\left(0;0;0\right), D\left(a;0;0\right), B\left(0;2a;0\right), S\left(0;0;2a\right)$, thì $C\left(a;a;0\right)$

$M\left(\dfrac{a}{2};0;a\right), G\left(\dfrac{a}{3};a;\dfrac{2a}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{a}{2};0;a\right),\overrightarrow{AC}=(a;a;0),\overrightarrow{AG}=\left(\dfrac{a}{3};a;\dfrac{2a}{3}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AG}=a^3$

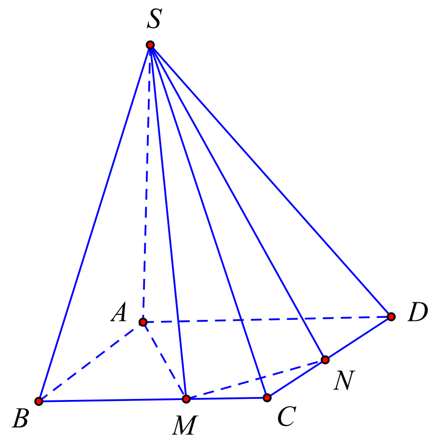
$\Rightarrow V(ACMG)=\dfrac{1}{6}\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AG}=\dfrac{a^3}{6}$.

Loại 3. Hình chóp có đáy là hình vuông, hình chữ nhật.

Ví DỤ 6

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M, N hai điểm nằm trên hai cạnh BC, CD. Đặt $BM=x$, $DN=y$ $(0<x,\ y<a)$. Xác định hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau?

Lời giải



Tọa độ hóa với $O\equiv A$, $Ox\equiv AD$, $Oy\equiv AB$, $Oz\equiv AS$.

Đặt $SA=z>0$, ta có $S(0;0;z)$, $M(x;a;0)$, $N(a;y;0)$.

Do đó $\begin{cases}\overrightarrow{AS}=(0;0;z)\\ \overrightarrow{AM}=(x;a;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right]=(-az;xz;0)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{SM}=(x;a;-z)\\ \overrightarrow{SN}=(a;y;-z)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right]=\left(yz-az;xz-az;xy-a^2\right)$.

Mặt phẳng (SAM) nhận $\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right]=(-az;xz;0)$ là một VTPT.

Mặt phẳng (SMN) nhận $\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right]=\left(yz-az;xz-az;xy-a^2\right)$ là một VTPT.

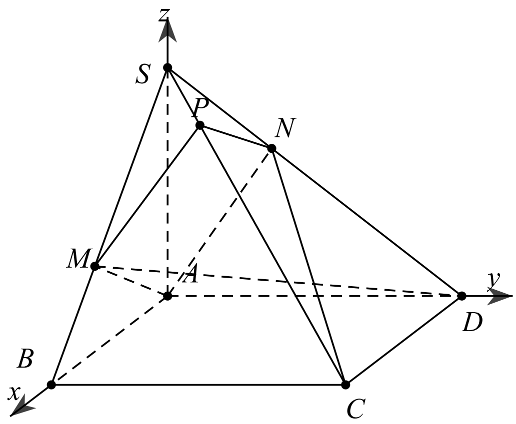
Ta có $(SAM)\perp(SMN)\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right].\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right]=0$

$\Leftrightarrow az(az-yz)+xz(xz-az)=0\Leftrightarrow a(a-y)+x(x-a)=0\Leftrightarrow x^2+a^2=a(x+y)$.

Ví DỤ 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB=a,AD=2a,SA=3a$. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu của A lên SB,SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;2a;0), S(0;0;3a)$.

Suy ra $\overrightarrow{SB} = (a;0;-3a), \overrightarrow{SD} = (0;2a;-3a), \overrightarrow{SC} = (a;2a;-3a)$.

Phương trình $SB: \begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -3t \end{cases}$.

$\Rightarrow M(a+t;0;-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a+t;0;-3t)$.

Mà $AM \perp SB \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow (a+t) + 9t = 0 \Rightarrow t = \frac{-a}{10} \Rightarrow M\left(\frac{9a}{10};0;\frac{3a}{10}\right)$.

Tương tự vậy ta tìm được $N\left(0;\frac{18a}{13};\frac{12a}{13}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = -\frac{27a^2}{65}(1;2;-3)$.

Do đó ta có phương trình của $(AMN): x + 2y - 3z = 0$.

Phương trình $SC: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \end{cases}$ nên tọa độ điểm P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ y = 2t \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9a}{14}, y = \frac{9a}{7}, z = \frac{15a}{14} \Rightarrow P\left(\frac{9a}{14};\frac{9a}{7};\frac{15a}{14}\right).$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right] = -\frac{27a^2}{70}(1;2;-3)$, $\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}\right] = \frac{27a^2}{91}(1;2;-3)$

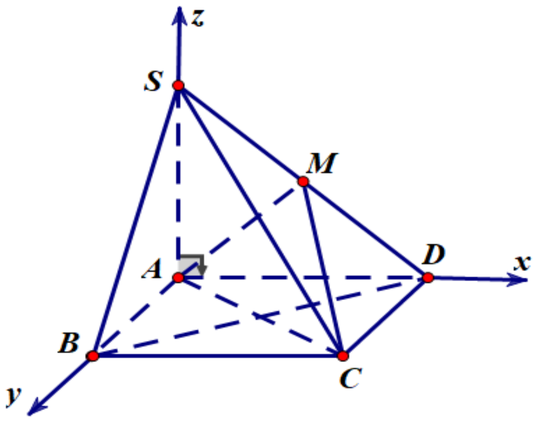
Suy ra $S_{AMPN} = \frac{1}{2}\left[\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right]\right| + \left|\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}\right]\right|\right] = \frac{621\sqrt{14}.a^2}{1820}$ và $d(S,(AMN)) = \frac{9a}{\sqrt{14}}$.

Vậy $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}.\frac{9a}{\sqrt{14}}.\frac{621\sqrt{14}.a^2}{1820} = \frac{1863.a^3}{1820}$.

VÍ DỤ 8

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ và chuẩn hóa cho $a=1$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;2)$

Ta có M là trung điểm $SD \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $C(1;1;0)$.

$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\overrightarrow{AC} = (1;1;0)$, $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right] = \left(-1;1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow (AMC)$ có một vtpt $\vec{n} = (-2;2;1)$

$\overrightarrow{SB} = (0;1;-2)$, $\overrightarrow{SC} = (1;1;-2)$, $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = (0;2;1) \Rightarrow (SBC)$ có một vtpt $\vec{k} = (0;2;1)$

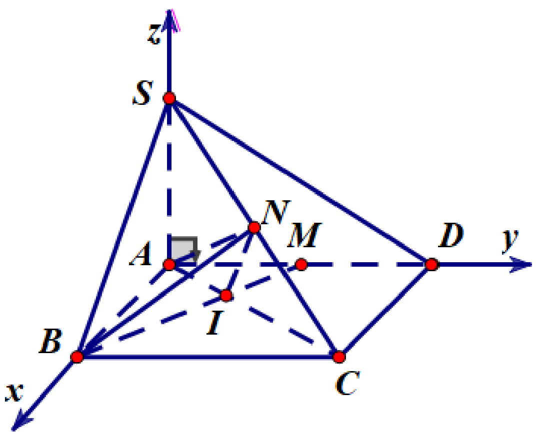
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) thì $\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Do $\tan\alpha > 0$ nên $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ví DỤ 9

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối tứ diện $ANIB$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, tia Ox chứa B, tia Oy chứa D và tia Oz chứa S. Khi đó:

$A(0;0;0), B(a;0;0), C\left(a;a\sqrt{2};0\right), D\left(0;a\sqrt{2};0\right), S(0;0;a), M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), N\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AB}=(a;0;0), \because \overrightarrow{AN}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Ta có $\Delta\ IAM$ đồng dạng với $\Delta\ ICB$ (góc-góc)

Suy ra: $\frac{IC}{IA}=\frac{BC}{AM}=2 \Rightarrow \overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IA}$. Từ đây tìm được $I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)$.

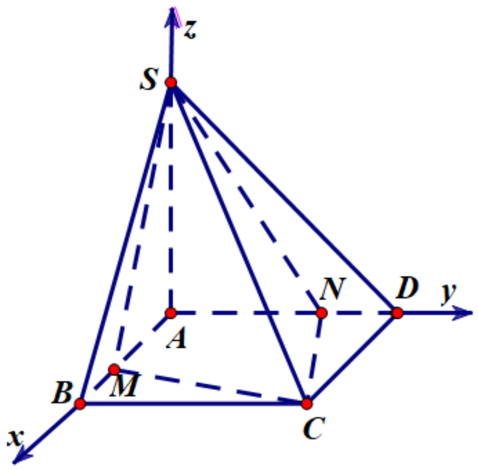
$\overrightarrow{AI}=\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)$, $\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{6};\frac{a^2}{6};0\right)$.

Thể tích khối tứ diện $ANIB$ là $V_{ANIB}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{6}=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Ví DỤ 10

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA=2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$.

Suy ra $C(2;2;0)$. Đặt $AM=x$, $AN=y$, $x,y\in[0;2]$, suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$\overrightarrow{SM}=(x;0;-2)$, $\overrightarrow{SC}=(2;2;-2)$, $\overrightarrow{SN}=(0;y;-2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]=(4;2x-4;2x)$, $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SC}\right]=(4-2y;-4;-2y)$.

Do $(SMC)\perp(SNC)$ nên $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 4(4-4y)-4(2x-4)-4xy=0 \Leftrightarrow xy+2(x+y)=8$

.

$\Leftrightarrow y=\dfrac{8-2x}{x+2}$, do $y\le 2$ nên $\dfrac{8-2x}{x+2}\le 2\Leftrightarrow x\ge 1$.

$S_{AMCN}=S_{ABCD}-S_{BMC}-S_{DNC}=4-(2-x)-(2-y)=x+y$.

Do đó $V_{S.AMCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\dfrac{2}{3}(x+y)=\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{8-2x}{x+2}\right)=\dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+8}{x+2}$.

Xét $f(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+8}{x+2}$ với $x\in[1;2]$, $f'(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x-8=0\Leftrightarrow x=-2+2\sqrt{3}$; $x=-2-2\sqrt{3}$ (loại).

Lập BBT ta suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=f(2)=2$.

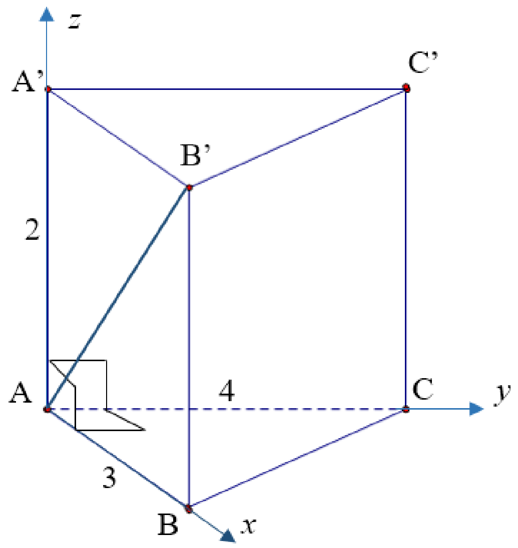
Vậy $\max V_{S.AMCN}=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow T=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AN^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}$.

Loại 4. Lăng trụ đứng tam giác

Ví DỤ 11

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại A có $AB=3$, $AC=4$ và $AA'=2$. Tính cosin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Bài giải



Chọn hệ trục toa độ như hình vẽ.
Khi đó ta có:
$A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $B'(3;0;2)$.

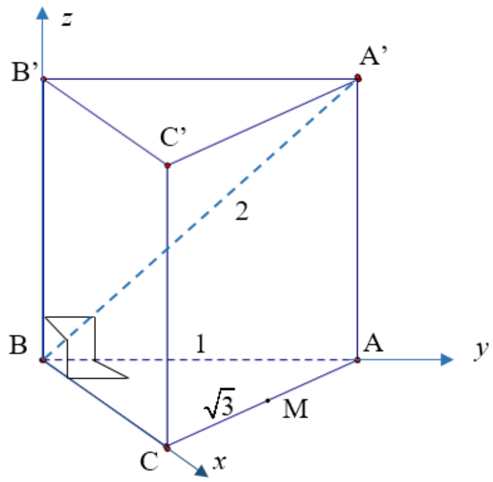
Ta có: $\overrightarrow{AB'}=(3;0;2),\overrightarrow{BC}=(-3;4;0)$.

Khi đó : $\cos\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{3.(-3)+0.4+2.0}{\sqrt{3^2+0^2+2^2}.\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}}=-\dfrac{9\sqrt{13}}{65}$.

Ví DỤ 12

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB=1$, $AC=\sqrt{3}$ và $A'B=2$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính khoảng cách từ M đến $(A'BC)$.

Bài giải



Chọn hệ trục toa độ như hình vẽ.

Ta có: $AA'=\sqrt{A'B^2-AB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2-1}=\sqrt{2}$.

Khi đó ta có:

$B(0;0;0)$, $A(0;1;0)$, $C\left(\sqrt{2};0;0\right)$, $A'\left(0;1;\sqrt{3}\right)$, $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{BA'}=\left(0;1;\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BC}=\left(\sqrt{2};0;0\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BA'}\wedge\overrightarrow{BC}=\left(0;\sqrt{6};-\sqrt{2}\right)$.

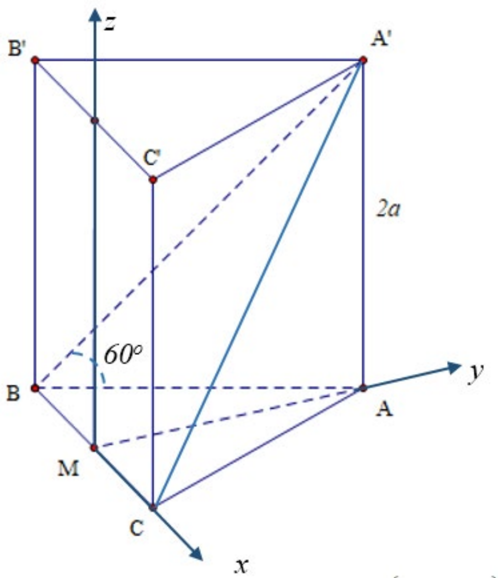
Khi đó phương trình $(A'BC)$ là $\sqrt{3}y-z=0$.

Suy ra $d\left(M,(A'BC)\right)=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ví DỤ 13

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy là 60^{O} . Gọi M là trung điểm BC .Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM .

Bài giải



Ta có: $AB=AC=BC=\dfrac{2a}{\tan 60^{o}}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow MC=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$AM=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó: $M(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $C\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}};0;0\right)$, $A'(0;a;2a)$.

Ta có : $\overrightarrow{A'C}=\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}};-a;-2a\right)\Rightarrow A'C=\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

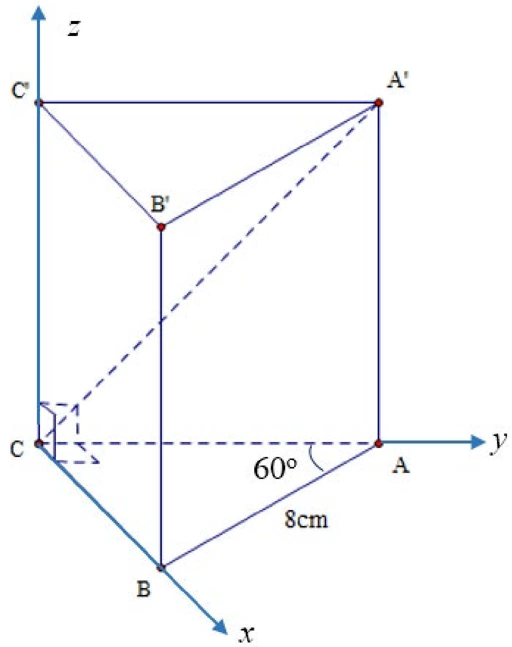
$\overrightarrow{AM}=(0;-a;0)\Rightarrow AM=a$.

Khi đó có $\cos(A'C,AM)=\dfrac{\left|\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{A'C}\right|\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ví DỤ 14

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ với đáy ABC là tam giác vuông tại C có $AB = 8cm$, $\widehat{BAC} = 60^0$, diện tích tam giác $A'CC'$ là $10\,\text{cm}^2$. Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(C'AB)$ và (ABC).

Bài giải



Ta có : $\sin 60^o = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB\sin 60^o = 4\sqrt{3}$.

$A'C' = AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4$.

$S_{\Delta A'CC'} = \dfrac{1}{2}CC'.A'C' \Leftrightarrow CC' = \dfrac{2S_{\Delta A'CC'}}{A'C'} = 5$.

Chọn hệ trục toa độ như hình vẽ.

Khi đó ta có : $C(0;0;0)$, $A(0;4;0)$, $B\left(4\sqrt{3};0;0\right)$, $C'(0;0;5)$.

Ta có : $(ABC) \equiv (Oxy) \Longrightarrow$ Phương trình (ABC) là $z = 0$.

Lại có $\overrightarrow{C'A} = (0;4;-5)$, $\overrightarrow{C'B} = \left(4\sqrt{3};0;-5\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{C'A} \wedge \overrightarrow{C'B} = \left(-20;-20\sqrt{3};-16\sqrt{3}\right) = -4\left(5;5\sqrt{3};4\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $(C'AB)$ có VTPT là $\vec{n} = \left(5;5\sqrt{3};4\sqrt{3}\right)$ và (ABC) có VTPT là $\vec{n'} = (0;0;1)$

Khi đó $\cos\left((C'AB),(ABC)\right) = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$.

Mà: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan\left((C'AB),(ABC)\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

Loại 5. Lăng trụ đứng tứ giác

VÍ DỤ 15

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a. Chứng minh rằng giao điểm của đường chéo $A'C$ và mặt phẳng $(AB'D')$ là trọng tâm của tam giác $AB'D'$.

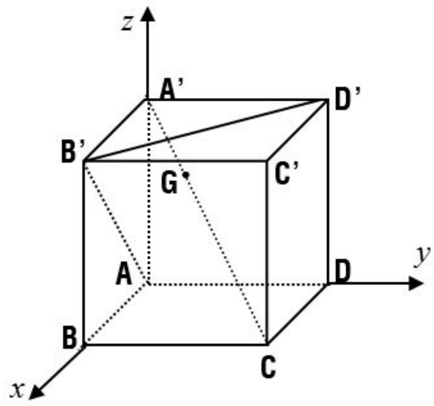
b.Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$

c.Tìm cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(DA'C)$ và $(ABB'A')$

(Dựa *SGK Hình 12, trang 112, Văn Như Cương chủ biên, NXBGD 2000*)

Bài giải

Chọn hệ trục toạ độ Đề các vuông góc $Oxyz$ như sau : $O \equiv A(0;0;0)$; $A'(0;0;a)$ $B(a;0;0)$; $B'(a;0;a)$; $C(a;a;0)$; $C'(a;a;a)$; $D(0;a;0)$; $D'(0;a;a)$.



a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$.

Đường thẳng $A'C$ nhận véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{A'C}} = (1;1;-1)$ và qua A' nên phương trình đường $A'C$ là $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = a - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'D')$ là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}\right] = (-a^2; -a^2; a^2)$ hay $\overrightarrow{n_1} = (1;1;-1)$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(AB'D')$ $x + y - z = 0$

Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$. Toạ độ giao điểm G của đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(AB'D')$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = a - t \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{3} \\ y = \dfrac{a}{3} \\ z = \dfrac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2a}{3}\right) \quad (1)$$

Mặt khác : $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_{B'} + x_{D'}}{3} = \dfrac{a}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_{B'} + y_{D'}}{3} = \dfrac{a}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_{B'} + z_{D'}}{3} = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$ (2)

Từ (1), (2) ta có giao điểm G của đường chéo $A'C$ và mặt phẳng $(AB'D')$ là trọng tâm của tam giác $AB'D'$.

b. Tính $d\left((AB'D'), (C'BD)\right)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(C'BD)$ là $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{C'D}\right]=(a^2;a^2;-a^2)$ hay $\overrightarrow{n_2}=(1;1;-1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(C'BD)$ là $x+y-z-a=0$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(AB'D')$ là $x+y-z=0$.

$$\Rightarrow (AB'D')//(C'BD) \Rightarrow d\left((AB'D'),(C'BD)\right)=d\left(B,(AB'D')\right)=\frac{|a+0-0|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

c. Tính $\cos\left((DA'C),(ABB'A')\right)$

$Oy\perp(ABB'A')$ nên véc tơ pháp tuyến của $(ABB'A')$ là $\vec{j}=(0\,;\,1\,;\,0)$.

Vectơ pháp tuyến của $(DA'C)$ là $\overrightarrow{n_3}=\left[\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{DC}\right]=(0;a^2;a^2)$ hay $\overrightarrow{n_3}=(0;1;1)$.

$$\cos\left((DA'C),(ABB'A')\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Do đó $\left((DA'C),(ABB'A')\right)=45^0$.

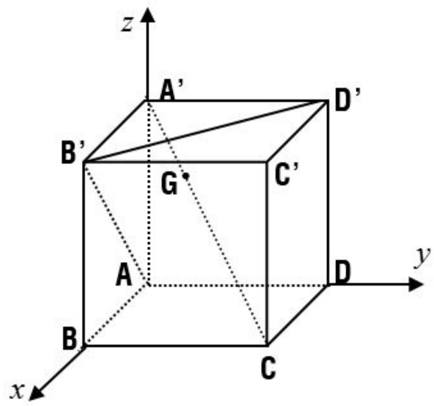
Ví DỤ 16

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.
Chứng minh hai đường chéo $B'D'$ và $A'B$ của hai mặt bên là hai đường thẳng chéo nhau. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'D'$ và $A'B$.

Bài giải

Chọn hệ trục toạ độ Đề các vuông góc $Oxyz$ như sau :

$O\equiv A(0;0;0)$, $A'(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $B'(a;0;a)$, $C(a;a;0)$, $C'(a;a;a)$, $D(0;a;0)$, $D'(0;a;a)$.



Ta có $\overrightarrow{B'D'}=(-a;a;0)$, $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-a)$, $\overrightarrow{BB'}=(0;0;a)$ nên $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}\right]=(-a^2;-a^2;-a^2)$, $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}\right]\overrightarrow{BB'}=-a^3\neq 0$

$\Rightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{B'D'};\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng. Hay $B'D'$ và $A'B$ chéo nhau. Khoảng cách giữa hai đường là

$$d\left(B'D',A'B\right)=\frac{\left|[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}].\overrightarrow{BB'}\right|}{\left|[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}]\right|}=\frac{a^3}{\sqrt{a^4+a^4+a^4}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

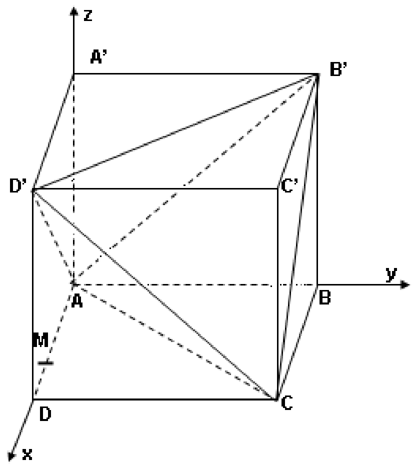
Ví DỤ 17

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = a$.

a. Gọi M là điểm nằm trong AD sao cho $\dfrac{AM}{MD} = 3$. Tính khoảng cách từ M đến $(AB'C)$.

b. Tính thể tích tứ diện $(AB'D'C)$.

Bài giải



a) Chọn hệ trục toạ độ Đề các vuông góc $Oxyz$ như sau :

$A(0;0;0)$; $A'(0;0;a)$; $B(0;a;0)$; $B'(0;a;a)$

$C(2a;a;0)$; $C'(2a;a;a)$; $D(2a;0;0)$; $D'(2a;0;a)$. Vì M là điểm nằm trong AD sao cho $\dfrac{AM}{MD} = 3$ nên $M(\dfrac{3a}{2};0;0)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'C)$ $\overrightarrow{n_{(AB'C)}} = \left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC}\right] = (-a^2;2a^2;-2a^2)$ hay $\overrightarrow{n_{(AB'C)}} = (1;-2;2)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(AB'C)$ là $x - 2y + 2z = 0$.

Do đó khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ là:

$$d(M,(AB'C)) = \frac{\left|3.\frac{a}{2} - 2.0 + 2.0\right|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{a}{2}.$$

b) Theo công thức $V_{AB'D'C} = \dfrac{1}{6}V_{hop} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}\right].\overrightarrow{AC}\right|$.

Mà $\overrightarrow{AD'} = (2a;0;a)$; $\overrightarrow{AB'} = (0;a;a)$; $\overrightarrow{AC} = (2a;a;a)$.

$\Rightarrow V_{AB'D'C} = \dfrac{2a^3}{3}(dvdt)$.

Ví DỤ 18

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết khoảng cách giữa AB và $B'C$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa BC và AB' bằng $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa AC và BD' bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi M là trung điểm $B'C$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (BMD) và $(B'AD)$.

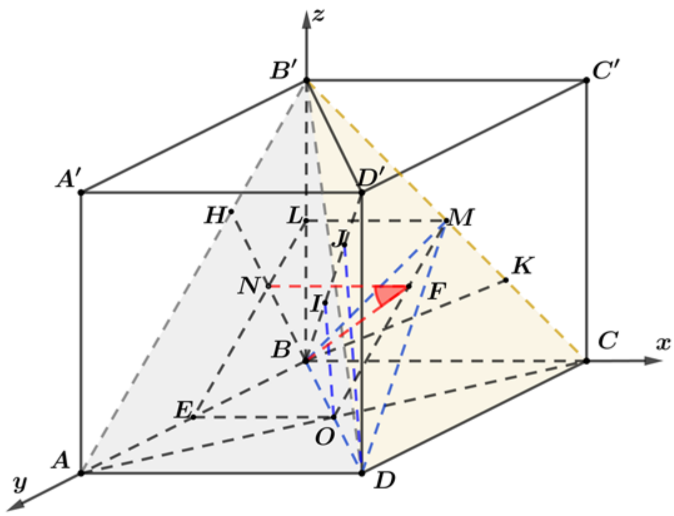
Lời giải

Đặt $BA = x, BC = y, BB' = z$. Gọi O là tâm $ABCD$.

Ta có $AB // \left(B'DC\right) \Rightarrow d\left(AB, B'C\right) = d\left(AB, \left(B'DC\right)\right) = d\left(B, \left(B'DC\right)\right)$.

Ta dễ dàng chứng minh được $\left(B'DC\right) \perp \left(BB'C'C\right)$ và cắt nhau theo giao tuyến $B'C$.

Kẻ $BK \perp B'C \Rightarrow BK \perp \left(B'DC\right)$, hay $d\left(AB, B'C\right) = BK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Xét $\Delta BB'C$ vuông tại B, ta có $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BB'^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{5}{4a^2}$ (1) .

Lại có $BC // \left(B'AD\right) \Rightarrow d\left(BC, AB'\right) = d\left(BC, \left(B'AD\right)\right) = d\left(B, \left(B'AD\right)\right)$.

Ta dễ dàng chứng minh được $\left(B'AD\right) \perp \left(BB'A'A\right)$ và cắt nhau theo giao tuyến AB'. Kẻ $BH \perp AB' \Rightarrow BH \perp \left(B'AD\right)$, hay $d\left(BC, AB'\right) = BH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét $\Delta BB'A$ vuông tại B, ta có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BB'^2} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4a^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{z^2}$(2) .

Từ (1) và (2), suy ra $x = y$, hay $ABCD$ là hình vuông.

Ta dễ dàng chứng minh $AC \perp \left(BB'D'D\right)$. Kẻ $OI \perp BD'$, suy ra $AC \perp OI$, hay OI là đoạn vuông góc chung của AC và BD', suy ra $d\left(AC, BD'\right) = OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\left(BB'D'D\right)$, kẻ $DJ // OI (J \in BD) \Rightarrow DJ = 2OI = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ (vì OI là đường trung bình $\Delta BDD'$).

Xét $\Delta BDD'$ vuông tại D, ta có $\dfrac{1}{DJ^2} = \dfrac{1}{BD^2} + \dfrac{1}{DD'^2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4a^2} = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{z^2}$(3) .

Giải (2), (3) ta được $x = a, z = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với : $B(0;0;0)$, $B'(0;0;2)$, $C(1;0;0)$, $A(0;1;0)$, $D(1;1;0)$,

M là trung điểm $B'C$, suy ra $M\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)$.

+) Ta có $\overrightarrow{B'A}=(0;1;-2)$, $\overrightarrow{B'D}=(1;1;-2)$, $\left[\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'D}\right]=(0;-2;-1)$.

Suy ra mặt phẳng $(B'AD)$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;2;1)$.

+) Ta có $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\overrightarrow{BD}=(1;1;0)$, $\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BD}\right]=\left(-1;1;\frac{1}{2}\right)$.

Suy ra mặt phẳng (BMD) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}'=(-2;2;1)$.

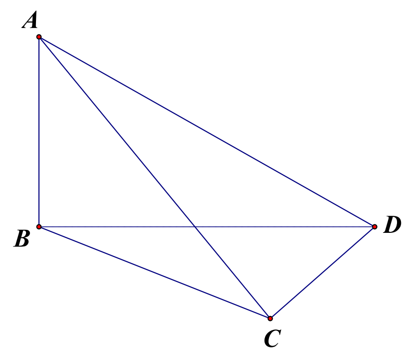
Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (BMD) và $(B'AD)$, ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}=\frac{5}{\sqrt{5}.3}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

DẠNG 2. GẮN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ VÀO CÁC HÌNH ĐA DIỆN CÓ SẴN MÔ HÌNH TAM DIỆN VUÔNG

Dạng toán : Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác vuông tại C, $AB\perp(BCD)$.

Cách dựng :



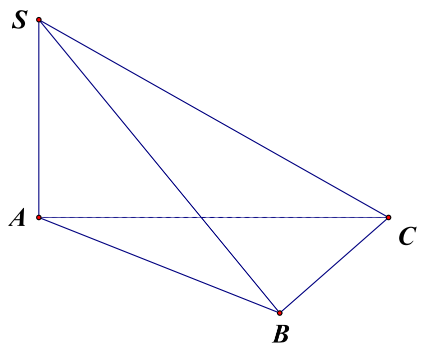
Ta dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $C\equiv O$, $D\in Ox$, $B\in Oy$, Oz qua C và vuông góc với (BCD)

Loại 1. Tứ diện có một cạnh vuông góc với mặt đáy

Ví DỤ 19

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và cạnh $AB=3a$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $A(0;\,3a;\,0)$, $B(0;\,0;\,0)$, $C(3a;\,0;\,0)$, $S\left(0;\,3a;\,a\sqrt{6}\right)$. Khi đó

$\overrightarrow{BA} = (0;\ 3a;\ 0)$, suy ra AB có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0;\ 3a;\ 0)$

$\overrightarrow{SC} = (3a;\ -3a;\ -a\sqrt{6})$, suy ra SC có một vectơ chỉ phương $\vec{v} = (3a;\ -3a;\ -a\sqrt{6})$.

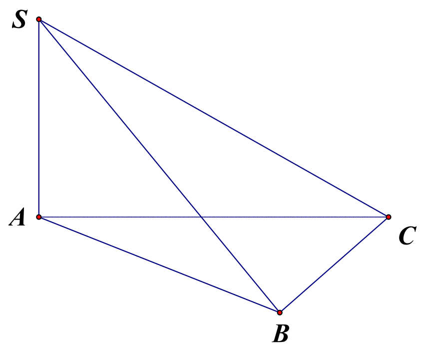
Suy ra $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \left(-3a^2\sqrt{6};\ 0;\ -9a^2\right)$

Khi đó $d(AB;SC) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right|} = \dfrac{9a^3\sqrt{6}}{3a^2\sqrt{15}} = \dfrac{3a\sqrt{10}}{5}$

Ví DỤ 20

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Tam giác SAB vuông cân tại A và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AC và SB.

Lời giải



Ta có $SA = AB = 3a$ (do tam giác SAB vuông cân tại A).
Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $A(0;\ 3a;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(4a;\ 0;\ 0)$, $S(0;\ 3a;\ 3a)$. Khi đó

$\overrightarrow{AC} = (4a;\ -3a;\ 0)$, suy ra AC có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4a;\ -3a;\ 0)$

$\overrightarrow{BS} = (0;\ 3a;\ 3a)$, suy ra SB có một vectơ chỉ phương $\vec{v} = (0;\ 3a;\ 3a)$.

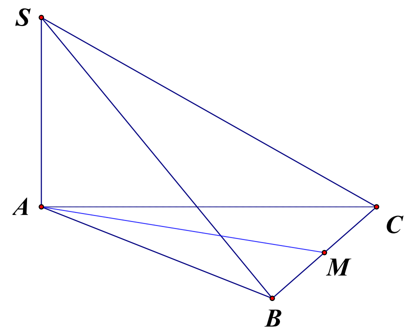
Suy ra $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \left(-9a^2;\ -12a^2;\ 12a^2\right)$

Khi đó $d(AB;SC) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right|} = \dfrac{36a^3}{3a^2\sqrt{41}} = \dfrac{12a\sqrt{41}}{41}$

Ví DỤ 21

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Góc tạo bởi SC và (ABC) là 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AM và SC với M là trung điểm BC.

Lời giải



Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$

Mà AC là hình chiếu của SC và (ABC) nên $\widehat{(SC,(ABC))}=\widehat{(SC,AC)}=\widehat{SCA}=60^\circ$ (do tam giác SAC vuông tại A).

Khi đó $SA=AC.\tan 60^\circ=5a\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $A(0;\,3a;\,0)$, $B(0;\,0;\,0)$, $C(4a;\,0;\,0)$, $S\left(0;\,3a;\,5a\sqrt{3}\right)$.

M là trung điểm BC nên $M(2a;\,0;\,0)$

Khi đó

$\overrightarrow{AM}=(2a;\,-3a;\,0)$, suy ra AM có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2a;\,-3a;\,0)$

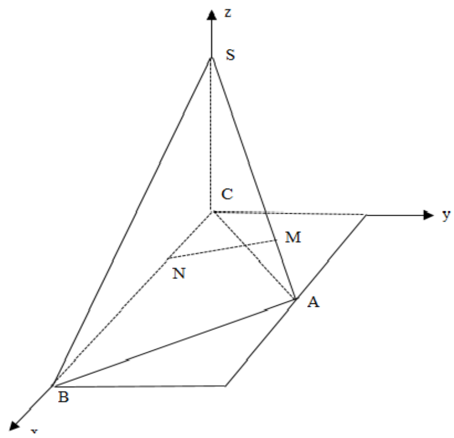
$\overrightarrow{SC}=\left(4a;\,-3a;\,-5a\sqrt{3}\right)$, suy ra SB có một vectơ chỉ phương $\vec{v}=\left(4a;\,-3a;\,-5a\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(15\sqrt{3}a^2;\,10\sqrt{3}a^2;\,6a^2\right)$

Khi đó $d(AB;SC)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|}=\dfrac{30\sqrt{3}a^3}{a^2\sqrt{1011}}=\dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{1011}}a$.

Ví DỤ 22

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC\perp(ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A, các điểm M,N lần lượt thuộc SA, BC sao cho $AM=CN$. Biết $SC=CA=AB=a\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN?



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có : $A(a;a;0),B(2a;0;0),C(0;0;0),S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng $SA:\begin{cases}x=a-t\\ y=a-t\\ z=\sqrt{2}t\end{cases}$

Gọi $M\left(a-t_0;a-t_0;\sqrt{2}t_0\right)\in SA,t_0\in[0;a]$.Ta có: $\overrightarrow{AM}=\left(-t_0;-t_0;\sqrt{2}t_0\right)\Rightarrow AM=2t_0$.

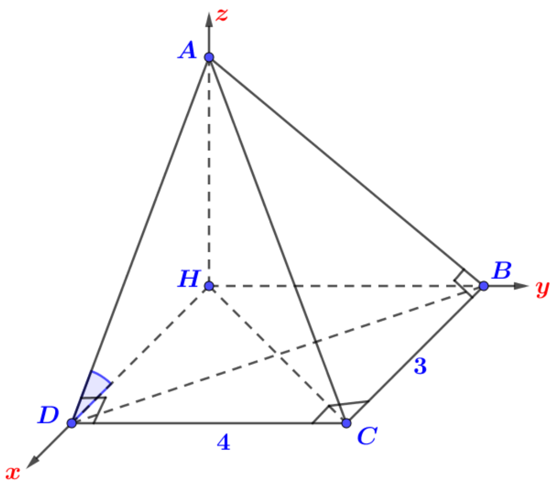
Vì $N\in BC:NC=AM$ nên

$N(2t_0;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(3t_0-a;t_0-a;-\sqrt{2}t_0\right)\Rightarrow MN=12t_0^2-8at_0+2a^2,t_0\in[0;a]$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $MN=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t_0=\dfrac{2a}{3}$.

Ví DỤ 23

Cho tứ diện $ABCD$ có $BC=3$, $CD=4$, $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{ADC}=90°$, $\left(\widehat{AD,BC}\right)=60°$. Tính Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD)



Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp AH\end{cases}\Rightarrow BC\perp HB$.(1)

Lại có: $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp AH\end{cases}\Rightarrow CD\perp HD$.(2)

Mà $\widehat{BCD}=90°$.

Từ đây ta suy ra $HBCD$ là hình chữ nhật.

Mặt khác: $\left(\widehat{AD,BC}\right)=\left(\widehat{AD,HD}\right)=\widehat{ADH}=60°$. Suy ra: $AH=HD\tan 60°=3\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục $Oxyz\equiv H.DBA$ như hình vẽ.

Ta có: $H(0;0;0)$, $A\left(0;0;3\sqrt{3}\right)$, $B(0;4;0)$, $D(3;0;0)$, $C(3;4;0)$

$\overrightarrow{AD}=\left(3;-0;-3\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(3;4;-3\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(0;4;-3\sqrt{3}\right)$.

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ lần lượt là một véc tơ pháp tuyến của (ABC) và (ABD).

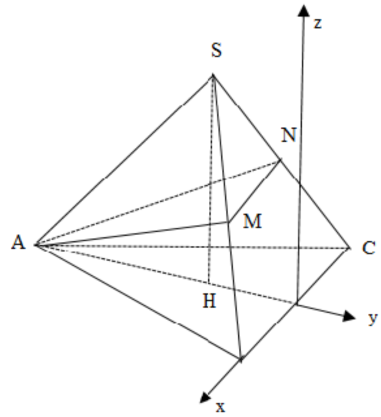
Suy ra: $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(0;-9\sqrt{3};-12\right)$; $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right]=\left(12\sqrt{3};0;12\right)$.

Vậy $\cos\left((ABC),(ADC)\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{\left|0.12\sqrt{3}-9\sqrt{3}.0-12.12\right|}{\sqrt{0^2+\left(-9\sqrt{3}\right)^2+(-12)^2}.\sqrt{\left(12\sqrt{3}\right)^2+0^2+(12)^2}}=\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$

Loại 2. Chóp tam giác đều

Ví DỤ 24

Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Chứng minh rằng: $(AMN)\perp(SBC)$.



Ta có $OA=\frac{a\sqrt{3}}{2}, OH=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{6}, AH=\frac{2}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}, OB=OC=\frac{a}{2}$.

Tam giác SAH vuông tại H nên $SH^2=SA^2-AH^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{3}=\frac{5a^2}{12}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Chọn hệ trục như hình vẽ. Ta có:

$O(0;0;0), A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$

$S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{6},\frac{a\sqrt{15}}{6}\right), M\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{12},-\frac{a\sqrt{15}}{12}\right), N\left(-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{12},\frac{a\sqrt{15}}{12}\right)$.

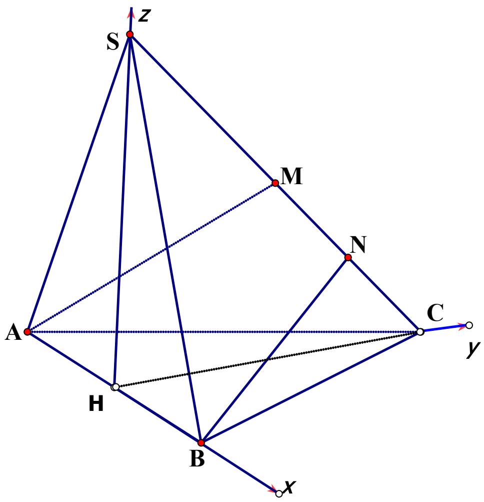
Mặt phẳng (AMN) có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(0;\frac{-a^2\sqrt{15}}{24};\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)$.

Mặt phẳng (SBC) có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{15}}{6};\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Rightarrow\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$. Vậy $(AMN)\perp(SBC)$.

Ví DỤ 25

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác cân với $\widehat{ASB}=120°$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN.



Gọi H là trung điểm AB.
Vì $(SAB)\perp(ABC)$ nên $SH\perp(ABC)$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với $O\equiv H$, $HB\equiv Ox$, $HC\equiv Oy$, $HS\equiv Oz$.

Ta có : $HC=\sqrt{AC^2-AH^2}=3a$; $SH=\dfrac{AH}{\tan ASH}=a$.

$H(0;0;0)$, $S(0;0;a)$, $A\left(-a\sqrt{3};0;0\right)$, $B\left(a\sqrt{3};0;0\right)$, $C(0;3a;0)$, $M\left(0;\dfrac{3a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$, $N\left(0;\dfrac{9a}{4};\dfrac{a}{4}\right)$

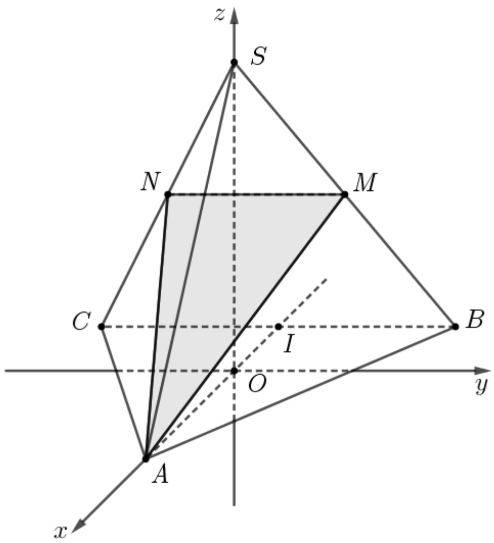
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(a\sqrt{3};\dfrac{3a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{BN}=\left(-a\sqrt{3};\dfrac{9a}{4};\dfrac{a}{4}\right)$, $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}\right]=\left(-\dfrac{3a^2}{4};-\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4};\dfrac{15\sqrt{3}a^2}{4}\right)$.

Khoảng cách giữa AN,BN là : $d(AM,BN)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}\right]\right|}=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}}{\dfrac{\sqrt{711a^2}}{4}}=\dfrac{2\sqrt{237}a}{79}$.

Ví DỤ 26

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có $AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $OA=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}, OI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với O trùng với gốc tọa độ. Đặt $SO=h$, khi đó ta được $O(0;0;0)$, $S(0;0;h)$, $A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $I\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right)$.

Suy ra $B\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};0\right)$, $C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};-\dfrac{a}{2};0\right)$, $M\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12};\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12};-\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$.

Ta có

$\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{5a\sqrt{3}}{12};\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{AN}=\left(-\dfrac{5a\sqrt{3}}{12};-\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};-h\right)$, $\overrightarrow{SC}=\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};-\dfrac{a}{2};-h\right)$.

Suy ra $\vec{n}_{(AMN)}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(\dfrac{ah}{4};0;\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)$ và $\vec{n}_{(SBC)}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(-ah;0;\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$.

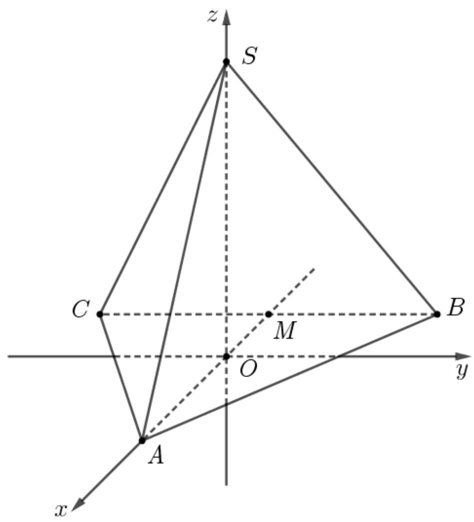
$$(AMN)\perp(SBC)\Leftrightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)}=0\Leftrightarrow -\dfrac{a^2h^2}{4}+\dfrac{15a^4}{144}=0\Leftrightarrow h^2=\dfrac{5a^2}{12}$$

$\Rightarrow S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\right|=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. Vậy $S_{\Delta AMN}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

VÍ DỤ 27

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=2a$, $AB=a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính khoảng cách từ M tới mặt phẳng (SAB).

Lời giải



Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm tam giác ABC.

Do M là trung điểm BC nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với O trùng với gốc tọa độ, khi đó ta được:

$O(0;0;0)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$, $M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right)$.

Suy ra $B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};0\right)$

Ta có $\overrightarrow{SA} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;-\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$, $\overrightarrow{SB} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$

Suy ra $\vec{n}_{(SAB)} = \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{33}}{6};\frac{a^2\sqrt{11}}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$.

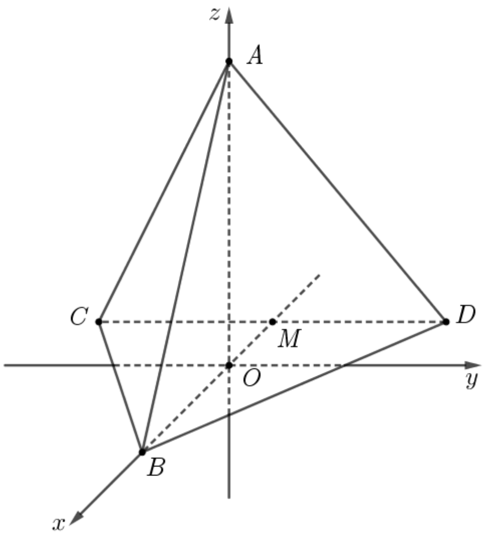
Phương trình mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{33}}{6}x + \frac{\sqrt{11}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{6}z - \frac{a\sqrt{11}}{6} = 0$.

Suy ra $d(M,(SAB)) = \dfrac{\left|\frac{\sqrt{33}}{6}\cdot\frac{-a\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{11}}{6}\right|}{\sqrt{\frac{33}{36}+\frac{11}{4}+\frac{3}{36}}} = \frac{a\sqrt{165}}{30}$.

Ví DỤ 28

Cho hình chóp tam giác đều $A.BCD$ có $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và AD.

Lời giải



Gọi O là hình chiếu của A trên (BCD), ta suy ra O là trọng tâm tam giác BCD.

Do M là trung điểm CD nên $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác AOB vuông tại O, ta có $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với O trùng với gốc tọa độ, khi đó ta được:

$O(0;0;0)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $A\left(0;\,0;\frac{2a\sqrt{6}}{3}\right)$, $M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right)$.

Suy ra $D\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};0\right)$

Ta có $\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};-\frac{2a\sqrt{6}}{3}\right), \overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;-\frac{2a\sqrt{6}}{3}\right)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AD}\right] = \left(0;-a^2\sqrt{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{35}}{4}$

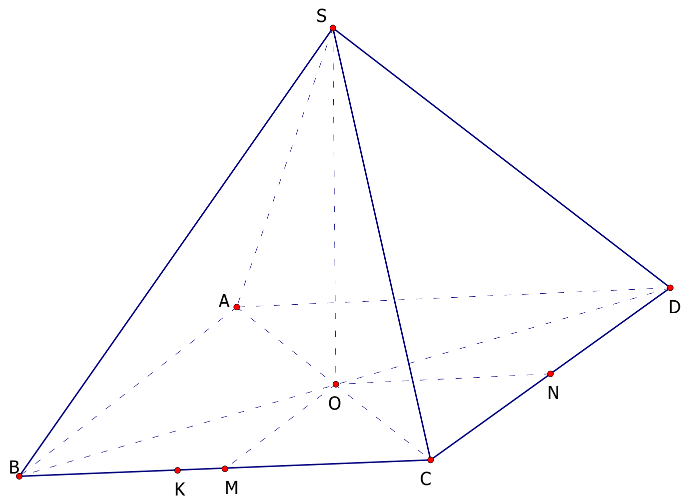
Khi đó $d\left(BM,AD\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AD}\right]\right|} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{35}}{4}} = \frac{2a\sqrt{70}}{35}$.

Loại 3. Chóp tứ giác đều hoặc chóp có đáy là hình thoi, đường cao SO.

Ví DỤ 29

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, Gọi N, M lần lượt là trung điểm của DC và BC, K là điểm trên cạnh BC sao cho $BK = 4KM$, tính theo a khoảng cách hai đường thẳng SK và BN.

Lời giải



$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $OM\equiv Ox$, $ON\equiv Oy$, $OS\equiv Oz$

Khi đó $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$; $K\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{10};0\right)$; $B\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{2};0\right)$; $N\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SK}=\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{10};-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$; $\overrightarrow{BN}\left(-\dfrac{a}{2};a;0\right)$ nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{SK},\overrightarrow{BN}\right]=\left(\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2};\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4};\dfrac{9a^2}{20}\right)$

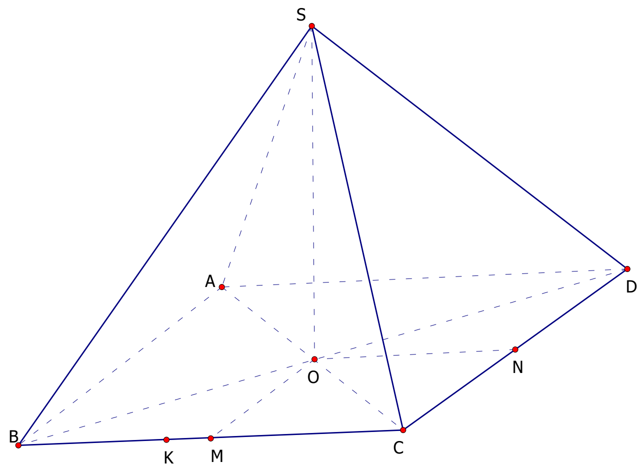
$\overrightarrow{SN}=\left(0;\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

$d\left(SK,BN\right)=\dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{SN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SK},\overrightarrow{BN}\right]\right|}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{10}a}{\dfrac{\sqrt{331}}{20}}=\dfrac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{331}}$.

Ví DỤ 30

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=2a$; $AB=a$. Gọi N,M lần lượt là trung điểm của DC và BC, tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM và MN.

Lời giải



$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $OM\equiv Ox$, $ON\equiv Oy$, $OS\equiv Oz$

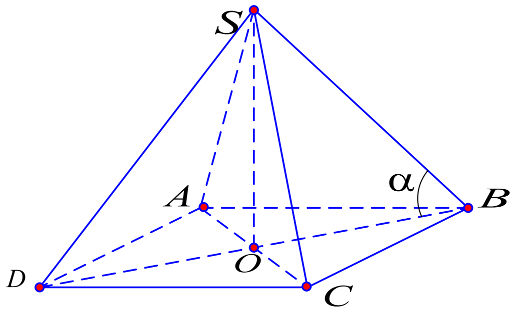
Khi đó $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{14}}{2}\right)$; $M\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$; $N\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SM}=\left(\dfrac{a}{2};0;-\dfrac{a\sqrt{14}}{2}\right)$; $\overrightarrow{MN}\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$

$\cos(SM,MN)=\dfrac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\overrightarrow{SM}\right|.\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\dfrac{\sqrt{30}}{30}$

Ví DỤ 31

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°.



Lời giải

Góc giữa SB và mặt đáy là góc $\widehat{SBO}=60^0$

$SO=\tan 60.OB=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $OC\equiv Ox$, $OB\equiv Oy$, $OS\equiv Oz$.

Khi đó $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$; $B\left(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $C\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$; $D\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

Suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(\dfrac{-\sqrt{3}a^2}{2};-\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2};-\dfrac{a^2}{2}\right)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SDC) là $\vec{a}=\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SC}\right]=\left(\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2};-\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2};\dfrac{a^2}{2}\right)$

Do đó cosin góc giữa hai mặt phẳng trên là $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{a}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{1}{7}$.

Loại 4. Hình chóp có đáy là hình vuông (chữ nhật) và mặt bên vuông góc với đáy.

Ví DỤ 32

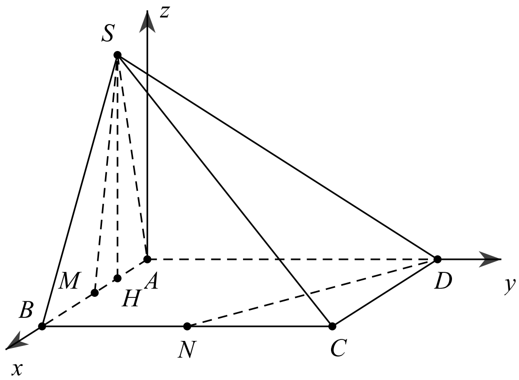
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a;\ SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của S lên $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow AH = \dfrac{SA^2}{AB} = \dfrac{a}{2},\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:



$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), H\left(\dfrac{a}{2};0;0\right), S\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right), M(a;0;0), N(2a;a;0)$.

Ta có $S_{\Delta ADM} = S_{\Delta CDN} = \dfrac{1}{2}a.2a = a^2 \Rightarrow S_{BNDM} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$.

Thể tích khối chóp $S.BMDN$: $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

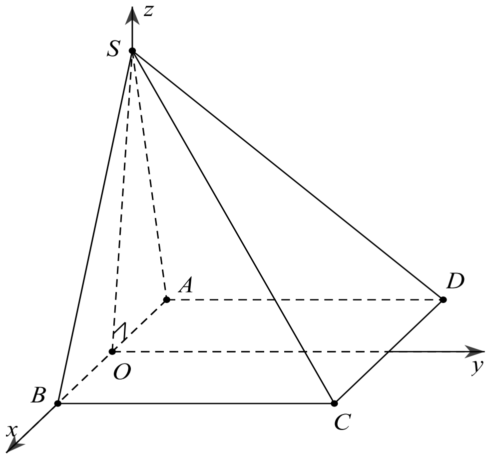
Vì $\overrightarrow{SM} = \left(\dfrac{a}{2};0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{DN} = (2a;-a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN} = a^2$.

Vậy $\cos(SM, DN) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{DM.DN} = \dfrac{a^2}{a.a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Ví DỤ 33

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD) theo a.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AB.

Ta có :

$$\begin{cases}(SAB)\cap(ABCD)=AB\\(SAB)\perp(ABCD)\\SO\perp AB\end{cases}\Rightarrow SO\perp(ABCD).$$

Không mất tính tổng quát, đặt $a=1$.

Chọn hệ trục $(Oxyz)$ như hình vẽ.

Ta có : $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$, $D\left(-\dfrac{1}{2};1;0\right)$.

Mặt phẳng (SCD) đi qua điểm $C\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

nên có phương trình : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(y-1)+z=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}y+2z-\sqrt{3}=0$.

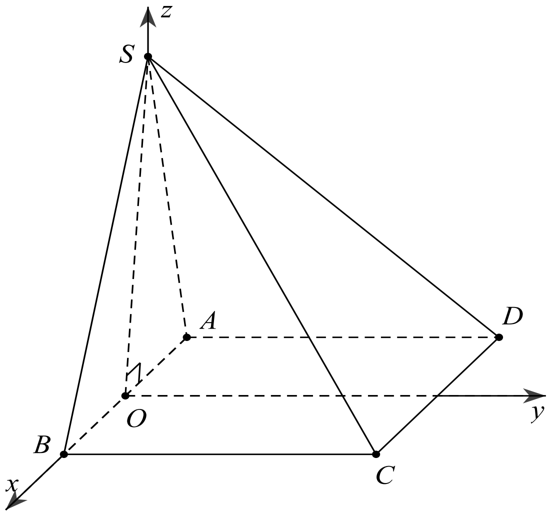
Khoảng cách từ A đến (SCD) là: $d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{\left|-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+4}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ví DỤ 34

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AB.

Ta có :

$$\begin{cases} (SAB)\cap(ABCD)=AB \\ (SAB)\perp(ABCD) \\ SO\perp AB \end{cases} \Rightarrow SO\perp(ABCD).$$

Không mất tính tổng quát, đặt $a=1$.

Chọn hệ trục $(Oxyz)$ như hình vẽ.

Ta có : $S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};1;0\right)$, $D\left(-\frac{1}{2};1;0\right)$.

Mặt phẳng (SAB) có phương trình $y=0 \Rightarrow \vec{j}=(0;1;0)$.

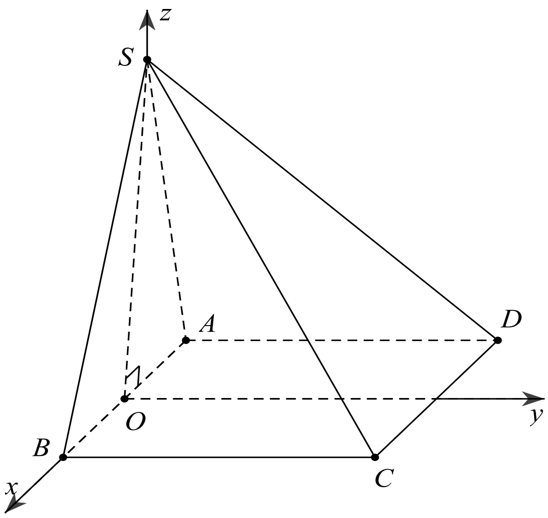
Mặt phẳng (SCD) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là : $\cos\left((SAB),(SCD)\right)=\frac{\left|\vec{j}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{j}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ví DỤ 35

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC theo a.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AB.

Ta có :

$$\begin{cases}(SAB)\cap(ABCD)=AB\\(SAB)\perp(ABCD)\\SO\perp AB\end{cases}\Rightarrow SO\perp(ABCD).$$

Không mất tính tổng quát, đặt $a=1$.

Chọn hệ trục $(Oxyz)$ như hình vẽ.

Ta có : $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$, $D\left(-\dfrac{1}{2};1;0\right)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC là:

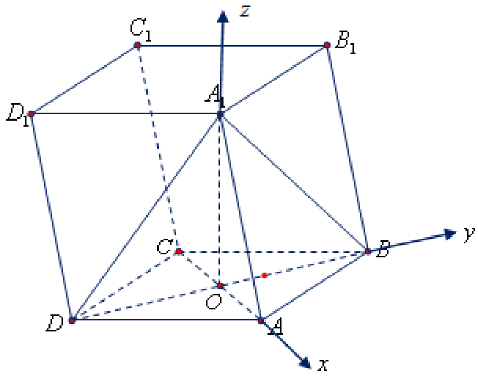
$$d(AD,SC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{SC}\right]\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(AD,SC)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Loại 5. Lăng trụ xiên.

Ví DỤ 36

Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A_1 lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD).



Chọn hệ trục toạ độ sao cho tâm O là gốc toạ độ , OA là trục Ox, OB là trục Oy, OA_1 là trục Oz

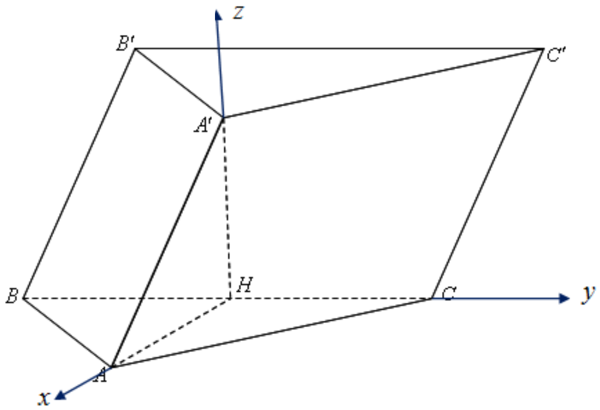
$$\Rightarrow \ A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$$

Vì $mp\left(A_1BD\right) \equiv mp(Oy;Oz) \equiv mp(Oyz)$ nên $mp\left(A_1BD\right)$ có phương trình: $x = 0$

Khi đó : $d(\mathrm{B}_1;(A_1BD)) = d(A;(A_1BD)) = \left|\frac{a\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ví DỤ 37

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách h giữa 2 đường thẳng AA' và BC.



Ta có : $d(\mathrm{AA'};\mathrm{BC}) = d(AA';(\mathrm{BCC'B'})) = d(A;(BCC'B'))$

Chọn hệ trục sao cho $H(0;0;0)$ như hình vẽ

Khi đó : $A(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0)$, $B(0;-\frac{a}{2};0)$, $C(0;\frac{a}{2};0)$, $A'(0;0;\frac{a}{2})$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{BC} = (0;a;0),\ \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{a}{2}\right)$$

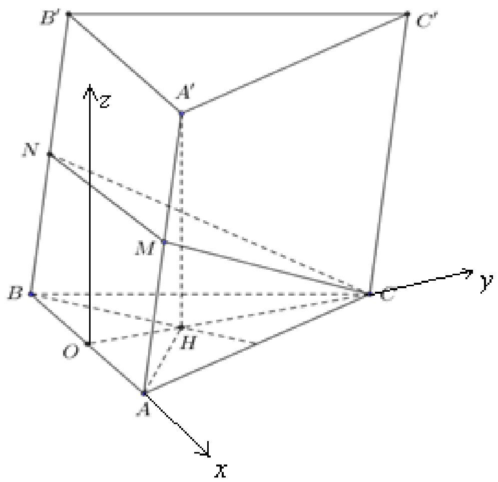
VTPT của mp(BCC’B’) : $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB'}\right] = \left(\frac{a^2}{2};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2}{2}(1;0;\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ Phương trình mp(BCC’B’) : $x + \sqrt{3}z = 0$

Vậy $d(\mathrm{AA'};\mathrm{BC}) = d(A;(BCC'B')) = \dfrac{\left|\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ví DỤ 38

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).



Gọi O là trung điểm của AB. Gắn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$ như hình và không mất tính tổng quát ta chọn $a=1$, khi đó ta có:

$A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $H\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$

$A'H = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\overrightarrow{n_1} = (0;0;1)$.

M là trung điểm $AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, N là trung điểm $BB' \Rightarrow N\left(\frac{-3}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

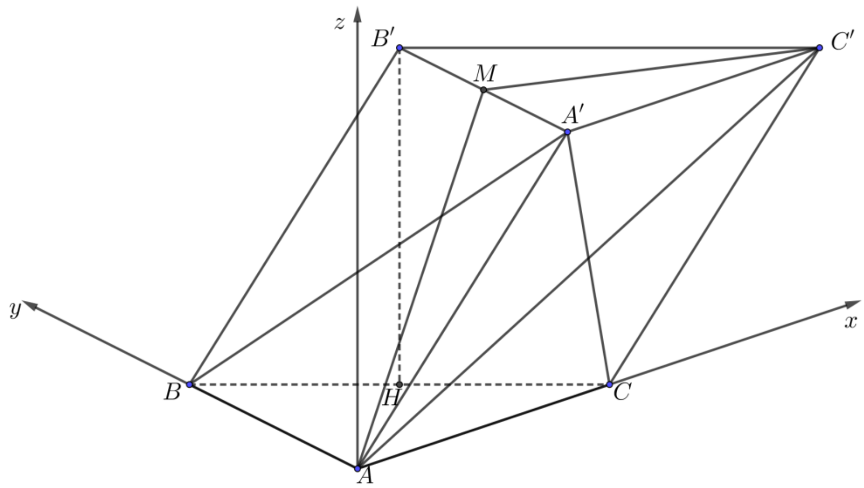
$\overrightarrow{MN} = (-1;0;0)$, $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{4};\frac{-5\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\Rightarrow$ (CMN) có vtpt $\overrightarrow{n_2} = \left(0;\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(0;2\sqrt{2};5\right)$

$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Ví DỤ 39

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB=3$, $AC=4$, $AA'=\dfrac{\sqrt{61}}{2}$. Hình chiếu của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC, M là trung điểm cạnh $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$



Gọi H là trung điểm BC.

Ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$

Xét tam giác $B'BH$ vuông tại H: $B'H=\sqrt{BB'^2-BH^2}=3$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có A trùng với O như hình vẽ

Với $A(0;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(4;0;0)$ $\Rightarrow H\left(2;\dfrac{3}{2};0\right)$ là trung điểm $BC \Rightarrow B'\left(2;\dfrac{3}{2};3\right)$

Do $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$ $\Rightarrow A'\left(2;-\dfrac{3}{2};3\right); C'\left(6;-\dfrac{3}{2};3\right)$ $\Rightarrow M(2;0;3)$

$\overrightarrow{AM}=(2;0;3)$; $\overrightarrow{AC'}=\left(6;-\dfrac{3}{2};3\right)$ nên vectơ pháp tuyến (MAC') là $\vec{n}_{(MAC')}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC'}\right]$

$=\left(\dfrac{9}{2};12;-3\right)$

$\overrightarrow{A'B}=\left(-2;\dfrac{9}{2};-3\right)$; $\overrightarrow{A'C}=\left(2;\dfrac{3}{2};-3\right)$ nên vectơ pháp tuyến $(A'BC)$ là $\vec{n}_{(A'BC)}$

$=\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}\right]$ $=(-9;-12;-12)$

Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$.

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_{(MAC')}.\vec{n}_{(A'BC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(MAC')}\right|.\left|\vec{n}_{(A'BC)}\right|} = \frac{\left|\frac{9}{2}.(-9)+12.(-12)-3.(-12)\right|}{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+12^2+(-3)^2}.\sqrt{(-9)^2+(-12)^2+(-12)^2}} = \frac{33}{\sqrt{3157}}.$$