

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ cơ bản là phương trình có dạng $a^x = b$ ($a > 0; a \neq 1$)

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có duy nhất một nghiệm $x = \log_a b$;
- Nếu $b = 0$ hoặc $b < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x), (a > 0, a \neq 1)$$

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$$\alpha a^{2x} + \beta a^x + \gamma = 0. \text{ Đặt } t = a^x, (t > 0)$$

c) Logarit hóa

$$\text{Nếu phương trình cho ở dạng } a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}.$$

II. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Phương trình logarit cơ bản: là phương trình có dạng $\log_a x = b$ với $0 < a \neq 1$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

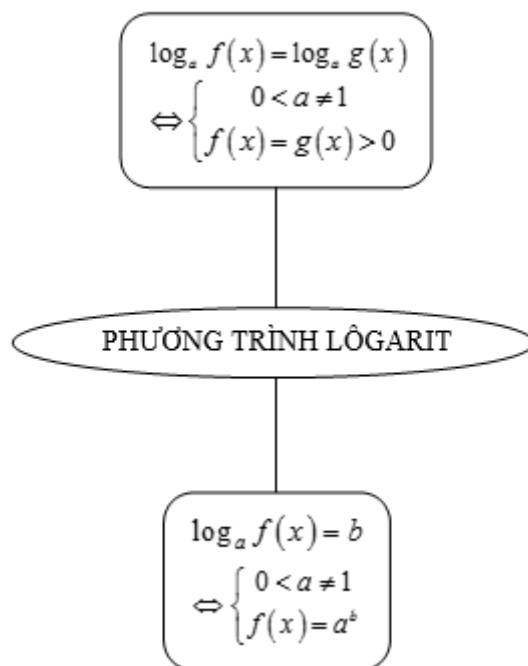
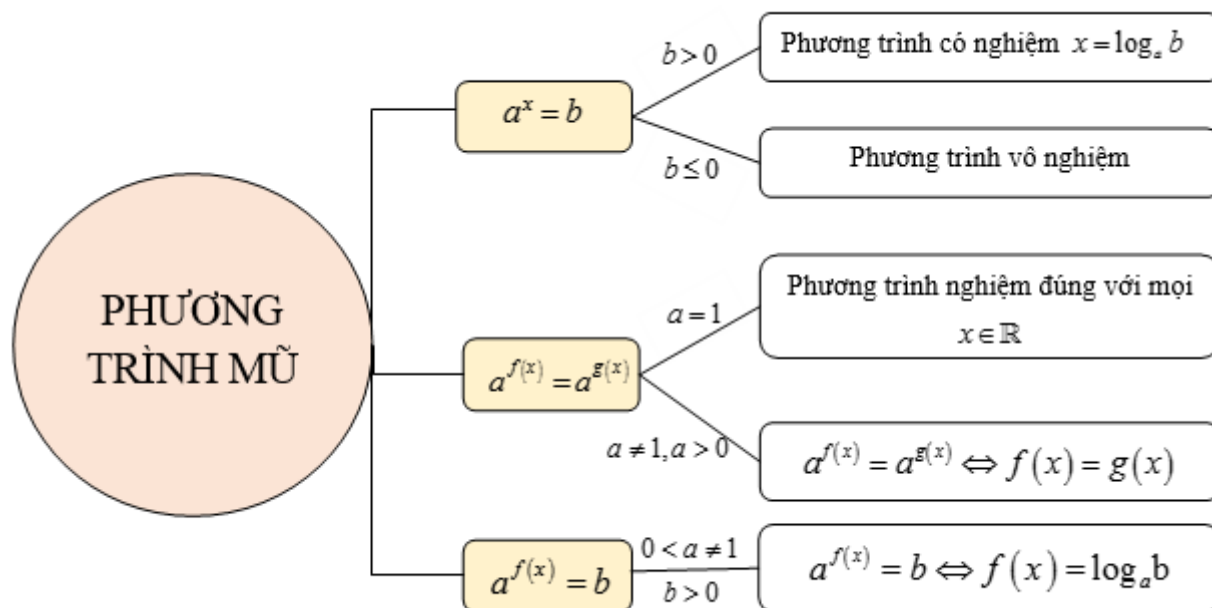
b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$$\alpha \log_a^2 x + \beta \log_a x + \gamma = 0. \text{ Đặt } t = \log_a x, (x > 0)$$

c) Mũ hóa

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

HỆ THỐNG HÓA BẢNG SƠ ĐỒ



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

Phương pháp đưa phương trình mũ về cùng cơ số

- Biến đổi các hàm số có mặt trong phương trình về cùng cơ số, sau đó rút gọn, đưa về dạng cơ bản hoặc về dạng: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. (Với $0 < a \neq 1$). (Thường gặp)

- Nếu cơ số a thay đổi thì: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$ (Ít gặp).

Phương pháp đưa phương trình loga về cùng cơ số

Biến đổi phương trình để đưa về dạng cơ bản đã nêu hoặc là dạng: $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm tích số của tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$

A. -1 .

B. 1 .

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7} \Leftrightarrow 7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 7^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Khi đó tích các nghiệm là: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1$.

Bài tập 2. Cho phương trình $(7+4\sqrt{3})^{x^2+x-1} = (2+\sqrt{3})^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình có hai nghiệm không dương.

B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải

Chọn A

Do $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$(2 + \sqrt{3})^{2(x^2+x-1)} = (2 + \sqrt{3})^{x-2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương.

Bài tập 3. Phương trình $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Vô nghiệm. B. Một nghiệm. **C. Hai nghiệm.** D. Ba nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-4 < x < 4$ và $x \neq -1$.

$$\text{Ta có } \log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3 \Leftrightarrow \log_2(4|x+1|) = \log_2[(4-x)(4+x)]$$

$$\Leftrightarrow 4|x+1| = 16 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1) = 16 - x^2 \\ 4(x+1) = x^2 - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 12 = 0 \\ x^2 - 4x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \\ x = 2 + 2\sqrt{6} \\ x = 2 - 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 2 - 2\sqrt{6}$.

Bài tập 4. Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$ là

- A.** $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. B. $S = \{2\}$. C. $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$. D. $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow -2x+1=2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Cách trắc nghiệm: Nhập VT phương trình vào máy tính, dùng nút Calc thử các nghiệm.

Bài tập 5. Phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25 \cdot (\sqrt{2})^{7x}$ có tích các nghiệm bằng?

- A. $\frac{4}{7}$. B. $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2}{7}$. D. $\frac{1}{2}$.
-

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25 \cdot (\sqrt{2})^{7x} \Leftrightarrow 2^{3 \cdot \frac{2x-1}{x+1}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7x}{2}} \Leftrightarrow 2^{3 \cdot \frac{2x-1}{x+1}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7x}{2}} \Leftrightarrow 2^{3 \cdot \frac{2x-1}{x+1}} = 2^{\frac{7x-4}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2x-1}{x+1} = \frac{7x-4}{2} \Leftrightarrow 7x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Vậy tích các nghiệm bằng $1 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$.

Bài tập 6. Tìm số nghiệm của phương trình $27^{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{\sqrt{3}^{7x}}{243}$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq 1$.

$$\text{Ta có: } 27^{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{3^{\frac{7x}{2}}}{3^5} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-6}{x-1}} = 3^{\frac{7x-10}{2}} \Leftrightarrow \frac{3x-6}{x-1} = \frac{7x-10}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6x - 12 = (7x - 10)(x - 1) \Leftrightarrow 7x^2 - 23x + 22 = 0 \text{ (PT vô nghiệm)}$$

Bài tập 7. Cho phương trình $2\log_3(x^3 + 1) = \log_3(2x - 1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(x + 1)$. Tổng các nghiệm của phương trình là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^3 + 1 > 0 \\ (2x - 1)^2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } 2\log_3(x^3 + 1) = \log_3(2x - 1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x^3 + 1) = 2\log_3|2x - 1| + 2\log_3(x + 1) \Leftrightarrow \log_3(x^3 + 1) = \log_3|2x - 1|(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 1 = |2x - 1|(x + 1)$$

Trường hợp 1: $x > \frac{1}{2}$. Ta có: $x^3 + 1 = |2x - 1|(x + 1) \Leftrightarrow x^3 + 1 = (2x - 1)(x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 1. \text{ So sánh điều kiện nên } x = 2 \vee x = 1.$$

Trường hợp 2: $x < \frac{1}{2}$. Ta có: $x^3 + 1 = |2x - 1|(x + 1) \Leftrightarrow x^3 + 1 = (1 - 2x)(x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ So sánh điều kiện nên } x = 0.$$

Kết luận: Tổng các nghiệm của phương trình là $0 + 1 + 2 = 3$.

Bài tập 8. Cho n là số nguyên dương và $a > 0$, $a \neq 1$. Tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019.$$

A. $n = 2017$.

B. $n = 2016$.

C. $n = 2018$.

D. $n = 2019$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow \log_a 2019 + 2 \cdot \log_a 2019 + 3 \cdot \log_a 2019 + \dots + n \cdot \log_a 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot \log_a 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} - 2033136 \right) \cdot \log_a 2019 = 0 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 2033136 \Leftrightarrow n^2 + n - 4066272 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2016 \\ n = -2017 \end{cases}.$$

Do n là số nguyên dương nên $n = 2016$.

Bài tập 9. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2\log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0$ là:

A. 8.

B. $8 + \sqrt{2}$.

C. $8 - \sqrt{2}$.

D. $4 + \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 5 \end{cases}.$$

$$2\log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\log_4[(x-3)(|x-5|)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(|x-5|) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-5) = 1 & \text{khi } x > 5 \\ (x-3)(5-x) = 1 & \text{khi } 3 < x < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 1 & \text{khi } x > 5 \\ -x^2 + 8x - 15 = 1 & \text{khi } 3 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + \sqrt{2} \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $8 + \sqrt{2}$.

Bài tập 10. Giải phương trình $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2018} x} = 2018$ có nghiệm là

- A. $x = 2018.2018!$. B. $x = \sqrt[2018]{2018!}$. C. $x = 2017!$. D. $x = (2018!)^{2018}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2018} x} = 2018 \Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x 3 + \dots + \log_x 2018 = 2018$$

$$\Leftrightarrow \log_x (2.3 \dots 2018) = 2018 \Leftrightarrow \log_x (2018!) = 2018 \Leftrightarrow x^{2018} = 2018! \Leftrightarrow x = \sqrt[2018]{2018!}.$$

Bài tập 11. Số nghiệm của phương trình: $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có: } \log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log_2 x)^{\frac{3}{2}} = 4 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ thỏa điều kiện.}$$

Bài tập 12. Phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}} = \frac{9}{16}$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tổng $S = x_1 + x_2$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Đk: $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Xét phương trình } \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}} &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{x}} = \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{x}} &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{4}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) và $1 \cdot (-4) < 0$ nên

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 2$. Vậy $S = 2$.

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

Loại 1: Phương trình có dạng $b_k a^{kf(x)} + b_{k-1} a^{(k-1)f(x)} + \dots + b_1 a^{f(x)} + b_0 = 0$

Khi đó ta đặt: $t = a^{f(x)}$ điều kiện: $t > 0$. Ta được một phương trình đại số ẩn t , giải pt đại số này ta biết được nghiệm của phương trình ẩn t .

Nếu có nghiệm t thì cần xét xem có thỏa điều kiện $t > 0$ hay không. Nếu thỏa điều kiện thì giải phương trình $t = a^{f(x)}$ để tìm nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ: $4^{x+1} - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^{x+1})^2 - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

Đặt $t = 2^{x+1}$. Điều kiện $t > 0$. Ta có $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$

☞ Với $t = 2$ ta có $2^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0$

☞ Với $t = 4$ ta có $2^{x+1} = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0$ và $x = 1$.

Loại 2: Phương trình đưa được về dạng: $\alpha_1 a^{f(x)} + \frac{\alpha_2}{a^{f(x)}} + \alpha_3 = 0$

Hướng giải: Đặt $t = a^{f(x)}$.

Ví dụ 1: Giải phương trình $5^{x-1} + 5^{3-x} = 26 \Leftrightarrow \frac{5^x}{5} + \frac{125}{5^x} - 26 = 0$

Đặt $t = 5^x; t > 0$ Ta được phương trình: $\frac{t}{5} + \frac{125}{t} - 26 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2}{5} - 26t + 125 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 125 & (\text{nhận}) \\ t = 5 & (\text{nhận}) \end{cases}$

☞ Với $t = 125$ ta có $5^x = 125 \Leftrightarrow x = 3$.

☞ Với $t = 5$ ta có $5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 1$ và $x = 3$.

Lưu ý: Một số những cặp số là nghịch đảo của nhau. Ví dụ: $\sqrt{2} \pm 1$; $2 \pm \sqrt{3}$; $3 \pm \sqrt{8}$,...

Loại 3: Phương trình có dạng: $\alpha_1 a^{2f(x)} + \alpha_2 (ab)^{f(x)} + \alpha_3 b^{2f(x)} = 0$

Hướng giải: Chia cả hai vế cho $b^{2f(x)}$ ta được phương trình $\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + \alpha_3 = 0$

Ta đặt: $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$ điều kiện: $t > 0$, giải phương trình ẩn t , sau đó tìm nghiệm x .

Chú ý: Cũng có thể chia hai vế phương trình cho: $(ab)^{f(x)}$ hoặc: $a^{2f(x)}$.

Ví dụ: Giải phương trình $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$.

$$9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2 (\text{Vô nghiệm}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Một số dạng phương trình logarit sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ thường gặp:

Ví dụ 1: Giải phương trình $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$.

Phân tích: Ta nhận thấy trong phương trình chỉ có một hàm số lôgarit duy nhất, đó là $\lg x$. Vì vậy ta giải pt bằng cách đặt $t = \lg x$.

Đặt $t = \lg x$ đk $t \neq 5$ và $t \neq -1$. Ta được phương trình:

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Leftrightarrow \frac{-t+11}{(5-t)(1+t)} = 1 \Rightarrow -t+11 = 5-4t-t^2 \Leftrightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 & (\text{thỏa điều kiện}) \\ t=3 & (\text{thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

☞ Với $t = 2$ ta có $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$

☞ Với $t = 3$ ta có $\lg x = 3 \Leftrightarrow x = 1000$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 100$; $x = 1000$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log_2^2(x-1)^2 + \log_2(x-1)^3 = 7$.

Điều kiện: $x > 1$

$$\log_2^2(x-1)^2 + \log_2(x-1)^3 = 7 \Leftrightarrow 4\log_2^2(x-1) + 3\log_2(x-1) - 7 = 0$$

Đặt $t = \log_2(x-1)$, ta được phương trình: $4t^2 + 3t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-7}{4} \end{cases}$

☞ Với $t = 1$ ta có $\log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$

☞ Với $t = \frac{-7}{4}$ ta có $\log_2(x-1) = \frac{-7}{4} \Leftrightarrow x-1 = 2^{\frac{-7}{4}} \Leftrightarrow x = 1 + 2^{\frac{-7}{4}}$. Kết luận:....

2. Bài tập

Bài tập 1. Phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ có tích các nghiệm là:

A. -1.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x} + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{2x} - 2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}-1 \\ (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là -1.

Bài tập 2. Phương trình $9^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 4^{x+1} = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Phương trình có 2 nghiệm nguyên.

B. Phương trình có 2 nghiệm vô tỉ.

C. Phương trình có 1 nghiệm dương.

D. Phương trình có 2 nghiệm dương.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 9^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 4^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 4 \cdot 4^x = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{9^x}{4^x} - 13 \cdot \frac{6^x}{4^x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Bài tập 3. Tính tổng của tất cả các nghiệm thực của phương trình $(3^x - 9)^3 + (9^x - 3)^3 = (9^x + 3^x - 12)^3$.

- A. 3. **B.** $\frac{7}{2}$. C. 4. D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} a = 3^x - 9 \\ b = 9^x - 3 \end{cases}$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 \Leftrightarrow 3ab(a + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$.

- $a = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- $b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
- $a + b = 0 \Leftrightarrow 9^x + 3^x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x = -4 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình là $\frac{7}{2}$.

Bài tập 4. Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$ bằng

- A. $\frac{7}{25}$. B. $\frac{630}{625}$. **C.** $\frac{1}{125}$. D. 630.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0 < x \neq 1$, ta có:

$$\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x + \log_{25}^2 x \cdot \log_x 125 = 1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x + \frac{3}{2}\log_{25} x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{25} x = \frac{1}{2} \\ \log_{25} x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{25^2} \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là: $\frac{1}{125}$.

Bài tập 5. Phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$

A. Có hai nghiệm dương.

B. Vô nghiệm.

C. Có một nghiệm âm. **D.** Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm dương.

Bài tập 6. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} + 2^{x^2-x-2} = 4^{x^2-x-1} + 1$. Số phần tử của tập S là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Xét phương trình: } 2^{x^2-x} + 2^{x^2-x-2} = 4^{x^2-x-1} + 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} + \frac{2^{x^2-x}}{4} = 4^{x^2-x-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{x^2-x} + 2^{x^2-x} = 4 \cdot 4^{x^2-x-1} + 4 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x^2-x} = 2^{2(x^2-x)} + 4$$

$$\Leftrightarrow 2^{2(x^2-x)} - 5 \cdot 2^{x^2-x} + 4 = 0. \text{ Đặt } t = 2^{x^2-x}, t > 0$$

$$\text{Phương trình trở thành: } t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 4 \Rightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-1; 0; 1; 2\}$ có 4 phần tử.

Bài tập 7. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x} - 6^{\log x} - 18.3^{2\log x} = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi đánh giá về a .

A. $(a-10)^2 = 1$.

B. $a^2 + a + 1 = 2$.

C. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}$.

D. $a = 10^2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Chia hai vế cho $3^{2\log x}$ ta được phương trình:

$$4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2\log x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = -2 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}.$$

Bài tập 8. Biết phương trình $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = (x_1)^{x_2}$

A. $T = 64$.

B. $T = 32$.

C. $T = 8$.

D. $T = 16$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Ta có: $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7 \Leftrightarrow 2\log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} = 7$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x - 7\log_2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2}; x_2 = 8 \Rightarrow T = (x_1)^{x_2} = (\sqrt{2})^8 = 16.$$

Bài tập 9. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^2+1} - 5.2^{x^2+3x} + 2^{6x+1} = 0$ bằng

A. 4.

B. 10.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x^2+1} - 5.2^{x^2+3x} + 2^{6x+1} = 0 \Leftrightarrow 2.2^{2x^2} - 5.2^{x^2+3x} + 2.2^{6x} = 0$.

Vì $2^{6x} > 0$, chia cả 2 vế của phương trình cho 2^{6x} , ta được $2.2^{2x^2-6x} - 5.2^{x^2-3x} + 2 = 0$.

Đặt $t = 2^{x^2-3x}$, điều kiện $t > 0$.

Ta có phương trình: $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(N) \\ t = \frac{1}{2}(N) \end{cases}$.

+ Với $t = 2 \Rightarrow 2^{x^2-3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

+ Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{x^2-3x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng 6.

Bài tập 10. Cho phương trình $\log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1$. Khi đặt $t = \log_5(5^x - 1)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2 - 1 = 0$.

B. $t^2 + t - 2 = 0$.

C. $t^2 - 2 = 0$.

D. $2t^2 + 2t - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

$\log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1 \quad (1)$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

Ta có $\log_{25}(5^{x+1} - 5) = \log_{5^2}(5 \cdot 5^x - 5) = \frac{1}{2}(\log_5(5^x - 1) + 1)$.

Đặt $t = \log_5(5^x - 1)$ ($t > 0$).

Phương trình (1) trở thành $t \cdot \frac{1}{2}(t + 1) = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$.

Bài tập 11. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x} - 6^{\log x} - 18.3^{2\log x} = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a ?

A. $(a-10)^2 = 1$.

B. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}$.

C. $a^2 + a + 1 = 2$.

D. $a = 10^2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > 0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\log x}$ ta được $4\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} - 18 = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}$, $t > 0$.

Ta có $4t^2 - t - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{4} \\ t = -2(L) \end{cases}$.

Với $t = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

Vậy $a = 100 = 10^2$.

Bài tập 12. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$

A. $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

B. 1.

C. $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{\log_2 x + 1} = t$, ($t \geq 0$) $\Rightarrow \log_2 x = t^2 - 1$ ta có phương trình

$$(t^2 - 1)^2 + t = 1 \Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t(t^3 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2 - 2t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = 1 \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 0$ thì $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1}$.

Với $t = 1$ thì $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 2^0$.

Với $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ thì $\log_2 x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $2^{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$.

Bài tập 13. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 2^{1 + \cos^2 x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $4 \leq m \leq 3\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2} \leq m \leq 5$. C. $0 < m \leq 5$. **D. $4 \leq m \leq 5$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{\sin^2 x} + 2^{1 + \cos^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 2^{2 - \sin^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + \frac{4}{2^{\sin^2 x}} = m \quad (*)$.

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$, $t \in [1; 2]$, $(*)$ trở thành $t + \frac{4}{t} = m$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t}$ với $t \in [1; 2]$. Ta có $f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} = \frac{t^2 - 4}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin (1; 2) \\ t = -2 \notin (1; 2) \end{cases}$.

Khi đó $f(1) = 5$; $f(2) = 4$. Do đó $\min_{[1; 2]} f(t) = 4$ và $\max_{[1; 2]} f(t) = 5$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow \min_{[1; 2]} f(t) \leq m \leq \max_{[1; 2]} f(t) \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 5.$$

Vậy: $4 \leq m \leq 5$.

Bài tập 14. Cho phương trình $4^{\sqrt{1-x^2}} - (m-2) \cdot 2^{\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để phương trình có nghiệm?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \in [-1; 1]$.

Với $\forall x \in [-1; 1]$ thì $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$, do đó, $2^0 \leq 2^{\sqrt{1-x^2}} \leq 2^1$ hay $1 \leq 2^{\sqrt{1-x^2}} \leq 2$.

Đặt $t = 2^{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow t \in [1; 2]$. Phương trình trở thành: $t^2 - (m-2)t + 2m+1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = m(t-2) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 2t + 1}{t-2} = m \text{ (do } t=2 \text{ không là nghiệm của phương trình).}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{t-2}$ trên $[1; 2]$.

$$\text{Có } f'(x) = \frac{t^2 - 4t - 5}{(t-2)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [1; 2) \\ x = 5 \notin [1; 2) \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên

Do đó, để phương trình đã cho có nghiệm thì $m \leq -4$.

Suy ra, giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để phương trình có nghiệm là

$$m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4\}.$$

Vậy có 7 giá trị cần tìm của m .

Bài tập 15. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 2m = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0 \text{ phương trình trở thành } t^2 - 2m \cdot t + 2m = 0 \quad (2).$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ điều kiện là phương trình (2) có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$ thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 8$. Vậy điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ -\frac{b}{a} = 2m > 0 \\ \frac{c}{a} = 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Bài tập 16. Cho phương trình $\log_2^2 x - (m^2 - 3m)\log_2 x + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$.

A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_2^2 x - (m^2 - 3m)\log_2 x + 3 = 0 \quad (1).$$

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Đặt } \log_2 x = t. \text{ Ta được phương trình } t^2 - (m^2 - 3m)t + 3 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Ta có: } x_1 x_2 = 16 \Leftrightarrow \log_2(x_1 x_2) = 4 \Leftrightarrow \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 4.$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$.

$$\text{Vậy suy ra } m^2 - 3m = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài tập 17. Giá trị của m để phương trình $9^x + 3^x + m = 0$ có nghiệm là:

A. $m > 0$.

B. $m < 0$.

C. $m > 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 3^x \text{ với } t > 0. \text{ Khi đó phương trình đã cho trở thành: } t^2 + t + m = 0 \quad (*).$$

Phương trình đề cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có ít nhất một nghiệm dương.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 + t \text{ có } f'(t) = 2t + 1. \text{ Xét } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $t^2 + t = -m$ có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Bài tập 18. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi phương trình $t^2 - 2m.t + 2m = 0$ có 2 nghiệm $t > 0$ thỏa mãn $t_1.t_2 = 2^{x_1}.2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 8$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1.t_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

Bài tập 19. Với điều kiện nào sau đây của m thì phương trình $9^x - m.3^x + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $|m| > 2\sqrt{6}$.

B. $|m| > \sqrt{6}$.

C. $m > \sqrt{6}$.

D. $m > 2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3^x (t > 0)$ thì phương trình trở thành $t^2 - mt + 6 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 24 > 0 \\ m > 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2\sqrt{6} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt{6}.$$

Bài tập 20. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình $9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m > 1$ hoặc $m < \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{6}}{2}$.
C. $\frac{1}{2} < m < 1$. **D.** $m > \frac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m < \frac{3-\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0 \Leftrightarrow 9^{(x-1)^2} - (2m+1)15^{(x-1)^2} + (4m-2)25^{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2(x-1)^2} - (2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} + 4m-2 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$. Do $(x-1)^2 \geq 0$ nên $0 < t \leq 1$.

Phương trình có dạng: $t^2 - (2m+1)t + 4m-2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2m-1 \end{cases}$. Do $0 < t \leq 1$ nên $t = 2m-1$.

Để phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt thì $0 < 2m-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$.

Bài tập 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4 \cdot 4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $-1 < m < \frac{-1}{2}$. **B.** $m > 4+3\sqrt{2}$ hoặc $m < 4-3\sqrt{2}$.

C. $4-3\sqrt{2} < m < 4+3\sqrt{2}$. **D.** $m > -1$ hoặc $m < \frac{-1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại phương trình ta được: $\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2+2x+1} + (2m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1} - (6m+3) = 0$.

Ta không lấy giá trị $x = 0$ nên tại $m = 0$ đường thẳng $y = m$ vẫn cắt đồ thị tại duy nhất một điểm (điểm tiếp xúc tại $x = 3$).

Bài tập 23. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là

A. $\{3\}$.

B. $\{2\}$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2^{x^2}$. Do $x^2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$.

Ta có phương trình $t^2 - 4t + 6 - m = 0$ (1).

Do với mỗi $t > 1$ thì có hai nghiệm $x = \pm \sqrt{\log_2 t}$, còn với $t = 1$ chỉ có một nghiệm $x = 0$. Nên để phương trình ban đầu có đúng 3 nghiệm thì phương trình (1) có một nghiệm $t_1 = 1$ và một nghiệm $t_2 > 1$.

Phương trình (1) có nghiệm $t = 1$ khi $1 - 4 + 6 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Thay $m = 3$ vào (1), ta có: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$. Vậy $m = 3$ thỏa mãn.

Bài tập 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ có nghiệm thực?

A. 9.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} m + e^x \geq 0 \\ m + \sqrt{m + e^x} \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{m + e^x}$ ($t \geq 0$) ta suy ra: $\begin{cases} m + t = e^{2x} \\ t^2 = m + e^x \end{cases}$

$\Rightarrow e^{2x} - t^2 = t - e^x \Leftrightarrow (e^x - t)(e^x + t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - t = 0 & (1) \\ e^x + t + 1 = 0 & (2) \end{cases}$.

Phương trình (2) vô nghiệm vì $e^x + t + 1 > 0$.

Phương trình (1) tương đương với $e^x = t \Leftrightarrow e^x = \sqrt{m + e^x} \Leftrightarrow m = e^{2x} - e^x$ (3)

Phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x$ (*) có nghiệm thực khi phương trình (3) có nghiệm thực.

Xét hàm số $f(x)=e^{2x}-e^x$ với $x \in \mathbb{R}$, ta có: $f'(x)=2e^{2x}-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) \Leftrightarrow e^{2x}-e^x$ là

Lập bảng biến thiên

Số nghiệm của (3) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=e^{2x}-e^x$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình (3) có nghiệm khi $m \geq -\frac{1}{4}$.

Kết hợp với giả thiết m là số nguyên nhỏ hơn 10 ta suy ra $m \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Dạng 3: Phương pháp logarit hóa, mũ hóa

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1. Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 4$.

B. $S = 5$.

C. $S = 6$.

D. $S = 8$.

3. Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 0$.

$$\text{Phương trình } 27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72 \Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)} \cdot 2^x = 3^2 \cdot 2^3 \Leftrightarrow \frac{3^{\frac{3x-3}{x}}}{3^2} = \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2} = 2^{3-x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = \log_3 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = -(x-3) \log_3 2 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{x} + \log_3 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ -\log_3 2 = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3(N) \\ x=-\log_2 3(N) \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$. Vậy tổng $S = a + b = 5$.

Bài tập 2. Phương trình $\log_2(5-2^x) = 2-x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $P = x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

A. 11.

B. 9.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2^x < 5$

$$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 2.$$

Bài tập 3. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2} \cdot 3^{-x} = 1$. Tìm S.

A. $S = \log_7 3$.

B. $S = \log_3 7$.

C. $S = \log_2 3$.

D. $S = \log_3 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

$$7^{x^2} \cdot 3^{-x} = 1 \Leftrightarrow \log_3(7^{x^2} \cdot 3^{-x}) = \log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 7^{x^2} + \log_3 3^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \log_3 7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x \log_3 7 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\log_3 7} = \log_7 3 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là $S = \log_7 3$.

Lấy logarit cơ số 3
hoặc cơ số 7 hai vế.

Bài tập 4. Phương trình $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$ có một nghiệm dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Giá trị của $P = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

A. $P = 8$.

B. $P = 5$.

C. $P = 13$.

D. $P = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15 \Leftrightarrow \frac{3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}}}{3 \cdot 5} = 1 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \log_3 \left(3^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{x-1} + \log_3 5^{\frac{x-1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x-1 + \frac{x-1}{x} \cdot \log_3 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \cdot \log_3 5 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\log_3 5 \end{cases}$$

Vậy $a = 3, b = 5$ suy ra $a + 2b = 13$.

Dạng 4: Phương biến đổi thành tích

1. Phương pháp

(thường sử dụng trong trường hợp hai vế không cùng cơ số).

Hướng giải: Biến đổi phương trình về dạng:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b. (0 < a, b \neq 1, 0 < c \neq 1).$$

Lưu ý: Ta thường lôgarit hóa hai vế với cơ số a hoặc b.

2. Bài tập

Bài tập 1. Giải phương trình $\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 35.

B. 5.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

$$\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x \Leftrightarrow (\log_2 x + x - 3)(\log_3 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \log_2 x + x - 3 = 0 \end{cases}$$

Ta có hàm số $f(x) = \log_2 x + x$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $f(2) = 3$ nên phương trình $\log_2 x + x - 3 = 0$ có một nghiệm $x = 2$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng 5.

Bài tập 2. Số nghiệm của phương trình $4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2x} + 25 \cdot 2^x = 100 + 100^{\frac{x}{2}}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. vô nghiệm.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2x} + 25 \cdot 2^x = 100 + 100^{\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 5^x + 25 \cdot 2^x = 100 + 10^x \Leftrightarrow (4 - 2^x) \cdot (5^x - 25) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Bài tập 3. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x \cdot \log_3 (2x - 1) = 2 \log_2 x$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐK: } x > \frac{1}{2}.$$

$$\log_2 x \cdot \log_3 (2x-1) = 2 \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot (\log_3 (2x-1) - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_3 (2x-1) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x-1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (n)} \\ x = 5 \text{ (n)} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài tập 3. Biết n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x - 3^{-x} = 2 \cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x + 9^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx$.

A. 4036.

B. 2018.

C. 4035.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

$$9^x + 9^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx \Leftrightarrow 9^x + 9^{-x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} = 2 + 2 \cos 2nx$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3^{-x})^2 = 4 \cos^2 nx \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 3^{-x} = 2 \cos nx \text{ (1)} \\ 3^x - 3^{-x} = -2 \cos nx \text{ (2)} \end{cases}$$

Khi đó nếu (1) và (2) có nghiệm chung thì $3^x - 3^{-x} = 3^{-x} - 3^x \Leftrightarrow 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = 0$

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $3^0 - 3^0 = 2 \cos 0 \Leftrightarrow 0 = 2$, tức là (1) và (2) không có nghiệm chung.

Mặt khác ta thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ sẽ là nghiệm của (2)

Mà (1) có 2018 nghiệm nên (2) cũng có 2018 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4036 nghiệm.

Bài tập 4. Cho phương trình $\log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 |x - \sqrt{x^2 - 1}|$. Biết phương trình có

một nghiệm là 1 và một nghiệm còn lại có dạng $x = \frac{1}{2} (a^{\log_b c} + a^{-\log_b c})$ (với a, c là các số nguyên tố và $a > c$). Khi đó giá trị của $a^2 - 2b + 3c$ bằng:

A. 0.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2 - 1}|$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 6 \cdot \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) [\log_3 6 \cdot \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0 & (1) \\ \log_3 6 \cdot \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 6 = -1 \Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 3$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 2^{\log_6 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2^{\log_6 3} \\ x^2 - 1 = (2^{\log_6 3} - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(2^{\log_6 3} + 2^{-\log_6 3}).$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}). \text{ (thỏa mãn } (*) \text{)}$$

Như vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 1$, $x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$.

Khi đó $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$. Vậy $a^2 - 2b + 3c = 3$.

Bài tập 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2 - 7x + 12} + 3^{2x - x^2} = 9 \cdot 3^{10 - 5x} + m$ có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S .

A. 3.

B. Vô số.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $m.3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9.3^{10-5x} + m \Leftrightarrow m(3^{x^2-7x+12} - 1) - 3^{2x-x^2}(3^{x^2-7x+12} - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (3^{x^2-7x+12} - 1)(m - 3^{2x-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-7x+12} - 1 = 0 \\ m - 3^{2x-x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ 2x - x^2 - \log_3 m = 0 (*) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt, ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: (*) có một nghiệm $x = 3$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4.

Thay $x = 3$ vào (*) ta được $\log_3 m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}$. Khi đó (*) trở thành

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (Thỏa yêu cầu).}$$

Trường hợp 2: (*) có một nghiệm $x = 4$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4.

Thay $x = 4$ vào (*) ta được $\log_3 m = -8 \Leftrightarrow m = 3^{-8}$.

Khi đó (*) trở thành $-x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$ (Thỏa yêu cầu).

Trường hợp 3: (*) có nghiệm kép khác 3 và 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - \log_3 m = 0 \\ \log_3 m \neq -3 \\ \log_3 m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Bài tập 6. Phương trình $\ln\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{8}\right) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x - \frac{1}{2} > 0 \\ x + \frac{1}{2} > 0 \\ x + \frac{1}{4} > 0 \\ x + \frac{1}{8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{4} \\ x > -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Khi đó:

$$\ln\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot \ln\left(x + \frac{1}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \ln\left(x + \frac{1}{4}\right) = 0 \\ \ln\left(x + \frac{1}{8}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 1 \\ x + \frac{1}{2} = 1 \\ x + \frac{1}{4} = 1 \\ x + \frac{1}{8} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{7}{8} \end{cases}.$$

So với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Bài tập 7. Gọi a là một nghiệm của phương trình $(26 + 15\sqrt{3})^x + 2(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x = 1$. Khi đó giá trị của biểu thức nào sau đây là đúng?

- A.** $a^2 + a = 2$. **B.** $\sin^2 a + \cos a = 1$. **C.** $2 + \cos a = 2$. **D.** $3^a + 2a = 5$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } (26 + 15\sqrt{3})^x + 2(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x = 1.$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{3x} + 2(2 + \sqrt{3})^{2x} - 2(2 + \sqrt{3})^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{4x} + 2(2 + \sqrt{3})^{3x} - (2 + \sqrt{3})^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(2 + \sqrt{3})^{3x} - 1\right] \left[(2 + \sqrt{3})^x + 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \sin^2 a + \cos a = 1.$$

Bài tập 8. Gọi A là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho tập nghiệm của phương trình $x \cdot 2^x = x(x - m + 1) + m(2^x - 1)$ có hai phần tử. Tìm số phần tử của A .

- A.** 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét phương trình } x \cdot 2^x = x(x - m + 1) + m(2^x - 1)$$

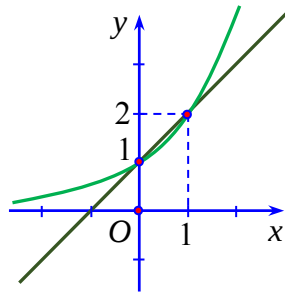
$$\Leftrightarrow (x-m)(2^x - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 2^x = x + 1 \end{cases}$$

Mà phương trình $2^x = x + 1$ có hai nghiệm là $x = 0$; $x = 1$.

Thật vậy: dựa vào hình vẽ

○ Với $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$ thì $2^x \geq x + 1$, đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

○ Với $0 < x < 1$ thì $2^x < x + 1 \Rightarrow$ phương trình $2^x = x + 1$ vô nghiệm.



Do đó tập A có hai phần tử khi $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Dạng 5: Phương pháp sử dụng tính đơn điệu

1. Phương pháp

* Ta thường sử dụng các tính chất sau:

- Tính chất 1: Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = C$ có không quá một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = C$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = C$)
- Tính chất 2: Nếu hàm f tăng trong khoảng $(a;b)$ và hàm g là hàm một hàm giảm trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.
(do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$)

2. Bài tập

Bài tập 1. Số nghiệm của phương trình $2018^x + x^2 = \sqrt{2016 + \sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = 2018^x + x^2 - \sqrt{2016 + \sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}}$, $D = \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x) = 2018^x \cdot \ln 2018 + 2x$

M, A, B liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2018^x \cdot \ln 2018 + 2x$$

$$f''(x) = 2018^x \cdot \ln^2 2018 + 2 > 0, \forall x$$

Từ đó $f'(x)$ đồng biến trên D mà $f'(-1) \cdot f'(0) < 0$ nên $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; 0)$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm, mặt khác nhập hàm số vào TABLE của casio (START -10 END 10 STEP 1), ta được:

	X	F(X)
3	-8	18.959
4	-7	3.9595
5	-6	-9.04

-6

	X	F(X)
10	-1	-44.03
11	0	-44.04
12	1	1973.9

1

Dựa vào TABLE ta được
$$\begin{cases} f(-7) \cdot f(-6) < 0 \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho chỉ có hai nghiệm trên hai khoảng $(-7; -6)$ và $(0; 1)$.

Chú ý: Máy tính hiển thị “Insufficient MEM” thì tiến hành cài đặt để không xuất hiện $g(x)$ bằng cách bấm SHIFT MODE mũi tên xuống, 5, 1.

Bài tập 2. Tập nghiệm của phương trình $\log(x^2 - x - 6) + x = \log(x + 2) + 4$ là:

A. $\{1\}$.

B. $\{4\}$.

C. $\{3\}$.

D. $\{2\}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log(x + 2)(x - 3) + x = \log(x + 2) + 4 \Leftrightarrow \log(x - 3) = 4 - x(*).$$

Vế trái của phương trình cuối là hàm tăng, còn vế phải là hàm giảm nên nghiệm của phương trình (nếu có) là duy nhất.

Bằng cách nhẩm nghiệm ta chọn kết quả $x = 4$.

Bài tập 3. Cho x, y là các số thực thỏa $\log_2 x = 3 \log_6 y = 3 \log(x + y)$. Tìm giá trị $T = x - y$.

A. $T = 28$.

B. $T = 22$.

C. $T = 34$.

D. $T = 30$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \log_2 x = 3 \log_6 y = 3 \log(x+y) = 3t \Rightarrow \begin{cases} x = 8^t \\ y = 6^t \\ x+y = 10^t \end{cases} \Rightarrow 8^t + 6^t = 10^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t = 1 \quad (1).$$

Nhận xét: $t = 2$ là nghiệm của phương trình (1).

Với $t > 2$: $\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$. Vậy $t > 2$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $t < 2$: $\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t > \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$. Vậy $t < 2$ không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất của (1).

$$\text{Khi đó, ta có } \begin{cases} x = 8^2 = 64 \\ y = 6^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow T = x - y = 28.$$

Bài tập 4. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017; 2017]$.

A. 1284.

B. 4034.

C. 1285.

D. 4035.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } 2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$$

Đặt $\sin^2 x = t$ với $t \in [0; 1]$, ta có phương trình

$$2^t + \frac{3}{3^t} = 4 \cdot 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t = 4. \text{ Vì hàm số } f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t \text{ nghịch biến với } t \in [0; 1]$$

nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 0$. Do đó $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [-2017; 2017]$ nên ta có $-2017 \leq k\pi \leq 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017}{\pi} \leq k \leq \frac{2017}{\pi}$ nên có 1285 giá trị nguyên của k thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

Bài tập 5. Tìm số nghiệm của phương trình $2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2017^x + 2018^x = 2017 - x$.

A. 1.

B. 2016.

C. 2017.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2017^x + 2018^x$

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + \dots + 2018^x \ln 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y = 2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2017^x + 2018^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $g(x) = 2017 - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0) = g(0) = 2017$.

Do đó, phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài tập 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\frac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x}$ có nghiệm duy nhất.

A. $a \in \mathbb{R}$.

B. $-1 < a < 0$.

C. $a > 0$.

D. không tồn tại a .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x} \Leftrightarrow a = (3^x + 3^{-x})(3^x - 3^{-x}) \Leftrightarrow a = 3^{2x} - 3^{-2x} \quad (1)$.

Xét hàm số $f(x) = 3^{2x} - 3^{-2x}$.

Có $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^{-2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra với mọi giá trị của a thì (1) luôn có nghiệm duy nhất.

Bài tập 7. Số nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{2} + x - \ln(x^2 - 2) = 2018$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x^2 - 2)$ với $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = x + 1 - \frac{2x}{x^2 - 2}$; $f''(x) = 1 + \frac{2x^2 + 4}{(x^2 - 2)^2} > 0, \forall x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Nên suy ra hàm số $f'(x) = x + 1 - \frac{2x}{x^2 - 2}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Mặt khác $f'(2) \cdot f'(\sqrt{3}) = 1 \cdot (1 - \sqrt{3}) < 0$ và $f'(-3) \cdot f'(-2) = -\frac{8}{7} \cdot 1 < 0$ nên $f'(x)$ có đúng một nghiệm $a \in (-\infty; -\sqrt{2})$ và đúng một nghiệm $b \in (\sqrt{2}; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên

Ta có $f(a) < f(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2} - \sqrt{3} < 2018$ và $f(b) < f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2} + \sqrt{3} < 2018$

Bài tập 8. Tìm số thực a để phương trình: $9^x + 9 = a3^x \cos(\pi x)$, chỉ có duy nhất một nghiệm thực

A. $a = -6$.

B. $a = 6$.

C. $a = -3$.

D. $a = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình. Ta có $9^{x_0} + 9 = a \cdot 3^{x_0} \cos(\pi x_0)$.

Khi đó $2 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

$$\text{Thật vậy } 9^{2-x_0} + 9 = a3^{2-x_0} \cos[\pi(2-x_0)] \Leftrightarrow \frac{81}{9^{x_0}} + 9 = a \frac{9}{3^{x_0}} \cos(\pi x_0)$$

$$\Leftrightarrow 9^{x_0} + 9 = a \cdot 3^{x_0} \cos(\pi x_0).$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow a = -6$.

Ngược lại, với $a = -6$, phương trình $9^x + 9 = -6 \cdot 3^x \cos(\pi x) \Leftrightarrow 3^x + \frac{9}{3^x} = -6 \cos(\pi x)$.

$$+ 3^x + \frac{9}{3^x} \geq 6$$

$$+ -6 \cos(\pi x) \leq 6$$

Khi đó dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3^x + \frac{9}{3^x} = 6 \\ \cos \pi x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $9^{x_0} + 9 = a.3^{x_0} \cos(\pi x_0)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = -6$.

Bài tập 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1 \Leftrightarrow e^{2x+y+1} + (2x + y + 1) = e^{3x+2y} + (3x + 2y)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng: $f(2x + y + 1) = f(3x + 2y) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 3x + 2y \Leftrightarrow y = 1 - x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được: $\log_2^2 x - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình có dạng: $t^2 - (m + 4)t + m^2 + 4 = 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{8}{3}$.

Do đó có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Bài tập 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x + 2y - 1) - (m + 6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$.

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y} + (3x + 5y) = e^{x+3y+1} + (x + 3y + 1)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng: $f(3x + 5y) = f(x + 3y + 1) \Leftrightarrow 3x + 5y = x + 3y + 1 \Leftrightarrow 2y = 1 - 2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được: $\log_3^2 x - (m + 6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình có dạng: $t^2 - (m + 6)t + m^2 + 9 = 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Bài tập 11. Gọi $x_0 = \frac{a+b\sqrt{3}}{c}$ là một nghiệm lớn hơn 1 của phương trình $2x \left[\left(\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{1-x} + 1 \right] = 2x^2 - 1$.

Giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$.

B. $P = 0$.

C. $P = 2$.

D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$2x \left[\left(\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{1-x} + 1 \right] = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{x-1} + 1 = x - \frac{1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}} + \frac{1}{2x} = 3^{x-1} + x - 1 \quad (1). \text{ Xét hàm số } f(t) = 3^t + t \quad (t \neq 0), \quad f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2x}\right) = f(x-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=1, b=1, c=2. \text{ Vậy } P=4.$$

Bài tập 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\ln(m + \ln(m+x)) = x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m \geq 0$.

B. $m > 1$.

C. $m < e$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\ln(m + \ln(m+x)) = x \quad (1)$.

Điều kiện $x > e^{-m} - m$.

Đặt $\ln(m+x) = y$ ta được $e^y - m = x$. Thay vào (1) ta được $\ln(m+y) = x \Leftrightarrow e^x - m = y$.

Ta có hệ $\begin{cases} e^x - m = y \\ e^y - m = x \end{cases} \Rightarrow e^x - e^y = y - x \Rightarrow e^x + x = e^y + y$. Do hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên

$\mathbb{R}$ nên suy ra $x = y \Rightarrow x = \ln(x+m) \Leftrightarrow e^x - x = m$.

Xét hàm số $g(x) = e^x - x$; $g'(x) = e^x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

BBT

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Suy ra phương trình có nhiều nhất là hai nghiệm $\Leftrightarrow m > 1$. (chú ý nghiệm luôn thỏa điều kiện).

Bài tập 13. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$$

Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3.

B. Vô số.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

Ta có:

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 5x + 1 - m) - (x^2 - 5x + 1 - m)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2). \text{ Điều này đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:

- Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi

$$-\frac{25}{4} < m-1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 14. Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_m(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A. Vô số.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$\text{Đặt } t = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \text{ thì } t' = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{(x - \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} \ln 2} < 0$$

BBT:

x	1	$+\infty$
t'		-
t	0	$-\infty$

Do $x > 2 \Rightarrow t < \log_2(2 - \sqrt{3})$.

Phương trình trở thành $t \cdot \log_5 2^t = \log_m \frac{1}{2^t} \Leftrightarrow t \cdot \log_5 2 = -\log_m 2 \Leftrightarrow \log_5 m = -\frac{1}{t}$

Ycbt $\log_5 m < -\frac{1}{\log_2(2 - \sqrt{3})} \Leftrightarrow m < 5^{-\frac{1}{\log_2(2 - \sqrt{3})}}$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ và $m \neq 1$ nên $m = 2$.

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{3m + 27} \sqrt[3]{3m + 27} \cdot 2^x = 2^x$ có nghiệm thực?

A. 6.

B. 4.

C. Vô số.

D. Không tồn tại m .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \sqrt[3]{3m+27}\sqrt[3]{3m+27.2^x} = 2^x \Leftrightarrow 27\sqrt[3]{3m+27.2^x} = 2^{3x} - 3m. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } 2^x = u, \text{ điều kiện: } u > 0 \text{ và } \sqrt[3]{3m+27.2^x} = v \Rightarrow v^3 = 3m+27u. \quad (2)$$

$$(1) \text{ trở thành } u^3 = 27v + 3m. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (3) và (2) suy ra } u^3 - 27v &= v^3 - 27u \Leftrightarrow (u-v) \cdot (u^2 + uv + v^2 + 27) = 0 \\ &\Leftrightarrow u = v. \end{aligned}$$

$$\text{Do } u^2 + uv + v^2 + 4 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3v^2}{4} + 27 > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}, \text{ nên}$$

$$\sqrt[3]{3m+27u} = u \Leftrightarrow m = \frac{u^3 - 27u}{3}, \text{ với } u > 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(u) = \frac{u^3 - 27u}{3} \text{ với } u > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(u) = \frac{1}{3}(3u^2 - 27); f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 3 \text{ do } u > 0.$$

Suy ra $\min_{(0;+\infty)} f(u) = -54$. Do đó có vô số giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm thực.

Bài tập 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m.2^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. Vô số.

B. 0.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } 4^x - m.2^x + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - m.2^x + 2m - 5 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0, \text{ phương trình thành } t^2 - mt + 2m - 5 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } f(t) = t^2 - mt + 2m - 5$$

Nhận xét rằng với một giá trị $t > 0$ ta tìm được một nghiệm x nên để phương trình có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_2 > t_1 > 0$ đồng thời $t_1 < 1 < t_2$ (vì $2^{x_1} < 2^0 < 2^{x_2}$). Từ đó, ta có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ 1. f(t) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(2m - 5) > 0 \\ 2m - 5 > 0 \\ m > 0 \\ 1. (1 - m + 2m - 5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 20 > 0 \\ m > \frac{5}{2} \\ m > 0 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Bài tập 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1} (*)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 3. B. Vô số. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $t = 2^x, t > 0$, phương trình (*) $\Leftrightarrow t + 3 = m\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ xác định trên tập $D = (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1-3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
y'			$+$	0	$-$
y			3	$\sqrt{10}$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $1 < m \leq 3$ hoặc $m = \sqrt{10}$ phương trình có nghiệm duy nhất nên có hai giá trị nguyên của tham số m .

Bài tập 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $2.4^{\sqrt{x}-1} - 5.2^{\sqrt{x}-1} + m = 0, (*)$ có nghiệm?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t = 2^{\sqrt{x}-1}$, điều kiện $t \geq \frac{1}{2}$ vì $\sqrt{x}-1 \geq -1$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 2t^2 - 5t = -m$.

Xét hàm số $y = -2t^2 + 5t$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $y' = -4t + 5$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$	
y'			+	0	-
y			2	$\frac{25}{8}$	$-\infty$

Do đó phương trình có nghiệm khi $m \leq \frac{25}{8}$.
