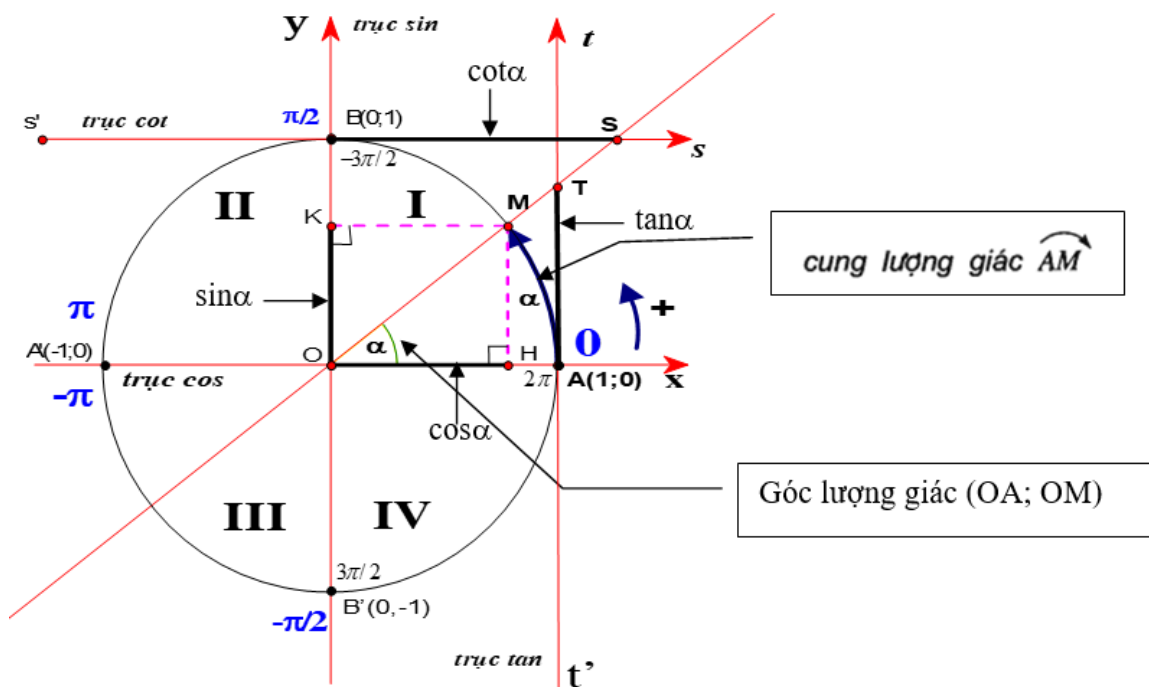


ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Chuyên đề 1

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC HAY CUNG LƯỢNG GIÁC



1. Đường tròn lượng giác

- ▶ Là đường tròn có tâm O trong mặt phẳng Oxy và có bán kính $R = 1$.
- ▶ $A(1;0)$ là điểm gốc của đường tròn lượng giác.
- ▶ Chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ.
- ▶ Chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ.

2. Giá trị lượng giác

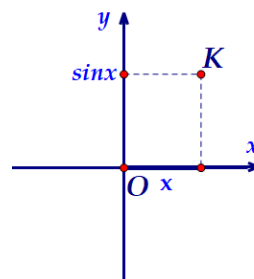
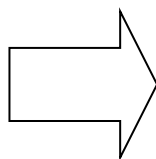
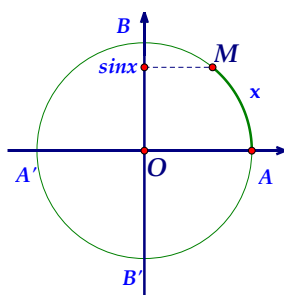
Cho cung $AM = \alpha$

- ☛ $\sin \alpha = \overline{OK} = \text{Tung độ của điểm } M$.
- ☛ $\cos \alpha = \overline{OH} = \text{Hoành độ của điểm } M$.
- ☛ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AT}$ (Kéo dài OM cắt tiếp tuyến t' tại T)
- ☛ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \overline{BS}$ (Kéo dài OM cắt tiếp tuyến s' tại S , với $B(0;1)$)

3. Hàm số lượng giác

a) Hàm số sin

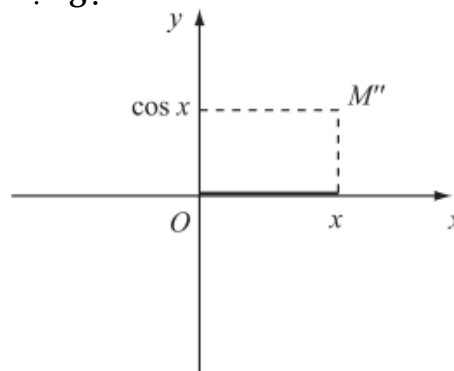
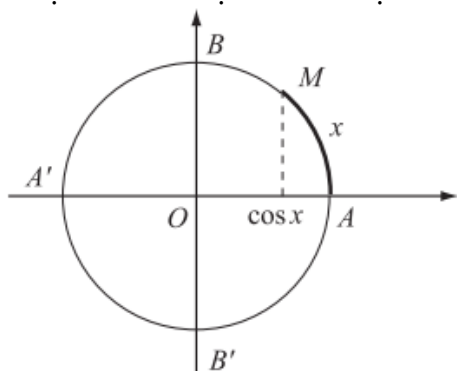
Đặt mỗi giá trị x với duy nhất điểm M trên đường tròn lượng giác mà số đo cung $\widehat{AM}$ bằng x . Điểm M có tung độ hoàn toàn xác định đó là $\sin x$



Định nghĩa	Tập xác định	Tập giá trị	Đồ thị
$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \sin x$	$D = \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R})$	$T = [-1; 1]$ $-1 \leq \sin x \leq 1$	

b) Hàm số cosin

Quy tắc đặt mỗi số thực x với một số thực $\cos x$ được gọi là hàm số cosin



Định nghĩa	Tập xác định	Tập giá trị	Đồ thị
$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \cos x$	$D = \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R})$	$T = [-1; 1]$ $-1 \leq \sin x \leq 1$	

c) Hàm số tang

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0.$$

Ký hiệu: $y = \tan x$

Định nghĩa	Tập xác định	Tập giá trị	Đồ thị
$\tan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$	$T = \mathbb{R}$	

d) Hàm số cotang

Hàm số cotang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0.$$

Ký hiệu: $y = \cot x$

Định nghĩa	Tập xác định	Tập giá trị	Đồ thị
$\cot : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $(x \neq k\pi)$	$T = \mathbb{R}$	

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC



1. Hệ thức cơ bản

$$\begin{aligned} \diamond \sin^2 a + \cos^2 a = 1 &\rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \\ 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a} \end{cases} & \diamond \tan a \cdot \cot a = 1 &\rightarrow \begin{cases} \tan a = \frac{1}{\cot a} \\ \cot a = \frac{1}{\tan a} \end{cases} \\ \diamond \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} &\rightarrow \sin a = \tan a \cos a & \diamond \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} &\rightarrow \cos a = \cot a \cdot \sin a \end{aligned}$$

2. Cung liên kết

$\cos(-a) = \cos a$ $\sin(-a) = -\sin a$ $\tan(-a) = -\tan a$ $\cot(-a) = -\cot a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$ $\cos(\pi - a) = -\cos a$ $\tan(\pi - a) = -\tan a$ $\cot(\pi - a) = -\cot a$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

3. Công thức cộng

$$\begin{aligned} \diamond \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a \\ \diamond \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \diamond \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b} \\ \diamond \cot(a \pm b) &= \frac{1}{\tan(a \pm b)} \end{aligned}$$

Áp dụng công thức cộng ta được

$$\begin{aligned} \sin x \pm \cos x &= \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x \pm \sin x &= \sqrt{2} \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

...

4. Cung liên kết		5. Công thức nhân đôi
$\sin(a + \pi) = -\sin a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	♦ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
$\cos(a + \pi) = -\cos a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	♦ $\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 1 - 2\sin^2 a \\ 2\cos^2 a - 1 \end{cases}$
$\tan(a + \pi) = \tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	♦ $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$
$\cot(a + \pi) = \cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	♦ $\cot 2a = \frac{1}{\tan 2a} = \frac{1 - \tan^2 a}{2 \tan a}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	♦ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$	6. Công thức hạ bậc
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$	♦ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$	* $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \Rightarrow 1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$
$\sin(a + k.2\pi) = \sin a$	♦ $\cos(a + k.2\pi) = \cos a$	* $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \Rightarrow 1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$
$\tan(a + k\pi) = \tan a$	♦ $\cot(a + k\pi) = \cot a$	* $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$
7. Công thức biến tích thành tổng		8. Công thức biến tổng thành tích
* $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$		* $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a + b}{2}\right) \cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$
* $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$		$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a + b}{2}\right) \sin\left(\frac{a - b}{2}\right)$
* $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$		* $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a + b}{2}\right) \cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$
* $\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$		$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a + b}{2}\right) \sin\left(\frac{a - b}{2}\right)$
		* $\tan a \pm \tan b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$

Ghi chép:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VẤN ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. PHƯƠNG PHÁP

1. $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{radian} \\ \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array} \right], k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$ hoặc $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{độ} \\ \left[\begin{array}{l} u = v + k360^\circ \\ u = 180^\circ - v + k360^\circ \end{array} \right], k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

2. $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{radian} \\ \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array} \right], k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$ hoặc $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{độ} \\ \left[\begin{array}{l} u = v + k360^\circ \\ u = -v + k360^\circ \end{array} \right], k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

3. $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{radian} \\ u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$ hoặc $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{độ} \\ u = v + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

4. $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{radian} \\ u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$ hoặc $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{độ} \\ u = v + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

5. $\sin x = m \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{radian} \\ \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array} \right], k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

6. $\cos x = m \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{radian} \\ \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array} \right], k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

7. $\tan x = m \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{radian} \\ x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

8. $\cot x = m \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{radian} \\ x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

ĐẶC BIỆT

 $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

 $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

 $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$

 $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$

 $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$

 $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$

✿ Ghi chép bổ sung

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{2\pi}{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin(x - 30^\circ) = \sin 20^\circ$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin x (\cos x + 2) = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Giải phương trình $2\sin x = -1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = -1$.

Lời giải

Ví dụ 6. Giải phương trình $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2} = 0$.

Lời giải

Ví dụ 7. Giải phương trình $2\sin(x - 60^\circ) - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

Ví dụ 9. Giải phương trình $\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ví dụ 10. Giải phương trình $5\sin x = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sin(x-2) = \frac{2}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12. Giải phương trình $\cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{7}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 13. Giải phương trình $\cos(x - 40^\circ) = \cos 10^\circ$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 14. Giải phương trình $2\cos x = -1$.

Lời giải

.....

.....

Ví dụ 15. Giải phương trình $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$.

Lời giải

Ví dụ 16. Giải phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

Ví dụ 17. Giải phương trình $2\cos(x + 30^\circ) + \sqrt{2} = 0$.

Lời giải

Ví dụ 18. Giải phương trình $3\cos x + \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

Ví dụ 19. Giải phương trình $5\cos(2x - 1) - 3 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 20. Giải phương trình $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{7}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 21. Giải phương trình $\tan(x + 48^\circ) = \tan 25^\circ$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 22. Giải phương trình $\tan x = \sqrt{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 23. Giải phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 24. Giải phương trình $\tan(x - 30^\circ) + 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 25. Giải phương trình $2 \tan x + 5 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 26. Giải phương trình $\cot\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \cot \frac{\pi}{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 27. Giải phương trình $\cot(x + 28^\circ) = \cot 12^\circ$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 28. Giải phương trình $\sqrt{3} \cot x + 3 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 29. Giải phương trình $\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 30. Giải phương trình $\cot(2x + 20^\circ) - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 31. Giải phương trình $3\cot x - \sqrt{5} = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 32. Giải phương trình $\cos x + \sin x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 33. Giải phương trình $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

Lời giải

.....

.....

Ví dụ 34. Giải phương trình $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0$.

Lời giải

Ví dụ 35. Giải phương trình $\sin 2x - \sin 2x \cos x = 0$.

Lời giải

Ví dụ 36. Giải phương trình $\cos x - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$.

Lời giải

Ví dụ 37. Giải phương trình $\sin 3x - \sin x = 0$.

Lời giải

Ví dụ 38. Giải phương trình $\cos 4x = \sin x$.

Lời giải

.....
.....
.....

Ví dụ 39. Phương trình $2\cos^2 x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

.....
.....
.....

Ví dụ 40. Giải phương trình $\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 0$

Lời giải

.....
.....
.....

Ví dụ 41. Giải phương trình $\tan x(\cos x + 1) = 0$

Lời giải

.....
.....
.....

Ví dụ 42. Giải phương trình $(\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

Lời giải

.....
.....
.....

Ví dụ 43. Phương trình $\sin 2x + 3\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2022)$

Lời giải

.....
.....
.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1. \sin 2x = \sin \frac{2\pi}{7}.$$

$$2. \sin 3x - \sin x = 0.$$

$$3. \sin 5x + \sin 2x = 0.$$

$$4. \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$5. \sin(x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$6. 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0.$$

$$7. 2 \sin(2x + 60^\circ) - 1 = 0.$$

$$8. \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$9. \sin\left(\frac{2x}{3} - 30^\circ\right) = 0.$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$1. \cos 3x = \cos \frac{5\pi}{8}.$$

$$2. \cos 3x - \cos x = 0.$$

$$3. \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. \cos(x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$5. 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

$$6. 2 \cos(2x - 60^\circ) + 1 = 0.$$

$$7. \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0.$$

$$8. \cos\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right) - 1 = 0.$$

$$9. \cos^2 2x = \frac{1}{4}.$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

$$1. \cos 3x = \sin 2x.$$

$$2. \cos 3x - 2 \cos \frac{\pi}{4} = 0.$$

$$3. \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$4. \cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

$$5. 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

$$6. 2 \cos(2x - 60^\circ) - 1 = 0.$$

$$7. \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0.$$

$$8. \cos\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right) = 1.$$

$$9. \sin^2 2x = \frac{1}{4}.$$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

$$1. \sin x - \cos x = 1.$$

$$2. \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

$$3. \sin x - 2 \cos x = 1.$$

$$4. \cos x - \sqrt{2} \sin x = 0.$$

$$5. \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin 3x.$$

$$6. \sin x + \cos x = \sin \frac{\pi}{4}.$$

VẤN ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THEO MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC



A. PHƯƠNG PHÁP

Cho u là 1 góc lượng giác chứa ẩn x

☛ 1. $a \sin^2 u + b \sin u + c = 0$ ☛ Đặt $t = \sin u$ với điều kiện $-1 \leq t \leq 1$.

Phương trình đã cho trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (*)

☛ 2. $a \cos^2 u + b \cos u + c = 0$ ☛ Đặt $t = \cos u$ với điều kiện $-1 \leq t \leq 1$.

Phương trình đã cho trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (*)

☛ 3. $a \tan^2 u + b \tan u + c = 0$ ☛ Đặt $t = \tan u$

Phương trình đã cho trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (*)

☛ 4. $a \cot^2 u + b \cot u + c = 0$ ☛ Đặt $t = \cot u$

Phương trình đã cho trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (*)

📖 Giải phương trình (*) tìm t và so t tìm được với điều kiện (nếu có).

📖 Thay lại t bằng giá trị lượng giác tương ứng để tìm nghiệm x .

Δ Ghi chú

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$.

Lời giải

Ví dụ 2. Giải phương trình $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$.

Lời giải

Ví dụ 3. Giải phương trình $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$.

Lời giải

Ví dụ 4. Giải phương trình $\cot^2 x - \cot x - 12 = 0$.

Lời giải

Ví dụ 5. Giải phương trình $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$.

Lời giải

Ví dụ 6. Giải phương trình $2\cos 2x + \cos x = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Giải phương trình $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 9. Giải phương trình $2\cos^2 x - \sin^2 x - 4\cos x + 2 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sin x - 2\cos^2 x + 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11. Giải phương trình $\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12. Giải phương trình $\tan^2 x + \tan x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 13. Giải phương trình $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + \tan^2 x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 14. Giải phương trình $\frac{1}{\sin^2 x} = 2 \cot x + \cot^2 x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 15. Giải phương trình $3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 16. Giải phương trình $3 \cot^2 x - 5 \cot x - 8 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 17. Giải phương trình $\sqrt{3} \tan x - 6 \cot x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 18. Giải phương trình $\sin^2 \frac{x}{2} - 2\cos \frac{x}{2} + 2 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP

Bài 5. Giải các phương trình sau:

1. $\cos 2x + \cos^4 x - 2 = 0$.

2. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

3. $(1 + \cos x)(\cos 2x + \cos x) = -2\sin^2 x$.

4. $\sqrt{5 - 3\sin^2 x - 4\cos x} = 1 - 2\cos x$.

5. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x = 0$.

6. $\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{1}{8}\cos 4x = 0$.

7. $\sin^6 x + \cos^6 x = 2\sin^2 x$.

8. $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cdot \cos x = 0$.

VẤN ĐỀ 3

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SIN VÀ COS



A. PHƯƠNG PHÁP

Là phương trình lượng giác có dạng: $a \sin u \pm b \cos u = c$ (*)

Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2 + b^2 \geq c^2$

CÁCH GIẢI

Cách 1.

► Chia 2 vế của phương trình (*) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (**)$$

► Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, nên tồn tại một góc α sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha \text{ và } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$$

$$\text{Khi đó } (**) \Leftrightarrow \sin u \cdot \cos \alpha \pm \cos u \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(u \pm \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

❖ Cách 2.

► Nếu $a \neq 0$, chia 2 vế của phương trình (*) cho a , ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a} \quad (**)$$

► Luôn tồn tại một góc α sao cho $\frac{b}{a} = \tan \alpha$

$$\text{Khi đó: } (**) \Leftrightarrow \sin x \pm \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos \alpha \pm \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin(x \pm \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

ĐẶC BIỆT

🏠 Nếu $c = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow a \sin u \pm b \cos u = 0 \quad (**)$

Chia 2 vế của phương trình (**) cho $\cos u$, ta được: $(**) \Leftrightarrow a \frac{\sin u}{\cos u} \pm b = 0 \Leftrightarrow a \tan u \pm b = 0$.

🏠 Nếu $a = |b| = 1$ thì $(*) \Leftrightarrow \sin u \pm \cos u = c \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(u \pm \frac{\pi}{4}\right) = c$

MỞ RỘNG

Cách giải phương trình $a \sin u \pm b \cos u = c$ còn được dùng đối với các dạng sau:

🏠 **Dạng 1:** $a \sin u \pm b \cos u = \sqrt{a^2+b^2} \sin v$

🏠 **Dạng 2:** $a \sin u \pm b \cos u = \sqrt{a^2+b^2} \cos v$

△Chú ý

$$\sin a \cos b \pm \sin b \cos a = \sin(a \pm b)$$

$$\cos a \cos b \mp \sin a \sin b = \cos(a \pm b)$$

△Chú ý

$$* \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Δ Ghi chú

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Giải phương trình $3 \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Giải phương trình $3\sin 4x - \sqrt{3}\cos 4x + \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

Ví dụ 6. Giải phương trình $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Lời giải

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Lời giải

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sin x - \cos x = 1$.

Lời giải

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin x$.

Lời giải

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 3x$.

Lời giải

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \cos 3x + \sin 5x = 0$.

Lời giải

C. BÀI TẬP

Bài 6. Giải các phương trình sau:

1. $(\sin x + \cos x)^2 + \sqrt{3} \cos 2x = 2$.

2. $2 \sin 2x = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x$.

3. $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - \cos^2 x + 2 = 0$.

4. $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cdot \cos 2x - \sin x = 0$.

5. $(1 - 2 \sin x) \cos x = (1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)$.

6. $8 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

7. $(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

8. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$.

VẤN ĐỀ 4

PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC 2 ĐỐI VỚI SIN VÀ COS

❧❧❧

A. PHƯƠNG PHÁP

❧ Tham khảo thêm Sách giáo khoa trang 35

❧ Là phương trình lượng giác có dạng: $a \cdot \sin^2 u + b \cdot \sin u \cos u + c \cdot \cos^2 u = d$ (*)

CÁCH GIẢI

❧ Cách 1.

❧ Xét $\cos u = 0$, khi đó $\sin^2 u = 1$ và $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$

▶ Thế $\cos u = 0$ và $\sin^2 u = 1$ vào phương trình (*) ta được: $a = d$ (**)

▶ Nếu (**) đúng thì $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình (*)

▶ Nếu (**) sai thì loại trường hợp $\cos u = 0$

❧ Xét $\cos u \neq 0$, chia 2 vế của phương trình (*) cho $\cos^2 u$ ta được:

▶ (*) $\Leftrightarrow a \tan^2 u + b \tan u + c = \frac{d}{\cos^2 u} \Leftrightarrow a \tan^2 u + b \tan u + c = d(1 + \tan^2 u)$

❧ Cách 2.

Sử dụng các công thức: $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$ $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$ $\sin u \cos u = \frac{\sin 2u}{2}$

Đưa phương trình (*) về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2u$ và $\cos 2u$

MỞ RỘNG

❧ Phương trình đẳng cấp bậc 3 có dạng:

$$a \cdot \sin^3 u + b \cdot \cos^3 u + c \cdot \sin^2 u \cos u + d \cdot \sin u \cos^2 u + e \cdot \sin u + f \cos u = 0$$

❧ Xét $\cos u = 0$ có là nghiệm của phương trình (*) không?

❧ Xét $\cos u \neq 0$, chia 2 vế của phương trình (*) cho $\cos^3 u$.

Δ Ghi chú

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $3\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 2 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x + 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Giải phương trình $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sin^2 x + 7 \sin 2x + 5 \cos^2 x + 3 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sin^3 x - 5 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x + 3 \cos^3 x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Giải phương trình $8 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Giải phương trình $2 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP

Bài 7. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 1.$

2. $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}.$

3. $4\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 2\sin^2 x = \frac{5}{2}.$

4. $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x + 4 = 0.$

5. $2\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin x \cos x + 1 = 0.$

6. $2\sin^3 x - 2\sin^2 x \cos x - \cos^3 x = 2\sin x.$

7. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x.$

8. $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0.$

9. $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x.$

10. $8\sin^3 x - 9\sin x + 5\cos x = 0.$

11. $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0.$

12. $\sin 2x - 2\sin^2 x = 0.$

13. $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x.$

14. $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x \sin^2 x.$

VẤN ĐỀ 5

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI SIN VÀ COS



A. PHƯƠNG PHÁP

Là phương trình lượng giác có dạng: $a(\sin u + \cos u) + b \sin u \cos u + c = 0$ (*)

CÁCH GIẢI

► Đặt $t = \sin u + \cos u = \sqrt{2} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right)$.

► Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

► Bình phương hai vế của $t = \sin u + \cos u$ ta được $t^2 = 1 + 2 \sin u \cos u \Rightarrow \sin u \cos u = \frac{t^2 - 1}{2}$

► Thế $\sin u + \cos u = t$ và $\sin u \cos u = \frac{t^2 - 1}{2}$ vào (*) ta thu được một phương trình đại số.

MỞ RỘNG

phương trình lượng giác có dạng: $a(\sin u - \cos u) + b \sin u \cos u + c = 0$

► Đặt $t = \sin u - \cos u = \sqrt{2} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right)$.

► Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

► Bình phương hai vế của $t = \sin u - \cos u$ ta được $t^2 = 1 - 2 \sin u \cos u \Rightarrow \sin u \cos u = \frac{1 - t^2}{2}$

Δ Ghi chú

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $3(\sin x + \cos x) + 2 \sin 2x + 3 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình $5\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Giải phương trình $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Giải phương trình $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VẤN ĐỀ 6
SỬ DỤNG CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

MỘT SỐ DẠNG THƯỜNG GẶP

** DẠNG 1.**

✱ Dùng công thức biến đổi

◆ $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

◆ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

◆ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

◆ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cos 7x + \cos 5x + \cos 3x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sin 9x - \cos 6x = \sin 3x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sin 5x + \sin 3x - \cos x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sin x + 2 \cos 2x = \sin 3x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Giải phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

Lời giải

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Lời giải

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$.

Lời giải

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x + \cos 3x)$.

Lời giải

DẠNG 2.

✿ Dùng công thức hạ bậc

$$\blacklozenge \cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$$

$$\blacklozenge \sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$$

✿ Dùng công thức biến đổi

$$\blacklozenge \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\blacklozenge \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\blacklozenge \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\blacklozenge \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

VÍ DỤ

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

Lời giải

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

Lời giải

Ví dụ 13. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$.

Lời giải

Ví dụ 14. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Ví dụ 15. Giải phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Ví dụ 16. Giải phương trình $\sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 3x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 17. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 18. Giải phương trình $2\cos^2 x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = \cos 4x(2\sin 2x + 1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....