

Câu 1. (2,0 điểm)

- a. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x-18)\sqrt{x^2+16}$ trên đoạn $[0;3]$.
- b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + 2022$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có ba góc nhọn.

Câu 2. (2,0 điểm)

- a. Giải phương trình $\log_3 \sqrt{x^2-x+1} + \log_{\frac{1}{3}} (1-2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2-x+1}$.
- b. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp A . Tính xác suất để chọn được một số sao cho số đó chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 1.

Câu 3. (2,0 điểm)

- a. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{3}$. Hãy tính $[F(e)]^2$.
- b. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và hai điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = b$, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $AM = x$ ($0 < x < 2a$).

- a. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MBC) theo a , b và x .
- b. Tìm x theo a để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.
- c. Trong trường hợp $ABCD$ là hình vuông cạnh a , gọi K là điểm di động trên CD , H là hình chiếu của S lên BK . Tìm vị trí của điểm K trên CD để thể tích khối chóp $S.ABH$ là lớn nhất.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b với $a < b$. Chứng minh rằng $\frac{2}{b+a} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{ab+1}{2ab}$.

_____ **HẾT** _____

LỜI GIẢI THAM KHẢO

--- Nguyễn Xuân Chung ---

Câu 1a. Tìm GTLN, GTNN của $f(x) = (x-18)\sqrt{x^2+16}$ trên $[0;3]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \sqrt{x^2+16} + \frac{x^2-18x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{2(x^2-9x+8)}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{2(x-8)(x-1)}{\sqrt{x^2+16}}.$$

Xét trong khoảng $(0;3)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy GTNN là $f(3) = -75$, GTLN là $f(1) = -17\sqrt{17}$.

Câu 1b. Xét $y = x^4 - (m+1)x^2 + 2022$. Ta có $y' = 2x[2x^2 - (m+1)]$.

Hàm số có ba cực trị khi $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Tọa độ điểm cực tiểu bên trái $B\left(-\sqrt{\frac{m+1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} + 2022\right)$, tọa độ điểm cực

đại là $A(0; 2022)$. Tam giác có ba góc nhọn khi :

$$\cos \alpha = \frac{y_A - y_B}{BA} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2(m+1)^2}{4} > \sqrt{2} \sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}. \text{ Với } t = \frac{m+1}{2} > 0,$$

ta có $4t^4 > 2(t+t^4) \Leftrightarrow t(t^3-1) > 0 \Rightarrow t > 1$. Khi đó $\frac{m+1}{2} > 1 \Rightarrow m > 1$.

Kết hợp ta có điều kiện cần tìm là $m > 1$.

Câu 2a. Điều kiện $x < \frac{1}{2}$.

Ta có PT $\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = \log_3(1-2x) + (1-2x)$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$, nên $f(t)$ đồng biến.

Do đó từ (*) suy ra $\sqrt{x^2-x+1} = (1-2x) \Rightarrow x = 0$ (Vì $x < \frac{1}{2}$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 2b. Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 9 \cdot 10^4$.

Giả sử chọn được số $\overline{abcd1}$ và $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7.

Số nhỏ nhất thỏa mãn là 10031. Số lớn nhất thỏa mãn là 99981. Các thương lần lượt khi chia hai số trên cho 7 là 1433 và 14283.

Cứ cách 10 đơn vị thì có đúng một số chia hết cho 7. Mặt khác để tận cùng là 1 thì thương có dạng $\overline{*3}$, trong đó $1433 \leq \overline{*3} \leq 14283$. Như vậy số các thương tìm

được là: $\frac{14283-1433}{10} + 1 = 1286$.

Vậy có 1286 số thỏa mãn. Xác suất cần tìm $p = \frac{1286}{9 \cdot 10^4} = \frac{643}{4500} \approx 0,0143$.

Câu 3a. Tìm $\int \sqrt{\ln^2 x + 1} \frac{\ln x}{x} dx$. Đặt $\sqrt{\ln^2 x + 1} = u \Rightarrow \ln^2 x + 1 = u^2 \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} dx = 2u du$.

Khi đó $\int \sqrt{\ln^2 x + 1} \frac{\ln x}{x} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C$. Hay $F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{\ln^2 x + 1})^3 + C$.

Giả thiết $F(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0$. Do đó $F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{\ln^2 x + 1})^3$.

Vậy $F(e) = \frac{1}{3} (\sqrt{2})^3 \Rightarrow [F(e)]^2 = \frac{8}{9}$.

Câu 3b. Tìm GTNN của $MA + 2MB$.

Mặt cầu có tâm $I(-1; 4; 0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{IA} = (4; -4; 0)$.

Đặt $\overrightarrow{IA} = 4\overrightarrow{IC} \Rightarrow \overrightarrow{IC} = (1; -1; 0) \Leftrightarrow C(0; 3; 0)$ và $IC = \sqrt{2} < R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $MA^2 = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 = IA^2 + IM^2 - 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IM} = 40 - 8\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IM}$

Hay $MA^2 = 4(2 + 8 - 2\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IM}) = 4MC^2$, suy ra $MA = 2MC$.

Khi đó $MA + 2MB = 2(MC + MB) \geq 2CB = 6\sqrt{2}$. Đạt được khi $M = CB \cap (S)$.

Ta có $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CB} = (4t; -t; t), t > 0$, suy ra $M(4t; -t + 3; t)$ thay vào mặt cầu $(4t + 1)^2 + (t + 1)^2 + t^2 = 8$.

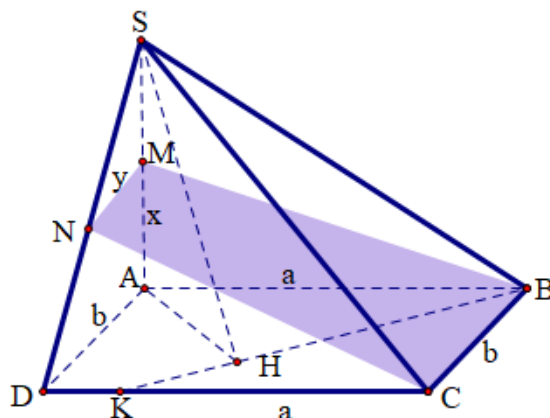
Suy ra $t = \frac{-5 + \sqrt{133}}{18} \Rightarrow M\left(\frac{-10 + 2\sqrt{133}}{9}; \frac{13 + \sqrt{133}}{18}; \frac{-5 + \sqrt{133}}{8}\right)$.

Vậy $\min(MA + 2MB) = 6\sqrt{2}$.

Lời bình.

Thi tự luận và để tìm min – max thì bắt buộc chỉ rõ đạt được khi nào. Bất đẳng thức không yêu cầu bắt buộc.

Câu 4a. Tính diện tích của thiết diện.

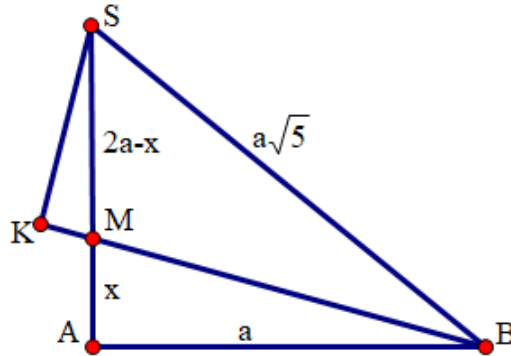


Ta có $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel mp(SAD)$, do đó $mp(MBC) \cap mp(SAD) = MN \parallel AD$. Mặt khác $AD \perp mp(SAB) \Rightarrow MN \perp mp(SAB)$. Thiết diện $BMNC$ là hình thang vuông tại M và B.

Đặt $MN = y$ thì $\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{y}{b} = \frac{2a - x}{2a} \Rightarrow y = \frac{b(2a - x)}{2a}$.

$$\text{Diện tích } S_{BMNC} = \frac{(y+b)}{2} \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{b(4a-x)\sqrt{x^2 + a^2}}{4a} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 4b. Tìm x theo a để $mp(MBC)$ chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.



Hạ $SK \perp BM \Rightarrow SK \perp mp(BMNC)$ nên SK là đường cao của $S.BMNC$.

Hai tam giác vuông đồng dạng $MKS \sim MAB$ suy ra $\frac{KS}{AB} = \frac{MS}{MB}$, do đó:

$$SK = \frac{(2a-x)a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \text{ và } V_{S.BMNC} = \frac{b(2a-x)(4a-x)}{12} \text{ (1).}$$

Mặt khác $\frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot ab = \frac{ba^2}{3}$ (2). Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{b(2a-x)(4a-x)}{12} = \frac{ba^2}{3} \Leftrightarrow (2a-x)(4a-x) = 4a^2 \Rightarrow x = (3-\sqrt{5})a.$$

Vậy $x = (3-\sqrt{5})a$ thì $mp(MBC)$ chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Câu 4c. Xác định vị trí điểm K để thể tích khối chóp $S.ABH$ lớn nhất.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABH$ lớn nhất khi diện tích ABH lớn nhất.

$$\text{Mà } BK \perp (SAH) \Rightarrow BK \perp AH \text{ nên } S_{ABH} = \frac{1}{2}AH \cdot HB \leq \frac{1}{4}(AH^2 + HB^2) = \frac{a^2}{4}.$$

Dấu bằng có khi $AH = HB = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}AC$, khi đó H là tâm hình vuông $ABCD$.

Vậy khi K trùng D thì thể tích khối chóp $S.ABH$ lớn nhất.

Câu 5. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{2}{b+a} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{ab+1}{2ab}$, với $0 < a < b$.

$$\text{Đặt } \frac{b}{a} = 1+x, (x > 0) \Rightarrow b = a(1+x) \Rightarrow a+b = a(2+x); ab = a^2(1+x).$$

$$+ \text{ Khi đó: } \frac{2}{b+a} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} \Leftrightarrow \frac{2}{a(2+x)} < \frac{\ln(1+x)}{ax} \Leftrightarrow (2+x)\ln(1+x) - 2x > 0.$$

Xét $f(x) = (x+2)\ln(x+1) - 2x$ trên $(0; +\infty)$ (và các hàm số khác), có:

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1} - 2 = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0 \text{ nên } f'(x) \text{ đồng biến, suy ra:}$$

$f'(x) > f'(0) = 0$ nên $f(x)$ đồng biến, suy ra $f(x) > f(0) = 0$ (1).

+ Mặt khác $\frac{ab+1}{2ab} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{2ab} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$, do đó ta đi chứng minh

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{ax} < \frac{1}{a\sqrt{(x+1)}} \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{x+1} \ln(x+1) - x < 0.$$

$$g'(x) = \frac{\ln(x+1)+2}{2\sqrt{x+1}} - 1 < 0 \Leftrightarrow h(x) = 2 + \ln(x+1) - 2\sqrt{x+1} < 0.$$

Ta có $h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x+1} < 0$ nên $h(x)$ nghịch biến, suy ra

$$h(x) < h(0) = 0.$$

Do đó $g(x)$ nghịch biến, suy ra $g(x) < g(0) = 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

_____ **TOANMATH.com** _____