

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180° . ĐỊNH LÝ COSIN, SIN TRONG TAM GIÁC

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

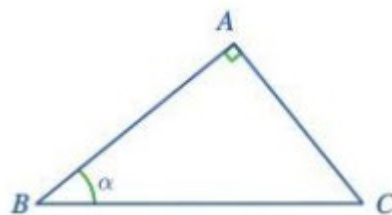
PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{ABC} = \alpha$
 $\sin \alpha = \frac{AC}{BC}, \cos \alpha = \frac{AB}{BC}, \tan \alpha = \frac{AC}{AB}, \cot \alpha = \frac{AB}{AC}$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

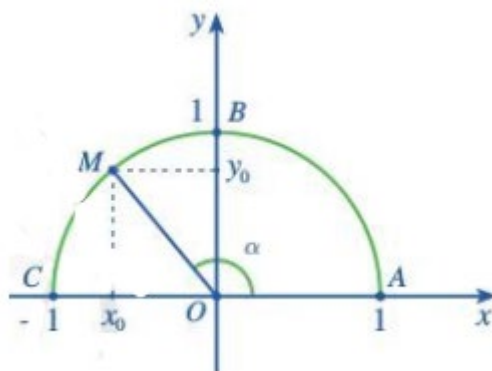


- sin của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha$, được xác định bởi: $\sin \alpha = y_0$;
- cosin của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha$, được xác định bởi: $\cos \alpha = x_0$;
- tang của góc α , kí hiệu là $\tan \alpha$, được xác định bởi: $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} (x_0 \neq 0)$;
- cotang của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha$, được xác định bởi: $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0} (y_0 \neq 0)$.

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α .

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của các góc: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.

Giải.



Với $\alpha = 0^\circ$; khi đó, M trùng với $A(1;0)$. Do đó $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\tan 0^\circ, \cot 0^\circ$ không xác định.

Với $\alpha = 90^\circ$; khi đó, M trùng với $B(0;1)$. Do đó $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cot 90^\circ = 0$, $\tan 0^\circ$ không xác định.

Với $\alpha = 180^\circ$; khi đó, M trùng với $C(-1;0)$. Do đó $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ, \cot 180^\circ$ không xác định.

Chú ý. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ thì:

$$- \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$- \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$- \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha (\alpha \neq 90^\circ),$$

$$- \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ).$$

Ví dụ 2. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ.$$

Giải

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos(90^\circ - 35^\circ) + \cos(180^\circ - 15^\circ) + 1$$

$$= \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \sin 35^\circ - \cos 15^\circ + 1 = 1$$

Ví dụ 3. Viết giá trị lượng giác của góc 120° .

Giải

$$\text{Ta có: } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}; \quad \cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự ta có bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

GTLG α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

II. Định lý côsin

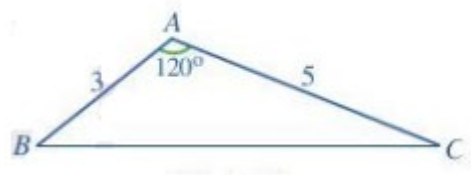
Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. khi đó

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 5$ và $\hat{A} = 120^\circ$



a) Tính $\cos A$;

b) Tính độ dài cạnh BC .

Giải

$$\text{a) Ta có: } \cos A = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

b) Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Thay số ta có:

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

$$\text{Do đó } BC = \sqrt{49} = 7.$$

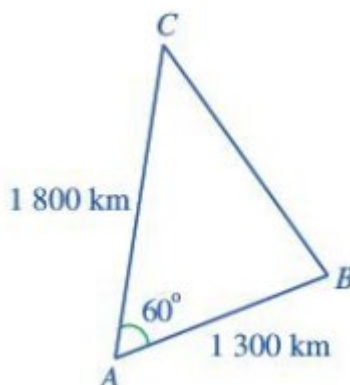
Ví dụ 5. Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc 60° . Máy bay thứ nhất bay với vận tốc 650 km/h , máy bay thứ hai bay với vận tốc 900 km/h . Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

Giải

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí B , máy bay thứ hai đến vị trí C . Ta có:

$$AB = 2 \cdot 650 = 1300 (\text{km}), AC = 2 \cdot 900 = 1800 (\text{km}),$$

$$\widehat{BAC} = 60^\circ$$



Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \\ &= 1300^2 + 1800^2 - 2 \cdot 1300 \cdot 1800 \cdot \cos 60^\circ = 2590000. \end{aligned}$$

Do đó $BC \approx 1609,35 (\text{km})$.

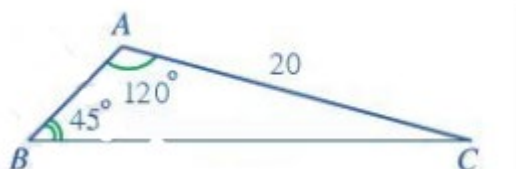
Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1609,35 km.

III. Định lý sin

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \quad a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ, \hat{B} = 45^\circ$ và $CA = 20$. Tính:



a) $\sin A$;

b) Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải

a) Ta có: $\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

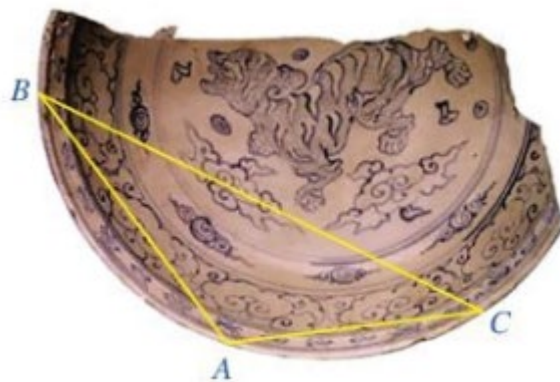
b) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R$.

$$\text{Do đó } BC = \frac{CA \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{20 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{6};$$

$$R = \frac{CA}{2 \cdot \sin B} = \frac{20}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 10\sqrt{2}$$

Ví dụ 7. Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau:

$$BC \approx 28,5 \text{ cm}; \widehat{BAC} \approx 120^\circ.$$



Tính đường kính của chiếc đĩa theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $2R = \frac{BC}{\sin A} \approx \frac{28,5}{\sin 120^\circ} \approx 33(cm)$.

Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng $33cm$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Câu 1. Tìm góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ trong mỗi trường hợp sau

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$
- b) $\cos \alpha = 0$.
- c) $\tan \alpha = -\sqrt{3}$

Câu 2. Cho góc $\alpha = 135^\circ$. Hãy tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$

Câu 3. Tính giá trị lượng giác của các góc sau đây

- a) 120°
- b) 150°
- c) 180°

Câu 4. Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn 90° :

$\sin 100^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\tan 103^\circ 45'$, $\cot 124^\circ 15'$.

Câu 5. Tìm giá trị của biểu thức

- a) $A = 2 \sin 30^\circ + 3 \cos 45^\circ - \sin 60^\circ$
- b) $B = 3 \cos 30^\circ + 3 \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$

Câu 6. Tính giá trị của biểu thức

- a) $a \sin 0^\circ + b \cos 0^\circ + c \sin 90^\circ$.
- b) $a \cos 90^\circ + b \sin 90^\circ + c \sin 180^\circ$.
- c) $a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$.

Câu 7. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$
- b) $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$
- c) $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

Câu 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$
- b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

c) $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức

a) $\sin x + \cos x$ khi x bằng $0^\circ, 135^\circ, 120^\circ$.

b) $2\sin x + \cos 2x$ khi x bằng $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$.

c) $\sin^2 x + \cos^2 x$ khi x bằng $30^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 145^\circ, 180^\circ$

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức $T = \sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - 2\sin x \cdot \cos x}$ khi $\tan x = \sqrt{3}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$.

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức

a) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$.

b) $\sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$.

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \cos 0^\circ + \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

b) $B = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$.

c) $C = \tan 1^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \tan 5^\circ \dots \tan 89^\circ$.

Câu 13. a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x$.

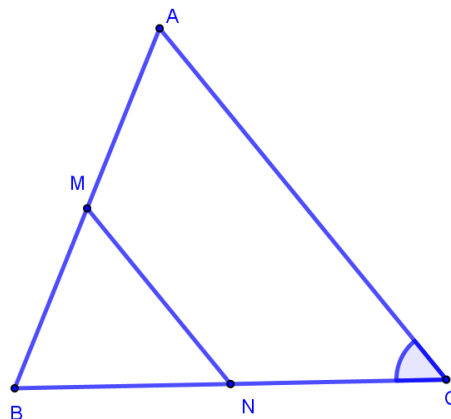
b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức: $Q = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x$.

Dạng 2. Định lí cosin

Câu 1. Cho tam giác ABC , biết

a) $a = 12, b = 13, c = 15$. Tính độ lớn góc A . b) $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Tính cạnh BC

Câu 2. Cho tam giác ABC , có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính cạnh BC .



Dạng 3. Định lí sin

Câu 3. Cho tam giác ABC , biết

a) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 45^\circ, b = 4$. Tính cạnh b và c . b) $\hat{A} = 60^\circ, a = 6$. Tính R

Câu 4. Cho tam giác ABC , có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ, BC = a$

a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC .

b) Chứng minh $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Câu 1. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

Câu 2. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

Câu 3. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. 2

Câu 4. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$
C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$. C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. D. $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

Câu 6. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Câu 7. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 0.

Câu 8. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$. B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Câu 9. Giá trị của $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 2. B. 0. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = -\sqrt{3}$.

Câu 11. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. -1.

Câu 12. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 13. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 14. Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

A. 21. B. 23. C. 22. D. 24.

Câu 15. Giá trị của $A = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$ là

A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Câu 16. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. -2. D. 1.

- Câu 17.** Biểu thức $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$ có giá trị bằng
A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.
- Câu 18.** Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.
A. $A = 12$. B. $A = 11$. C. $A = 13$. D. $A = 5$.
- Câu 19.** Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?
A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. -1. D. 0.
- Câu 20.** Biểu thức $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ có giá trị bằng:
A. 1. B. 2. C. -3. D. 0.
- Câu 21.** Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng
A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.
- Câu 22.** Biểu thức $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng
A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 23.** Cho $\sin x + \cos x = m$. Tính theo m giá trị của $M = \sin x \cdot \cos x$.
A. $m^2 - 1$. B. $\frac{m^2 - 1}{2}$. C. $\frac{m^2 + 1}{2}$. D. $m^2 + 1$.

Dạng 2. Định lí cosin

- Câu 1.** Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$. B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$. D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.
- Câu 2.** Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là?
A. $c = 3\sqrt{21}$. B. $c = 7\sqrt{2}$. C. $c = 2\sqrt{11}$. D. $c = 2\sqrt{21}$.
- Câu 3.** Cho $\triangle ABC$ có $b = 6, c = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là:
A. $2\sqrt{13}$. B. $3\sqrt{12}$. C. $2\sqrt{37}$. D. $\sqrt{20}$.
- Câu 4.** Cho $\triangle ABC$ có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:
A. 7. B. 129. C. 49. D. $\sqrt{129}$.
- Câu 5.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 9; BC = 8; \hat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài AC .
A. $\sqrt{73}$. B. $\sqrt{217}$. C. 8. D. $\sqrt{113}$.
- Câu 6.** Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $A = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .
A. $BC = \sqrt{2}$. B. $BC = 1$. C. $BC = \sqrt{3}$. D. $BC = 2$.
- Câu 7.** Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?
A. 49. B. $\sqrt{97}$. C. 7. D. $\sqrt{61}$.
- Câu 8.** Tam giác ABC có $\hat{C} = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB ?
A. $\sqrt{13}$. B. $\sqrt{3}$. C. 10. D. 1.
- Câu 9.** Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC . Biết $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a .
A. $3\sqrt{2}$. B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 6.

- Câu 10.** Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A, B là 2 điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?
A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.
- Câu 11.** Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?
A. $a^2 < ab + ac$. **B.** $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$. **C.** $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$. **D.** $ab + bc > b^2$.
- Câu 12.** Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. Tính $\cos A$.
A. $\cos A = -\frac{2}{3}$. **B.** $\cos A = \frac{1}{2}$. **C.** $\cos A = \frac{1}{3}$. **D.** $\cos A = \frac{2}{3}$.
- Câu 13.** Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:
A. Góc $C > 90^\circ$ **B.** Góc $C < 90^\circ$
C. Góc $C = 90^\circ$ **D.** Không thể kết luận được gì về góc C .
- Câu 14.** Cho tam giác ABC thỏa mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó:
A. $A = 30^\circ$. **B.** $A = 45^\circ$. **C.** $A = 60^\circ$. **D.** $A = 75^\circ$.
- Câu 15.** Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?
A. 90° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 30° .
- Câu 16.** Cho tam giác ABC , biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính góc A ?
A. $33^\circ 34'$. **B.** $117^\circ 49'$. **C.** $28^\circ 37'$. **D.** $58^\circ 24'$.
- Câu 17.** Cho tam giác ABC , biết $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính góc B ?
A. $59^\circ 49'$. **B.** $53^\circ 7'$. **C.** $59^\circ 29'$. **D.** $62^\circ 22'$.
- Câu 18.** Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng
A. 45° . **B.** 60° . **C.** 90° . **D.** 120° .
- Câu 19.** Tam giác ABC có $AB = c, BC = a, CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.
A. 30° . **B.** 60° . **C.** 90° . **D.** 45° .
- Câu 20.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$ khi đó góc AMB bằng bao nhiêu?
A. 135° . **B.** 90° . **C.** 150° . **D.** 120° .
- Câu 21.** Hai chiếc xe cùng xuất phát ở vị trí A, đi theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Xe thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , xe thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 1h, khoảng cách giữa 2 xe là:
A. 13 km . **B.** $15\sqrt{3} \text{ km}$. **C.** $10\sqrt{13}$. **D.** 15 km .
- Câu 22.** Hai tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi theo hai hướng và tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với vận tốc 30 km/h , tàu thứ hai chạy với vận tốc 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách xa nhau bao nhiêu km ?
A. $25\sqrt{10}$. **B.** $30\sqrt{10}$. **C.** $18\sqrt{13}$. **D.** $20\sqrt{13}$.

- Câu 23.** Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau. Xác định một điểm B có khoảng cách AB là 12km và đo được góc $\widehat{ACB} = 37^\circ$. Hãy tính khoảng cách AC biết rằng BC bằng 5km .
- A. $AC \approx 17\text{km}$. B. $AC \approx 12\text{km}$. C. $AC \approx 15,6\text{km}$. D. $AC \approx 20\text{km}$.

Dạng 3. Định lý sin

- Câu 24.** Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:
- A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. B. $\sin A = \frac{a}{2R}$. C. $b \sin B = 2R$. D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.
- Câu 25.** Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- A. $R = 4$. B. $R = 1$. C. $R = 2$. D. $R = 3$.
- Câu 26.** Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC = 4\text{ cm}$, góc $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC là
- A. $2\sqrt{6}$. B. $2 + 2\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3} - 2$. D. $\sqrt{6}$.
- Câu 27.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$; $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?
- A. 3,7. B. 3,3. C. 3,5. D. 3,1.
- Câu 28.** Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
- C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.
- Câu 29.** Tam giác ABC có $a = 16,8$; $\hat{B} = 56^\circ 13'$; $\hat{C} = 71^\circ$. Cạnh c bằng bao nhiêu?
- A. 29,9. B. 14,1. C. 17,5. D. 19,9.
- Câu 30.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 68^\circ 12'$, $\hat{B} = 34^\circ 44'$, $AB = 117$. Tính AC ?
- A. 68. B. 168. C. 118. D. 200.

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180° . ĐỊNH LÝ COSIN, SIN TRONG TAM GIÁC

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

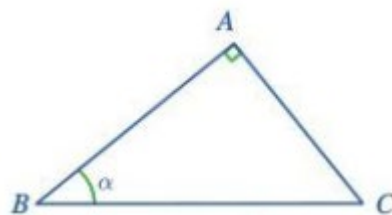
PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{ABC} = \alpha$
 $\sin \alpha = \frac{AC}{BC}, \cos \alpha = \frac{AB}{BC}, \tan \alpha = \frac{AC}{AB}, \cot \alpha = \frac{AB}{AC}$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

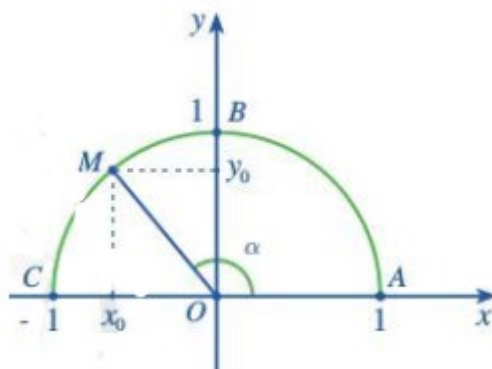


- sin của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha$, được xác định bởi: $\sin \alpha = y_0$;
- cosin của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha$, được xác định bởi: $\cos \alpha = x_0$;
- tang của góc α , kí hiệu là $\tan \alpha$, được xác định bởi: $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} (x_0 \neq 0)$;
- cotang của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha$, được xác định bởi: $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0} (y_0 \neq 0)$.

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α .

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của các góc: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.

Giải.



Với $\alpha = 0^\circ$; khi đó, M trùng với $A(1;0)$. Do đó $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\tan 0^\circ, \cot 0^\circ$ không xác định.

Với $\alpha = 90^\circ$; khi đó, M trùng với $B(0;1)$. Do đó $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cot 90^\circ = 0$, $\tan 0^\circ$ không xác định.

Với $\alpha = 180^\circ$; khi đó, M trùng với $C(-1;0)$. Do đó $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ, \cot 180^\circ$ không xác định.

Chú ý. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ thì:

$$- \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$- \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$- \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha (\alpha \neq 90^\circ),$$

$$- \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ).$$

Ví dụ 2. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ.$$

Giải

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos(90^\circ - 35^\circ) + \cos(180^\circ - 15^\circ) + 1$$

$$= \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \sin 35^\circ - \cos 15^\circ + 1 = 1$$

Ví dụ 3. Viết giá trị lượng giác của góc 120° .

Giải

$$\text{Ta có: } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}; \quad \cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự ta có bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

GTLG α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

II. Định lý côsin

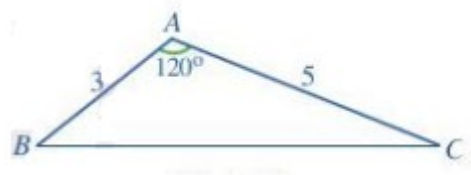
Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. khi đó

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 5$ và $\hat{A} = 120^\circ$



a) Tính $\cos A$;

b) Tính độ dài cạnh BC .

Giải

$$\text{a) Ta có: } \cos A = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

b) Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Thay số ta có:

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

$$\text{Do đó } BC = \sqrt{49} = 7.$$

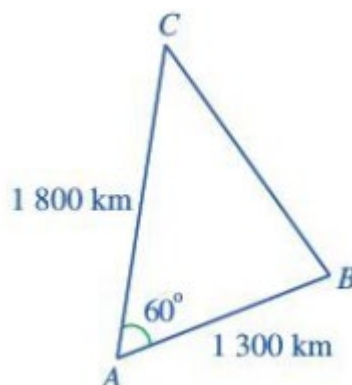
Ví dụ 5. Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc 60° . Máy bay thứ nhất bay với vận tốc 650 km/h , máy bay thứ hai bay với vận tốc 900 km/h . Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

Giải

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí B , máy bay thứ hai đến vị trí C . Ta có:

$$AB = 2 \cdot 650 = 1300 (\text{km}), AC = 2 \cdot 900 = 1800 (\text{km}),$$

$$\widehat{BAC} = 60^\circ$$



Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \\ &= 1300^2 + 1800^2 - 2 \cdot 1300 \cdot 1800 \cdot \cos 60^\circ = 2590000. \end{aligned}$$

Do đó $BC \approx 1609,35 (\text{km})$.

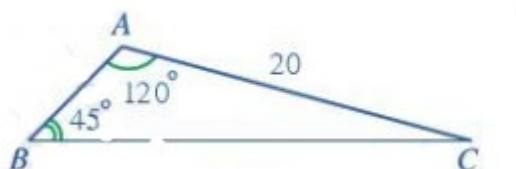
Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1609,35 km.

III. Định lý sin

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \quad a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ, \hat{B} = 45^\circ$ và $CA = 20$. Tính:



a) $\sin A$;

b) Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải

a) Ta có: $\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

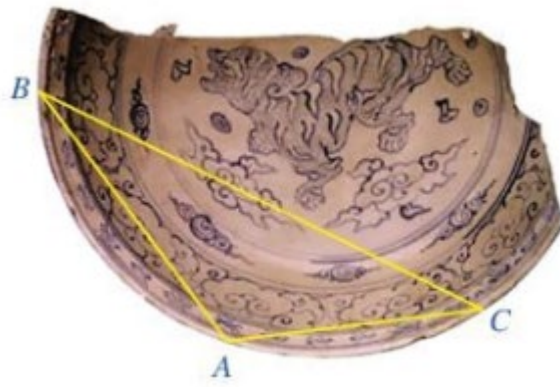
b) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R$.

$$\text{Do đó } BC = \frac{CA \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{20 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{6};$$

$$R = \frac{CA}{2 \cdot \sin B} = \frac{20}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 10\sqrt{2}$$

Ví dụ 7. Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau:

$$BC \approx 28,5 \text{ cm}; \widehat{BAC} \approx 120^\circ.$$



Tính đường kính của chiếc đĩa theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $2R = \frac{BC}{\sin A} \approx \frac{28,5}{\sin 120^\circ} \approx 33(cm)$.

Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng $33cm$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Câu 1. Tìm góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ trong mỗi trường hợp sau

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$
- b) $\cos \alpha = 0$.
- c) $\tan \alpha = -\sqrt{3}$

Lời giải.

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ khi $\alpha = 30^\circ$ hay $\alpha = 150^\circ$
- b) $\cos \alpha = 0$ khi $\alpha = 90^\circ$
- c) $\tan \alpha = -\sqrt{3}$ khi $\alpha = 120^\circ$

Câu 2. Cho góc $\alpha = 135^\circ$. Hãy tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$

Lời giải.

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = -1 \text{ và } \cot 135^\circ = \frac{1}{\tan 135^\circ} = -1.$$

Câu 3. Tính giá trị lượng giác của các góc sau đây

- a) 120°
- b) 150°
- c) 180°

Lời giải.

Sử dụng 2 góc bù nhau: 120° và 60° , 150° và 30° ta có:

$$\text{a) } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \tan 120^\circ = -\sqrt{3}; \cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{b) } \sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \cot 150^\circ = -\sqrt{3}.$$

c) Điểm cuối M của góc $180^\circ = \widehat{xOM}$ có tọa độ $M(-1;0)$ nên $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$, $\cot 180^\circ$ không xác định.

Câu 4. Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn 90° :
 $\sin 100^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\tan 103^\circ 45'$ $\cot 124^\circ 15'$.

Lời giải.

$$\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 100^\circ) = \sin 80^\circ;$$

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ;$$

$$\tan 103^\circ 45' = -\tan(180^\circ - 103^\circ 45') = \tan 76^\circ 15'$$

$$\cot 124^\circ 15' = -\cot(180^\circ - 124^\circ 15') = -\cot 55^\circ 45'$$

Câu 5. Tìm giá trị của biểu thức

a) $A = 2 \sin 30^\circ + 3 \cos 45^\circ - \sin 60^\circ$

b) $B = 3 \cos 30^\circ + 3 \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$

Lời giải.

a) Ta có $A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $B = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 1}{2}$.

Câu 6. Tính giá trị của biểu thức

a) $a \sin 0^\circ + b \cos 0^\circ + c \sin 90^\circ$.

b) $a \cos 90^\circ + b \sin 90^\circ + c \sin 180^\circ$.

c) $a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$.

Lời giải.

a) Ta có $a \sin 0^\circ + b \cos 0^\circ + c \sin 90^\circ = b + c$.

b) Ta có $a \cos 90^\circ + b \sin 90^\circ + c \sin 180^\circ = b$.

c) Ta có $a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 - c^2$.

Câu 7. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

b) $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

c) $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

Lời giải

a) $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$.

b) $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$.

c) $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$$

Câu 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

c) $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

Lời giải

a) $A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$
 $= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2$

b) $B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$
 $= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0$

c) $C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$
 $= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = 1$

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức

a) $\sin x + \cos x$ khi x bằng $0^\circ, 135^\circ, 120^\circ$.

b) $2\sin x + \cos 2x$ khi x bằng $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$.

c) $\sin^2 x + \cos^2 x$ khi x bằng $30^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 145^\circ, 180^\circ$

Lời giải.

a) Khi $x = 0^\circ$ thì $\sin x + \cos x = 1$.

Khi $x = 135^\circ$ thì $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Khi $x = 120^\circ$ thì $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b) Khi $x = 0^\circ$ thì $2\sin x + \cos 2x = 2\sin 0^\circ + \cos 120^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$.

Khi $x = 45^\circ$ thì $2\sin x + \cos 2x = 2\sin 45^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \sqrt{2}$.

Khi $x = 30^\circ$ thì $2\sin x + \cos 2x = 2\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

c) Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ với mọi giá trị của x .

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức $T = \sqrt{1-\sin x} \cdot \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-2\sin x \cdot \cos x}$ khi $\tan x = \sqrt{3}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $T = \sqrt{1-\sin x} \cdot \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-2\sin x \cdot \cos x}$
 $= \sqrt{1-\sin^2 x} - \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x} = |\cos x| - |\sin x - \cos x|$.

Khi $\tan x = \sqrt{3}$ thì $x = 60^\circ \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\cos x = \frac{1}{2}$. Vậy $T = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

Khi $\tan x = -\frac{3}{4}$ thì $\sin^2 x = \frac{9}{25}$, $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ và $\sin x \cdot \cos x = \tan x \cdot \cos^2 x = -\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{25} = -\frac{12}{25}$.

Do đó $T = \sqrt{1-\frac{9}{25}} - \sqrt{1-2 \cdot \left(-\frac{12}{25}\right)} = -\frac{3}{5}$.

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức

a) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$.

b) $\sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$.

Lời giải.

Sử dụng hai góc phụ nhau thì ta có

a) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ = \sin^2 78^\circ + \cos^2 78^\circ + \sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ = 1 + 1 = 2$.

b) $\sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ = \cos^2 87^\circ + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ = 1 + 1 = 2$.

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \cos 0^\circ + \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

b) $B = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$.

c) $C = \tan 1^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \tan 5^\circ \dots \tan 89^\circ$.

Lời giải.

a) Sử dụng hai góc bù nhau để ghép cặp

$$A = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 90^\circ = 0$$

b) Sử dụng 2 góc phụ nhau để ghép cặp

$$\begin{aligned} B &= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \frac{1}{2} + 1 \\ &= 44 + \frac{3}{2} = \frac{91}{2}. \end{aligned}$$

c) Sử dụng 2 góc phụ nhau để ghép cặp

$$\begin{aligned} C &= (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ) \dots (\tan 43^\circ \cdot \tan 47^\circ) \cdot \tan 45^\circ \\ &= (\tan 1^\circ \cdot \cos 1^\circ) \cdot (\tan 3^\circ \cdot \cos 3^\circ) \dots (\tan 43^\circ \cdot \cos 43^\circ) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Câu 13. a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức: $Q = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x) \\ &= \cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = (\cos^2 x - 1)^2 = \sin^4 x. \end{aligned}$$

Vậy P có giá trị lớn nhất là 1 khi $\sin x = 1$, tức $x = 90^\circ$.

b) Ta có $Q = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x = \sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 = (\sin^2 x - 1)^2 = \cos^4 x$.

Vậy Q có giá trị nhỏ nhất là 0 khi $\cos x = 0$ tức $x = 90^\circ$;

Q có giá trị lớn nhất là 1 khi $\cos x = 1$, tức $x = 0^\circ$ hoặc $x = 180^\circ$.

Dạng 2. Định lý cosin

Câu 1. Cho tam giác ABC , biết

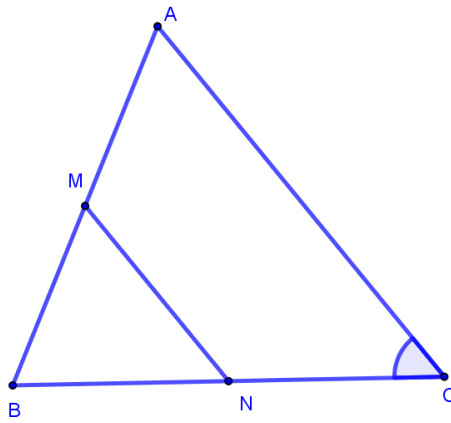
a) $a = 12, b = 13, c = 15$. Tính độ lớn góc A . b) $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Tính cạnh BC

Lời giải.

a) Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 12^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{25}{39}$. Suy ra $\hat{A} \approx 50^\circ$

b) Ta có $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49$. Vậy $BC = 7$

Câu 2. Cho tam giác ABC , có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính cạnh BC .



Lời giải.

Đặt $BC = x, x > 0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC .

Ta có $MN = 3 \Rightarrow AC = 6$. Theo định lí cô-sin ta có

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2.CA.CB.\cos C \Leftrightarrow 81 = 36 + x^2 - 12x.\frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = x = 3(1 + \sqrt{6})$$

Dạng 3. Định lí sin

Câu 3. Cho tam giác ABC , biết

a) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 45^\circ, b = 4$. Tính cạnh b và c . b) $\hat{A} = 60^\circ, a = 6$. Tính R

Lời giải.

a) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - A - B = 75^\circ$.

$$\text{Suy ra } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 4,9 \text{ và } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{4 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 5,5$$

$$\text{b) Ta có } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \sin 60^\circ} \approx 3,5.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC , có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ, BC = a$

a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC .

$$\text{b) Chứng minh } \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Lời giải.

a) Ta có $\hat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$. Đặt $AC = b, AB = c$. Theo định lí hàm số sin, ta có

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}. \text{ Suy ra } b = \frac{a\sqrt{3}}{2 \sin 75^\circ}; c = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin 75^\circ}$$

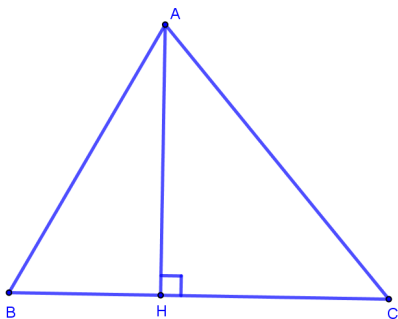
b) Kẻ $AH \perp BC$ do $\hat{B}, \hat{C}$ đều là góc nhọn nên H thuộc đoạn BC , hay $BC = HB + HC$.

$$\text{Ta có } HC = \frac{b\sqrt{2}}{2}; HB = \frac{c}{2}.$$

$$\text{Suy ra } a = HC + HB = b \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{6} + a\sqrt{2}}{4 \sin 75^\circ}.$$

$$\text{Do đó } \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ và}$$

$$\cos 75^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 75^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$



PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Câu 1. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C.

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 2. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Câu 3. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. 2

Lời giải

Chọn A

$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$
C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

Lời giải

Chọn D

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$. C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. D. $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 6. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.

B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$.

D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Lời giải

Chọn D

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 7. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.

Câu 8. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$.

B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.

C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.

D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$.

Câu 9. Giá trị của $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. 0.

C. $\sqrt{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B.

$$\tan 45^\circ + \cot 135^\circ = 1 - 1 = 0$$

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

A. $P = 1$.

B. $P = 0$.

C. $P = \sqrt{3}$.

D. $P = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

Câu 11. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin (90^\circ + 36^\circ) \cos (90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Câu 12. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2$$

Câu 13. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

Câu 14. Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

A. 21.

B. 23.

C. 22.

D. 24.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\ &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22. \end{aligned}$$

Câu 15. Giá trị của $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

$$A = (\tan 5^\circ \cdot \tan 85^\circ) \cdot (\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ) \dots (\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

Câu 16. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

A. $\sqrt{2}$.B. 2.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) = (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2$$

Câu 17. Biểu thức $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$ có giá trị bằng

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) nên suy ra $\cos \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) = 0$.

Do đó:

$$A = (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 180^\circ = \cos 180^\circ = -1.$$

Câu 18. Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $A = 12$. **B.** $A = 11$. C. $A = 13$. D. $A = 5$.

Lời giải

Chọn B

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 3 \Leftrightarrow (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 9$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 11.$$

Câu 19. Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. C. -1 . D. 0 .

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 \Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}.$$

$$\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 20. Biểu thức $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ có giá trị bằng:

- A.** 1 . B. 2 . C. -3 . D. 0 .

Lời giải

Chọn A.

$$\square \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\square \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$f(x) = 3(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) = 1.$$

Câu 21. Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A.** 1 . B. 2 . C. -2 . D. -1 .

Lời giải

Chọn A.

$$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Câu 22. Biểu thức $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. -1 . **B.** 0 . C. 2 . D. 1 .

Lời giải

Chọn B.

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0.$$

Câu 23. Cho $\sin x + \cos x = m$. Tính theo m giá trị của $M = \sin x \cdot \cos x$.

- A. $m^2 - 1$. **B.** $\frac{m^2 - 1}{2}$. C. $\frac{m^2 + 1}{2}$. D. $m^2 + 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = m^2 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cdot \cos x = m^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = m^2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

Dạng 2. Định lý cosin

Câu 1. Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý cosin trong tam giác ABC , ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là?

A. $c = 3\sqrt{21}$.

B. $c = 7\sqrt{2}$.

C. $c = 2\sqrt{11}$.

D. $c = 2\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 84 \Rightarrow c = 2\sqrt{21}.$$

Câu 3. Cho $\triangle ABC$ có $b = 6, c = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là:

A. $2\sqrt{13}$.

B. $3\sqrt{12}$.

C. $2\sqrt{37}$.

D. $\sqrt{20}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}.$$

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

A. 7.

B. 129.

C. 49.

D. $\sqrt{129}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7.$$

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 9; BC = 8; \hat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài AC .

A. $\sqrt{73}$.

B. $\sqrt{217}$.

C. 8.

D. $\sqrt{113}$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin có:

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 73 \Rightarrow AC = \sqrt{73}.$$

Vậy $AC = \sqrt{73}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $A = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = \sqrt{2}$. B. $BC = 1$. C. $BC = \sqrt{3}$. D. $BC = 2$.

Lời giải

Chọn C

Theo định lý cosin ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^\circ}$
 $= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2.2.1.\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Câu 7. Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

- A. 49. B. $\sqrt{97}$ C. 7. D. $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2.8.3.\cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 8. Tam giác ABC có $\hat{C} = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB ?

- A. $\sqrt{13}$. B. $\sqrt{3}$. C. 10. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin trong $\triangle ABC$ ta có:

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos \hat{C} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$. Chọn **A**.

Câu 9. Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC . Biết $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a .

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{4}{5} = 18$.

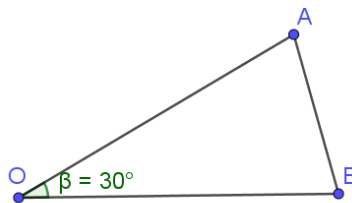
Suy ra: $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Câu 10. Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A, B là 2 điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 2.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng định lí cosin: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3} \cdot OB \cdot OA + OB^2 - 4 = 0 (*)$$

Coi phương trình (*) là một phương trình bậc hai ẩn OA . Để tồn tại giá trị lớn nhất của OB thì $\Delta_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(OB^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow OB^2 \leq 16 \Leftrightarrow OB \leq 4$.

Vậy $\max OB = 4$.

Câu 11. Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

A. $a^2 < ab + ac$. B. $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$. C. $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$. D. $ab + bc > b^2$.

Lời giải

Chọn C

Do $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos \hat{A} \leq 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 \leq a^2 + 2bc$ nên mệnh đề C sai.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$; đáp án A đúng.

Tương tự $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$; mệnh đề D đúng.

Ta có: $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot \cos B < 2ac \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$; mệnh đề B đúng.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. Tính $\cos A$.

A. $\cos A = -\frac{2}{3}$. B. $\cos A = \frac{1}{2}$. C. $\cos A = \frac{1}{3}$. D. $\cos A = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{2}{3}.$$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:

A. Góc $C > 90^\circ$ B. Góc $C < 90^\circ$
C. Góc $C = 90^\circ$ D. Không thể kết luận được gì về góc C .

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Mà: $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ suy ra: $\cos C > 0 \Rightarrow C < 90^\circ$.

Câu 14. Cho tam giác ABC thỏa mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó:

A. $A = 30^\circ$. B. $A = 45^\circ$. C. $A = 60^\circ$. D. $A = 75^\circ$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

Câu 15. Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1;3), \overrightarrow{AC} = (9;-3).$$

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{BAC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

Câu 16. Cho tam giác ABC , biết $a=24, b=13, c=15$. Tính góc A ?

- A. $33^\circ 34'$. B. $117^\circ 49'$. C. $28^\circ 37'$. D. $58^\circ 24'$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 24^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\frac{7}{15} \Rightarrow A \approx 117^\circ 49'.$$

Câu 17. Cho tam giác ABC , biết $a=13, b=14, c=15$. Tính góc B ?

- A. $59^\circ 49'$. B. $53^\circ 7'$. C. $59^\circ 29'$. D. $62^\circ 22'$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \Rightarrow B \approx 59^\circ 29'.$$

Câu 18. Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức

$$b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \text{ với } b \neq c. \text{ Khi đó, góc } \widehat{BAC} \text{ bằng}$$

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc.$$

$$\text{Mặt khác } \cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Câu 19. Tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức

$$b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2). \text{ Khi đó góc } \widehat{BAC} \text{ bằng bao nhiêu độ.}$$

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra, ta có: $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 = 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^2b - a^2c = 0$
 $\Leftrightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) - a^2(b+c) = 0 \Leftrightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 - a^2 = 0$
 (do $b+c \neq 0$)

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA:MB:MC = 1:2:3$ khi đó góc AMB bằng bao nhiêu?

A. 135° .

B. 90° .

C. 150° .

D. 120° .

Lời giải

$$MB = x \Leftrightarrow MA = 2x; MC = 3x \text{ với } 0 < x < BC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAM} = \frac{1+4x^2-x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2x} = \frac{3x^2+1}{4x}$$

$$\cos \widehat{MAC} = \frac{1+4x^2-9x^2}{4x} = \frac{1-5x^2}{4x}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x^2+1}{4x} \right)^2 + \left(\frac{1-5x^2}{4x} \right)^2 = 1 \Rightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 + 1 - 10x^2 + 25x^4 = 16.$$

$$\Rightarrow 34x^4 - 20x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{17} > \frac{1}{5} (I) \\ x^2 = \frac{5-2\sqrt{2}}{17} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{4x^2 + x^2 - 1}{2 \cdot 2x \cdot x}$$

$$= \frac{5x^2 - 1}{4x^2} = \left(\frac{25 - 10\sqrt{2}}{17} - 1 \right) : \frac{20 - 8\sqrt{2}}{17} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $\widehat{AMB} = 135^\circ$.

Câu 21. Hai chiếc xe cùng xuất phát ở vị trí A, đi theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Xe thứ nhất chạy với tốc độ 30km/h , xe thứ hai chạy với tốc độ 40km/h . Hỏi sau 1h, khoảng cách giữa 2 xe là:

A. 13km .

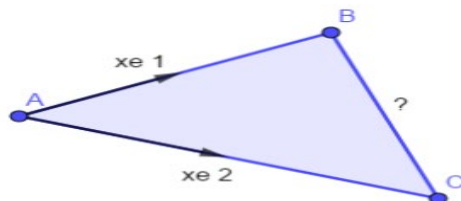
B. $15\sqrt{3}\text{km}$.

C. $10\sqrt{13}$.

D. 15km .

Lời giải

Chọn C



Trong 1h, xe 1 đi được quãng đường là $AB = 30\text{km}$

Trong 1h, xe 2 đi được quãng đường là $AC = 40\text{km}$

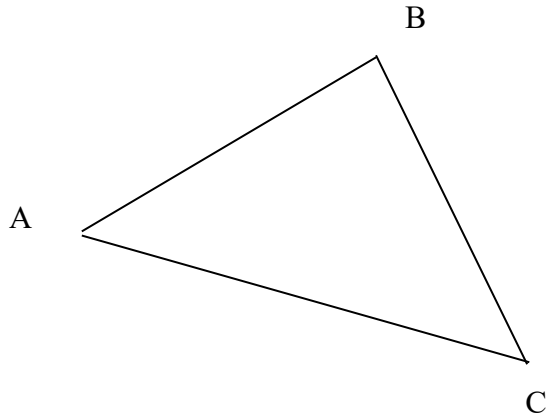
Sau 1h khoảng cách giữa 2 xe là BC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos 60^\circ = 1300$
 $\Rightarrow BC = 10\sqrt{13}km$.

Câu 22. Hai tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi theo hai hướng và tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với vận tốc $30km/h$, tàu thứ hai chạy với vận tốc $40km/h$. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách xa nhau bao nhiêu km ?

- A. $25\sqrt{10}$. B. $30\sqrt{10}$. C. $18\sqrt{13}$. D. $20\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D



Sau 2 giờ tàu thứ nhất cách vị trí A một khoảng cách $AB = 30.2 = 60(km)$

Và tàu thứ hai cách vị trí A một khoảng cách $AC = 40.2 = 80(km)$

Khi đó hai tàu cách nhau một khoảng cách BC .

Theo định lý Côsin, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$$

$$\Rightarrow BC^2 = 3600 + 6400 - 2.60.80.\cos 60^\circ$$

$$= 5200$$

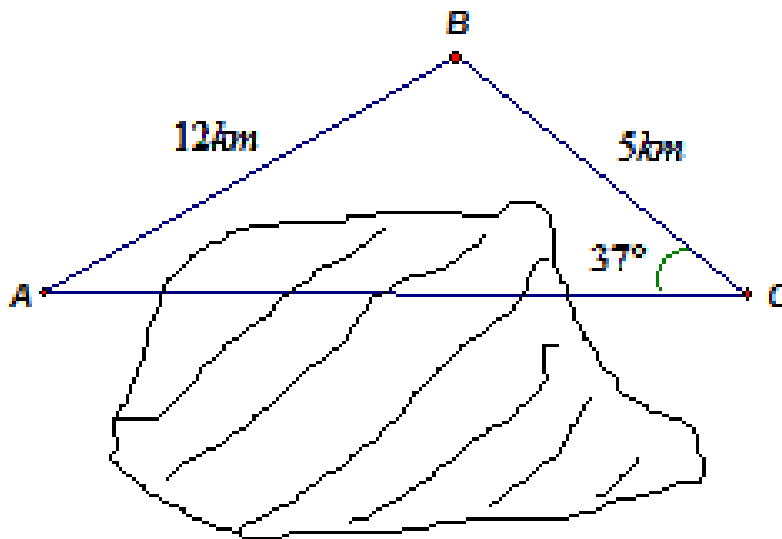
$$\Rightarrow BC = 20\sqrt{13}(km)$$

Câu 23. Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau. Xác định một điểm B có khoảng cách AB là $12km$ và đo được góc $\widehat{ACB} = 37^\circ$. Hãy tính khoảng cách AC biết rằng BC bằng $5km$.

- A. $AC \approx 17km$. B. $AC \approx 12km$. C. $AC \approx 15,6km$. D. $AC \approx 20km$.

Lời giải

Chọn C



Áp dụng định lí Côsin ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow 144 = AC^2 + 25 - 10AC \cdot \cos 37^\circ$$

$$\Leftrightarrow AC^2 - 10AC \cdot \cos 37^\circ - 119 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = 5 \cos 37^\circ + \sqrt{25 \cos^2 37^\circ + 119} \approx 15,6(n) \\ AC = 5 \cos 37^\circ - \sqrt{25 \cos^2 37^\circ + 119} \approx -7,6(l) \end{cases}$$

Vậy $AC \approx 15,6 \text{ km}$.

Dạng 3. Định lí sin

Câu 24. Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:

A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

B. $\sin A = \frac{a}{2R}$.

C. $b \sin B = 2R$.

D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Câu 25. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = 4$.

B. $R = 1$.

C. $R = 2$.

D. $R = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$.

Câu 26. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC = 4 \text{ cm}$, góc $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

A. $2\sqrt{6}$.

B. $2 + 2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3} - 2$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow BC = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}.$$

- Câu 27.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$; $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?
A. 3,7. B. 3,3. C. 3,5. D. 3,1.

Lời giải

Chọn B

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

$$\text{Áp dụng định lý sin: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\sin 80^\circ} \sin 40^\circ \approx 3,3.$$

- Câu 28.** Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{\frac{b+c}{2}}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2 \sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$$

- Câu 29.** Tam giác ABC có $a = 16,8$; $\hat{B} = 56^\circ 13'$; $\hat{C} = 71^\circ$. Cạnh c bằng bao nhiêu?
A. 29,9. B. 14,1. C. 17,5. D. 19,9.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: Trong tam giác } ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 71^\circ - 56^\circ 13' = 52^\circ 47'.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{16,8 \cdot \sin 71^\circ}{\sin 52^\circ 47'} \approx 19,9.$$

- Câu 30.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 68^\circ 12'$, $\hat{B} = 34^\circ 44'$, $AB = 117$. Tính AC ?
A. 68. B. 168. C. 118. D. 200.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: Trong tam giác } ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 68^\circ 12' - 34^\circ 44' = 77^\circ 4'.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{117 \cdot \sin 34^\circ 44'}{\sin 77^\circ 4'} \approx 68.$$

Bài 2. GIẢI TAM GIÁC

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

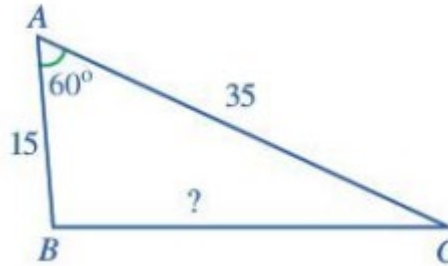
I. Tính các cạnh và góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

- Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;
- Biết độ dài ba cạnh;
- Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 15, AC = 35, \hat{A} = 60^\circ$.



Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

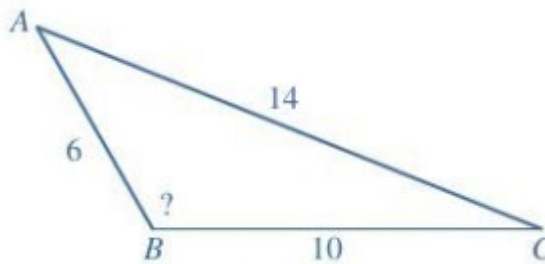
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot \cos 60^\circ = 925. \end{aligned}$$

Do đó $BC = \sqrt{925} \approx 30,4$.

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{925}}.$$

Do đó $\hat{B} \approx 95^\circ$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6, BC = 10, CA = 14$.



Tính số đo góc B .

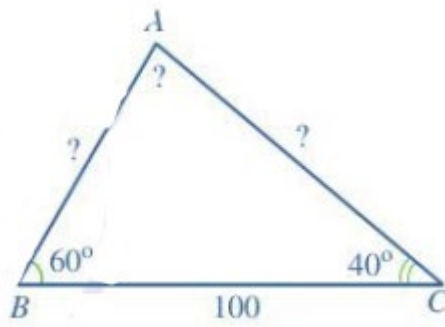
Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = -0,5$$

Do đó $\hat{B} = 120^\circ$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $BC = 100, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 40^\circ$.



Tính góc A và các cạnh AB, AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

Giải

Ta có:

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3.$$

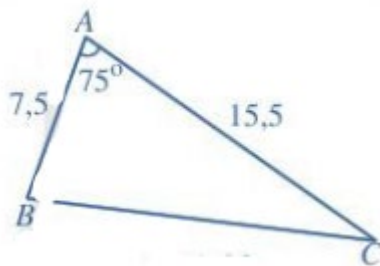
$$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$$

II. Tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 7,5; AC = 15,5; \hat{A} = 75^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



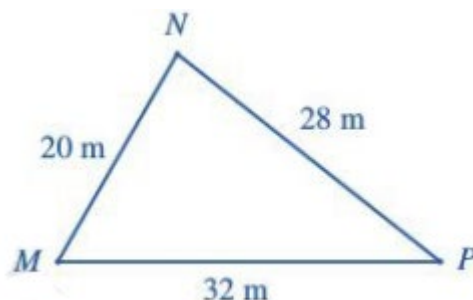
Giải

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 15,5 \cdot \sin 75^\circ \approx 56,1.$$

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ví dụ 5. Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20m, NP = 28m, MP = 32m$.



Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

Giải

$$\text{Ta có: } p = \frac{20 + 28 + 32}{2} = 40(m).$$

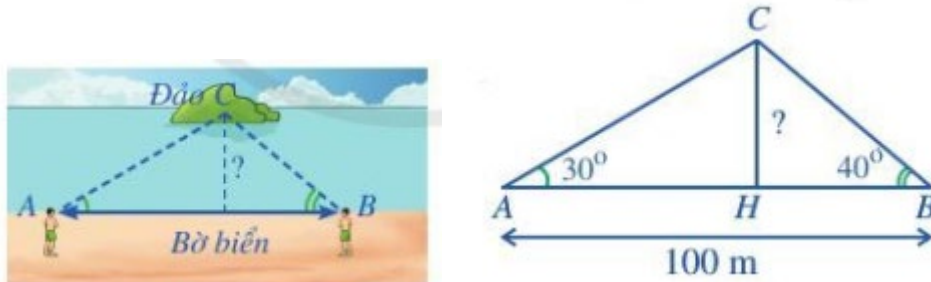
Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \sqrt{40(40 - 20)(40 - 28)(40 - 32)} \approx 277,1(m^2).$$

III. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

Ví dụ 6. Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30° . Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng $100m$ và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40° .

Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Giải

Xét tam giác ABC (ở hình trên) ta có: $\hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$.

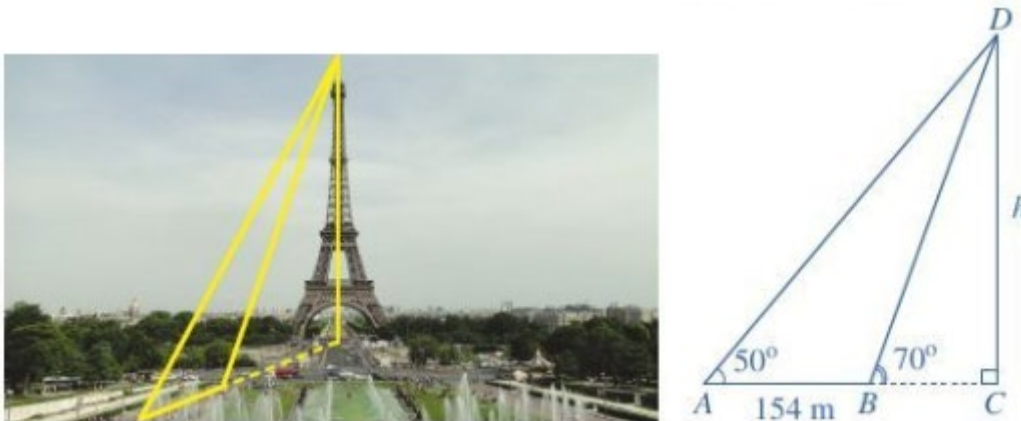
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

$$\text{Do đó } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 68,4(m).$$

Xét tam giác vuông AHC , ta có: $CH = AC \cdot \sin 30^\circ \approx 68,4 \cdot 0,5 \approx 34,2(m)$.

Vậy khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển khoảng $34,2m$.

Ví dụ 7. Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh họa lại kết quả đo đạc ở hình dưới. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Giải

Xét tam giác ABD , sử dụng tính chất góc ngoài, ta có: $\widehat{ADB} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD , ta có:

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}}.$$

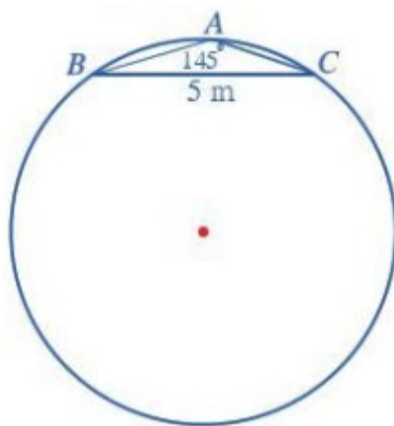
$$\text{Do đó } BD = \frac{154 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 345(m).$$

Xét tam giác vuông BCD , ta có:

$$CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} \approx 345 \cdot \sin 70^\circ \approx 324(m).$$

Vậy chiều cao h của tháp Eiffel khoảng $324m$.

Ví dụ 8. Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5\text{ m}$, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ hình dưới. Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Giải

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

$$\text{Do đó } R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ} \approx 4,36(m).$$

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 4,36^2 \approx 59,69(m^2)$.

Tìm hiểu thêm

Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, p và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích của tam giác ABC .

1. Công thức độ dài đường trung tuyến

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

Ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Chứng minh

Gọi D là trung điểm của BC (Hình 33), ta có:

$$AD = m_a, BD = DC = \frac{a}{2}.$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABD , ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca \cdot \cos B.$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC , ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Suy ra

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có hai công thức sau: $r = \frac{S}{p}, R = \frac{abc}{4S}$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Giải tam giác

Câu 1. Giải tam giác ABC , biết

a) $c = 14, A = 60^\circ, B = 40^\circ$.

b) $b = 4,5, A = 30^\circ, C = 75^\circ$.

Câu 2. Giải tam giác ABC , biết

a) $c = 35, A = 40^\circ, C = 120^\circ$.

b) $a = 137,5, B = 83^\circ, C = 57^\circ$.

Câu 3. Giải tam giác ABC , biết $a = 6,3; b = 6,3; \hat{C} = 54^\circ$.

Câu 4. Giải tam giác ABC , biết $b = 32; c = 45; \hat{A} = 87^\circ$.

Câu 5. Giải tam giác ABC , biết $a = 7; b = 23; \hat{C} = 130^\circ$.

Câu 6. Giải tam giác ABC , biết $b = 14; c = 10; \hat{A} = 145^\circ$.

Câu 7. Giải tam giác ABC , biết $a = 14; b = 18; c = 20$.

Câu 8. Giải tam giác ABC , biết $a = 6; b = 5; c = 7$.

Câu 9. Giải tam giác ABC , biết $a = 6; b = 7,3; c = 4,8$.

Câu 10. Giải tam giác ABC , biết $\hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 45^\circ; BC = a$.

Dạng 2. Tính diện tích tam giác

Câu 1. Cho tam giác ABC , biết

a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính S và h_a .

b) $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Tính S và R, r

Câu 2. Cho tam giác ABC , biết $a = 21, b = 17, c = 10$

a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a .

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và trung tuyến m_a .

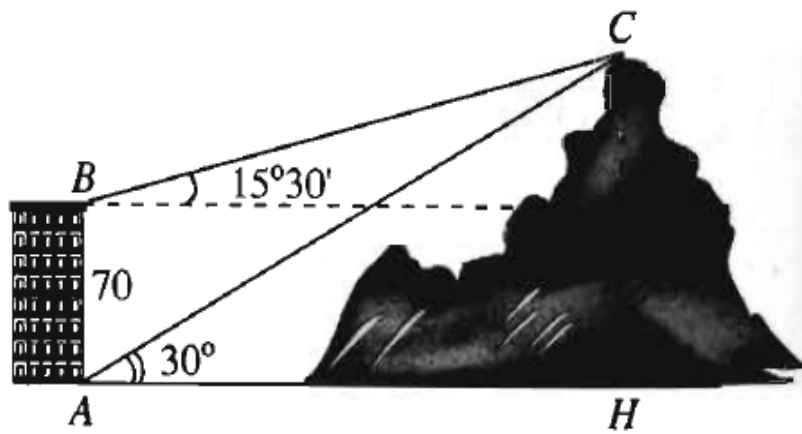
Câu 3. Cho tam giác ABC , có $\hat{A} = 60^\circ, b = 20, c = 25$.

a) Tính diện tích S và chiều cao h_a .

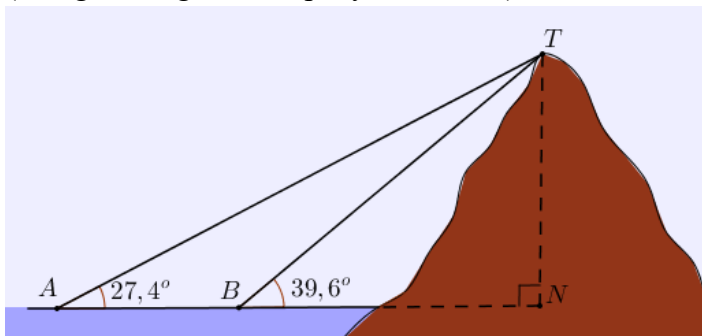
b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r

Dạng 3. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

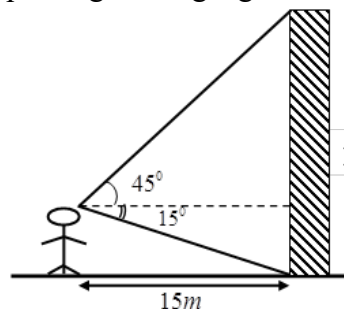
Câu 1. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^\circ 30'$ (như hình vẽ). Tính độ cao CH của ngọn núi so với mặt đất.



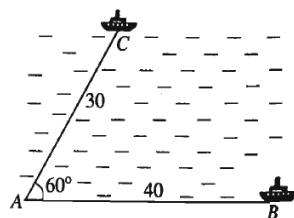
- Câu 2.** Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (tính gần đúng sau dấu phẩy hai chữ số)?



- Câu 3.** Một người quan sát đứng cách một cái tháp 15m, nhìn thấy đỉnh tháp một góc 45° và nhìn dưới chân tháp một góc 15° so với phương nằm ngang như trong hình vẽ. Tính chiều cao h của tháp.



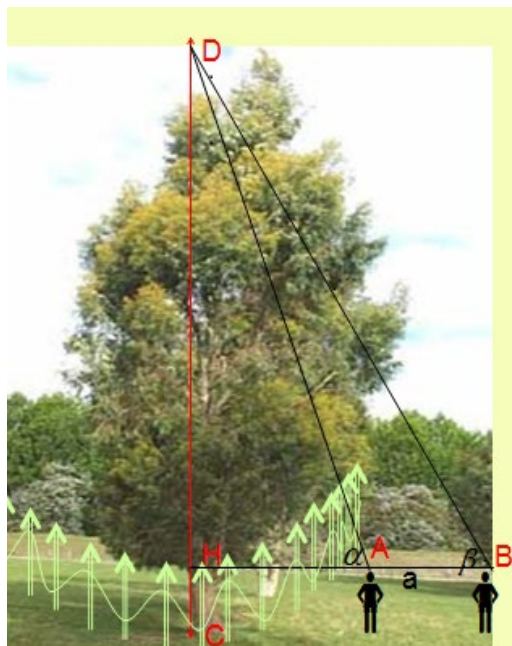
- Câu 4.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



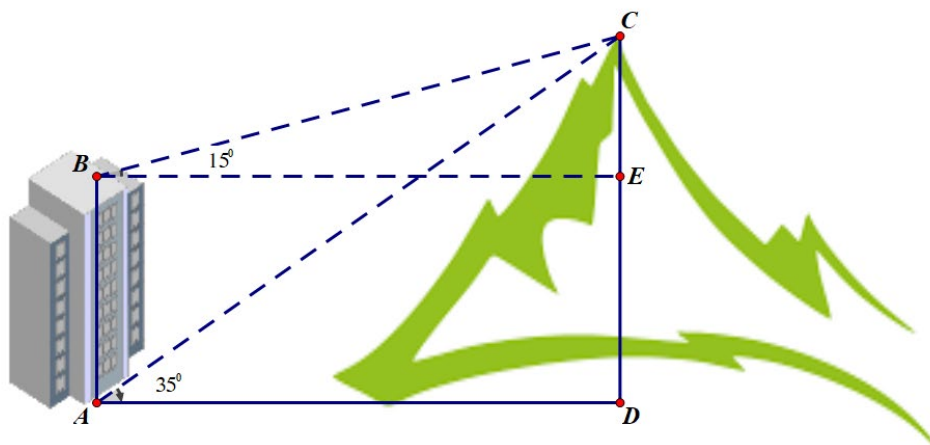
- Câu 5.** Vịnh Vân Phong – tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Diệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B. Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa AB và AC là 60° ?



- Câu 6.** Trong một lần đi khảo sát các đảo thuộc quần đảo Trường Sa của Việt Nam, các nhà khoa học phát hiện có một đảo có dạng hình tròn, tâm của đảo này bị che bởi một bãi đá nhỏ mà các nhà khoa học không thể tới được. Các nhà khoa học muốn đo bán kính của đảo này, biết rằng các nhà khoa học chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài. Nêu cách để các nhà khoa học tính được bán kính đảo?
- Câu 7.** Giả sử chúng ta cần đo chiều cao AB của một tòa tháp với B là chân tháp và A là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm C và D có khoảng cách $CD = 30m$ sao cho ba điểm B, C, D thẳng hàng người ta đo các góc $\widehat{BCA} = 43^\circ$ và góc $\widehat{BDA} = 67^\circ$. Hãy tính chiều cao AB của tòa tháp
- Câu 8.** Trong tam giác vuông AHC ta có $AH = AC \cdot \cos \widehat{HAC} \approx 6,30 \cdot \cos 35^\circ \approx 5,16$ (km).
 Từ hai vị trí A, B người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Lấy C là điểm gốc cây, D là điểm ngọn cây. A, B cùng thẳng hàng với điểm H thuộc chiều cao CD của cây. Người ta đo được $AB = 10m$, $HC = 1,7m$, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Tính chiều cao của cây đó.



- Câu 9.** Một người quan sát đỉnh của một ngọn núi nhân tạo từ hai vị trí khác nhau của tòa nhà. Lần đầu tiên người đó quan sát đỉnh núi từ tầng trệt với phương nhìn tạo với phương nằm ngang 35° và lần thứ hai người này quan sát tại sân thượng của cùng tòa nhà đó với phương nằm ngang 15° (như hình vẽ). Tính chiều cao ngọn núi biết rằng tòa nhà cao $60(m)$.



Dạng 4. Nhận dạng tam giác

Câu 1. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc A tù $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc A vuông $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$;

Câu 2. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh tam giác có ba góc nhọn.

Câu 3. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh ABC là tam giác nhọn.

Câu 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Câu 5. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, $C = 30^\circ$. Chứng minh ABC là tam giác cân. Tính diện tích và chiều cao h_a của tam giác.

Câu 6. Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có chiều cao $h_a = \sqrt{p(p-a)}$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Câu 8. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

Câu 9. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng r và các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng bằng r_a, r_b, r_c . Chứng minh rằng nếu $r = r_a - r_b - r_c$ thì góc A là góc vuông.

Câu 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2$. Chứng minh góc $C = 60^\circ$.

Câu 11. Cho tam giác ABC biết $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$. Chứng minh tam giác ABC có góc 60° .

Câu 12. Cho tam giác ABC thỏa mãn $c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + c^4 = 0$. Chứng minh tam giác ABC có góc 60° hoặc 120° .

Câu 13. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a + b + c = 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Câu 14. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $a = 10$, $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Câu 15. Xét tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2$ và $\sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4}$.

Câu 16. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$.

- Câu 17.** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.
- Câu 18.** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.
- Câu 19.** Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:
- a) $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$.
- b) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Giải tam giác, Đường trung tuyến

- Câu 1.** Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là
- A. 10 cm. B. 9 cm. C. 7,5 cm. D. 8 cm.
- Câu 2.** Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 5$ và độ dài đường trung tuyến $BM = \sqrt{13}$. Tính độ dài AC .
- A. $\sqrt{11}$. B. 4. C. $\frac{9}{2}$. D. $\sqrt{10}$.
- Câu 3.** Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , biết $\hat{C} = 30^\circ$, $AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến AM ?
- A. 3 B. 4 C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{7}{2}$
- Câu 4.** Tam giác ABC có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?
- A. $\sqrt{9}$. B. 9. C. 3. D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.
- Câu 5.** Cho tam giác ABC có góc C nhọn, AH và BK là hai đường cao, $HK = \sqrt{7}$, diện tích tứ giác $ABHK$ bằng 7 lần diện tích tam giác CHK . Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng
- A. 4. B. 7. C. 8. D. $\sqrt{14}$.
- Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4$ cm; $BC = 5$ cm; $BD = 7$ cm. Độ dài đoạn AC bằng bao nhiêu cm? (Tính chính xác đến hàng phần trăm)
- A. 6,25(cm). B. 5,74(cm). C. 5,67(cm). D. 5,93(cm).
- Câu 7.** Cho tam giác ABC cân tại A biết $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2}{5}BC$. Tính độ dài AM .
- A. $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $AM = \frac{11a}{5}$. C. $AM = \frac{a\sqrt{7}}{5}$. D. $AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.
- Câu 8.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm cạnh BC và F là trung điểm cạnh AE . Tính độ dài đoạn thẳng DF .
- A. $DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. B. $DF = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. C. $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $DF = \frac{3a}{4}$.

- Câu 9.** Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng a và nội tiếp đường tròn $(O; \sqrt{3})$. Để diện tích tam giác lớn nhất thì $\hat{B}$ bằng
- A. 90° . B. 120° . C. 30° . D. 60° .
- Câu 10.** Cho tam giác ABC có $AC = 8; AB = 15; \cos A = \frac{4}{5}$. Độ dài đường cao AH bằng:
- A. $\frac{72}{\sqrt{79}}$. B. $\frac{72}{97}$. C. $\frac{\sqrt{72}}{97}$. D. $\frac{72}{\sqrt{97}}$.
- Câu 11.** Cho tam giác ABC có $a = 109, \hat{B} = 33^\circ 24',$ góc $\hat{C} = 66^\circ 59'$. Chu vi tam giác ABC gần bằng số nào sau đây?
- A. 136. B. 227. C. 272. D. 372.
- Câu 12.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2; AC = 3; \hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .
- A. $\frac{12}{5}$. B. $\frac{6\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{6}{5}$.
- Câu 13.** Cho tam giác ABC , có $m_a = \frac{\sqrt{151}}{2}$, (với m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và các cạnh $AC = 8, AB = 6$). Tính độ dài BC .
- A. $a = 6$. B. $a = 9$. C. $a = 49$. D. $a = 7$.
- Câu 14.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, cạnh $a = 30$ bán kính đường tròn nội tiếp $r = 5\sqrt{3}$. Tính tổng độ dài hai cạnh còn lại b, c của tam giác ABC .
- A. 30. B. 60. C. 50. D. 90.
- Câu 15.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 75^\circ$ và phân giác trong $AD = 4$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- A. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$. B. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$. C. $-4 + 4\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.
- Câu 16.** Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{5}, AC = 6, BC = 5$. Tính độ dài cạnh AB .
- A. $\sqrt{73}$. B. 8. C. $\sqrt{55}$. D. 7.
- Lời giải**
- Vì trong tam giác ABC ta có $A+B$ bù với góc C nên
- $$\cos(A+B) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{5} \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}} = 7.$$
- Câu 17.** Tam giác ABC có $BC = 12, CA = 9, AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 8$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .
- A. $\sqrt{94}$. B. $\sqrt{106}$. C. $\sqrt{166}$. D. $\sqrt{34}$.
- Câu 18.** Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Một điểm I bất kì thuộc miền trong tam giác ABC . Tính tổng khoảng cách từ điểm I đến ba cạnh của tam giác?
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. D. $2a\sqrt{3}$.
- Câu 19.** Tam giác ABC có trọng tâm G . Hai trung tuyến $BM = 6, CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB .

A. $AB = \sqrt{11}$.

B. $AB = \sqrt{13}$.

C. $AB = 2\sqrt{11}$.

D. $AB = 2\sqrt{13}$.

Dạng 1. Diện tích tam giác**Câu 20.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$.

B. $S = \frac{1}{2}ac \sin A$.

C. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

D. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

Câu 21. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

A. $\frac{a^2}{4}$.

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

D. a^2 .

Câu 22. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 5, CA = 6$.

A. $\sqrt{56}$.

B. $\sqrt{48}$.

C. 6.

D. 8.

Câu 23. Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

A. 48.

B. 24.

C. 12.

D. 30.

Câu 24. Cho $\triangle ABC$ có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

A. $5\sqrt{3}$.

B. 5.

C. 10.

D. $10\sqrt{3}$.

Câu 25. Một tam giác có ba cạnh là 13, 14, 15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

A. 84.

B. $\sqrt{84}$.

C. 42.

D. $\sqrt{168}$.

Câu 26. Cho các điểm $A(1; -2), B(-2; 3), C(0; 4)$. Diện tích $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13}{2}$.

B. 13.

C. 26.

D. $\frac{13}{4}$.

Câu 27. Cho tam giác ABC có $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$. Diện tích $\triangle ABC$ là

A. 12.

B. 6.

C. $6\sqrt{2}$.

D. 9.

Câu 28. Cho tam giác ABC có $a = 4, b = 6, c = 8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

A. $9\sqrt{15}$.

B. $3\sqrt{15}$.

C. 105.

D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Câu 29. Cho tam giác ABC . Biết $AB = 2; BC = 3$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

A. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$.

B. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. $5 + \sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Câu 30. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

A. 72.

B. 144.

C. 54.

D. 108.

Câu 31. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác $\triangle ABC$ là.

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

B. 8.

C. $8\sqrt{3}$

D. $80\sqrt{3}$

Câu 32. Cho tam giác ABC có $AB = 2a; AC = 4a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC ?

A. $S = 8a^2$.

B. $S = 2a^2\sqrt{3}$.

C. $S = a^2\sqrt{3}$.

D. $S = 4a^2$.

Câu 33. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. 12.

B. 3.

C. 6.

D. 24.

Câu 35. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{8a}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Câu 36. Cho tam giác ABC có $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{3} + 1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

A. $\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Câu 37. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

A. 1.

B. $\frac{8}{9}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 38. Cho $\triangle ABC$ có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

A. 8,125.

B. 130.

C. 8.

D. 8,5.

Câu 39. Cho $\triangle ABC$ có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

A. 3.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 40. Một tam giác có ba cạnh là 26, 28, 30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

A. 16.

B. 8.

C. 4.

D. $4\sqrt{2}$.

Câu 41. Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

A. $\frac{65}{8}$.

B. 40.

C. 32,5.

D. $\frac{65}{4}$.

Câu 42. Tam giác với ba cạnh là 5; 12; 13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

A. 6.

B. 8.

C. $\frac{13}{2}$.

D. $\frac{11}{2}$.

Câu 43. Tam giác với ba cạnh là 5; 12; 13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. 3.

Câu 44. Tam giác với ba cạnh là 6; 8; 10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

A. 5.

B. $4\sqrt{2}$.

C. $5\sqrt{2}$.

D. 6.

Câu 45. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

A. $3\sqrt{5}$.

B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

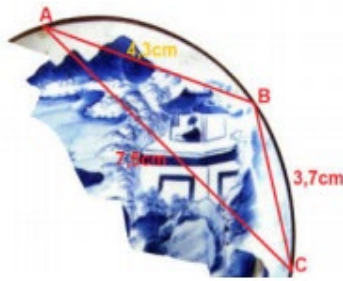
C. $5\sqrt{2}$.

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

- Câu 46.** Cho tam giác đều ABC ; gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.
- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$. C. $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$. D. $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.
- Câu 47.** Cho tam giác ABC có $\angle B = 60^\circ, \angle A = 30^\circ$, cạnh $BC = 12$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC gần với số nào nhất?
- A. 4,6 B. 4,9. C. 4,8. D. 4,7
- Câu 48.** Cho tam giác ABC có góc $A = 60^\circ$, cạnh $a = 30$, bán kính đường tròn nội tiếp $r = 5\sqrt{3}$. Tính chu vi của tam giác ABC .
- A. $60 + 5\sqrt{3}$. B. $30 + 10\sqrt{3}$. C. 80. D. 90.
- Câu 49.** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết $a^2 + b^2 = 5c^2$. Góc giữa hai đường trung tuyến AM, BN của tam giác ABC bằng bao nhiêu?
- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Dạng 2. Bài toán thực tế

- Câu 50.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?
- A. 13. B. $20\sqrt{13}$. C. $10\sqrt{13}$. D. 15.
- Câu 51.** Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250 \text{ m}, CB = 120 \text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?
- A. 266 m . B. 255 m . C. 166 m . D. 298 m .
- Câu 52.** Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80 \text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?
- A. 71 m . B. 91 m . C. 79 m . D. 40 m .
- Câu 53.** Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^\circ 16'$. Biết $CA = 200 \text{ m}, CB = 180 \text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?
- A. 180 m . B. 224 m . C. 112 m . D. 168 m .
- Câu 54.** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ($AB = 4,3 \text{ cm}; BC = 3,7 \text{ cm}; CA = 7,5 \text{ cm}$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng (kết quả làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy).



- A. 5,73 cm. B. 6,01cm. C. 5,85cm. D. 4,57cm.

Câu 55. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24m$, $\widehat{CAD} = 63^\circ$; $\widehat{CBD} = 48^\circ$. Chiều cao h của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

- A. 61,4 m. B. 18,5 m. C. 60 m. D. 18 m.

Câu 56. Từ hai vị trí A, B của một tòa nhà người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng $70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị

A. 195 m. B. 234 m. C. 165 m. D. 135 m.

Bài 2. GIẢI TAM GIÁC

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

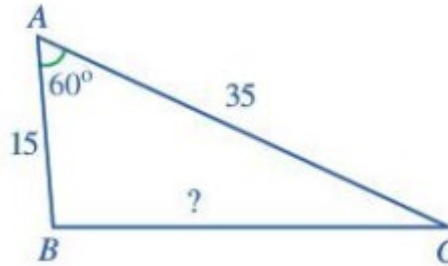
I. Tính các cạnh và góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

- Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;
- Biết độ dài ba cạnh;
- Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 15, AC = 35, \hat{A} = 60^\circ$.



Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

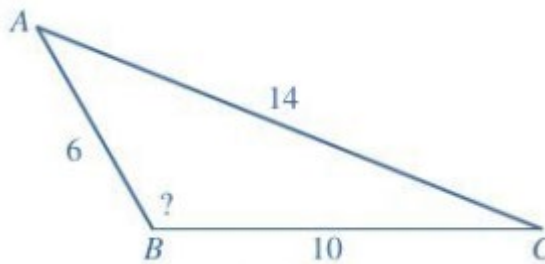
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot \cos 60^\circ = 925. \end{aligned}$$

Do đó $BC = \sqrt{925} \approx 30,4$.

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{925}}.$$

Do đó $\hat{B} \approx 95^\circ$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6, BC = 10, CA = 14$.



Tính số đo góc B .

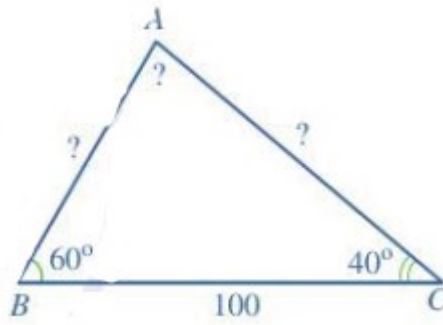
Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = -0,5$$

Do đó $\hat{B} = 120^\circ$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $BC = 100, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 40^\circ$.



Tính góc A và các cạnh AB, AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

Giải

Ta có:

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3.$$

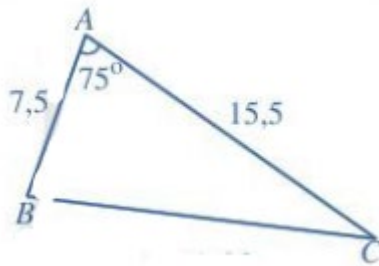
$$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$$

II. Tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 7,5; AC = 15,5; \hat{A} = 75^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



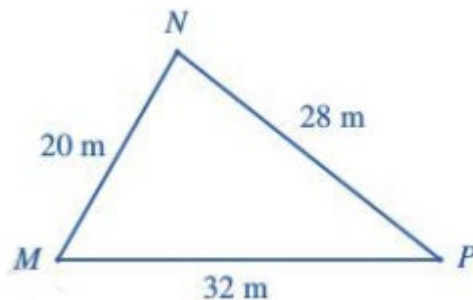
Giải

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 15,5 \cdot \sin 75^\circ \approx 56,1.$$

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ví dụ 5. Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20m, NP = 28m, MP = 32m$.



Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

Giải

$$\text{Ta có: } p = \frac{20 + 28 + 32}{2} = 40(m).$$

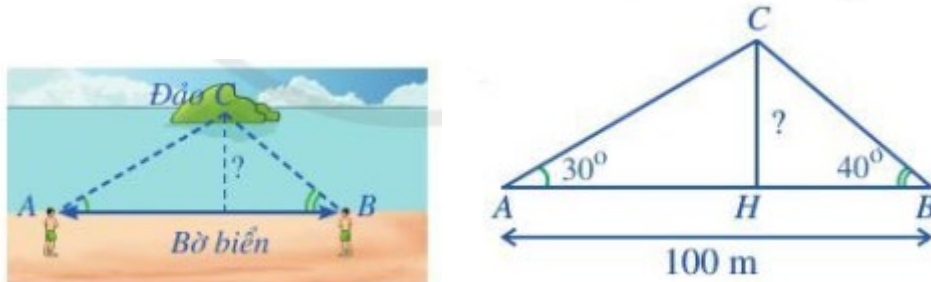
Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \sqrt{40(40 - 20)(40 - 28)(40 - 32)} \approx 277,1(m^2).$$

III. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

Ví dụ 6. Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30° . Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng $100m$ và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40° .

Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Giải

Xét tam giác ABC (ở hình trên) ta có: $\hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$.

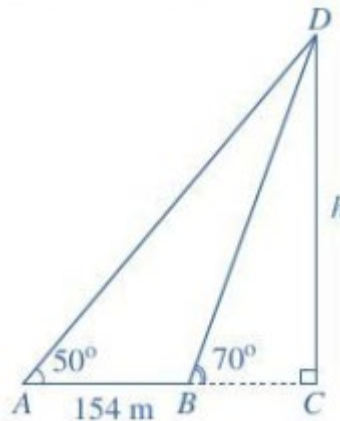
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

$$\text{Do đó } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 68,4(m).$$

Xét tam giác vuông AHC , ta có: $CH = AC \cdot \sin 30^\circ \approx 68,4 \cdot 0,5 \approx 34,2(m)$.

Vậy khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển khoảng $34,2m$.

Ví dụ 7. Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh họa lại kết quả đo đạc ở hình dưới. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Giải

Xét tam giác ABD , sử dụng tính chất góc ngoài, ta có: $\widehat{ADB} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD , ta có:

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}}.$$

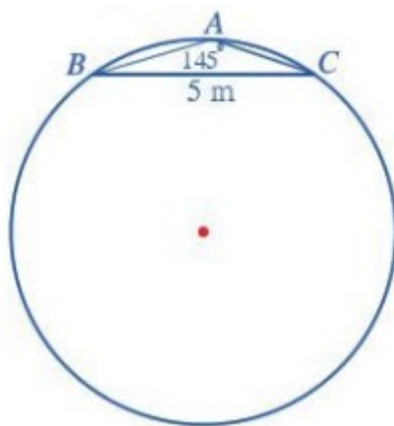
$$\text{Do đó } BD = \frac{154 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 345(m).$$

Xét tam giác vuông BCD , ta có:

$$CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} \approx 345 \cdot \sin 70^\circ \approx 324(m).$$

Vậy chiều cao h của tháp Eiffel khoảng $324m$.

Ví dụ 8. Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5\text{ m}$, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ hình dưới. Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Giải

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

$$\text{Do đó } R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ} \approx 4,36(m).$$

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 4,36^2 \approx 59,69(m^2)$.

Tìm hiểu thêm

Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, p và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích của tam giác ABC .

1. Công thức độ dài đường trung tuyến

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

Ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Chứng minh

Gọi D là trung điểm của BC (Hình 33), ta có:

$$AD = m_a, BD = DC = \frac{a}{2}.$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABD , ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca \cdot \cos B.$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC , ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Suy ra

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có hai công thức sau: $r = \frac{S}{p}, R = \frac{abc}{4S}$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Giải tam giác

Câu 1. Giải tam giác ABC , biết

a) $c = 14, A = 60^\circ, B = 40^\circ$.

b) $b = 4,5, A = 30^\circ, C = 75^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$.

$$\text{Có } b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9,1 \text{ và } a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 12,3.$$

b) Ta có $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 75^\circ$ vì $B = C$ nên tam giác cân tại A .

$$\text{Suy ra } c = b = 4,5 \text{ và } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4,5 \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 2,3.$$

Câu 2. Giải tam giác ABC , biết

a) $c = 35, A = 40^\circ, C = 120^\circ$.

b) $a = 137,5, B = 83^\circ, C = 57^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (40^\circ + 120^\circ) = 20^\circ$.

$$\text{Từ } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ ta suy ra}$$

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} \approx 26; a = \frac{c \sin B}{\sin C} \approx \frac{35 \cdot 0,43}{0,87} \approx 13,8.$$

b) Ta có $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (83^\circ + 57^\circ) = 40^\circ$.

$$\text{Từ } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ ta suy ra}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \approx \frac{137,5 \cdot 0,9925}{0,6427} \approx 212,3; c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{137,5 \cdot 0,8387}{0,6427} \approx 179,4.$$

Câu 3. Giải tam giác ABC , biết $a = 6,3; b = 6,3; \hat{C} = 54^\circ$.

Lời giải

Ta có $a = b = 6,3$ nên tam giác ABC cân tại C .

$$\text{Suy ra } \hat{A} = \hat{B} = \frac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ.$$

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} \Leftrightarrow c = \frac{6,3 \cdot \sin 54^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 5,72.$$

Vậy $\hat{A} = \hat{B} = 63^\circ$, $c \approx 5,72$.

Câu 4. Giải tam giác ABC , biết $b = 32$; $c = 45$; $\hat{A} = 87^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot \cos 87^\circ} \approx 53,84.$$

Vì $b < c < a$ nên $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$, suy ra tam giác ABC có ba góc nhọn. Áp dụng định lí sin, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B \approx \frac{32 \cdot \sin 87^\circ}{53,84} \approx 0,594.$$

Suy ra $\hat{B} \approx 36^\circ$, do đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 57^\circ$.

Vậy $a \approx 53,84$, $\hat{B} \approx 36^\circ$, $\hat{C} \approx 57^\circ$.

Câu 5. Giải tam giác ABC , biết $a = 7$; $b = 23$; $\hat{C} = 130^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{7^2 + 23^2 - 2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot \cos 130^\circ} \approx 28,02.$$

Vì $\hat{C} = 130^\circ$ nên $\hat{A}$, $\hat{B}$ là các góc nhọn.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \sin A = \frac{a \sin C}{c} \Leftrightarrow \sin A \approx \frac{7 \cdot \sin 130^\circ}{28,02} \approx 0,191.$$

Suy ra $\hat{A} \approx 11^\circ$, do đó $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \approx 39^\circ$.

Vậy $c \approx 28,02$, $\hat{A} \approx 11^\circ$, $\hat{B} \approx 39^\circ$.

Câu 6. Giải tam giác ABC , biết $b = 14$; $c = 10$; $\hat{A} = 145^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{14^2 + 10^2 - 2 \cdot 14 \cdot 10 \cdot \cos 145^\circ} \approx 22,92.$$

Vì $\hat{A} = 145^\circ$ nên $\hat{C}$, $\hat{B}$ là các góc nhọn.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} \Leftrightarrow \sin B \approx \frac{14 \cdot \sin 145^\circ}{22,92} \approx 0,35.$$

Suy ra $\hat{B} \approx 21^\circ$, do đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 14^\circ$.

Vậy $c \approx 22,92$, $\hat{B} \approx 21^\circ$, $\hat{C} \approx 14^\circ$.

Câu 7. Giải tam giác ABC , biết $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2 \cdot 18 \cdot 20} = \frac{11}{15} \Rightarrow \hat{A} \approx 43^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14^2 + 20^2 - 18^2}{2 \cdot 14 \cdot 18} = \frac{17}{35} \Rightarrow \hat{B} \approx 61^\circ.$$

Khi đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 76^\circ$.

Vậy $\hat{A} \approx 43^\circ$, $\hat{B} \approx 61^\circ$, $\hat{C} \approx 76^\circ$.

Câu 8. Giải tam giác ABC , biết $a = 6$; $b = 5$; $c = 7$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{29}{35} \Rightarrow \hat{A} \approx 34^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7} \Rightarrow \hat{B} \approx 44^\circ.$$

Khi đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 102^\circ$.

Vậy $\hat{A} \approx 34^\circ$, $\hat{B} \approx 44^\circ$, $\hat{C} \approx 102^\circ$.

Câu 9. Giải tam giác ABC , biết $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7,3^2 + 4,8^2 - 6^2}{2 \cdot 7,3 \cdot 4,8} = \frac{4033}{7008} \Rightarrow \hat{A} \approx 55^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + 4,8^2 - 7,3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4,8} = \frac{115}{1152} \Rightarrow \hat{B} \approx 84^\circ.$$

Khi đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 41^\circ$.

Vậy $\hat{A} \approx 55^\circ$, $\hat{B} \approx 84^\circ$, $\hat{C} \approx 41^\circ$.

Câu 10. Giải tam giác ABC , biết $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$; $BC = a$.

Lời giải

Ta có $\hat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$.

Áp dụng định lý sin, ta có

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} \Leftrightarrow b \approx 0,897a.$$

$$\text{Tương tự ta có } c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx 0,732a.$$

Vậy $\hat{A} = 75^\circ$, $b \approx 0,897a$, $c \approx 0,732a$.

Dạng 2. Tính diện tích tam giác

Câu 1. Cho tam giác ABC , biết

a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính S và h_a .

b) $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Tính S và R, r

Lời giải.

a) Áp dụng công thức Hê-rông với $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21}{2}$

$$\text{Ta có } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2} \left(\frac{21}{2} - 7 \right) \left(\frac{21}{2} - 8 \right) \left(\frac{21}{2} - 6 \right)} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Vì } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}7.h_a \Rightarrow h_a = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

b) Ta có $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ (vì $\sin A > 0$).

$$\text{Mà } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$$

Theo Định lý Cô-sin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

$$\text{Từ } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Theo định lý sin: } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{\frac{21}{2}} = \frac{14}{10.5} = \frac{4}{5}$$

Câu 2. Cho tam giác ABC , biết $a = 21, b = 17, c = 10$

a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a .

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và trung tuyến m_a .

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21+17+10}{2} = 24$$

Theo công thức Hê-rông, ta có

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$$

$$\text{Do đó: } h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8.$$

$$b) \text{ Ta có } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = 3,5.$$

$$\text{Độ dài trung tuyến } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{17^2 + 10^2}{2} - \frac{21^2}{4} = \frac{337}{4} = 84,25$$

Câu 3. Cho tam giác ABC , có $\hat{A} = 60^\circ, b = 20, c = 25$.

a) Tính diện tích S và chiều cao h_a .

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 175\sqrt{3}$$

$$\text{Hơn nữa } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 20^2 + 35^2 - 2 \cdot 20 \cdot 35 \cdot \frac{1}{2} = 925$$

$$\text{Vậy } a = \sqrt{925} \approx 30,41$$

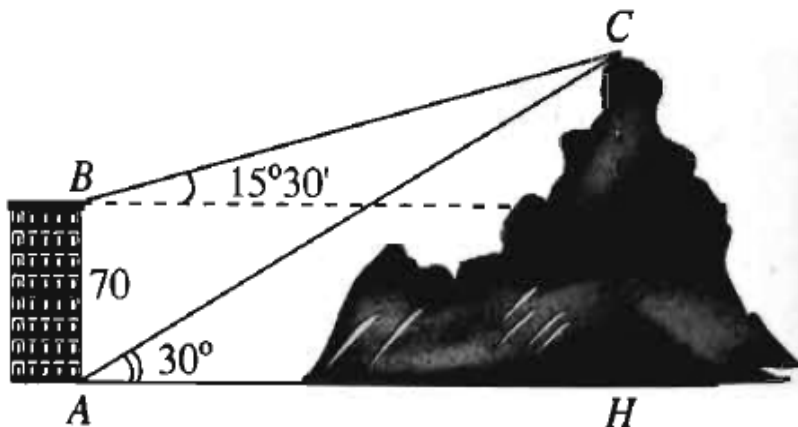
$$\text{Từ công thức } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{350\sqrt{3}}{\sqrt{925}} \approx 19,94$$

$$b) \text{ Từ công thức } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{925}}{\sqrt{3}} \approx 17,56$$

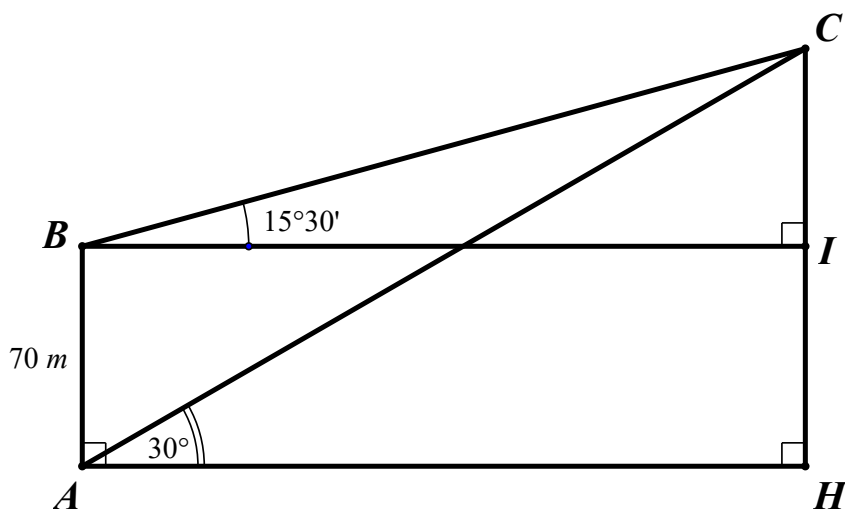
$$\text{Từ công thức } S = pr \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ ta có } r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{bc \sin A}{a+b+c} = \frac{20 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{925} + 20 + 35} \approx 7,10$$

Dạng 3. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

Câu 1. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^\circ 30'$ (như hình vẽ). Tính độ cao CH của ngọn núi so với mặt đất.



Lời giải



Cách 1:

+ Ta có: $\tan \widehat{CAH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan 30^\circ}$.

+ Lại có: $\tan \widehat{CBI} = \frac{CI}{BI} \Rightarrow BI = \frac{CI}{\tan 15^\circ 30'} = \frac{CH - 70}{\tan 15^\circ 30'}$.

+ Do $AH = BI$ nên $\frac{CH}{\tan 30^\circ} = \frac{CH - 70}{\tan 15^\circ 30'} = \frac{70}{\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30'}$.

+ Vậy $CH = \frac{70 \cdot \tan 30^\circ}{\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30'} \approx 134,7 \text{ m}$.

Cách 2:

+ Ta có: $\widehat{ABC} = 90^\circ + 15^\circ 30' = 105^\circ 30'$.

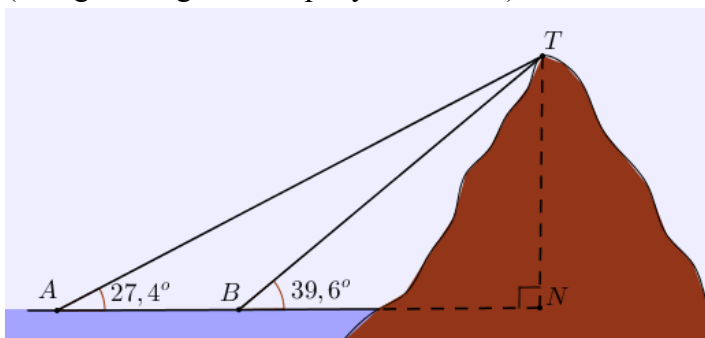
$\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ - 105^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

+ Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} \Rightarrow AC = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'}$$

+ Lại có: $\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \cdot \sin 30^\circ \approx 134,7 \text{ m}$.

Câu 2. Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (tính gần đúng sau dấu phẩy hai chữ số)?



Lời giải

Ta có $\widehat{ATB} = \widehat{TBN} - \widehat{TAN} = 12,2^\circ$.

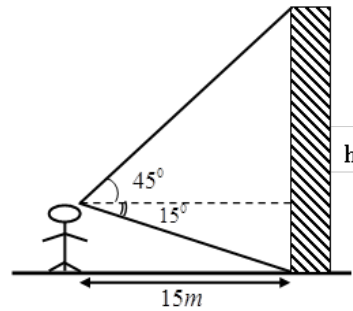
Áp dụng định lí sin cho tam giác TAB : $\frac{TB}{\sin \widehat{TAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ATB}} \Rightarrow TB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{TAB}}{\sin \widehat{ATB}}$.

Xét tam giác vuông TBN ta có:

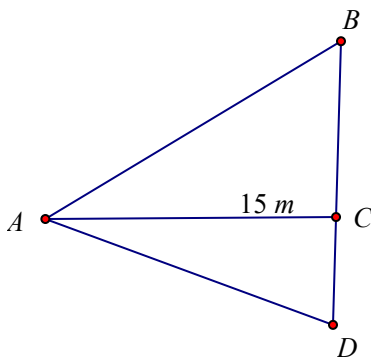
$$TN = TB \cdot \sin \widehat{TBN} = \frac{AB \cdot \sin \widehat{TAB} \cdot \sin \widehat{TBN}}{\sin \widehat{ATB}} = \frac{1536 \cdot \sin 27,4^\circ \cdot \sin 39,6^\circ}{\sin 12,2^\circ} \approx 2132,14.$$

Vậy chiều cao ngọn núi xấp xỉ 2132,14 m.

Câu 3. Một người quan sát đứng cách một cái tháp 15m, nhìn thấy đỉnh tháp một góc 45° và nhìn dưới chân tháp một góc 15° so với phương nằm ngang như trong hình vẽ. Tính chiều cao h của tháp.



Lời giải



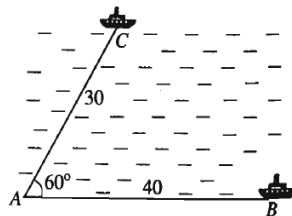
Ta có $BC = AC \cdot \tan \widehat{BAC} = 15 \cdot \tan 45^\circ = 15$ (m)

$$CD = AC \cdot \tan \widehat{DAC} = 15 \cdot \tan 15^\circ = 15(2 - \sqrt{3}) \text{ (m)}$$

$$h = BD = BC + CD = 15 + 15(2 - \sqrt{3}) \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của tháp là $15 + 15(2 - \sqrt{3})$ (m).

Câu 4. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý?



Lời giải

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lý, tàu C đi được 30 hải lý. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos 60^\circ = 1600 + 900 - 1200 = 1300.$$

$$\text{Vậy } BC = \sqrt{1300} \approx 36 \text{ (hải lý)}.$$

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lý.

- Câu 5.** Vịnh Vân Phong – tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nổi từ Hòn Quạ đến đảo Diệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B . Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4 \text{ km}$, $AC = 0,6 \text{ km}$ và góc giữa AB và AC là 60° ?



Lời giải

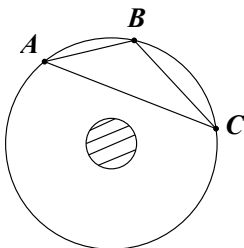
Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \hat{A} = 0,28 \text{ km}.$$

Vậy thời gian du khách chèo thuyền từ C đến B là: $t = \frac{BC}{v} = \frac{0,28}{4} = 0,07 \text{ giờ} = 4,2 \text{ phút}.$

- Câu 6.** Trong một lần đi khảo sát các đảo thuộc quần đảo Trường Sa của Việt Nam, các nhà khoa học phát hiện có một đảo có dạng hình tròn, tâm của đảo này bị che bởi một bãi đá nhỏ mà các nhà khoa học không thể tới được. Các nhà khoa học muốn đo bán kính của đảo này, biết rằng các nhà khoa học chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài. Nêu cách để các nhà khoa học tính được bán kính đảo?

Lời giải



Lấy ba điểm A, B, C khác nhau trên đường tròn (ở các điểm ngoài cùng của đảo). Đo độ dài các đoạn thẳng $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác ABC .

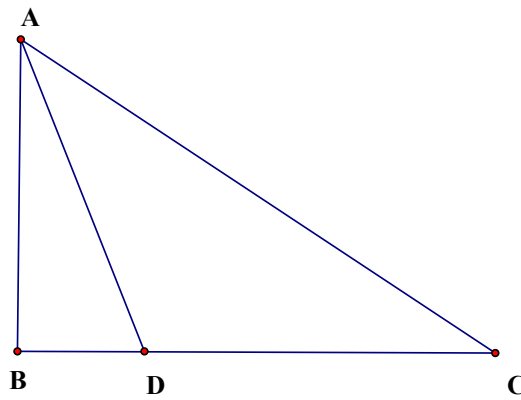
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Lại có: } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

Vậy bán kính của đảo được tính theo công thức: $R = \frac{abc}{4S}.$

- Câu 7.** Giả sử chúng ta cần đo chiều cao AB của một tòa tháp với B là chân tháp và A là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm C và D có khoảng cách $CD = 30m$ sao cho ba điểm B, C, D thẳng hàng người ta đo các góc $\widehat{BCA} = 43^\circ$ và góc $\widehat{BDA} = 67^\circ$. Hãy tính chiều cao AB của tòa tháp

Lời giải



Trong tam giác ACD : có góc $\widehat{CAD} = 67^\circ - 43^\circ = 24^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD ta có:

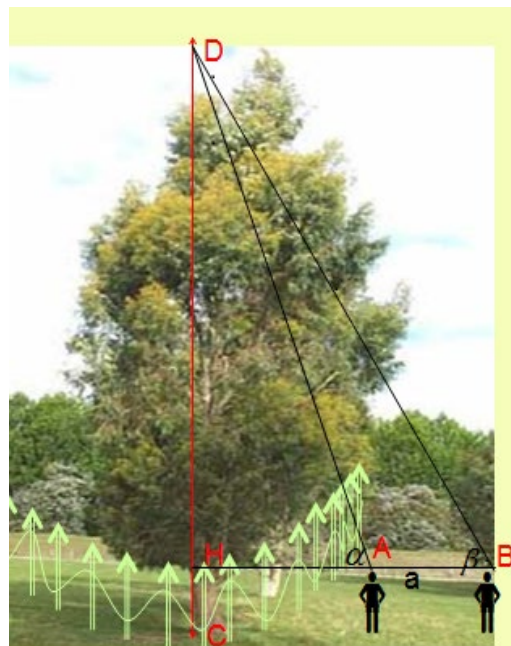
$$\frac{AD}{\sin 43^\circ} = \frac{CD}{\sin 24^\circ} \Rightarrow AD = \frac{30 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 24^\circ} \approx 50,30(m)$$

Trong tam giác vuông BAD ta có $\sin 67^\circ = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB = 50,30 \cdot \sin 67^\circ = 46,30(m)$

Vậy chiều cao của tòa tháp là $46,30(m)$

Câu 8. Trong tam giác vuông AHC ta có $AH = AC \cdot \cos \widehat{HAC} \approx 6,30 \cdot \cos 35^\circ \approx 5,16$ (km).

Từ hai vị trí A, B người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Lấy C là điểm gốc cây, D là điểm ngọn cây. A, B cùng thẳng hàng với điểm H thuộc chiều cao CD của cây. Người ta đo được $AB = 10m$, $HC = 1,7m$, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Tính chiều cao của cây đó.



Lời giải

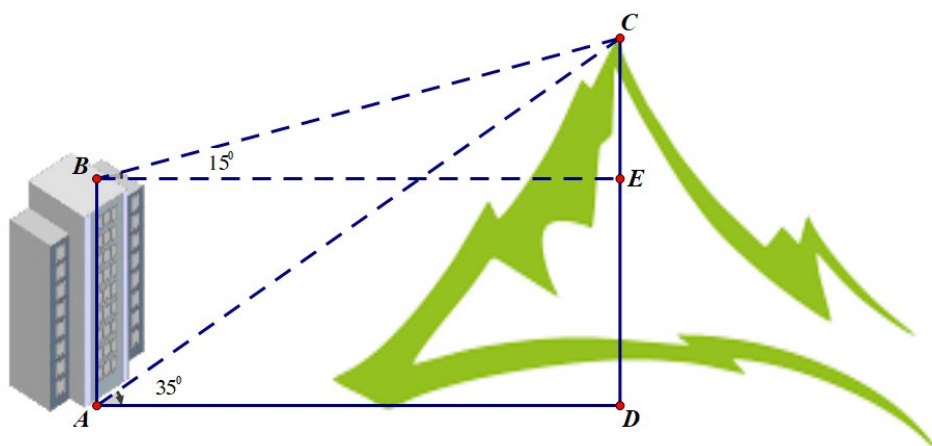
Ta có $\alpha = 63^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 117^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^\circ - (117^\circ + 48^\circ) = 15^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD ta có: $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{ADB}}$

Tam giác BHD vuông tại H nên có: $\sin \widehat{HBD} = \frac{HD}{BD} \Rightarrow HD = BD \cdot \sin \widehat{HBD}$

Vậy $HD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{HBD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{10 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 25,58m$.

Câu 9. Một người quan sát đỉnh của một ngọn núi nhân tạo từ hai vị trí khác nhau của tòa nhà. Lần đầu tiên người đó quan sát đỉnh núi từ tầng trệt với phương nhìn tạo với phương nằm ngang 35° và lần thứ hai người này quan sát tại sân thượng của cùng tòa nhà đó với phương nằm ngang 15° (như hình vẽ). Tính chiều cao ngọn núi biết rằng tòa nhà cao $60(m)$.



Lời giải

Ta có: $\widehat{CBA} = \widehat{CBE} + \widehat{EBA} = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ \Rightarrow \widehat{BCA} = 180^\circ - (\widehat{CBA} + \widehat{BAC}) = 20^\circ$

Áp dụng định lý hàm sin cho ΔCBA ta có

$$\frac{AB}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{CBA})} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin(\widehat{CBA})}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{60 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 20^\circ} = 169,4506909(m)$$

Xét ΔCAD vuông tại D , ta có $CD = AC \cdot \sin(\widehat{CAD}) \approx 97,193(m)$.

Dạng 4. Nhận dạng tam giác

Câu 1. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc A tù $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc A vuông $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$;

Lời giải

a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc A tù $\Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc A vuông $\Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Câu 2. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh tam giác có ba góc nhọn.

Lời giải

Ta có $a^3 = b^3 + c^3$ nên a là cạnh lớn nhất, suy ra A là góc lớn nhất.

Ta chứng minh góc A nhọn là đủ. Thật vậy, ta có:

$$a^3 = b^3 + c^3 = b \cdot b^2 + c \cdot c^2 < a \cdot b^2 + a \cdot c^2 = a(b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$$

Vậy ta suy ra góc A nhọn, dẫn đến tam giác có ba góc nhọn.

Câu 3. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh ABC là tam giác nhọn.

Lời giải

Ta có $a^4 = b^4 + c^4$ nên a là cạnh lớn nhất, suy ra A là góc lớn nhất.

Ta chứng minh góc A nhọn là đủ. Thật vậy, ta có:

$$a^4 = b^4 + c^4 = (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2 < (b^2 + c^2)^2 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$$

Vậy ta suy ra góc A nhọn, dẫn đến ABC là tam giác nhọn.

Câu 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin A = 2 \sin B \cdot \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c$$

Vậy ABC là tam giác cân tại A .

Câu 5. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, $C = 30^\circ$. Chứng minh ABC là tam giác cân. Tính diện tích và chiều cao h_a của tam giác.

Lời giải

$$\text{Theo định lý cosin ta có } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$$

Do đó $c = 2 = b$ nên tam giác ABC cân tại A có góc $B = C = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}, h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1.$$

Câu 6. Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos B}{\sin B} &= \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} - 1 = \frac{2a + c}{2a - c} - 1 \\ &\Leftrightarrow 2ac \cdot \cos B = c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

Câu 7. Cho tam giác ABC có chiều cao $h_a = \sqrt{p(p-a)}$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải

Ta có $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ nên

$$h_a = \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = a\sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)} = a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq (p-b) + (p-c) = 2p - b - c = a$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên $p-b = p-c \Leftrightarrow b = c$.

Vậy tam giác ABC cân tại A .

Câu 8. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

Lời giải

Áp dụng định lý trung tuyến ta có:

$$\begin{aligned} 5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 &\Leftrightarrow 5\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 5(2b^2 + 2c^2) - 5a^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2 \Leftrightarrow 9b^2 + 9c^2 = 9a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A .

Câu 9. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng r và các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng bằng r_a, r_b, r_c . Chứng minh rằng nếu $r = r_a - r_b - r_c$ thì góc A là góc vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có } r_a = \frac{S}{p-a}, \text{ tương tự } r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}.$$

$$\text{Mặt khác từ công thức diện tích có } r = \frac{S}{p}.$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Rightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)}.$$

Vì

$$2p - (b+c) = a \Rightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c);$$

$$pa = p(p+c) - bc \Rightarrow bc = p(b+c-a) = \frac{b+c+a}{2}(b+c-a)$$

$$\Rightarrow 2bc = (b+c)^2 - a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Theo định lý Pitago ta có $\hat{A} = 90^\circ$.

Câu 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a+b-c} = c^2$. Chứng minh góc $C = 60^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a^3 + b^3 - c^3}{a+b-c} = c^2 \Rightarrow a^3 + b^3 - c^3 = (a+b)c^2 - c^3$$

$$\text{Suy ra } a^3 + b^3 = (a+b)c^2 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^\circ$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 11. Cho tam giác ABC biết $a = 7, b = 8, c = 5$. Chứng minh tam giác ABC có góc 60°

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$$

Câu 12. Cho tam giác ABC thỏa mãn $c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + c^4 = 0$. Chứng minh tam giác ABC có góc 60° hoặc 120° .

Lời giải

Xét đẳng thức đã cho là phương trình bậc 2 theo $t = c^2$.

$$\text{Ta có: } \Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + a^2b^2 + c^4) = a^2b^2.$$

$$\text{Do đó } c^2 = a^2 + b^2 \pm ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \cos C = a^2 + b^2 \pm 2ab.$$

$$\text{Suy ra } \cos C = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^\circ \text{ hay } 120^\circ.$$

Câu 13. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a + b + c = 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải

Ta có $a = b \cos C + c \cos B, b = c \cos A + a \cos C, c = a \cos B + b \cos A$ nên điều kiện đã cho tương đương với $(a-b)(\cos A - \cos B) + (b-c)(\cos B - \cos C) + (c-a)(\cos C - \cos A) = 0$.

Ta chứng minh $(a-b)(\cos A - \cos B) \leq 0$, dấu “=” khi $a = b$.

Xét $a = b$ thì bất đẳng thức đúng.

Xét $a > b$ thì $A > B \Rightarrow \cos A < \cos B \Rightarrow (a-b)(\cos A - \cos B) < 0$.

Xét $a < b$ thì $A < B \Rightarrow \cos A > \cos B \Rightarrow (a-b)(\cos A - \cos B) < 0$.

Tương tự thì $(b-c)(\cos B - \cos C) \leq 0$ và $(c-a)(\cos C - \cos a) \leq 0$.

Do đó dấu đẳng thức đồng thời xảy ra nên $a = b = c$. Vậy tam giác ABC đều.

Câu 14. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ, a = 10, r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải

Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Ta có $AP = AN = r \cdot \cot 30^\circ = 5$ và $BP + NC = BM + MC = a = 10$.

Từ đó ta có $(b - AN) + (c - AP) = 10$ hay $b + c = 20$.

Theo định lý cô-sin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$ hay $a^2 = (b + c)^2 - 2bc - bc$.

$$\text{Suy ra } bc = \frac{(b + c)^2 - a^2}{3} = \frac{20^2 - 10^2}{3} = 100.$$

Mà $b + c = 20$ nên b, c là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 20x + 100 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép $b = c = 10$ nên ABC là tam giác đều.

Câu 15. Xét tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2$ và $\sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \Rightarrow a^3 + c^3 - b^3 = (a + c)b^2 - b^3.$$

$$\Rightarrow a^3 + c^3 = (a + c)b^2 \Rightarrow a^2 - ac + c^2 = b^2.$$

$$\Rightarrow a^2 - ac + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^\circ$$

$$\text{Do đó } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin^2 B = \frac{3}{4} \text{ nên } \sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4} = \sin^2 B \Rightarrow \frac{a}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\Rightarrow ac = b^2 \Rightarrow ac = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c.$$

Vậy ABC là tam giác cân và có góc 60° nên là tam giác đều.

Câu 16. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là một điểm tùy ý.

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2$$

$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 - 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

$$\text{Ta có } (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh, với mọi điểm M , ta có

$$(m_a + m_b + m_c)^2 = \frac{9}{4}(GA + GB + GC)^2 \leq \frac{9}{4} \cdot 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) \leq \frac{27}{4}(MA^2 + MB^2 + MC^2)$$

Thay M bởi tâm O của đường tròn ngoại tiếp, ta được

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{27}{4} \cdot 3R^2 = \frac{81}{4}R^2.$$

$$\text{Suy ra } m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R.$$

$$\text{Vậy nếu } ABC \text{ là tam giác đều thì có } m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R. \quad (1)$$

Ngược lại nếu giả sử tam giác ABC thỏa mãn điều kiện (1). Thay điểm M bằng tâm O của đường tròn ngoại tiếp ABC , ta có $3R^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3OG^2$.

$$\text{Suy ra } \frac{81}{4}R^2 = 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{81}{4}OG^2 \geq (m_a + m_b + m_c)^2 + \frac{81}{4}OG^2.$$

$$\text{Do đó } \frac{81}{4}R^2 \geq \frac{81}{4}R^2 + \frac{81}{4}OG^2 \Rightarrow OG^2 = 0 \text{ hay } O \equiv G.$$

Vậy ABC là tam giác đều.

Câu 17. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải

Áp dụng định lý cô-sin và sin ta có

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C .

Câu 18. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A (\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b+c}{2R} \Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2 + c^2) - a^2(b+c) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

Câu 19. Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$.

b) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$.

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy tam giác ABC đều.

b) Ta có

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \right)$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4 \sin^2 A \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R} \right)^2 = \left(\frac{b}{2R} \right)^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Đường trung tuyến

Câu 1. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

- A. 10 cm . B. 9 cm . C. 7,5 cm . D. 8 cm .

Lời giải

Chọn C

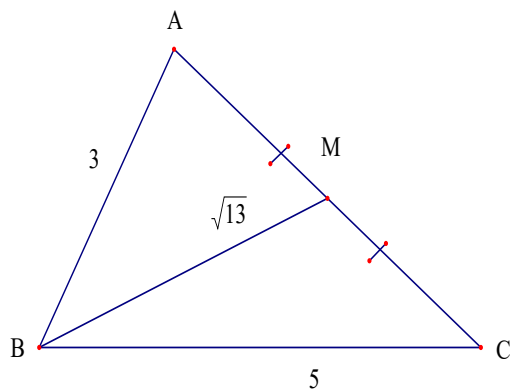
$$\text{Ta có } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9^2 + 12^2}{2} - \frac{15^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow AM = \frac{15}{2}.$$

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 5$ và độ dài đường trung tuyến $BM = \sqrt{13}$. Tính độ dài AC .

- A. $\sqrt{11}$. B. 4 . C. $\frac{9}{2}$. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến;ta có:

$$BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{13})^2 = \frac{3^2 + 5^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow AC = 4.$$

Câu 3. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , biết $\widehat{C} = 30^\circ$, $AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến AM ?

A. 3

B. 4

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn A

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \frac{1}{2}BC = BM = MC$.

Xét $\triangle BAC$ có $\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Xét tam giác ABM có $BM = AM$ và $\widehat{B} = 60^\circ$ suy ra $\triangle ABM$ là tam giác đều.

$\Rightarrow AM = AB = 3$.

Câu 4. Tam giác ABC có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{9}$.

B. 9.

C. 3.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: Trong tam giác ABC có $a = 6 \Rightarrow BC = 6$ mà $BM = 3$ suy ra M là trung điểm BC .

$$\text{Suy ra: } AM^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC có góc C nhọn, AH và BK là hai đường cao, $HK = \sqrt{7}$, diện tích tứ giác $ABHK$ bằng 7 lần diện tích tam giác CHK . Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. 4.

B. 7.

C. 8.

D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{ABHK} = 7S_{CHK} \Rightarrow S_{ABC} = 8S_{CHK}$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CHK}} = \frac{\frac{1}{2}CA.CB.\sin C}{\frac{1}{2}CK.CH.\sin C} = \frac{CA.CB}{CK.CH} = 8 \quad (1)$$

$$\Delta AHC \text{ vuông tại } H, \text{ ta có } \cos C = \frac{CH}{CA} \quad (2)$$

$$\Delta BKC \text{ vuông tại } K, \text{ ta có } \cos C = \frac{CK}{CB} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } \cos^2 C = \frac{1}{8}$$

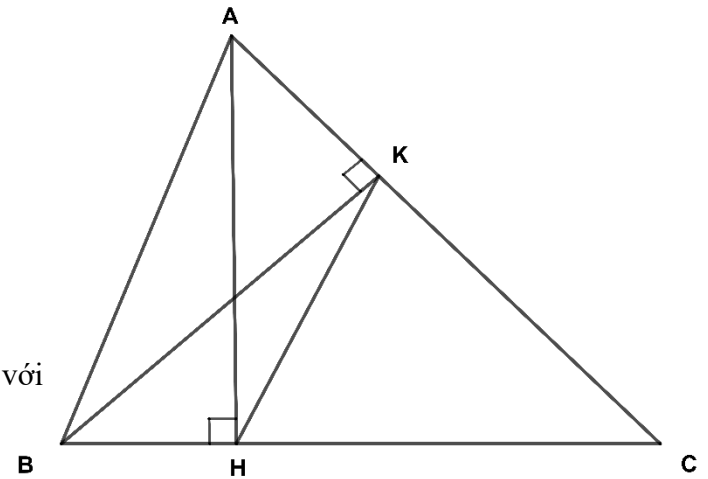
Ta có ΔHCK đồng dạng với

$$\Delta ACB \Rightarrow \frac{HK}{AB} = \frac{CH}{AC} = \cos C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{2}HK = 2\sqrt{14}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{AB}{2\sqrt{1-\cos^2 C}} = \frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{1-\frac{1}{8}}} = 4.$$

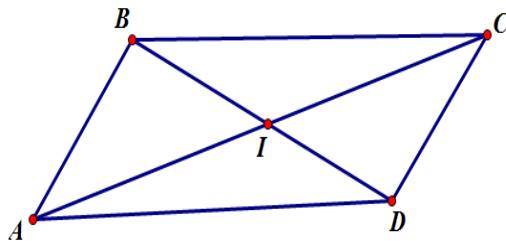


Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4 \text{ cm}$; $BC = 5 \text{ cm}$; $BD = 7 \text{ cm}$. Độ dài đoạn AC bằng bao nhiêu cm ? (Tính chính xác đến hàng phần trăm)

- A. $6,25(\text{cm})$. B. $5,74(\text{cm})$. C. $5,67(\text{cm})$. D. $5,93(\text{cm})$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là giao điểm của AC và BD .

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến trong tam giác ABD ta có

$$AI^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{4^2 + 5^2}{2} - \frac{7^2}{4} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{33}{4} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{33}}{2}(\text{cm})$$

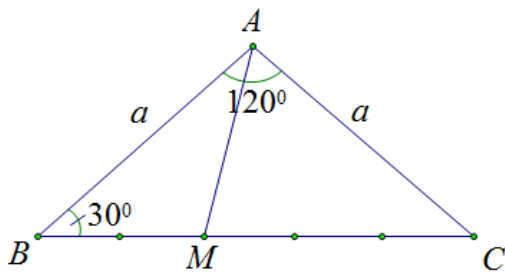
$$\Rightarrow AC = 2AI = 2 \cdot \frac{\sqrt{33}}{2} \approx 5,74(\text{cm}).$$

Câu 7. Cho tam giác ABC cân tại A biết $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2}{5}BC$. Tính độ dài AM .

- A. $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $AM = \frac{11a}{5}$. C. $AM = \frac{a\sqrt{7}}{5}$. D. $AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



+ Áp dụng định lí cosin trong $\triangle ABC$, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{3} \Rightarrow BM = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

+ Áp dụng định lí cosin trong $\triangle ABM$, ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 30^\circ = a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2}{25}.$$

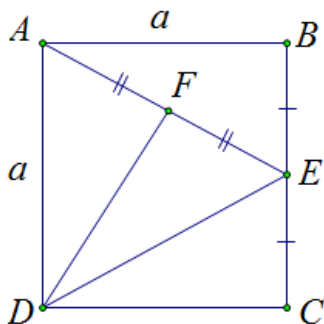
$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm cạnh BC và F là trung điểm cạnh AE . Tính độ dài đoạn thẳng DF .

A. $DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. **B.** $DF = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $DF = \frac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD$ là hình vuông và E là trung điểm của BC nên $AE = DE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng công thức độ dài trung tuyến trong tam giác DAE , ta có

$$DF^2 = \frac{DA^2 + DE^2}{2} - \frac{AE^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{5a^2}{16} = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Câu 9. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng a và nội tiếp đường tròn $(O; \sqrt{3})$. Để diện tích tam giác lớn nhất thì $\hat{B}$ bằng

A. 90° . **B.** 120° . **C.** 30° . **D.** 60° .

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh BC .

Áp dụng định lí Pitago vào $\triangle ABH$ vuông tại H có: $AH^2 + BH^2 = AB^2$

Xét $\triangle ABC$ có $\sin B = \frac{AH}{AB}$, $\cos B = \frac{BH}{AB}$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = \left(\frac{AH}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BH}{AB}\right)^2 = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C} < 90^\circ$

$$\text{Ta có } \sin B = \frac{AC}{2R} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \cos B = \cos C = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4(\sqrt{3})^2}}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2a \cos B \cdot a \sin B = \frac{a^3 \sqrt{4(\sqrt{3})^2 - a^2}}{4(\sqrt{3})^2}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho bốn số không âm ta có

$$3\sqrt{3} \sqrt{\frac{a^2}{3} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot (4(\sqrt{3})^2 - a^2)} \leq 3\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + (4R^2 - b^2)}{4}\right)^4} = 3\sqrt{3} (\sqrt{3})^4$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a^2}{3} = 4(\sqrt{3})^2 - a^2 \Leftrightarrow a = 3$.

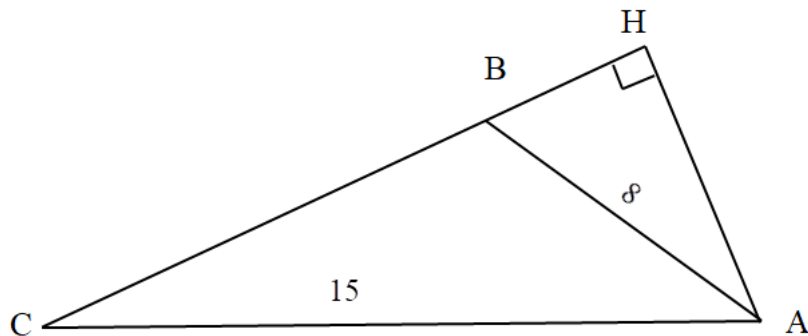
$$\text{Suy ra } \sin B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

Vậy $\hat{B} = 60^\circ$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có $AC = 8$; $AB = 15$; $\cos A = \frac{4}{5}$. Độ dài đường cao AH bằng:

- A. $\frac{72}{\sqrt{79}}$. B. $\frac{72}{97}$. C. $\frac{\sqrt{72}}{97}$. D. $\frac{72}{\sqrt{97}}$.

Lời giải



+ Theo định lí côsin ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 97 \Rightarrow BC = \sqrt{97}$.

$$+ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Ta có: $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{9}{25}$. Vì $\sin A > 0 \Rightarrow \sin A = \frac{3}{5}$.

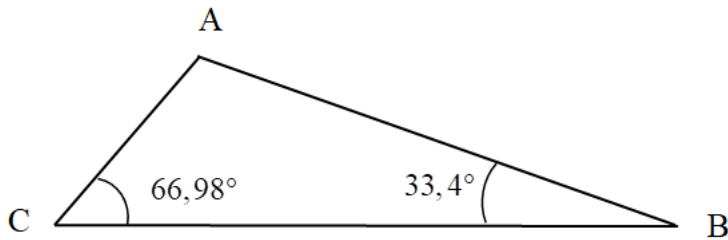
$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = 36.$$

$$\text{Ta có } AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{72}{\sqrt{97}}. \text{ Vậy } AH = \frac{72}{\sqrt{97}}.$$

Câu 11. Cho tam giác ABC có $a = 109$, $\hat{B} = 33^\circ 24'$, góc $\hat{C} = 66^\circ 59'$. Chu vi tam giác ABC gần bằng số nào sau đây?

- A. 136. B. 227. C. 272. D. 372.

Lời giải



109

Ta có: $\widehat{B} = 33^\circ 24' = 33,4^\circ$, $\widehat{C} = 66^\circ 59' \approx 66,98^\circ \Rightarrow \widehat{A} \approx 79,62^\circ$.

Áp dụng định lý sin ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} \approx 61$.

Tương tự ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} \approx 102$.

Chu vi tam giác ABC là: $2p = a + b + c \approx 109 + 61 + 102 = 272$.

Câu 12. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2$; $AC = 3$; $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

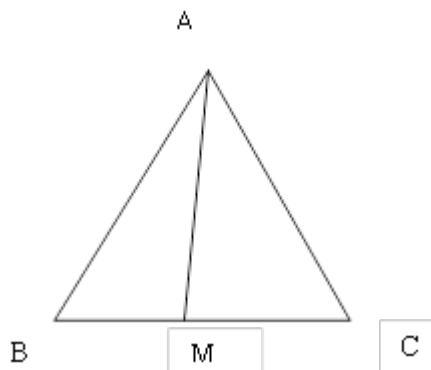
A. $\frac{12}{5}$.

B. $\frac{6\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Lời giải



Gọi M là chân đường phân giác góc A .

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

Lại có $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $BM = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABM ta được:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos \widehat{ABC} = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{108}{25}.$$

$$\Rightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 13. Cho tam giác ABC , có $m_a = \frac{\sqrt{151}}{2}$, (với m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và các cạnh $AC = 8$, $AB = 6$). Tính độ dài BC .

A. $a = 6$.

B. $a = 9$.

C. $a = 49$.

D. $a = 7$.

Lời giải

Đặt: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Ta có:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - 4m_a^2} = \sqrt{2(8^2 + 6^2) - 151} = 7.$$

Câu 14. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, cạnh $a = 30$ bán kính đường tròn nội tiếp $r = 5\sqrt{3}$. Tính tổng độ dài hai cạnh còn lại b, c của tam giác ABC .

A. 30.

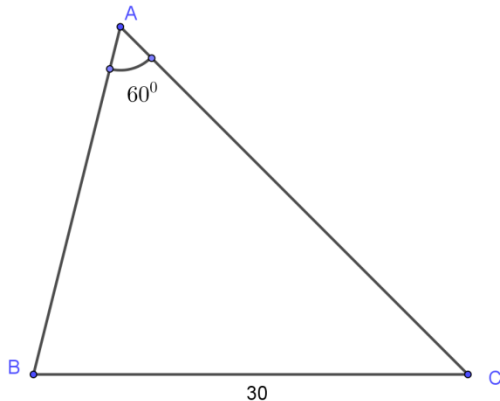
B. 60.

C. 50.

D. 90.

Lời giải

guyên



Áp dụng định lý cosin vào tam giác ABC ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow 900 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow (b + c)^2 - 3bc = 900 \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a+b+c}{2}r \Leftrightarrow \frac{bc\sqrt{3}}{2} = (30+b+c)5\sqrt{3} \Leftrightarrow bc = 300 + 10(b+c) \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có } (b+c)^2 - 30(b+c) - 900 = 900 \Leftrightarrow \begin{cases} b+c = 60(tm) \\ b+c = -30(l) \end{cases}$$

Vậy $b+c = 60$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 75^\circ$ và phân giác trong $AD = 4$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

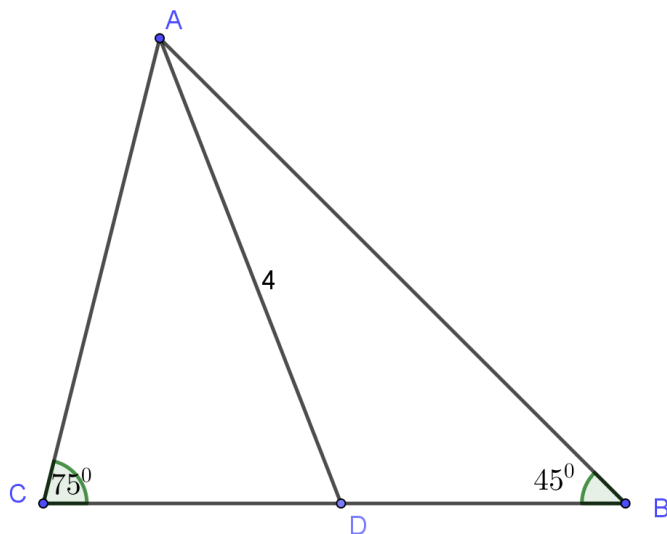
A. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

B. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

C. $-4 + 4\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$, $\widehat{ADB} = \hat{C} + \widehat{DAC} = 105^\circ$

Áp dụng định lý sin vào tam giác ADB

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} \Rightarrow AB = \frac{\sin \widehat{ADB}}{\sin \widehat{ABD}} \cdot AD = \frac{\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot 4 = 2 + 2\sqrt{3}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2 \sin 75^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 16. Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{5}$, $AC = 6$, $BC = 5$. Tính độ dài cạnh AB .

A. $\sqrt{73}$.

B. 8.

C. $\sqrt{55}$.

D. 7.

Lời giải

Vì trong tam giác ABC ta có $A+B$ bù với góc C nên

$$\cos(A+B) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{5} \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}} = 7.$$

Câu 17. Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 9$, $AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 8$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

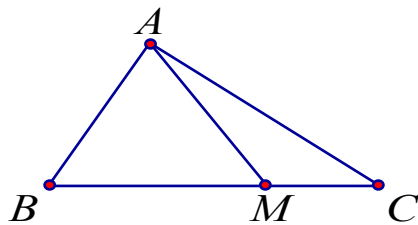
A. $\sqrt{94}$.

B. $\sqrt{106}$.

C. $\sqrt{166}$.

D. $\sqrt{34}$.

Lời giải



$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{11}{16}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B} = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{34}.$$

Câu 18. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Một điểm I bất kì thuộc miền trong tam giác ABC . Tính tổng khoảng cách từ điểm I đến ba cạnh của tam giác?

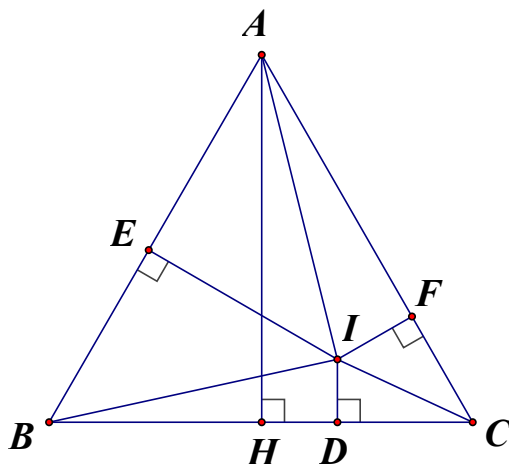
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

D. $2a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi D , E , F lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh BC , AB , AC .

Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Khi đó:

$$S_{ABC} = S_{ABI} + S_{ACI} + S_{BCI} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} IE \cdot AB + \frac{1}{2} IF \cdot AC + \frac{1}{2} ID \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow AH \cdot BC = (ID + IE + IF) \cdot BC \text{ (Do } ABC \text{ là tam giác đều nên } AB = AC = BC)$$

$$\Leftrightarrow ID + IE + IF = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Vậy tổng khoảng cách từ điểm I đến các cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

Câu 19. Tam giác ABC có trọng tâm G . Hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB .

A. $AB = \sqrt{11}$.

B. $AB = \sqrt{13}$.

C. $AB = 2\sqrt{11}$.

D. $AB = 2\sqrt{13}$.

Lời giải

Ta có: $\widehat{BGC}$ và $\widehat{BGN}$ là hai góc kề bù mà $\widehat{BGC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BGN} = 60^\circ$

G là trọng tâm của tam giác $\triangle ABC$

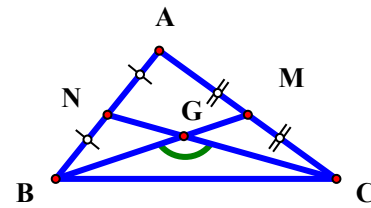
$$\Rightarrow \begin{cases} BG = \frac{2}{3} BM = 4. \\ GN = \frac{1}{3} CN = 3. \end{cases}$$

Trong tam giác $\triangle BGN$ ta có:

$$BN^2 = GN^2 + BG^2 - 2GN \cdot BG \cdot \cos \widehat{BGN}$$

$$\Rightarrow BN^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow BN = \sqrt{13}.$$

N là trung điểm của $AB \Rightarrow AB = 2BN = 2\sqrt{13}$.



Dạng 2. Diện tích tam giác

Câu 20. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S = \frac{1}{2} bc \sin A$.

B. $S = \frac{1}{2} ac \sin A$.

C. $S = \frac{1}{2} bc \sin B$.

D. $S = \frac{1}{2} bc \sin B$.

Lời giải

Chọn **A**.

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Câu 21. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

A. $\frac{a^2}{4}$.

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

D. a^2 .

Lời giải

Chọn **B**

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = a \cdot a \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} a^2.$$

Câu 22. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$.

A. $\sqrt{56}$.

B. $\sqrt{48}$.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn **A**

Ta có: $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3 + 5 + 6}{2} = 7.$

Vậy diện tích tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)} = \sqrt{56}.$$

Câu 23. Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

A. 48.

B. 24.

C. 12.

D. 30.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Nửa chu vi $\triangle ABC$: $p = \frac{a+b+c}{2}.$

Áp dụng công thức Hê-rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24.$

Câu 24. Cho $\triangle ABC$ có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

A. $5\sqrt{3}.$

B. 5.

C. 10.

D. $10\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = 5.$

Câu 25. Một tam giác có ba cạnh là 13, 14, 15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

A. 84.

B. $\sqrt{84}.$

C. 42.

D. $\sqrt{168}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21.$

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84.$

Câu 26. Cho các điểm $A(1; -2), B(-2; 3), C(0; 4)$. Diện tích $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13}{2}.$

B. 13.

C. 26.

D. $\frac{13}{4}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 5) \Rightarrow AB = \sqrt{34}, \overrightarrow{AC} = (-1; 6) \Rightarrow AC = \sqrt{37}, \overrightarrow{BC} = (2; 1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}.$

Mặt khác $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{\sqrt{37} + \sqrt{34} + \sqrt{5}}{2}.$

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{13}{2}$.

Câu 27. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích $\triangle ABC$ là

A. 12.

B. 6.

C. $6\sqrt{2}$.

D. 9.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC} = (5; 1) \Rightarrow AC = \sqrt{26}$, $\overrightarrow{BC} = (3; 3) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AB \perp BC$.

Suy ra: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 6$.

Câu 28. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

A. $9\sqrt{15}$.

B. $3\sqrt{15}$.

C. 105.

D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+6+8}{2} = 9$.

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt{15}$.

Câu 29. Cho tam giác ABC . Biết $AB=2$; $BC=3$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

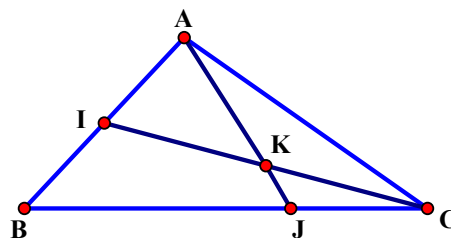
A. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$.

B. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. $5 + \sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Chọn B

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 13 - 6 = 7$.

Suy ra $AC = \sqrt{7}$.

Chu vi tam giác ABC là $AB + AC + BC = 2 + 3 + \sqrt{7}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

- Câu 30.** Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng
- A. 72. B. 144. C. 54. D. 108.

Lời giải 1

Chọn A

Theo bài toán ta có

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 15^2 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 12^2 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 900 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 2\sqrt{13} + \sqrt{73}$, áp dụng công thức He-rông ta có

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72.$$

Cách 2:

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$,

Theo định lý trung tuyến có:

$$\begin{cases} 4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4m_b^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2) \\ 4m_c^2 + c^2 = 2(b^2 + a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 900 \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 291 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 292 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ Suy ra $S_{ABC} = 72$

- Câu 31.** Cho tam giác ΔABC có $b=7; c=5; \cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là.

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. B. 8. C. $8\sqrt{3}$ D. $80\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}. \text{ Suy ra } \begin{cases} \sin A = \frac{4}{5} \\ \sin A = -\frac{4}{5} \end{cases} \text{ vì } 0 \leq \widehat{A} \leq 180^\circ \text{ nên } \sin A = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14 \text{ mà } S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Leftrightarrow 14 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

- Câu 32.** Cho tam giác ABC có $AB = 2a; AC = 4a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC ?

A. $S = 8a^2$.

B. $S = 2a^2\sqrt{3}$.

C. $S = a^2\sqrt{3}$.

D. $S = 4a^2$.

Lời giải**Chọn B**

Diện tích của tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}.2a.4a.\sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3}$ (đvdt).

Câu 33. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi G là trọng tâm ABC . Bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = AG = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 34. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. 12.

B. 3.

C. 6.

D. 24.

Lời giải**Chọn C**

Theo đề bài tam giác ABC có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là $p = \frac{12}{2}$; bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1, tức là ta có: $r = 1$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = p.r = 6.1 = 6$.

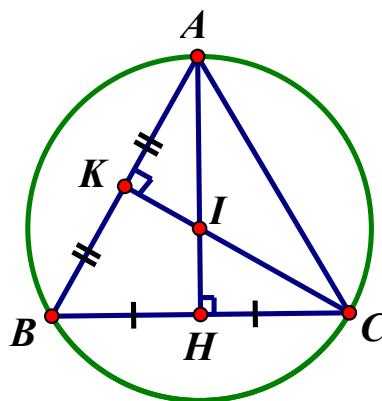
Câu 35. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{8a}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải**Chọn A**

Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC ;

I là giao điểm của AH và BK .

Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có: $AH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó: $R = AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 36. Cho tam giác ABC có $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{3} + 1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý cosin ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ suy ra $A = 60^\circ$.

Áp dụng định lý sin ta có $R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$.

Câu 37. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

- A. 1. B. $\frac{8}{9}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A .

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\frac{1}{2}(AB + AC + BC)} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4 + 5} = 1$.

Câu 38. Cho $\triangle ABC$ có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

- A. 8,125. B. 130. C. 8. D. 8,5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$.

Câu 39. Cho $\triangle ABC$ có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

- A. 3. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$.

Câu 40. Một tam giác có ba cạnh là 26, 28, 30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

- A. 16. B. 8. C. 4. D. $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+28+30}{2} = 42.$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42} = 8.$$

Câu 41. Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

- A. $\frac{65}{8}$. B. 40. C. 32,5. D. $\frac{65}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{52+56+60}{2} = 84.$

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344 .$

Mà $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52.56.60}{4.1344} = \frac{65}{2} .$

Câu 42. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

- A. 6. B. 8. C. $\frac{13}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow R = \frac{13}{2}$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 43. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 3.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$. Mà $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}.5.12 = 30.$

Mặt khác $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2.$

Câu 44. Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

- A. 5. B. $4\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. 6.

Lời giải

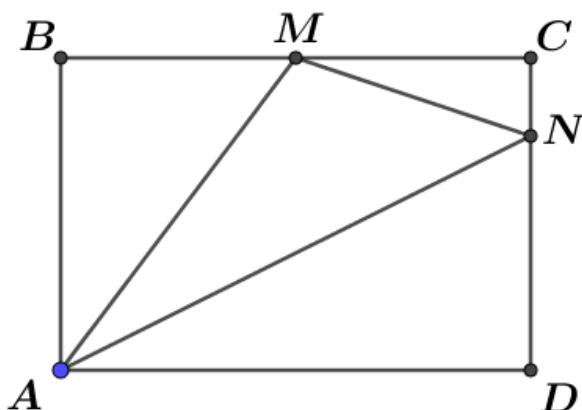
Chọn A.

Ta có: $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow R = \frac{10}{2} = 5$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền).

- Câu 45.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng
- A. $3\sqrt{5}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}$$

$$BM = 3, AB = 4 \Rightarrow AM = 5$$

$$AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45}$$

$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$$

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p - AM)(p - AN)(p - MN)} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác } AMN \text{ là: } R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

- Câu 46.** Cho tam giác đều ABC ; gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$.

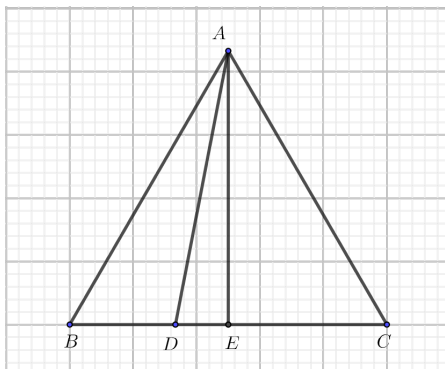
C. $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$.

D. $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$. Do đó $DC = 2DB$.



Gọi S là diện tích của tam giác ACD và E là trung điểm của BC .

$$\text{Đặt } AB = a. \text{ Suy ra } \begin{cases} S = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \\ AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Hơn nữa } \begin{cases} S = \frac{AD + DC + AC}{2} \cdot r = \frac{5 + \sqrt{7}}{6} a \cdot r \\ S = \frac{AD \cdot DC \cdot BC}{4R} = \frac{2a^3 \sqrt{7}}{36R} \end{cases} \Rightarrow S^2 = \frac{(5 + \sqrt{7}) ar \cdot 2a^3 \sqrt{7}}{6 \cdot 36R} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7}) a^4 r}{108R}.$$

$$\text{Hay } \frac{a^4}{12} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7}) a^4 r}{108R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7}) \cdot 12}{108} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7})}{9}.$$

Câu 47. Cho tam giác ABC có $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, cạnh $BC = 12$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC gần với số nào nhất?

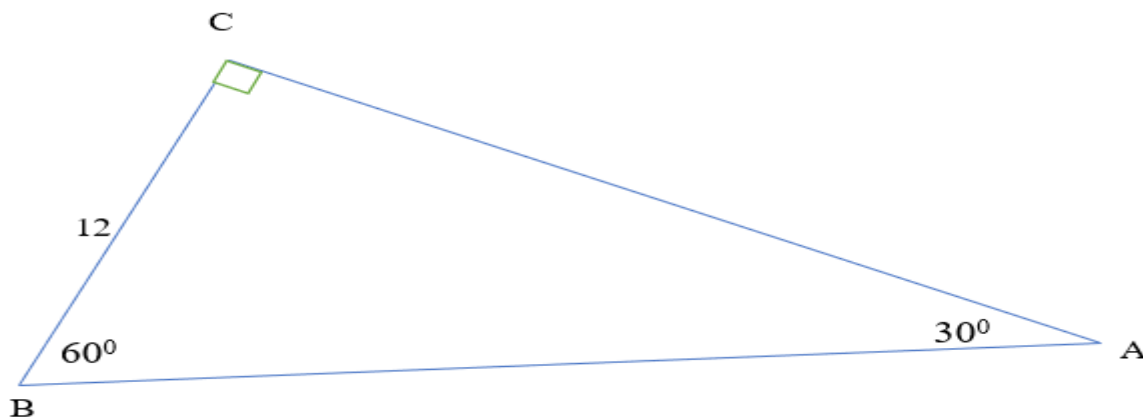
A. 4,6

B. 4,9.

C. 4,8.

D. 4,7

Lời giải



Ta có $AC = BC \cdot \tan B \Leftrightarrow AC = 12 \cdot \tan 60 = 12\sqrt{3}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}.$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta được $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + (12\sqrt{3})^2} = 24$.

$$\text{Nửa chu vi tam giác } p = \frac{24 + 12 + 12\sqrt{3}}{2} = 16 + 6\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } S_{\triangle ABC} = 72\sqrt{3} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} \approx 4,7.$$

Câu 48. Cho tam giác ABC có góc $A = 60^\circ$, cạnh $a = 30$, bán kính đường tròn nội tiếp $r = 5\sqrt{3}$. Tính chu vi của tam giác ABC .

A. $60 + 5\sqrt{3}$.

B. $30 + 10\sqrt{3}$.

C. 80.

D. 90.

Lời giải

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo định lý Sin ta có:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} = \frac{30}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\sqrt{3}.$$

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác và định lý Cosin ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{abc}{4R} = p \cdot r \\ b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \\ b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ = 30^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30 \cdot bc}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{30+b+c}{2} \cdot 5\sqrt{3} \\ b^2 + c^2 - bc = 900 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bc = 10(30+b+c) \\ (b+c)^2 - 3bc = 900 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} b+c = S \\ bc = P \end{cases} \quad (S, P > 0).$

Hệ trên trở thành: $\begin{cases} P = 10S + 300 \\ S^2 - 3P = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 10S + 300 \\ S^2 - 3(10S + 300) = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 10S + 300 \\ S^2 - 30S - 1800 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 10S + 300 \\ \begin{cases} S = 60 \\ S = -30 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 60 \\ P = 900 \end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases} b+c = 60 \\ bc = 900 \end{cases} \Rightarrow b = c = 30.$

Vậy chu vi tam giác ABC là: $a+b+c = 30+30+30 = 90$ (đvdd).

Câu 49. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết $a^2 + b^2 = 5c^2$. Góc giữa hai đường trung tuyến AM, BN của tam giác ABC bằng bao nhiêu?

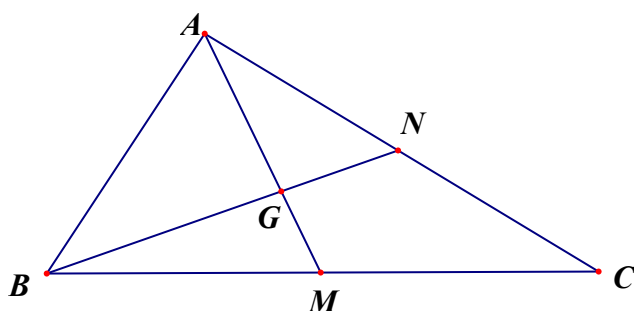
A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC khi đó ta có

$$\begin{cases} AG^2 = \frac{4}{9} AM^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \\ BG^2 = \frac{4}{9} BN^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) \end{cases} \Rightarrow AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + c^2 \right).$$

$$\text{Theo bài ra } a^2 + b^2 = 5c^2 \Rightarrow AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{5c^2}{4} + c^2 \right) = c^2 = AB^2$$

Suy ra tam giác ABG vuông tại G . Vậy góc giữa hai đường trung tuyến AM, BN của tam giác ABC bằng 90° .

Dạng 3. Bài toán thực tế

Câu 50. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?

- A. 13. B. $20\sqrt{13}$. C. $10\sqrt{13}$. D. 15.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30.2 = 60 \text{ km}$.

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80 \text{ km}$.

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1.S_2.\cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$.

Câu 51. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250 \text{ m}, CB = 120 \text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. 266m. B. 255m. C. 166m. D. 298m.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 250^2 + 120^2 - 2.250.120.\cos 78^\circ 24' \approx 64835 \Rightarrow AB \approx 255$.

Câu 52. Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80 \text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?

- A. 71m. B. 91m. C. 79m. D. 40m.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Trong tam giác vuông CDA : $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$.

Trong tam giác vuông CDB : $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$.

Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91 \text{ m}$.

Câu 53. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^{\circ}16'$. Biết $CA = 200m$, $CB = 180m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

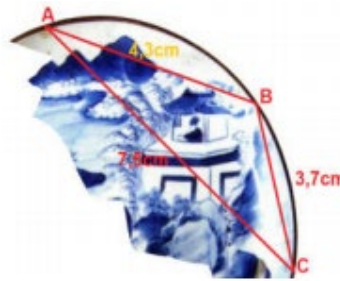
- A. 180m. B. 224m. C. 112m. D. 168m.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^{\circ}16' \approx 32416 \Rightarrow AB \approx 180$.

Câu 54. Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ($AB = 4,3cm$; $BC = 3,7cm$; $CA = 7,5cm$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng (kết quả làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy).



- A. 5,73 cm. B. 6,01cm. C. 5,85cm. D. 4,57cm.

Lời giải

Chọn A

Bán kính R của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Nửa chu vi của tam giác ABC là: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{4,3 + 3,7 + 7,5}{2} = \frac{31}{2} cm$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} \approx 5,2 cm^2$.

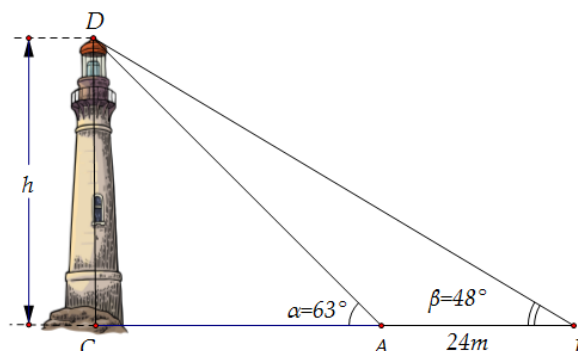
Mà $S = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4S} \approx 5,73 cm$.

Câu 55. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24m$, $\widehat{CAD} = 63^{\circ}$; $\widehat{CBD} = 48^{\circ}$. Chiều cao h của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

- A. 61,4 m. B. 18,5 m. C. 60 m. D. 18 m.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\widehat{CAD} = 63^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 117^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^\circ - (117^\circ + 48^\circ) = 15^\circ$

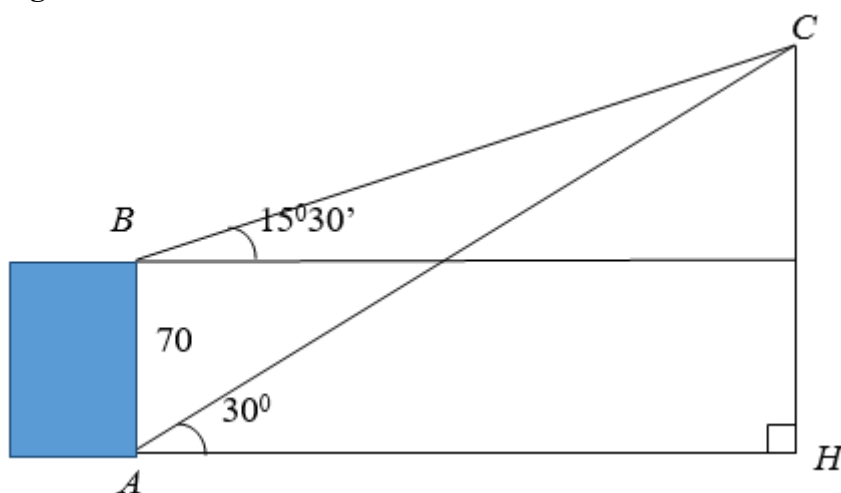
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD ta có: $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{ADB}}$

Tam giác BCD vuông tại C nên có: $\sin \widehat{CBD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD}$

$$\text{Vậy } CD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{24 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 61,4m$$

Câu 56. Từ hai vị trí A, B của một tòa nhà người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng $70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị
A. $195m$. **B.** $234m$. **C.** $165m$. **D.** $135m$.

Lời giải



Ta có: $\widehat{CBA} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$$\widehat{ABC} = 90^\circ + 15^\circ 30' = 105^\circ 30'$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - (105^\circ 30' + 60^\circ) = 14^\circ 30'$$

Áp dụng định lý Sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,41.$$

$$\text{Xét } \triangle ACH \text{ có: } \sin 30^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 30^\circ = 134,71(m).$$

Bài 3. KHÁI NIỆM VECTOR

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Khái niệm vector

Vector là một đoạn thẳng có hướng.

Vector có điểm đầu là A , điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vector AB ".

Để vẽ vector $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng AB và đánh dấu mũi tên ở đầu mút B



Đối với vector $\overrightarrow{AB}$, ta gọi:

- Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B là giá của vector $\overrightarrow{AB}$

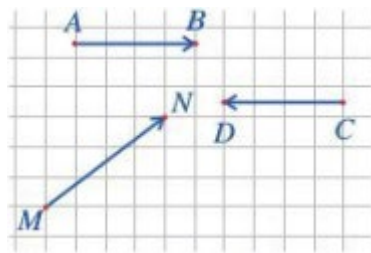


- Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của vector $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

Ví dụ 1. Cho hai điểm phân biệt H, K . Viết hai vector mà điểm đầu và điểm cuối là H hoặc K .

Giải. Hai vector thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{KH}$.

Ví dụ 2. Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$



biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1cm .

Giải

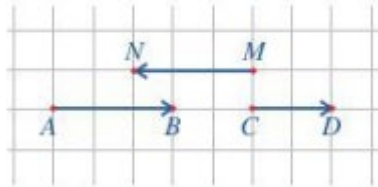
$$|\overrightarrow{AB}| = 4\text{cm}, |\overrightarrow{CD}| = 4\text{cm}, |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm}).$$

II. Vector cùng phương, vector cùng hướng

Hai vecto được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nhận xét: Nếu hai vector cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

Ví dụ 3. Trong hình bên ,



tìm vector cùng hướng với vector $\overrightarrow{AB}$; ngược hướng với vector $\overrightarrow{AB}$.

Giải

Vector $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với vector $\overrightarrow{AB}$, vector $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với vector $\overrightarrow{AB}$.

III. Hai vector bằng nhau

Hai vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vector, vector còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$

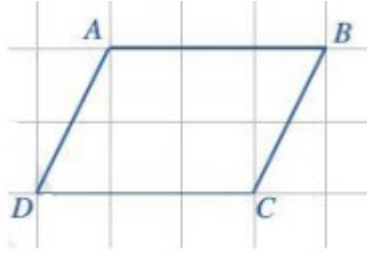


Độ dài của vector $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Nhận xét

- Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.
- Khi cho trước vector $\vec{a}$ và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Ví dụ 4 Cho hình bình hành $ABCD$



a) Vector nào bằng vector $\overrightarrow{AB}$?

b) Vector nào bằng vector $\overrightarrow{AD}$

Giải

a) Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng và $AB = DC$ nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Vì $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $AD = BC$ nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

IV. Vector-không

Cho điểm A , ta xét một vector đặc biệt, trong đó A vừa là điểm đầu vừa là điểm cuối. Vectơ này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vector-không.

Vector-không là vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

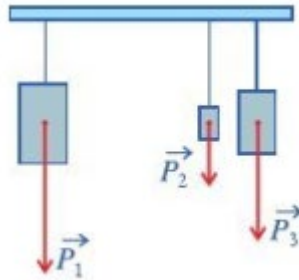
Với các điểm bất kì A, B, C ta có: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

Vector $\overrightarrow{AA}$ nằm trên mọi đường thẳng đi qua A . Ta quy ước $\vec{0}$ (vector-không) cùng phương và cùng hướng với mọi vector; $|\vec{0}| = 0$.

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

V. Biểu thị một số đại lượng có hướng bằng vector

Ví dụ 5. Khi treo ba vật, mỗi vật sẽ tác dụng vào thanh treo một lực (trọng lực) như ở hình dưới



Nhận xét đặc điểm về phương, hướng của ba vector biểu thị trọng lực.

Giải

Trong vật lí, các vector trọng lực có cùng hướng nên ba vector $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ biểu thị trọng lực có cùng hướng.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Hãy tính số các véc-tơ (khác $\vec{0}$) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau đây:

a) Hai điểm. b) Ba điểm. c) Bốn điểm.

Câu 2. Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{0}$ là véc-tơ nào? Véc-tơ đối của véc-tơ $-\vec{a}$ là véc-tơ nào?

Câu 3. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

a) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B .

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N . Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai véc-tơ đối nhau.

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Nối AF và CE , hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N . Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ với A, D, F không thẳng hàng. Dựng các vector $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng vector $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Vector có điểm đầu là D , điểm cuối là E được kí hiệu là:

- A. DE . B. $|\overrightarrow{DE}|$. C. $\overrightarrow{ED}$. D. $\overrightarrow{DE}$.

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$. Số các vector khác $\vec{0}$ có điểm đầu và cuối là đỉnh của tứ giác bằng:

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12.

Câu 3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Hỏi cặp vector nào sau đây cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. C. $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. D. $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Câu 4. Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C , có bao nhiêu điểm D thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 5. Xét các mệnh đề sau

(I): Véc tơ – không là véc tơ có độ dài bằng 0.

(II): Véc tơ – không là véc tơ có nhiều phương.

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. (I) và (II) đúng. D. (I) và (II) sai.

Câu 6. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} = a$. C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. D. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

Câu 7. Cho M là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AB = 3AM$. Hãy tìm khẳng định sai?

A. $|\overline{MB}| = 2|\overline{MA}|$. B. $|\overline{MA}| = 2|\overline{MB}|$. C. $|\overline{BA}| = 3|\overline{AM}|$. D. $|\overline{AM}| = \frac{1}{2}|\overline{BM}|$.

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overline{AD} = \overline{BC}$. B. $\overline{AB} = \overline{AC}$. C. $\overline{AC} = \overline{DB}$. D. $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Các vectơ ngược hướng với $\overline{OB}$ là:

A. $\overline{BD}, \overline{OD}$. B. $\overline{DB}, \overline{OD}, \overline{BO}$. C. $\overline{DB}, \overline{DO}$. D. $\overline{BD}, \overline{OD}, \overline{BO}$

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, AD = 4$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$. B. $|\overline{CD}| = |\overline{BC}|$. C. $|\overline{AC}| = |\overline{AB}|$. D. $|\overline{BD}| = 7$.

Câu 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I , $AB = 3, BC = 4$. Khi đó $|\overline{BI}|$ là:

A. 7. B. $\frac{5}{2}$. C. 5. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng.
- B. Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- C. Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương.
- D. Hai vectơ ngược hướng với 1 vectơ thứ ba thì cùng phương.

Câu 13. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overline{HB} = \overline{HC}$. B. $|\overline{AC}| = 2|\overline{HC}|$. C. $|\overline{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{HC}|$. D. $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Câu 14. Nếu $\overline{AB} = \overline{AC}$ thì:

- A. tam giác ABC là tam giác cân
- B. tam giác ABC là tam giác đều
- C. A là trung điểm đoạn BC
- D. điểm B trùng với điểm C

Câu 15. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overline{MN}$ và $\overline{MP}$ B. $\overline{MN}$ và $\overline{PN}$ C. $\overline{MP}$ và $\overline{PN}$ D. $\overline{NP}$ và $\overline{NM}$

Câu 16. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ $\overline{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

Câu 17. Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overline{MN} = \overline{QP}$ B. $|\overline{QP}| = |\overline{MN}|$ C. $\overline{MQ} = \overline{NP}$ D. $|\overline{MN}| = |\overline{AC}|$

Câu 18. Cho ba điểm A, B, C phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{AB} = \overline{BC}$ B. $\overline{CA}$ và $\overline{CB}$ cùng hướng

C. $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$ ngược hướng D. $\overline{BA}$ và $\overline{BC}$ cùng phương

Câu 19. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overline{MA} = \overline{MB}$. B. $\overline{AB} = \overline{AC}$. C. $\overline{MN} = \overline{BC}$. D. $|\overline{BC}| = 2|\overline{MN}|$.

Câu 20. Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overline{AB} = \overline{CD}$?

- A. $ABCD$ là hình bình hành.
- B. $ABDC$ là hình bình hành.
- C. AD và BC có cùng trung điểm.
- D. $AB = CD$.

Câu 21. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

$$\text{A. } |\overrightarrow{AO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{B. } |\overrightarrow{OA}| = a$$

$$\text{C. } |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$$

$$\text{D. } |\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 34. Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, M là điểm bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } \forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}.$$

$$\text{B. } \exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.$$

$$\text{C. } \forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}.$$

$$\text{D. } \exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}.$$

Câu 35. Cho hai điểm phân biệt A, B . Số vector (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là:

$$\text{A. } 2.$$

$$\text{B. } 6.$$

$$\text{C. } 13.$$

$$\text{D. } 12.$$

Câu 36. Gọi C là trung điểm của đoạn AB . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

$$\text{A. } \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AC} \text{ cùng hướng.}$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CB} \text{ ngược hướng.}$$

$$\text{D. } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|.$$

Câu 37. Cho hình bình hành $ABCD$. Các vector là vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$ là

$$\text{A. } \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}.$$

Câu 38. Số vector (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước là

$$\text{A. } 42.$$

$$\text{B. } 3.$$

$$\text{C. } 9.$$

$$\text{D. } 27.$$

Câu 39. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG .

Độ dài của vector $\overrightarrow{BI}$ là

$$\text{A. } a \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

$$\text{B. } a \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{C. } a \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{D. } a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 40. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Khẳng định nào đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}.$$

$$\text{C. } |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{MN}|.$$

$$\text{D. } |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|.$$

Câu 41. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{B. } |\overrightarrow{BD}| = a.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}.$$

Câu 42. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vector khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vector đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

$$\text{A. Hai vector } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương.}$$

$$\text{B. Hai vector } \vec{a}, \vec{b} \text{ ngược hướng.}$$

$$\text{C. Hai vector } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng độ dài.}$$

$$\text{D. Hai vector } \vec{a}, \vec{b} \text{ chung điểm đầu.}$$

Câu 43. Cho tam giác ABC có M, N, D lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC . Khi đó, các vector đối của vector $\overrightarrow{DN}$ là:

$$\text{A. } \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}.$$

Câu 44. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB ; P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

$$\text{A. } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$$

$$\text{B. } \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$$

$$\text{C. Cả A, B đều đúng}$$

$$\text{D. Cả A, B đều sai}$$

Câu 45. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

- A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$ B. $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$
 C. Cả A, B đều đúng D. A đúng, B sai

Câu 46. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
 C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Câu 47. Cho tam giác ABC với trực tâm H . D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HC}$
 C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ D. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

Câu 48. Cho $\triangle ABC$ với điểm M nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M qua A', B', C' . Câu nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$ B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$
 C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$ D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

Câu 49. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng với B qua O . Câu nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ C. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

Câu 50. Cho đường tròn tâm O . Từ điểm A nằm ngoài (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) . Xét mệnh đề:

- (I) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ (II) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$ (III) $|\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}|$

Mệnh đề đúng là:

- A. Chỉ (I) B. (I) và (III) C. (I), (II), (III) D. Chỉ (III)

Câu 51. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, BC, AD . Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

- A. Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PR}$ B. Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$ C. Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ D. Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

Câu 52. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

- A. $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ B. $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ C. $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ D. $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Câu 53. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Gọi O là giao điểm của các đường chéo của tứ giác $MNPQ$, trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD tương ứng là I, J . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$ B. $MP = NQ$ C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ D. $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

Câu 54. Cho tam giác ABC có trực tâm H , D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
 C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HD}$. D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Bài 3. KHÁI NIỆM VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Khái niệm vector

Vector là một đoạn thẳng có hướng.

Vector có điểm đầu là A , điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vector AB ".

Để vẽ vector $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng AB và đánh dấu mũi tên ở đầu mút B



Đối với vector $\overrightarrow{AB}$, ta gọi:

- Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B là giá của vector $\overrightarrow{AB}$

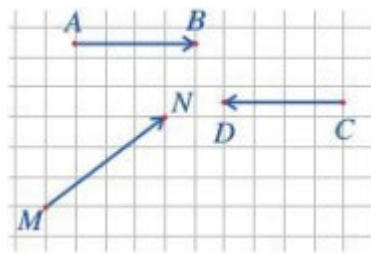


- Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của vector $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

Ví dụ 1. Cho hai điểm phân biệt H, K . Viết hai vector mà điểm đầu và điểm cuối là H hoặc K .

Giải. Hai vector thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{KH}$.

Ví dụ 2. Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$



biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1cm .

Giải

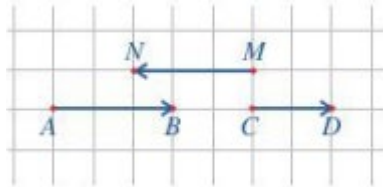
$$|\overrightarrow{AB}| = 4\text{cm}, |\overrightarrow{CD}| = 4\text{cm}, |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm}).$$

II. Vector cùng phương, vector cùng hướng

Hai vecto được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nhận xét: Nếu hai vector cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

Ví dụ 3. Trong hình bên ,



tìm vector cùng hướng với vector $\overrightarrow{AB}$; ngược hướng với vector $\overrightarrow{AB}$.

Giải

Vector $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với vector $\overrightarrow{AB}$, vector $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với vector $\overrightarrow{AB}$.

III. Hai vector bằng nhau

Hai vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vector, vector còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$

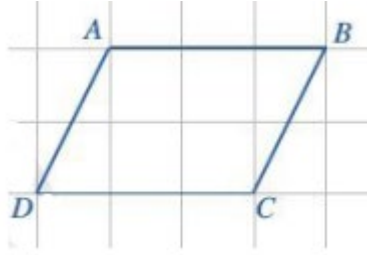


Độ dài của vector $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Nhận xét

- Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.
- Khi cho trước vector $\vec{a}$ và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Ví dụ 4 Cho hình bình hành $ABCD$



a) Vector nào bằng vector $\overrightarrow{AB}$?

b) Vector nào bằng vector $\overrightarrow{AD}$

Giải

a) Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng và $AB = DC$ nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Vì $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $AD = BC$ nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

IV. Vector-không

Cho điểm A , ta xét một vector đặc biệt, trong đó A vừa là điểm đầu vừa là điểm cuối. Vectơ này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vector-không.

Vector-không là vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

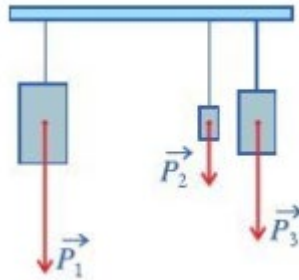
Với các điểm bất kì A, B, C ta có: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

Vector $\overrightarrow{AA}$ nằm trên mọi đường thẳng đi qua A . Ta quy ước $\vec{0}$ (vector-không) cùng phương và cùng hướng với mọi vector; $|\vec{0}| = 0$.

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

V. Biểu thị một số đại lượng có hướng bằng vector

Ví dụ 5. Khi treo ba vật, mỗi vật sẽ tác dụng vào thanh treo một lực (trọng lực) như ở hình dưới



Nhận xét đặc điểm về phương, hướng của ba vector biểu thị trọng lực.

Giải

Trong vật lí, các vector trọng lực có cùng hướng nên ba vector $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ biểu thị trọng lực có cùng hướng.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Hãy tính số các véc-tơ (khác $\vec{0}$) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau đây:

a) Hai điểm. b) Ba điểm. c) Bốn điểm.

Lời giải.

a) Với hai điểm A, B có hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$.

b) Với ba điểm A, B, C có 6 véc-tơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$.

c) Với bốn điểm A, B, C có 4 cách chọn điểm đầu và có 3 cách chọn điểm cuối khác điểm đầu nên có $4.3 = 12$ véc-tơ.

Tổng quát: với n điểm phân biệt thì có $n(n-1)$ véc-tơ khác $\vec{0}$.

Câu 2. Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{0}$ là véc-tơ nào? Véc-tơ đối của véc-tơ $-\vec{a}$ là véc-tơ nào?

Lời giải.

a) Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{0}$ là $\vec{0}$. b) Véc-tơ đối của véc-tơ $-\vec{a}$ là $\vec{a}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

a) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B .

Lời giải.

a) Các véc-tơ khác véc-tơ không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$.

b) Các véc-tơ khác véc-tơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$.

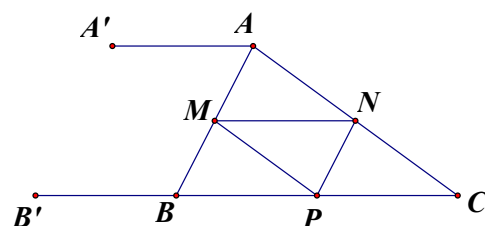
c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là véc-tơ có điểm đầu là B và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP .

Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có là véc-tơ $\overrightarrow{AA'}$ có điểm đầu là A và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.



Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải.

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai véc-tơ $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $B'B \parallel AG$. Do

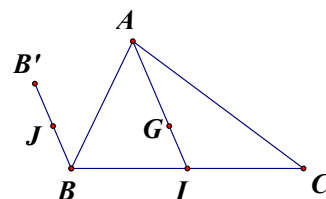
đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$ cùng hướng. (1)

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \frac{1}{2} AG$

và J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \frac{1}{2} BB'$.

Vì vậy $BJ = IG$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

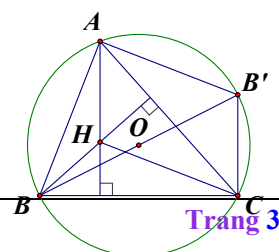


Câu 5. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

Lời giải.

Vì BB' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$\widehat{BAB'} = \widehat{BCB'} = 90^\circ$.



Do đó $CH \parallel B'A$ và $AH \parallel B'C$. Suy ra tứ giác $AB'CH$ là hình bình hành.

Vậy $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

- Câu 6.** Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N . Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai vec-tơ đối nhau.

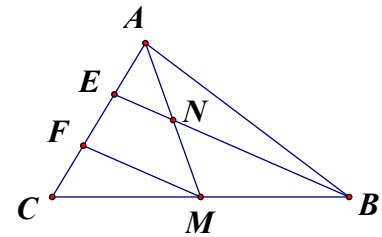
Lời giải.

Ta có $FM \parallel BE$ vì FM là đường trung bình của tam giác CEB .

Mà $EA = EF$ nên EN là đường trung bình của tam giác AFM .

Suy ra N là trung điểm của AM .

Vậy $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NM}$.



- Câu 7.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

Lời giải.

Do M, Q lần lượt là trung điểm của AB và AD nên MQ là đường trung bình của tam giác ABD .

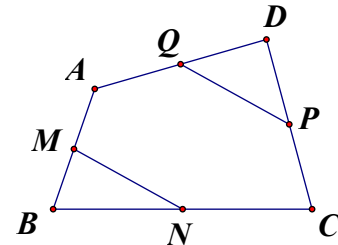
Suy ra $MQ \parallel BD$ và $MQ = \frac{1}{2}BD$. (1)

Tương tự NP là đường trung bình của tam giác BCD .

Suy ra $NP \parallel BD$ và $NP = \frac{1}{2}BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MQ \parallel NP$ và $MQ = NP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Vậy ta có $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.



- Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác AN song song với MC do tứ giác $ANCM$ là hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

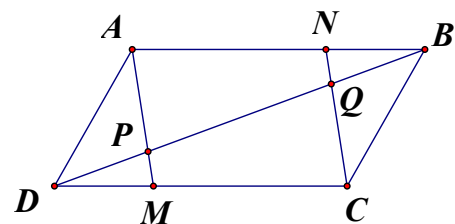
Xét tam giác $\triangle DMP$ và $\triangle BNQ$ ta có

$$\begin{cases} DM = NB & (\text{giả thiết}) \\ \widehat{PDM} = \widehat{QBN} & (\text{so le trong}). \end{cases}$$

Mặt khác $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\triangle DMP = \triangle BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.



- Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Nối AF và CE , hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N . Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

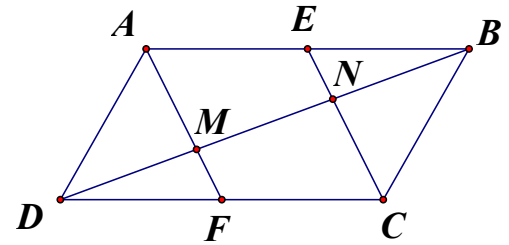
Lời giải.

Ta có $AECF$ là hình bình hành nên: $EN \parallel AM$.

Vì E là trung điểm AB nên N là trung điểm của BM , do đó $MN = NB$.

Tương tự, M là trung điểm của DN , do đó $DM = MN$.

Hơn nữa, vì các véc-tơ cùng hướng nên $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.



- Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ với A, D, F không thẳng hàng. Dựng các vectơ $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.

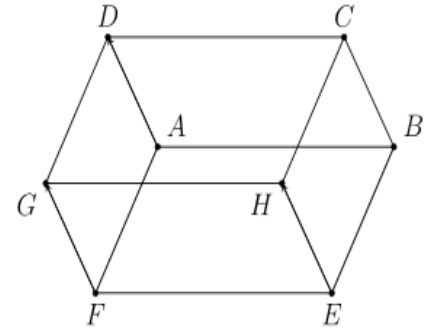
Lời giải

Ta có $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} \Rightarrow$ Tứ giác $FEHG$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$ (1).

Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC}$.

Vậy tứ giác $GHCD$ là hình bình hành.



PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Vectơ có điểm đầu là D , điểm cuối là E được kí hiệu là:

A. DE . B. $|\overrightarrow{DE}|$. C. $\overrightarrow{ED}$. D. $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn D

- Câu 2.** Cho tứ giác $ABCD$. Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và cuối là đỉnh của tứ giác bằng:

A. 4 B. 6 C. 8 D. 12.

Lời giải

Chọn D

Hai điểm phân biệt, giả sử A, B tạo thành hai véc tơ khác véc tơ- không là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Vì vậy từ 4 đỉnh A, B, C, D của tam giác ta có 6 cặp điểm phân biệt nên có 12 véc tơ khác véc tơ – không được tạo thành.

- Câu 3.** Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. C. $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. D. $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 4.** Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C , có bao nhiêu điểm D thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Tập hợp điểm D là đường tròn tâm C , bán kính bằng $|\overrightarrow{AB}|$

- Câu 5.** Xét các mệnh đề sau

(I): Véc tơ – không là véc tơ có độ dài bằng 0.

(II): Véc tơ – không là véc tơ có nhiều phương.

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. (I) và (II) đúng. D. (I) và (II) sai.

Lời giải

Chọn C

Câu 6. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. B. $\overrightarrow{AC} = a$. C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. D. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

Lời giải

Chọn D

Câu 7. Cho M là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AB = 3AM$. Hãy tìm khẳng định sai?

- A. $|\overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA}|$. B. $|\overrightarrow{MA}| = 2|\overrightarrow{MB}|$. C. $|\overrightarrow{BA}| = 3|\overrightarrow{AM}|$. D. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BM}|$.

Lời giải

Chọn D

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{OB}$ là:

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}$. B. $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BO}$. C. $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DO}$. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BO}$

Lời giải

Chọn D

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, AD = 4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. B. $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$. C. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$. D. $|\overrightarrow{BD}| = 7$.

Lời giải

Chọn A

Câu 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I , $AB = 3, BC = 4$. Khi đó $|\overrightarrow{BI}|$ là:

- A. 7. B. $\frac{5}{2}$. C. 5. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng.
B. Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
C. Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương.
D. Hai vectơ ngược hướng với 1 vectơ thứ ba thì cùng phương.

Lời giải

Chọn B

Câu 13. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. B. $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{HC}|$. C. $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{HC}|$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 14. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì:

A. tam giác ABC là tam giác cân
C. A là trung điểm đoạn BC

B. tam giác ABC là tam giác đều
D. điểm B trùng với điểm C

Lời giải

Đáp án D

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow B \equiv C$$

Câu 15. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó cặp vector nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$ C. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$ D. $\overrightarrow{NP}$ và $\overrightarrow{NM}$

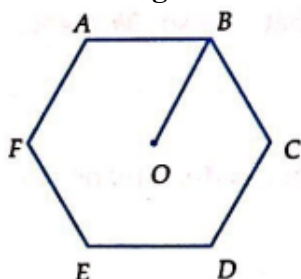
Lời giải

Đáp án A

Câu 16. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vector khác vector không, cùng phương với vector $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

Lời giải



Các vector cùng phương với vector $\overrightarrow{OB}$ là:

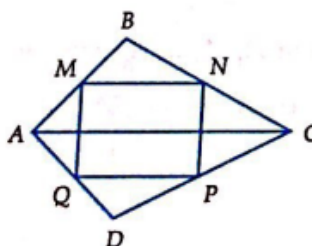
$\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$.

Đáp án B.

Câu 17. Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ B. $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$ C. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ D. $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$

Lời giải



Ta có $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$).

Do đó MNPQ là hình bình hành.

Đáp án D.

Câu 18. Cho ba điểm A, B, C phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng D. $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

Lời giải

Với ba trường hợp lần lượt A, B, C nằm giữa thì ta luôn có $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Đáp án D.

Câu 19. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

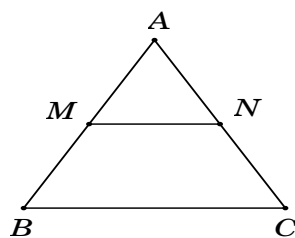
B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$.

D. $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC .

Do đó $BC = 2MN \longrightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Câu 20. Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

A. $ABCD$ là hình bình hành.

B. $ABDC$ là hình bình hành.

C. AD và BC có cùng trung điểm.

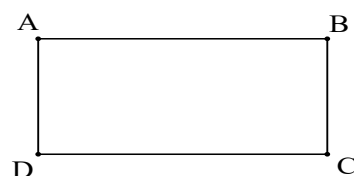
D. $AB = CD$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC \text{ là hình bình hành.}$



• Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành

$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 21. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$.

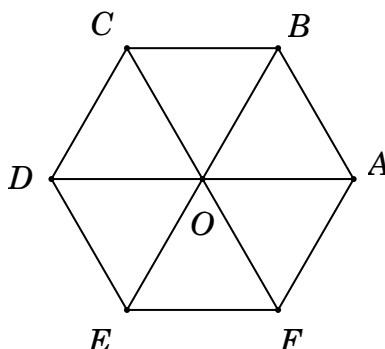
B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AF}|$.

C. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.

Lời giải

Chọn D



Hai vectơ này ngược hướng.

Câu 22. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm AB, BC, AD . Lấy 8 điểm trên làm điểm gốc hoặc điểm ngọn các vector. Tìm mệnh đề **sai**:

- A. Có 2 vector bằng $\overrightarrow{PQ}$ B. Có 4 vector bằng $\overrightarrow{AR}$
C. Có 3 vector bằng $\overrightarrow{BO}$ D. Có 5 vector bằng $\overrightarrow{OP}$

Lời giải

Chọn C

Câu 23. Cho hai điểm phân biệt A và B . Điều kiện để điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB là:

- A. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$. B. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$. C. $IA = IB$. D. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}.$$

Câu 24. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm I . Hãy cho biết số khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IO}$
d) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}$ e) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ f) $2|\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{BD}|$

A. 3.

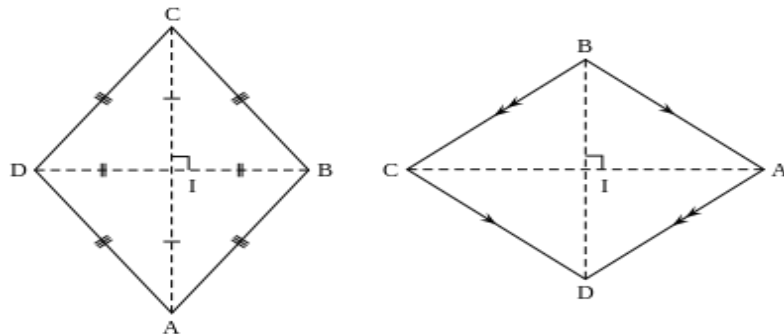
B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A



Câu 25. Điền từ thích hợp vào dấu (...) để được mệnh đề đúng. Hai véc tơ ngược hướng thì (...).

- A. Bằng nhau. B. Cùng phương. C. Cùng độ dài. D. Cùng điểm đầu.

Lời giải

Chọn B

Câu 26. Cho vector $\vec{a}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Có vô số vector $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$. B. Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.
C. Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = -\vec{a}$. D. Không có vector $\vec{u}$ nào mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Lời giải

Chọn A

Cho vector $\vec{a}$, có vô số vector $\vec{u}$ cùng hướng và cùng độ dài với vector $\vec{a}$. Nên có vô số vector $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Câu 27. Cho hình bình hành $ABGE$. Đẳng thức nào sau đây đúng.

- A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EG}$. B. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BE}$. C. $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BE}$. D. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$.

Lời giải

Chọn D

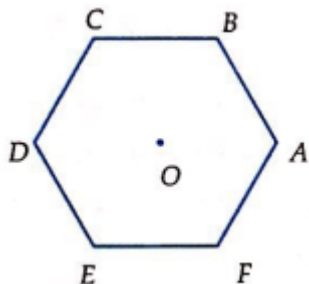
Hình bình hành $ABGE \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$.

Câu 28. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Hãy tìm các vector khác vector-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

- A. $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$ B. $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$ C. $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ D. $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

Lời giải

Đáp án D



Các vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$ là:

$\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

Câu 29. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Xác định các vector cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

- A. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$ B. $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$
C. $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$ D. $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$

Lời giải

Đáp án C

Có 3 đường thẳng song song với MN là AC, AP, PC

Nên có 7 vector

$\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$

Câu 30. Cho ba điểm A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng khi và chỉ khi:

- A. Điểm B thuộc đoạn AC B. Điểm A thuộc đoạn BC
C. Điểm C thuộc đoạn AB D. Điểm A nằm ngoài đoạn BC

Lời giải

Đáp án A



Câu 31. Cho tam giác đều cạnh $2a$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AB} = 2a$ C. $|\overrightarrow{AB}| = 2a$ D. $\overrightarrow{AB} = AB$

Lời giải

Đáp án C

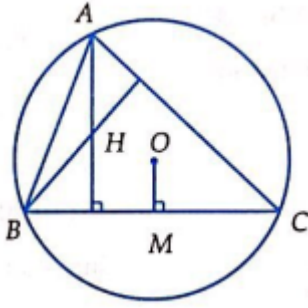
Vì tam giác đều nên $AB = |\overrightarrow{AB}| = 2a$

Câu 32. Cho tam giác không cân ABC . Gọi H, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. M là trung điểm của BC . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác ABC nhọn thì $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng hướng.
B. $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ luôn cùng hướng.
C. $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng phương nhưng ngược hướng.
D. $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ có cùng giá

Lời giải

Đáp án A



Thật vậy khi $\triangle ABC$ nhọn thì ta có:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \parallel OM$$

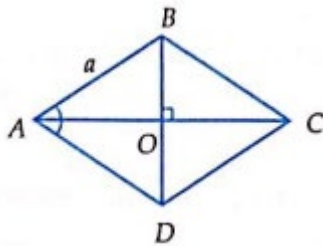
O, H nằm trong tam giác $\Rightarrow \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng hướng

Câu 33. Cho hình thoi tâm O , cạnh bằng a và $\hat{A} = 60^\circ$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $|\overrightarrow{AO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $|\overrightarrow{OA}| = a$ C. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ D. $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Đáp án A



$$\text{Vì } \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 34. Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, M là điểm bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$. B. $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.
C. $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$. D. $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, M là điểm bất kỳ.

Suy ra $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ không cùng phương $\Rightarrow \forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$.

Câu 35. Cho hai điểm phân biệt A, B . Số vector (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là:

- A. 2. B. 6. C. 13. D. 12.

Lời giải

Chọn A

Số vector (khác $\vec{0}$) là $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA}$.

Câu 36. Gọi C là trung điểm của đoạn AB . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng. D. $|\overrightarrow{AB}| = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có C là trung điểm của đoạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 37. Cho hình bình hành $ABCD$. Các vector là vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$ là

- A. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C

Vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$ là $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$.

Câu 38. Số vector (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước là

- A. 42. B. 3. C. 9. D. 27.

Lời giải

Chọn A

Số vector (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước là $7.6 = 42$

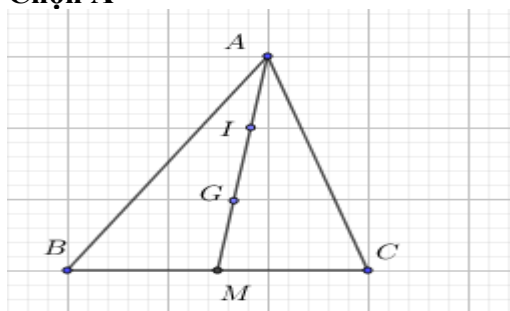
Câu 39. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG .

Độ dài của vector $\overrightarrow{BI}$ là

- A. $a \frac{\sqrt{21}}{6}$. B. $a \frac{\sqrt{21}}{3}$. C. $a \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $a \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$

Gọi M là trung điểm của BC

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AG}| = AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

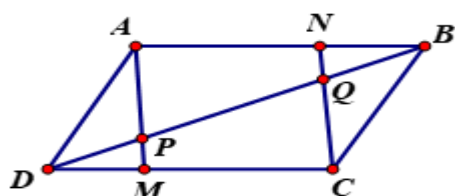
$$|\overrightarrow{BI}| = BI = \sqrt{BM^2 + MI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

Câu 40. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC , AB theo thứ tự lấy các điểm M , N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM , DB và Q là giao điểm của CN , DB . Khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$. B. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. C. $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{MN}|$. D. $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

Xét tam giác $\triangle DMP$ và $\triangle BNQ$ ta có $DM = NB$ (giả thiết), $\widehat{PDM} = \widehat{QBN}$ (so le trong)

Mặt khác $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\triangle DMP = \triangle BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

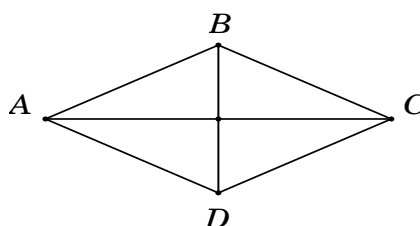
Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

Câu 41. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. B. $|\overrightarrow{BD}| = a$. C. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a \longrightarrow |\overrightarrow{BD}| = a$.

Câu 42. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vector khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vector đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương. B. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
C. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài. D. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải

Chọn D

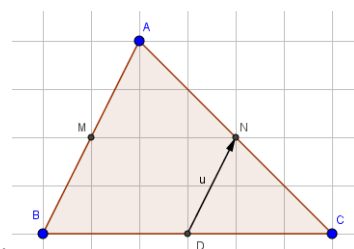
Ta có $\vec{a} = -\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

Câu 43. Cho tam giác ABC có M, N, D lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC . Khi đó, các vector đối của vector $\overrightarrow{DN}$ là:

- A. $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$. B. $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.
C. $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$. D. $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}$.

Lời giải

Chọn A



Nhìn hình ta thấy vector đối của vector $\overrightarrow{DN}$ là: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.

Câu 44. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB ; P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

- A. $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$ B. $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$ C. Cả A, B đều đúng D. Cả A, B đều sai

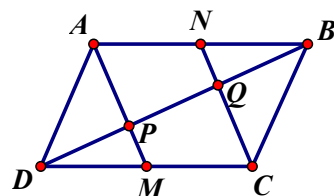
Lời giải

Chọn C

Ta có tứ giác $DMBN$ là hình bình hành vì

$$DM = NB = \frac{1}{2}AB, DM \parallel NB. \text{ Suy ra } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}.$$

Xét tam giác CDQ có M là trung điểm của DC và $MP \parallel QC$ do đó P là trung điểm của DQ . Tương tự xét tam giác ABP suy ra được Q là trung điểm của PB



Vì vậy $DP = PQ = QB$ từ đó suy ra $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$.

Câu 45. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

- A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$ B. $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$
C. Cả A, B đều đúng D. A đúng, B sai

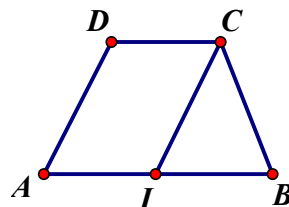
Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$ suy ra $AICD$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$$

Ta có $DC = AI$ mà $AB = 2CD$ do đó $AI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow I$ là trung điểm AB



Ta có $DC = IB$ và $DC \parallel IB \Rightarrow$ tứ giác $BCDI$ là hình bình hành

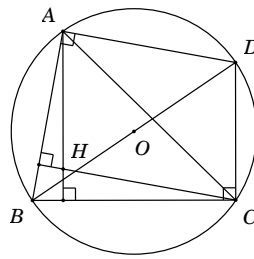
Suy ra $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$

Câu 46. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn). Suy ra $AH \parallel DC$.

Tương tự ta cũng có $CH \parallel AD$.

Câu 47. Cho tam giác ABC với trực tâm H . D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$

B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HC}$

C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$

D. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

Lời giải

Ta có BD là đường kính $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

$AH \perp BC, DC \perp BC \Rightarrow AH \parallel DC$ (1)

Ta lại có $CH \perp AB, DA \perp AB \Rightarrow CH \parallel DA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác $HADC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Đáp án C.

Câu 48. Cho $\triangle ABC$ với điểm M nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M qua A', B', C' . Câu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$

D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

Lời giải

Ta có $AMCP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có $AQBM$ và $BMCN$ là hình bình hành

$\Rightarrow NC = BM = QA$

$\Rightarrow AQNC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$.

Đáp án B.

Câu 49. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng với B qua O . Câu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

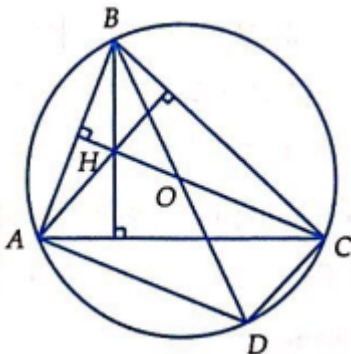
B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

C. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

Lời giải

Đáp án A



Ta có thể chỉ ra được $ADCH$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

Câu 50. Cho đường tròn tâm O . Từ điểm A nằm ngoài (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) . Xét mệnh đề:

(I) $\overline{AB} = \overline{AC}$ (II) $\overline{OB} = -\overline{OC}$ (III) $|\overline{BO}| = |\overline{CO}|$

Mệnh đề đúng là:

A. Chỉ (I)

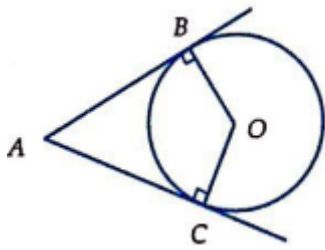
B. (I) và (III)

C. (I), (II), (III)

D. Chỉ (III)

Lời giải

Đáp án D



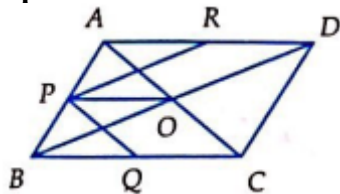
Ta có: $OB = OC = R \Rightarrow |\overline{BO}| = |\overline{CO}|$

Câu 51. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, BC, AD . Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vector. Tìm mệnh đề sai?

A. Có 2 vector bằng $\overline{PR}$ B. Có 4 vector bằng $\overline{AR}$ C. Có 2 vector bằng $\overline{BO}$ D. Có 5 vector bằng $\overline{OP}$

Lời giải

Đáp án D



Ta có: $\overline{PQ} = \overline{AO} = \overline{OC}$

$\overline{AR} = \overline{RQ} = \overline{PO} = \overline{BQ} = \overline{QC}, \overline{BO} = \overline{OD} = \overline{PR}, \overline{OP} = \overline{RA} = \overline{DR} = \overline{CQ} = \overline{QB}$

Câu 52. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của vector $\overline{MN}$.

A. $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

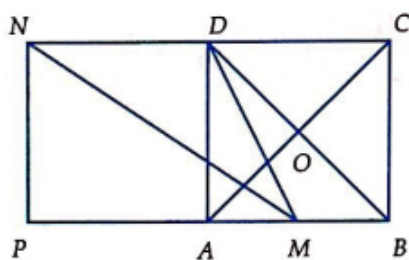
B. $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

C. $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

D. $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Lời giải

Đáp án C



Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông MAD ta có:

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$= \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P .

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông NPM ta có:

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{13a^2}{4}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Câu 53. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Gọi O là giao điểm của các đường chéo của tứ giác $MNPQ$, trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD tương ứng là I, J . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$

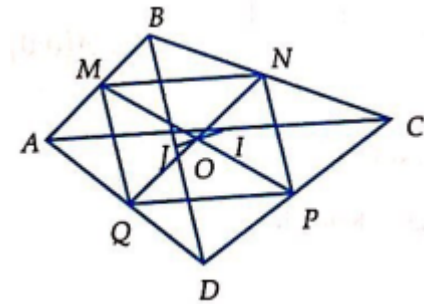
B. $MP = NQ$

C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

D. $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

Lời giải

Đáp án D



Ta có: $MNPQ$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ta có:

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$$

Câu 54. Cho tam giác ABC có trực tâm H , D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$.

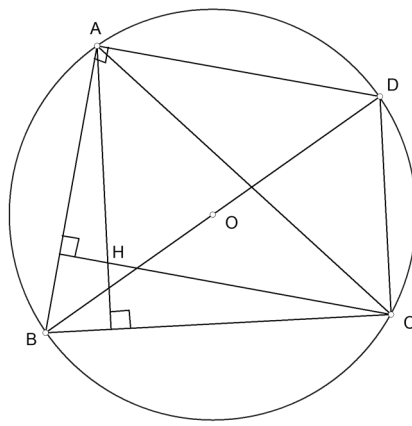
B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HD}$.

D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: Vì D đối xứng với B qua O nên D thuộc đường tròn (O)

$AD \perp DH$ (cùng vuông góc với AB)

$AH \perp CD$ (cùng vuông góc với BC)

Suy ra $ADHC$ là hình bình hành

Vậy $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AD} = \overline{CH}$.

Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTOR

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

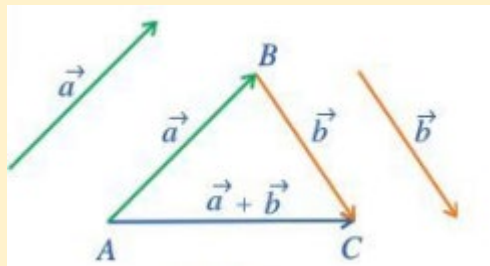
PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Tổng của hai vector

1. Định nghĩa

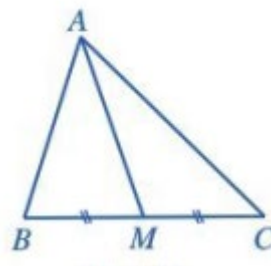
Với ba điểm bất kì A, B, C , vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM



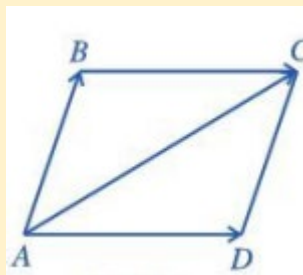
Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

Giải

$$\text{Vì } \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$$

2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

Giải

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

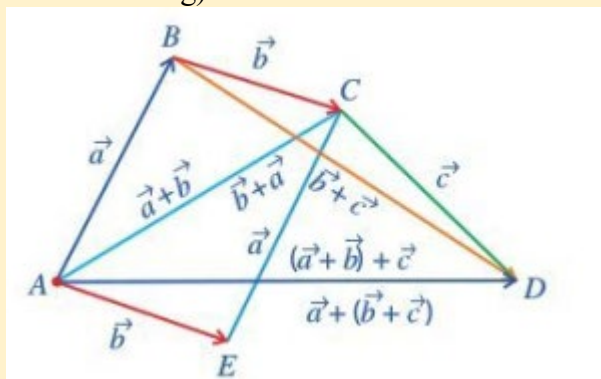
Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC, |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD$.

Do $AC = BD$ nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

3. Tính chất

Với ba vectơ tùy ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ-không).



Chú ý: Tổng ba vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách:
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Ví dụ 3. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

II. Hiệu của hai vectơ

1. Định nghĩa

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

Quy ước: Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

$$\text{Nhận xét. } \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

-Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

-Với hai điểm A, B ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

- Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Cho hai điểm A, B . Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

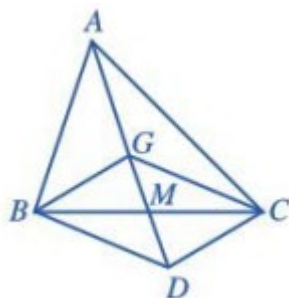
Ví dụ 4. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng tỏ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau. Viết đẳng thức liên hệ giữa hai vectơ đó.

Giải

Hai vectơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau vì chúng ngược hướng và cùng độ dài, $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Chú ý: I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với G qua M . Chứng minh:



a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Giải

a) Vì tứ giác $BGCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác $BGCD$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

b) Vì hai điểm A, D cùng thuộc đường thẳng GM nên các điểm A, G, M, D thẳng hàng.

Ta có: $GA = GD$. Suy ra G là trung điểm của AD .

Vì thế $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

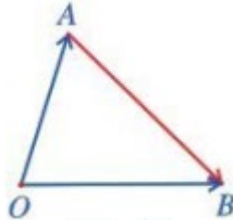
Chú ý: G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2. Hiệu của hai vector

Hiệu của vector $\vec{a}$ và vector $\vec{b}$ là tổng của vector $\vec{a}$ và vectơ đối của vector $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vector còn được gọi là phép trừ vector.

Ví dụ 6. Cho ba điểm A, B, O .



Vector $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ là vector nào?

Giải

Ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.

Nhận xét: Với ba điểm bất kì A, B, O ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Ví dụ 7. Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. CỘNG TRỪ VEC TƠ

Câu 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

a) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng O là trung điểm của AB .

b) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng $B \equiv O$.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC . Xác định hiệu $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$.

Câu 4. Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Câu 6. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC . Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là một điểm bất kì trên đường chéo AC . Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N , cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Chứng minh

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$

Câu 10. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 11. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Câu 12. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Câu 13. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O , và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 14. Cho hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện sau đây:

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$

Câu 15. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Câu 16. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

b) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$

Câu 17. Cho 2 điểm A và B . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

DẠNG 3. TÍNH ĐỘ DÀI VECTO

Câu 18. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ và $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

Câu 19. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh $AC = b$ lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt trung tuyến AM tại N . Tính độ dài vector $\vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN}$

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh b . Tính $|\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$, $|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}|$

Câu 22. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$ và $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

- Câu 23.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của các vec tơ sau $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$.
- Câu 24.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O và M là trung điểm của AB . Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- Câu 25.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ
- Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$
 - Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
- Câu 26.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a và M là một điểm bất kỳ. Tính
- Tính $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|$
 - Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$
 - Tính $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. CỘNG TRỪ VEC TƠ

- Câu 1.** Cho hình bình hành tâm O . Kết quả nào sau đây là đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$
- Câu 2.** Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
- A. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. B. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- C. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. D. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$.
- Câu 3.** Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ bằng
- A. $\overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{DB}$.
- Câu 4.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.
- C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$. D. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$.
- Câu 5.** Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ bằng
- A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{BA}$.
- Câu 6.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vectơ tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng
- A. $\overrightarrow{BP}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{CP}$. D. $\overrightarrow{PA}$.
- Câu 7.** Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.
- C. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.
- Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$. B. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DI}$.

C. $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$.

Câu 9. Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Xác định vector tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

A. $\overrightarrow{MP}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{MQ}$. D. $\overrightarrow{MR}$.

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$, tâm O . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$.
C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$. D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

Câu 13. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

Câu 14. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Câu 15. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

A. $\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{DA}$. C. $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{AB}$.

Câu 16. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vector $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$ bằng vector nào?

A. $\overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{DC}$. D. $\overrightarrow{AC}$.

Câu 17. Chọn khẳng định sai:

A. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$.
C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

Câu 18. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây là đúng:

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

Câu 19. Chỉ ra vector tổng $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QR}$ trong các vector sau

A. $\overrightarrow{MR}$. B. $\overrightarrow{MQ}$. C. $\overrightarrow{MP}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

Câu 20. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$.
C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Câu 21. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vector $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$ là:

A. $\vec{u} = \vec{0}$. B. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

- Câu 22.** Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vector $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$ bằng:
A. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. **B.** $\vec{u} = \vec{0}$. **C.** $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. **D.** $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.
- Câu 23.** Cho 4 điểm A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?
A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$.
- Câu 24.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?
A. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.
- Câu 25.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?
A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.
- Câu 26.** Cho 4 điểm A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.
- Câu 27.** Cho ΔABC , vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABEF, ACPQ, BCMN$. Xét các mệnh đề:
(I) $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}$
(II) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN}$
(III) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}$
Mệnh đề **đúng** là :
A. Chỉ **(I)**. **B.** Chỉ **(III)**. **C.** **(I)** và **(II)**. **D.** Chỉ **(II)**.
- Câu 28.** Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$. **D.** $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$.
- Câu 29.** Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức vectơ nào sau đây **đúng**?
A. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- Câu 30.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Khẳng định nào sau đây là **đúng**:
A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$.
C. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$.
- Câu 31.** Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?
A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.
- Câu 32.** Cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?
A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.
- Câu 33.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ bằng

- A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$. B. $\overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$. D. $\overrightarrow{CD}$.

Câu 34. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 35. Cho hình bình hành ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và AD. Tính tổng $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC}$.

- A. $\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{NM}$. C. $\overrightarrow{CA}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

Câu 36. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ bằng

- A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$.
 C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$. D. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$.

Câu 37. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây *sai*?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$.
 C. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$.

Câu 38. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$.
 C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 39. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt AM tại N. Chọn mệnh đề đúng:

- A. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$.

Câu 40. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Hệ thức nào là đúng?

- A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 41. Cho hình lục giác đều ABCDEF, tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Câu 42. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm BC, G_1 là điểm đối xứng của G qua M. Vector tổng $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$ bằng

- A. $\overrightarrow{GA}$. B. $\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{G_1A}$. D. $\overrightarrow{G_1M}$.

Câu 43. Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- 1) $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$;
- 2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;
- 3) Tam giác ABC là tam giác đều;
- 4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 44. Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$;

2) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$;

3) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O ;

4) Nếu $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 45. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Tìm đẳng thức sai:

A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC}$

D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DB}$

Câu 46. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Câu 47. Cho $\triangle ABC$, các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Với O là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

C. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

D. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

Câu 48. Cho 4 điểm M, N, P, Q bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.

A. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN}$

B. $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$

D. $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$

Câu 49. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$

D. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF}$

Câu 50. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, \dots, B_n$ ($A_i \neq B_n$). Vector tổng $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

A. $\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{A_1A_n}$.

C. $\overrightarrow{B_1B_n}$.

D. $\overrightarrow{A_1B_n}$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 51. Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

A. M ở vị trí bất kìB. M là trung điểm của AB C. Không tìm được M D. M nằm trên đường trung trực của AB

Câu 52. Cho đoạn thẳng AB , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB .B. M trùng A .C. M trùng B .D. A là trung điểm MB .

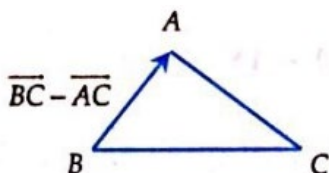
- Câu 53.** Cho $\triangle ABC$, B . Tìm điểm I để $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. I là trung điểm AB . **B.** I thuộc đường trung trực của AB .
C. Không có điểm I . **D.** Có vô số điểm I .
- Câu 54.** Cho 2 điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M là trung điểm AB . **B.** M thuộc đường trung trực của AB .
C. Không có điểm M . **D.** Có vô số điểm M .
- Câu 55.** Cho tam giác ABC , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M là trung điểm AB . **B.** M là trọng tâm $\triangle ABC$.
C. M trùng B . **D.** A là trung điểm MB .
- Câu 56.** Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M trùng D . **B.** M trùng A .
C. M trùng B . **D.** M trùng C .
- Câu 57.** Cho $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M trùng D . **B.** M trùng A .
C. M trùng B . **D.** M trùng C .
- Câu 58.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M trùng O . **B.** M trùng A .
C. M trùng B . **D.** M trùng C .
- Câu 59.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M trùng D . **B.** M trùng A .
C. M trùng B . **D.** M trùng C .
- Câu 60.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M trùng O . **B.** M trùng A .
C. M trùng B . **D.** M trùng C .
- Câu 61.** Cho tứ giác $PQRN$ có O là giao điểm 2 đường chéo, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M trùng P . **B.** M trùng Q .
C. M trùng O . **D.** M trùng R .
- Câu 62.** Cho $\triangle ABC$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M là trung điểm AB . **B.** M là trung điểm BC .
C. M là trung điểm CA . **D.** M là trọng tâm $\triangle ABC$.
- Câu 63.** Cho $\triangle DEF$, tìm M thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ED}$. **B.** $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$. **C.** $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DF}$. **D.** $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.
- Câu 64.** Cho $\triangle DEF$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$. **B.** $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EM}$. **C.** $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EM}$. **D.** $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

- Câu 65.** Cho $\triangle ABC$ có O là trung điểm BC , tìm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. M trùng O . D. M trùng C .
- Câu 66.** Cho $\triangle ABC$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .
C. M là trung điểm CA . D. M là trọng tâm $\triangle ABC$.
- Câu 67.** Cho $\triangle ABC$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. $ACMB$ là hình bình hành. D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.
- Câu 68.** Cho $\triangle ABC$, D là trung điểm AB , E là trung điểm BC , điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CM}$. B. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ED}$.
C. M là trung điểm BC . D. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$.
- Câu 69.** Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .
C. D là trung điểm BM . D. M là trung điểm DC .
- Câu 70.** Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm N thỏa mãn:
 $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.
- A. Điểm N là trung điểm cạnh AB B. Điểm C là trung điểm cạnh BN
C. Điểm C là trung điểm cạnh AM D. Điểm B là trung điểm cạnh NC
- Câu 71.** Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$.
- A. Điểm M là trung điểm cạnh AC B. Điểm M là trung điểm cạnh BD
C. Điểm C là trung điểm cạnh AM D. Điểm B là trung điểm cạnh MC
- Câu 72.** Trên đường tròn $C(O; R)$ lấy điểm cố định A ; B là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi M là điểm di động sao cho $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Khi đó tập hợp điểm M là:
- A. đường tròn tâm O bán kính $2R$. B. đường tròn tâm A bán kính R
C. đường thẳng song song với OA D. đường tròn tâm C bán kính $R\sqrt{3}$
- Câu 73.** Cho $\triangle ABC$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = \overrightarrow{MC}$ là:
- A. một đường tròn tâm C B. đường tròn tâm I (I là trung điểm của AB)
C. một đường thẳng song song với AB D. là đường thẳng trung trực của BC

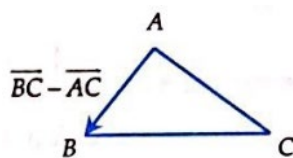
DẠNG 3. TÍNH ĐỘ DÀI VEC TO

- Câu 74.** Cho $\triangle ABC$. Vector $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

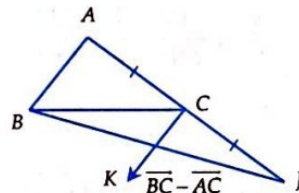
A.



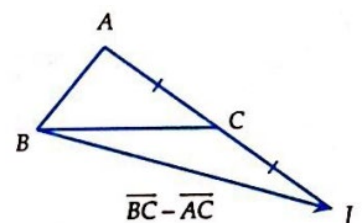
B.



C.



D.



Câu 75. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Khi đó độ dài $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ là:

- A. 4 B. 8 C. $2\sqrt{13}$ D. $\sqrt{13}$

Câu 76. Cho hình thang cân $ABCD$, có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tính $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $2a\sqrt{5}$ C. $a\sqrt{5}$ D. $a\sqrt{2}$

Câu 77. Cho 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 60° . Biết $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$

- A. $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ B. $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ C. $6(\sqrt{5} + 3)$ D. $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$

Câu 78. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Cho $AB = 2a$, $CD = a$. Gọi O là trung điểm của AD . Khi đó:

- A. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$ B. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$ C. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$ D. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 0$

Câu 79. Cho $\triangle ABC$. Vector $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

A.	B.	C.	D.

Câu 80. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a . Tính độ dài $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $2a$

Câu 81. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . O là giao điểm của hai đường chéo. Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $a\sqrt{2}$

Câu 82. Với $\forall \vec{a}, \vec{b}$ độ dài $|\vec{a} + \vec{b}|$:

- A. Bao giờ cũng lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ B. Không nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$
C. Bao giờ cũng nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ D. Không lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

Câu 83. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Khi đó $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}|$ bằng:

- A. 0 B. $3a$ C. a D. $a(\sqrt{3} - 1)$

Câu 84. Cho tam giác ABC đều cạnh a , trọng tâm G . Tính độ dài vector $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$.

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a}{3}$ C. $\frac{2a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 85. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3. Tính độ dài $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$:

- A. 6 B. $6\sqrt{2}$ C. 12 D. 0

Câu 86. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O và M là trung điểm AB . Tính độ dài $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$.

- A. a B. $3a$ C. $\frac{a}{2}$ D. $2a$

Câu 87. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC . Tính độ dài vectơ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}|$.

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 88. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. H là trung điểm của BC . Tìm mệnh đề sai.

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{3}$ B. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = \frac{\sqrt{63}}{2}$ C. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = 3$ D. $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = \sqrt{3}$

Câu 89. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Độ dài $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

- A. $2a$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $a\sqrt{2}$

Câu 90. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{AC} = a$ C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ D. $|\overrightarrow{AB}| = a$

Câu 91. Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

- A. Vô số. B. 1 điểm. C. 2 điểm. D. Không có điểm nào.

Câu 92. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. B. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.
C. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ D. $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Câu 93. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I ; G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$
C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$ D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

Câu 94. Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$.

- A. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ B. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 5$
C. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ D. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$

Câu 95. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ D. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

Câu 96. Có hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A. 100 (N). B. $50\sqrt{3}$ (N).

C. $100\sqrt{3}$ (N).

D. Đáp án khác.

Câu 97. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

B. $ABCD$ là hình thoi.

C. $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

D. $ABCD$ là hình thang cân.

Câu 98. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

Câu 99. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$.

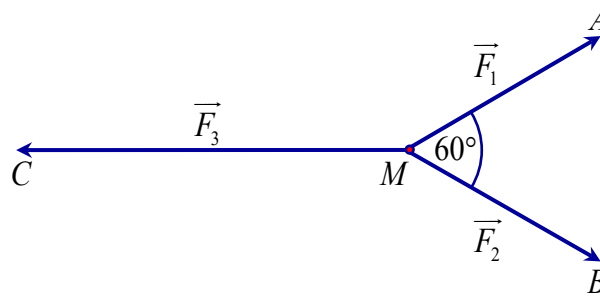
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $2a$.

C. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Câu 100. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng 25N và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là



A. $25\sqrt{3}\text{ N}$.

B. $50\sqrt{3}\text{ N}$.

C. $50\sqrt{2}\text{ N}$.

D. $100\sqrt{3}\text{ N}$.

Câu 101. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Tìm khẳng định **sai**.

A. $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}| = IA$.

B. $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = BC$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AI$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3GA$.

Câu 102. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

B. $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$.

C. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Câu 103. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

A. $4a\sqrt{2}$.

B. $4a$.

C. $2a\sqrt{2}$.

D. $2a$.

Câu 104. Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G . Độ dài vector $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$ là

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 105. Tam giác ABC thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ thì tam giác ABC là

A. Tam giác vuông A . B. Tam giác vuông C .

C. Tam giác vuông B . D. Tam giác cân tại C .

- Câu 106.** Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ lần lượt là $300(\text{N})$ và $400(\text{N})$. $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.
- A. $0(\text{N})$. B. $700(\text{N})$. C. $100(\text{N})$. D. $500(\text{N})$.

Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTOR

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

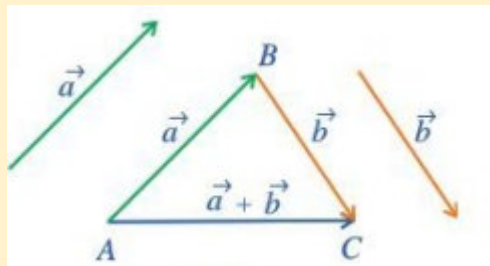
PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Tổng của hai vector

1. Định nghĩa

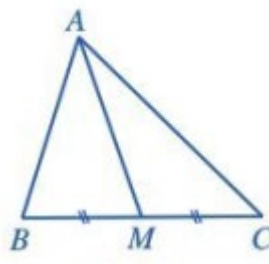
Với ba điểm bất kì A, B, C , vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM



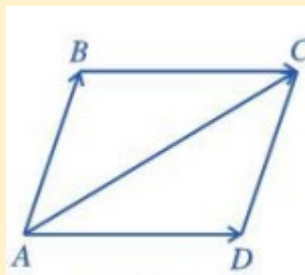
Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

Giải

$$\text{Vì } \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$$

2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

Giải

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

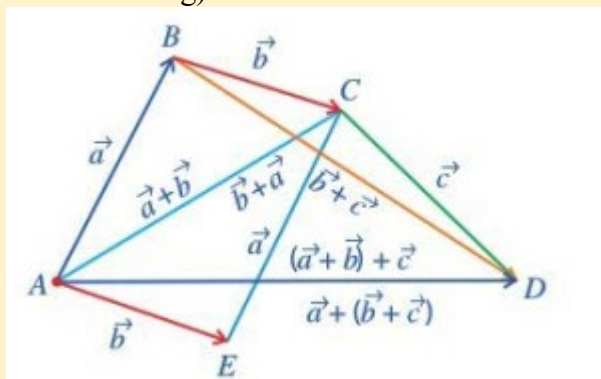
Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC, |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD$.

Do $AC = BD$ nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

3. Tính chất

Với ba vectơ tùy ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ-không).



Chú ý: Tổng ba vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách:
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Ví dụ 3. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

II. Hiệu của hai vectơ

1. Định nghĩa

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

Quy ước: Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Nhận xét. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

-Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

-Với hai điểm A, B ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

- Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Cho hai điểm A, B . Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

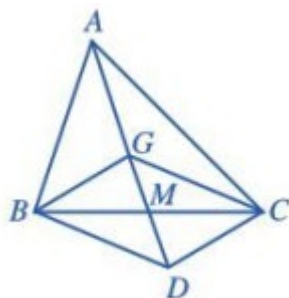
Ví dụ 4. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng tỏ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau. Viết đẳng thức liên hệ giữa hai vectơ đó.

Giải

Hai vectơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau vì chúng ngược hướng và cùng độ dài, $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Chú ý: I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với G qua M . Chứng minh:



a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Giải

a) Vì tứ giác $BGCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác $BGCD$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

b) Vì hai điểm A, D cùng thuộc đường thẳng GM nên các điểm A, G, M, D thẳng hàng.

Ta có: $GA = GD$. Suy ra G là trung điểm của AD .

Vì thế $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

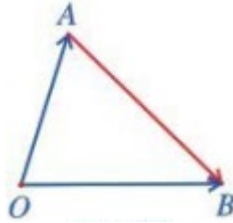
Chú ý: G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2. Hiệu của hai vector

Hiệu của vector $\vec{a}$ và vector $\vec{b}$ là tổng của vector $\vec{a}$ và vectơ đối của vector $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vector còn được gọi là phép trừ vector.

Ví dụ 6. Cho ba điểm A, B, O .



Vector $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ là vector nào?

Giải

Ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.

Nhận xét: Với ba điểm bất kì A, B, O ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Ví dụ 7. Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D . Chứng minh

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. CỘNG TRỪ VEC TƠ

Câu 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

a) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng O là trung điểm của AB .

b) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng $B \equiv O$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} \Rightarrow O$ là trung điểm của AB .

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow B \equiv O$.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$ nên

$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}$.

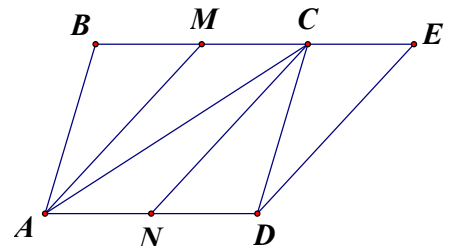
Vì $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ nên

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$.

Vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$,

với E là đỉnh của hình bình hành $DAME$.

Vì tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$.



Câu 3. Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC . Xác định hiệu $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$.

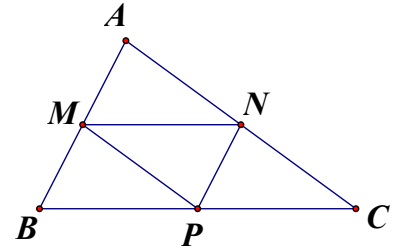
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$.

Vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$ nên $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$.

Vì $-\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$ nên $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Vì $-\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC}$ nên $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$.



Câu 4. Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $IA = IB$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

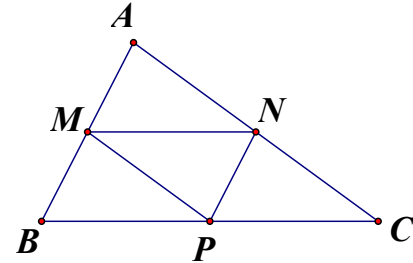
Ngược lại, nếu $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ thì $IA = IB$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Do đó A, I, B thẳng hàng. Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Câu 5. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \vec{0} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}. \end{aligned}$$



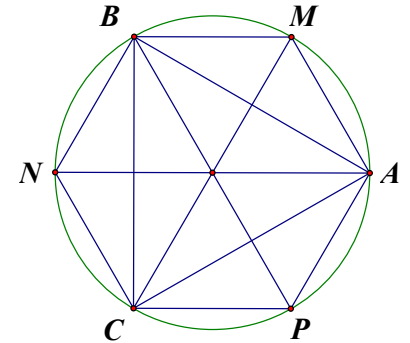
Câu 6. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Vẽ lục giác đều $AMBNCP$ nội tiếp đường tròn (O) .

Vì $BOCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.



Câu 7. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải.

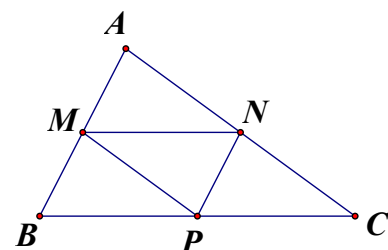
a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $PN \parallel BM, MN \parallel BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình

bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$.

Vì N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$.

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$



b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$,
kết hợp với quy tắc trừ $\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$.
Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC . Vậy $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}) \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) - (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP}).\end{aligned}$$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$.

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$
 $= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là một điểm bất kì trên đường chéo AC . Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N , cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Chứng minh

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) Tứ giác $AMOE$ và tứ giác $OFCN$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FO}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}) \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Câu 10. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

a) Biến đổi về trái ta có

$$\overrightarrow{VT} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA}$$

$$= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{VP} \text{ (đpcm).}$$

b) Đẳng thức tương đương với $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

Câu 11. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Lời giải

Ta chứng minh $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có hai giá khác nhau.

Gọi d là đường thẳng chứa OD thì d là một trục đối xứng của ngũ giác đều.

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, trong đó M là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và thuộc d .

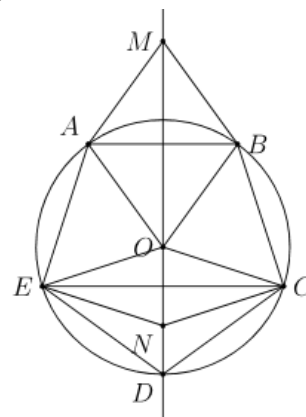
Tương tự $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$, trong đó N thuộc d .

Do đó $\vec{v} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$ có

giá là d .

Ta ghép $\vec{v} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OE}$ thì $\vec{v}$ có giá là đường thẳng OE .

Vì $\vec{v}$ có $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ giá khác nhau nên $\vec{v} = \vec{0}$.



Câu 12. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Cách 1. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

Cách 2. $\overrightarrow{VT} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF})$

$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{VP}.$$

Câu 13. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O , và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

Lời giải

a) Tâm O của lục giác đều là tâm đối xứng của lục giác nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}$.

b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FE}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FE}) \\ &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + \vec{0} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}. \end{aligned}$$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 14. Cho hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện sau đây:

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$. Vậy mọi điểm M đều thỏa mãn.

- b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A \equiv B$. Vậy không có điểm M nào thỏa mãn
 c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$. Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
 d) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow M \equiv A$.

Câu 15. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$.

Vậy M là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$ hay M là đỉnh thứ tư trong hình bình hành $ABCM$

Câu 16. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

b) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$

Lời giải.

a) Ta có $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MA = BC$

Vậy M cách điểm A một đoạn bằng BC không đổi nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = BC$.

b) Ta có $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow MA = MC$

Vậy M cách đều 2 điểm A và C nên tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn AC .

Câu 17. Cho 2 điểm A và B . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

Lời giải.

Vẽ hình bình hành $AMBN$. Gọi O là giao điểm 2 đường chéo, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = MN = 2MO$$

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = AB$$

$$\text{Điều kiện tương đương } 2MO = AB \Rightarrow MO = \frac{1}{2} AB$$

Tập hợp các điểm M có tính chất $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là đường tròn đường kính AB

DẠNG 3. TÍNH ĐỘ DÀI VÉC TƠ

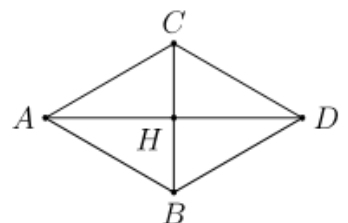
Câu 18. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ và $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Từ tam giác đều ABC cạnh a , vẽ hình thoi $BACD$ thì

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \text{ nên } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AD = 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

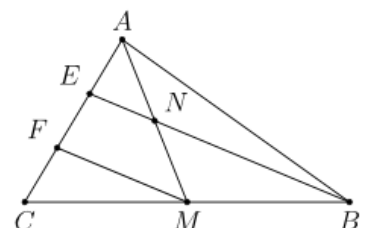
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \text{ nên } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a.$$



Câu 19. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh $AC = b$ lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt trung tuyến AM tại N . Tính độ dài vector $\vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FC}$. Vì $MF \parallel BE$ nên N là trung điểm của AM . Suy ra $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$.



Do đó $\vec{u} = \vec{AE} + \vec{AF} + \vec{AN} + \vec{MN} = \vec{AF} + \vec{FC} = \vec{AC}$ nên $|\vec{u}| = AC = b$.

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vector $\vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{AC} - \vec{BC}$ và $\vec{AB} + \vec{AC}$.

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm ta có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

$$\text{Mà } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = a\sqrt{5} \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Do đó } |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}; \vec{AC} - \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}.$$

$$\text{Ta có: } AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

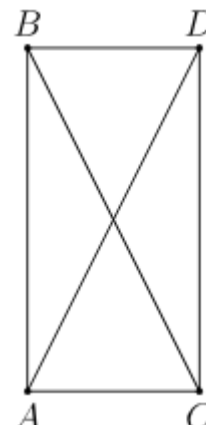
$$\text{Vì vậy } |\vec{AC} - \vec{BC}| = |\vec{AB}| = AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD = BC = a\sqrt{5}$.

$$\text{Vậy } |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = a\sqrt{5}.$$



Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh b . Tính $|\vec{DA} - \vec{AB}|$, $|\vec{DA} + \vec{DC}|$, $|\vec{DB} + \vec{DC}|$

Lời giải

Ta có $\vec{DA} - \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC} = \vec{CA}$ nên

$$|\vec{DA} - \vec{AB}| = |\vec{CA}| = CA = b\sqrt{2}.$$

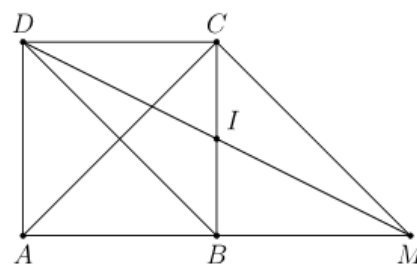
Ta có $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$ nên

$$|\vec{DA} + \vec{DC}| = |\vec{DB}| = DB = b\sqrt{2}.$$

Vẽ hình bình hành $CDBM$ thì DM cắt BC tại trung điểm I của mỗi đường.

Ta có $\vec{DB} + \vec{DC} = \vec{DM}$ nên $|\vec{DB} + \vec{DC}| = |\vec{DM}| = DM = 2DI$.

$$\text{Mà } DI^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}b^2 \Rightarrow |\vec{DB} + \vec{DC}| = b\sqrt{5}.$$



Câu 22. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $|\vec{OA} - \vec{CB}|$, $|\vec{AB} + \vec{DC}|$ và $|\vec{CD} - \vec{DA}|$

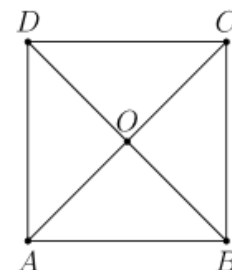
Lời giải

Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$, $\vec{OA} - \vec{CB} = \vec{CO} - \vec{CB} = \vec{BO}$. Do đó

$$|\vec{OA} - \vec{CB}| = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vì $\vec{AB}, \vec{DC}$ cùng hướng nên $|\vec{AB} + \vec{DC}| = |\vec{AB}| + |\vec{DC}| = 2a$.

Ta có $\vec{CD} - \vec{DA} = \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{BD}$. Do đó $|\vec{CD} - \vec{DA}| = BD = a\sqrt{2}$.



Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của các vec tơ sau $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

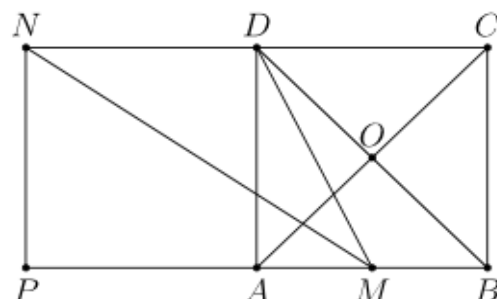
Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P .

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và

$$PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Áp dụng định lý Piatgo trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \\ \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$



Câu 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O và M là trung điểm của AB . Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Lời giải

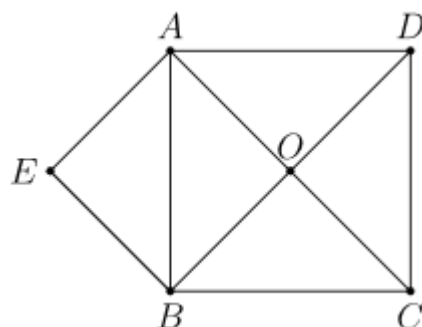
$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB}| = AB = a. |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

$$|\overrightarrow{OA}| = OA = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{OM}| = OM = \frac{a}{2}.$$

Gọi E là điểm sao cho tứ giác $OBEA$ là hình bình hành.

Khi đó nó cũng là hình vuông.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = OE = AB = a.$$



Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ

a) Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$

b) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$.

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}| = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$. Suy ra

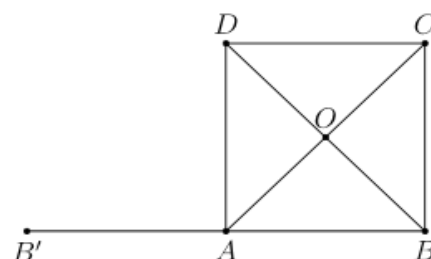
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = 0.$$

b) Áp dụng quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC}$.

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A . Khi đó $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'}$

Suy ra $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{BB'}| = BB' = 2a$.



Câu 26. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a và M là một điểm bất kỳ. Tính

a) Tính $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|$

b) Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$

c) Tính $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

Lời giải

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Suy ra

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC.$$

Áp dụng định lý Pitago ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{2}.$

b) Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$. Suy ra

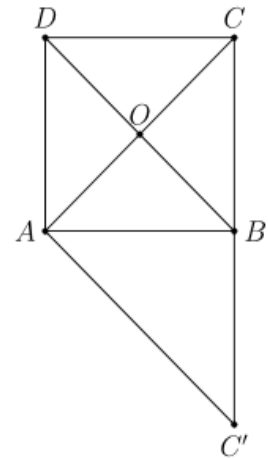
$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}. \text{ Vậy } |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}| = a.$$

c) Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Suy ra

$$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

Mà $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}.$ Suy ra

$$|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}.$$



PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. CỘNG TRỪ VÉC TƠ

Câu 1. Cho hình bình hành tâm O . Kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

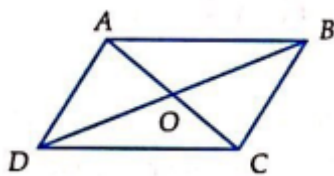
B. $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$

Lời giải

Đáp án B



$$\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

Câu 2. Cho ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vector-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$

B. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$

C. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$

D. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}.$

Lời giải

Chọn D

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Vector tổng $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\overrightarrow{CA}.$

B. $\overrightarrow{BD}.$

C. $\overrightarrow{AC}.$

D. $\overrightarrow{DB}.$

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}.$$

Câu 4. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$. D. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.$$

Câu 5. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Vector tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ bằng

- A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Câu 6. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vector tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng

- A. $\overrightarrow{BP}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{CP}$. D. $\overrightarrow{PA}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BP}.$$

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.
C. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB}.$$

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$. B. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DI}$.
C. $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI}.$$

Câu 9. Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Xác định vector tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

- A. $\overrightarrow{MP}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{MQ}$. D. $\overrightarrow{MR}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MP}.$$

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Câu 11. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PM}.$$

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$, tâm O . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$.
C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$. D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}.$$

Câu 13. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

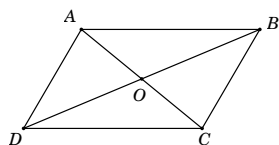
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}.$$

Câu 14. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.

- Đáp án **B**. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$. Vậy B sai.
- Đáp án **C**. Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Vậy C đúng.
- Đáp án **D**. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$. Vậy D đúng

Câu 15. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

- A. $\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{DA}$. C. $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn B

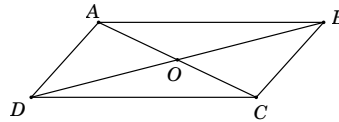
$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$$

Câu 16. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vector $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$ bằng vector nào?

- A. $\overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{DC}$. D. $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B



$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Câu 17. Chọn khẳng định sai:

- A. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
 B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$.
 C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
 D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}.$$

Câu 18. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây là đúng:

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Câu 19. Chỉ ra vector tổng $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QR}$ trong các vector sau

- A. $\overrightarrow{MR}$. B. $\overrightarrow{MQ}$. C. $\overrightarrow{MP}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}.$$

Câu 20. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$.

C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$.

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. (đúng).

Câu 21. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vector $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$ là:

A. $\vec{u} = \vec{0}$.

B. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn D

$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 22. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vector $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$ bằng:

A. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$.

B. $\vec{u} = \vec{0}$.

C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

Câu 23. Cho 4 điểm A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 24. Cho Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

Do $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO}$ đối nhau, $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DO}$ đối nhau.

Câu 25. Cho Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$.

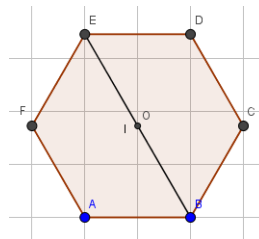
B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AO} \neq \vec{0}$.

Câu 26. Cho 4 điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}.$$

Câu 27. Cho ΔABC , vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành ABEF, ACPQ, BCMN. Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}$

(II) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN}$

(III) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}$

Mệnh đề đúng là :

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (III). C. (I) và (II). D. Chỉ (II).

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}.$$

Câu 28. Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$. B. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$. D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}.$$

Câu 29. Cho hình bình hành ABCD, đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

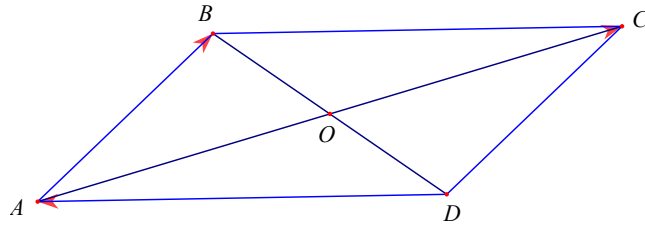
Đẳng thức vectơ $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ đúng theo quy tắc cộng hình bình hành.

Câu 30. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$. B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$.
C. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ nên $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 31. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA} \text{ nên A sai}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{CO} \text{ nên B đúng.}$$

Câu 32. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}.$$

Câu 33. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ bằng

- A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$. B. $\overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$. D. $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}.$$

Câu 34. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$.
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0} \end{aligned}$$

Câu 35. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và AD . Tính tổng $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC}$.

- A. $\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{NM}$. C. $\overrightarrow{CA}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}.$$

Câu 36. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ bằng

- A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$.
C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$. D. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}.$$

Câu 37. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây *sai*?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$.
C. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \text{ (vô lý).}$$

Câu 38. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$.
C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Câu 39. 6Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt AM tại N . Chọn mệnh đề đúng:

- A. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$.

Lời giải

Chọn A

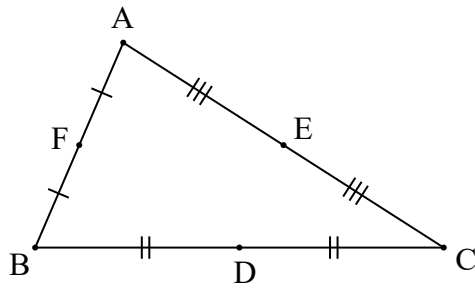
Trong tam giác BCE có MF là đường trung bình nên $MF \parallel BE \Rightarrow MF \parallel NE$

N là trung điểm của AM nên $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

Câu 40. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Hệ thức nào là đúng?

- A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải



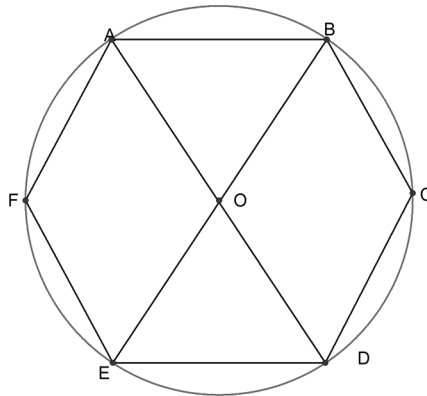
Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

Câu 41. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Lời giải



Chọn A

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 42. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm BC , G_1 là điểm đối xứng của G qua M . Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$ bằng

- A. $\overrightarrow{GA}$. B. $\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{G_1A}$. D. $\overrightarrow{G_1M}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \overrightarrow{G_1G} = \overrightarrow{GA}.$$

Câu 43. Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
 Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- 1) $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$;
- 2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;
- 3) Tam giác ABC là tam giác đều;

4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Rightarrow O \equiv G. \text{ Do đó tam giác } ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Câu 44. Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$;

2) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$;

3) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O ;

4) Nếu $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} \Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}.$$

$$\text{Nếu } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0} \text{ thì } \overrightarrow{HH_1} = \vec{0}, \text{ suy ra } H \equiv O.$$

Câu 45. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Tìm đẳng thức sai:

A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC}$

D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DB}$

Lời giải

$$+ \text{Tứ giác } AMCN \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \text{A đúng.}$$

$$+ ABCD \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow \text{B đúng.}$$

$$+ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC} \Rightarrow \text{C đúng.}$$

Đáp án D.

Câu 46. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Lời giải

Đáp án D

Ta có:

$$(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow B \equiv A. \text{ Vì } A, B \text{ bất kì} \Rightarrow \text{D sai.}$$

Câu 47. Cho $\triangle ABC$, các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Với O là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

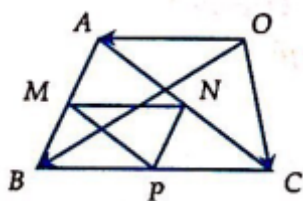
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

C. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

D. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

Lời giải

Đáp án B



$$\vec{VT} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

$$= \vec{OM} + \vec{MA} + \vec{ON} + \vec{NB} + \vec{OP} + \vec{PC} \text{ Mà } \vec{NB} = \vec{NM} + \vec{NP}$$

$$\Rightarrow \vec{MA} + \vec{NB} + \vec{PC} = \vec{MA} + \vec{NM} + \vec{NP} + \vec{PC} = \vec{NA} + \vec{NC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{VT} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$$

Câu 48. Cho 4 điểm M, N, P, Q bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.

A. $\vec{PQ} + \vec{NP} = \vec{MQ} + \vec{MN}$

B. $\vec{NP} + \vec{MN} = \vec{QP} + \vec{MQ}$

C. $\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{NP} + \vec{MQ}$

D. $\vec{NM} + \vec{QP} = \vec{NP} + \vec{MQ}$

Lời giải

Đáp án B

Ta có:

$$\vec{NP} + \vec{MN} = \vec{NQ} + \vec{QP} + \vec{MQ} + \vec{QN} = \vec{QP} + \vec{MQ} + (\vec{NQ} + \vec{QN}) = \vec{QP} + \vec{MQ} = \vec{VP}$$

Câu 49. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

A. $\vec{AB} + \vec{DF} + \vec{BD} + \vec{FA} = \vec{0}$

B. $\vec{BE} - \vec{CE} + \vec{CF} - \vec{BF} = \vec{0}$

C. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$

D. $\vec{FD} + \vec{BE} + \vec{AC} = \vec{BD} + \vec{AE} + \vec{CF}$

Lời giải

+ Ta có: $\vec{AB} + \vec{DF} + \vec{BD} + \vec{FA} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DF} + \vec{FA} = \vec{AA} = \vec{0} \Rightarrow A$ đúng.

+ $\vec{BE} - \vec{CE} + \vec{CF} - \vec{BF} = \vec{BC} + \vec{CB} = \vec{0} \Rightarrow B$ đúng.

+ $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{EB} + \vec{BF} \Leftrightarrow \vec{AF} = \vec{AF}$
 $\Rightarrow C$ đúng.

+ $\vec{FD} + \vec{DB} + \vec{BE} + \vec{EA} + \vec{AC} + \vec{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow F \equiv C$ (mâu thuẫn giả thiết)
 $\Rightarrow D$ sai.

Đáp án D.

Câu 50. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, \dots, B_n$ ($A_i \neq B_n$). Vector tổng $\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n}$ bằng

A. $\vec{0}$.

B. $\vec{A_1A_n}$.

C. $\vec{B_1B_n}$.

D. $\vec{A_1B_n}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

$$\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n} = (\vec{A_1O} + \vec{A_2O} + \dots + \vec{A_nO}) + (\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \dots + \vec{OB_n})$$

Vì $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ nên

$$\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \dots + \vec{OB_n} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n}$$

Do đó $\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n} = (\vec{A_1O} + \vec{OA_1}) + (\vec{A_2O} + \vec{OA_2}) + \dots + (\vec{A_nO} + \vec{OA_n}) = \vec{0}$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 51. Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

- A. M ở vị trí bất kì
 B. M là trung điểm của AB
 C. Không tìm được M
 D. M nằm trên đường trung trực của AB

Lời giải

Đáp án B

Câu 52. Cho đoạn thẳng AB , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB .
 B. M trùng A .
 C. M trùng B .
 D. A là trung điểm MB .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \text{ là trung điểm } MB.$$

Câu 53. Cho $\triangle ABC$, B . Tìm điểm I để $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. I là trung điểm AB .
 B. I thuộc đường trung trực của AB .
 C. Không có điểm I .
 D. Có vô số điểm I .

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương nên $AI \parallel CB$. Suy ra có vô số điểm I .

Câu 54. Cho 2 điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB .
 B. M thuộc đường trung trực của AB .
 C. Không có điểm M .
 D. Có vô số điểm M .

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{0} \text{ (vô lý).}$$

Câu 55. Cho tam giác ABC , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB .
 B. M là trọng tâm $\triangle ABC$.
 C. M trùng B .
 D. A là trung điểm MB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ nên } M \text{ là trọng tâm } \triangle ABC.$$

Câu 56. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng D .
 B. M trùng A .
 C. M trùng B .
 D. M trùng C .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Câu 57. Cho $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

Câu 58. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC} \text{ suy ra } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} \text{ (} O \text{ là trung điểm } AC \text{) nên } M \text{ trùng } O.$$

Câu 59. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \text{ suy ra } M \text{ trùng } D.$$

Câu 60. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}.$$

Câu 61. Cho tứ giác $PQRN$ có O là giao điểm 2 đường chéo, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng P . B. M trùng Q .

C. M trùng O . D. M trùng R .

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO}.$$

Câu 62. Cho $\triangle ABC$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB .

B. M là trung điểm BC .

C. M là trung điểm CA .

D. M là trọng tâm $\triangle ABC$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M là trọng tâm $\triangle ABC$.

Câu 63. Cho $\triangle DEF$, tìm M thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ED}$. B. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$. C. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DF}$. D. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}.$$

Suy ra M là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là F sao cho $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$.

Câu 64. Cho $\triangle DEF$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$. B. $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EM}$. C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EM}$. D. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}.$$

Suy ra $DEFM$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$.

Câu 65. Cho $\triangle ABC$ có O là trung điểm BC , tìm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. M trùng O . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M trùng C .

Câu 66. Cho $\triangle ABC$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .
C. M là trung điểm CA . D. M là trọng tâm $\triangle ABC$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M là trung điểm AC .

Câu 67. Cho $\triangle ABC$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. $ACMB$ là hình bình hành. D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$$

Suy ra M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Nên $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

Câu 68. Cho $\triangle ABC$, D là trung điểm AB , E là trung điểm BC , điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CM}$. B. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ED}$.
C. M là trung điểm BC . D. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M là trung điểm AC . Suy ra $BEMD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 69. Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .
C. D là trung điểm BM . D. M là trung điểm DC .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BD}.$$

Câu 70. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm N thỏa mãn:

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.$$

- A. Điểm N là trung điểm cạnh AB B. Điểm C là trung điểm cạnh BN
C. Điểm C là trung điểm cạnh AM D. Điểm B là trung điểm cạnh NC

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{ND} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DN}$$

$$\Rightarrow ACND \text{ là hình bình hành } \Rightarrow C \text{ là trung điểm cạnh } BN.$$

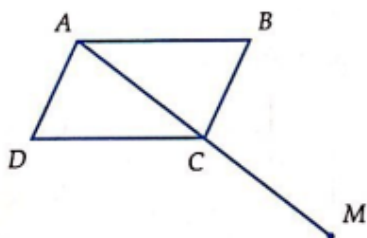
Đáp án B.

Câu 71. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$.

- A. Điểm M là trung điểm cạnh AC B. Điểm M là trung điểm cạnh BD
C. Điểm C là trung điểm cạnh AM D. Điểm B là trung điểm cạnh MC

Lời giải

Đáp án C



$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

Vậy C là trung điểm của AM

Câu 72. Trên đường tròn $C(O; R)$ lấy điểm cố định A ; B là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi M là điểm di động sao cho $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Khi đó tập hợp điểm M là:

- A. đường tròn tâm O bán kính $2R$.
B. đường tròn tâm A bán kính R
C. đường thẳng song song với OA
D. đường tròn tâm C bán kính $R\sqrt{3}$

Lời giải

Từ giả thiết $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow O, A, M, B$ theo thứ tự là các đỉnh của hình bình hành. Do $AM = OB = R \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A bán kính R .

Đáp án B.

Câu 73. Cho $\triangle ABC$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$ là:

- A. một đường tròn tâm C
B. đường tròn tâm I (I là trung điểm của AB)
C. một đường thẳng song song với AB
D. là đường thẳng trung trực của BC

Lời giải

Đáp án A

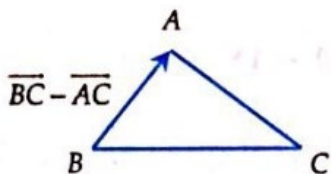
$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{MC}|$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm C bán kính AB .

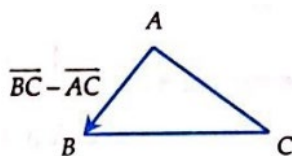
DẠNG 3. TÍNH ĐỘ DÀI VÉC TƠ

Câu 74. Cho $\triangle ABC$. Vector $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

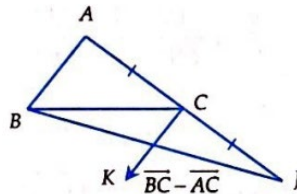
A.



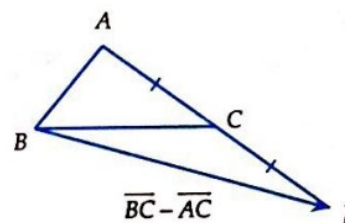
B.



C.



D.



Lời giải

$$\text{Vì } \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

Đáp án A.

Câu 75. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Khi đó độ dài $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ là:

- A. 4
B. 8
C. $2\sqrt{13}$
D. $\sqrt{13}$

Lời giải

Ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4 \Rightarrow AI = 2; |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2\sqrt{AB^2 + AI^2} = 2\sqrt{13}.$$

Đáp án C.

Câu 76. Cho hình thang cân $ABCD$, có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tính $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$.

- A. $a\sqrt{3}$
B. $2a\sqrt{5}$
C. $a\sqrt{5}$
D. $a\sqrt{2}$

Lời giải

$$|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{BH^2 + DH^2} = 2a\sqrt{5}$$

Đáp án B.

Câu 77. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 60° . Biết $|\vec{a}| = 6; |\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$

- A. $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ B. $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ C. $6(\sqrt{5} + 3)$ D. $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$

Lời giải

Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

Dựng hình bình hành $OACB \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}; \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow \triangle OAB \text{ vuông tại } B \Rightarrow IB = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$OI = \sqrt{OB^2 + IB^2} = \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow OC = \sqrt{63} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{63} + 3\sqrt{3}.$$

Đáp án B.

Câu 78. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Cho $AB = 2a, CD = a$. Gọi O là trung điểm của AD . Khi đó:

- A. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$ B. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$ C. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$ D. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 0$

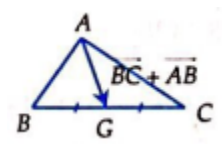
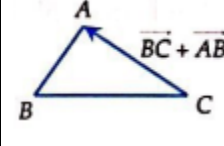
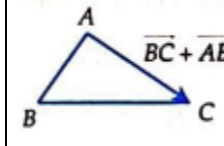
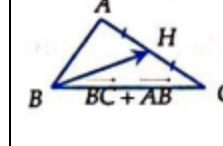
Lời giải

$$|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = 3a$$

(vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng)

Đáp án A.

Câu 79. Cho $\triangle ABC$. Vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

A.	B.	C.	D.
			

Lời giải

Đáp án C

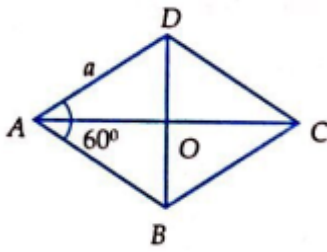
Vì theo quy tắc 3 điểm $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Câu 80. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a . Tính độ dài $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $2a$

Lời giải

Đáp án A



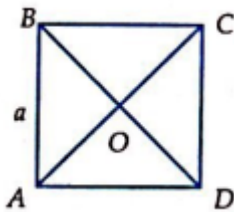
Gọi O là giao của 2 đường chéo $\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = 2AD = a\sqrt{3}$

Câu 81. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . O là giao điểm của hai đường chéo. Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $a\sqrt{2}$

Lời giải

Đáp án C



$$|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{OD}| = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 82. Với $\forall \vec{a}, \vec{b}$ độ dài $|\vec{a} + \vec{b}|$:

- A. Bao giờ cũng lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ B. Không nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$
C. Bao giờ cũng nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ D. Không lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

Lời giải

Đáp án D

Theo quy tắc 3 điểm độ dài vector tổng bao giờ cũng nhỏ hơn hoặc bằng tổng độ dài 2 vector thành phần.

Câu 83. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Khi đó $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}|$ bằng:

- A. 0 B. $3a$ C. a D. $a(\sqrt{3} - 1)$

Lời giải

Đáp án A

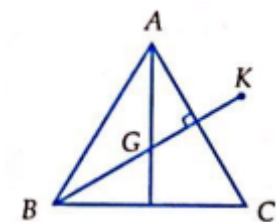
$$|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AA'}| = 0$$

Câu 84. Cho tam giác ABC đều cạnh a , trọng tâm G . Tính độ dài vector $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$.

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a}{3}$ C. $\frac{2a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Đáp án A



Gọi K là điểm đối xứng với G qua AC thì $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{GC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$

$$= |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK}| = |\overrightarrow{KB}| = 2BG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 85. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3. Tính độ dài $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$:

A. 6

B. $6\sqrt{2}$

C. 12

D. 0

Lời giải

Đáp án A

$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = |2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OD}| = 2|\overrightarrow{AD}| = 6$$

Câu 86. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O và M là trung điểm AB . Tính độ dài $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$.

A. a

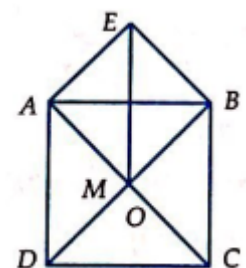
B. $3a$

C. $\frac{a}{2}$

D. $2a$

Lời giải

Đáp án A



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ và $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow OM = \frac{a}{2}$. Gọi E là điểm sao cho $OBEA$ là hình bình hành $\Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = AB = a$

Câu 87. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC . Tính độ dài vector $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}|$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

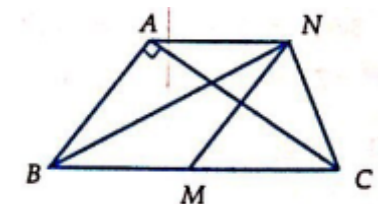
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Lời giải

Đáp án D



$$\text{Dựng hình bình hành } ABMN \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{BN}| = BN$$

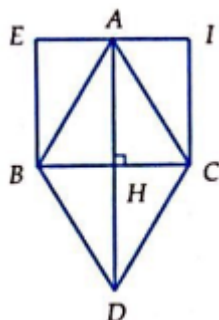
$$\text{Ta có: } NC = AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BN = \sqrt{BC^2 + NC^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Câu 88. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. H là trung điểm của BC . Tìm mệnh đề sai.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{3}$ B. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = \frac{\sqrt{63}}{2}$ C. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = 3$ D. $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = \sqrt{3}$

Lời giải

Đáp án D



$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow \text{A đúng.}$$

$$|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HE}| = |\overrightarrow{AB}| = 3 \Rightarrow \text{B đúng.}$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = |\overrightarrow{BI}| = \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow \text{C đúng.}$$

$$|\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{BA}| = 3 \Rightarrow \text{D sai.}$$

Câu 89. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Độ dài $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

A. $2a$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Câu 90. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{AC} = a$ C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ D. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

Lời giải

Chọn D.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = a.$$

Câu 91. Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

A. Vô số. B. 1 điểm. C. 2 điểm. D. Không có điểm nào.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD.$$

Suy ra tập hợp các điểm D là đường tròn tâm C bán kính AB .

Câu 92. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vector.

B. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vector.

C. $\vec{AA} = \vec{0}$.

D. $|\vec{AB}| > 0$.

Lời giải

Chọn **D**.

Mệnh đề $|\vec{AB}| > 0$ là mệnh đề **sai**, vì khi $A \equiv B$ thì $|\vec{AB}| = 0$.

Câu 93. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I ; G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

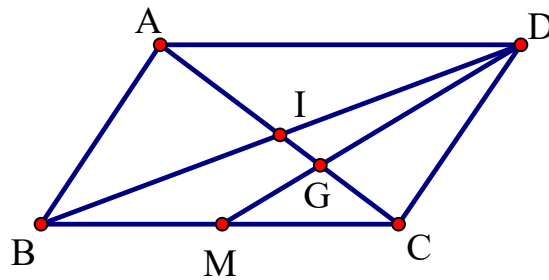
A. $\vec{BA} + \vec{DA} = \vec{BA} + \vec{DC}$. B. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}$.

C. $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{DA} + \vec{DC}|$.

D. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn **A**.



Ta có $\vec{BA} + \vec{DA} = \vec{BA} + \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{DA} = \vec{DC}$ (vô lý) $\rightarrow$ A sai.

G là trọng tâm tam giác BCD ; A là một điểm nằm ngoài tam giác $BCD \rightarrow$ đẳng thức ở đáp án B đúng.

Ta có $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BD}|$ và $|\vec{DA} + \vec{DC}| = |\vec{DB}|$. Mà $|\vec{DB}| = |\vec{BD}| \rightarrow$ đáp án C đúng.

Ta có $\vec{IA}$ và $\vec{IC}$ đối nhau, có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IC} = \vec{0}$; tương tự $\Leftrightarrow \vec{IB} + \vec{ID} = \vec{0} \rightarrow$ đáp án D là đúng.

Câu 94. Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\vec{CA} - \vec{HC}|$.

A. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. B. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = 5$.

C. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$. D. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

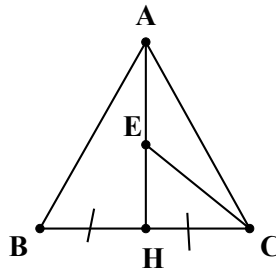
Lời giải

Chọn **D**.

Gọi M là điểm sao cho $CHMA$ là hình bình hành.

Ta có: $|\vec{CA} - \vec{HC}| = |\vec{CA} + \vec{CH}| = |\vec{CM}| = CM = 2CE$ (E là tâm của hình bình hành $CHMA$).

Ta lại có: $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle ABC$ đều, AH là đường cao).



Trong tam giác HEC vuông tại H , có:

$$EC = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{2.5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 2CE = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 95. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn C.

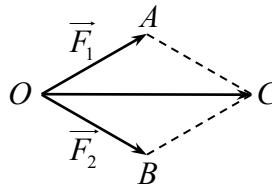
Ta có O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$.

Câu 96. Có hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A. 100 (N). B. $50\sqrt{3}$ (N).
C. $100\sqrt{3}$ (N). D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn B.



Giả sử $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$.

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OC}$, như hình vẽ.

Ta có $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $OA = OB = 50$, nên tam giác OAB đều, suy ra $OC = 50\sqrt{3}$.

Vậy $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{OC}| = 50\sqrt{3}$ (N).

Câu 97. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. B. $ABCD$ là hình thoi.
C. $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải

Chọn D.

Tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành (1), nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Mà $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $ABCD$ là hình thoi nên $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Câu 98. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$. B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

Lời giải

Chọn A.

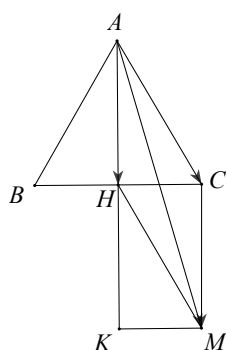
Gọi D là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành. Tam giác ABC vuông cân tại A suy ra $ABDC$ là hình vuông. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 2AM = BC = a\sqrt{2}$.

Câu 99. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.



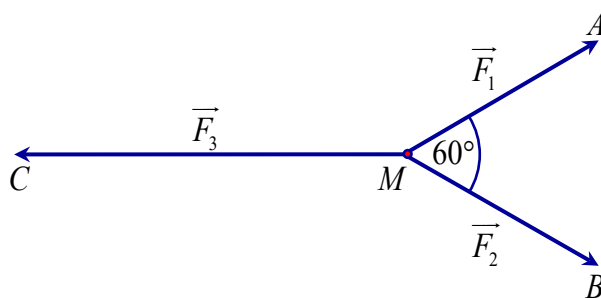
Dựng $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AH} \Rightarrow AHMC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}| = AM$.

Gọi K đối xứng với A qua $BC \Rightarrow \triangle AKM$ vuông tại K .

$$AK = 2AH = a\sqrt{3}; \quad KM = CH = \frac{a}{2}.$$

$$AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 100. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là

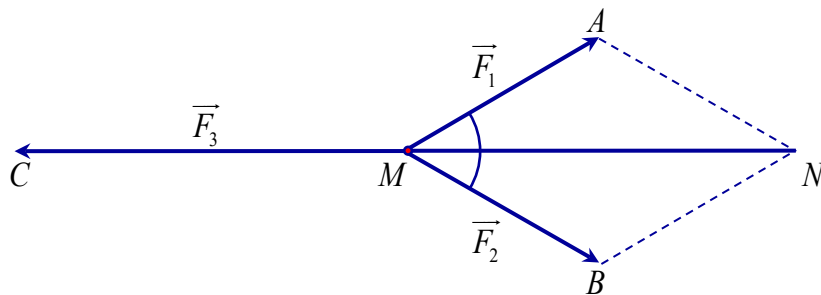


- A. $25\sqrt{3} N$. B. $50\sqrt{3} N$. C. $50\sqrt{2} N$. D. $100\sqrt{3} N$.

Lời giải

Chọn A.

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$.



Dựng hình bình hành $AMBN$. Ta có $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\vec{MA} - \vec{MB} = -\vec{MN}$.

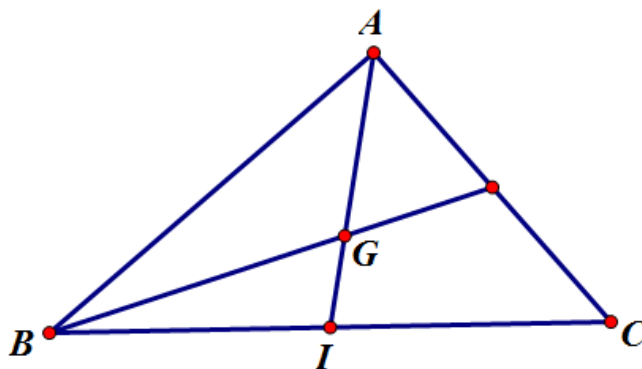
$$\text{Suy ra } |\vec{F}_3| = |-\vec{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}.$$

Câu 101. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Tìm khẳng định **sai**.

- A. $|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = IA$. B. $|\vec{IB} + \vec{IC}| = BC$.
C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI$. D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 3GA$.

Lời giải

Chọn **B**.



$|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = |\vec{0} + \vec{IA}| = |\vec{IA}| = IA$ (Do I là trung điểm BC) nên khẳng định ở A đúng.

$|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = 2AI$ (Gọi D là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành, I là trung điểm BC) nên khẳng định ở C đúng.

$|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI = 3GA$ (Do G là trọng tâm tam giác ABC) nên khẳng định ở D đúng.

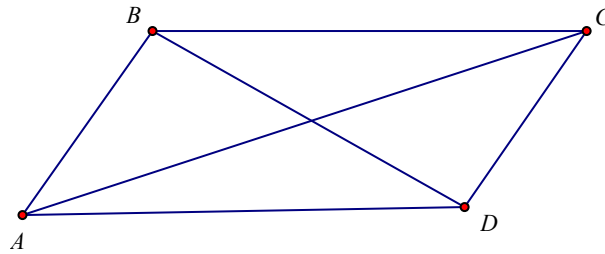
$|\vec{IB} + \vec{IC}| = |\vec{0}| = 0$ (Do I là trung điểm BC) nên khẳng định ở B sai.

Câu 102. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$. B. $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$.
C. $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$. D. $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.

Lời giải

Chọn **A**.



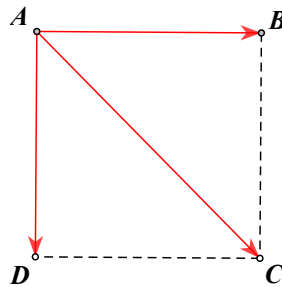
Ta có $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ là đẳng thức sai vì độ dài hai đường chéo của hình bình hành không bằng nhau.

Câu 103. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

- A. $4a\sqrt{2}$. B. $4a$. C. $2a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 2a\sqrt{2}$.

Câu 104. Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G . Độ dài vector $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$ là

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{GB} - (-\overrightarrow{GB})$ vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Khi đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GE}| = 2GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$ (E đối xứng với G qua M).

Câu 105. Tam giác ABC thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ thì tam giác ABC là

- A. Tam giác vuông A . B. Tam giác vuông C .
C. Tam giác vuông B . D. Tam giác cân tại C .

Lời giải

Chọn A.

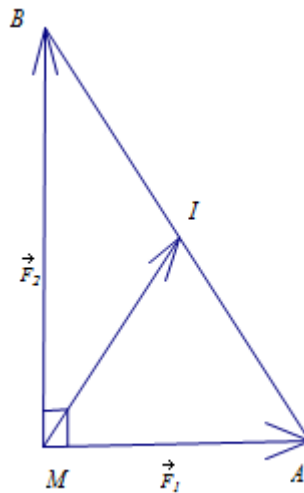
Gọi E là trung điểm BC , M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow AE = \frac{1}{2}BC$. Trung tuyến kẻ từ A bằng một nửa cạnh BC nên tam giác ABC vuông tại A .

Câu 106. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $300(\text{N})$ và $400(\text{N})$. $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A. $0(\text{N})$. B. $700(\text{N})$. C. $100(\text{N})$. D. $500(\text{N})$.

Lời giải

Chọn D.



Cường độ lực tổng hợp của $|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{MA} + \vec{MB}| = 2|\vec{MI}| = AB$ (I là trung điểm của AB).

Ta có $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$ suy ra $|\vec{F}| = 500(N)$.

Bài 5. TÍNH CHẤT CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa

Cho số thực $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vector $\vec{a}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một số với một vector gọi là phép nhân số với vector.

Ví dụ 1. Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC .

Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{CA} = k\vec{CB}$

b) $\vec{CA} = k\vec{AB}$

Giải

a) Ta có: $\vec{CA}, \vec{CB}$ là hai vector cùng hướng và $|\vec{CA}| = 2|\vec{CB}|$

Suy ra $\vec{CA} = 2\vec{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\vec{CA}, \vec{AB}$ là hai vector ngược hướng và $|\vec{CA}| = 2|\vec{AB}|$.

Suy ra $\vec{CA} = -2\vec{AB}$. Vậy $k = -2$.

Ví dụ 2. Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là $9m/s$ và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là $6m/s$. Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là các vector vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thỏa mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

Giải

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướng nên

hai vector vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = -\frac{3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k = -\frac{3}{2}$.

II. Tính chất

Với hai vector bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k , ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B, C . Chứng minh:

a) $2\vec{AB} + 2\vec{BC} = 2\vec{AC}$

b) $3(5\vec{AC}) + \vec{CB} - 14\vec{AC} = \vec{AB}$

Giải

a) Ta có: $2\vec{AB} + 2\vec{BC} = 2(\vec{AB} + \vec{BC}) = 2\vec{AC}$.

b) Ta có: $3(5\vec{AC}) + \vec{CB} - 14\vec{AC} = 15\vec{AC} + \vec{CB} - 14\vec{AC}$
 $= 15\vec{AC} - 14\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$.

III. Một số ứng dụng

1. Trung điểm đoạn thẳng

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

2. Trọng tâm của tam giác

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Giải

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$.

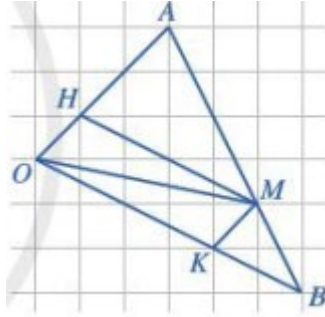
Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = 2\vec{0} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để hai vector cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Điều kiện cần và đủ để hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác OAB . Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Kẻ $MH \parallel OB, MK \parallel OA$



Giả sử $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giải

a) Ta có: $MK \parallel OA, MH \parallel OB$ suy ra

$$\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}, \frac{OH}{OA} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH = \frac{1}{3}OA$ nên $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK = \frac{2}{3}OB$ nên $\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}$.

b) Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Nhận xét: Trong mặt phẳng, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vector $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. DỰNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VEC – TƠ

Câu 1. Cho tam giác ABC cạnh a . Gọi điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC, CA . Dụng các vec – tơ sau và tính độ dài của chúng

- a) $\overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{MN}$
 c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Điểm M là trung điểm BC . Dựng các véc-tơ sau và tính độ dài của chúng

- a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}$. b) $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{MB}$

Câu 3. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Dựng và tính độ dài các véc-tơ $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$; $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

Câu 4. Cho tam giác ABC , trên cạnh ABC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC .

- a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$
 b) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{GC}; \overrightarrow{MN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Câu 5. Cho ΔABC . Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Câu 6. Cho ΔABC . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

- a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
 b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Câu 7. Cho ΔABC . Gọi I, J là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$.

- a) Tính IJ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
 b) Chứng minh rằng đường thẳng IJ qua trọng tâm G của tam giác ΔABC

Câu 8. Cho ΔABC có trung tuyến AM , M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm của CD . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Câu 10. Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$.

Câu 11. Cho ΔABC . Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 12. Cho ΔABC . Điểm M trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm MN . Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AK}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Câu 13. Cho tam giác OAB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh OA , OB . Tìm các số m, n của mỗi đẳng thức $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.

- Câu 14.** Một đường thẳng cắt cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M . Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ ($m, n > 0$). Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m, n .
- Câu 15.** Điểm M được gọi là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$.

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

- Câu 16.** Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh với điểm O bất kỳ ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
- Câu 17.** Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- Tìm số k mà $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.
 - Chứng minh với mọi điểm M thì có $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.
- Câu 18.** Cho tam giác ABC có trực tâm H , trọng tâm G và đường tròn ngoại tiếp O . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.
 - $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.
 - $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$.
- Câu 19.** Cho tam giác ABC . Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
 - $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với M là trung điểm của BC .
- Câu 20.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh
- Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
 - Nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm G .
- Câu 21.** Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP . Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.
- Câu 22.** Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý.
- Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$. Chứng minh rằng các điểm D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .
 - Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.
- Câu 23.** Cho tam giác ABC với cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$.
- Gọi CM là đường phân giác trong của góc C . Hãy biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{CM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.
 - Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- Câu 24.** Cho tam giác ABC đều, tâm O . Gọi M là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC và D, E, F lần lượt là hình chiếu của nó trên các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

- Câu 25.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của IJ . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
 - $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
 - $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.
- Câu 26.** Cho tứ giác $ABCD$. Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của tứ giác $ABCD$
- Câu 27.** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh
- Với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$
 - $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$
- Câu 28.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
- Câu 29.** Cho hai điểm A và B . Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- Câu 30.** Xác định các điểm I, J, K, L biết
- $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$
 - $\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
 - $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC}$
 - $2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- Câu 31.** Cho tam giác ABC
- Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$
 - Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$
- Câu 32.** Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm M, N, P sao cho
- $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
 - $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$
 - $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

DẠNG 4. CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC VEC – TỜ KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO ĐIỂM DI ĐỘNG

- Câu 33.** Cho tam giác ABC
- Với M là điểm bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M
 - Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. CD cắt AB tại K . Chứng minh $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CK}$
- Câu 34.** Cho tam giác ABC cố định và điểm M di động. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M
- Câu 35.** Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M . Đặt điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$
- Câu 36.** Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M
- Câu 37.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

DẠNG 5. CHỨNG MINH HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI TAM GIÁC CÓ CÙNG TRỌNG TÂM

- Câu 38.** Chứng minh rằng $\overline{AB} = \overline{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau
- Câu 39.** Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2011\overline{A'B} + 2012\overline{A'C} = \vec{0}$, $2011\overline{B'C} + 2012\overline{B'A} = \vec{0}$; $2011\overline{C'A} + 2012\overline{C'B} = \vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.
- Câu 40.** Hai tam giác ABC và A'B'C' lần lượt có trọng tâm là G, G'. Chứng minh rằng $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\overline{GG'}$. Từ đó suy ra “Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \vec{0}$ ”
- Câu 41.** Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B, B' là điểm đối xứng với B qua C và C' là điểm đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng các tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.
- Câu 42.** Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.
- Câu 43.** Cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' có chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác BC'D và B'CD' có cùng trọng tâm
- Câu 44.** Cho tứ giác ABCD có trọng tâm G. Gọi G₁, G₂, G₃, G₄ lần lượt là trọng tâm các tam giác $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tứ giác G₁G₂G₃G₄
- Câu 45.** Cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.
- Câu 46.** Cho điểm G là trọng tâm tứ giác ABCD và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC.
a. Chứng minh rằng G là điểm chung của các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD'.
b. Điểm G chia các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD' theo các tỉ số nào?
c. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tứ giác A'B'C'D'.
- Câu 47.** Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

DẠNG 6: THẲNG HÀNG, CỐ ĐỊNH, ĐỒNG QUI

- Câu 48.** Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho $\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + (1-\alpha)\overline{OB}$. Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB?
- Câu 49.** Cho tam giác ABC. Điểm I trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}CA$, J là điểm mà $\overline{BJ} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{2}{3}\overline{AB}$.
a) Chứng minh $\overline{BI} = \frac{3}{4}\overline{AC} - \overline{AB}$ b) Chứng minh B, I, J thẳng hàng
- Câu 50.** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O.

a) Chứng minh tứ giác $HCDB$ là hình bình hành

b) Chứng minh $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. Suy ra ba điểm O, H, G thẳng hàng (G là trọng tâm tam giác ABC)

Câu 51. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 52. Cho tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$. Chứng minh các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy.

Câu 53. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA . Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua trung điểm I, K, J của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng

a) Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy

b) Đường thẳng MM_1 luôn đi qua một điểm cố định khi M di động

Câu 54. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC, CA sao cho $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB} = n\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PC} = p\overrightarrow{PA}$ (m, n, p đều khác 1). Chứng minh rằng:

a) M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (định lý Mê-nê-la-uyt)

b) AN, CM, BP đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $mnp = -1$ (định lý Xê-va)

Câu 55. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.

Câu 56. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP & NQ . Chứng minh $IJ \parallel AE$ & $IJ = \frac{1}{4}AE$.

Câu 57. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy các điểm tương ứng $C_1; A_1; B_1$ sao cho $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \frac{1}{k}$. Trên các cạnh $A_1B_1; B_1C_1; C_1A_1$ của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm tương ứng $C_2; A_2; B_2$ sao cho $A_1C_2 : C_2B_1 = B_1A_2 : A_2C_1 = C_1B_2 : B_2A_1 = k$. Chứng minh rằng: $A_2C_2 \parallel AC; C_2B_2 \parallel CB; B_2A_2 \parallel BA$.

Câu 58. Cho ba dây cung song song $AA_1; BB_1; CC_1$ của đường tròn (O) . Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $ABC_1; BCA_1$ & CAB_1 nằm trên một đường tròn.

DẠNG 7. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẶNG THỨC VEC TO.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện vecto ta quy về một trong các dạng sau:

- Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB .
- Nếu $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C , bán kính bằng $k|\overrightarrow{AB}|$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì:
 - + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in \mathbb{R}$.
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$.
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$.

• Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, $B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC .

Câu 59. Cho điểm O cố định và hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cố định. Với mỗi số m ta xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

Câu 60. Cho hai điểm A, B . Tập hợp các điểm M sao cho

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. b) $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$

Câu 61. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện sau:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$, với k là số thực thay đổi khác 0.

Câu 62. Cho tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm I thỏa $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm thỏa mãn $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Câu 63. Cho $\triangle ABC$. Tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

a) $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$. b) $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

Câu 64. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. c) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$.

Câu 65. Cho tam giác ABC và ba vectơ cố định $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Với mỗi số thực t , ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}, \overrightarrow{BB'} = t\vec{v}, \overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ khi t thay đổi.

Câu 66. Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN khi k thay đổi.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. DÙNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VEC – TƠ

Câu 1. Khẳng định nào sai?

A. $1.\vec{a} = \vec{a}$

B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$

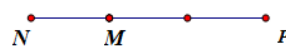
C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$

D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

Câu 2. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 3

B. Hình 4

C. Hình 1

D. Hình 2

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

- Câu 4.** Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng
A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ **B.** $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$ **C.** $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$ **D.** $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$
- Câu 5.** Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?
A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$ **C.** $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$ **D.** $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- Câu 6.** Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:
A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$ **B.** $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$ **C.** $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$ **D.** $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$
- Câu 7.** Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$
A. $m = 3$ **B.** $m = -\frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = -3$
- Câu 8.** Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
A. M là trung điểm của BC
B. M là trung điểm của IC
C. M là trung điểm của IA
D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$
- Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:
A. Trung điểm của AC **B.** Điểm C
C. Trung điểm của AB **D.** Trung điểm của AD
- Câu 10.** Cho đoạn thẳng AB . Gọi M là một điểm trên AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$.
- Câu 11.** Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ **C.** $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$ **D.** $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$
- Câu 12.** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:
A. $AB = AC$ **B.** $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M
- Câu 13.** Cho $\triangle ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vector nào sau đây cùng phương?
A. $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$ **B.** $\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ **C.** $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$ **D.** $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$
- Câu 14.** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vector nào sau đây cùng phương?
A. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$ **B.** $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $2\vec{a} + \vec{b}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ **D.** $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$
- Câu 15.** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vector nào sau đây là cùng phương?

A. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$

B. $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$

C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$

D. $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

Câu 16. Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

A. -7

B. 7

C. 5

D. 6

Câu 17. Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

Câu 18. Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều B. Tam giác ABC cân tại C

C. Tam giác ABC vuông tại C

D. Tam giác ABC cân tại B

Câu 19. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Độ dài của vec tơ $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

A. $\frac{a\sqrt{140}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{321}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{520}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

Câu 20. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

Câu 21. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P . Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

A. $-\frac{4}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $-\frac{5}{3}$

Câu 22. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $MN \perp AC$

B. $MN \parallel AC$

C. M nằm trên đường thẳng AC

D. Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau

Câu 23. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Tính độ dài vector $\vec{v} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

A. $2a$

B. $\frac{\sqrt{6073}}{28}a$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Câu 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính độ dài vector: $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

A. $|\vec{u}| = 4a\sqrt{2}$

B. $|\vec{u}| = a\sqrt{2}$

C. $|\vec{u}| = 3a\sqrt{2}$

D. $|\vec{u}| = 2a\sqrt{2}$

Câu 25. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Tính độ dài vector $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2,5\overrightarrow{OB}$

A. $\frac{\sqrt{541}}{4}a$

B. $\frac{\sqrt{520}}{4}a$

C. $\frac{\sqrt{140}}{4}a$

D. $\frac{\sqrt{310}}{4}a$

Câu 26. Cho tam giác đều ABC cạnh a điểm M là trung điểm của BC . Tính độ dài vector $\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{MA} - 2,5\vec{MB}$.

A. $\frac{a\sqrt{127}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{127}}{8}$

C. $\frac{a\sqrt{127}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{127}}{2}$

Câu 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính độ dài vector $\vec{u} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MD}$.

A. $|\vec{u}| = a\sqrt{5}$

B. $|\vec{u}| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

C. $|\vec{u}| = 3a\sqrt{5}$

D. $|\vec{u}| = 2a\sqrt{5}$

Câu 28. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\vec{BH} = \frac{1}{3}\vec{HC}$.

Điểm M di động trên BC sao cho $\vec{BM} = x\vec{BC}$. Tìm x sao cho độ dài vector $|\vec{MA} + \vec{GC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x = \frac{4}{5}$

B. $x = \frac{5}{6}$

C. $x = \frac{6}{5}$

D. $x = \frac{5}{4}$

Câu 29. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . M là trung điểm BC . Tính độ dài $\left| \frac{1}{2}\vec{AB} + 2\vec{AC} \right|$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$

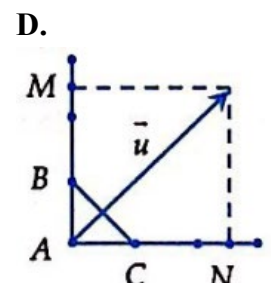
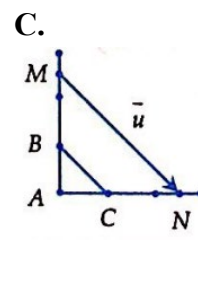
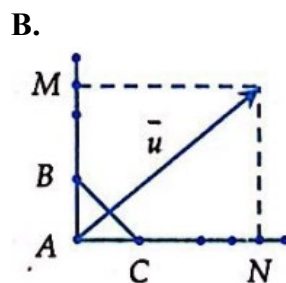
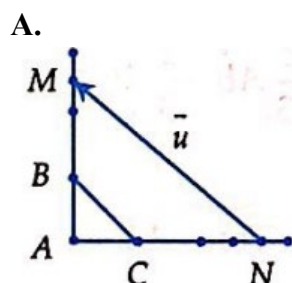
D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

Câu 30. Cho AK và BM là hai trung tuyến của $\triangle ABC$. Hãy phân tích vector $\vec{AB}$ theo hai vector $\vec{AK}$ và $\vec{BM}$.

A. $\vec{AB} = \frac{2}{3}(\vec{AK} - \vec{BM})$ B. $\vec{AB} = \frac{1}{3}(\vec{AK} - \vec{BM})$ C. $\vec{AB} = \frac{3}{2}(\vec{AK} - \vec{BM})$ D. $\vec{AB} = \frac{2}{3}(\vec{AK} + \vec{BM})$

Câu 31. Cho $\triangle ABC$ vuông cân, $AB = AC$. Khi đó vector $\vec{u} = \frac{11}{4}\vec{AB} + \frac{5}{2}\vec{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?



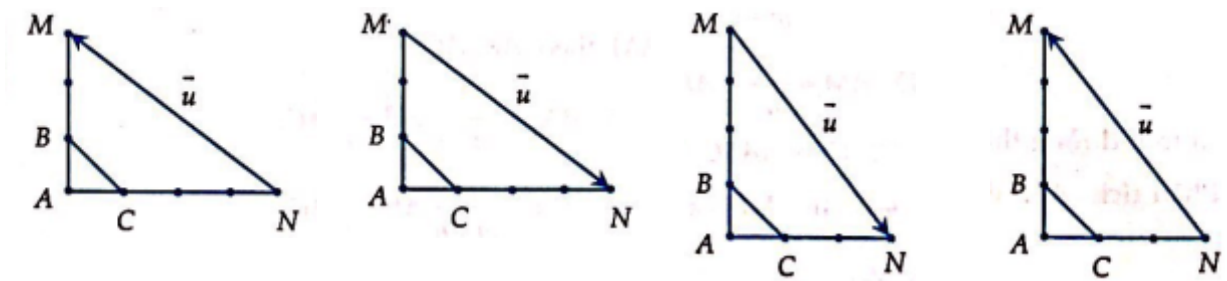
Câu 32. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , vector $\vec{u} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

A.

B.

C.

D.



Câu 33. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Phân tích $\overrightarrow{AB}$ theo hai vector $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{CP}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ B. $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

C. $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ D. $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$

Câu 34. Cho $\triangle ABC$. Điểm M nằm trên đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ ($k \neq 1$). Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1-k}$ B. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1+k}$ C. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}$ D. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1-k}$

Câu 35. Cho $\triangle OAB$ với M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB . Tìm số m, n thích hợp để $\overrightarrow{NA} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.

A. $m = -1, n = \frac{1}{2}$ B. $m = 1, n = -\frac{1}{2}$ C. $m = 1, n = \frac{1}{2}$ D. $m = -1, n = -\frac{1}{2}$

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$ có E, N lần lượt là trung điểm của BC, AE . Tìm các số p và q sao cho $\overrightarrow{DN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$.

A. $p = \frac{5}{4}; q = \frac{3}{4}$ B. $p = -\frac{4}{3}; q = \frac{2}{3}$ C. $p = -\frac{4}{3}; q = -\frac{2}{3}$ D. $p = \frac{5}{4}; q = -\frac{3}{4}$

Câu 37. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Câu 38. Cho tam giác ABC biết $AB = 8, AC = 9, BC = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN = x$ ($0 < x < 9$). Hệ thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Câu 39. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng với B qua G . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$$\text{C. } \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{D. } \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Câu 40. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

$$\text{A. } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} \quad \text{B. } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} \quad \text{C. } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF} \quad \text{D. } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$$

Câu 41. Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của cạnh AD , M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vector $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vector $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

$$\text{A. } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{B. } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \quad \text{D. } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}.$$

Câu 42. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \quad \text{B. } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{D. } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 43. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:

$$\text{A. } \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}). \quad \text{B. } \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}). \quad \text{C. } 3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}). \quad \text{D. } \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

Câu 44. Cho tam giác ABC với phân giác trong AD . Biết $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

$$\text{A. } \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} \quad \text{B. } \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{12}\overrightarrow{AC} \quad \text{C. } \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC} \quad \text{D. } \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 45. Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC . Biết $AB = 4$, $BC = 5$ và $CA = 6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

$$\text{A. } \frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB} \quad \text{B. } \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB} \quad \text{C. } \frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB} \quad \text{D. } \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}.$$

Câu 46. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm BC, CD . Biết $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{AL} = \vec{b}$. Biểu diễn $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$

$$\text{A. } \overrightarrow{BA} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \quad \text{B. } \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$$

$$\text{C. } \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \quad \text{D. } \overrightarrow{BA} = -\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$$

Câu 47. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi I là điểm trên BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$

$$\text{A. } \overrightarrow{AG} = \frac{15}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ} \quad \text{B. } \overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AG} = \frac{15}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ} \quad \text{D. } \overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$$

Câu 48. Cho $\triangle ABC$. Điểm M nằm trên đường thẳng BC sao cho $n\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC}$ ($n, m \neq 0$). Phân tích vector $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

Câu 49. Một đường thẳng cắt các cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M . Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ ($m, n > 0$). Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m, n .

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

B. $\overrightarrow{DM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m-n}\overrightarrow{DB}$

Câu 50. Cho $\triangle ABC$. Trên BC lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Khi đó phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Câu 51. Cho $\triangle ABC$. Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng.

A. $\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MN}$

B. $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$

C. $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$

D. $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{MN}$

Câu 52. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên cạnh AB và CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BMN$. Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}$. Xác định m để AI đi qua G .

A. $m = \frac{6}{11}$

B. $m = \frac{11}{6}$

C. $m = \frac{6}{5}$

D. $m = \frac{18}{11}$

Câu 53. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD . Xét các điểm M, N, P cho bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AD}$. Tìm m để M, N, P thẳng hàng.

A. $m = \frac{1}{6}$

B. $m = \frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{4}$

D. $m = \frac{2}{3}$

Câu 54. Cho $\triangle ABC$. M và N là hai điểm xác định thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, N, B thẳng hàng?

A. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$

B. $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$

C. $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

D. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$

Câu 55. Cho $\triangle ABC$ với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để H, O, G thẳng hàng?

A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$

B. $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

- Câu 56.** Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP và NQ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IJ \parallel AE$?
- A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AE}$ B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{4} \overrightarrow{AE}$ C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AE}$ D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$
- Câu 57.** Cho $\triangle ABC$. Các điểm I, J thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ} = 3 \overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IC \parallel BJ$?
- A. $\overrightarrow{CI} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BJ}$ B. $\overrightarrow{CI} = 3 \overrightarrow{BJ}$ C. $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{BJ}$ D. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BJ}$
- Câu 58.** Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm M, N sao cho $AM = \frac{2}{5} MB, \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$. Gọi I là giao điểm của AN và CM . Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$.
- A. $\frac{AI}{AN} = \frac{3}{7}; \frac{CI}{IM} = \frac{21}{2}$ B. $\frac{AI}{AN} = \frac{4}{11}; \frac{CI}{IM} = \frac{7}{2}$
C. $\frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}; \frac{CI}{IM} = \frac{7}{4}$ D. $\frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}; \frac{CI}{IM} = \frac{21}{2}$
- Câu 59.** Cho $\triangle ABC$ và trung tuyến AM . Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM, AC và BC lần lượt tại D, E , và F . Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho FG song song với AC . Tính $\frac{ED}{GB}$.
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 1
- Câu 60.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N . Biết $OA = 1, OB = 2, OC = 3, OD = 4$. Tính $\frac{CN}{ND}$.
- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$
- Câu 61.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên các cạnh AB và CD sao cho $AM = \frac{1}{3} AB, CN = \frac{1}{2} CD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BMN$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$.
- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18} \vec{a} + \frac{5}{3} \vec{b}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18} \vec{a} + \frac{1}{5} \vec{b}$ C. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b}$
- Câu 62.** Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên tia đối của BC sao cho $5JB = 2JC$. Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
- A. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}$ B. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}$
C. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5} \vec{a} + \frac{3}{5} \vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}$ D. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}$
- Câu 63.** Cho tứ giác $ABCD$. Trên AB và CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k \overrightarrow{DC}, k \neq 1$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{AD} + (1-k).\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{MN} = (1+k).\overrightarrow{AD} + k.\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{MN} = (1-k).\overrightarrow{AD} + k.\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{MN} = -k.\overrightarrow{AD} + (k+1).\overrightarrow{BC}$

Câu 64. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm trên AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm B, I, K thẳng hàng.

A. $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

B. $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

C. $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI}$

D. $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

Câu 65. Cho $\triangle ABC$, E là trung điểm BC , I là trung điểm của AB . Gọi D, I, J, K lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{IK} = m\overrightarrow{IJ}$. Tìm m để A, K, D thẳng hàng.

A. $m = \frac{5}{6}$

B. $m = \frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{2}$

D. $m = \frac{2}{5}$

Câu 66. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $MN \parallel AC$.

A. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Câu 67. Cho $\triangle ABC$; M và N xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Trọng tâm $\triangle ABC$ là G . Gọi P là điểm trên cạnh AC sao cho $\frac{PA}{PC} = 4$. Các đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, G, N, P thẳng hàng.

A. $7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

B. $5\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

C. $7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{PQ} - 3\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

D. $3\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

Câu 68. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của $\triangle ADC$ và $\triangle BCD$. Đẳng thức nào là điều kiện cần và đủ để $IJ \parallel AB$.

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Câu 69. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB ; $N \in$ cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Gọi

O là giao điểm của CM và BN . Tính tỉ số $\frac{ON}{OB}$ và $\frac{OM}{OC}$ tương ứng.

A. $\frac{1}{9}$ và $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{6}$ và $\frac{1}{9}$

Câu 70. Cho hình bình hành $ABCD$. M thuộc AC sao cho: $AM = kAC$. Trên cạnh AB, BC lấy các điểm P, Q sao cho $MP \parallel BC, MQ \parallel AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP . Tính tỉ số $\frac{AN}{AQ}$ và $\frac{CN}{CP}$ theo k .

A. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k - 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2 + k + 1}$

B. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 - k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2 - k + 1}$

C. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2 + k - 1}$

D. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2 + k + 1}$

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

- Câu 71.** Cho hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G' . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = 3\overrightarrow{GG'}$ B. $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$
C. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'}$ D. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$
- Câu 72.** Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$ D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$
- Câu 73.** Cho $\triangle ABC$ và một điểm M tùy ý. Chọn hệ thức đúng?
- A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$
- Câu 74.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn đẳng thức đúng.
- A. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$ D. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
- Câu 75.** Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chọn đẳng thức sai.
- A. $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ C. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC_1}$
- Câu 76.** Cho $\triangle ABC$ với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp trọng tâm. Hệ thức nào sau đây là đúng?
- A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$
- Câu 77.** Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đẳng thức nào sau đây là sai?
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$ B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ D. $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$
- Câu 78.** Cho $\triangle ABC$, M là một điểm trên cạnh BC . Khi đó đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{BM} = \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{MB}{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
C. $3\overrightarrow{CM} = \frac{MB}{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ D. $2\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$
- Câu 79.** Cho $\triangle ABC$, AM, BN, CP là các trung tuyến. D, E, F là trung điểm của AM, BN và CP . Với O là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ B. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$ D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$
- Câu 80.** Cho tam giác ABC đều tâm O , M là điểm bất kì trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh lần lượt là D, E, F . Hệ thức nào sau đây là đúng?
- A. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ B. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$

$$\text{C. } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{MO}$$

$$\text{D. } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$$

Câu 81. Cho tứ giác $ABCD$. I, J lần lượt là trung điểm của AB và DC . G là trung điểm của IJ . Xét các mệnh đề:

$$\text{(I) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG} \quad \text{(II) } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IG} \quad \text{(III) } \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{JI}$$

Mệnh đề sai là:

- A. (I) và (II) B. (II) và (III) C. Chỉ (I) D. Tất cả đều sai

Câu 82. Cho tứ giác $ABCD$, các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{m}{n}$.

Đẳng thức nào sau đây là đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n} \quad \text{B. } \overrightarrow{AM} = \frac{n\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AB}}{m+n} \quad \text{C. } \overrightarrow{BN} = \frac{n\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{CD}}{m+n} \quad \text{D. } \overrightarrow{DM} = \frac{n\overrightarrow{CD} + m\overrightarrow{AD}}{m+n}$$

Câu 83. Cho $\triangle ABC$ và một điểm M bất kì trong tam giác. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

$$\begin{aligned} \text{A. } S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} &= \vec{0} & \text{B. } S_a \cdot \overrightarrow{AB} + S_b \cdot \overrightarrow{BC} + S_c \cdot \overrightarrow{CA} &= \vec{0} \\ \text{C. } S_a \cdot \overrightarrow{MC} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MA} &= \vec{0} & \text{D. } S_a \cdot \overrightarrow{AC} + S_b \cdot \overrightarrow{AB} + S_c \cdot \overrightarrow{BC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Câu 84. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, AC = b, AB = c$. I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

$$\begin{aligned} \text{A. } a \cdot \overrightarrow{IM} + b \cdot \overrightarrow{IN} + c \cdot \overrightarrow{IP} &= \vec{0} & \text{B. } a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{NB} + c \cdot \overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \text{C. } a \cdot \overrightarrow{AM} + b \cdot \overrightarrow{BN} + c \cdot \overrightarrow{CP} &= \vec{0} & \text{D. } a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{BC} + c \cdot \overrightarrow{CA} &= \vec{0} \end{aligned}$$

DẠNG 4. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

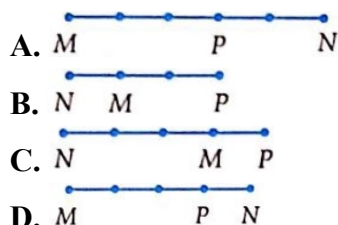
Câu 85. Cho hai điểm A và B . Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

- A. Điểm I ngoài đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3} AB$
 B. Điểm I thuộc đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3} AB$
 C. Điểm I là trung điểm đoạn AB
 D. Điểm I nằm khác phía với B đối với A và $IB = \frac{1}{3} AB$.

Câu 86. Cho đoạn thẳng AB . Hình nào sau đây biểu diễn điểm I sao cho $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{5} \overrightarrow{BA}$.



Câu 87. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Hình vẽ nào sau đây xác định đúng vị trí điểm M .



Câu 88. Cho đoạn thẳng AB và điểm M là một điểm trong đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k để

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}.$$

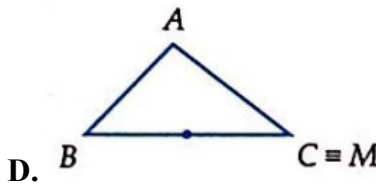
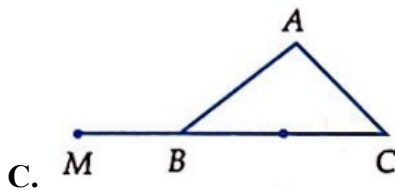
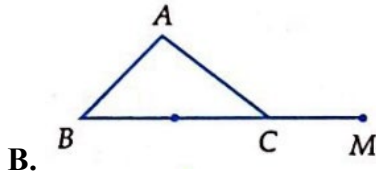
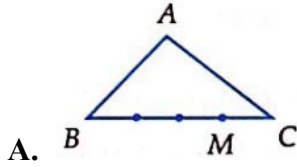
A. $k = \frac{1}{4}$

B. $k = 4$

C. $k = -\frac{1}{4}$

D. $k = -4$

Câu 89. Cho $\triangle ABC$. Trên đường thẳng BC lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Điểm M được vẽ đúng trong hình nào sau đây?



Câu 90. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

A. Điểm M là trung điểm cạnh AC .

B. Điểm M là trung điểm cạnh GC .

C. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số 4.

D. Điểm M chia đoạn GC thỏa mãn $\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM}$.

Câu 91. Cho $\triangle ABC$, I là trung điểm của AC . Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức:

A. $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

B. $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$

C. $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

D. $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BI}$

Câu 92. Cho 2 điểm A, B là hai số thực a, b sao cho $a+b \neq 0$. Xét các mệnh đề:

(I) Tồn tại duy nhất một điểm M thỏa mãn $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

(II) $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

(III) M là điểm nằm trên đường thẳng AB .

Trong các mệnh đề trên thì:

A. (I) và (III) tương đương nhau

B. (II) và (III) tương đương nhau

C. (I) và (II) tương đương nhau

D. (I), (II), (III) tương đương nhau

Câu 93. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, AC = b, AB = c$. Nếu điểm I thỏa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ thì:

A. Điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

B. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

C. Điểm I là trực tâm của $\triangle ABC$.

D. Điểm I là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Câu 94. Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC}$.

- A.** Điểm I là trung điểm của cạnh AC
- B.** Điểm C là trung điểm của cạnh IA
- C.** Điểm C chia đoạn IA theo tỉ số -2
- D.** Điểm I chia đoạn AC theo tỉ số 2

Câu 95. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm AB và N trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Xác định điểm K sao cho $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

- A.** Điểm K là trung điểm cạnh AM
- B.** Điểm K là trung điểm cạnh BN
- C.** Điểm K là trung điểm cạnh BC
- D.** Điểm K là trung điểm cạnh MN

Câu 96. Cho $\triangle ABC$. Tìm điểm N sao cho: $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

- A.** N là trọng tâm $\triangle ABC$
- B.** N là trung điểm của BC
- C.** N là trung điểm của AK với K là trung điểm của BC
- D.** N là đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận AB và AC làm 2 cạnh

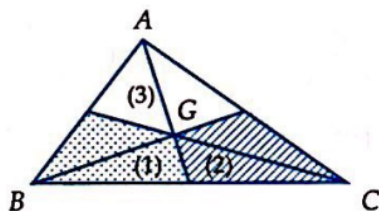
Câu 97. Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$.

- A.** M là trung điểm cạnh AB
- B.** M là trung điểm cạnh BC
- C.** M chia đoạn AB theo tỉ số 2
- D.** M là trọng tâm $\triangle ABC$

Câu 98. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó điểm M thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

- A.** $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$
- B.** $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$
- C.** $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$
- D.** $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Câu 99. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Nối điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M ở vị trí nào trong hình vẽ:



- A.** Miền (1)
- B.** Miền (2)
- C.** Miền (3)
- D.** Ở ngoài $\triangle ABC$

Câu 100. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM}$. Khi đó điểm M trùng với điểm:

- A.** O
- B.** I là trung điểm đoạn OA
- C.** I là trung điểm đoạn OC
- D.** C

Câu 101. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{MC}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nếu M là trọng tâm $\triangle ABC$ thì α, β thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

- A.** $\alpha^2 - \beta^2 = 0$
- B.** $\alpha.\beta = 1$
- C.** $\alpha - \beta = 0$
- D.** Cả A, B, C đều đúng

Câu 102. Cho $\triangle ABC$. Nếu điểm D thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$ với M tùy ý, thì D là đỉnh của hình bình hành:

- A.** $ABCD$
- B.** $ACBD$
- C.** $ABED$ với E là trung điểm của BC
- D.** $ACED$ với B là trung điểm của EC

Câu 103. Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Tìm số $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

A. $k = \frac{3}{4}$

B. $k = \frac{3}{5}$

C. $k = \frac{2}{5}$

D. $k = \frac{3}{2}$

Câu 104. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Tập hợp điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$ là:

A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

B. Đường tròn tâm G bán kính là 1.

C. Đường tròn tâm G bán kính là 2.

D. Đường tròn tâm G bán kính là 6.

Câu 105. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . I là trung điểm của BC . Tập hợp điểm M sao cho:

$2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ là:

A. đường trung trực của đoạn GI

B. đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

C. đường thẳng GI

D. đường trung trực của đoạn AI

Câu 106. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là

A. một đoạn thẳng

B. một đường tròn

C. một điểm

D. tập hợp rỗng

Câu 107. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k, k > 0$ là:

A. đường tròn tâm O bán kính là $\frac{k}{4}$

B. đường tròn đi qua A, B, C, D

C. đường trung trực của AB

D. tập rỗng

Câu 108. Cho $\triangle ABC$ trọng tâm G . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, AB, CA . Quỹ tích các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|$ là:

A. đường tròn tâm I bán kính $\frac{1}{2}JK$

B. đường tròn tâm G bán kính $\frac{1}{3}IJ$

C. đường tròn tâm G bán kính $\frac{1}{3}CA$

D. trung trực AC

Câu 109. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, lúc đó:

A. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên đường thẳng AB

B. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên đường thẳng đối xứng với AB qua O

C. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên một đường tròn cố định

D. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên một đường tròn cố định bán kính R

Câu 110. Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC}$ với $k \in \mathbb{R}$

A. là một đoạn thẳng

B. là một đường thẳng

C. là một đường tròn

D. là một điểm

Câu 111. Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ là:

A. đường thẳng qua A

B. đường thẳng qua B và C

C. đường tròn

D. một điểm duy nhất

Câu 112. Tập hợp điểm M mà $k\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}, k \neq 1$ là:

A. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ C

B. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ B

C. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ A

D. đường trung trực của AB

Câu 113. Cho $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn: $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$

- A. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{3}$
- B. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{4}$
- C. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{9}$
- D. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{2}$

Câu 114. Cho $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$, $k \in \mathbb{R}$.

- A. Tập hợp điểm M là đường trung trực của EF , với E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC
- B. Tập hợp điểm M là đường thẳng qua A và song song với BC
- C. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$
- D. Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ thì tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB với E là trung điểm của AB

Câu 115. Cho tứ giác $ABCD$ với K là số tùy ý. Lấy cá điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi k thay đổi.

- A. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AC, BD
- B. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AD, BC
- C. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AB, DC
- D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 116. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + \left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right|$ nhận giá trị nhỏ nhất.

- A. Tập hợp điểm M là một đường thẳng
- B. Tập hợp điểm M là một đoạn thẳng
- C. Tập hợp điểm M là một đường tròn
- D. Là một điểm

Câu 117. Tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức: $2\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $k \in \mathbb{R}$ là:

- A. đường thẳng
- B. đường tròn
- C. đoạn thẳng
- D. một điểm

Câu 118. Cho $\triangle ABC$ và điểm M thỏa mãn đẳng thức: $\left|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$.

Tập hợp điểm M là

- A. một đoạn thẳng
- B. nửa đường tròn
- C. một đường tròn
- D. một đường thẳng

Câu 119. Tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức: $\left|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$

- A. là một đường tròn có bán kính là $\frac{AB}{2}$
- B. là một đường tròn có bán kính là $\frac{BC}{3}$
- C. là một đường thẳng qua A và song song với BC
- D. là một điểm

Câu 120. Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức:

$$2\overrightarrow{MA} - (1+k)\overrightarrow{MB} - 3k\overrightarrow{MC} = \vec{0}, k \text{ là giá trị thay đổi trên } \mathbb{R}.$$

- A. Tập hợp điểm M là một đoạn thẳng.
- B. Tập hợp điểm M là một đường tròn.
- C. Tập hợp điểm M là một đường thẳng.
- D. Tập hợp điểm M là một nửa đường tròn.

Bài 5. TÍNH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa

Cho số thực $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vector $\vec{a}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một số với một vector gọi là phép nhân số với vector.

Ví dụ 1. Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC .

Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{CA} = k\vec{CB}$

b) $\vec{CA} = k\vec{AB}$

Giải

a) Ta có: $\vec{CA}, \vec{CB}$ là hai vector cùng hướng và $|\vec{CA}| = 2|\vec{CB}|$

Suy ra $\vec{CA} = 2\vec{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\vec{CA}, \vec{AB}$ là hai vector ngược hướng và $|\vec{CA}| = 2|\vec{AB}|$.

Suy ra $\vec{CA} = -2\vec{AB}$. Vậy $k = -2$.

Ví dụ 2. Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là $9m/s$ và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là $6m/s$. Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là các vector vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thỏa mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

Giải

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướng nên

hai vector vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = -\frac{3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k = -\frac{3}{2}$.

II. Tính chất

Với hai vector bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k , ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B, C . Chứng minh:

a) $2\vec{AB} + 2\vec{BC} = 2\vec{AC}$

b) $3(5\vec{AC}) + \vec{CB} - 14\vec{AC} = \vec{AB}$

Giải

a) Ta có: $2\vec{AB} + 2\vec{BC} = 2(\vec{AB} + \vec{BC}) = 2\vec{AC}$.

b) Ta có: $3(5\vec{AC}) + \vec{CB} - 14\vec{AC} = 15\vec{AC} + \vec{CB} - 14\vec{AC}$
 $= 15\vec{AC} - 14\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$.

III. Một số ứng dụng

1. Trung điểm đoạn thẳng

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

2. Trọng tâm của tam giác

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Giải

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$.

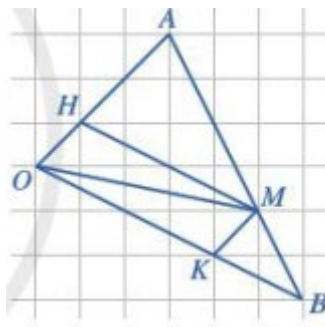
Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = 2\vec{0} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để hai vector cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Điều kiện cần và đủ để hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác OAB . Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Kẻ $MH \parallel OB, MK \parallel OA$



Giả sử $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giải

a) Ta có: $MK \parallel OA, MH \parallel OB$ suy ra

$$\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}, \frac{OH}{OA} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH = \frac{1}{3}OA$ nên $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK = \frac{2}{3}OB$ nên $\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}$.

b) Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Nhận xét: Trong mặt phẳng, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vector $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. DỰNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VEC – TƠ

Câu 1. Cho tam giác ABC cạnh a . Gọi điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC, CA . Dựng các vec – tơ sau và tính độ dài của chúng

a) $\overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

d) $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

Lời giải.

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NM}$$

$$\Rightarrow \left| \overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \right| = MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$$

b) Theo quy tắc trừ ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AM}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{MN} \right| = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua C, Điểm E là đỉnh của hình bình hành ABEF,

Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$$

Gọi I là hình chiếu của E lên AC.

$$\text{Vì } AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{EIF} = \widehat{CAB} = 60^\circ$$

$$\sin \widehat{IFE} = \frac{IE}{EF} \Rightarrow IE = EF \sin \widehat{IFE} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{IFE} = \frac{IE}{EF} \Rightarrow IE = EF \cos \widehat{IFE} = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

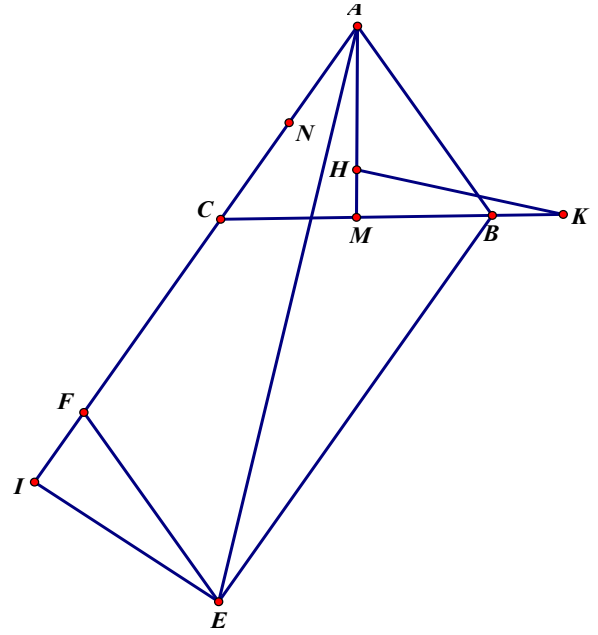
$$\text{Áp dụng định lí Pitago ta có: } AE = \sqrt{AI^2 + IE^2} = \sqrt{\left(2a + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{28}}{2}$$

$$\text{Suy ra } \left| \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = AE = \frac{a\sqrt{28}}{2}$$

$$\text{d) Lấy Lấy các điểm } H, K \text{ sao cho } \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH}; \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KH}$$

$$\text{Do đó } \left| \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} \right| = KH = \sqrt{\left(\frac{AM}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}MB\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{8}$$



Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Điểm M là trung điểm BC . Dựng các véc-tơ sau và tính độ dài của chúng

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}$. b) $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{MB}$

Lời giải.

a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}$ nên theo quy tắc ba điểm, ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}$$

Vậy $\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} \right| = CA = a$

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ,

$$\text{ta có } \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$$

Theo định lí Pitago ta có

$$MA = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $\left| \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right| = MA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và AQP N là hình bình hành.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}$, $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A lên P N. Vì MN // AC nên $\widehat{ANL} = \widehat{MNB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin ANL = \frac{AL}{AN} \Rightarrow AL = AN \sin ANL = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$\cos ANL = \frac{NL}{AN} \Rightarrow NL = AN \cos ANL = \frac{a}{2} \cos 60^\circ = \frac{a}{4}$$

Ta lại có $AQ = PN \Rightarrow PL = PN + NL = 2a + \frac{a}{4} = \frac{9a}{4}$

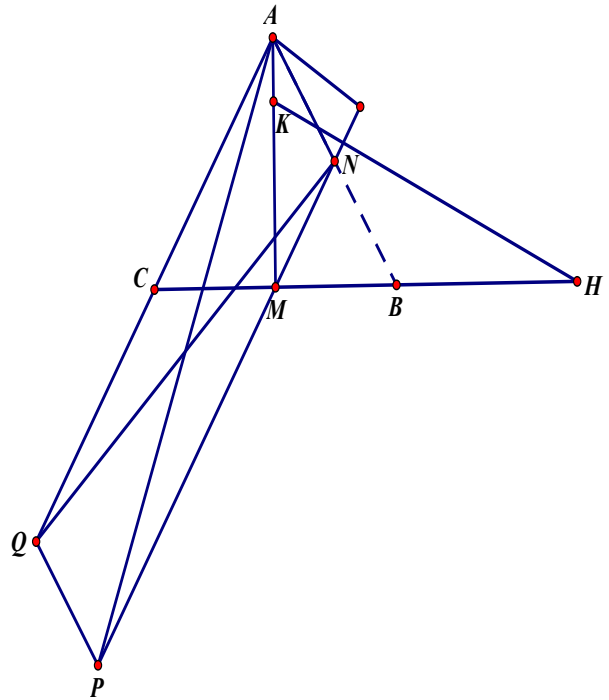
Tam giác ALP có $AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$

Vậy $\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK = \frac{3}{4}MA$. Gọi H là điểm thuộc tia MB sao cho $MH = \frac{5}{2}MB$.

Khi đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK}$; $\frac{5}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}$. Suy ra $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HK}$

Ta có $MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$, $MH = \frac{5}{2}MB = \frac{5a}{4}$



Tam giác MKH có $KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{16} + \frac{27a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$.

Vậy $\left| \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{MB} \right| = KH = \frac{a\sqrt{127}}{8}$

Câu 3. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Dụng và tính độ dài các véc-tơ $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$; $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải.

Vẽ điểm C, D sao cho $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OB}$, vẽ hình bình hành CODE thì

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow \left| 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} \right| = OE = 5a$$

Vẽ điểm H, K sao cho $\overrightarrow{OH} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$ thì

$$\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{KH} \text{ và } \left| \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} \right| = KH = \sqrt{\left(\frac{11}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{7}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6037}}{28}a$$

DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

Sử dụng các tính chất phép toán véc-tơ, ba quy tắc phép toán véc-tơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

Câu 4. Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC .

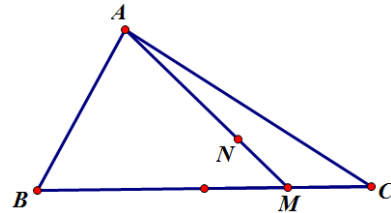
- a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$
 b) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{GC}; \overrightarrow{MN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải.

a) Theo giả thiết $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}.$$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{MN} &= -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}) \\ &= -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}.\end{aligned}$$

Câu 5. Cho ΔABC . Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

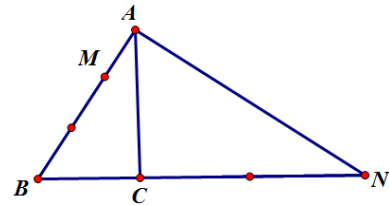
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Câu 6. Cho ΔABC . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}.$$

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$.



Lời giải.

a) Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên M thuộc cạnh AB và $AM = \frac{1}{3}AB$.

Vì $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$ nên N thuộc tia BC và $CN = 2BC$.

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}.$$

$$\text{Và } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}.$$

Tương tự $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$.

Câu 7. Cho ΔABC . Gọi I, J là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng IJ qua trọng tâm G của tam giác ΔABC

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{IG} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\overrightarrow{IJ} = \frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$. Suy ra IJ qua trọng tâm G của tam giác ΔABC .

Câu 8. Cho ΔABC có trung tuyến AM , M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm của CD . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Do hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Do E là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Câu 10. Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$.

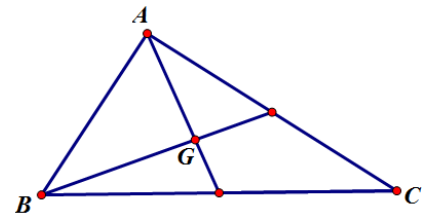
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \vec{b} - \vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.

Và $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \vec{a} - (-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$.



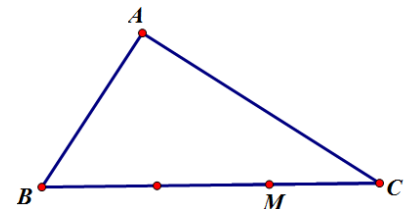
Câu 11. Cho ΔABC . Điểm M trên cạnh BC sao cho

$MB = 2MC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



Câu 12. Cho ΔABC . Điểm M trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm MN . Phân tích vec tơ $\overrightarrow{AK}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 13. Cho tam giác OAB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh OA, OB . Tìm các số m, n của mỗi đẳng thức $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 0\overrightarrow{OB}$, nên $m = \frac{1}{2}$, $n = 0$.

Và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, nên $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OB}$, nên $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$.

Câu 14. Một đường thẳng cắt cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M . Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ ($m, n > 0$). Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m, n .

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM}$ thì $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$.

Do đó $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - m\overrightarrow{DA} = (x - m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$.

Và $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{DA} + (x - n)\overrightarrow{DC}$.

Ta có $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Leftrightarrow (x - m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} = xy\overrightarrow{DA} + y(x - n)\overrightarrow{DC}$.

Do $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên $\begin{cases} x - m = xy \\ x = y(x - n) = xy - yn \end{cases}$.

Giải hệ trên ta được $y = -\frac{m}{n}$ và $x = \frac{mn}{m + n}$.

Vậy $\overrightarrow{DM} = \frac{mn}{m + n}\overrightarrow{DB}$.

Câu 15. Điểm M được gọi là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (1 - k)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}$.

Vì $k \neq 1$ nên $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$.

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

Sử dụng kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng.

- Các tính chất phép toán véc-tơ

- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ.

- Tính chất trung điểm

o M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

o M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ (với O là điểm tùy ý).

- Tính chất trọng tâm

o G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

o G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (với O là điểm tùy ý).

Câu 16. Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh với điểm O bất kỳ ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Câu 17. Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

a) Tìm số k mà $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh với mọi điểm M thì có $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

$$\text{a) } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Vậy } k = \frac{3}{5}.$$

$$\text{b) } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) + 3(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MI} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}.$$

Câu 18. Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

$$\text{c) } \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}.$$

Lời giải

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông. Nếu tam giác ABC không vuông, gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó:

BH // DC (vì cùng vuông góc với AC);

BD // CH (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra BDCH là hình bình hành, theo quy tắc hình bình hành thì

$$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}. \quad (1)$$

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}. \quad (2)$$

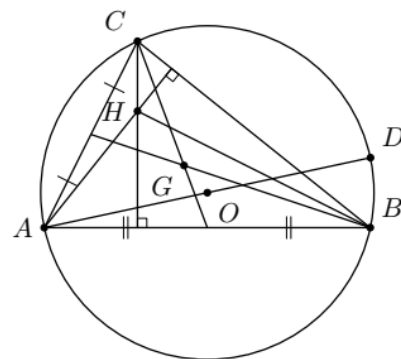
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \text{ (đpcm).}$$



c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Suy ra $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH}) - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$ (đpcm).

Câu 19. Cho tam giác ABC . Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với M là trung điểm của BC .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh

a) Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) Nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm G .

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

b) Áp dụng câu a) ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv G$$

Câu 21. Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP . Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Lời giải

Cách 1

Vì M, N, P là trung điểm 3 cạnh nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Cách 2

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$$

Câu 22. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$. Chứng minh rằng các điểm D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

b) Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Vậy D là đỉnh của hình bình hành $BACD$, không phụ thuộc vào vị trí của M . Tương tự E và F lần lượt là các đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCE$ và $BCAF$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}).$$

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

Câu 23. Cho tam giác ABC với cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$.

a) Gọi CM là đường phân giác trong của góc C . Hãy biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{CM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

a) Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{AM}{BM} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$ suy ra $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{MB}$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a}\overrightarrow{CB}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}.$$

b) Cách 1

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của tam giác ACM . Bởi vậy theo câu a) ta có thể biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \frac{AC}{AC+AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AM}{AC+AM}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{b+\frac{bc}{a+b}} \cdot \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{bc}{a+b}}{b+\frac{bc}{a+b}}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{a+b+c}(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) + \frac{c}{a+b+c}(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \left(1 - \frac{b+c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{IA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Cách 2

$$\text{Ta có } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{IB}.$$

Qua đỉnh C , vẽ 2 đường thẳng song song với 2 phân giác AI, BI tạo thành hình bình hành $CA'IB'$. Sử dụng quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$ và dùng tính chất đường phân giác để suy ra kết quả.

Câu 24. Cho tam giác ABC đều, tâm O . Gọi M là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC và D, E, F lần lượt là hình chiếu của nó trên các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải

Qua M dựng các đoạn $A_1B_2 \parallel AB$; $B_1C_2 \parallel BC$; $C_1A_2 \parallel CA$ với $A_1, A_2 \in AC$; $B_1, B_2 \in BC$; $C_1, C_2 \in AB$.

Các tam giác $MA_1A_2, MB_1B_2, MC_1C_2$ là những tam giác đều và E, D, F là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 .

Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2} \left[(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}) + (\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}) + (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2}) + (\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MA_2}) + (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MB_2}) \right] = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \\
&= \frac{3}{2} \overrightarrow{MO} \text{ (Vì O là trọng tâm của tam giác đều ABC).}
\end{aligned}$$

Câu 25. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của IJ .

Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.

Lời giải

a) Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$ (đpcm).

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$.

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \vec{0}$ (đpcm).

c) Theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Do đó với mọi điểm M thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} \text{ (đpcm).}$$

Câu 26. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh

với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của tứ giác $ABCD$

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM} \text{ và } \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}$$

Vậy G là trung điểm của đoạn MN

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 2.2\overrightarrow{OG} = 4\overrightarrow{OG}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh

a) Với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

b) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

Lời giải.

$$\text{a) Vì O là trung điểm của AC, BD nên } \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$$

$$\text{b) Vì ABCD là hình bình hành nên } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}$$

Câu 28. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Lời giải.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\text{Vậy } 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \text{ (vì M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD)}$$

Dạng 4. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức véc tơ

* Ta biến đổi đẳng thức véc – tơ về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một véc – tơ bằng véc – tơ $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn véc – tơ này chính là điểm M

* Ta biến đổi về đẳng thức véc – tơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Câu 29. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Vậy I là điểm thuộc đoạn AB mà } AI = \frac{3}{4}AB$$

Câu 30. Xác định các điểm I, J, K, L biết

$$\text{a) } \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \text{b) } \overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

$$\text{c) } \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC} \quad \text{d) } 2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IB}$$

Vậy I là điểm đối xứng của A qua B

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{c) Ta có } \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{BK} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{d) Ta có } 2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = 2\overrightarrow{LA} - (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC}) = 4\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\text{nên } 2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Câu 31. Cho tam giác ABC

$$\text{a) Tìm điểm K sao cho } \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\text{b) Tìm điểm M sao cho } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Vậy K là trọng tâm của tam giác ABC

b) Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (I là trung điểm của AB)

Vậy M là trung điểm của BC

Câu 32. Cho tứ giác ABCD. Xác định điểm M, N, P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

c) $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

Lời giải.

a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

Do đó

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}.$$

Suy ra M là trung điểm AI với I là trung điểm BC

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK} + 2\overrightarrow{NH} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NH} = \vec{0}$$

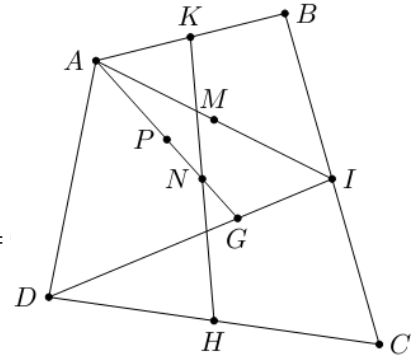
Vậy N là trung điểm của KH

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, khi đó ta có

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{PG}$$

$$\text{Suy ra } 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} = \vec{0}$$

Vậy P là trung điểm AG



DẠNG 4. CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC VEC – TỜ KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO ĐIỂM DI ĐỘNG

Câu 33. Cho tam giác ABC

a) Với M là điểm bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. CD cắt AB tại K. Chứng minh $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CK}$

Lời giải.

a) Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

$$= (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) + 2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) - 3\overrightarrow{MC}$$

$$= \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} \text{ (không đổi vì A, B, C cố định)}$$

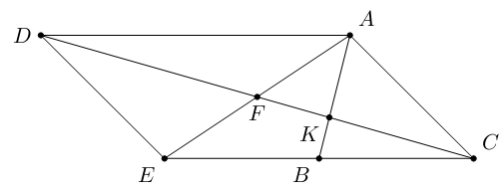
Do đó $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Gọi E là điểm đối xứng của C qua B, ta có $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CB}$

Với $\overrightarrow{CD} = \vec{v} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$ nên ACED là hình bình hành

Gọi F là trung điểm của AE, K là trọng tâm của $\triangle ACE$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CK}$$



Câu 34. Cho tam giác ABC cố định và điểm M di động. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

$$\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) + 4(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) - 5\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CB}$$

Vì A, B, C cố định nên $\vec{v}$ không đổi

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Câu 35. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Đặt điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CO}$$

(Với O là trung điểm của AB)

Vậy $\vec{v} = 2\overrightarrow{CO}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Vì $\overrightarrow{CD} = \vec{v} = 2\overrightarrow{CO}$ nên D là điểm đối xứng của C qua O

Câu 36. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

$$\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Câu 37. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} \Rightarrow \vec{v} = -2\overrightarrow{OA}$$

Suy ra $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

DẠNG 5. CHỨNG MINH HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI TAM GIÁC CÓ CÙNG TRỌNG TÂM

Để chứng minh hai điểm A_1, A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau

Cách 1. Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$

Cách 2. Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tùy ý

Để chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm ta làm như sau

Cách 1. Chứng minh G là trọng tâm $\triangle ABC$ trùng với G' là trọng tâm $\triangle A'B'C'$

Cách 2. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ (tức là có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$) ta đi chứng minh $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

Câu 38. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}; \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \vec{0} \text{ hay I trùng với J}$$

Câu 39. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C} + 2012\overrightarrow{B'A} = \vec{0}$; $2011\overrightarrow{C'A} + 2012\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Ta có $2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0} \Leftrightarrow 2011(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) + 2012(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4023\overrightarrow{A'A} + 2011\overrightarrow{AB} + 2012\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Tương tự ta có $4023\overrightarrow{B'B} + 2011\overrightarrow{BC} + 2012\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$$4023\overrightarrow{C'C} + 2011\overrightarrow{CA} + 2012\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Cộng vế với vế lại ta được

$$4023(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Do đó G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$

Câu 40. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt có trọng tâm là G, G' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra “Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ ”

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} \quad (1)$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \quad (3)$$

Cộng vế với vế ta được

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'}$$

Vì G, G' là trọng tâm của tam giác $ABC, A'B'C'$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0} \\ \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} = \vec{0} \end{cases}$

Từ đẳng thức trên ta thấy G trùng G' khi và chỉ khi $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ tức là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Câu 41. Cho tam giác ABC . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B , B' là điểm đối xứng với B qua C và C' là điểm đối xứng với C qua A . Chứng minh rằng các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$

Vậy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Câu 42. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử $\frac{AM}{AB} = k$ suy ra $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CA}$.

Cách 1. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$.

Suy ra $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{NG'} + \overrightarrow{PG'} = \vec{0} \quad (*)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M} = k\overrightarrow{AB}$.

Tương tự $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N} = k\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P} = k\overrightarrow{CA}$.

Cộng vế theo vế từng đẳng thức trên ta được

$$(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{G'M} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'P}) = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}).$$

Kết hợp với (*) ta được $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Gọi G là trọng tâm của ΔABC suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}\end{aligned}$$

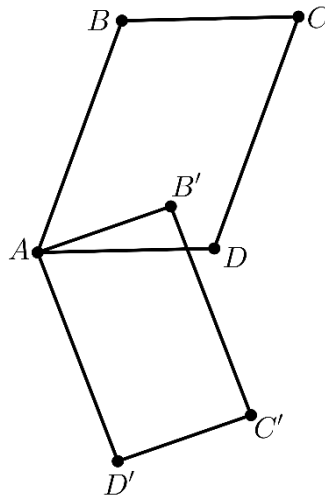
Ta có

$$\begin{aligned}&= k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} \\ &= k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Vậy hai tam giác ABC và NMP có cùng trọng tâm.

Câu 43. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A . Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác $BC'D$ suy ra

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}. \quad (1)$$

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'}) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) - \overrightarrow{AC'} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC'} \\ &= \vec{0} \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$ hay G là trọng tâm tam giác $B'CD'$

Câu 44. Cho tứ giác $ABCD$ có trọng tâm G . Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác $\Delta ABC, \Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB$. Chứng minh rằng G cùng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$

Lời giải

Ta cần chứng minh

$$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_4} = \vec{0}. \quad (*)$$

Vì G_1 là trọng tâm ΔABC nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_1}.$$

Tương tự

$$\begin{cases} \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_2} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GG_3} \\ \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GG_4}. \end{cases}$$

Do đó

$$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$

Câu 45. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA . Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ANP .

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP}) + (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{AC} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Vậy G cũng là trọng tâm của tam giác CMQ .

Câu 46. Cho điểm G là trọng tâm tứ giác $ABCD$ và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC .

- Chứng minh rằng G là điểm chung của các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD' .
- Điểm G chia các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD' theo các tỉ số nào?
- Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

Lời giải

a. Vì G là trọng tâm tứ giác $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Mà A' là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GA'}$

Do đó $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'}$ nên G, A và A' thẳng hàng

Chứng minh tương tự

$$\overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC} = -3\overrightarrow{GC'}, \overrightarrow{GD} = -3\overrightarrow{GD'}$$

Nên G, B, B' thẳng hàng; G, C, C' thẳng hàng; G, D, D' thẳng hàng.

Vậy G là điểm chung của bốn đoạn AA', BB', CC' và DD' .

b. Từ kết quả trên ta có điểm G chia các đoạn AA', BB', CC' và DD' theo tỉ số $k = -3$.

c. Ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -3(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'}) = \vec{0}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}.$$

Vậy G cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

Câu 47. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA . Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$

Do đó hai tam giác MPR và NQS cùng trọng tâm.

DẠNG 6: THẲNG HÀNG, CỐ ĐỊNH, ĐỒNG QUI

- Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

- Hai đường thẳng AB và MN song song khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$ và điểm A không thuộc đường thẳng MN

Chú ý: Việc chọn cơ sở để biểu diễn là 2 véc-tơ cùng gốc và không cùng phương

Câu 48. Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$. Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB ?

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow M \in d$$

Vì $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA}$ nên M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $0 \leq \alpha \leq 1$

Câu 49. Cho tam giác ABC . Điểm I trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}CA$, J là điểm mà

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ b) Chứng minh B, I, J thẳng hàng

Lời giải

$$\text{a) } \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Vậy $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$. Suy ra ba điểm B, I, J thẳng hàng

Câu 50. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O , H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O .

a) Chứng minh tứ giác $HCDB$ là hình bình hành

b) Chứng minh $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. Suy ra ba điểm O, H, G thẳng hàng (G là trọng tâm tam giác ABC)

Lời giải

a) Vì AD là đường kính của đường tròn tâm O nên

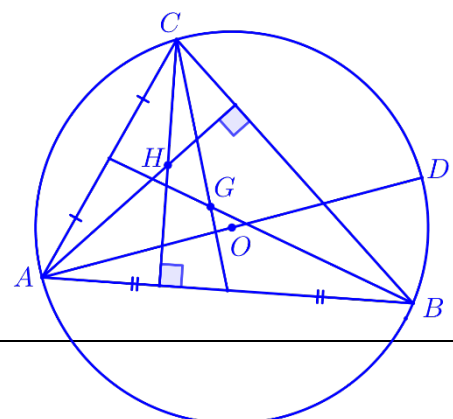
$BD \perp AB$, $DC \perp AC$. Ta có:

$$\begin{cases} CH \perp AB \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CH \parallel BD \\ BH \parallel DC \end{cases}$$

Vậy tứ giác $HCDB$ là hình bình hành.

b) Vì $HCDB$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$

Do đó, $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$



Theo quy tắc ba điểm:

$$\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Câu 51. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\ &= \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \vec{u} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \\ &= \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}\end{aligned}$$

Và

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}) = \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$$

$$\text{Do đó } 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \text{ nên } \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$$

Vậy ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 52. Cho tam giác ABC . Dựng $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$. Chứng minh các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$ nên tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow A \text{ là trung điểm của } B'C'$$

Vì tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành nên CC' chứa trung tuyến của tam giác ABC xuất phát từ đỉnh C .

Tương tự với AA', BB' , do đó AA', BB', CC' đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC .

Câu 53. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA . Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua trung điểm I, K, J của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng

a) Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy

b) Đường thẳng MM_1 luôn đi qua một điểm cố định khi M di động

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{KJ} \text{ và } \overrightarrow{B'A'} = 2\overrightarrow{KJ} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$$

Vậy $ABB'A'$ là hình bình hành, nên AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng.

Tương tự, BB' và CC' cũng cắt nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng.

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} \text{ và } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MM_1}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MG}$ (G là trọng tâm ΔABC) hay $\overrightarrow{MM_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$

Nên M, M_1, G thẳng hàng. Vậy đường thẳng MM_1 luôn đi qua điểm G cố định khi M di động.

Câu 54. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC, CA sao cho $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB} = n\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PC} = p\overrightarrow{PA}$ (m, n, p đều khác 1). Chứng minh rằng:

- a) M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (định lý Mê-nê-la-uyt)
b) AN, CM, BP đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $mnp = -1$ (định lý Xê-va)

Lời giải

a) Ta chọn gốc C . Theo giả thiết thì có

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} - m\overrightarrow{CB}}{1-m}; \quad \overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{1-n}; \quad \overrightarrow{CP} = \frac{-p\overrightarrow{CA}}{1-p}.$$

Nên

$$\overrightarrow{CB} = (1-n)\overrightarrow{CN}; \quad \overrightarrow{CA} = \frac{p-1}{p}\overrightarrow{CP}$$

Do đó

$$\overrightarrow{CM} = \frac{p-1}{p(1-m)}\overrightarrow{CP} - \frac{m(1-n)}{1-m}\overrightarrow{CN}.$$

Điều kiện cần và đủ để ba điểm M, N, P thẳng hàng là

$$\frac{p-1}{p(1-m)} - \frac{m(1-n)}{1-m} = 1 \Leftrightarrow p-1 - pm(1-n) = p(1-m) \Leftrightarrow mnp = 1.$$

b) Ta chuyển về điều kiện thẳng hàng ở trên và điều kiện cùng phương.

Câu 55. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$\text{hay } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{nên } \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$$

Do đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

mà M không thuộc đường thẳng AC nên $MN \parallel AC$.

Câu 56. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP & NQ . Chứng minh $IJ \parallel AE$ & $IJ = \frac{1}{4}AE$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$$

$$\text{Vậy: } IJ \parallel AE \text{ và } IJ = \frac{1}{4}AE$$

Câu 57. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy các điểm tương ứng $C_1; A_1; B_1$ sao cho $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \frac{1}{k}$. Trên các cạnh $A_1B_1; B_1C_1; C_1A_1$ của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm tương ứng $C_2; A_2; B_2$ sao cho $A_1C_2 : C_2B_1 = B_1A_2 : A_2C_1 = C_1B_2 : B_2A_1 = k$. Chứng minh rằng: $A_2C_2 \parallel AC; C_2B_2 \parallel CB; B_2A_2 \parallel BA$.

Lời giải

Lấy điểm O bất kì làm gốc, đặt:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c} \\ \overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1, \overrightarrow{OB_1} = \vec{b}_1, \overrightarrow{OC_1} = \vec{c}_1 \\ \overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2, \overrightarrow{OB_2} = \vec{b}_2, \overrightarrow{OC_2} = \vec{c}_2 \end{cases}$$

Theo giả thiết, ta có ($k > 0$):
$$\begin{cases} \vec{c}_1 = \frac{\vec{b} + k\vec{a}}{1+k}, \vec{a}_1 = \frac{\vec{c} + k\vec{b}}{1+k}, \vec{b}_1 = \frac{\vec{a} + k\vec{c}}{1+k} \\ \vec{a}_2 = \frac{\vec{b}_1 + k\vec{c}_1}{1+k}, \vec{b}_2 = \frac{\vec{c}_1 + k\vec{a}_1}{1+k}, \vec{c}_2 = \frac{\vec{a}_1 + k\vec{b}_1}{1+k} \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_2C_2} &= \vec{c}_2 - \vec{a}_2 = \frac{1}{1+k} [(\vec{a}_1 + k\vec{b}_1) - (\vec{b}_1 + k\vec{c}_1)] \\ &= \frac{1}{k+1} [\vec{a}_1 + (k-1)\vec{b}_1 - k\vec{c}_1] \\ &= \frac{1}{(k+1)^2} [\vec{c} + k\vec{b} + (k-1)\vec{a} + k(k-1)\vec{c} - k\vec{b} - k^2\vec{a}] \\ &= \frac{1}{(k+1)^2} [(k^2 - k + 1)\vec{c} - (k^2 - k + 1)\vec{a}] \\ &= \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2} (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Vì $k^2 - k + 1 > 0$ nên $A_2C_2 \parallel AC$.

Chứng minh tương tự ta được $C_2B_2 \parallel CB; B_2A_2 \parallel BA$.

Câu 58. Cho ba dây cung song song $AA_1; BB_1; CC_1$ của đường tròn (O) . Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $ABC_1; BCA_1$ & CAB_1 nằm trên một đường tròn.

Lời giải

Gọi $H_1; H_2; H_3$ lần lượt là trực tâm của ba tam giác $ABC_1; BCA_1; CAB_1$. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} \\ \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1} \\ \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{AA_1} \\ \overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{BB_1} \end{cases}$$

Vì các dây cung $AA_1; BB_1; CC_1$ song song với nhau nên ba vectơ $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ cùng phương. Do đó hai vectơ $\overrightarrow{H_1H_2}; \overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương, hay ba điểm $H_1; H_2; H_3$ thẳng hàng.

DẠNG 7. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC VEC TƠ.

Để tìm tập hợp điểm M thoả mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau:

- Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB .
- Nếu $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C , bán kính bằng $k|\overrightarrow{AB}|$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì:
 - + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in \mathbb{R}$.
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$.
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, $B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC .

Câu 59. Cho điểm O cố định và hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cố định. Với mỗi số m ta xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= m\vec{u} + (1-m)\vec{v} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} &= m(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} &= m\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng BC .

Câu 60. Cho hai điểm A, B . Tập hợp các điểm M sao cho

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. b) $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$

Lời giải

a) Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 2MI = AB \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$ (với I là trung điểm của AB).

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{2}$, với I là trung điểm AB .

b) Gọi K là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$; L là điểm thoả mãn $\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

Ta có: $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{ML}$

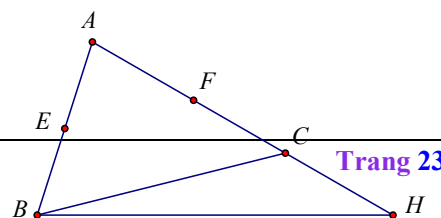
Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn KL .

Câu 61. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$, với k là số thực thay đổi khác 0.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB, AC suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{ME}| = |2\overrightarrow{MF}| \Leftrightarrow ME = MF.$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực EF .

a) Ta có

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HB} \text{ (với H}$$

là điểm thỏa mãn, $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$)

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} = 2k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{HB}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB .

Câu 62. Cho tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm I thỏa $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm thỏa mãn $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

a) Ta có $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$$

suy ra I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a), ta có

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI}$$

$$\text{và } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \text{ nên } |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \Leftrightarrow |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}.$$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$.

Câu 63. Cho $\triangle ABC$. Tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|. \text{ b) } |4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

Lời giải

a) Gọi K là điểm thỏa $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$, L là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có: } |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MK}| = |\overrightarrow{ML}|.$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn KL .

b) Với I là trung điểm BC . Gọi J là điểm thỏa $4\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Ta có:

$$|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |6\overrightarrow{MJ}| = |2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow |6\overrightarrow{MJ}| = |2\overrightarrow{IA}| \Leftrightarrow MJ = \frac{1}{3}IA.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính $R = \frac{1}{3}IA$.

Câu 64. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M trong mỗi trường hợp sau:

$$\text{a) } \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \text{ b) } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \text{ c) } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|.$$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow B \equiv A$ trái với giả thiết.

Vậy không có điểm M thỏa mãn.

b) Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC .

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}; \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Nên } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ$$

Như vậy M cách đều 2 điểm cố định I, J nên tập hợp các điểm M thỏa điều kiện đề Câu là đường trung trực của IJ .

Câu 65. Cho tam giác ABC và ba vecto cố định $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Với mỗi số thực t , ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}, \overrightarrow{BB'} = t\vec{v}, \overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ khi t thay đổi.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = t\vec{u} + t\vec{v} + t\vec{w} \\ &= t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \end{aligned}$$

Đặt $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ thì vecto α xác định và $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}t\vec{\alpha}$

Suy ra nếu $\vec{\alpha} = \vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G , còn nếu $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vecto $\vec{\alpha}$.

Câu 66. Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN khi k thay đổi.

Lời giải

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC , ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}; \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OO'}$$

$$\text{Tương tự vì } O, I \text{ lần lượt là trung điểm của } AD \text{ \& } MN \text{ nên } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{OI}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}. \text{ Vậy khi } k \text{ thay đổi, tập hợp điểm } I \text{ là đường thẳng } OO'.$$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. DÙNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VEC – TƠ

Câu 1. Khẳng định nào **sai**?

A. $1.\vec{a} = \vec{a}$

B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$

C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$

D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

Lời giải

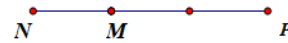
Chọn C

(Dựa vào định nghĩa tích của một số với một vectơ)

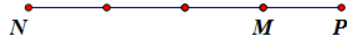
Câu 2. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



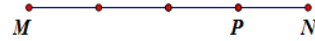
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3 B. Hình 4 C. Hình 1 D. Hình 2

Lời giải

Chọn A

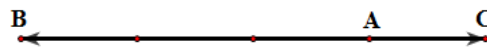
$$\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \text{ ngược hướng với } \overrightarrow{MP} \text{ và } |\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{MP}|.$$

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$ C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

Lời giải

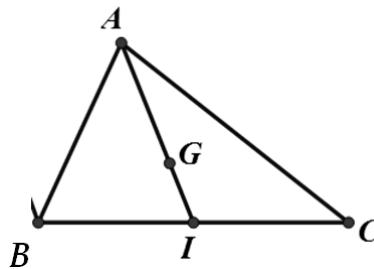
Chọn D



Câu 4. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ B. $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$ C. $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$ D. $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

Lời giải



Chọn A

Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vector $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$ C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$ D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn B

Câu 6. Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$ B. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$ C. $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$ D. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -4\vec{a} - 3\vec{a} = -7\vec{a}.$$

Câu 7. Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

- A. $m = 3$ B. $m = -\frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = -3$

Lời giải

Chọn B

Do $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng nên $m = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm của BC
B. M là trung điểm của IC
C. M là trung điểm của IA
D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$

Lời giải

Chọn B

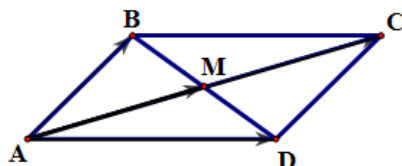
$$\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MI} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } IC.$$

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC}$. Khi đó điểm M là:

- A. Trung điểm của AC B. Điểm C
C. Trung điểm của AB D. Trung điểm của AD

Lời giải

Chọn A



Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

Câu 10. Cho đoạn thẳng AB . Gọi M là một điểm trên AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\vec{MA} = \frac{1}{3}\vec{MB}$. B. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$. C. $\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BA}$. D. $\vec{MB} = -3\vec{MA}$.

Câu 11. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\vec{AM} = \frac{1}{5}\vec{AB}$ B. $\vec{MA} = -\frac{1}{4}\vec{MB}$ C. $\vec{MB} = -4\vec{MA}$ D. $\vec{MB} = -\frac{4}{5}\vec{AB}$

Lời giải

Chọn D



Ta thấy $\vec{MB}$ và $\vec{AB}$ cùng hướng nên $\vec{MB} = -\frac{4}{5}\vec{AB}$ là sai.

Câu 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

- A. $AB = AC$ B. $\exists k \neq 0: \vec{AB} = k\vec{AC}$ C. $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ D. $\vec{MA} + \vec{MB} = 3\vec{MC}, \forall$ điểm M

Lời giải

Chọn B

Câu 13. Cho ΔABC . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vector nào sau đây cùng phương?

- A. $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$ B. $\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ C. $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$ D. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2.(5\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow 5\vec{a} + \vec{b}$ và $-10\vec{a} - 2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 14. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vector nào sau đây cùng phương?

- A. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$ B. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $2\vec{a} + \vec{b}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Câu 15. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vector nào sau đây là cùng phương?

- A. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ B. $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$
C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$ D. $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

Lời giải

Chọn D

Câu 16. Biết rằng hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

- A. -7 B. 7 C. 5 D. 6

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để hai vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương là: $\frac{x+1}{3} = \frac{4}{-2} \Leftrightarrow x = -7$.

Câu 17. Biết rằng hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vector $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

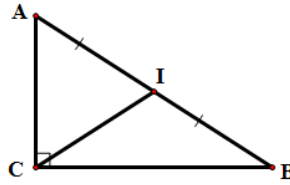
Chọn C

Câu 18. Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác ABC đều B. Tam giác ABC cân tại C
C. Tam giác ABC vuông tại C D. Tam giác ABC cân tại B

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AB . Ta có:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = AB \\ \Leftrightarrow |2\overrightarrow{CI}| &= AB \Leftrightarrow 2CI = AB \Leftrightarrow CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } C. \end{aligned}$$

Câu 19. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

A. $\frac{a\sqrt{140}}{4}$

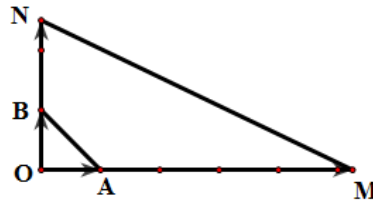
B. $\frac{a\sqrt{321}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{520}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

Lời giải

Chọn D



Dựng điểm M, N sao cho: $\overrightarrow{OM} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$. Khi đó:

$$|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{541}}{4}.$$

Câu 20. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

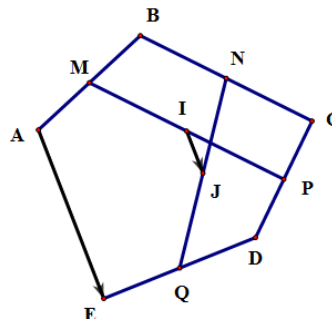
B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ} \\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}), \overrightarrow{PN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

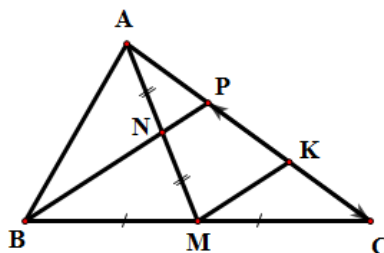
$$\text{Suy ra: } 2\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Câu 21. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P . Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn C



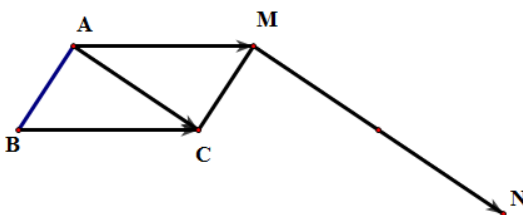
Kẻ $MK \parallel BP (K \in AC)$. Do M là trung điểm của BC nên suy ra K là trung điểm của CP . Vì $MK \parallel BP \Rightarrow MK \parallel NP$ mà N là trung điểm của AM nên suy ra P là trung điểm của AK . Do đó: $AP = PK = KC$. Vậy $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CP} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $MN \perp AC$ B. $MN \parallel AC$
C. M nằm trên đường thẳng AC D. Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow M$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ nên $M \notin AC$ (1)

Cộng vế theo vế hai đẳng thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, ta được:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AC} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel AC$.

Câu 23. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Tính độ dài vector $\vec{v} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

- A. $2a$ B. $\frac{\sqrt{6073}}{28}a$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Lời giải

Biểu diễn vector $\vec{v}$ theo 2 vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

$$\text{Áp dụng Pitago ta có: } |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{11a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{6073}}{28}a.$$

Đáp án B.

Câu 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính độ dài vector: $\vec{u} = \vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - 2\vec{MD}$

- A. $|\vec{u}| = 4a\sqrt{2}$ B. $|\vec{u}| = a\sqrt{2}$ C. $|\vec{u}| = 3a\sqrt{2}$ D. $|\vec{u}| = 2a\sqrt{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= (\vec{MO} + \vec{OA}) - 2(\vec{MO} + \vec{OB}) + 3(\vec{MO} + \vec{OC}) - 2(\vec{MO} + \vec{OD}) \\ &= \vec{OA} - 2\vec{OB} + 3\vec{OC} - 2\vec{OD} = -2\vec{OA} \Rightarrow |\vec{u}| = 2OA = AC = a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Đáp án B.

Câu 25. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Tính độ dài vector $\vec{u} = \frac{21}{4}\vec{OA} + 2,5\vec{OB}$

- A. $\frac{\sqrt{541}}{4}a$ B. $\frac{\sqrt{520}}{4}a$ C. $\frac{\sqrt{140}}{4}a$ D. $\frac{\sqrt{310}}{4}a$

Lời giải

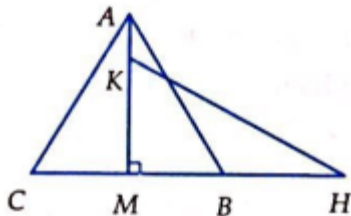
Đáp án A

Áp dụng Pitago: $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2 + (2,5a)^2} = \frac{\sqrt{541}}{4}a$

Câu 26. Cho tam giác đều ABC cạnh a điểm M là trung điểm của BC . Tính độ dài vector $\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{MA} - 2,5\vec{MB}$.

- A. $\frac{a\sqrt{127}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{127}}{8}$ C. $\frac{a\sqrt{127}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{127}}{2}$

Lời giải



Đáp án B

Gọi $K \in AM : MK = \frac{3}{4}MA$ $H \in MB : MH = 2,5MB$

Do đó: $\left| \frac{3}{4}\vec{MA} - 2,5\vec{MB} \right| = |\vec{MK} - \vec{MH}| = |\vec{HK}|$

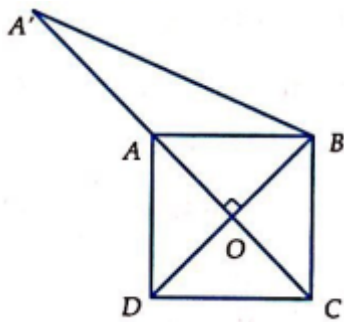
Ta có: $MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3\sqrt{3}a}{8}, MH = \frac{5a}{4} \Rightarrow KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$

Câu 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính độ dài vector $\vec{u} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MD}$.

- A. $|\vec{u}| = a\sqrt{5}$ B. $|\vec{u}| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ C. $|\vec{u}| = 3a\sqrt{5}$ D. $|\vec{u}| = 2a\sqrt{5}$

Lời giải

Đáp án A



$$\vec{u} = 4(\vec{MO} + \vec{OA}) - 3(\vec{MO} + \vec{OB}) + (\vec{MO} + \vec{OC}) - 2(\vec{MO} + \vec{OD}) = 3\vec{OA} - \vec{OB}$$

Trên OA lấy A' sao cho $OA' = 3OA \Rightarrow \vec{u} = \vec{OA'} - \vec{OB} \Rightarrow BA' = \sqrt{OB^2 + OA^2} = a\sqrt{5}$

Câu 28. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài vector $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x = \frac{4}{5}$

B. $x = \frac{5}{6}$

C. $x = \frac{6}{5}$

D. $x = \frac{5}{4}$

Lời giải

Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$

Kẻ $EF \perp BC, F \in BC \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{ME}| \geq EF$

Do đó: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất khi $M \equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC , Q là hình chiếu của B trên BC . Ta có $BP = \frac{3}{4}BE$

$$\triangle BPQ \sim \triangle BEF \Rightarrow \frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} \Rightarrow PQ$ là đường trung bình của $\triangle AHC \Rightarrow \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{HC} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC} \Rightarrow x = \frac{5}{6}.$$

Đáp án B.

Câu 29. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . M là trung điểm BC . Tính độ dài $\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right|$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Gọi N là trung điểm của AB , Q là điểm đối xứng với A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A trên PN .

$$MN \parallel AC \Rightarrow \widehat{ANL} = \widehat{MNB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$$

Xét tam giác vuông ANL có: $\sin \widehat{ANL} = \frac{AL}{AN}$

$$\Rightarrow AL = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow NL = AN \cdot \cos \widehat{ANL} = \frac{a}{4} \Rightarrow PL = PN + NL = \frac{9a}{4}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } APL \text{ có: } AP = \sqrt{AL^2 + PL^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$

DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

Câu 30. Cho AK và BM là hai trung tuyến của $\triangle ABC$. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{AB}$ theo hai vector $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$ B. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$ C. $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$ D. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BM})$

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BM} \text{ (vì } KM = \frac{1}{2}AB)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$$

Cách 2: Giả sử có cặp số m, n sao cho $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AK} + n\overrightarrow{BM}$, với $G = AK \cap BM$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{3}{2}m\overrightarrow{AG} - \frac{3}{2}n\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}m - 1\right)\overrightarrow{AG} = \left(-\frac{3}{2}n - 1\right)\overrightarrow{BG} \quad (*)$$

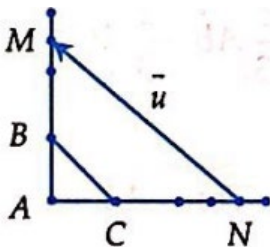
$$\text{Do } \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG} \text{ không cùng phương} \Rightarrow (*) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}m - 1 = 0 \\ -\frac{3}{2}n - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM}).$$

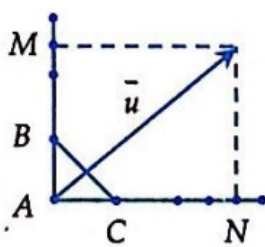
Đáp án A.

Câu 31. Cho $\triangle ABC$ vuông cân, $AB = AC$. Khi đó vector $\vec{u} = \frac{11}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

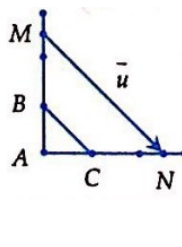
A.



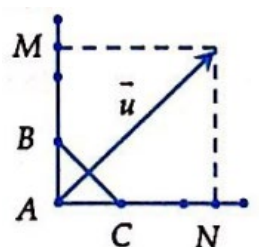
B.



C.



D.



Lời giải

$$\text{Theo hình vẽ } \overrightarrow{AM} = \frac{11}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \text{Chọn đáp án D.}$$

Đáp án D.

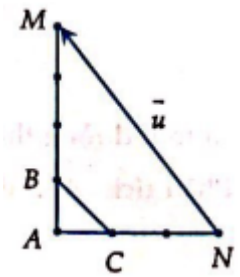
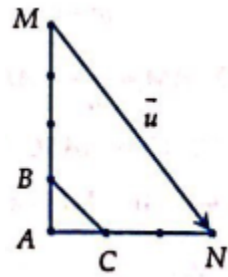
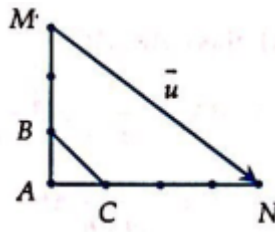
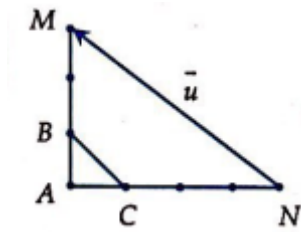
Câu 32. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , vector $\vec{u} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

A.

B.

C.

D.



Lời giải

Đáp án A

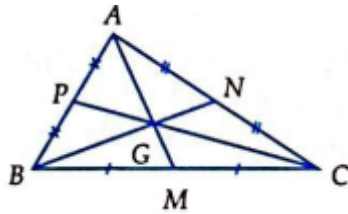
Câu 33. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Phân tích $\vec{AB}$ theo hai vector $\vec{BN}$ và $\vec{CP}$.

A. $\vec{AB} = \frac{4}{3}\vec{BN} - \frac{2}{3}\vec{CP}$ B. $\vec{AB} = -\frac{4}{3}\vec{BN} + \frac{2}{3}\vec{CP}$

C. $\vec{AB} = -\frac{4}{3}\vec{BN} - \frac{2}{3}\vec{CP}$ D. $\vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{BN} - \frac{4}{3}\vec{CP}$

Lời giải

Đáp án C



$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AM} + \vec{MB} = 3\vec{GM} + (\vec{GB} - \vec{GM}) = 2\vec{GM} + \vec{GB} \\ &= \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GB} = 2\vec{GB} + \vec{GC} = -\frac{4}{3}\vec{BN} - \frac{2}{3}\vec{CP}\end{aligned}$$

Câu 34. Cho $\triangle ABC$. Điểm M nằm trên đường thẳng BC sao cho $\vec{MB} = k\vec{MC}$ ($k \neq 1$). Phân tích $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.

A. $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + k\vec{AC}}{1-k}$ B. $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} - k\vec{AC}}{1+k}$ C. $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} - k\vec{AC}}{1-k}$ D. $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + k\vec{AC}}{1-k}$

Lời giải

Đáp án C

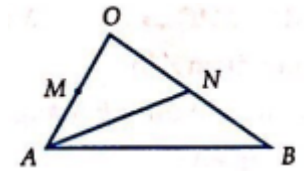
$$\vec{MB} = k\vec{MC} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AM} = k(\vec{AC} - \vec{AM}) \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{\vec{AB} - k\vec{AC}}{1-k}$$

Câu 35. Cho $\triangle OAB$ với M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB . Tìm số m, n thích hợp để $\vec{NA} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$.

A. $m = -1, n = \frac{1}{2}$ B. $m = 1, n = -\frac{1}{2}$ C. $m = 1, n = \frac{1}{2}$ D. $m = -1, n = -\frac{1}{2}$

Lời giải

Đáp án B



$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$ có E, N lần lượt là trung điểm của BC, AE . Tìm các số p và q sao cho $\overrightarrow{DN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$.

- A. $p = \frac{5}{4}; q = \frac{3}{4}$ B. $p = -\frac{4}{3}; q = \frac{2}{3}$ C. $p = -\frac{4}{3}; q = -\frac{2}{3}$ D. $p = \frac{5}{4}; q = -\frac{3}{4}$

Lời giải

Đáp án D

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

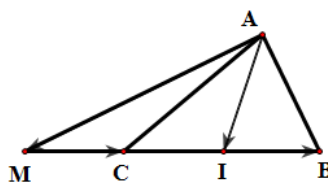
$$\text{Vậy } p = \frac{5}{4}, q = -\frac{3}{4}$$

Câu 37. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của BC . Khi đó C là trung điểm của MI . Ta có:

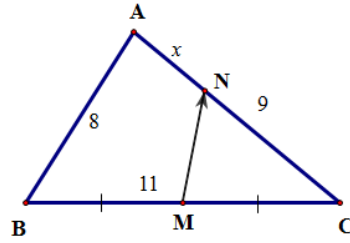
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 38. Cho tam giác ABC biết $AB = 8, AC = 9, BC = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN = x (0 < x < 9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
C. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn D



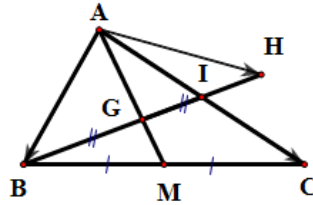
Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{x}{9}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Câu 39. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng với B qua G . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
 C. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và AC .

Ta thấy $AHCG$ là hình bình hành nên

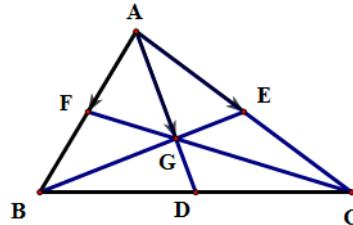
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Câu 40. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

Lời giải

Chọn D



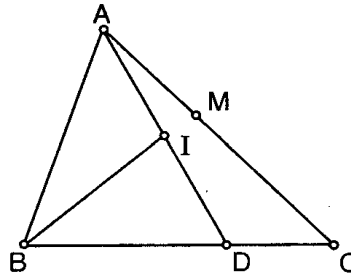
Ta có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AE}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$.

Câu 41. Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của cạnh AD , M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vector $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vector $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

- A. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: I là trung điểm của cạnh AD nên

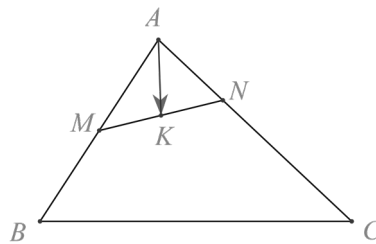
$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

Câu 42. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

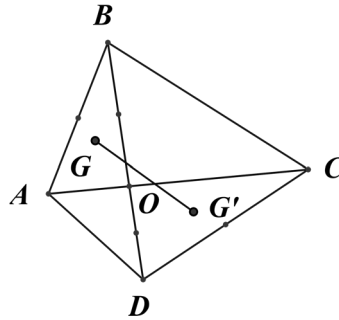
$$\text{Do đó } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 43. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. B. $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. C. $3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. D. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Lời giải

Chọn D



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$. (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên: $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$ (2)

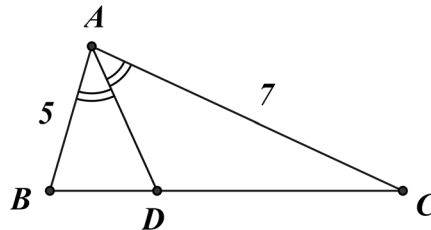
Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 44. Cho tam giác ABC với phân giác trong AD . Biết $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

- A. $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$. B. $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. C. $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. D. $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C



Vì AD là phân giác trong của tam giác ABC nên:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{5}{7}\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{5}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$$

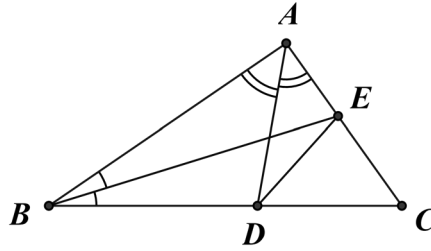
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 45. Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC . Biết $AB = 4$, $BC = 5$ và $CA = 6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

- A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. B. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. C. $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. D. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A



AD là phân giác trong của tam giác ABC nên $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD+DB} = \frac{6}{6+4}$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{6}{10} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{CB}.$$

Tương tự: $\frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \frac{5}{9} \overrightarrow{CA}.$

Vậy $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} = \frac{5}{9} \overrightarrow{CA} - \frac{3}{5} \overrightarrow{CB}.$

Câu 46. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm BC, CD . Biết $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{AL} = \vec{b}$. Biểu diễn $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$

A. $\overrightarrow{BA} = \frac{4}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{4}{3} \vec{b}$

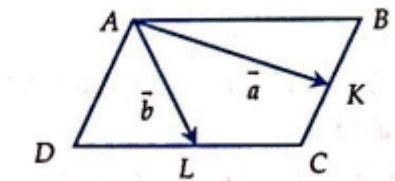
B. $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{4}{3} \vec{b}$

C. $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{4}{3} \vec{b}$

D. $\overrightarrow{BA} = -\frac{4}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{4}{3} \vec{b}$

Lời giải

Đáp án D



$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}) = 2\overrightarrow{BA} + 2\vec{a} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -2\vec{a}$$

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{LD} = 2(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{BC} - 2\vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = -2\vec{b}$$

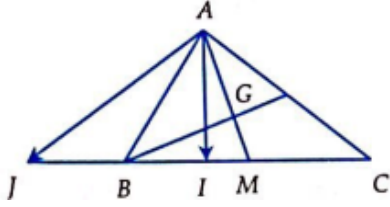
Từ đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -2\vec{a} \\ \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = -2\vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} = -\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \end{cases}$$

Câu 47. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi I là điểm trên BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{15}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$
 C. $\overrightarrow{AG} = \frac{15}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$

Lời giải

Đáp án B



Gọi M là trung điểm BC :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

Tương tự: $\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \\ \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ + \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$$

Câu 48. Cho $\triangle ABC$. Điểm M nằm trên đường thẳng BC sao cho $n\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC}$ ($n, m \neq 0$). Phân tích vector $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Đáp án D

$$n\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow n(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$$

$$\Leftrightarrow (m+n)\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

Câu 49. Một đường thẳng cắt các cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M . Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ ($m, n > 0$). Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m, n .

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

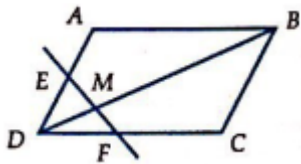
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m-n}\overrightarrow{DB}$

Lời giải

Đáp án A



Đặt $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Rightarrow \overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$ nên

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - m\overrightarrow{DA} = (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$$

Ta có: $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Leftrightarrow (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} = xy\overrightarrow{DA} + y(x-n)\overrightarrow{DC}$

Do DA và DC không cùng phương nên:
$$\begin{cases} x-m=xy \\ x=y(x-n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m.n}{m+n} \\ y=-\frac{m}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$$

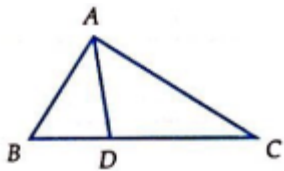
Câu 50. Cho $\triangle ABC$. Trên BC lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Khi đó phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Đáp án A



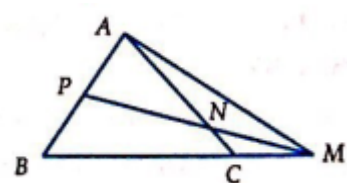
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Câu 51. Cho $\triangle ABC$. Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng.

A. $\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MN}$ **B.** $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ **C.** $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$ **D.** $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{MN}$

Lời giải

Đáp án C



$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Do đó

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng.

Câu 52. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên cạnh AB và CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BMN$. Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}$. Xác định m để AI đi qua G .

A. $m = \frac{6}{11}$

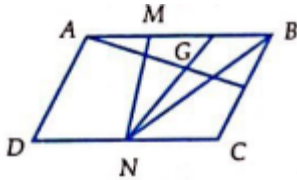
B. $m = \frac{11}{6}$

C. $m = \frac{6}{5}$

D. $m = \frac{18}{11}$

Lời giải

Đáp án A



Ta có: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BM}$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + m(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$$

Để AI đi qua G thì $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AG}$

$$\Rightarrow (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = k \cdot \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + k \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} 1-m = \frac{5k}{18} \\ m = \frac{k}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{11} \\ k = \frac{18}{11} \end{cases}$$

Câu 53. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD . Xét các điểm M, N, P cho bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AD}$. Tìm m để M, N, P thẳng hàng.

A. $m = \frac{1}{6}$

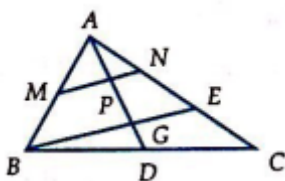
B. $m = \frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{4}$

D. $m = \frac{2}{3}$

Lời giải

Đáp án B



Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow MN \parallel BE \Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABE$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \text{ nên } M, N, P \text{ thẳng hàng} \Rightarrow P \text{ là trung điểm } AG. \text{ Vậy } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$$

Câu 54. Cho $\triangle ABC$. M và N là hai điểm xác định thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, N, B thẳng hàng?

- A. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BN}$ B. $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BN}$ C. $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BN}$ D. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BN}$

Lời giải

Đáp án B

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} + 3(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \quad (1)$$

Theo bài ra:

$$\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{BN} + 3(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BN}) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \quad (2)$$

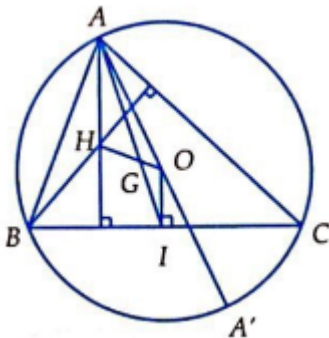
$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow 4\overrightarrow{BM} = 6\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BN}$$

Câu 55. Cho $\triangle ABC$ với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để H, O, G thẳng hàng?

- A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2} \overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GH}$ D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

Đáp án C



Lời giải chi tiết ở phần dạng toán 2.

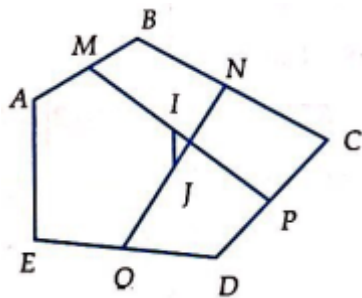
Nhận xét: Đường thẳng đi qua 3 điểm trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường $O - I$.

Câu 56. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP và NQ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IJ \parallel AE$?

- A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AE}$ B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{4} \overrightarrow{AE}$ C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AE}$ D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$

Lời giải

Đáp án C



$$\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IJ}$$

Câu 57. Cho $\triangle ABC$. Các điểm I, J thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IC \parallel BJ$?

A. $\overrightarrow{CI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$

B. $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{BJ}$

C. $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$

D. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$

Lời giải

Đáp án C

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$$

Câu 58. Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm M, N sao cho $AM = \frac{2}{5}MB, \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$. Gọi I là

giao điểm của AN và CM . Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$.

A. $\frac{AI}{AN} = \frac{3}{7}; \frac{CI}{IM} = \frac{21}{2}$

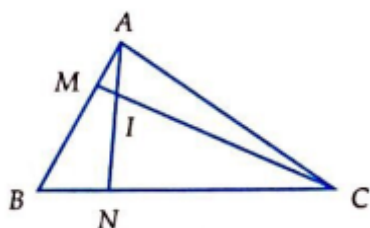
B. $\frac{AI}{AN} = \frac{4}{11}; \frac{CI}{IM} = \frac{7}{2}$

C. $\frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}; \frac{CI}{IM} = \frac{7}{4}$

D. $\frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}; \frac{CI}{IM} = \frac{21}{2}$

Lời giải

Đáp án D



$$\text{Đặt } \overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CI} = y\overrightarrow{CM}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AI} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = x\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3x}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{21x}{8}\overrightarrow{AM} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Vì } M, C, I \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{21x}{8} + \frac{x}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{8}{23}. \text{ Tương tự ta chưa tìm được } \frac{IC}{IM} = \frac{21}{2}$$

Câu 59. Cho $\triangle ABC$ và trung tuyến AM . Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM , AC và BC lần lượt tại D , E , và F . Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho FG song song với AC . Tính $\frac{ED}{GB}$.

A. $\frac{1}{2}$

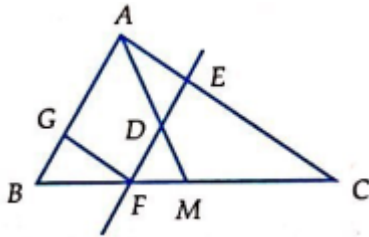
B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. 1

Lời giải

Đáp án D



$$\text{Ta đặt: } \overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}. \text{ Khi đó } \overrightarrow{CM} = \frac{b}{2}\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA} = k\vec{a}$$

Vì E nằm ngoài AC nên có số k sao cho: $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA} = k\vec{a}$ với $0 < k < 1$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CB} = k\vec{b}.$$

Điểm D nằm trên AM và EF nên có số x này:

$$\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CA} + (1-x)\overrightarrow{CM} = y\overrightarrow{CE} + (1-y)\overrightarrow{CF}$$

$$\text{Hay } x\vec{a} + \frac{1-x}{2}\vec{b} = ky\vec{a} + k(1-y)\vec{b}$$

$$\text{Vì } \vec{a}, \vec{b} \text{ không cùng phương nên } x = ky \text{ và } \frac{1-x}{2} = k(1-y)$$

Suy ra $x = 2k - 1$ do đó

$$\overrightarrow{CD} = (2k-1)\vec{a} + (1-k)\vec{b}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow (1-k)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} \Rightarrow \frac{ED}{GB} = 1$$

Câu 60. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N . Biết $OA = 1, OB = 2, OC = 3, OD = 4$. Tính $\frac{CN}{ND}$.

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

Lời giải

Đáp án C

$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA} \text{ Vì } \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \text{ cùng phương} \Rightarrow \exists k \text{ sao cho}$$

$$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \text{ Đặt } \frac{CN}{ND} = k, k > 0$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{ON} = \frac{-3}{1+k}.\overrightarrow{OA} - \frac{2k}{k+1}.\overrightarrow{OB} \Rightarrow \frac{-6}{k(k+1)} = \frac{-4k}{k(k+1)} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

Câu 61. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên các cạnh AB và CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BMN$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$ C. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG} \text{ mà } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Đáp án C.

Câu 62. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên tia đối của BC sao cho $5JB = 2JC$. Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$
C. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI})$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Ta lại có: } 5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Đáp án A.

Câu 63. Cho tứ giác $ABCD$. Trên AB và CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}, k \neq 1$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{AD} + (1-k).\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{MN} = (1+k).\overrightarrow{AD} + k.\overrightarrow{BC}$
C. $\overrightarrow{MN} = (1-k).\overrightarrow{AD} + k.\overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{MN} = -k.\overrightarrow{AD} + (k+1).\overrightarrow{BC}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với điểm } O \text{ bất kì: } \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{ON} = (1-k)\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (1-k)(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$$

Đáp án C.

Câu 64. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm trên AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm B, I, K thẳng hàng.

A. $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ B. $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ C. $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI}$ D. $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow B, I, K \text{ thẳng hàng.}$$

Đáp án B.

Câu 65. Cho $\triangle ABC$, E là trung điểm BC , I là trung điểm của AB . Gọi D, I, J, K lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{IK} = m\overrightarrow{IJ}$. Tìm m để A, K, D thẳng hàng.

A. $m = \frac{5}{6}$ B. $m = \frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = \frac{2}{5}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A, K, D \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = n\overrightarrow{AK} = n(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK}) \quad (1)$$

$$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= 3\overrightarrow{AI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AI} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ}) = \frac{9}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{IK} = m\overrightarrow{IJ} \text{ nên } 2\overrightarrow{AD} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{2m}\overrightarrow{IK} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{4m}\overrightarrow{IK} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{3}{4m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Đáp án B.

Câu 66. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $MN \parallel AC$.

A. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ C. $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow ABCM \text{ là hình bình hành hay } M \notin AC$$

$$\Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

Đáp án A.

Câu 67. Cho ΔABC ; M và N xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Trọng tâm ΔABC là G . Gọi P là điểm trên cạnh AC sao cho $\frac{PA}{PC} = 4$. Các đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, G, N, P thẳng hàng.

- A. $7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$ B. $5\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$
C. $7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{PQ} - 3\overrightarrow{PN} = \vec{0}$ D. $3\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

Lời giải

+ Ta có: $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = 7\overrightarrow{GM}$$

Tương tự: $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GB}) - 3(\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{NG} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GN}.$$

Vậy $7\overrightarrow{GM} = -2\overrightarrow{GN} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$

+ Gọi E là trung điểm $BC \Rightarrow 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AN}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} \quad (1)$$

$$\frac{PA}{PC} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{PC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AP} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AP}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PG}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{PG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PN} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}.$$

Đáp án A.

Câu 68. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của ΔADC và ΔBCD . Đẳng thức nào là điều kiện cần và đủ để $IJ \parallel AB$.

- A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm $DU\grave{O}C$. Ta có: $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Đáp án A.

Câu 69. Cho ΔABC . Gọi M là điểm thuộc cạnh AB ; $N \in$ cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Gọi

O là giao điểm của CM và BN . Tính tỉ số $\frac{ON}{OB}$ và $\frac{OM}{OC}$ tương ứng.

- A. $\frac{1}{9}$ và $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{6}$ và $\frac{1}{9}$

Lời giải

Giả sử: $\overrightarrow{ON} = n\overrightarrow{BN}; \overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{CM}$

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AM} - m\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - m(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{AN} - n\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}(1-n)\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AB}$$

Và $\overrightarrow{AO}$ chỉ biểu diễn duy nhất qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}(1-m) = n \\ \frac{3}{4}(1-n) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{ON}{OB} = \frac{1}{9}; \frac{OM}{OC} = \frac{2}{3}.$$

Đáp án A.

Câu 70. Cho hình bình hành $ABCD$. M thuộc AC sao cho: $AM = kAC$. Trên cạnh AB, BC lấy các điểm P, Q sao cho $MP \parallel BC, MQ \parallel AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP . Tính tỉ số $\frac{AN}{AQ}$ và $\frac{CN}{CP}$ theo k .

A. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2+k-1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2+k+1}$

B. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2-k+1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2-k+1}$

C. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2+k+1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2+k-1}$

D. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2+k+1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2+k+1}$

Lời giải

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AQ}; \overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CP}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ})$$

$$= \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} + x\frac{BQ}{BC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - x\frac{BQ}{BC}.\overrightarrow{DA}$$

$$\text{Vì } MQ \parallel AB \Rightarrow \frac{BQ}{BC} = \frac{AM}{AC} = k \Rightarrow \overrightarrow{DN} = (1-kx)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} + y\frac{BP}{BA}.\overrightarrow{BA}$$

$$\text{Vì: } MP \parallel BC \Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{CM}{CA} = \frac{CM-AM}{CA} = 1-k$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} - y(1-k)\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{DA} + (1-ky-y)\overrightarrow{DC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} y = 1-kx \\ x = 1+ky-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{k^2-k+1} \\ y = \frac{1-k}{k^2-k+1} \end{cases}$$

Đáp án B.

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

Câu 71. Cho hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G' . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = 3\overrightarrow{GG'}$

B. $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$

C. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'}$

D. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

Lời giải

Đáp án D

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Câu 72. Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

Lời giải

Đáp án D

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}\end{aligned}$$

Câu 73. Cho $\triangle ABC$ và một điểm M tùy ý. Chọn hệ thức đúng?

A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$

B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

Lời giải

Đáp án C

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

Câu 74. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$

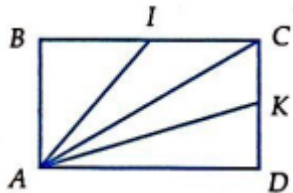
B. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$

D. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Đáp án D



$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

Câu 75. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chọn đẳng thức sai.

A. $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$

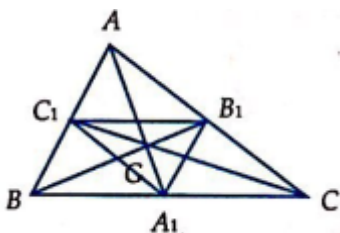
B. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC_1}$

Lời giải

Đáp án D



Câu 76. Cho $\triangle ABC$ với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp trọng tâm. Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (1)

Gọi I là trung điểm BC , A' đối xứng với A qua O .

Dễ thấy $HBA'C$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}.$$

Đáp án C.

Câu 77. Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$ B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ D. $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Lời giải

$$+ \text{ B đúng vì } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$$

$$= 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$+ \text{ C đúng vì } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$+ \text{ D đúng vì } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

Đáp án A.

Câu 78. Cho $\triangle ABC$, M là một điểm trên cạnh BC . Khi đó đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{BM} = \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{MB}{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
C. $3\overrightarrow{CM} = \frac{MB}{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ D. $2\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

Lời giải

Kẻ $MN \parallel AC, N \in AB$.

$$\text{Áp dụng định lí Ta-lét ta có } \overrightarrow{AN} = \frac{AN}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad \overrightarrow{NM} = \frac{NM}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Đáp án A.

Câu 79. Cho $\triangle ABC$, AM, BN, CP là các trung tuyến. D, E, F là trung điểm của AM, BN và CP . Với O là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ B. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$ D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OD} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OE} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OF} \quad (3)$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được đáp án **A.**

Đáp án A.

Câu 80. Cho tam giác ABC đều tâm O , M là điểm bất kì trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh lần lượt là D, E, F . Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MO}$

B. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{MO}$

D. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$

Lời giải

Qua M kẻ các đường thẳng $A_1B_1 // AB, A_2C_1 // AC, B_2C_2 // BC$

$\Rightarrow$ Các tam giác đều $\Delta MB_1C_1, \Delta MA_1C_2, \Delta MA_2B_2$

Ta có: $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}), \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2}), \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MA_2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}.$

Đáp án D.

Câu 81. Cho tứ giác $ABCD$. I, J lần lượt là trung điểm của AB và DC . G là trung điểm của IJ . Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$ (II) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IG}$ (III) $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{JI}$

Mệnh đề sai là:

A. (I) và (II)

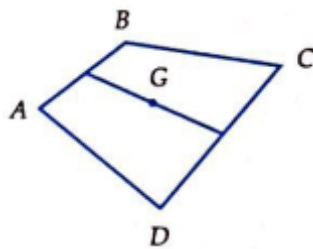
B. (II) và (III)

C. Chỉ (I)

D. Tất cả đều sai

Lời giải

Đáp án B



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD})$

$= 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{I} + 2\overrightarrow{J} = 4\overrightarrow{AG}$

(II) và (III) sai vì G không phải là trung điểm của AC và BD .

Câu 82. Cho tứ giác $ABCD$, các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{m}{n}$.

Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}$

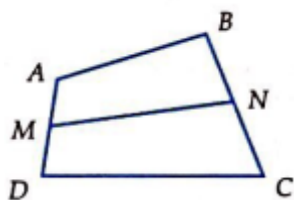
B. $\overrightarrow{AM} = \frac{n\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AB}}{m+n}$

C. $\overrightarrow{BN} = \frac{n\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{CD}}{m+n}$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{n\overrightarrow{CD} + m\overrightarrow{AD}}{m+n}$

Lời giải

Đáp án A



Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n\overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{BN} \\ m\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{MD} + m\overrightarrow{DC} + m\overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow (m+n)\overrightarrow{MN}$$

$$= (n\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MD}) + (n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}) + (n\overrightarrow{BN} + m\overrightarrow{CN}) = \vec{0} + n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC} + \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}$$

Câu 83. Cho $\triangle ABC$ và một điểm M bất kì trong tam giác. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

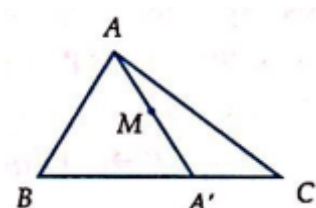
B. $S_a \cdot \overrightarrow{AB} + S_b \cdot \overrightarrow{BC} + S_c \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

C. $S_a \cdot \overrightarrow{MC} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

D. $S_a \cdot \overrightarrow{AC} + S_b \cdot \overrightarrow{AB} + S_c \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Lời giải

Đáp án A



Gọi $A' = AM \cap BC$

Ta có $\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC} \overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC} \overrightarrow{MC}$

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c} \Rightarrow \frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c}; \frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c}$$

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c} \overrightarrow{MC} (*) \text{ Mặt khác } \frac{MA'}{MA} = \frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \frac{S_{MA'B} + S_{MA'C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Ma'} = \frac{-S_a}{S_b + S_c} \overrightarrow{MA}, \text{ thay vào } (*) \text{ ta được: } -S_a \overrightarrow{MA} = S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Câu 84. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, AC = b, AB = c$. I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a \cdot \overrightarrow{IM} + b \cdot \overrightarrow{IN} + c \cdot \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

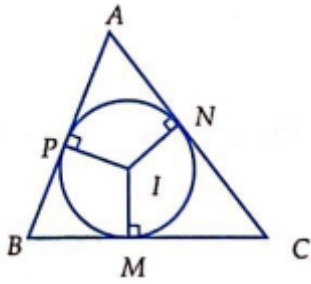
B. $a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{NB} + c \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

C. $a \cdot \overrightarrow{AM} + b \cdot \overrightarrow{BN} + c \cdot \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

D. $a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{BC} + c \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Lời giải

Đáp án A



Gọi p là nửa chu vi $\triangle ABC$, ta có:

$$AP = AN = p - a$$

$$BM = BP = p - b$$

$$CN = CM = p - c$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IM} = \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IM} = (p-c)\overrightarrow{IB} + (p-b)\overrightarrow{IC} \quad (1)$$

Tương tự:

$$b\overrightarrow{IN} = (p-a)\overrightarrow{IC} + (p-c)\overrightarrow{IA} \quad (2), c\overrightarrow{IP} = (p-b)\overrightarrow{IA} + (p-a)\overrightarrow{IB} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta được:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} \\ &= (2p-b-c)\overrightarrow{IA} + (2p-a-c)\overrightarrow{IB} + (2p-a-b)\overrightarrow{IC} = a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{aligned}$$

Nhận xét: Áp dụng kết quả nếu I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ thì

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

DẠNG 4. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 85. Cho hai điểm A và B . Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

A. Điểm I ngoài đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$

B. Điểm I thuộc đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$

C. Điểm I là trung điểm đoạn AB

D. Điểm I nằm khác phía với B đối với A và $IB = \frac{1}{3}AB$.

Lời giải

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}.$$

Vậy I thuộc đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$.

Đáp án B.

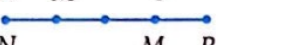
Câu 86. Cho đoạn thẳng AB . Hình nào sau đây biểu diễn điểm I sao cho $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.



Lời giải

Đáp án B.

Câu 87. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Hình vẽ nào sau đây xác định đúng vị trí điểm M .

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Lời giải

Đáp án C

Ta có: $MN = 3MP$ và P, N khác đối với M

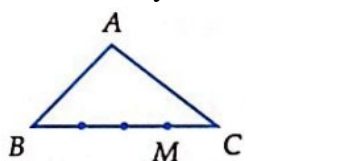
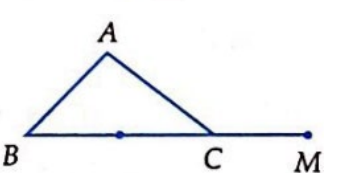
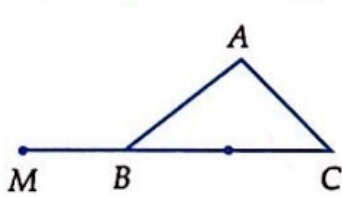
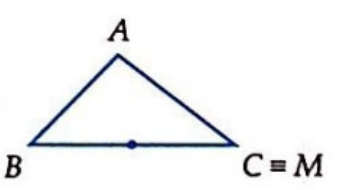
Câu 88. Cho đoạn thẳng AB và điểm M là một điểm trong đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k để $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

- A. $k = \frac{1}{4}$ B. $k = 4$ C. $k = -\frac{1}{4}$ D. $k = -4$

Lời giải

Đáp án C

Câu 89. Cho $\triangle ABC$. Trên đường thẳng BC lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Điểm M được vẽ đúng trong hình nào sau đây?

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Lời giải

Đáp án B

Câu 90. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. Điểm M là trung điểm cạnh AC .
 B. Điểm M là trung điểm cạnh GC .
 C. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số 4.

D. Điểm M chia đoạn GC thỏa mãn $\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM}\end{aligned}$$

Đáp án D.

Câu 91. Cho $\triangle ABC$, I là trung điểm của AC . Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức:

A. $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ B. $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$ C. $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ D. $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BI}$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NB} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{NI} = -\overrightarrow{NB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}\end{aligned}$$

Đáp án C.

Câu 92. Cho 2 điểm A, B là hai số thực a, b sao cho $a + b \neq 0$. Xét các mệnh đề:

(I) Tồn tại duy nhất một điểm M thỏa mãn $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

(II) $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

(III) M là điểm nằm trên đường thẳng AB .

Trong các mệnh đề trên thì:

- A. (I) và (III) tương đương nhau B. (II) và (III) tương đương nhau
C. (I) và (II) tương đương nhau D. (I), (II), (III) tương đương nhau

Lời giải

$$a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

Do giả thiết M được xác định duy nhất trên đường thẳng AB .

Đáp án C.

Câu 93. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, AC = b, AB = c$. Nếu điểm I thỏa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ thì:

- A. Điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
B. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
C. Điểm I là trực tâm của $\triangle ABC$.
D. Điểm I là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Lời giải

Lấy A' sao cho $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ hay AA' là đường phân giác.

$$\text{Ta có: } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow I \text{ thuộc đoạn } AA' \text{ và } \frac{IA}{IA'} = \frac{b+c}{a} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{BA}{BA'}$$

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Đáp án B.

Câu 94. Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC}$.

- A. Điểm I là trung điểm của cạnh AC

- B. Điểm C là trung điểm của cạnh IA
 C. Điểm C chia đoạn IA theo tỉ số -2
 D. Điểm I chia đoạn AC theo tỉ số 2

Lời giải

Đáp án C

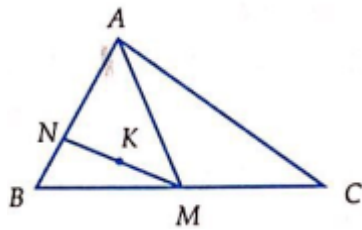
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -2\overrightarrow{CA} \end{aligned}$$

Câu 95. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm AB và N trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Xác định điểm K sao cho $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

- A. Điểm K là trung điểm cạnh AM
 B. Điểm K là trung điểm cạnh BN
 C. Điểm K là trung điểm cạnh BC
 D. Điểm K là trung điểm cạnh MN

Lời giải

Đáp án D



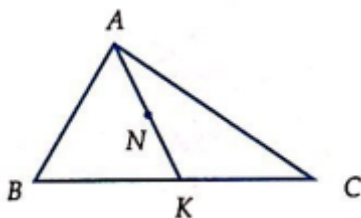
$$\begin{aligned} M \text{ là trung điểm } AB \text{ nên } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AN} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AM} + 6\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \Rightarrow K \text{ là trung điểm của } MN. \end{aligned}$$

Câu 96. Cho $\triangle ABC$. Tìm điểm N sao cho: $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

- A. N là trọng tâm $\triangle ABC$
 B. N là trung điểm của BC
 C. N là trung điểm của AK với K là trung điểm của BC
 D. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận AB và AC làm 2 cạnh

Lời giải

Đáp án C



$$\text{Gọi } K \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NK}$$

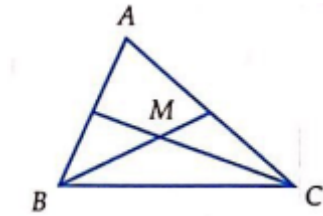
$$\text{Nên } 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NK} = \vec{0} \Rightarrow N \text{ là trung điểm } AK$$

Câu 97. Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$.

- A. M là trung điểm cạnh AB
 B. M là trung điểm cạnh BC
 C. M chia đoạn AB theo tỉ số 2
 D. M là trọng tâm $\triangle ABC$

Lời giải

Đáp án D



$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow M \text{ là trọng tâm } \triangle ABC$$

Câu 98. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Khi đó điểm M thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

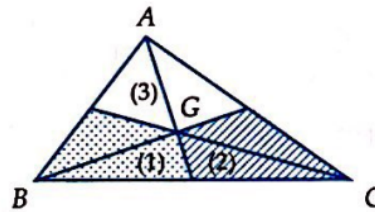
D. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Lời giải

Đáp án A

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$$

Câu 99. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Nối điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ thì M ở vị trí nào trong hình vẽ:



A. Miền (1)

B. Miền (2)

C. Miền (3)

D. Ở ngoài $\triangle ABC$

Lời giải

Đáp án B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = -3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MC}$$

Hay M là trung điểm của GC

Câu 100. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM}$. Khi đó điểm M trùng với điểm:

A. O

B. I là trung điểm đoạn OA

C. I là trung điểm đoạn OC

D. C

Lời giải

Đáp án A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow M \equiv O$$

Câu 101. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{MC}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nếu M là trọng tâm $\triangle ABC$ thì α, β thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $\alpha^2 - \beta^2 = 0$

B. $\alpha.\beta = 1$

C. $\alpha - \beta = 0$

D. Cả A, B, C đều đúng

Lời giải

Đáp án D

Ta có M là trọng tâm thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

So sánh với $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{MB} + \beta \overrightarrow{MC} \Rightarrow \alpha = -1; \beta = -1$

Câu 102. Cho $\triangle ABC$. Nếu điểm D thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$ với M tùy ý, thì D là đỉnh của hình bình hành:

A. $ABCD$

B. $ACBD$

C. $ABED$ với E là trung điểm của BC

D. $ACED$ với E là trung điểm của BC

Lời giải**Đáp án D**

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$$

Vậy D là đỉnh của hình bình hành $ACED$.

Câu 103. Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Tìm số $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

A. $k = \frac{3}{4}$

B. $k = \frac{3}{5}$

C. $k = \frac{2}{5}$

D. $k = \frac{3}{2}$

Lời giải**Đáp án B**

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{3}{5}$$

Câu 104. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Tập hợp điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$ là:

A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

B. Đường tròn tâm G bán kính là 1.

C. Đường tròn tâm G bán kính là 2.

D. Đường tròn tâm G bán kính là 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow 3|\overrightarrow{MG}| = 6 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = 2$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính là 2.

Đáp án C.

Câu 105. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . I là trung điểm của BC . Tập hợp điểm M sao cho:

$$2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \text{ là:}$$

A. đường trung trực của đoạn GI

B. đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

C. đường thẳng GI

D. đường trung trực của đoạn AI

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow 2|3\overrightarrow{MG}| = 3|2\overrightarrow{MI}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{MI}| \Rightarrow \text{Tập hợp điểm } M \text{ là trung trực của } GI.$$

Đáp án A.

Câu 106. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là

A. một đoạn thẳng

B. một đường tròn

C. một điểm

D. tập hợp rỗng

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MJ} \text{ với } I, J \text{ là trung điểm của } AB, CD$$

$\Rightarrow$ Không có điểm M nào thỏa mãn.

Đáp án D.

Câu 107. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k, k > 0$ là:

A. đường tròn tâm O bán kính là $\frac{k}{4}$

B. đường tròn đi qua A, B, C, D

C. đường trung trực của AB

D. tập rỗng

Lời giải

Đáp án A

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MO}| = k \Leftrightarrow |\overrightarrow{MO}| = \frac{k}{4}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $\frac{k}{4}$

Câu 108. Cho $\triangle ABC$ trọng tâm G . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, AB, CA . Quỹ tích các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|$ là:

A. đường tròn tâm I bán kính $\frac{1}{2}JK$

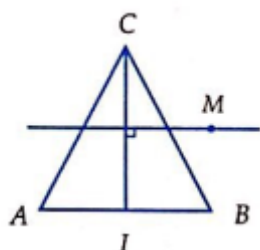
B. đường tròn tâm G bán kính $\frac{1}{3}IJ$

C. đường tròn tâm G bán kính $\frac{1}{3}CA$

D. trung trực AC

Lời giải

Đáp án B



Gọi I là trung điểm của AB thì

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow \text{Tập hợp điểm } M \text{ là trung trực của } IC$$

Câu 109. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, lúc đó:

A. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên đường thẳng AB

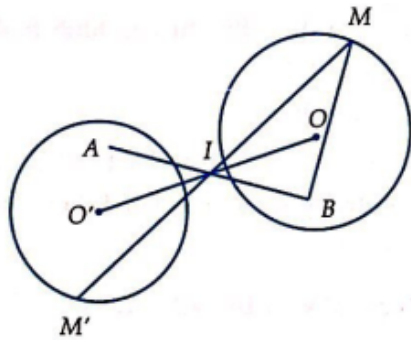
B. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên đường thẳng đối xứng với AB qua O

C. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên một đường tròn cố định

D. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên một đường tròn cố định bán kính R

Lời giải

Đáp án D



Gọi I là trung điểm AB

$$\Rightarrow I \text{ là điểm cố định: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow I \text{ là trung điểm của } MM'$$

Gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì O' cố định và $MOM'O'$ là hình bình hành

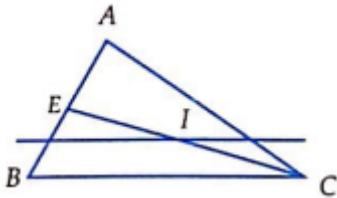
$$\Rightarrow OM = OM' = R \Rightarrow M' \text{ nằm trên đường tròn cố định tâm } O' \text{ bán kính } R.$$

Câu 110. Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC}$ với $k \in \mathbb{R}$

A. là một đoạn thẳng B. là một đường thẳng C. là một đường tròn D. là một điểm

Lời giải

Đáp án B



Gọi E là trung điểm của AB , I là trung điểm của EC

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{k}{4}\overrightarrow{BC}$$

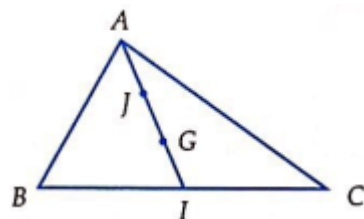
Do I, B, C cố định nên tập hợp điểm M là một đường thẳng đi qua I và song song với BC .

Câu 111. Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ là:

A. đường thẳng qua A B. đường thẳng qua B và C
C. đường tròn D. một điểm duy nhất

Lời giải

Đáp án C



$$\text{GT đã cho} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MA}| = |2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}|$$

$$\Leftrightarrow |3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MA})| = 2|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}| \quad (I \text{ là trung điểm } AB)$$

$$\Leftrightarrow 6|\overrightarrow{MJ}| = 2|\overrightarrow{IA}| \Leftrightarrow MJ = \frac{1}{3}IA \quad (G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC)$$

$$\Leftrightarrow JM = \frac{1}{2}AG \text{ (} J \text{ là trung điểm của } AG \text{)}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{AG}{2}$

Câu 112. Tập hợp điểm M mà $k\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$, $k \neq 1$ là:

- A. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ C B. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ B
C. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ A D. đường trung trực của AB

Lời giải

Đáp án A

$$k\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 2k\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI} \text{ (} I \text{ là trung điểm } AB \text{)}$$

$\Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng CI .

Câu 113. Cho $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn: $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$

- A. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{3}$
B. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{4}$
C. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{9}$
D. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{2}$

Lời giải

Đáp án C

Vì A, B, C cố định nên ta chọn điểm I thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$$

$$\Rightarrow I \text{ duy nhất từ đó } 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI} \text{ và } \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}$$

Câu 114. Cho $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$, $k \in \mathbb{R}$.

- A. Tập hợp điểm M là đường trung trực của EF , với E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC
B. Tập hợp điểm M là đường thẳng qua A và song song với BC
C. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$
D. Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ thì tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB với E là trung điểm của AB

Lời giải

Đáp án D

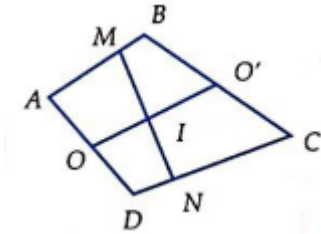
$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \\
&= \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \quad (\text{với } H \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}) \\
&= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HB} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} = 2k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{HB} \Rightarrow \text{Đáp án D}
\end{aligned}$$

Câu 115. Cho tứ giác $ABCD$ với K là số tùy ý. Lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi k thay đổi.

- A. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AC, BD
 B. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AD, BC
 C. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AB, DC
 D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Đáp án B



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm AD và BC , ta có: $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}$

$$\text{và } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OO'}$$

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}$$

Vậy tập hợp điểm I là đường thẳng OO'

Câu 116. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}|$ nhận giá trị nhỏ nhất.

- A. Tập hợp điểm M là một đường thẳng
 B. Tập hợp điểm M là một đoạn thẳng
 C. Tập hợp điểm M là một đường tròn
 D. Là một điểm

Lời giải

Đáp án B

Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = 3|\overrightarrow{MP}| + 3|\overrightarrow{MQ}| \geq 3(MP + MQ) \geq 3PQ$$

Dấu "=" xảy ra khi M thuộc đoạn PQ . Vậy tập hợp điểm M là đoạn thẳng PQ .

Câu 117. Tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức: $2\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}, k \in \mathbb{R}$ là:

- A. đường thẳng
 B. đường tròn
 C. đoạn thẳng
 D. một điểm

Lời giải

Đáp án A

$$\text{Từ giả thiết } \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC} (*)$$

Gọi I là điểm sao cho: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow IC = 2IA, I \in AC$

Từ (*): $2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{BC}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng qua I và song song với BC .

Câu 118. Cho ΔABC và điểm M thỏa mãn đẳng thức: $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Tập hợp điểm M là

- A. một đoạn thẳng B. nửa đường tròn C. một đường tròn D. một đường thẳng

Lời giải

Gọi E là trung điểm của $AC \Rightarrow |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$

$$\Leftrightarrow |2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{AB}|$$

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EI}$

$$\Leftrightarrow |2(\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{ME})| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{2}$.

Đáp án C.

Câu 119. Tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức: $|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

- A. là một đường tròn có bán kính là $\frac{AB}{2}$ B. là một đường tròn có bán kính là $\frac{BC}{3}$

C. là một đường thẳng qua A và song song với BC

D. là một điểm

Lời giải

Chọn điểm I sao cho

$$3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AI} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) - 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AI} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 3\overrightarrow{MI}$$

$$\Rightarrow |3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 3MI = CB \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}CB$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{CB}{3}$.

Đáp án B.

Câu 120. Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức:

$$2\overrightarrow{MA} - (1+k)\overrightarrow{MB} - 3k\overrightarrow{MC} = \vec{0}, k \text{ là giá trị thay đổi trên } \mathbb{R}.$$

- A. Tập hợp điểm M là một đoạn thẳng. B. Tập hợp điểm M là một đường tròn.
C. Tập hợp điểm M là một đường thẳng. D. Tập hợp điểm M là một nửa đường tròn.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết } \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) (*)$$

$$\text{Gọi } I, K \text{ là các điểm sao cho } 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

$$\text{Thì } I, K \text{ là các điểm cố định: } I \in AB : IB = 2IA; K \in BC : KB = 3KC$$

$$\text{Từ (*)} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = 4k\overrightarrow{MK}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng.

Đáp án C.

Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

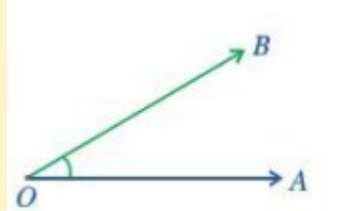
• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa

1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng



- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4\text{ cm}$.

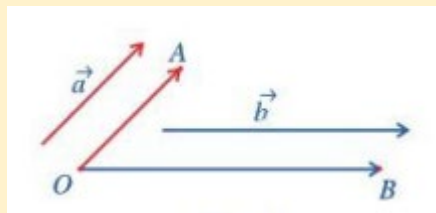
- Tính độ dài cạnh huyền BC .
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Giải

- $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$
- $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos \widehat{BAC} = 16 \cdot \cos 90^\circ = 16 \cdot 0 = 0.$$
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$
$$= 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \widehat{ABC} = 16\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$



- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

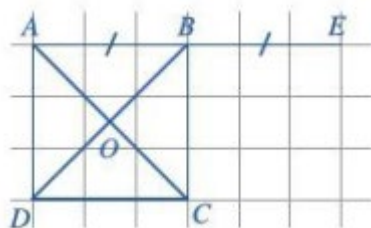
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
 - Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.
 - Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.
 - Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.
- Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Do đó, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vì vậy,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ và $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:



a) $\vec{AB} \cdot \vec{OC}$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{OD}$

Giải.

a) Ta có: $(\vec{AB}, \vec{OC}) = (\vec{AB}, \vec{AO}) = \widehat{BAO} = 45^\circ$.

Vậy $\vec{AB} \cdot \vec{OC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{OC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{OC}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$

b) Vẽ vectơ $\vec{BE} = \vec{AB}$. Ta có: $(\vec{AB}, \vec{BD}) = (\vec{BE}, \vec{BD}) = \widehat{EBD} = 135^\circ$.

Vậy $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BD}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{BD})$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

c) Vì $\vec{AB} = \vec{BE}, \vec{OD} = \vec{BO}$ nên $(\vec{AB}, \vec{OD}) = (\vec{BE}, \vec{BO}) = \widehat{EBO} = 135^\circ$.

Vậy $\vec{AB} \cdot \vec{OD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{OD}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}$.

II. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Trong đó, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\vec{OI} \cdot \vec{IA} + \vec{OI} \cdot \vec{IB} = 0$

b) $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{OB}^2 - \vec{OA}^2)$.

Giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

Vậy $\vec{OI} \cdot \vec{IA} + \vec{OI} \cdot \vec{IB} = \vec{OI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) = \vec{OI} \cdot \vec{0} = 0$

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\vec{OI} = \vec{OB} + \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA})$.

Vậy $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (-\vec{OA})$

$$= \frac{1}{2}\vec{OB} \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OB} \cdot \vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OA} = \frac{1}{2}(\vec{OB}^2 - \vec{OA}^2)$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính: $\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC}$

Giải

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$= |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos 90^\circ$$

$$= AB \cdot AC \cdot 0 = 0$$

III. Một số ứng dụng

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\vec{AB}^2 = |\vec{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\vec{AB}^2}$.

Ví dụ 5. (Định lí coossin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có;

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Giải

$$\text{Ta có: } \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$\text{Suy ra: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

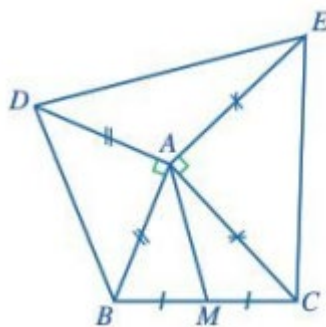
2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vector bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vector $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vector $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b .

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, \hat{A} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE



a) Tính các tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AE}, \vec{AC} \cdot \vec{AD}$;

b) Biểu diễn $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.

Giải

a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 150^\circ, \widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 150^\circ$ nên

$$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

$$= AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

b) Ta có:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AE} - \vec{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AE} + \vec{AC} \cdot \vec{AE} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AD})$$

$$\text{Vì } AB \perp AD, AC \perp AE \text{ nên } \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0, \vec{AC} \cdot \vec{AE} = 0$$

$$\text{Suy ra } \vec{AM} \cdot \vec{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0. \Rightarrow AM \perp DE$$

DẠNG 1. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ, TÍNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
- $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$$

Câu 6. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Câu 7. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Câu 8. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cho biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng $\vec{a}(2\vec{a} - \vec{b})$, $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

Câu 9. Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $|2\vec{a} + \vec{b}|$

Câu 10. Cho hai vector đơn vị $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|$

DẠNG 2. TÍNH ĐỘ DÀI CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM .

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 5a$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC$

- Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

b). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính BM .

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 120^\circ$

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM .

b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC . Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD .

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, BC = a\sqrt{7}, AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB, N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM = DN$

a). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a .

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG

Sử dụng định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Sử dụng quy tắc chèn điểm, quy tắc cộng trừ các vector và một số quy tắc trung điểm, trọng tâm, tính chất hình bình hành...

Tính chất giao hoán và phân phối về tích vô hướng.

Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng, ta chú ý có thể chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi O là giao điểm của AC và BD .

a). Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

b). Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$

b). Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

Câu 17. Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$

Câu 18. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kỳ A, B, C, D ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ (hệ thức Ô - le).}$$

Câu 19. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

b). $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

Câu 20. Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC . Chứng minh:

a). $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

b). $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$ (Với H là hình chiếu của A xuống BC).

Câu 21. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$

b). $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

- Câu 22.** Cho tam giác ABC , biết $AB = c, BC = a, AC = b$. Có trọng tâm G . Chứng minh rằng
- $$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (hệ thức Lep – nit).}$$
- Câu 23.** Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có
- $$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$$
- Câu 24.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:
- $$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$
- Câu 25.** Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN . Chứng minh:
- a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$
- b). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$
- Câu 26.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh:
- a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- b). $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$
- Câu 27.** Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R .
- a). Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi M thuộc (O) .
- b). Chứng minh với mọi điểm M :
- $$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$$
- Câu 28.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD . Chứng minh rằng
- $$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$
- Câu 29.** Cho tam giác ABC , biết $AB = c, BC = a, CA = b$, các đường trung tuyến tương ứng AA', BB', CC' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi M bất kỳ, ta có
- $$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$
- Câu 30.** Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng
- $$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$$
- Câu 31.** Cho tam giác ABC , có AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng
- $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$$

DẠNG 4. CHỨNG MINH SỰ VUÔNG GÓC CỦA HAI VECTO, HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Điều kiện $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Điều kiện $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Lưu ý chọn gốc, chọn hệ cơ sở để biểu diễn và chứng minh vuông góc.

- Câu 32.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}, 5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$.
- a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b). Chứng minh AM vuông góc với BN .
- Câu 33.** Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M trung điểm của đoạn BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .

- Câu 34.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $BI \perp AJ$
- Câu 35.** Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC , M trung điểm của đoạn HD . Chứng minh AM vuông góc với DB .
- Câu 36.** Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao của hai đường chéo AC và BD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE .
- a). Chứng minh $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
b). Chứng minh $HK \perp IJ$
- Câu 37.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M . Gọi P là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 38.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh $BM \perp MN$.
- Câu 39.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông cân.
- Câu 40.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh $HK \perp IJ$.
- Câu 41.** Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN .
- Câu 42.** Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm của AB , E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh $OE \perp CD$

DẠNG 5. TẬP HỢP ĐIỂM

Dạng 1: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .
- $k \neq 0$: Gọi I trung điểm của AB .

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp điểm M là điểm I .

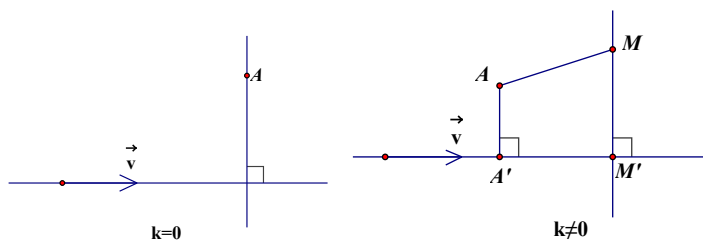
+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là rỗng.

Dạng 2: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$ (2) (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của $\vec{v}$

$k \neq 0$: Gọi $A'M'$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của vector $\vec{v}$; ta có: (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$ (định lý hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của $\vec{v}$ định bởi $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{v}$). Tập hợp các

điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vector $\vec{v}$ tại M' .



Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (3) (A, B cố định α, β là hằng số và $\alpha + \beta \neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow$ I là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 + 2(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) \overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

– Cho hai điểm A, B cố định α, β là hằng số thỏa $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$.

– Cho ba điểm A, B, C cố định α, β, γ là hằng số thỏa $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có:

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MI}.$$

Câu 43. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Câu 44. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M thỏa:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

b). $\overrightarrow{MB} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

c). $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

d). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

Câu 45. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Câu 46. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2$

- Câu 47.** Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = a, BC = 3a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$
- Câu 48.** Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$
- Câu 49.** Cho đoạn $AB = a > 0$ và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$
- Câu 50.** Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M sao cho
- $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$;
 - $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.
- Câu 51.** Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M sao cho:
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;
 - $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$;
 - $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$;
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
- Câu 52.** Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thỏa điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.
- Câu 53.** Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$
- Câu 54.** Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho:
- $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$
 - $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$
- Câu 55.** Cho hai điểm A, B cố định và số k cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$
- Câu 56.** Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).
- Câu 57.** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm G .
- Xác định vị trí điểm P thỏa $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.
 - Chứng minh C, G, P thẳng hàng.
 - Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$
- Câu 58.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và M là một điểm thay đổi:
- Chứng minh $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.
 - Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).
- Câu 59.** Cho tam giác ABC . Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:
- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$
 - $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$
(với k là một số cho trước).
- Câu 60.** Cho tam giác ABC số a . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.
- Câu 61.** Cho tam giác ABC và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- Câu 2.** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.
- Câu 3.** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.
- Câu 4.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$
- Câu 5.** Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?
A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.
- Câu 6.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$
- Câu 7.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.
- Câu 8.** Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:
A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 9.** Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. D. $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.
- Câu 10.** Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$
A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 11.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- Câu 12.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- Câu 13.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng:
A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0 . D. $9a^2$.

- Câu 14.** Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?
A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. **B.** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. **C.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. **D.** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.
- Câu 15.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 16.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. **B.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. **C.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.
- Câu 17.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
A. 0 . **B.** a . **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** a^2 .
- Câu 18.** Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:
A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. **B.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. **D.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.
- Câu 19.** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$
A. $\frac{3a^2}{4}$. **B.** $\frac{-3a^2}{4}$. **C.** $\frac{3a^2}{2}$. **D.** $\frac{-3a^2}{2}$.
- Câu 20.** Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng
A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
D. A, B, C đều sai.
- Câu 21.** Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$
A. $\sqrt{21}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** 21 . **D.** 61 .
- Câu 22.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$
A. $3a^2$. **B.** $-3a^2$. **C.** $3a$. **D.** 0 .
- Câu 23.** Cho 2 vectơ đơn vị $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$
A. 7 . **B.** 5 . **C.** -7 . **D.** -5 .
- Câu 24.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$
A. $-9a^2$. **B.** $15a^2$. **C.** 0 . **D.** $9a^2$.
- Câu 25.** Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
A. 9 . **B.** 81 . **C.** 3 . **D.** 5 .
- Câu 26.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$
A. $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{7 - \sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$.
- Câu 27.** Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC .

B. Đường tròn $(B; BC)$.

C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Câu 28. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

A. Đường tròn đường kính AB .

B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .

D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Câu 29. Cho hai điểm $A(2, 2)$, $B(5, -2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$

A. $M(1, 6)$.

B. $M(6, 0)$.

C. $M(1, 0)$ hay $M(6, 0)$.

D. $M(0, 1)$.

Câu 30. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 31. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 32. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$

B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$

C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$

D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Câu 34. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$

B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$

C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$

D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Câu 35. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$

B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$

C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$

D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A. $P = -1$

B. $P = 3a^2$

C. $P = -3a^2$

D. $P = 2a^2$

Câu 37. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$.

B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Câu 38. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .

C. tam giác OAB vuông tại O .

D. tam giác OAB vuông cân tại O .

Câu 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Câu 40. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Câu 41. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 42. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 43. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 44. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 45. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$.

Câu 46. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

A. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$. B. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$. D. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$.

Câu 47. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}, CD = BD = 5\sqrt{2}, AD = 3\sqrt{10}, AC = 10$. Tìm cosin góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DB}$

A. $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$. B. $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$. C. $\frac{4}{5\sqrt{2}}$. D. $\frac{3}{5\sqrt{2}}$.

Câu 48. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a, MN = a\sqrt{3}$.

A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$.

Câu 49. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

A. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$. B. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$.
C. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$. D. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Câu 50. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vector tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. a . D. $3a$.

Câu 51. Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Câu 52. Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $5a$. D. $2a$.

Câu 53. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu đúng.

A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Câu 54. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là
A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.

Câu 55. Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng
A. -18 . B. 27 . C. 18 . D. -27 .

Câu 56. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.
A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

Câu 57. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.
A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.

Câu 58. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$
A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0 . D. a^2 .

Câu 59. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:
A. -20 . B. 40 . C. 10 . D. 20 .

Câu 60. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 61. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Câu 62. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính cạnh AB, AC .
A. $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. B. $AB = a, AC = a$.
C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. D. $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Câu 63. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$
A. $\frac{21a^2}{4}$. B. $\frac{11a^2}{4}$. C. $\frac{9a^2}{4}$. D. $\frac{a^2}{4}$.

Câu 64. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$
A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$.

Câu 65. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$
A. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. B. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$. C. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$. D. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

Câu 66. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \widehat{MNP}$.

A. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$. B. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$.
 C. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

Câu 67. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$.

Câu 68. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

A. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$. B. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$.
 C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$.

Câu 69. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

Câu 70. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $R = \frac{a}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 71. Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

A. Tập rỗng. B. Đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.
 C. Đường tròn cố định có bán kính $R = 3$ cm. D. Một đường thẳng.

Câu 72. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

A. Đường tròn đường kính IJ . B. Đường tròn đường kính IK .
 C. Đường tròn đường kính JK . D. Đường trung trực đoạn JK .

Câu 73. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

A. $x = \frac{5a}{12}$. B. $x = \frac{a}{2}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{7a}{12}$.

Câu 74. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

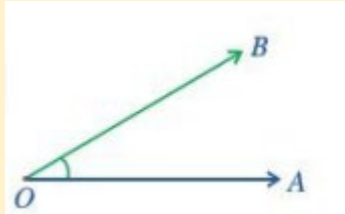
• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa

1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng



- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4\text{ cm}$.

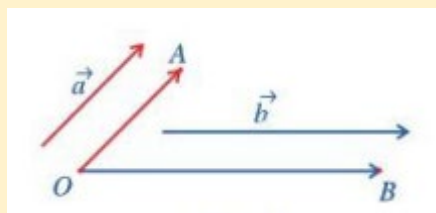
- Tính độ dài cạnh huyền BC .
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Giải

- $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos \widehat{BAC} = 16 \cdot \cos 90^\circ = 16 \cdot 0 = 0$.
 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
$$= 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \widehat{ABC} = 16\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$



- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

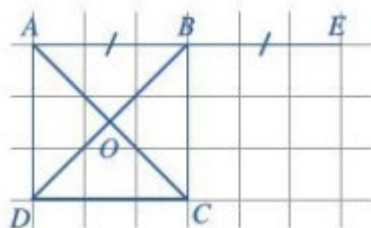
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
 - Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.
 - Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.
 - Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.
- Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Do đó, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vì vậy,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ và $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:



a) $\vec{AB} \cdot \vec{OC}$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{OD}$

Giải.

a) Ta có: $(\vec{AB}, \vec{OC}) = (\vec{AB}, \vec{AO}) = \widehat{BAO} = 45^\circ$.

Vậy $\vec{AB} \cdot \vec{OC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{OC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{OC}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$

b) Vẽ vectơ $\vec{BE} = \vec{AB}$. Ta có: $(\vec{AB}, \vec{BD}) = (\vec{BE}, \vec{BD}) = \widehat{EBD} = 135^\circ$.

Vậy $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BD}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{BD})$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

c) Vì $\vec{AB} = \vec{BE}, \vec{OD} = \vec{BO}$ nên $(\vec{AB}, \vec{OD}) = (\vec{BE}, \vec{BO}) = \widehat{EBO} = 135^\circ$.

Vậy $\vec{AB} \cdot \vec{OD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{OD}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}$.

II. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Trong đó, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\vec{OI} \cdot \vec{IA} + \vec{OI} \cdot \vec{IB} = 0$

b) $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{OB}^2 - \vec{OA}^2)$.

Giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

Vậy $\vec{OI} \cdot \vec{IA} + \vec{OI} \cdot \vec{IB} = \vec{OI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) = \vec{OI} \cdot \vec{0} = 0$

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\vec{OI} = \vec{OB} + \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA})$.

Vậy $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (-\vec{OA})$

$$= \frac{1}{2}\vec{OB} \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OB} \cdot \vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OA} = \frac{1}{2}(\vec{OB}^2 - \vec{OA}^2)$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính: $\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC}$

Giải

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$= |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos 90^\circ$$

$$= AB \cdot AC \cdot 0 = 0$$

III. Một số ứng dụng

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\vec{AB}^2 = |\vec{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\vec{AB}^2}$.

Ví dụ 5. (Định lí coossin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có;

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Giải

$$\text{Ta có: } \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$\text{Suy ra: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

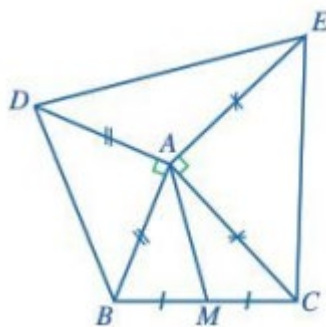
2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vector bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vector $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vector $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b .

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, \hat{A} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE



a) Tính các tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AE}, \vec{AC} \cdot \vec{AD}$;

b) Biểu diễn $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.

Giải

a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 150^\circ, \widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 150^\circ$ nên

$$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

$$= AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

b) Ta có:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AE} - \vec{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AE} + \vec{AC} \cdot \vec{AE} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AD})$$

$$\text{Vì } AB \perp AD, AC \perp AE \text{ nên } \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0, \vec{AC} \cdot \vec{AE} = 0$$

$$\text{Suy ra } \vec{AM} \cdot \vec{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0. \Rightarrow AM \perp DE$$

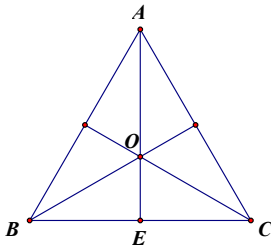
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO, TÍNH GÓC GIỮA HAI VECTO

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- c). $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
- d). $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$

Lời giải



a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

b). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
 $= -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$

c). Gọi E là trung điểm của BC có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$;
Do đó $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CB} = 2|\overrightarrow{OE}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{CB})$
 $= 2 \cdot OE \cdot CB \cos 90^\circ = 0$.

d). Khai triển biểu thức, ta được

$$D = (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

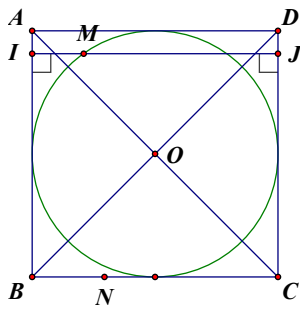
Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Từ đó $D = a^2 + \frac{3a^2}{2} + a^2 - 3a^2 = \frac{a^2}{2}$.

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- b). $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
- c). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Lời giải



a).

$$\begin{aligned}
 & \bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -BA \cdot BC \cdot \cos 90^\circ = 0 \\
 & \bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2 \\
 & \bullet (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} \\
 & = 0 + |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = a^2
 \end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}
 & \bullet \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BO}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ (do } \overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0) \\
 & = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2} \\
 & \bullet \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2
 \end{aligned}$$

c).

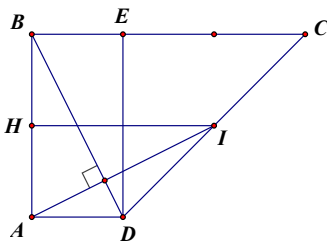
$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) \\
 & = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) = MH^2 - HA^2
 \end{aligned}$$

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b). Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Lời giải



$$\begin{aligned}
 & - \text{Dựng } DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED \text{ là hình chữ nhật. Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 & = -\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = -|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -DE \cdot DC \cdot \cos 45^\circ = -2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2 \\
 & - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \cdot |\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \widehat{DBE} = 3BE \cdot BD \cdot \frac{BE}{BD} = 3 \cdot a^2 \\
 & - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} \\
 & = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2 \\
 & (\text{Vì } \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0; \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0).
 \end{aligned}$$

b). Gọi H trung điểm của AB, suy ra HI là đường trung bình của hình thang ABCD, do đó

$$HI = \frac{AD + BC}{2} = 2a$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \left(\text{do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB} \right); \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \left(\text{do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD} \right).$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

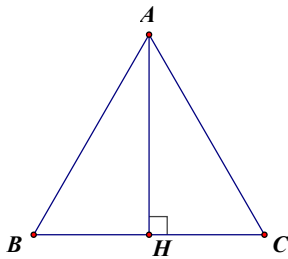
Vậy $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90° .

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH. Tính:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.

b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

Lời giải



a).

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$- \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \cdot AH \cdot \cos \widehat{BAH} = -a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3a^2}{4}$$

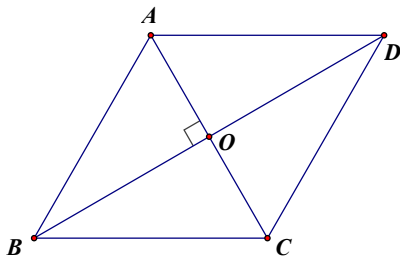
b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

$$= -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -2 \cdot \frac{a^2}{2} - 3 \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{13a^2}{4}$$

Câu 5. Cho hình thoi ABCD tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

Lời giải



$$\text{Do } \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AC = 7, BO = \frac{7\sqrt{3}}{2} \left(\text{đường cao tam giác đều} = \frac{\text{cạnh} \cdot \sqrt{3}}{2} \right)$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 7 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{49}{2}.$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -AB \cdot AO \cdot \cos 60^\circ = -7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{49}{4}$$

$$- \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \left(\text{do } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \right)$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = BA \cdot BO \cdot \cos \widehat{ABO} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a^2}{4}$$

Câu 6. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Ta có } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3 \Leftrightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 12 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9b^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4 - 12 \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{4}.$$

Câu 7. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2b^2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\bullet \vec{u}^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 1 = 7 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7}$$

$$\bullet \vec{v}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 8. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cho biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng $\vec{a}(2\vec{a} - \vec{b})$, $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Trước hết ta có: } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 36, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9, \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

Vậy:

$$\bullet \vec{a}(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 36 - 9\sqrt{2} = 72 - 9\sqrt{2}$$

$$\bullet (3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b}) = -6\vec{a}^2 + 12\vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot 36 + 12 \cdot 9 - 9\sqrt{2} = -108 - 9\sqrt{2}.$$

Câu 9. Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $|2\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

$$- |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 - \vec{a}^2 - 9\vec{b}^2}{6} = \frac{3^2 - 3^2 - 9 \cdot 2}{6} = -3$$

$$- |2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3^2 + 2 + 4 \cdot (-3) = 26 \Rightarrow |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{26}$$

Câu 10. Cho hai vector đơn vị $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \Rightarrow (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 3 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3-4-1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Có } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

DẠNG 2. TÍNH ĐỘ DÀI CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 - \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

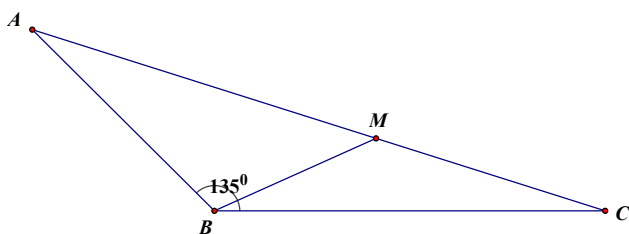
$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{9} \cdot 2^2 + \frac{4}{9} \cdot 3^2 - \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{28}{9} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}, BC = 5a, \widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC$

a). Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

b). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính BM .

Lời giải



a). $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \widehat{ABC} = a\sqrt{2} \cdot 5a \cdot \cos 135^\circ = -5a^2$

b). Do M thuộc AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} \quad (*). \text{ Vì } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ là hai vector không cùng}$$

phương nên biểu thức (*) duy nhất $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right)^2 \Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}BA^2 + \frac{9}{25}BC^2 + 2 \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} \cdot \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}BA^2 + \frac{9}{25}BC^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

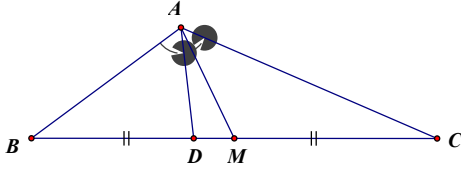
$$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25} \cdot 2a^2 + \frac{9}{25} \cdot 25a^2 + \frac{12}{25} \cdot (-5a^2) = \frac{173}{25}a^2$$

$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{173}}{5}$$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 120^\circ$

- a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM .
- b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC . Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD .

Lời giải



a). Có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -3$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \right]^2$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{4}(2^2 + 3^2 + 2 \cdot (-3)) = \frac{7}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

b).

Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow DB = \frac{2}{3}DC$, do $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ là hai vectơ

ngược hướng nên có $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \frac{5}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \right)^2 \Leftrightarrow AD^2 = \frac{9}{25}AB^2 + \frac{4}{25}AC^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{9}{25} \cdot 2^2 + \frac{4}{25} \cdot 3^2 + \frac{12}{25} \cdot (-3)$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{36}{25}$$

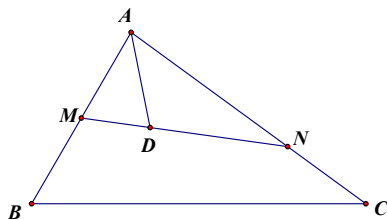
$$\Leftrightarrow AD = \frac{6}{5}.$$

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, BC = a\sqrt{7}, AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB, N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM = DN$

a). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a .

Lời giải



Do $AN = 2NC \Rightarrow AN = \frac{2}{3}AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

• $2DM = DN \Rightarrow 2\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DN} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD})$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}$$

b). Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Do đó $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{(2a)^2 + (3a)^2 - (a\sqrt{7})^2}{2} = 3a^2$$

Theo câu a) thì $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right)^2$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + \frac{4}{27}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}(2a)^2 + \frac{4}{9}(3a)^2 + \frac{4}{27} \cdot 3a^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{44}{9}a^2 \Rightarrow AD = \frac{2a\sqrt{11}}{3}$$

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG

Sử dụng định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Sử dụng quy tắc chen điểm, quy tắc cộng trừ các vector và một số quy tắc trung điểm, trọng tâm, tính chất hình bình hành...

Tính chất giao hoán và phân phối về tích vô hướng.

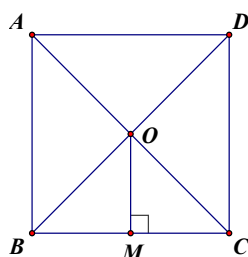
Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng, ta chú ý có thể chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi O là giao điểm của AC và BD .

a). Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

b). Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

Lời giải



a).

Do ABCD là hình vuông $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = a$.

Theo định nghĩa có: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAD} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2$.

b).

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

$$\bullet 2(OC^2 - OM^2) = 2MC^2 = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

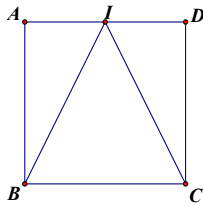
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

Câu 16. Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$

b). Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

Lời giải



a).

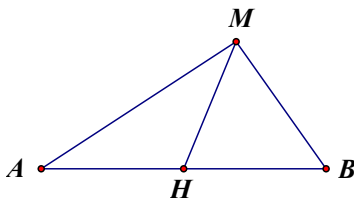
$$\begin{aligned} \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} &= \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{4} (2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) (2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4} [(2\overrightarrow{BA})^2 - \overrightarrow{BC}^2] \\ &= \frac{1}{4} (4BA^2 - BC^2) = \frac{1}{4} \cdot 3AB^2 = \frac{9a^2}{4} \end{aligned}$$

b). Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \quad (\text{do } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \quad (\text{Do } \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0) \end{aligned}$$

Câu 17. Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) \\ &= \overrightarrow{MH}^2 - \overrightarrow{HA}^2 = HM^2 - HA^2 \quad (\text{Do H trung điểm của AB nên có } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA}) \end{aligned}$$

Câu 18. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A, B, C, D ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ (hệ thức Ô - le)}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Câu 19. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

b). $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

Lời giải

a).

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad (1)$$

b). $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \quad (2)$$

Chú ý: Các công thức (1) và (2) thường xuyên được sử dụng trong khi giải các bài tập khác.

Đặc biệt, (2) được gọi là định lý hàm số cosin, trong chương sau ta sẽ đề cập nhiều đến định lý này.

Câu 20. Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC . Chứng minh:

a). $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

b). $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$ (Với H là hình chiếu của A xuống BC).

Lời giải

a). Ta có: $AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$

$$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 \quad (I \text{ trung điểm của } BC \Rightarrow \overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB})$$

$$= 2AI^2 + 2BI^2 = 2AI^2 + 2 \cdot \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad (\text{đpcm}).$$

b). $AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB} \cdot 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HI}$

$$= 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$$

Câu 21. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$

b). $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

Lời giải

a). Cách 1:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2}{4} = \frac{(2\overrightarrow{AM})^2 - \overrightarrow{CB}^2}{4} \\ &= \frac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \frac{BC^2}{4}\end{aligned}$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm BC

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AI^2 - IB^2 = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$\begin{aligned}\text{b). } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \Rightarrow AM^2 &= \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{4}[2(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})] \\ &= \frac{1}{4}[2(AB^2 + AC^2) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2] \\ &= \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \quad (\text{đpcm}).\end{aligned}$$

Đây chính là công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác, sẽ được đề cập nhiều ở phần sau.

Câu 22. Cho tam giác ABC, biết $AB = c, BC = a, AC = b$. Có trọng tâm G. Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{hệ thức Lep - nit}).$$

Lời giảiTa có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 = 0$$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2(\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) - (GA^2 + GB^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB})$$

$$- (GB^2 + GC^2 - 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}) - (GC^2 + GA^2 - 2\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})^2$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2$$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{đpcm})$$

Câu 23. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$$

Lời giải

Ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

$$= 3MG^2 + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

Nhận xét:

a). Điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.

b). Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thì:

$$3(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ (Với } M \equiv O \text{)}.$$

Câu 24. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Lời giải

Theo tính chất trọng tâm, ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$$\Rightarrow 9\overrightarrow{MG}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + (MA^2 + MB^2 - AB^2) + (MB^2 + MC^2 - BC^2)$$

$$+ (MA^2 + MC^2 - AC^2)$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

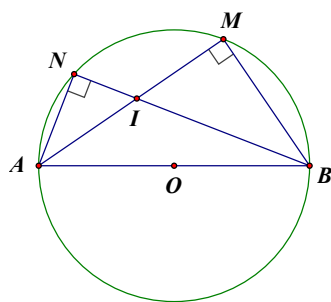
$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Câu 25. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN. Chứng minh:

$$a). \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$$

$$b). \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$$

Lời giải



Vì $BM \perp AI$ nên $\overrightarrow{AM}$ là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI. Vậy ta có:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$$

Chứng minh tương tự $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

$$b). \text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4R^2$$

Câu 26. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh:

$$a). \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$$

$$b). \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$$

Lời giải

a). Vì AC là đường kính, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - R^2 \quad (\text{do } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA})\end{aligned}$$

Tương tự: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$$

$$\text{b). } \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$$

Câu 27. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R.

a). Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi M thuộc (O).

b). Chứng minh với mọi điểm M :

$$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$$

Lời giải

a). Vì tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác, do đó ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}_{\vec{0}}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + 3R^2$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2 \Leftrightarrow 3MO^2 + 3R^2 = 6R^2 \Leftrightarrow MO^2 = R^2 \Leftrightarrow MO = R \Leftrightarrow M \text{ thuộc đường tròn (O).}$$

$$\text{b). } MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2$$

$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 - 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$$

$$= (\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2) + 2(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2) - 3(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2)$$

$$= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC})$$

$$= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{MC})$$

$$= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 28. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

Lời giải

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2$$

$$\Leftrightarrow (AD^2 - AC^2) - (BD^2 - BC^2) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ (đúng).}$$

Câu 29. Cho tam giác ABC , biết $AB=c, BC=a, CA=b$, các đường trung tuyến tương ứng AA', BB', CC' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi M bất kì, ta có

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} VT &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA'}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 2(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MG}) + \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GA'} \\ &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \cdot (2\overrightarrow{GA'} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} \end{aligned}$$

Vì G là trọng tâm nên $2\overrightarrow{GA'} = -\overrightarrow{GA}$

$$\text{Vậy } VT = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_0 - \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$$

Mà:

$$\overrightarrow{GA}^2 = \left(\frac{2}{3}AA'\right)^2 = \frac{4}{9}AA'^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} &= \frac{GB^2 + GC^2 - BC^2}{2} = \frac{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9} - a^2}{2} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow VT = 3MG^2 - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9} + \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

Câu 30. Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$$

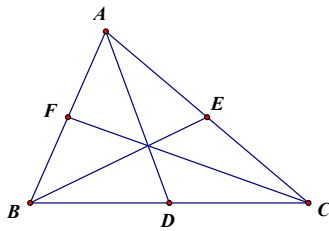
Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}[\overrightarrow{BH}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CH}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})] \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{CH}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2 \end{aligned}$$

Câu 31. Cho tam giác ABC , có AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$$

Lời giải



$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA})}_0 + \underbrace{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB})}_0 + \underbrace{(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC})}_0 \right] \\
 &= 0 \\
 & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0
 \end{aligned}$$

DẠNG 4. CHỨNG MINH SỰ VUÔNG GÓC CỦA HAI VECTO, HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Điều kiện $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Điều kiện $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

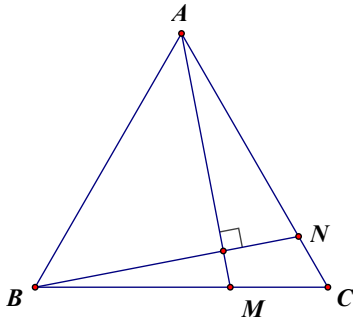
Lưu ý chọn gốc, chọn hệ cơ sở để biểu diễn và chứng minh vuông góc.

Câu 32. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$.

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

b). Chứng minh AM vuông góc với BN .

Lời giải



a).

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\bullet \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \cdot CA \cdot \cos \widehat{BCA} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

b).

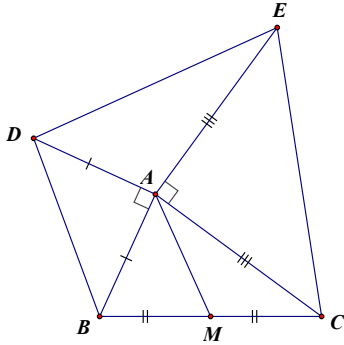
$$\bullet 3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\bullet 5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA}) = 4\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} &= \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \right) \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \overrightarrow{AC} \right) \\
&= -\frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{8}{15} \overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{15} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{8}{15} \overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}^2 \\
&= -\frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{8}{15} \cdot a^2 - \frac{1}{3} a^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BN} \Leftrightarrow AM \text{ vuông góc với } BN.
\end{aligned}$$

Câu 33. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M trung điểm của đoạn BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .

Lời giải

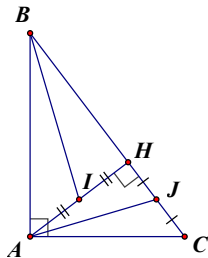


Ta chứng minh $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Thật vậy:

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AE \cdot \cos(90^\circ + A) - AC \cdot AD \cdot \cos(90^\circ + A) = 0 \quad (\text{do } AB = AD, AE = AC).
\end{aligned}$$

Câu 34. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $BI \perp AJ$

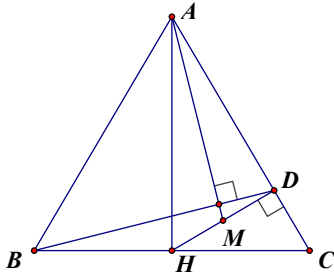
Lời giải



$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}); \quad \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) \\
\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) \\
&= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}) \\
&= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{BH}) \\
&= \frac{1}{4} (-\overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{4} (-AH^2 - HB \cdot HC \cdot \cos \widehat{BHC}) \\
&= \frac{1}{4} (-AH^2 + HB \cdot HC) = 0
\end{aligned}$$

Câu 35. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC , M trung điểm của đoạn HD . Chứng minh AM vuông góc với DB .

Lời giải



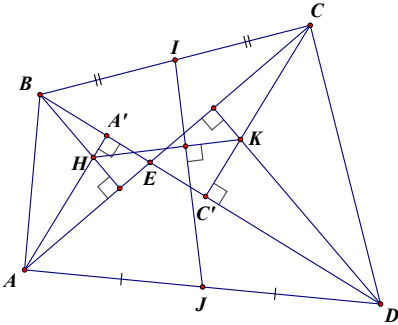
Vì M trung điểm của HD, nên có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}) = \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD}}_0 \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BH} \\ &= \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD}. \text{ Vậy } AM \text{ vuông góc với } BD. \end{aligned}$$

Câu 36. Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao của hai đường chéo AC và BD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE .

- Chứng minh $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Chứng minh $HK \perp IJ$

Lời giải



a). Hạ AA', CC' lần lượt vuông góc BD, ta có:

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

b) Tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$

suy ra $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD}$

$$\text{Thành tử } \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0$$

Vậy $HK \perp IJ$

Câu 37. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M . Gọi P là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

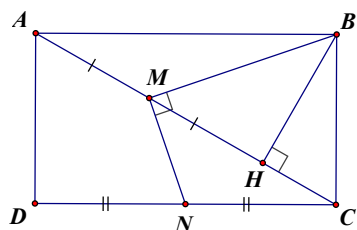
Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \underbrace{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}}_0 - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB}$$

Câu 38. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh $BM \perp MN$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}); \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC})$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC}}_0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = HA \cdot HC \cdot \cos \widehat{AHC} = HA \cdot HC \cdot \cos 180^\circ = -HA \cdot HC = -BH^2$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{MN}.$$

Cách 2:

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NH}) = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CH})$$

$$= -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right)$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{BM} = \left[-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right) \right] \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$= -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH}) + \frac{1}{8}(-\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CH})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$= -\frac{1}{8} \left(\underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 \right) + \frac{1}{8} \left(-\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} + 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\underbrace{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 \right)$$

$$= -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} - 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD}) \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

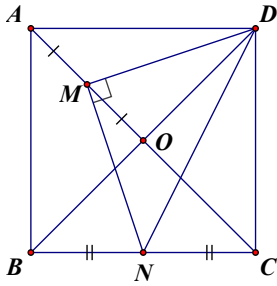
$$2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CH}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}) = 2\underbrace{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA}$$

$$= 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA} = 2CH \cdot AH = 2BH^2$$

$$\text{Do đó } (*) = -\frac{1}{8}(BH^2 - AB^2 + \overrightarrow{CD}^2 + BH^2 - 2BH^2) = 0$$

Câu 39. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông cân.

Lời giải



Gọi $a > 0$ là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$. Nên có $AC = a\sqrt{2}$, $CM = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Áp dụng định lí hàm số cosin cho các tam giác CMN và CDM:

$$\begin{aligned} \bullet \quad MN^2 &= CN^2 + CM^2 - 2CN \cdot CM \cdot \cos \widehat{MCN} \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{4} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad MD^2 &= CD^2 + CM^2 - 2CD \cdot CM \cdot \cos \widehat{DCM} \\ &= a^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{10}}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad DN^2 = CD^2 + CN^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\text{Ta có } MN^2 + MD^2 = ND^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow \text{DMN vuông tại M} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra DMN vuông cân tại M.

Cách 2:

Đặt $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Vì ABCD là hình vuông nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ & $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -\frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{4}(3\vec{a} - \vec{b})$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD} &= \frac{1}{16}(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{16}(3\vec{a}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2) \\ &= \frac{1}{16}(3a^2 - 3b^2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MD} \quad (4). \end{aligned}$$

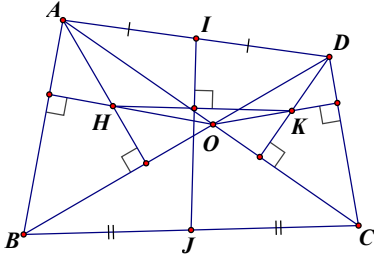
$$\bullet \quad \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2) = \frac{5a^2}{8} \quad (5)$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{MD}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a} - \vec{b})^2 = \frac{1}{16}(9\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2) = \frac{5a^2}{8} \quad (6)$$

Từ (4), (5), (6) suy ra DMN vuông cân tại M.

Câu 40. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh $HK \perp IJ$.

Lời giải



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \underbrace{\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}}_0 + 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$$

$$2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{HK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OH}$$

Câu 41. Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN .

Lời giải

Chọn hệ vec tơ cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}$$

$$\text{Đề } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{c} + 2\vec{b}) \cdot (a\vec{c} - x\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a\vec{c}^2 - x\vec{b} \cdot \vec{c} + 2a\vec{b} \cdot \vec{c} - 2x\vec{b}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\vec{c}^2 + (2a - x)\vec{b} \cdot \vec{c} - 2x\vec{b}^2 = 0$$

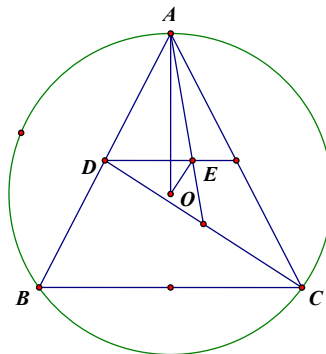
$$\Leftrightarrow a \cdot 9a^2 + (2a - x) \cdot a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - 2x \cdot 9a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 \left(9a + a - \frac{x}{2} - 2x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10a - \frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 4a$$

Câu 42. Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm của AB , E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh $OE \perp CD$

Lời giải



Ta có

$$\begin{aligned}
- \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) \\
- \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC}\right] \\
&= \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \\
\text{Do đó } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{12}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \\
&= \frac{1}{12}(3OA^2 + OB^2 - 4OC^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \text{ tức } OE \perp CD
\end{aligned}$$

DẠNG 5. TẬP HỢP ĐIỂM

Dạng 1: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- $k \neq 0$: Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp điểm M là điểm I.

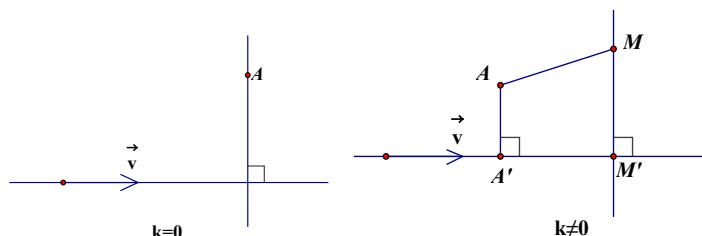
+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là rỗng.

Dạng 2: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$ (2) (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của $\vec{v}$

$k \neq 0$: Gọi $A'M'$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của vector $\vec{v}$; ta có: (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$ (định lý hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của $\vec{v}$ định bởi $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{v}$). Tập hợp các

điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vector $\vec{v}$ tại M' .



Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (3) (A, B cố định, α, β là hằng số và $\alpha + \beta \neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow$ I là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 + 2(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

- Cho hai điểm A, B cố định α, β là hằng số thỏa $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$.
- Cho ba điểm A, B, C cố định α, β, γ là hằng số thỏa $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MI}$.

Câu 43. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow AB \perp CM$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua C vuông góc với AB.

Câu 44. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M thỏa:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

b). $\overrightarrow{MB} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

c). $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

d). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

Lời giải

a). Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MA \perp MI$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường là đường tròn đường kính IA.

b). $\overrightarrow{MB} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

$$\text{Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, nên có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MB} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BG.

$$c). (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$$

Gọi điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow I$ là điểm cố định.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 4\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = 4\overrightarrow{MI}$$

Gọi điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J \text{ là điểm cố định.}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$$

$$= 6\overrightarrow{MJ} + \underbrace{(\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC})}_{\vec{0}} = 6\overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI} \cdot 6\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ, với I, J xác định ở trên.

$$d). \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}^2 = 4\overrightarrow{MB}^2 + 4\overrightarrow{MC}^2 - 8\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = 4(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 4(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} \cdot 2\overrightarrow{MF} = 4\overrightarrow{CB}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{CB}^2 \quad (\text{Với E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB}).$$

Gọi K trung điểm của EF

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KF}) = BC^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KE}) = BC^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}^2 - \overrightarrow{KE}^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow MK^2 = BC^2 + KE^2 = BC^2 + \frac{1}{4}EF^2 = BC^2 + \frac{1}{16}AC^2$$

$$\text{Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm K, bán kính } R = \sqrt{BC^2 + \frac{1}{16}AC^2}$$

Câu 45. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow MA \text{ vuông góc với } BC.$$

Vì A, B, C cố định $\Leftrightarrow$ tập hợp những điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

Câu 46. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2$

Lời giải

$$\text{Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$$

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và G trên BC, thì K cố định và hình chiếu của $\overrightarrow{MG}$ trên BC là $\overrightarrow{HK}$, theo định lý hình chiếu ta có: $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC}$, suy ra

$$(*) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2, \text{ suy ra H cố định (H thuộc đường thẳng BC định bởi } \overrightarrow{HK} = \frac{AB^2}{3BC}). \text{ Vậy}$$

tập hợp những điểm M là đường thẳng vuông góc với BC tại H.

Câu 47. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = a, BC = 3a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Lời giải

$$2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = MB^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + MC^2$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 = BC^2 \quad (*)$$

$$\text{Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{I là điểm cố định và nằm giữa hai điểm A và B. Do}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow |\overrightarrow{AI}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow AI = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3} \Rightarrow BI = \frac{a}{3}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2 + 4\overrightarrow{MB}^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = BC^2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 2IA^2 + 4IB^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} = BC^2$$

$$\Rightarrow 6MI^2 = BC^2 - (2IA^2 + 4IB^2) = 9a^2 - \left[2 \cdot \left(\frac{2a}{3} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3} \right)^2 \right] = \frac{23a^2}{3}$$

$$\Rightarrow MI^2 = \frac{23a^2}{18} \Leftrightarrow MI = a\sqrt{\frac{23}{18}}$$

$$\text{Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính } R = a\sqrt{\frac{23}{18}}.$$

Câu 48. Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$

Lời giải

$$\text{Gọi I là trung điểm của đoạn AD ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$$

$$\text{Gọi J là điểm thỏa mãn hệ thức: } \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J \text{ là}$$

$$\begin{aligned} \text{điểm cố định.} \\ \text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}) \\ &= 6\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}} = 6\overrightarrow{MJ} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MJ} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MJ \text{ vuông góc với MI.}$$

Do I, J cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ.

Câu 49. Cho đoạn $AB = a > 0$ và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

Lời giải

Gọi O là trung điểm của đoạn AB.

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2$$

$$= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}_0 \right) = 2MO^2 + OA^2$$

$$= 2MO^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do } MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}$. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính

$$R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}.$$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 = 0 \Leftrightarrow MO = 0 \Rightarrow M \equiv O$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 < 0$ nên tập điểm là rỗng.

Câu 50. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$;

b) $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MI.$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn đường kính AI.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow CA \perp MG$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G và vuông góc với AC.

Câu 51. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;

b) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$;

c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$;

d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.

Lời giải

a) Giả sử M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính AB.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC \Leftrightarrow M$ nằm trên đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

c) Gọi I là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow MI \perp MG \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính IG.

d) Giả sử $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}| \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -MA \cdot MB$

$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 180^\circ \Leftrightarrow M$ nằm bên trong đoạn thẳng AB

Câu 52. Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thỏa điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.

Lời giải

Với O là trung điểm AB. Ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + OA^2$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + OB^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + OA^2 + OB^2 \quad (1)$$

Vì O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ và OA = OB, do đó (1) trở thành

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2OA^2.$$

Gọi tập hợp các điểm M cần tìm là (L). Ta có:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2(MO^2 + OA^2) = k^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2}{2} - OA^2 \quad (2)$$

Đặt $OA^2 = \frac{m^2}{2}$. (2) trở thành $MO^2 = \frac{1}{2}(k^2 - m^2)$. Xây ra:

i) $k^2 < m^2$ thì $MO^2 < 0$: (L) = $\emptyset$.

ii) $k^2 = m^2$ thì $MO^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$: (L) = { O }.

iii) $k^2 > m^2 \Leftrightarrow MO = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - m^2)}$: (L) là đường tròn tâm O có bán kính là

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - m^2)}.$$

Câu 53. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$, E là trung điểm của DC. Ta có $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 6\overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow MI \perp ME$. Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính IE.

Câu 54. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a). $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b). $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

Lời giải

Dựng hình bình hành ABEC, ta có:

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow MB^2 + MC^2 - MA^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2$$

$$= ME^2 + 2\overrightarrow{ME}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA}) + EB^2 + EC^2 - EA^2$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow ME^2 = EA^2 - (EB^2 + EC^2)$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})^2 - (EB^2 + EC^2)$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Nếu $\hat{A}$ tù: Tập hợp điểm M là $\emptyset$

Nếu $\hat{A}$ vuông: Tập hợp điểm M là $\{E\}$

Nếu $\hat{A}$ nhọn: Tập hợp điểm M là đường tròn $(E; \sqrt{2AB \cdot AC \cdot \cos A})$

b).

Cách 1: Gọi I trung điểm của BC, J là trung điểm của AI. Ta có $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{BC^2}{2} - 2MA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - MI^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng vuông góc với AI tại điểm H, xác định bởi:

$$\overline{JH} = \frac{BC^2}{8AI}$$

Cách 2: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác ABC.

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow MO \perp AG$$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng qua O vuông góc với AG.

Câu 55. Cho hai điểm A, B cố định và số k cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2} \quad (*)$$

$$\text{Gọi I trung điểm của AB, khi đó có } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\text{Thay vào (*) ta được: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$

$$\bullet \quad k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Rightarrow M \text{ tập rỗng.}$$

$$\bullet \quad k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Rightarrow M \equiv I$$

$$\bullet k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Rightarrow M \text{ chạy trên đường tròn tâm I bán kính } R = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$$

Câu 56. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} &= AB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}) = AB^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} &= AB^2 \Leftrightarrow MB \cdot GC \cdot \cos(\widehat{MB, GC}) = AB^2 (*) \end{aligned}$$

Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B trên GC , trên CB_1 ta lấy điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{B_1H} = \frac{AB^2}{GC} \overrightarrow{B_1C}$
 $\overrightarrow{B_1H} \uparrow \uparrow \overrightarrow{B_1C} \uparrow \uparrow \overrightarrow{GC}$, vì B_1 cố định nên H cố định $\Rightarrow M$ chạy trên đường thẳng CG đi qua H .

Câu 57. Trong mặt phẳng Oxy cho cho tam giác ABC có trọng tâm G .

- Xác định vị trí điểm P thỏa $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.
- Chứng minh C, G, P thẳng hàng.
- Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

Lời giải

- Gọi I là trung điểm của AB , theo tính chất đường trung tuyến $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$
 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PI} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CP}) - 4\overrightarrow{CP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CI}$ (1)
- Theo tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IG} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IC} - 3\overrightarrow{IG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$ (2)

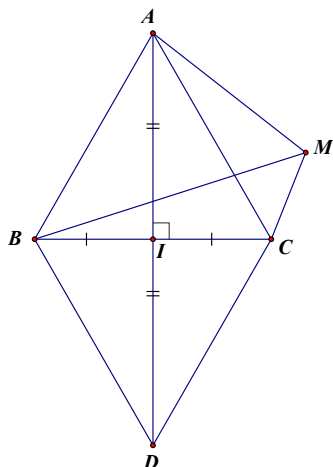
Từ (1) & (2) $\Rightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{GI}$

- $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + 4\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CI}|$
 $\Leftrightarrow |\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HM} + 2(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HM})| = |\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow |\underbrace{\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HC}}_{\vec{0}} - 3\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{CI}|$
 $\Leftrightarrow 3|\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow HM = \frac{CI}{3} \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm H bán kính $R = \frac{CI}{3}$.

Câu 58. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và M là một điểm thay đổi:

- Chứng minh $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.
- Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).

Lời giải



a). Nhận xét: AD và BC có trung điểm I chung.

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IB}^2 = MI^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD}$$

$$= -(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}) = -\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 = -MI^2 + \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2 = \frac{a^2}{2} \text{ không đổi.}$$

b). Theo câu a), ta có:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k \Leftrightarrow AM^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow AM^2 = k - \frac{a^2}{2}$$

– Nếu $k < \frac{a^2}{2}$ thì quỹ tích là tập rỗng.

– Nếu $k = \frac{a^2}{2}$ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm A.

– Nếu $k > \frac{a^2}{2}$ thì quỹ tích là đường tròn tâm A, bán kính là $\sqrt{k - \frac{a^2}{2}}$.

Câu 59. Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$

b). $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$

(với k là một số cho trước).

Lời giải

a).

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})\overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

(Với D là điểm sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$).

Do đó điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = k$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} \text{ (Với M' là hình chiếu của M trên AD).}$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường thẳng vuông góc với AD tại điểm M' sao cho

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AD}.$$

b).

trước hết ta có

$$2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})^2 = MB^2 + MC^2 - BC^2 \text{ nên}$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{MB^2 + MC^2 - BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}MB^2 - \frac{1}{2}MC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2$$

$$\text{Do vậy điểm M thỏa mãn } \frac{3}{2}MB^2 - \frac{1}{2}MC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2 \quad (1)$$

Gọi G là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 3GB^2 - GC^2, \text{ mà } GB = \frac{BC}{2}, GC = \frac{2BC}{2} \text{ nên}$$

$$3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 - \frac{3}{2}BC^2$$

$$\text{Thành thử điều kiện (1) trở thành: } 2MG^2 - \frac{3}{2}BC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = k + \frac{5a^2}{4} - b^2 + c^2 \text{ (với a, b, c là độ dài ba cạnh BC, CA, AB).}$$

$$\text{– Nếu } k < -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích là tập rỗng.}$$

$$\text{– Nếu } k = -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm M.}$$

$$\text{– Nếu } k > -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích điểm M là đường tròn tâm G bán kính } \sqrt{k + \frac{5a^2}{4} - b^2 + c^2}.$$

Câu 60. Cho tam giác ABC số a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.

Lời giải:

Chú ý, tổng các hệ số $3 + 1 - 4 = 0$ nên không tồn tại tâm tỉ cự của hệ điểm A, B, C.

$$\text{Gọi I là điểm sao cho } 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Do đó I cố định và

$$3MA^2 + MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$

$$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})^2$$

$$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \vec{0}$$

$$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2.$$

Ta có

$$3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a \Leftrightarrow 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 - 4MC^2 = a$$

$$\Leftrightarrow MC^2 - MI^2 = \frac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}.$$

Đặt $k = \frac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}$ không đổi, bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$MC^2 - MI^2 = k.$$

Gọi O là trung điểm của CI và H là hình chiếu của M trên CI , ta có

$$MC^2 - MI^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MI}^2 = (\overline{MC} + \overline{MI})(\overline{MC} - \overline{MI}) = 2\overline{MO} \cdot \overline{IC} = 2\overline{HO} \cdot \overline{IC}.$$

Do đó

$$MC^2 - MI^2 = k \Leftrightarrow 2\overline{HO} \cdot \overline{IC} = k \Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot \overline{CI} = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot \overline{CI} = k \Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot (\overline{CI})^2 = k \cdot \overline{CI}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{k}{2\overline{CI}^2} \overline{CI}.$$

Nên điểm H cố định. Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H xác định ở trên.

Câu 61. Cho tam giác ABC và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.

Lời giải:

Gọi I là điểm sao cho

$$2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 5\overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overline{IA} + 3(\overline{AB} - \overline{AI}) + 5(\overline{AC} - \overline{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{AB} + 5\overline{AC} = 10\overline{AI} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{3}{10}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Do đó điểm I xác định duy nhất và

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 &= 2\overline{MA}^2 + 3\overline{MB}^2 + 5\overline{MC}^2 \\ &= 2(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + 3(\overline{MI} + \overline{IB})^2 + 5(\overline{MI} + \overline{IC})^2 \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 + 2\overline{MI}(2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 5\overline{IC}) \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 + 2\overline{MI} \cdot \vec{0} \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2 \Leftrightarrow 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{10}(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2).$$

□ Nếu $k^2 > 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính

$$R = \sqrt{\frac{1}{10}(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2)}.$$

□ Nếu $k^2 = 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M gồm chỉ một điểm O .

□ Nếu $k^2 < 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M là rỗng.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$.

B. $\alpha = 0^\circ$.

C. $\alpha = 90^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Câu 4. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\hat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Câu 5. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$.

D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

Câu 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

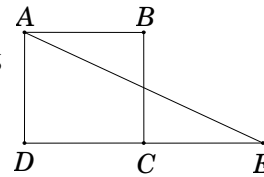
Lời giải

Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

Khi đó $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2$.



Câu 8. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 9. Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. **D.** $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh về trái với về phải.

Phương án A: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = 2x \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$ nên loại **A.**

Phương án B: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot AC \cos 120^\circ = -2$ nên loại **B.**

Phương án C: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$ nên chọn **C.**

Câu 10. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** $-\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = BA \cdot CA \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} a^2$.

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. **B.** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ và $\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên loại B.

Phương án C: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = AB \cdot AB \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot DC \cdot \cos 180^\circ = -AB^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ nên chọn C.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A: Do $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = DA \cdot CB \cdot \cos 0^\circ = a^2$ nên loại A.

Phương án B: Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = -a^2$ nên chọn B.

Câu 13. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng:

- A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0. D. $9a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = -\frac{9a^2}{2}$ nên chọn B.

Câu 14. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 130^\circ$ nên loại A.

Phương án B: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 40^\circ$ nên loại B.

Phương án C: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ$ nên loại C.

Phương án D: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ$ nên chọn D.

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ sau đó mới tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 135^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

- A. 0. B. a . C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Câu 18. Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:

- A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên loại B.

Phương án C: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$ nên loại C.

Phương án D: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên chọn D.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A. $\frac{3a^2}{4}$. B. $\frac{-3a^2}{4}$. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $\frac{-3a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}.$$

Câu 20. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng

- A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
D. A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \text{ nên } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ ngược hướng}$$

Câu 21. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A. $\sqrt{21}$. B. $\sqrt{61}$. C. 21. D. 61.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}.$$

- Câu 22.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A. $3a^2$. B. $-3a^2$. C. $3a$. D. 0 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

- Câu 23.** Cho 2 vector đơn vị $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$
- A. 7 . B. 5 . C. -7 . D. -5 .

Lời giải

Chọn C

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, (3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -7.$$

- Câu 24.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- A. $-9a^2$. B. $15a^2$. C. 0 . D. $9a^2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2 \text{ nên chọn } \underline{\text{A.}}$$

- Câu 25.** Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A. 9 . B. 81 . C. 3 . D. 5 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 81 \text{ nên chọn } \underline{\text{B.}}$$

- Câu 26.** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$
- A. $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$. B. $\sqrt{7 - \sqrt{3}}$. C. $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. D. $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}.$$

- Câu 27.** Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :
- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

- Câu 28.** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :
- A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 29. Cho hai điểm $A(2,2)$, $B(5,-2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$

- A. $M(1,6)$. B. $M(6,0)$. C. $M(1,0)$ hay $M(6,0)$. D. $M(0,1)$.

Lời giải**Chọn C**

Gọi $M(x;0)$, với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = (x-2; -2)$, $\overrightarrow{BM} = (x-5; 2)$. Theo YCBT ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow M(1;0) \\ x=6 \Rightarrow M(6;0) \end{cases}, \text{ nên chọn } \underline{\text{C.}}$$

Câu 30. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Lời giải**Chọn C**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và **D.**

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ **Chọn C.**

- A đúng, vì $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
- B đúng, vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 31. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải**Chọn C**

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

Câu 32. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\hat{A}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ **B.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ **C.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ **D.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$$

Câu 34. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ **B.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ **C.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ **D.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và $AC \longrightarrow I(4; -1)$. nằm giữa A, C .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$$

$$\text{Cách khác. Ta có } AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

Câu 35. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ **B.** $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ **C.** $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ **D.** $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$$

Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A. $P = -1$ **B.** $P = 3a^2$ **C.** $P = -3a^2$ **D.** $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2 \\ &= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2 \end{aligned}$$

Câu 37. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2} \end{aligned}$$

Câu 38. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều. **B.** tam giác OAB cân tại O .
C. tam giác OAB vuông tại O . **D.** tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 &= 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA \end{aligned}$$

Câu 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

Câu 40. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

Câu 41. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. **D. đường tròn.**

Lời giải

Chọn D.

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI} \text{ . } (*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI .

Câu 42. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. **D. đường tròn.**

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG} \text{ . } (*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG .

Câu 43. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

- A. một điểm. **B. đường thẳng.** C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B . Khi đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB$.

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB .

Câu 44. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:

- A. một điểm.** B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$

$$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có } MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \longrightarrow M \equiv I.$$

Câu 45. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính tích vô hướng

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$.

Lời giải

Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$$

Câu 46. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

A. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$.

B. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$.

C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$.

D. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$.

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$$

$$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$$

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2.$$

Câu 47. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $CD = BD = 5\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{10}$, $AC = 10$. Tìm cosin góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DB}$

A. $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$.

B. $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$.

C. $\frac{4}{5\sqrt{2}}$.

D. $\frac{3}{5\sqrt{2}}$.

Lời giải

Với điểm O bất kỳ ta có:

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\text{Mặt khác } 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự thay vào ta tính được

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2}{AC \cdot BD} = \frac{20 + 50 - 20 - 90}{10.5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5\sqrt{2}}.$$

Câu 48. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a, MN = a\sqrt{3}$.

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$. **B.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$. **D.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ suy ra

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2a^2.$$

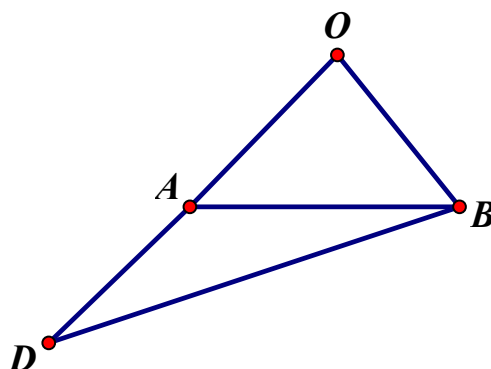
$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{2a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ.$$

Câu 49. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

- A. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$. **B.** $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$.
C. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$. **D.** $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng của O qua A .

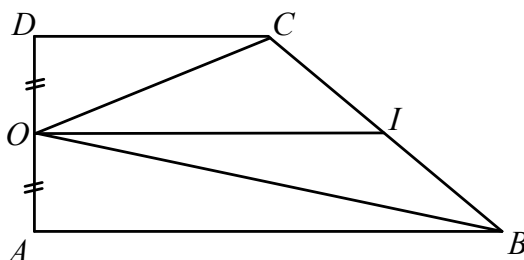
$$|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

Câu 50. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vector tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. C. a . **D.** $3a$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2OI.$$

Xét hình thang $ABCD$ có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI = \frac{AB+CD}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

Câu 51. Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.**

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường cao AM trong tam giác đều cạnh $2a$ là: $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy khẳng định đúng là $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Câu 52. Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. **B. $a\sqrt{5}$.** C. $5a$. D. $2a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{AB}\right)^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$ (vì $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$)
 $= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow |2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{5}$.

Câu 53. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. **D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

Câu 54. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

- A. $8a^2$.** B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

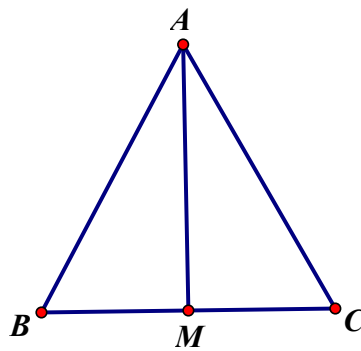
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$.

Câu 55. Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng

- A. -18 . B. 27 . C. 18 . **D. -27 .**

Lời giải

Chọn D



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{BAM} = 30^\circ$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

Câu 56. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

A. $\sqrt{11}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{12}$.

D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \left(|\vec{a} + \vec{b}| \right)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

$$\Rightarrow \left(|\vec{a} + \vec{b}| \right)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

Câu 57. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

A. $P = -2$.

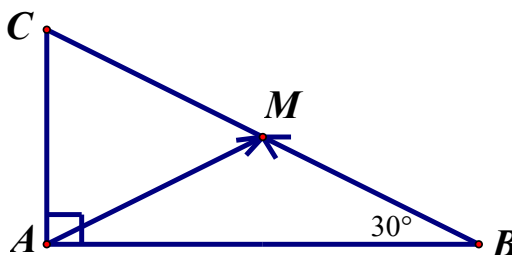
B. $P = 2\sqrt{3}$.

C. $P = 2$.

D. $P = -2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Câu 58. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$.

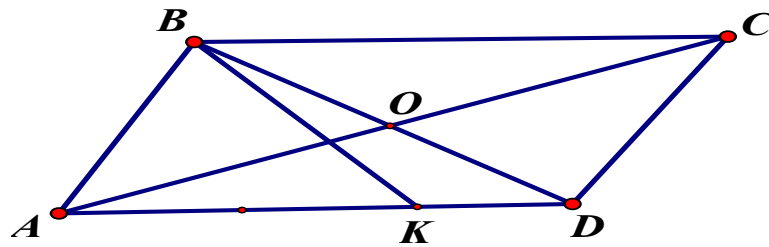
B. $6a^2$.

C. 0.

D. a^2 .

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$

Câu 59. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Câu 60. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Câu 61. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$.

D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải

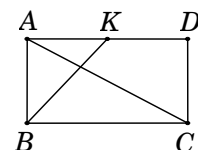
Chọn A

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$



$$\longrightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

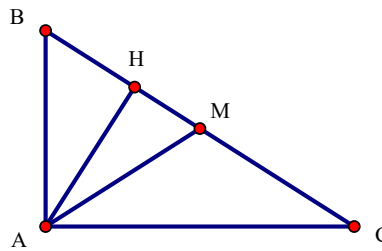
Câu 62. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Tính cạnh AB, AC .

A. $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. **B.** $AB = a, AC = a$.

C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. **D.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có $\overrightarrow{HM}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ lên BC .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ mà } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}, BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{HM} \text{ cùng chiều } \overrightarrow{BC} \text{ và } HM \cdot BC = \frac{a^2}{2}, HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Có } BH = BM - HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Có } AB^2 = BH \cdot BC = a^2 \Rightarrow AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

Câu 63. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

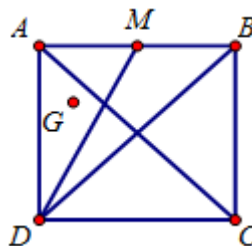
A. $\frac{21a^2}{4}$.

B. $\frac{11a^2}{4}$.

C. $\frac{9a^2}{4}$.

D. $\frac{a^2}{4}$.

Lời giải



$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ADM \text{ nên } \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) &= \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}\right) \\ &= -\frac{5}{4}AB^2 - 4AD^2 = -\frac{21a^2}{4}. \end{aligned}$$

Câu 64. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|\vec{2a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} |\vec{2a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7} &\Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 7 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 65. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

A. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. B. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{6}$. C. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{4}$. D. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \vec{u}^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \Leftrightarrow |\vec{u}| = 3$$

$$\vec{v}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow |\vec{v}| = 1$$

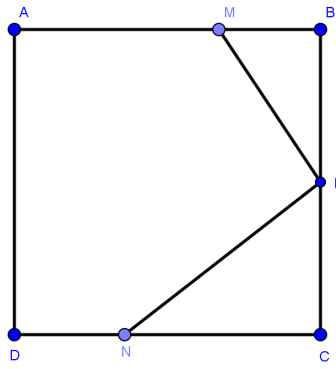
$$\text{Suy ra } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = -\frac{1}{6}$$

Câu 66. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \widehat{MNP}$.

A. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$. B. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$.

C. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$

Mặt khác $|\overrightarrow{NM}| = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

Câu 67. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$. **B.** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CG} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

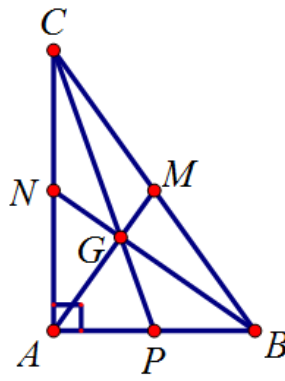
Suy ra $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \right) = \frac{3}{8}$.

Câu 68. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $BC=2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

A. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$. **B.** $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$.

C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$.

Lời giải



Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$$

Câu 69. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$.

Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. **B.** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. **C.** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. **D.** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

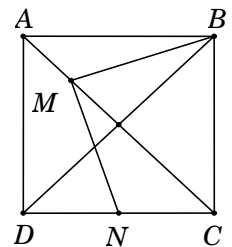
$$\bullet \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \text{ Suy ra:}$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{16}(3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{16}(0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.$$



Câu 70. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R. Tính R.

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

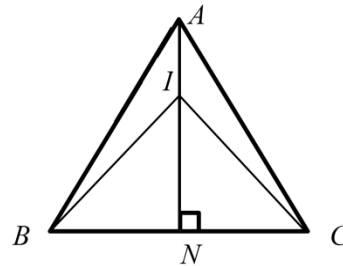
B. $R = \frac{a}{4}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm đoạn BC.

Gọi I là điểm thỏa: $4\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IA} + 2\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} + \vec{IN} = \vec{0}$, nên điểm I thuộc đoạn thẳng AN sao cho $IN = 2IA$.

Khi đó: $IA = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, và $IN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$IB^2 = IC^2 = IN^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

Ta có: $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$.

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 6MI^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Câu 71. Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$ là

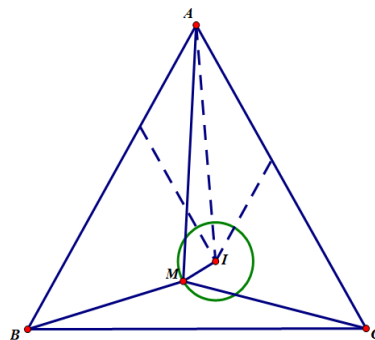
A. Tập rỗng.

B. Đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.

C. Đường tròn cố định có bán kính $R = 3$ cm. D. Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $|\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{AB}| = 18$.

Dựng điểm I thỏa mãn $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{9}\vec{AC}$.

Khi đó: $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow 9|\vec{MI}| = 18 \Leftrightarrow IM = 2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.

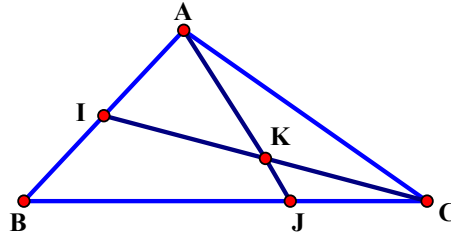
Câu 72. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính IJ . B. Đường tròn đường kính IK .
C. Đường tròn đường kính JK . D. Đường trung trực đoạn JK .

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$.

$$\text{Nhu vậy } (3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

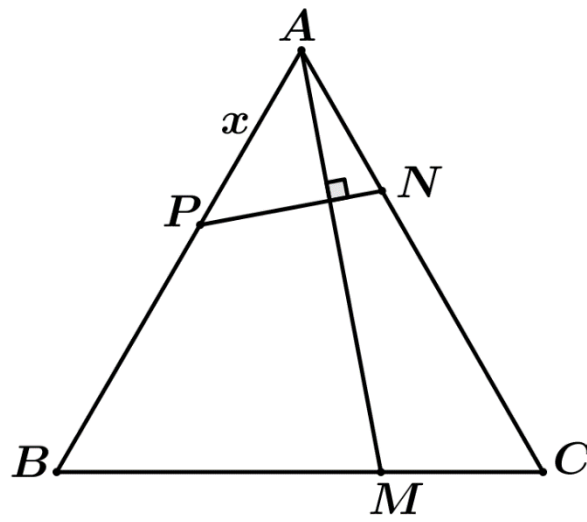
Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định (đpcm).

Câu 73. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

- A. $x = \frac{5a}{12}$. B. $x = \frac{a}{2}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{7a}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$, ta có $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3} (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3} (\vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{x}{a} \overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{1}{3a} (-3x\vec{b} + a\vec{c})$

Theo yêu cầu bài toán ta có $AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$

$\Leftrightarrow -3x\vec{b} \cdot \vec{b} + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}$.

Câu 74. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{3}{7}$.

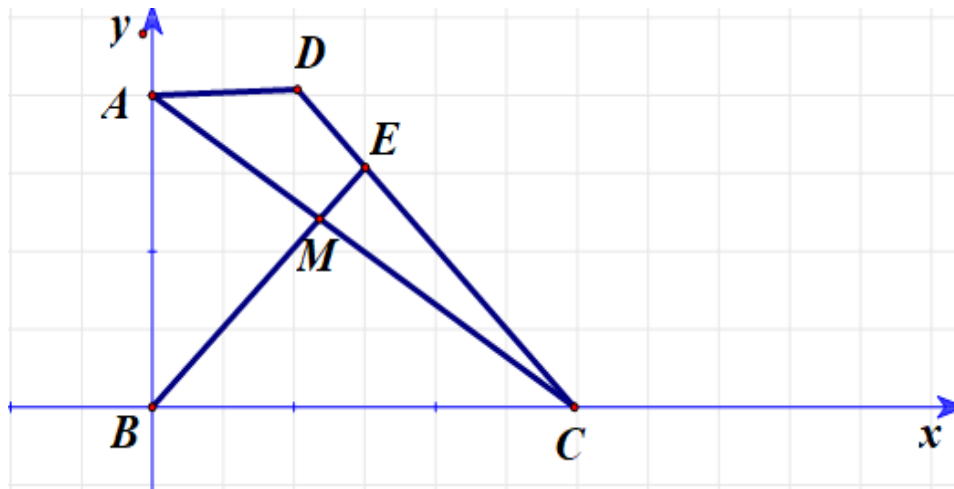
C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B , điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox .



Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2-2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (3t; 2-2t)$ và $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; \frac{-4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.