

**Câu 1 (5 điểm).** Giải hệ phương trình sau trên tập số thực  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$$

**Câu 2 (6 điểm).** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = m \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Khi  $m = \frac{3}{2}$ , chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Xác định tất cả các giá trị của  $m$  để dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Câu 3 (2 điểm).** Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện:

$$f[(x+1)f(y)] = yf[f(x)+1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Câu 4 (5 điểm).** Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Lấy điểm  $H$  trên đoạn thẳng  $AB$  ( $H$  không trùng  $A, O, B$ ). Đường thẳng qua  $H$  vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $C$ . Đường tròn đường kính  $CH$  cắt  $AC, BC$  và  $(O)$  lần lượt tại  $D, E$  và  $F$ .

a) Chứng minh rằng các đường thẳng  $AB, DE$  và  $CF$  đồng quy.

b) Đường tròn tâm  $C$  bán kính  $CH$  cắt  $(O)$  tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $P, D, E, Q$  thẳng hàng.

**Câu 5 (2 điểm).** Cho 167 tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_{167}$  có tính chất:

i)  $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_{167}| = 2004$ ;

ii)  $|A_i| = |A_j| \cdot |A_i \cap A_j|$  với  $i, j = 1, 2, \dots, 167$  và  $i \neq j$ .

Hãy:

a) Chứng minh rằng  $|A_i| = 12$  với  $i = 1, 2, \dots, 167$ .

b) Tính  $\left| \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right|$ .

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

Chữ kí giám thị số 1: ..... Chữ kí giám thị số 2: .....

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN LỚP 11 CHUYÊN**

(Hướng dẫn chấm gồm 03 trang)

**Chú ý:** Những cách giải khác HDC mà đúng thì cho điểm theo thang điểm đã định.

| Câu                | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Điểm |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>1<br/>(5đ)</b>  | $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y) + xy(x^2 - y) + xy = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1.0  |
|                    | <p>Đặt <math>\begin{cases} a = x^2 - y \\ b = xy \end{cases}</math>. Hệ trở thành: <math>\begin{cases} a + ab + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases} \quad (*)</math></p> $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + a - 2) = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases}$ <p>Từ đó ta có: <math>(a; b) \in \{(0; 1); (1; 0); (-2; -3)\}</math></p>                                 | 1.0  |
|                    | Với $(a; b) = (0; 1)$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1.0  |
|                    | Với $(a; b) = (1; 0)$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) \in \{(0; -1); (1; 0); (-1; 0)\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1.0  |
|                    | <p>Với <math>(a; b) = (-2; -3)</math> ta có hệ: <math>\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases}</math></p> $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ (x+1)(x^2 - x + 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1; y = 3$ <p>Kết luận: Hệ phương trình có các nghiệm:<br/><math>(x; y) \in \{(1; 1); (0; -1); (1; 0); (-1; 0); (-1; 3)\}</math></p> | 1.0  |
|                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |
| <b>2<br/>(6 đ)</b> | a) Bằng quy nạp, chứng minh được $u_n \in (1; 2) \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1.0  |
|                    | Xét $f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad \forall x \in (1; 2)$<br>$f'(x) = 2x - 2 > 0, \quad \forall x \in (1; 2)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.5  |
|                    | Có $u_2 = u_1^2 - 2u_1 + 2 = \frac{5}{4} < u_1$ . Suy ra $(u_n)$ là dãy giảm $(2)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1.0  |
|                    | Từ (1), (2) suy ra $\exists L \in \mathbb{R} : \lim u_n = L \quad (0 < L < 2)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |      |
|                    | Chuyển qua giới hạn, được: $L = L^2 - 2L + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} L = 1 \quad (t / m) \\ L = 2 \quad (l) \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1.0  |
|                    | Vậy $\lim u_n = 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.5  |
|                    | <p>b) Xét <math>f(x) = x^2 - 2x + 2</math><br/><math>f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1</math><br/><math>f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.5  |



|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                          | $AB$ là trục đẳng phương của $(O)$ và đường tròn $(ABED)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.5 |
|                          | $DE$ là trục đẳng phương của $(ABED)$ và đường tròn đường kính $CH$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0.5 |
|                          | $CF$ là trục đẳng phương của $(O)$ và đường tròn đường kính $CH$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0.5 |
|                          | Suy ra $DE, AB$ và $CF$ đồng quy.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.5 |
|                          | b) Gọi $M$ là giao điểm của $DE, AB$ và $CF$ .<br>Ta có $PQ$ là trục đẳng phương của $(C)$ và $(O)$ nên $OC \perp PQ$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.5 |
|                          | Ta cũng dễ thấy $OC \perp DE$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0.5 |
|                          | Hơn nữa $M$ chính là tâm đẳng phương của ba đường tròn $(C)$ , $(O)$ và đường tròn đường kính $CH$ . Suy ra $PQ$ đi qua $M$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0.5 |
|                          | Vậy $DE, PQ$ cùng đi qua $M$ và cùng vuông góc với $OC$ nên trùng nhau. Suy ra $P, D, E, Q$ thẳng hàng.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.5 |
| <b>5</b><br><b>(2 đ)</b> | a) Giả $ A_i \cap A_j  = k \neq 1$ . Suy ra $ A_i  = k \cdot  A_j , \forall i, j = \overline{1, 167}, i \neq j$ (mâu thuẫn)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0.5 |
|                          | Do đó $ A_i \cap A_j  = 1$ và $ A_i  = 12$ với $i, j = 1, 2, \dots, 167$ và $i$ khác $j$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5 |
|                          | b) Ta sẽ chứng minh $\left  \bigcap_{i=1}^{167} A_i \right  = 1$ (*).<br>Thật vậy, xét tập $A_1$ . Từ $ A_1 \cap A_i  = 1$ với $i = 2, \dots, 167$ suy ra mỗi tập $A_2, A_3, \dots, A_{167}$ chứa đúng một phần tử của $A_1$ . Do $ A_1  = 12$ nên theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại và có thể giả sử là $A_2, \dots, A_{15}$ cùng chứa phần tử $a$ thuộc $A_1$ .<br>Nếu có $i > 15$ sao cho $a \notin A_i$ thì $ A_i \cap A_j  = 1 \Rightarrow  A_j \cap (A_i \setminus \{a\})  = 1$ .<br>Vậy: $A_j \cap (A_i \setminus \{a\}) = \{b_j\}$ với $j = 2, 3, \dots, 15$ (1). Dễ thấy các $b_j$ là phân biệt nên từ (1) suy ra $A_i$ chứa quá 12 phần tử. Trái với kết luận $ A_i  = 12$ . | 0.5 |
|                          | Từ (*) và $ A_i \cap A_j  = 1, i, j = 1, 2, \dots, 167$ và $i$ khác $j$ suy ra:<br>$\left  \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right  = \left  \left( \bigcup_{i=1}^{167} (A_i \setminus \{a\}) \right) \cup \{a\} \right  = \left  \bigcup_{i=1}^{167} (A_i \setminus \{a\}) \right  +  \{a\}  = 167 \cdot 11 + 1 = 1838.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0.5 |