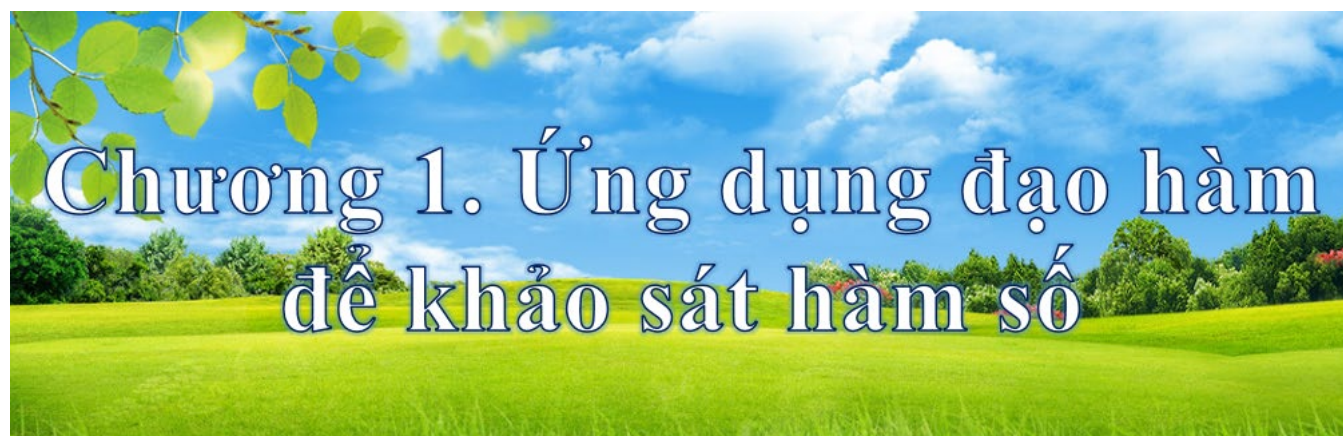




§1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa tính đơn điệu:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K .

- Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K thì được gọi là **đơn điệu** trên K .

🔗 **Nhận xét:** Trong chương trình lớp 10, để xét **sự đồng biến, nghịch biến** của hàm $f(x)$, ta hay

dùng tỉ số: $T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \forall x_1 \neq x_2 \text{ và } x_1, x_2 \in K$. Cụ thể là:

- Nếu $T > 0$ thì hàm $f(x)$ **đồng biến** trên K . (Tức là $f(x_1) - f(x_2)$ cùng dấu với $x_1 - x_2$).
- Nếu $T < 0$ thì hàm $f(x)$ **nghịch biến** trên K . (Tức là $f(x_1) - f(x_2)$ trái dấu với $x_1 - x_2$).

2. Định lý (tính đơn điệu và dấu của đạo hàm):

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm $f(x)$ **đồng biến** trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm $f(x)$ **nghịch biến** trên K .

🔗 **Chú ý:**

- Định lý trên được mở rộng với $f'(x) \geq 0$ (hay $f'(x) \leq 0$) trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số **hữu hạn điểm**; khi đó kết luận hàm số **đồng biến** (hay **nghịch biến**) vẫn đúng.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Nếu hàm số $y = f(x)$ **liên tục** trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số **đồng biến** trên $[a; b]$. (Tương tự cho trường hợp hàm số **nghịch biến** trên $[a; b]$).

Dạng toán 1

Sử dụng đạo hàm để xét tính đơn điệu của hàm số

◆ Bài toán 1: Tính đạo hàm, lập bảng biến thiên và suy ra tính đơn điệu hàm số.

📌 Phương pháp:

- Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- Bước 2:** Tính $y' = f'(x)$; cho $y' = 0 \xrightarrow{\text{Tìm nghiệm}} x_1, x_2, \dots$ (nếu có).
- Bước 3:** Lập bảng biến thiên.
- Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên các khoảng của tập xác định.

📌 Lưu ý:

- Khi lập bảng biến thiên, việc **xét đúng dấu cho đạo hàm** là bước quyết định, nên học sinh phải tuyệt đối chính xác.
- Ở lớp 10, khi các em **xét dấu cho tam thức bậc hai**, học sinh đã quen với thuật ngữ “**trong trái ngoài cùng**”. Nghĩa là: Khu vực **bên trong hai nghiệm** thì biểu thức **trái dấu a** , khu vực **ngoài hai nghiệm** thì biểu thức **cùng dấu a** . Tuy nhiên nếu đạo hàm không có dạng bậc hai, thì thuật ngữ “**trong trái ngoài cùng**” sẽ không thể áp dụng. Vậy có quy tắc nào chung cho việc xét dấu mọi bài toán?

📌 Quy tắc chung để xét dấu đạo hàm:

- Để xét dấu đạo hàm y' trên một khoảng $(\alpha; \beta)$ nào đó, ta chọn một giá trị $x_0 \in (\alpha; \beta)$ rồi thay vào y' , từ đó suy ra được dấu của y' trên $(\alpha; \beta)$.
- Với quy tắc này, mọi hàm số có đạo hàm phức tạp ta đều có thể được xét dấu chính xác sau khi ta tìm được nghiệm của đạo hàm.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$. B. Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 42$		$\searrow 10$		$\nearrow +\infty$

- Kết luận: Hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$. Chọn $\rightarrow$ **C**

Ví dụ 2. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$ là

- A. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 C. $(-1; 0)$ và $(0; 1)$. D. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = -4x^3 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow -3$		$\searrow -4$		$\nearrow -3$		$\searrow -\infty$

- Kết luận: Hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng: $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$. Chọn $\rightarrow$ **A**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 3. Chọn mệnh đề đúng về hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

- A. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.
- B. Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.
- C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
- D. Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- Ta có: $y' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$. Nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	$-\infty$
			2

Chọn → **C**

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \sqrt{3x-x^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.
- B. $(0; 3)$.
- C. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.
- D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = [0; 3]$.
- Ta có: $y' = \frac{(3x-x^2)'}{2\sqrt{3x-x^2}} = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (nhận).
- Bảng biến thiên:

x		0	$\frac{3}{2}$	3	
y'		+	0	-	
y		0	$\frac{3}{2}$	0	

- Kết luận: Hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{3}{2}\right)$, nghịch biến trên $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Chọn → **A**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = (-\infty; 2]$.
- Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{2-x}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 6$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+		-	
y	$-\infty$	6	5	

- Vậy ta hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn $\rightarrow$ **B**

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x$, với $x \in [0; \pi]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $[0; \pi]$.
- B. Hàm số nghịch biến trên $[0; \pi]$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\left[\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right]$.

Lời giải:

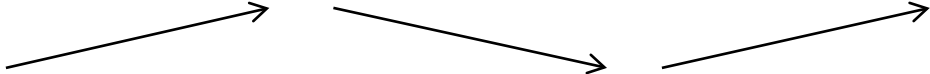
- Tập xác định: $D = (-\infty; 2]$.
- Đạo hàm: $y' = \frac{1}{2} + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} + \sin 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \text{ Do } \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} \\ x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$	π	
y'		+	0	-	0	+
y						

- Ta thấy mệnh đề đúng là: Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left[\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right]$. Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 7. Hàm số $y = |2x^2 - 3x - 5|$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right)$ B. $\left(-1; \frac{5}{2}\right)$.
- C. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$. D. $\left(-1; \frac{3}{4}\right)$ và $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = (-\infty; 2]$.

- Áp dụng công thức $(|u|)' = (\sqrt{u^2})' = \frac{(u^2)'}{2\sqrt{u^2}} = \frac{2u \cdot u'}{2|u|} = \frac{u \cdot u'}{|u|}$, ta có: $y' = \frac{(2x^2 - 3x - 5)(4x - 3)}{2|2x^2 - 3x - 5|}$.

$$\text{Xét } y' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 3x - 5)(4x - 3) \geq 0 \\ |2x^2 - 3x - 5| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x \geq \frac{5}{2} \\ x \neq -1 \wedge x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{3}{4} \\ x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

- Ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng: $\left(-1; \frac{3}{4}\right)$ và $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. Chọn $\rightarrow$ **D**

Bài toán 2: Xét dấu đạo hàm cho sẵn để kết luận về tính đơn điệu hàm số

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CẦN LƯU Ý:

Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ cùng có đạo hàm trên tập D . Khi đó:

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x) \text{ với } k \text{ là hằng số}$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{Thay } x \text{ bởi } u} y = f(u)$$

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng:

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải:

😊 Cách 1: Sử dụng bảng xét dấu:

- Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y	$+\infty$						$+\infty$

- Ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Chọn A

😊 Cách 2: Giải bất phương trình (cách này thuận lợi hơn trong trắc nghiệm).

- Ta có: $f'(x) = x^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$ (do $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x \geq 1$.
- Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2018}(x-2)^{2019}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$.
 B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số có ba điểm cực trị.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Lời giải:

- Ta có $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2018}(x-2)^{2019} = (x+2)(x-1)^{2018}(x-2)^{2018}(x-2)$
 $= (x^2 - 4)(x-1)^{2018}(x-2)^{2018}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Xét $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x-1)^{2018}(x-2)^{2018} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$ (do $\begin{cases} (x-1)^{2018} \geq 0 \\ (x-2)^{2018} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$)
- $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$. Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$. Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 10. Cho $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 + 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -5f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 2)$ và $(3; +\infty)$.

B. $(3; +\infty)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải:

- Đặt $g(x) = -5f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có $g'(x) = -5f'(x)$ mà $f'(x) = -x^2 + 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $g'(x) = -5(-x^2 + 5x - 6) = 5x^2 - 25x + 30$;
- Xét $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 25x + 30 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$. Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(2; 3)$.

Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(3; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-1; 0)$.

Lời giải:

- Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2x = (3-x)(x^2-1) + 2x - 2x = (3-x)(x^2-1)$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$				

- Ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; 3)$.

Chọn $\rightarrow$ **C**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y = f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2021$ trong đó $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(1-x) + 2021x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 3)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải:

▪ Đặt $h(x) = f(1-x) + 2021x + 2020 \Rightarrow h'(x) = (1-x)' \cdot f'(1-x) + 2021 = -f'(1-x) + 2021$.

▪ Theo đề $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2021 \Rightarrow f'(1-x) = x(3-x)g(1-x) + 2021$.

Thay x bởi $1-x$

▪ Do đó $h'(x) = -[x(3-x)g(1-x) + 2021] + 2021 = x(x-3)g(1-x)$.

Mặt khác $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(1-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

▪ Do đó $h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$. Chọn $\rightarrow$ **A**

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x(2x+1) \cdot g(x) + 1$ trong đó $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(2-x) + x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải:

▪ Đặt $h(x) = f(2-x) + x$, suy ra $h'(x) = (2-x)' \cdot f'(2-x) + x' = -f'(2-x) + 1$.

▪ Ta có $f'(x) = x(2x+1) \cdot g(x) + 1$

$$\Rightarrow f'(2-x) = (2-x)[2(2-x)+1]g(2-x) + 1 = (2-x)(5-2x)g(2-x) + 1.$$

Do đó: $h'(x) = -[(2-x)(5-2x)g(2-x) + 1] + 1 = (x-2)(5-2x)g(2-x)$.

▪ Theo đề, $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(2-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó:

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(5-2x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

▪ Vậy hàm số $y = f(2-x) + x$ đồng biến trên $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. Chọn $\rightarrow$ **A**

Bài toán 3: Dựa vào bảng biến thiên có sẵn để kết luận về tính đơn điệu

Phương pháp chung:

- Đặt $g(x)$ là hàm số cần xét, ta tính đạo hàm $g'(x)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Kết hợp các nguyên tắc xét dấu tích, thương, tổng (hiệu) các biểu thức để có được bảng xét dấu cho $g'(x)$.
 - Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ để kết luận về sự đồng biến, nghịch biến của hàm số.
- ☞ **Nhắc lại quy tắc về dấu của tích, thương, tổng (hiệu) các biểu thức:**

$f(x)$	+	-	+	-
$g(x)$	+	-	-	+
$f(x) \cdot g(x)$	+	+	-	-
$f(x) : g(x)$	+	+	-	-
$f(x) + g(x)$	+	-	Chưa biết	Chưa biết

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = -2018 \cdot f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		-	
y	0		$+\infty$		0

A. $(-\infty; 0)$.B. $(1; +\infty)$.C. $(0; +\infty)$.D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải:

- Đặt $g(x) = -2018 \cdot f(x)$, ta có: $g'(x) = -2018 \cdot f'(x)$.
- Xét $g'(x) = -2018 \cdot f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- Vậy hàm số $y = -2018 \cdot f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn **B**

Ví dụ 15. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.B. $(-2; -1)$.C. $(-2; 1)$.D. $(-4; -3)$.

Lời giải:

- Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x) \Rightarrow g'(x) = (x^2 + 2x)' \cdot f'(x^2 + 2x) = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x)$.
- Xét $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 \geq 0 \\ f'(x^2 + 2x) \leq 0 \end{cases} \quad (1) \vee \begin{cases} 2x + 2 \leq 0 \\ f'(x^2 + 2x) \geq 0 \end{cases} \quad (2)$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Giải (1), ta có: $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ f'(x^2+2x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x \leq -2 \\ x^2+2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in \emptyset \\ x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1. \quad (*)$
- Giải (2), ta có: $\begin{cases} 2x+2 \leq 0 \\ f'(x^2+2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2+2x \geq -2 \\ x^2+2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \in \mathbb{R} \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1. \quad (**)$
- Hợp hai kết quả (*), (**), ta được: $x \in S = [-3; -1] \cup [1; +\infty)$. Ta thấy $(-2; -1) \subset S$, do đó $\forall x \in (-2; -1)$ thì hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến. Chọn $\rightarrow$ B

Giải thích (?):

- Từ bảng biến thiên, ta dễ dàng có được: $f'(t) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ t \geq 3 \end{cases}$.
- Thay t bởi $x^2 + 2x$, ta có: $f'(\underbrace{x^2+2x}_t) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{x^2+2x}_t \leq -2 \\ \underbrace{x^2+2x}_t \geq 3 \end{cases}$.

Ví dụ 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-4		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^2 - 8x + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 7)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải:

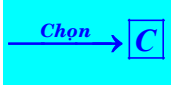
- Đặt $g(x) = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^2 - 8x + 5 \Rightarrow g'(x) = 2f'(2x+1) + \frac{4}{3}x - 8 = 2\left[f'(2x+1) + \frac{2}{3}x - 4\right]$.
- Xét $f'(2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq 2x+1 \leq 2 \\ 2x+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$; do đó $f'(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$.
- Xét $\frac{2}{3}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.
- Ta có bảng xét dấu tạm thời như sau:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	6	$+\infty$	
$f'(2x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{2}{3}x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(2x+1)+\frac{2}{3}x-4$	Chưa biết dấu	$-$	Chưa biết dấu	$-$	Chưa biết dấu		

- Từ bảng trên, ta thấy hàm số $g(x)$ chắc chắn nghịch biến trên các khoảng: $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; 6\right)$.

Do đó chỉ có **đáp án C** thỏa mãn vì $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \subset \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. 

Đúc kết: Qua bài trên, ta thấy việc xét dấu tổng, hiệu các biểu thức vốn là bài toán **không quen thuộc** của đa số học sinh (các em chỉ quen xét dấu tích, thương các đa thức mà thôi). Vì vậy, ta cần rút ra thuật toán cho loại toán này.

Bài toán: Xét dấu $g'(x) = k \cdot f'(x) + h(x)$ khi đã biết bảng xét dấu của $f'(x)$, k là hằng số.

- Cho $h(x) = 0$ để tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots$ (nếu có).
- Lập bảng xét dấu với mỗi hàng lần lượt dành cho $x, k \cdot f'(x), h(x), k \cdot f'(x) + h(x)$ theo quy tắc: *Tổng hai số dương là một số dương, tổng hai số âm là một số âm, tổng hai số trái dấu thì chưa xác định được dấu.*

Ví dụ 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x + 2018$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. C. $(2; +\infty)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.

Lời giải:

- Đặt $g(x) = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x + 2018$; đạo hàm: $g'(x) = -3f'(-x+2) + 3x^2 + 6x - 9$.

- Xét $-3f'(-x+2) \geq 0 \Leftrightarrow f'(-x+2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq -x+2 \leq 1 \\ -x+2 \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq -x \leq -1 \\ -x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$.

Do đó $-3f'(-x+2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$.

Xét $3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Bảng xét dấu tạm thời như sau:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$		
$-3f'(-x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$3x^2+6x-9$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\left. \begin{matrix} -3f'(-x+2) \\ + \\ 3x^2+6x-9 \end{matrix} \right\} g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		<i>Chưa biết dấu</i>

- Ta thấy hàm số $g(x)$ chắc chắn nghịch biến trên $(-3;1)$ mà $\left(-\frac{3}{2};1\right) \subset (-3;1)$ nên hàm $g(x)$

nghịch biến trên $\left(-\frac{3}{2};1\right)$. Chọn $\rightarrow$ **D**

Dạng toán 2

Tìm tham số thỏa mãn tính đơn điệu của hàm số

♦ **Bài toán 1:** Tìm tham số m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

☞ **Phương pháp:**

- Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Bước 2:** Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Bước 3:** Điều kiện đơn điệu (khi $a \neq 0$).

$$\text{— Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Giải tìm}} m.$$

$$\text{— Hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Giải tìm}} m.$$

☞ **Lưu ý:** Nếu hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có a chứa tham số thì ta cần xét $a = 0$ để kiểm tra xem hàm số có đơn điệu trên $\mathbb{R}$ hay không.

♦ **Bài toán 2:** Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) đơn điệu trên mỗi khoảng xác định của nó.

☞ **Phương pháp:**

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

- Đạo hàm: $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

- Điều kiện đơn điệu:

$$\text{— Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định} \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc > 0 \xrightarrow{\text{Giải tìm}} m.$$

$$\text{— Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định} \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc < 0 \xrightarrow{\text{Giải tìm}} m.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

🔍 **Lưu ý:** Nếu hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có c chứa tham số thì ta nên xét $c = 0$ để kiểm tra xem hàm số có đơn điệu trên từng khoảng xác định của nó hay không.

💎 **Bài toán 3:** Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ ($ad \neq 0$) đơn điệu trên mỗi khoảng xác định của nó.

📖 **Phương pháp:**

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$.
- Đạo hàm: $y' = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(dx + e)^2}$ với $A = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \neq 0$, $B = 2 \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & e \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}$.
- Điều kiện đơn điệu:
 - Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$
 $\Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Giải tìm}} m.$
 - Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D$
 $\Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Giải tìm}} m.$

🔍 **Lưu ý:**

- Nếu gặp câu hỏi tương tự dành cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ thì ta cũng làm theo phương pháp nêu trên.
- Một điều khác nhau mà học sinh cần phân biệt giữa **bài toán 2**, **bài toán 3** là: Đối với **bài toán 2**, đạo hàm y' chỉ **lớn hơn 0** hoặc **nhỏ hơn 0** chứ không được cho $y' \geq 0, y' \leq 0$. Lý do là nếu ta cho $y' = 0$ thì sẽ có **vô số giá trị** x thỏa mãn (mà định nghĩa nêu rõ $y' = 0$ tại một số hữu hạn điểm x mà thôi).

Ví dụ 18. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8 - 2m)x + m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$.

B. $m = -2$.

C. $m = 4$.

D. $m = -4$.

Lời giải:

- Ta có $y' = x^2 - 2mx + (8 - 2m)$. Nhận thấy $a = 1 \neq 0$.
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 0 \\ m^2 - 8 + 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$
- Ta thấy $m = 2$ thỏa mãn đề bài. Chọn $\rightarrow$ **A**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 19. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

- A. $-\frac{5}{4} \leq m \leq 1$. B. $-\frac{2}{7} \leq m < 1$. C. $-\frac{7}{2} \leq m < 1$. D. $-\frac{2}{7} \leq m \leq 1$.

Lời giải:

- Ta có: $y' = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x - (2m+1)$.
- Xét $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, ta có: $y' = -3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn. (*)
- Xét $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$. Hàm số nghịch biến trên tập xác định khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 3(m-1)(2m+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 7m^2 - 5m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{7} \leq m < 1. \quad (**)$$
- Hợp các kết quả của (*) và (**), ta có $-\frac{2}{7} \leq m \leq 1$ thỏa mãn đề bài. Chọn $\rightarrow$ **D**

🔗 Nhận xét: Hai ví dụ trên có sự khác nhau về lời giải bởi một trường hợp thì a luôn khác 0; trường hợp còn lại thì a chứa tham số m , khi đó ta phải xét thêm $a = 0$ để kiểm tra xem đạo hàm có luôn mang một dấu thỏa mãn đề bài không.

Ví dụ 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{4-m^2}{(x+4)^2}$.
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \neq -4$

$$\Leftrightarrow 4-m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow m \in (-2; 2). \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}.$$
- Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn. Chọn $\rightarrow$ **C**

Ví dụ 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{9x+m}{mx+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 5. B. Vô số. C. 7. D. 3.

Lời giải:

- Nhận thấy $c = m$ chưa chắc khác 0 nên ta xét $c = m = 0$ trước. Khi đó $y = 9x$ có $y' = 9 > 0$ (không thỏa mãn đề bài).

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Xét $c = m \neq 0$, ta có $y' = \frac{9-m^2}{(mx+1)^2}$. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \neq -\frac{1}{m} \Leftrightarrow 9-m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}. \text{ Vì } m \text{ nguyên nên có vô số giá trị } m \text{ thỏa mãn đề}$$

bài. Chọn $\rightarrow$ **B**

Ví dụ 22. Hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x - 1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi các giá trị của m là

- A. $m \geq 1$. B. $m = -1$. C. $m \leq -\frac{5}{2}$. D. $-1 < m < 1$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{-x^2 + 4x + 2m + 1}{(2-x)^2} = \frac{g(x)}{(2-x)^2}$.
- Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in D$ (Dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên D) $\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 4x + 2m + 1 \leq 0, \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \Delta'_g \leq 0 \Leftrightarrow 4 - (-1) \cdot (2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 2m + 5 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2}. \quad \text{Chọn } \rightarrow \text{ **C** }$$

♦ Bài toán 4: Tìm tham số m để hàm số lượng giác đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

☞ Phương pháp:

☺ Cách giải 1: Cô lập m về một vế.

- Tính đạo hàm $y' = f'(x)$, cho $y' = f'(x) \geq 0$ nếu đề bài yêu cầu hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ngược lại: $y' = f'(x) \leq 0$ nếu đề bài yêu cầu hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Cô lập m để có được dạng $g(m) \geq h(x)$ (hoặc $g(m) > h(x); g(m) \leq h(x); g(m) < h(x)$).
- Tìm Max-Min cho hàm số $h(x)$ trên $\mathbb{R}$. (Hoặc lập bảng biến thiên cho hàm $h(x)$).
- Dựa vào giá trị Max-Min hoặc bảng biến thiên để kết luận về điều kiện của m .

☺ Cách giải 2: Sử dụng tính chất của hàm số bậc nhất

- Đặt $t = \sin x$ (hoặc $t = \cos x$) với điều kiện $t \in [-1; 1]$.
- Bất phương trình: $a \sin x + b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underbrace{at + b}_{t = \sin x} \geq 0, \forall t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot 1 + b \geq 0 \\ a \cdot (-1) + b \geq 0 \end{cases}$.
- Hoàn toàn tương tự: $a \cos x + b < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underbrace{at + b}_{t = \cos x} < 0, \forall t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot 1 + b < 0 \\ a \cdot (-1) + b < 0 \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Nhận xét: Ý tưởng của **cách giải 2** là tận dụng tính chất của hàm số $y = ax + b$. Vì đạo hàm của nó không đổi dấu trên $[\alpha; \beta]$ bất kì nên chỉ cần $y(\alpha) \geq 0, y(\beta) \geq 0$ thì $y \geq 0, \forall x \in [\alpha; \beta]$; tương tự như thế: $y = ax + b < 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} y(\alpha) < 0 \\ y(\beta) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha + b < 0 \\ a\beta + b < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 23. Tìm tất cả các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. B. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. C. $m \geq \sqrt{2}$. D. $m \geq \sqrt{2}$.

Lời giải:

- Ta có: $y' = \cos x - \sin x + m$.
- Hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x - \sin x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$m \geq \sin x - \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

- Ta thấy giá trị lớn nhất của $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng $\sqrt{2}$ nên $(*) \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$.

Chọn

C

Ghi nhớ:

- Giả sử hàm $g(x)$ tồn tại Max-Min trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$m \geq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \underset{\mathbb{R}}{\text{Max}} g(x)$	$m > g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > \underset{\mathbb{R}}{\text{Max}} g(x)$
$m \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \underset{\mathbb{R}}{\text{Min}} g(x)$	$m < g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m < \underset{\mathbb{R}}{\text{Min}} g(x)$

- Nếu hàm $g(x)$ không tồn tại Max-Min trên $\mathbb{R}$, tuy nhiên thông qua bảng biến thiên ta tìm được điều kiện bị chặn: $M_1 < g(x) < M_2$, khi đó:

$m \geq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq M_2$	$m > g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq M_2$
$m \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq M_1$	$m < g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq M_1$

Ví dụ 24. Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - (2m - 1)x + 2021$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

A. $m \leq \frac{5}{2}$. B. $m < \frac{5}{2}$. C. $m \geq \frac{5}{2}$. D. $m \leq -\frac{3}{2}$.

Lời giải:

- Ta có: $y' = 2\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos 2x - (2m - 1)$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos 2x - (2m - 1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 \leq 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m - 1 \leq 4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Ta thấy giá trị nhỏ nhất của $4\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ bằng -4 nên $(*) \Leftrightarrow 2m - 1 \leq -4 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$.

Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 25. Cho hàm số $y = (2m + 1)\sin x + (3 - m)x$. Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. C. $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$. D. $m \in \left[-4; -\frac{1}{2}\right]$.

Lời giải:

- Đạo hàm: $y' = (2m + 1)\cos x + 3 - m$.
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m + 1)\cos x + 3 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$
- Đặt $t = \cos x, t \in [-1; 1]$. $(*)$ được viết lại: $\underbrace{(2m + 1)t + 3 - m}_{g(t)} \geq 0, \forall t \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 1 + 3 - m \geq 0 \\ 2m + 1 + 3 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{2}{3} \\ m \geq -4 \end{cases} \text{ . Vậy } m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right] \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

Chọn $\rightarrow$ **C**

◆ **Bài toán 5:** Tìm tham số m để hàm số nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) đơn điệu trên một khoảng K cho trước (với K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

☞ **Phương pháp:**

○ **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

○ **Bước 2:** Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

○ **Bước 3:** Điều kiện đơn điệu:

$$\text{— Hàm số đồng biến trên } K \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ x \neq -\frac{d}{c}, \forall x \in K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin K \end{cases} \xrightarrow{\text{Giải tìm}} m.$$

$$\text{— Hàm số nghịch biến trên } K \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ x \neq -\frac{d}{c}, \forall x \in K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin K \end{cases} \xrightarrow{\text{Giải tìm}} m.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Mở rộng Bài toán 5: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{a \cdot u(x) + b}{c \cdot u(x) + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) đơn điệu trên khoảng K cho trước.

Cách tính nhanh đạo hàm loại này	Đạo hàm của hàm số đã cho là tích hai vế phải của (1) và (2).
Đặt $t = u(x) \Rightarrow t' = u'(x)$ (1)	$y' = \frac{ad - bc}{[c \cdot u(x) + d]^2} \cdot u'(x)$
$f(t) = \frac{at + b}{ct + d} \Rightarrow f'(t) = \frac{ad - bc}{(ct + d)^2}$ (2)	

Nếu học sinh thực hiện cách tính như trên vài lần thì những bài sau đó các em có thể nhanh được đạo hàm rất nhanh chóng và chính xác.

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{(m+1)\cos x - m}{2\cos x + m}$. Ta thực hiện như bảng sau:

	Đạo hàm của hàm số đã cho là tích hai vế phải của (1) và (2).
Đặt $t = \cos x \Rightarrow t' = -\sin x$ (1)	$y' = \frac{m^2 + 3m}{(2\cos x + m)^2} \cdot (-\sin x)$
$f(t) = \frac{(m+1)t - m}{2t + m} \Rightarrow f'(t) = \frac{m(m+1) - 2(-m)}{(2t + m)^2} = \frac{m^2 + 3m}{(2t + m)^2}$ (2)	

Ví dụ 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

A. 3.

B. Vô số.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.
- Ta có $y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (10; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{6}{5}.$$
- Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}$. Chọn $\rightarrow$ **C**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$; $y' = \frac{m^2-4}{(m-x)^2}$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-3;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4 < 0 \\ m \notin (-3;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

- Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$. Vậy có một giá trị m thỏa mãn đề bài.

Chọn C

Ví dụ 28. (Đề Minh họa lần 1, 2017, BGD) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$

đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $m < 2$. B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.
 C. $1 \leq m < 2$. D. $m \leq 0$.

Lời giải:

- Điều kiện: $\tan x - m \neq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow m \neq \tan x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow m \neq \tan x, \forall \tan x \in (0;1) \Leftrightarrow m \notin (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}. (*)$$
- Tính đạo hàm nhanh bằng phương pháp sau:

		Đạo hàm của hàm số đã cho là tích hai vế phải của (1) và (2).
Đặt $t = \tan x \Rightarrow$	$t' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (1)$	$y' = \underbrace{\frac{-m+2}{(\tan x - m)^2}}_{+} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{+}$
$f(t) = \frac{t-2}{t-m} \Rightarrow$	$f'(t) = \frac{-m+2}{(t-m)^2} \quad (2)$	

- Ta có $y' > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -m+2 > 0 \Rightarrow m < 2. (**)$

- Từ (*) và (**) suy ra $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$. **Chọn** B

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 29. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + m}$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $m \geq -1$. B. $m > -1$. C. $m \geq \frac{1}{2}$. D. $m > 1$.

Lời giải:

- Ta có: $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \sin 2x < 1$. Học sinh dùng đường tròn lượng giác để kiểm chứng.

- Điều kiện: $\sin 2x + m \neq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow -m \neq \sin 2x, \forall \sin 2x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq -\frac{1}{2} \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq -1 \end{cases} (*)$$

- Đạo hàm:

Đạo hàm của hàm số đã cho là tích hai vế phải của (1) và (2).

$$\text{Đặt } t = \sin 2x \Rightarrow t' = 2 \cos 2x \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{t-1}{t+m} \Rightarrow f'(t) = \frac{m+1}{(t+m)^2} \quad (2)$$

$$y' = \underbrace{\frac{m+1}{(\sin 2x + m)^2}}_{+} \cdot \underbrace{2 \cos 2x}_{+}$$

- Ta có: $m+1 > 0 \Rightarrow m > -1$ (**). Từ (*) và (**) ta có $m \geq \frac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Chọn

C

❖ Bài toán 6: Tìm tham số m để hàm số bậc ba, bậc bốn,... đơn điệu trên tập K cho trước (với K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

Phương pháp:

- Bước 1:** Tìm đạo hàm của hàm $y' = f'(x)$.
- Bước 2:** Điều kiện đơn điệu:
 - Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in K$.
 - Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in K$.

Bước 3:

- Cách 1:**
- Biến đổi theo dạng $m \geq g(x), \forall x \in K$ (hoặc $m \leq g(x), \forall x \in K$).
 - Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ với mọi $x \in K$.
 - Dựa vào bảng biến thiên và kết luận điều kiện cho tham số m .

- Cách 2:**
- Tìm nghiệm (đẹp) của phương trình $y' = 0$ (x phụ thuộc m).
 - Áp dụng điều kiện nghiệm cho tam thức bậc hai (bảng xét dấu đạo hàm).

🔗 Bài toán mở rộng: Tìm tham số m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên một khoảng có độ dài p .

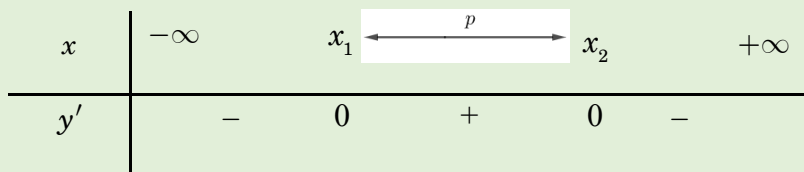
Phương pháp:

○ **Bước 1:** Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

○ **Bước 2:**

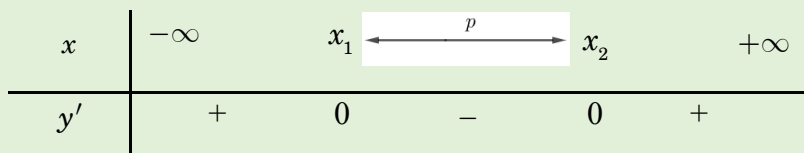
— Hàm số **đồng biến** trên khoảng có độ dài $p \Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } |x_1 - x_2| = p \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \frac{\sqrt{\Delta_{y'}}}{|a_{y'}|} = p \end{cases}.$$



— Hàm số **nghịch biến** trên khoảng có độ dài $p \Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } |x_1 - x_2| = p \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \frac{\sqrt{\Delta_{y'}}}{|a_{y'}|} = p \end{cases}.$$



Lưu ý:

○ Dạng này không cần điều kiện $a \neq 0, \Delta > 0$ vì điều kiện $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = p$ đã bao hàm hai ý trên.

○ Điều kiện $|x_1 - x_2| = p$ có thể được xử lý theo hai cách chính:

— Một là sử dụng định lý Vi-ét: $|x_1 - x_2| = p \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = p^2$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} - p^2 = 0.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

— Hai là tự chế công thức: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \left| \frac{b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} \text{ (công thức này rất tiện lợi cho trắc}$$

nghiệm).

- Các câu hỏi: “*đồng biến (nghịch biến) trên khoảng có độ dài $> p, \geq p, < p, \leq p$* ” ta cũng sẽ làm tương tự.

Ví dụ 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq 12$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \geq 12$.

Lời giải:

- Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m$
- Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$
 $\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty)$.
- Xét $f(x) = -3x^2 + 12x$ với $x > 0$.
 Ta có $f'(x) = -6x + 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	12	$-\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, ta được giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \geq 12$.

Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$ là:

A. $m < 2$.

B. $1 < m < 2$.

C. $m \leq 2$.

D. $1 \leq m \leq 2$.

Lời giải:

- $y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x(x^2 - m + 1)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;5)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (1;5)$
 $\Leftrightarrow \underbrace{4x}_{+}(x^2 - m + 1) \geq 0, \forall x \in (1;5) \Leftrightarrow x^2 - m + 1 \geq 0, \forall x \in (1;5) \Leftrightarrow m \leq x^2 + 1, \forall x \in (1;5).$

- Xét $f(x) = x^2 + 1$ với $1 < x < 5$. Ta có: $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (loại).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$		2	26	

- Do đó giá trị m thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $m \leq 2$. Chọn $\rightarrow$ **C**

Ví dụ 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

- A. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$. B. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$. C. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. D. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$.

Lời giải:

- Ta có $y' = mx^2 + 14mx + 14$. Điều kiện đề bài tương đương với tìm m để:

$$y' = mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \left(\underbrace{x^2 + 14x}_{+} \right) \leq -14, \forall x \in [1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m \leq -\frac{14}{\underbrace{x^2 + 14x}_{+}}, \forall x \in [1; +\infty)}. \text{ Đến đây, ta có hai cách đánh giá hàm số vế phải.}$$

😊 Cách 1:

- Ta có: $\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ 14x \geq 14 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Rightarrow x^2 + 14x \geq 15, \forall x \in [1; +\infty)$
 $\Rightarrow \frac{14}{x^2 + 14x} \leq \frac{14}{15}, \forall x \in [1; +\infty) \Rightarrow -\frac{14}{x^2 + 14x} \geq -\frac{14}{15}, \forall x \in [1; +\infty).$
- Khi đó: $m \leq -\frac{14}{x^2 + 14x}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{15}$. Chọn $\rightarrow$ **D**

😊 Cách 2:

- Xét hàm $g(x) = -\frac{14}{x^2 + 14x}$ có $g'(x) = \frac{28(x+7)}{x^2(x+14)^2} > 0, \forall x \geq 1$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Vậy $g(x) \geq g(1) = -\frac{14}{15}, \forall x \in [1; +\infty)$. Vậy $m \leq -\frac{14}{x^2 + 14x}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{15}$.

Ví dụ 33. Hàm số $y = \frac{4}{3}\sin^3 2x + 2\cos^2 2x - (m^2 + 3m)\sin 2x - 1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi

và chỉ khi:

A. $m \leq \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $m \geq \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 0$.

C. $-3 \leq m \leq 0$.

D. $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:

- Ta có : $y = \frac{4}{3}\sin^3 2x + 2(1 - \sin^2 2x) - (m^2 + 3m)\sin 2x - 1$.
- Đặt $t = \sin 2x$, ta có $y = \frac{4}{3}t^3 - 2t^2 - (m^2 + 3m)t + 1$. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ thì $t \in (0; 1)$.
- Hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \frac{4}{3}t^3 - 2t^2 - (m^2 + 3m)t + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow y' = 4t^2 - 4t - (m^2 + 3m) \leq 0, \forall t \in (0; 1)$
 $\Leftrightarrow 4t^2 - 4t \leq m^2 + 3m, \forall t \in (0; 1)$.
- Xét hàm $g(t) = 4t^2 - 4t, t \in (0; 1)$. Ta có: $g'(t) = 8t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ (nhận).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$		0	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 0	

- Dựa vào bảng trên, ta có: $m^2 + 3m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 0 \end{cases}$. Chọn $\rightarrow$ B

Nhận xét: Trong cả ba ví dụ trên, ta đều **cô lập được m về một vế** khi xét dấu đạo hàm. Vì vậy mà việc còn lại chỉ là khảo sát hàm số thuộc về còn lại để đưa ra kết luận về điều kiện của m . Tuy nhiên, trong quá trình giải toán hàm số, các em học sinh cũng sẽ gặp nhiều bài toán mà khi xét dấu đạo hàm thì **không thể cô lập được m** , khi đó, ta dùng **cách 2** trong **mục phương pháp** để xử lý. Ta xét vài ví dụ sau:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1 998.

B. 1 999.

C. 998.

D. 1001.

Lời giải:

- Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) \forall x \in (2; +\infty)$.
- Xét $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$
 $\Delta = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1 > 0$; ta tìm được hai nghiệm là $x_1 = m, x_2 = m+1$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	$m+1$	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$				$+\infty$

- Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì $m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Mặt khác m nguyên và thuộc $(-1000; 1000)$ nên $m \in \{-999; -998; \dots; 0; \dots; 999\} \Rightarrow$ Số các

giá trị m là: $999 - (-999) + 1 = 1\,999$. Chọn $\rightarrow$ **B**

★Mẹo nhỏ: Để tìm nghiệm đẹp trong phương trình bậc hai, bậc ba có chứa tham số, ta nhập vào máy tính chức năng giải phương trình bậc hai, bậc ba với việc thay $m = 100$. Nghiệm tìm được ta sẽ liên hệ với 100 để đưa về dạng x phụ thuộc m .

Chẳng hạn, trong bài này, ta giải: $x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$.

Nhập vào máy chức năng giải phương trình bậc hai với $a = 1, b = -\left(2 \cdot \underbrace{100}_m + 1\right), c = \underbrace{100}_m \left(\underbrace{100}_m + 1\right)$.

Máy tính hiển thị kết quả: $X_1 = 100 = m; X_2 = 101 = 100 + 1 = m + 1$.

Lưu ý:

- Nếu phương trình bậc hai, ba không cho ra nghiệm đẹp theo m , mà có dạng $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta(m)}}{2a}$ thì phương pháp tính nhanh ở trên không được sử dụng, thay vào đó ta sẽ nghĩ đến cách giải khác (đó là các quy tắc dấu bậc hai có sử dụng Định lý Vi-ét, hoặc có thể sử dụng phương pháp đồ thị v.v...).
- Nếu m là số nguyên thuộc $[a; b]$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ thì số các giá trị m là: $\boxed{b - a + 1}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 35. Tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3 \text{ nghịch biến trên khoảng } (-1; 1) \text{ là:}$$

- A. $S = \emptyset$. B. $S = [0; 1]$. C. $S = [-1; 0]$. D. $S = \{-1\}$.

Lời giải:

- Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+2 \\ x = m \end{cases} \text{ (xem mục **Mẹo nhỏ** ở phần trên).}$$

- Vì $m+2 > m$, $\forall m \in \mathbb{R}$ nên ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x	$-\infty$	m	1	2	$m+2$	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$					$+\infty$

- Qua bảng biến thiên ta nhận thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và

$$\text{chỉ khi ta có: } m \leq -1 < 1 \leq m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

- Vậy: $S = \{-1\}$. Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 36. Cho hàm số $y = (x+m)^3 - 7(x+m)^2 - 5$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Lời giải:

- Ta có: $y' = 3(x+m)^2 - 14(x+m) = (x+m)(3x+3m-14)$.

- Khi đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -m$ và $x_2 = \frac{14-3m}{3}$

Ta thấy: $x_2 = \frac{14-3m}{3} = -m + \frac{14}{3} > -m = x_1$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-m$	-2	1	$\frac{14-3m}{3}$	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$					$+\infty$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-2;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq -2 \\ 1 \leq \frac{14-3m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq \frac{11}{3}.$$

- Do m nguyên nên $m \in \{2;3\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Chọn

A

Ví dụ 37. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2-3m)x + m^4 - 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. Vô số.

Bình luận:

- Hàm số có đạo hàm $y' = x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 3m$. Ta có: $y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$
 $\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 3m}_{g(x)} \geq 0 \quad (*), \forall x \in (2;+\infty)$.
- Với bất phương trình (*), ta không thể cô lập m về một vế, cũng không thể tìm được nghiệm đẹp trong phương trình $g(x) = 0$. Thật may mắn rằng hệ số a không phụ thuộc m , vì vậy ta vẫn sử dụng được bảng xét dấu tạm thời, kết hợp định lý Vi-ét để xử lý dạng toán này.

Lời giải:

- Ta có: $y' = x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 3m$. Nhận thấy $a = 1 > 0$.

Trường hợp 1: Đạo hàm không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ (tức là $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$), khi ấy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra nó cũng đồng biến trên $(2;+\infty)$.

- Ta có: $\Delta'_{y'} = (m+1)^2 - (m^2 - 3m) \leq 0 \Leftrightarrow 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{5}$.

Trường hợp 2: Đạo hàm đổi dấu hai lần trên tập xác định, tức là $\Delta'_{y'} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$ (1). Ta có bảng xét dấu tạm thời như sau (giả sử $x_1 < x_2$ là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$).

x	$-\infty$	x_1		x_2	2	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$					$+\infty$

- Từ bảng trên, ta có:

$$\begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} < 2 \\ y'(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{-2(m+1)}{2.1} < 2 \\ 2^2 + 2(m+1).2 + m^2 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m-1 < 2 \\ \underbrace{m^2+m+8}_{+} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3 \quad (2).$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Từ (1) và (2) suy ra $m > -\frac{1}{5}$.
- Kết hợp cả hai trường hợp trên ta có được $m \in \mathbb{R}$. Mặt khác m nguyên âm nên có vô số giá trị m thỏa mãn đề bài. Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 38. Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ có độ dài khoảng nghịch biến đúng bằng $\frac{4}{3}$.

- A. $\begin{cases} m = -5 \\ m = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = -5 \\ m = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -4 \end{cases}$

Lời giải:

- Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2(m+1)x + 4$.
- Hàm số có độ dài khoảng nghịch biến đúng bằng $2\sqrt{5} \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{thỏa mãn } |x_1 - x_2| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{m^2 + 2m - 11}}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 11} = 2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -5 \end{cases} \quad \text{Chọn } \rightarrow \text{ **A**}$$

Ví dụ 39. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$. Với m thuộc khoảng nào sau đây thì hàm số đã cho đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1?

- A. $m \in (-2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2)$. C. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$. D. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$.

Lời giải:

- Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x + m - 1$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 1 $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{thỏa } |x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{9 + 3(m-1)}}{|-3|} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3m+6} > 3$$

$$\Leftrightarrow 4(3m+6) > 9 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}. \text{ Vậy } m > -\frac{5}{4} \text{ thỏa mãn đề bài. } \text{Chọn } \rightarrow \text{ **C**}$$

♦ Bài toán 7: Bài toán tham số đối với những dạng hàm số khác.

Phương pháp:

- Bước 1:** Tìm đạo hàm của hàm $y' = f'(x)$.
- Bước 2:** Điều kiện đơn điệu:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

— Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in K$.

— Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in K$.

▪ **Bước 3:**

— Biến đổi theo dạng $m \geq g(x), \forall x \in K$ (hoặc $m \leq g(x), \forall x \in K$).

— Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ với mọi $x \in K$.

— Dựa vào bảng biến thiên và kết luận điều kiện cho tham số m .

Ví dụ 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

▪ Ta có: $y' = x^3 + m + \frac{3}{2x^2}$

▪ Hàm số đã cho đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x^3 + m + \frac{3}{2x^2} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2x^2} \geq -m, \forall x \in (0; +\infty). \quad (*)$$

▪ Xét hàm số $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = \frac{3(x^5 - 1)}{x^3}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận).

▪ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+	
$f(x)$		$+\infty$				
				$\frac{5}{2}$		

▪ Dựa vào bảng biến thiên, ta có $(*) \Leftrightarrow -m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$; ta lại có m là số nguyên âm

$\Rightarrow m \in \{-2; -1\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn A

Ví dụ 41. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (5 - 2m)x - \frac{1}{x+1} - 3$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

A. $\forall m \in \mathbb{R}$.

B. $m \leq 6$.

C. $m \geq -3$.

D. $m \leq 3$.

Lời giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = 2x + 5 - 2m + \frac{1}{(x+1)^2}$.
- Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$
 $\Leftrightarrow 2x + 5 - 2m + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow 2x + 5 + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 2m, \forall x \in (-1; +\infty)$.
- Ta xét hàm số $g(x) = 2x + 5 + \frac{1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Đạo hàm: $g'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x}{(x+1)^3}; g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$			0	
			$-$	$+$
$g(x)$		$+\infty$	6	$+\infty$

- Ta có $2m \leq g(x), \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow 2m \leq 6 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Chọn **A**

Ví dụ 42. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$:

$f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. -2 .

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải:

- Ta có $f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20) = m^2(x^4 - 1) - m(x^2 - 1) + 20(x + 1)$

$$= (x+1) \left[\underbrace{m^2(x-1)(x^2+1) - m(x-1) + 20}_{g(x)} \right] = (x+1).g(x).$$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $g(x) = 0$ có nghiệm $x = -1$.

$$\text{Do đó: } g(-1) = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

- Với $m = -2$ thì $f'(x) = (x+1)[4(x-1)(x^2+1) + 2(x-1) + 20]$
 $= (x+1)(4x^3 - 4x^2 + 6x + 14) = (x+1)^2(4x^2 - 8x + 14).$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Nhận thấy: $\begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \\ 4x^2 - 80x + 14 > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = -2 \text{ thỏa mãn.}$

▪ Với $m = \frac{5}{2}$ thì $f'(x) = (x+1) \left[\frac{25}{4}(x-1)(x^2+1) - \frac{5}{2}(x-1) + 20 \right]$
 $= (x+1) \left(\frac{25}{4}x^3 - \frac{25}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{65}{4} \right) = \frac{5}{4}(x+1)^2(5x^2 - 10x + 13).$

Nhận thấy: $\begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \\ 5x^2 - 10x + 13 > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = \frac{5}{2} \text{ thỏa mãn.}$

▪ Vậy tổng các phần tử thuộc S bằng $-2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$. Chọn $\rightarrow$ **C**

Ví dụ 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2017.

Lời giải:

▪ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; đạo hàm: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$.

▪ Ta có: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$

▪ Xét hàm $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Mặt khác: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \end{cases}$.

▪ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-1	1

▪ Vậy $(*) \Leftrightarrow m \leq -1$, mà m nguyên thuộc $[-2018; 2018]$ suy ra $m \in \{-2018; -2017; \dots; -1\}$

Do đó có tất cả: $-1 - (-2018) + 1 = 2018$ giá trị m thỏa mãn. Chọn $\rightarrow$ **A**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 3)\sin x - \tan x$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. 5. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải:

- Ta có: $y' = (m^2 - 3)\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$.
 - Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
 $\Leftrightarrow (m^2 - 3)\cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m^2 - 3 \leq \frac{1}{\cos^3 x}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 - Ta biết rằng $0 < \cos x \leq 1, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\cos^3 x} \geq 1, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Do đó yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow m^2 - 3 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$. Vì m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Chọn $\rightarrow$ **A**

Ví dụ 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

- A.1. B.0. C.3. D.Vô số.

Lời giải:

- Hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{m - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sin x - m}{\sin^2 x - 1}$

Đạo hàm của hàm số đã cho là tích hai vế phải của (1) và (2).

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t' = \cos x$ (1)	
$f(t) = \frac{t - m}{t^2 - 1} \Rightarrow f'(t) = \frac{-t^2 + 2mt - 1}{(t^2 - 1)^2}$ (2)	$y' = \frac{-t^2 + 2mt - 1}{(t^2 - 1)^2} \cdot \underbrace{\cos x}_+$

- Hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -t^2 + 2mt - 1 \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$. Vì m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Chọn $\rightarrow$ **A**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 46. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = |x^3 - mx^2 + 2m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

- A. $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$. B. $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $0 \leq m < \frac{3}{2}$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Áp dụng công thức $(|u|)' = (\sqrt{u^2})' = \frac{(u^2)'}{2\sqrt{u^2}} = \frac{u \cdot u'}{|u|}$.

Ta có: $f'(x) = \frac{(x^3 - mx^2 + 2m + 1)(3x^2 - 2mx)}{|x^3 - mx^2 + 2m + 1|} \geq 0, \forall x \in (1; 2)$.

- Trường hợp 1:** $\begin{cases} g(x) = x^3 - mx^2 + 2m + 1 \geq 0 \\ g'(x) = 3x^2 - 2mx \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2)$ (*). Do $g'(x) \geq 0$ nên hàm số

$g(x)$ đồng biến trên $(1; 2)$, vì vậy $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(1) \geq 0$.

Từ lý luận trên, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = 1^3 - m \cdot 1^2 + 2m + 1 \geq 0 \\ 3x - 2m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq \frac{3}{2}x \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

- Trường hợp 2:** $\begin{cases} g(x) = x^3 - mx^2 + 2m + 1 \leq 0 \\ g'(x) = 3x^2 - 2mx \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2)$ (**). Xét giá trị $x_0 = \sqrt{2} \in (1; 2)$

với $g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2m + 2m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$ (vô lý), vì vậy trường hợp này không thể xảy ra.

- Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}$. Chọn $\rightarrow$ **A**

Ví dụ 47. (Chuyên Đại học Vinh – Lần 2 năm 2020) Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = |-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tính tổng tất cả phần tử của S .

- A. -2 . B. -1 . C. 0 . D. 2 .

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = \frac{(-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1)(-4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x)}{|-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1|} \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.
- Trường hợp 1:** $\begin{cases} g(x) = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1 \geq 0 \\ g'(x) = -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ nên tồn tại $x_0 \in (1; +\infty)$ để $g(x_0) < 0$, do đó không thể có

$g(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$. Vậy **trường hợp 1** không thể xảy ra.

- **Trường hợp 2:** $\begin{cases} g(x) = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1 \leq 0 \\ g'(x) = -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty).$

Ta thấy $g'(x) \leq 0$ nên hàm $g(x)$ nghịch biến $\forall x \in (1; +\infty)$, khi đó $g(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$$g(1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 + m \cdot 1^3 + 2m^2 \cdot 1^2 + m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}_{\approx -1,62} \leq m \leq \underbrace{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}_{\approx 0,62}.$$

Vì m nguyên nên $m = -1 \vee m = 0$.

- Thay $m = -1$ vào $g'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$, ta được: $-4x^3 - 3x^2 + 4x \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$
 $\Leftrightarrow -4x^2 - 3x + 4 \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$. Điều này hoàn toàn đúng nếu ta lập bảng xét dấu cho biểu thức $-4x^2 - 3x + 4$. Do đó $m = -1$ thỏa mãn.
- Thay $m = 0$ vào $g'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$, ta được:
 $-4x^3 \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow x \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$ (đúng). Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

- Vậy $S = \{-1; 0\}$. Tổng các phần tử: $-1 + 0 = -1$. Chọn $\rightarrow$ B

Ví dụ 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2012. B. 2009. C. 2011. D. 2010.

Lời giải:

- $g'(x) = -f'(1-x) = -(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right]$
 $= (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5).$
- Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1$ (*), (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).
- Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên (*) $\Leftrightarrow x^2+4x+m-5 \geq 0, \forall x < -1$
 $\Leftrightarrow m \geq -x^2-4x+5, \forall x < -1.$
- Xét hàm số $h(x) = -x^2-4x+5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, $h'(x) = -2x-4 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	
		9		

$$h(x) \Big|_{-\infty}$$

8

- Do đó: $\Leftrightarrow m \geq h(x), \forall x < -1 \Leftrightarrow m \geq 9$

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2019\}$.

- Vậy có $2019 - 9 + 1 = 2011$ số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn $\rightarrow$ **C**

Ví dụ 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 18 .

B. 17 .

C. 16 .

D. 20 .

Lời giải:

- Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
			0	$+$

- Đặt $g(x) = f(x^2 + 3x - m)$. Theo đề: $g'(x) = (2x+3)f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$.

$$\Leftrightarrow f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0; 2) \text{ (do } 2x+3 > 0, \forall x \in (0; 2)).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m \leq -3 \\ x^2 + 3x - m \geq 1 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \underbrace{x^2 + 3x + 3}_{h(x)} \text{ (1)} \\ m \leq \underbrace{x^2 + 3x - 1}_{u(x)} \text{ (2)} \end{cases}, \forall x \in (0; 2)$$

- Xét hàm $h(x) = x^2 + 3x + 3, x \in (0; 2)$. Ta có: $h'(x) = 2x + 3 > 0, \forall x \in (0; 2)$.

Suy ra $h(x) < h(2) = 13$. Do đó (1) $\Leftrightarrow m \geq 13$.

- Xét hàm $u(x) = x^2 + 3x - 1, \forall x \in (0; 2)$. Ta có: $u'(x) = 2x + 3 > 0, \forall x \in (0; 2)$.

Suy ra $u(x) > u(0) = -1$. Do đó (2) $\Leftrightarrow m \leq -1$.

- Hợp nghiệm vừa tìm được, ta có: $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 13 \end{cases}$. Vì m nguyên thuộc đoạn $[-10; 20]$ nên

$m \in \{-10; -9; \dots; -1; 13; 14; \dots; 20\}$. Vậy có 18 giá trị m thỏa mãn.

Chọn $\rightarrow$ **A**

Dạng toán 3

Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số

◆ **Bài toán 1:** Đánh giá các bất đẳng thức $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ hoặc $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$.

▣ **Phương pháp:**

- **Bước 0:** Chuyển về để đưa bất đẳng thức về dạng $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$.
- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$ và chứng minh đạo hàm chỉ mang một dấu (âm hoặc dương).
- **Bước 2:** Vận dụng tính chất đơn điệu:
 - Nếu hàm $f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\forall x \in [a; b], 0 \leq f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
 - Ngược lại nếu hàm $f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\forall x \in [a; b], f(a) \geq f(x) \geq f(b) \geq 0$.

◆ **Bài toán 2:** Giải phương trình dạng $f(u) = f(v)$ với $u, v \in D$.

▣ **Phương pháp:**

- **Bước 1:** Nhận diện hàm đặc trưng để đưa phương trình về dạng $f(u) = f(v)$ với $u, v \in D$.
- **Bước 2:** Chứng minh hàm đặc trưng $f(t)$ đơn điệu trên D ($f'(t)$ luôn âm hoặc luôn dương trên D).
- **Bước 3:** Giải phương trình:
$$\begin{cases} f(u) = f(v) \\ f(t) \text{ đơn điệu} \end{cases} \Leftrightarrow u = v.$$

◆ **Bài toán 3:** Giải phương trình dạng $f(x) = g(x)$ với có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

▣ **Phương pháp:**

- **Bước 1:** Tìm một nghiệm $x = x_0$ của phương trình (bằng tính nhẩm hoặc nhân lượng liên hợp v.v...).
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ và chứng minh đạo hàm chỉ mang một dấu (tức là hàm $f(x)$ đơn điệu trên miền xác định).
- **Bước 3:** Chứng minh hàm số $g(x)$ là hàm hằng hoặc đơn điệu (ngược lại hàm $f(x)$). Từ đó khẳng định phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 50. Cho hàm $y = f(x)$ số có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực của x để

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2).$$

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right).$

B. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$

D. $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right).$

Lời giải:

- Ta có: $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Do đó: $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 51. Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\tan x > x.$

B. $\tan x > x + 1.$

C. $\tan x \leq x.$

D. $\tan x < x + 1.$

Lời giải:

- Xét hàm số $f(x) = \tan x - x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta cần chứng minh $f(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Hơn nữa, $f(0) = 0$. Vậy $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $f(x) > f(0) = 0$. Vậy $\tan x - x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn $\rightarrow$ **A**

Ví dụ 52. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6$ là:

A. $\emptyset.$

B. $\left(1; \frac{3}{2}\right).$

C. $\left[1; \frac{3}{2}\right].$

D. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$

Lời giải:

- Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x$ với $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Ta có: $f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{3-2x}} - \frac{5}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} - 2 < 0, \forall x \in x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Do đó hàm $f(x)$ nghịch biến trên $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Ta lại có $f(1) = 6$.
- Do đó: $3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(1) \\ \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$.
- Vậy $S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$. Chọn ☒ C

Ví dụ 53. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} \geq \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}}$ là $[a; b]$. Khi đó

giá trị của biểu thức $P = 3a - 2b$ bằng:

A. 2

B. 4

C. -2

D. 1

Lời giải:

- Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.
- Ta có: $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} \geq \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \frac{2x+4-4(2-x)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} - \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}} \geq 0$
 $\Leftrightarrow (6x-4) \left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{5\sqrt{x^2+1}} \right) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (6x-4) \left[5\sqrt{x^2+1} - (\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}) \right] \geq 0 \quad (1)$
- Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}$ với $-2 \leq x \leq 2$
 Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. Do đó $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{6}$; $f(-2) = 4$; $f(2) = 2\sqrt{2}$
- Suy ra $2\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2\sqrt{6} < 5$ mà $5\sqrt{x^2+1} \geq 5$ nên $5\sqrt{x^2+1} - (\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) > 0$.
- Vậy $(1) \Leftrightarrow 6x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$. Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm là $S = \left[\frac{2}{3}; 2\right]$
 Do đó: $a = \frac{2}{3}$, $b = 2$ suy ra $P = 3a - 2b = -2$. Chọn ☒ C

Ví dụ 54. Khi giải phương trình: $4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0$, ta tìm được nghiệm có dạng $\frac{a+\sqrt{b}}{b-a}$,

với a, b là các số nguyên. Hãy tính $a^2 + b^2$.

A. $a^2 + b^2 = 13$.

B. $a^2 + b^2 = 9$.

C. $a^2 + b^2 = 41$.

D. $a^2 + b^2 = 26$.

Nhận xét:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

— Sau khi chuyển vế: $4x^3 + x = (x+1)\sqrt{2x+1}$. Ta thử đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow \frac{t^2-1}{2} = x$.

— Vế phải: $VP = \left(\frac{t^2-1}{2} + 1\right) \cdot t = \left(\frac{t^2+1}{2}\right) \cdot t = \frac{t^3+t}{2}$.

— Với mỗi liên hệ $4x^3 + x = \frac{t^3+t}{2} \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = t^3 + t \Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = t^3 + t$. Vậy hàm đặc

trung đã xuất hiện: $f(t) = t^3 + t$. Thêm vào đó $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên việc chọn hàm đặc trưng như thế là đã phù hợp.

Lời giải:

- Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.
 - Phương trình $4x^3 + x = (x+1)\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = (2x+2)\sqrt{2x+1}$
 $\Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = \left[(\sqrt{2x+1})^2 + 1\right] \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = (\sqrt{2x+1})^3 + \sqrt{2x+1} \quad (*)$
 - Chọn $f(t) = t^3 + t$ với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$. Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.
 - Phương trình (*) được viết: $\begin{cases} f(2x) = f(\sqrt{2x+1}) \\ f(x) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2x+1}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
- Cần nhớ:** Phương trình $\sqrt{A} = B$ được giải: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- Với định dạng $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{a+\sqrt{b}}{b-a} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$. Do đó: $a^2 + b^2 = 26$.

Chọn → D

Ví dụ 55. Cho phương trình: $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$. Biết rằng phương trình trên có tập nghiệm là S . Tính tổng các phân tử của S .

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\sqrt{5}$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

- Phương trình $\Leftrightarrow 2x^3 - 3x + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = x^2 + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$
 $\Leftrightarrow (2x^3 - 3x + 1) + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = (x^2 + 2) + \sqrt[3]{x^2 + 2} \quad (*)$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Xét hàm đặc trưng: $f(t) = t + \sqrt[3]{t}$, $\forall t \geq 2$. Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} > 0$, $\forall t \geq 2$.
- Vậy phương trình (*) được viết: $\begin{cases} f(2x^3 - 3x + 1) = f(x^2 + 2) \\ f(t) \text{ đồng biến trên } [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 = x^2 + 2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.
- Tổng các nghiệm của phương trình: $-\frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}$. Chọn $\rightarrow$ **D**

Ví dụ 56. Cho phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = 12(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$. Hỏi phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải:

- Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0, x \geq -12 \\ x \leq 5, x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$.
- Ta nhận thấy $x = 4$ là một nghiệm của phương trình. (1)
- Xét về trái: Hàm $f(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}$; $f'(x) = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} > 0$, $\forall x \in [0; 4]$.
 Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $[0; 4]$. (2)
- Xét về phải: Hàm $g(x) = 12(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$.
 $g'(x) = 12\left(\frac{-1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}\right) = -6\left(\frac{1}{\sqrt{5-x}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}\right) < 0$, $\forall x \in [0; 4]$. Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[0; 4]$. (3)
- Từ (1), (2), (3) suy ra tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$. Chọn $\rightarrow$ **D**

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{2x-1}{x+3}$. B. $y = x^4 - 2x^2$. C. $y = 3x + 2$. D. $y = x^2 + 2x - 1$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$

A. $y = \sin x$. B. $y = \sqrt{1-x}$. C. $y = \frac{1}{x}$. D. $y = 1 - x^3$.

Câu 4. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 5. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$ là

A. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
C. $(-1; 0)$ và $(0; 1)$. D. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
D. Hàm số đồng biến trên từng khoảng của miền xác định.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \sqrt{3x - x^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $(0; 3)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; 3)$ có tính chất $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 3)$ và $f'(x) = 0, \forall x \in (1; 2)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. Hàm số $f(x)$ có giá trị không đổi trên khoảng $(1; 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2018}(x-2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$.

B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số có ba điểm cực trị.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 14. Hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 15. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m+15)x + 7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

- A. $-3 \leq m \leq 5$. B. $\begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -3 \end{cases}$. C. $-3 < m < 5$. D. $\begin{cases} m > 5 \\ m < -3 \end{cases}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 17. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - x}$ nghịch biến trên khoảng

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $(0; 1)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = (1 - x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 19. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

- A. $m \leq 1$. B. $m \leq -3$. C. $m < -3$. D. $m < 1$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{9x+m}{mx+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 5. B. Vô số. C. 7. D. 3.

Câu 21. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

- A. $m \in [-1; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -1)$. C. $m \in (-1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -1]$.

Câu 22. Biết hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) đồng biến trên $(0; +\infty)$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0; b \leq 0$. B. $ab < 0$. C. $a > 0; b \geq 0$. D. $ab \geq 0$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y							

$-\infty \rightarrow 2 \rightarrow -1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$	

$+\infty \rightarrow -2 \rightarrow 2 \rightarrow -2 \rightarrow +\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;+\infty)$. B. $(-\infty;-2)$. C. $(-1;0)$. D. $(-2;2)$.

Câu 25. Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	1		1

$1 \rightarrow -\infty$ $+\infty \rightarrow 1$

- A. $y = \frac{x+1}{x-2}$. B. $y = \frac{x+3}{2+x}$. C. $y = \frac{2x+1}{x-2}$. D. $y = \frac{x-1}{2x+2}$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = -2018.f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		$+$	$-$
y	0		0

$0 \rightarrow +\infty$ $+\infty \rightarrow 0$

- A. $(-\infty;0)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(0;+\infty)$. D. $(-\infty;1)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		-1		3	
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 28. Tìm m để hàm số $y = (1-m)x + 8$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Câu 29. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + mx$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $m \geq 0$.

Câu 30. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 0. B. 6. C. 5. D. 7.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-1 \leq m \leq 1$. B. $-1 < m < 1$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $0 < m < 1$.

Câu 32. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-1 < m < 1$. B. $-1 \leq m \leq 1$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $0 < m < 1$.

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 34. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tính tổng tất cả phần tử của S .

- A. 9. B. -1. C. -8. D. 8.

Câu 35. Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (3m-2)x + 2019$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $\sqrt{11}$ khi m nhận các giá trị m_1, m_2 . Tính tổng $T = m_1 + m_2$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. $T = \frac{13}{2}$

B. $T = 6$

C. $T = 7$

D. $T = 9$

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 37. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

A. 1.

B. 3.

C. vô số.

D. 2.

Câu 38. Tìm m để hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

A. $m \in [-1; +\infty)$

B. $m \in (2; +\infty)$

C. $m \in (-\infty; -2)$

D. $m \in (-1; +\infty)$

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Tìm số phần tử của S .

A. 1

B. 5

C. 2

D. 3

Câu 40. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{2x+m+1}{x+m-1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -4)$ và $(11; +\infty)$?

A. 13

B. 12

C. Vô số

D. 14

Câu 41. Tập hợp các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{mx-8}{x-2m}$ (1) đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ là

A. $[-2; 2]$.

B. $(-2; 2)$.

C. $\left[-2; \frac{3}{2}\right]$.

D. $\left[-2; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

A. $-2 \leq m < -1$ hoặc $m > 1$.

B. $m < -1$ hoặc $m > 1$.

C. $-1 < m < 1$.

D. $m < -1$ hoặc $m > 1$.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. 3.

B. Vô số.

C. 4.

D. 5.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \cos 2x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq -2$.B. $m \geq 2$.C. $-2 \leq m \leq 2$.D. $m \leq -2$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.B. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.C. $m \geq \sqrt{2}$.D. $m \geq \sqrt{2}$.

Câu 46. Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.B. $m > 2$.C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$.D. $-1 < m < 1$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{3})$.

A. $m \in (-3; 1] \cup [2; +\infty)$.B. $m \in (-3; +\infty)$.C. $m \in (-\infty; -3)$.D. $m \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên $(0; \frac{\pi}{4})$.

A. $m < 2$.B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.C. $1 \leq m < 2$.D. $m \leq 0$.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = \frac{1 - 2\sin x}{2\sin x + m}$ đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}; \pi)$.

A. 11.

B. 9.

C. 10.

D. 18.

Câu 50. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + m}$ đồng biến trên $(\frac{-\pi}{12}; \frac{\pi}{4})$.

A. $m \geq -1$.B. $m > -1$.C. $m \geq \frac{1}{2}$.D. $m > 1$.

Câu 51. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ là

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$ B. $1 \leq m < 2$. C. $m \leq 0$. D. $m > 2$.

Câu 52. Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

- A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$ B. $m > 2$ C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$ D. $-1 < m < 1$

Câu 53. Tìm m để hàm số $y = \frac{2 \cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. $m \in (-\infty; -2)$. B. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right)$.

- C. $m \in (-2; +\infty)$. D. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3 \cos^2 x - m \sin x - 1$ đồng biến trên $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

- A. $m \geq 3$. B. $m \geq 0$. C. $m \leq 3$. D. $m \leq 0$.

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{4}{3} \sin^3 2x + 2 \cos^2 2x - (m^2 + 3m) \sin 2x - 1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $m \leq \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $m \geq \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 0$.

- C. $-3 \leq m \leq 0$. D. $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

- A. $m \geq \frac{1}{7}$ B. $m \geq \frac{4}{7}$ C. $m \geq \frac{8}{7}$ D. $m \geq \frac{12}{7}$

Câu 57. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- A. $m < 1, m > 2$ B. $1 < m < 2$ C. $m \leq 1, m \geq 2$ D. $1 \leq m \leq 2$

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m \leq 12$. B. $m \geq 0$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq 12$.

Câu 59. Tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ là:

- A. $S = \emptyset$. B. $S = [0; 1]$. C. $S = [-1; 0]$. D. $S = \{-1\}$.

Câu 60. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(3m+1)x^2 + 6(2m^2 + m)x - 12m^2 + 3m + 1$. Tính tổng tất cả giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 61. Cho $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 + 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -5f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 2)$ và $(3; +\infty)$ B. $(3; +\infty)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(2; 3)$

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2 - 1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x(2x+1).g(x) + 1$ trong đó $g(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(2-x) + x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $(0; 1)$.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y = f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2019$ trong đó $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2018$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 3)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-4; -3)$.

Câu 66. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(3 - x^2) + 2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-6	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- A. $(-1; 0)$ B. $(2; 3)$ C. $(-2; -1)$ D. $(0; 1)$

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = f(|3 - x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- A. $(4; 7)$. B. $(2; 3)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 5.

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1D	2C	3D	4A	5A	6D	7B	8C	9A	10A
11B	12B	13D	14B	15A	16C	17C	18B	19D	20A
21C	22C	23D	24C	25A	26B	27B	28B	29A	30D
31A	32B	33B	34D	35C	36D	37A	38D	39C	40A
41C	42A	43C	44B	45C	46C	47A	48B	49C	50C
51A	52C	53B	54B	55B	56D	57D	58D	59D	60C
61A	62C	63A	64A	65B	66B	67A	68D	69D	70C