

MỤC LỤC

A	Ví dụ giải toán	1
B	Bài tập	6

PHƯƠNG TRÌNH HÀM LIÊN QUAN ĐẾN CÁC TÍNH CHẤT SỐ HỌC

Trong các kì thi Olympic toán trên thế giới những năm gần đây xuất hiện nhiều bài toán xác định hàm số mà trong lời giải cần sử dụng khá nhiều tính chất số học, tính chất nghiệm của phương trình nghiệm nguyên. Các bài toán này đa dạng, khó và điều quan trọng khi chúng ta tiếp cận chúng là phải dự đoán được nghiệm để tìm ra tính chất đặc trưng cho hàm cần tìm. Muốn học tốt phần này trước hết học sinh phải được trang bị kiến thức nền tương đối đầy đủ về Số học và Phương trình hàm. Trong bài viết chuyên đề này chúng tôi xin nêu ra một số ví dụ tiêu biểu cùng với một hệ thống bài tập tương đối nhiều, được sưu tầm qua các kỳ thi Olympic trong những năm gần đây, qua đó nhằm giúp học sinh có những kỹ năng và phương pháp nhất định khi tiếp cận những bài toán dạng này.

A. VÍ DỤ GIẢI TOÁN

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$m^2 + f(n) \mid f^2(m) + n \quad (1)$$

với mọi cặp số nguyên dương m, n (với $\mathbb{Z}^+$ là tập các số nguyên dương).

 **Lời giải**

Thay $m = n = 1$ vào (1), ta được $1 + f(1) \mid 1 + f^2(1)$, suy ra

$$\begin{cases} 1 + f(1) \mid 1 + f(1)^2 \\ 1 + f(1) \mid (1 + f(1))^2 \end{cases} \Rightarrow 1 + f(1) \mid \left[(1 + f(1))^2 - (1 + f(1)^2) \right].$$

Do đó $1 + f(1) \mid 2f(1)$, mà $\gcd(f(1), 1 + f(1)) = 1$ nên $1 + f(1) \mid 2$ và $f(1) = 1$. Bây giờ, thay $m = 1$ vào (1), ta được $1 + f(n) \mid 1 + n$. Từ đó suy ra

$$f(n) \leq n, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2)$$

Thay $n = 1$ vào (1), ta được $m^2 + 1 \mid f^2(m) + 1$. Từ đó suy ra

$$m \leq f(m), \forall m \in \mathbb{Z}^+. \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3), ta được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Chú ý 1. Có thể coi (1) như một bài toán phương trình hàm (dù không có hai vế) và là một kiểu bài còn tương đối mới. Sau đây chúng ta sẽ đưa ra cách tiếp cận cho các bài toán dạng này và một số bài toán có dạng tương tự. Hy vọng rằng bạn đọc có thể thấy được điểm chung ở lời giải các bài toán này, từ đó đúc kết được phương pháp giải chung.

Bài toán 2 (IMO Shortlisted 2004, India 2005).

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f^2(m) + f(n) \mid (m^2 + n)^2 \quad (1)$$

với mọi cặp số nguyên dương m, n .

Lời giải

Phân tích, tìm lời giải. Đầu tiên ta thử tính một số giá trị đặc biệt như $f(1), f(2), f(3), \dots$ để dự đoán công thức của hàm số f . Từ điều kiện ban đầu ta thay $m = n = 1$ thu được

$$(f(1)^2 + f(1)) \mid 4.$$

Từ điều kiện này nếu $f(1) \geq 2$ thì $f(1)^2 + f(1) \geq 6$, vô lí, suy ra $f(1) = 1$. Thay $m = 1, n = 2$ và $m = 2, n = 1$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$\begin{cases} (f(1)^2 + f(2)) \mid 9 \\ (f(2)^2 + f(1)) \mid 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + f(2)) \mid 9 \\ (f(2)^2 + 1) \mid 25 \end{cases} \Leftrightarrow f(2) = 2.$$

Như vậy ta dự đoán $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

☒ Hướng thứ nhất. Đầu tiên ta nghĩ đến hướng sử dụng phương pháp quy nạp. Giả sử

$$f(k) = k, k = 1, 2, \dots, n.$$

Ta sẽ chứng minh $f(n+1) = n+1$. Thật vậy, ta thay m bởi n , thay n bởi $n+1$; sau đó lại thay m bởi $n+1$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$\begin{aligned} (f(n)^2 + f(n+1)) \mid (n^2 + n + 1)^2 &\Rightarrow (n^2 + f(n+1)) \mid (n^2 + n + 1)^2 \\ (f(n+1)^2 + f(n)) \mid ((n+1)^2 + n)^2 &\Rightarrow (n + f(n+1)^2) \mid (n^2 + 3n + 1)^2. \end{aligned}$$

Ta nhận thấy từ hai điều kiện trên để đánh giá được $f(n+1)$ là rất khó khăn và hướng làm thứ nhất này có thể bế tắc.

☒ Hướng thứ hai. Ta nhận thấy nếu chọn $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m^2 + n$ là một số nguyên tố thì ta sẽ tính được $f(m)^2 + f(n)$. Chọn $m = p-1, n = 1$, trong đó p là một số nguyên tố. Khi đó từ điều kiện ban đầu ta thu được

$$\begin{aligned} (f(1)^2 + f(p-1)) \mid (1 + p - 1)^2 &\Rightarrow f(p-1) + 1 \mid p^2 \\ \Rightarrow f(p-1) + 1 \in \{p, p^2\} &\Rightarrow f(p-1) \in \{p-1, p^2-1\}. \end{aligned}$$

- Trường hợp 1: $f(p-1) = p^2-1$. Để sử dụng kết quả trên ta thay $m = p-1$ vào điều kiện ban đầu và với mỗi số nguyên dương n ta được

$$\begin{aligned} &(f(p-1)^2 + f(1)) \mid ((p-1)^2 + 1)^2 \\ \Leftrightarrow &((p^2-1)^2 + 1) \mid ((p-1)^2 + 1)^2 \\ \Leftrightarrow &((p^2-1)^2 + 1) \mid (p^2 - 2p + 2)^2 \\ \Leftrightarrow &(p^4 - 2p^2 + 2) \mid (p^4 + 8p^2 + 4 - 4p^3 - 8p) \\ \Leftrightarrow &(p^4 - 2p^2 + 2) \mid (-4p^3 + 10p^2 - 8p + 2) \\ \Leftrightarrow &(p^4 - 2p^2 + 2) \mid (4p^3 - 10p^2 + 8p - 2) \\ \Rightarrow &p^4 - 2p^2 + 2 \leq 4p^3 - 10p^2 + 8p - 2. \end{aligned}$$

Từ đây chia cả hai vế cho p^3 rồi cho $p \rightarrow +\infty$ là thấy vô lí.

- Trường hợp 2: $f(p-1) = p-1$. Để sử dụng kết quả trên ta thay $m = p-1$ vào điều kiện ban đầu và với mỗi số nguyên dương n ta được

$$\begin{aligned} & \left(f(p-1)^2 + f(n) \right) \mid \left((p-1)^2 + n \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \left((p-1)^2 + f(n) \right) \mid \left((p-1)^2 + f(n) + n - f(n) \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \left((p-1)^2 + f(n) \right) \mid (n - f(n))^2. \end{aligned}$$

Nếu ta chọn p là số nguyên tố đủ lớn thì điều kiện trên xảy ra khi $f(n) = n$. Từ đó ta có

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Giải. Thay $m = n = 1$ vào (1), ta được $f^2(1) + f(1) \mid 4 \Rightarrow f^2(1) + f(1) \leq 4 \Rightarrow f(1) = 1$. Tiếp tục, thay $n = 1$ vào (1), ta được

$$f^2(m) + 1 \mid (m^2 + 1)^2, \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

Suy ra $f^2(m) < (m^2 + 1)^2$, hay $f(m) < m^2 + 1$. Nói cách khác, ta có

$$f(m) \leq m^2, \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

Bây giờ, thay $m = 1$ và $n = p-1$ với p là số nguyên tố vào (1), ta được

$$1 + f(p-1) \mid p^2.$$

Suy ra $1 + f(p-1) \in \{p, p^2\}$, tức là $f(p-1) \in \{p-1, p^2-1\}$. Tuy nhiên, do

$$f(p-1) \leq (p-1)^2 < p^2 - 1$$

nên ta có $f(p-1) = p-1$ với mọi p nguyên tố. Tiếp theo, thay $m = p-1$, ta được

$$\begin{aligned} & \left(f(p-1)^2 + f(n) \right) \mid \left((p-1)^2 + n \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \left((p-1)^2 + f(n) \right) \mid \left((p-1)^2 + f(n) + n - f(n) \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \left((p-1)^2 + f(n) \right) \mid (n - f(n))^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), cố định n và cho $p \rightarrow +\infty$, ta được $(p-1)^2 + f(n) \rightarrow +\infty$, do đó khi p là số nguyên tố đủ lớn, thì từ (2) suy ra $f(n) = n$. Thử lại, ta thấy hàm $f(n) = n$ thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Chú ý 2.

- ☑ Giữa phân tích tìm lời giải và trình bày lời giải có sự khác nhau nhất định, đó là do khi trình bày lời giải thì ta đã rút kinh nghiệm rồi. Chẳng hạn khi phân tích tìm lời giải ta đã khá vất vả trong việc loại bỏ trường hợp $f(p-1) = p^2-1$, tuy nhiên khi trình bày lời giải thì ta đã làm cho gọn gàng và dễ dàng hơn.
- ☑ Trong một số tình huống, việc sử dụng số nguyên tố và tính vô hạn của tập các số nguyên tố (bằng cách cho số nguyên tố $p \rightarrow +\infty$, hay cho số nguyên tố p đủ lớn) là rất hữu hiệu.

Bài toán 3 (Balkan 2017). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

với mọi cặp số nguyên dương m, n .

 **Lời giải**

Do $f(n) + nf(m) = f(n) - n^2 + n[f(m) + n]$ nên từ giả thiết, ta có

$$n + f(m) \mid f(n) - n^2, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1)$$

Giả sử tồn tại $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(n_0) > n_0^2$. Khi đó, bằng cách thay $m = n = n_0$ vào tính chất (1), ta được $n_0 + f(n_0) \mid f(n_0) - n_0^2$, mâu thuẫn do $n_0 + f(n_0) > f(n_0) - n_0^2 > 0$. Do đó

$$f(n) \leq n^2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Dễ thấy $f(n) = n^2, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ là một nghiệm của bài toán. Xét trường hợp $f(n) \neq n^2$, khi đó tồn tại $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(n_1) < n_1^2$. Thay $n = n_1$ vào (1), ta được

$$n_1 + f(m) \mid n_1^2 - f(n_1), \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

Do đó, ta có $f(m) \leq n_1^2 - n_1 - f(n_1)$ với mọi m nguyên dương. Nói cách khác, $f(n)$ bị chặn trên bởi một hằng số c dương nào đó. Bây giờ, thay $m = n$ vào (1), ta được

$$n + f(n) \mid f(n) - n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

mà $f(n) - n^2 = f(n) - f^2(n) + f^2(n) - n^2$, nên suy ra

$$n + f(n) \mid f^2(n) - f(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2)$$

Để ý rằng, với mọi $n > c^2 - 2c$ thì $f(n) - 1 \leq c - 1$ nên

$$\begin{aligned} [n + f(n)] - [f^2(n) - f(n)] &= n + 1 - [f(n) - 1]^2 \\ &\geq n + 1 - (c - 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Do đó, kết hợp với (2), ta được $f^2(n) - f(n) = 0$ hay $f(n) = 1$ với mọi $n > c^2 - 2c$. Bây giờ, ta có chú ý

$$n^2 - f(n) = [n^2 - f^2(m)] + f^2(m) - f(n)$$

nên kết hợp với (1), ta suy ra

$$n + f(m) \mid f^2(m) - f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3)$$

Cố định m , chọn n nguyên dương sao cho $n > c^2 + c > c^2 - 2c$, ta được

$$n + f(m) > c^2 + c \geq f^2(m) + f(n) > |f^2(m) - f(n)|.$$

Do đó để tính chất (3) được thỏa mãn thì phải có $f^2(m) = f(n) = 1$, hay $f(m) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}^+$. Thử lại ta thấy hàm $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Tóm lại, bài toán có hai nghiệm hàm là $f(n) = n^2$ và $f(n) = 1$.

Nhận xét 1. Sau khi đã chứng minh $f(n) \leq n^2$ thì ta còn một cách khác để hoàn tất lời giải của bài toán như sau: Thay $m = n = p$ với p nguyên tố vào giả thiết, ta được

$$p + f(p) \mid (p + 1)f(p).$$

Nếu p không chia hết $f(p)$ thì ta có $(p + f(p), f(p)) = 1$, suy ra $p + f(p) \mid p + 1$. Mà

$$p + f(p) \geq p + 1$$

nên ta có $f(p) = 1$. Tóm lại, với mọi số nguyên tố p thì

☑ hoặc $f(p) = 1$;

☑ hoặc $p|f(p)$.

Gọi $\mathcal{A}$ là tập các số nguyên tố p sao cho $f(p) = 1$, $\mathcal{B}$ là tập hợp các số nguyên tố p sao cho $p|f(p)$. Rõ ràng hai tập $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sẽ có ít nhất một tập hợp chứa vô hạn phần tử.

☑ Trường hợp 1: $\mathcal{A}$ là tập vô hạn. Thay $n = p$ với $p \in \mathcal{A}$ vào giả thiết bài toán, ta được

$$p + f(m)|1 + pf(m),$$

mà $1 + pf(m) = 1 - f^2(m) + f(m)[p + f(m)]$ nên ta có

$$p + f(m)|f^2(m) - 1.$$

Cố định m và cho $p \rightarrow +\infty$, ta được $f(m) = 1$. Hàm $f(n) = 1$ thỏa mãn các yêu cầu.

☑ Trường hợp 2: $\mathcal{B}$ là tập vô hạn. Thay $m = p$ với $p \in \mathcal{B}$ vào (1), ta được

$$n + f(p)|n^2 - f(n).$$

Chú ý rằng $f(p) \geq p$. Do đó, bằng cách cố định n và cho $p \rightarrow +\infty$, ta có $f(p) \rightarrow +\infty$. Kết hợp với kết quả trên, ta được $f(n) = n^2$. Thử lại, ta thấy hàm $f(n) = n^2$ thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Bài toán 4 (IMO, 2011). Xét hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(m - n)|f(m) - f(n). \quad (1)$$

Chứng minh rằng, với mọi số nguyên m, n mà $f(m) \leq f(n)$ thì $f(m)|f(n)$.

🔗 Lời giải

Thay $n = 0$ vào (1), ta được $f(m)|f(m) - f(0)$ hay $f(m)|f(0)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Thay $m = 0$ vào (1), ta được

$$f(-n)|f(0) - f(n), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra

$$f(-n)|f(n), \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Thay n bởi $-n$ vào (2), ta được $f(n)|f(-n), \forall n \in \mathbb{Z}$. Từ đó, bằng cách kết hợp với (2), ta có

$$f(-n) = f(n), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Lần lượt thay n bởi $-n$ và thay n bởi $m + n$ vào (1) rồi sử dụng kết quả trên, ta được

$$f(m + n)|f(n) - f(m), \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

và

$$f(n)|f(m) - f(m + n), \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

Bây giờ, xét các số nguyên m, n sao cho $f(m) \leq f(n)$, ta có các trường hợp sau:

☑ Trường hợp 1: $f(m + n) \geq f(n)$. Khi đó, do $f(m + n) \geq f(n) > f(n) - f(m) \geq 0$, nên từ (3), ta suy ra $f(m) = f(n)$.

☑ Trường hợp 2: $f(n) > f(m + n)$. Khi đó, do

$$f(n) \geq \max\{f(m), f(m + n)\} > |f(m) - f(m + n)|$$

nên từ (4), ta suy ra $f(m) = f(m + n)$. Thay vào (3), ta được ngay $f(m)|f(n)$.

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta đều có $f(m)|f(n)$. Bài toán được chứng minh.

B. BÀI TẬP

1. Đề bài

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$f(m) + f(n) \mid m + n.$$

Bài toán 6 (IMO Shortlist 2012). Cho n là số nguyên dương lẻ. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(x) - f(y) \mid x^n - y^n$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 7 (APMO 2019 P1, Indonesian MO 2020).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài toán 8 (Thanh Hóa TST 2018-2019 vòng 2; IMO Shortlist 2016).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$(f(a) + f(b) - ab) \mid (af(a) + bf(b)), \quad \text{với mọi } a, b \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 9 (Korean National Olympiad 2013).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(mn) = \text{lcm}(m, n) \cdot \gcd(f(m), f(n)), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Với ký hiệu $\text{lcm}(m, n)$ là ước chung lớn nhất của m và n , còn $\gcd(f(m), f(n))$ là bội chung nhỏ nhất của $f(m)$ và $f(n)$.

Bài toán 10 (Iran TST, 2008). Cho số nguyên dương k . Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $f(m) + f(n)$ chia hết $(m + n)^k$ với mọi cặp số nguyên dương m, n ($\mathbb{Z}^+$ là tập hợp các số nguyên dương).

Bài toán 11 (Iran TST 2005). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn: tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ và số nguyên tố p sao cho với mọi $n \geq k$, $f(n + p) = f(n)$ và nếu $m \mid n$ thì $f(m + 1) \mid f(n) + 1$.

Bài toán 12. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!)$$

với mọi $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 13 (BMO, 2010). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $f(n!) = [f(n)]!$ với mọi n nguyên dương;

ii) $m - n \mid f(m) - f(n)$ với mọi m, n nguyên dương phân biệt.

Bài toán 14. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f(m! + n!) \mid f(m)! + f(n)!$ và $m + n$ là ước của $f(m) + f(n)$ với mọi số nguyên dương m, n .

Bài toán 15 (IMO Shortlist, 2007). Tìm tất cả các toàn ánh $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn điều kiện: Với mọi m, n nguyên dương và với mọi số nguyên tố p thì $f(m + n)$ chia hết cho p khi và chỉ khi $f(m) + f(n)$ chia hết cho p .

Bài toán 16 (BMO 2020). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

$$(i) \sum_{k=1}^n f(k) \text{ là số chính phương.}$$

$$(ii) f(n) \text{ chia hết } n^3.$$

Bài toán 17 (IMO, 2009). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn các số

$$x, f(y), f(y + f(x) - 1)$$

là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi x, y nguyên dương.

Bài toán 18 (IRAN 2011). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$af(a) + bf(b) + 2ab$$

là số chính phương với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 19 (Bài toán P199, Tạp chí Pi tháng 7 năm 2018).

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện: với mọi số nguyên dương a và b , tổng

$$a^2f(a) + b^2f(b) + 3ab(a + b)$$

luôn viết được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

Bài toán 20 (Canada MO 2008). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa

$$f(n)^p \equiv n \pmod{f(p)}$$

với mọi số nguyên dương n và mọi số nguyên tố p .

Bài toán 21 (Chọn ĐTQG Thanh Hóa 2017).

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số là các số nguyên thỏa mãn $n^{(n-1)^{2018}} - 1$ chia hết cho $P(n)$, với mọi số nguyên dương n .

Bài toán 22. Cho $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

$$f(p) = 1, \text{ với mọi } p \text{ nguyên tố}; \quad (i)$$

$$f(xy) = yf(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}^+. \quad (ii)$$

$$\textcircled{1} \text{ Tìm } n \in \mathbb{N}^* \text{ bé nhất, } n \geq 2018 \text{ để } f(n) = n.$$

$$\textcircled{2} \text{ Tìm } n \in \mathbb{N}^* \text{ bé nhất, } n \geq 2018 \text{ để } f(n) = 2n.$$

2. Lời giải

Bài 5. Giả sử tồn tại hàm $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(m) + f(n) \mid m + n, \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Kí hiệu $P(a, b)$ là phép thế $m = a, n = b$ vào (1). Khi đó $P(1, 1)$, ta có

$$2f(1) \mid 2 \Rightarrow f(1) = 1.$$

Giả sử p là số nguyên tố. $P(p - 1, 1)$, ta có

$$f(p - 1) + 1 \mid p \Rightarrow f(p - 1) + 1 = p \Rightarrow f(p - 1) = p - 1.$$

$$P(p-1, p), \text{ ta có } p-1 + f(p) \mid 2p-1 \Leftrightarrow p-1 + f(p) \mid p + (p-1). \quad (2)$$

$$P(p, p), \text{ ta có } 2f(p) \mid 2p \Rightarrow f(p) \mid p. \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta có $f(p) = p$ với mọi số nguyên tố p . Xét n là số nguyên dương bất kì và p là số nguyên tố. Khi đó

$$f(n) + p = f(n) + f(p) \mid n + p$$

Suy ra

$$f(n) + p \mid (n + p) - (f(n) + p) = n - f(n), \forall p \text{ nguyên tố}. \quad (4)$$

Cố định n và cho $p \rightarrow +\infty$ (ta thực hiện được điều này vì có vô số số nguyên tố) ta được $f(n) + p \rightarrow +\infty$, do đó từ (4) dẫn tới $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Thử lại ta thấy nghiệm hàm này thỏa. Do đó, đây là nghiệm hàm cần tìm.

Nhận xét 2. Trong lời giải trên, ta đi tính giá trị của hàm f tại các điểm số nguyên tố. Do $f(m) + f(n) \mid m + n$, nên ta chọn m, n sao cho $m + n$ là số nguyên tố để sử dụng tính chất số nguyên tố chỉ có hai ước nguyên dương là 1 và chính nó. Khi xác định được $f(p) = p$ với mọi p là số nguyên tố, kết hợp với việc dự đoán được $f(n) = n$ là nghiệm hàm của bài toán, ta thay m hoặc n là số nguyên tố và sử dụng tính chia hết để tạo ra đại lượng $f(n) - n$ chia hết cho vô hạn số nguyên. Từ đó, dẫn tới $f(n) = n$.

Bài 6. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(x) - f(y) \mid x^n - y^n, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Kí hiệu $P(x, y)$ là mệnh đề $f(x) - f(y) \mid x^n - y^n, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Ta thấy, nếu f là hàm thỏa yêu cầu bài toán thì $f + c$ cũng thỏa yêu cầu bài toán. Do đó, ta có thể giả sử $f(0) = 0$. Ta có $f(1) \mid 1$, nên $f(1) = \pm 1$. Giả sử $f(1) = -1$. Do nếu f thỏa bài toán thì $-f$ cũng thỏa bài toán, nên chỉ cần xét $f(1) = 1$. Ta có

$$f(-1) - f(0) \mid (-1)^n - 0^n \Rightarrow f(-1) \mid -1 \Rightarrow f(-1) = \pm 1. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } f(-1) - f(1) \mid (-1)^n - 1^n \Rightarrow f(-1) - 1 \mid -2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(-1) = -1$. Xét p là một số nguyên tố lẻ. Mệnh đề $P(p, 0)$ cho ta kết quả

$$f(p) \mid p^n \Rightarrow f(p) = \pm p^d, 0 \leq d \leq p.$$

Nếu $d = 0$ thì

$$0 = f(p) - f(q) \mid p^n - q^n \quad (\text{với } p, q \text{ là những số nguyên tố phân biệt})$$

đây là điều vô lí. Do đó $d > 0$. Giả sử $f(p) = -p^d$. Khi đó

$$f(p) - f(1) \mid p^n - 1 \Rightarrow -p^d - 1 \mid p^n - 1 \Rightarrow p^d + 1 \mid p^n - 1.$$

$$\text{Ta có } p^d + 1 \mid p^{2d} - 1 \Rightarrow p^d + 1 \mid p^{\gcd(2d, n)} - 1.$$

Mà n lẻ nên $\gcd(2, n) = 1 \Rightarrow \gcd(2d, n) = \gcd(d, n)$. Do đó

$$p^d + 1 \mid p^{\gcd(d, n)} - 1 \Rightarrow p^d + 1 \leq p^{\gcd(d, n)} - 1 \leq p^d - 1,$$

mâu thuẫn. Như vậy $f(p) = p^d$. Ta viết $n = qd + r$ với $0 \leq r \leq d - 1$. Khi đó

$$p^d - 1 = f(p) - f(1) \mid p^n - 1 = p^{qd+r} - 1 = p^r (p^{qd} - 1) + p^r - 1,$$

suy ra $p^d - 1 \mid p^r - 1 < p^d - 1 \Rightarrow p^r - 1 = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow d \mid n$. Giả sử b là số nguyên bất kỳ. Chọn số nguyên tố q sao cho

$$q > b^n + 2|f(b)|^n \text{ hay } b^n + |f(b)|^n < q - |f(b)|^n.$$

Ta có

$$f(b) - f(q) = f(b) - q^d \mid b^n - q^n = b^n - (q^d)^{\frac{n}{d}}. \quad (3)$$

Mà

$$b^n - (q^d)^{\frac{n}{d}} = b^n - f(b)^{\frac{n}{d}} + f(b)^{\frac{n}{d}} - (q^d)^{\frac{n}{d}}, \quad f(b) - q^d \mid f(b)^{\frac{n}{d}} - (q^d)^{\frac{n}{d}}$$

nên kết hợp (3) ta có $b^n - f(b)^{\frac{n}{d}} \mid f(b) - q^d$. Nếu $b^n - f(b)^{\frac{n}{d}} \neq 0$ thì

$$\left| b^n - f(b)^{\frac{n}{d}} \right| \leq b^n + |f(b)|^n < q - |f(b)|^n \leq q^d - f(b),$$

đến đây ta gặp mâu thuẫn. Do đó $b^n - f(b)^{\frac{n}{d}} = 0 \Leftrightarrow f(b) = b^d$. Thử lại ta thấy hàm số

$$f(x) = x^d, \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad (\text{với } d \text{ là một ước dương của } n)$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = \pm x^d + c, \quad \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (\text{với } d \text{ là một ước dương của } n, c \text{ là hằng số nguyên})$$

Bài 7. Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}^+. \quad (1)$$

Từ (1) thay a bởi p , thay b bởi $f(p)$, với p là số nguyên tố ta được

$$\begin{aligned} 2f(p) \mid p^2 + f(p)f(f(p)) &\Rightarrow f(p) \mid p^2 + f(p)f(f(p)) \\ &\Rightarrow f(p) \mid p^2 \Rightarrow f(p) \in \{1, p, p^2\}, \quad \forall p \text{ nguyên tố.} \end{aligned}$$

☑ Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $f(p) = 1$. Khi đó từ (1) thay a bởi p và thay b bởi p ta được

$$1 + p \mid p^2 + 1 \Rightarrow p + 1 \mid (p^2 - 1) + 2 \Rightarrow p + 1 \mid 2 \quad (\text{vô lí}).$$

☑ Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $f(p) = p^2$. Khi đó từ (1) thay a bởi p và thay b bởi p ta được

$$\begin{aligned} p^2 + p \mid p^2 + p^4 &\Rightarrow p + 1 \mid p + p^3 \\ \Rightarrow p + 1 \mid (p + 1) + (p^3 + 1) - 2 &\Rightarrow p + 1 \mid -2 \quad (\text{vô lí}). \end{aligned}$$

Do đó $f(p) = p$ với mọi số nguyên tố p . Giả sử b là số nguyên dương, ta lấy p là số nguyên tố và lớn hơn b . Khi đó từ (1) thay a bởi p ta được

$$p + b \mid p^2 + pf(b) \Rightarrow p + b \mid p(p + f(b)).$$

Mà $\gcd(p + b, p) = 1$ nên

$$p + b \mid p + f(b) \Rightarrow p + b \mid f(b) - b. \quad (2)$$

Do (2) đúng với mọi số nguyên tố $p > b$ nên suy ra $f(b) - b = 0$ hay $f(b) = b$. Vậy

$$f(n) = n, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 8. Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán. Cho $a = b = 1$ ta được

$$2f(1) - 1 | 2f(1) \Rightarrow 2f(1) - 1 | 1.$$

Mà $f(1) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2f(1) - 1 = 1 \Rightarrow f(1) = 1$. Xét số nguyên tố p bất kì, $p \geq 7$. Cho $a = p$, $b = 1$ ta được

$$\begin{aligned} f(p) - p + 1 | pf(p) + 1 &\Rightarrow f(p) - p + 1 | pf(p) - p^2 + p + (p^2 - p + 1) \\ &\Rightarrow f(p) - p + 1 | (p^2 - p + 1). \end{aligned}$$

Nếu $f(p) - p + 1 = p^2 - p + 1 \Rightarrow f(p) = p^2$.

Nếu $f(p) - p + 1 \neq p^2 - p + 1$ thì do $p^2 - p + 1$ lẻ nên

$$p^2 - p + 1 \geq 3(f(p) - p + 1).$$

Từ đó ta có $f(p) \leq \frac{1}{3}(p^2 + 2p - 2)$. Cho $a = b = p$, ta được

$$\begin{aligned} 2f(p) - p^2 | 2pf(p) \\ \Rightarrow 2f(p) - p^2 | 2pf(p) - p^3 + p^3 \Rightarrow 2f(p) - p^2 | p^3. \end{aligned}$$

Mặt khác $f(p) \geq 1 \Rightarrow -p^3 < 2f(p) - p^2 \leq \frac{2}{3}(p^2 + 2p - 2) - p^2 < -p$. Do p nguyên tố và $p \geq 7$ nên điều này mâu thuẫn với điều kiện $2f(p) - p^2$ là ước của p^3 . Vậy với số nguyên tố $p \geq 7$ thì $f(p) = p^2$. Với mỗi số nguyên a cố định, chọn số nguyên tố p rất lớn. Cho $b = p$, ta được

$$\begin{aligned} f(a) + p^2 - pa | af(a) + p^3 \\ \Rightarrow f(a) + p^2 - pa | af(a) + ap^2 - a^2p + p^3 - ap^2 + a^2p \\ \Rightarrow f(a) + p^2 - pa | p(p^2 - ap + a^2). \end{aligned}$$

Do chọn p đủ lớn nên p không thể là ước của $f(a)$, vì vậy $f(a) + p^2 - pa$ và p nguyên tố cùng nhau nên

$$\begin{aligned} f(a) + p^2 - pa | p^2 - ap + a^2 &= (f(a) + p^2 - pa) + a^2 - f(a) \\ \Rightarrow f(a) + p^2 - pa | a^2 - f(a). \end{aligned}$$

Vì $a^2 - f(a)$ cố định nên ta có thể chọn p đủ lớn để

$$f(a) + p^2 - pa > a^2 - f(a).$$

Do đó để $f(a) + p^2 - pa | a^2 - f(a)$ thì $a^2 - f(a) = 0$.

Vậy $f(a) = a^2$ với $\forall a \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 9. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(mn) = \text{lcm}(m, n) \cdot \gcd(f(m), f(n)), \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Ký hiệu $P(m, n)$ là phép thay thế bộ số $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vào (1). Gọi $f(1) = c \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$P(m, 1) \Rightarrow f(m) = m \cdot \gcd(f(m), c), \forall m \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Với mọi $m \in \mathbb{N}^*$, thực hiện $P(cm, 1)$ ta được

$$f(cm) = cm \cdot \gcd(f(cm), c) = cm \cdot \gcd(cm \cdot \gcd(f(cm), c), c) = c^2 m.$$

Với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, thực hiện $P(m, cn)$ ta được

$$c^2mn = f(m.cn) = \text{lcm}(m, cn) \cdot \gcd(f(m), f(cn)) = \frac{cmn}{\gcd(m, cn)} \cdot \gcd(f(m), c^2n)$$

Suy ra $c \cdot \gcd(m, cn) = \gcd(f(m), c^2n)$. Do đó $c|f(m)$. Vậy (2) trở thành

$$f(m) = m \cdot \gcd(f(m), c) = cm.$$

Thử lại ta thấy rằng hàm số $f(m) = cm$ (với $c \in \mathbb{N}^*$) thỏa mãn đề bài. Thật vậy, nếu $f(m) = cm$ thì

$$\text{lcm}(m, n) \cdot \gcd(f(m), f(n)) = \frac{mn}{\gcd(m, n)} \cdot \gcd(cm, cn) = cmn = f(mn),$$

thỏa mãn (1). Vậy hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(m) = cm, \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ (với } c \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Bài 10. Phân tích. Ta thử tính một số giá trị đặc biệt như $f(1), f(2)$. Thay $m = n = 1$ vào điều kiện ban đầu thu được

$$2f(1)|2^k \Leftrightarrow f(1)|2^{k-1}.$$

Tiếp theo thay $m = 2, n = 1$ vào điều kiện ban đầu thu được $f(2) + f(1)|3^k$. Từ điều kiện này suy ra $f(2), f(1)$ khác tính chẵn, lẻ. Nếu $f(2)$ chẵn thì $f(1)$ lẻ, kết hợp với điều kiện $f(1)|2^{k-1}$ ta được $f(1) = 1$. Nếu $f(2)$ lẻ, thay $m = n = 2$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$f(2) + f(2)|4^k \Leftrightarrow 2f(2)|2^{2k} \Leftrightarrow f(2)|2^{2k-1},$$

kết hợp với $f(2)$ lẻ nên $f(2) = 1$. Tiếp theo thay $m = n = 4$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$f(4) + f(4)|8^k \Leftrightarrow f(4)|2^{3k-1}.$$

Thay $m = 3, n = 2$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$f(3) + f(2)|5^k \Leftrightarrow f(3) + 1|5^k.$$

Suy ra $f(3)$ chẵn. Tiếp tục thay $m = 3, n = 4$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$f(3) + f(4)|7^k.$$

Suy ra $f(4)$ lẻ, do đó $f(4) = 1$. Theo lập luận như vậy việc tính được $f(1)$ là tương đối khó khăn. Như vậy ta cần đi theo hướng làm khác. Đầu tiên ta dễ nhận thấy hàm số cần tìm là

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nếu đây là hàm số duy nhất thì ta có thể dự đoán những tính chất đặc biệt của hàm số này chẳng hạn như nếu p là một số nguyên tố sao cho $p|f(n)$ thì $p|n$;

$$|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

f là hàm số đơn ánh... Ta cần tìm ra một đẳng thức liên hệ của hàm số f . Do đó ta sẽ đi chứng minh tính chất

$$|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Để chứng minh tính chất này ta thường làm theo hướng: giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho

$$|f(n+1) - f(n)| > 1,$$

suy ra tồn tại số nguyên tố $p \mid (f(n+1) - f(n))$. (1)

Ta tìm mối liên hệ giữa $f(n+1), f(n)$. Từ điều kiện ban đầu ta có

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k, \forall m \in \mathbb{N}^*; f(m) + f(n+1) \mid (m+n+1)^k, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Từ hai điều kiện trên suy ra

$$(f(m) + f(n), f(m) + f(n+1)) = 1, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$(f(m) + f(n), f(m) + f(n+1) - f(m) - f(n)) = 1, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Do đó $(f(m) + f(n), f(n+1) - f(n)) = 1, \forall m \in \mathbb{N}^*$. (2)

Kết hợp (1) và (2) nếu ta chọn được m sao cho $p \mid f(m) + f(n)$ thì ta có điều mâu thuẫn ngay.

Việc chọn này khá đơn giản, lấy $m = p^\alpha - n$, với α đủ lớn thì theo điều kiện ban đầu ta được

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k \Rightarrow f(m) + f(n) \mid p^{\alpha k}.$$

Kết hợp với $f(m) + f(n) > 1$ ta được $p \mid f(m) + f(n)$. Từ điều này và (1), (2) dẫn tới mâu thuẫn, suy ra

$$|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Từ (3) và giả thiết ta cần chỉ ra

$$f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

hoặc

$$f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nhận thấy nếu một trong hai đẳng thức trên không xảy ra thì tồn tại một số nguyên dương k sao cho

$$f(k+1) - f(k) = 1$$

và

$$f(k+2) - f(k+1) = -1.$$

cộng từng vế hai đẳng thức này ta được

$$f(k+2) - f(k) = 0 \Leftrightarrow f(k+2) = f(k).$$

Ta đang cần chỉ ra điều này không đúng, muốn vậy ta nghĩ đến chứng minh hàm số f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại hai số nguyên dương phân biệt a, b sao cho $f(a) = f(b)$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} f(a) + f(x) \mid (a+x)^k \\ f(b) + f(x) \mid (b+x)^k \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbb{N}^*). \quad (4)$$

Do $a \neq b$ nên tồn tại số nguyên dương x sao cho $(a+x, b+x) = 1$, điều này thực hiện được vì

$$(a+x, b+x) = (a+x, a+x-b-x) = (a+x, a-b).$$

Từ đây ta chỉ cần lấy x sao cho $a+x$ là số nguyên tố đủ lớn. Từ (4) ta suy ra

$$f(a) + f(x) \mid ((a+x)^k, (b+x)^k) = 1,$$

vô lý vì $f(a) + f(x) > 1$. Do đó hàm số f là một đơn ánh. Từ phân tích ở trên ta được

$$f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

hoặc

$$f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nếu $f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $f(n+1) < f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$, vô lí. Vậy

$$f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) = n - 1 + f(1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thử vào điều kiện ban đầu ta được

$$m + n - 2 + 2f(1) \mid (m+n)^k, \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (5)$$

Từ (5) lần lượt cho $m = n = 1$ và $m = 2, n = 1$ và $m = n = 2$ thu được

$$\begin{cases} 2f(1) \mid 2^k \\ 1 + 2f(1) \mid 3^k \\ 2 + 2f(1) \mid 4^k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) \mid 2^{k-1} \\ 1 + 2f(1) \mid 3^k \\ 1 + f(1) \mid 2^{2k-1} \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1.$$

Do đó $f(n) = n$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Giải. Trước hết ta chứng minh f đơn ánh. Giả sử có $a, b \in \mathbb{Z}^+, a \neq b$ sao cho $f(a) = f(b)$. Khi đó, từ giả thiết, ta suy ra $f(a) + f(n)$ chia hết $(a+n)^k$ và $f(b) + f(n) = f(a) + f(n)$ chia hết $(b+n)^k$ nên

$$\left((a+n)^k, (b+n)^k \right) > 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Suy ra $((n+a), (n+b)) = (n+a, a-b) > 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, mâu thuẫn. Vậy f là đơn ánh. Tiếp theo ta chứng minh rằng số $f(n+1) - f(n)$ không có ước nguyên tố. Thật vậy, giả sử ngược lại $f(n+1) - f(n)$ có ước nguyên tố. Gọi p là một số nguyên tố nào đó và gọi ℓ là số nguyên dương sao cho $p^\ell > n$. Từ giả thiết, ta suy ra

$$f(n) + f(p^\ell - n) \mid p^{\ell k}.$$

Do $f(n) + f(p^\ell - n) > 1$ nên

$$p \mid f(n) + f(p^\ell - n).$$

Chú ý rằng $f(n) \equiv f(n+1) \pmod{p}$ nên từ đây, ta suy ra $p \mid f(n+1) + f(p^\ell - n)$. Mà theo giả thiết bài toán thì

$$f(n+1) + f(p^\ell - n) \mid (p^\ell + 1)^k$$

nên ta có $p \mid (p^\ell + 1)^k$, mâu thuẫn. Tóm lại, ta có

$$|f(n+1) - f(n)| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bây giờ, giả sử tồn tại $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(n_0+1) = f(n_0) - 1$. Khi đó, do f đơn ánh nên ta phải có $f(n_0+2) = f(n_0) - 2$. Bằng cách lập luận như vậy, ta chứng minh được

$$f(n_0+m) = f(n_0) - m, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^+.$$

Tuy nhiên, điều này dẫn đến mâu thuẫn khi cho $m > f(n_0)$ (chú ý $f(n) \in \mathbb{Z}^+$). Do đó số n_0 nói trên không tồn tại, tức là phải có

$$f(n+1) - f(n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Từ đây, dễ dàng suy ra $f(n) = n + c, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ với $c = f(1) - 1$. Thay trở lại bài toán, ta phải tìm $c \geq 0$ sao cho

$$m + n + 2c \mid (m+n)^k, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Chọn m, n sao cho $m+n$ là số nguyên tố lớn hơn $2c$, ta tính được $c = 0$. Từ đó suy ra

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Hàm này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 11. Giả sử f là hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Giả sử $n \geq k$ và $n - 1$ không chia hết cho p . Khi đó tồn tại ℓ sao cho $n - 1 \mid n + \ell p$. Suy ra $f(n) \mid f(n + \ell p) + 1$. Mặt khác

$$f(n) = f(n + p) = f(n + 2p) = \dots = f(n + \ell p)$$

nên $f(n) \mid 1 \rightarrow f(n) = 1$. Với $n > 1$ bất kì, ta có:

$$n - 1 \mid (n - 1)kp \Rightarrow f(n) \mid f((n - 1)kp) + 1 = 2.$$

Do đó với $n > 1$ thì $f(n) \in \{1; 2\}$. Ta xét hai trường hợp:

☑ Trường hợp 1: $f(n) = 2, \forall n \geq k$ và $p \mid n - 1$. Xác định $n \geq k$ và p không chia hết $n - 1$. Khi đó tồn tại m sao cho $n - 1 \mid m$ và $p \mid m - 1$. Suy ra $f(n) \mid f(m) + 1 = 3$ hay $f(n) = 1$. Ta xác định hàm f như sau:

- $f(n) = 2, \forall n \geq k$ và $p \mid n - 1$.
- $f(n) = 1, \forall n > k$ và p không là ước của $n - 1$.
- $f(i) = f(i + p), \forall i < k$.

☑ Trường hợp 2: $f(n) = 1, \forall n \geq k$ và $p \mid n - 1$. Trong trường hợp này, $f(n) = 2, \forall n \geq k$ và nếu giả sử $S = \{a \mid f(a) = 2\}$ thì sẽ không tồn tại $m, n \in S$ thỏa mãn $m - 1 \mid n$. Ta xác định hàm f như sau:

- $f(n) \in \{1; 2\}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Với S là một tập con vô hạn của $\mathbb{N}$ sao cho không tồn tại $m, n \in S$ thỏa mãn $m - 1 \mid n$ và với $n > 1, f(n) = 2$ khi và chỉ khi $n \in S, f(n) = 1$ với các $n \neq 1$ còn lại và $f(1)$ là một số bất kì xác định bởi $f(2) \mid f(1) + 1$.

Bài 12. Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!), \forall n, m \in \mathbb{Z}^+.$$

Cho $m = n = 1$, ta có

$$1 + f(1)! \mid f(1)! + f(1) \Rightarrow 1 + f(1)! \mid f(1) - 1.$$

Mà $1 + f(1)! > |f(1) - 1|$, nên $f(1) = 1$. Cho $m = 1$, ta có

$$n! + 1 \mid f(n)! + 1 \Rightarrow f(n)! \geq n! \Rightarrow f(n) \geq n.$$

Cho $(m, n) = (1, p - 1)$ với p là số nguyên tố (và chú ý đến định lý Wilson), ta có

$$p \mid (p - 1)! + 1 \mid f(p - 1)! + 1 \Rightarrow f(p - 1) < p \Rightarrow f(p - 1) = p - 1.$$

Cho $n = p - 1$ (p là số nguyên tố) ta có $(p - 1)! + f(m)! \mid (p - 1)! + f(m!)$. Suy ra

$$(p - 1)! + f(m)! \mid f(m!) - f(m)!$$

với mọi số nguyên tố p , dẫn tới $f(m!) = f(m)!$. Do đó ta có thể viết lại đề bài như sau

$$n! + f(m)! \mid f(m)! + f(n)! \Rightarrow n! + f(m)! \mid f(n)! - n!$$

với mọi số nguyên dương m, n . Suy ra $f(n)! = n! \Rightarrow f(n) = n$ với mọi số nguyên dương n . Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 13. Lời giải 1 (Phân tích, tìm lời giải). Tính chất

$$m - n \mid f(m) - f(n)$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$ gọi cho ta thấy f có tính chất giống một đa thức hệ số nguyên. Như vậy ta sẽ xét các trường hợp sau:

- ☑ Trường hợp 1: f là hàm số hằng và $f(n) = a, \forall n \in \mathbb{N}^*$, trong đó a là một số nguyên dương cho trước. Khi đó theo giả thiết đầu tiên ta được: $a = a!$, đẳng thức này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a \in \{1, 2\}$. Thử lại thấy thỏa mãn, suy ra có hai hàm thỏa mãn là

$$f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*; f(n) = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- ☑ Trường hợp 2: f không phải hàm số hằng. Ta dự đoán trong trường hợp này

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Trước hết ta chứng minh $n \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta lấy hai số nguyên dương u, v sao cho $u \mid v$, để sử dụng giả thiết đã cho ta lấy biến nguyên dương n sao cho $n > v$. Khi đó do $n > u$ nên $n!$ chia hết cho u . Suy ra

$$u \mid (n! - v), n! > v \Rightarrow (n! - v) \mid (f(n!) - f(v)).$$

Do đó

$$(n! - v) \mid (f(n!) - f(v)) \Rightarrow u \mid (f(n!) - f(v)). \quad (1)$$

Nếu từ (1) ta có thể chọn $n > v$ sao cho $f(n) > u$ thì từ (1) suy ra $u \mid f(v)$, từ kết quả này nếu lấy $u = v$ thì $u \mid f(u)$ hay ta có

$$n \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy ta cần chỉ ra tồn tại $n > v$ sao cho $f(n) > u$. Thật vậy, giả sử ngược lại ta có

$$f(n) \leq u, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > v.$$

Suy ra tồn tại số nguyên dương $a \leq u$ sao cho $f(n) = a$ tại vô hạn số nguyên dương $n > v$. Theo giả thiết, với mỗi số nguyên dương $m \neq n$, ta có

$$m - n \mid f(m) - f(n) \Rightarrow m - n \mid f(m) - a. \quad (2)$$

Do f không phải hàm số hằng nên ta có thể chọn được số nguyên dương m sao cho $f(m) - a \neq 0$. Do đó từ (2) suy ra có vô hạn số nguyên là ước của $f(m) - a \neq 0$, điều này mâu thuẫn, suy ra luôn tồn tại số nguyên dương $n > v$ sao cho $f(n) > u$. Do vậy theo lí luận ở trên ta thu được

$$n \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Theo (3) ta có $2 \mid f(2)$, mà từ i), ta suy ra $f(1), f(2) \in \{1; 2\}$ nên $f(2) = 2$. Nếu $f(3) > 3$ thì

$$f(3) \geq 4 \Rightarrow f(3!) = f(3)! : 4 \Rightarrow f(3!) - f(2) = f(3!) - 2,$$

không chia hết cho 4. Mặt khác theo giả thiết

$$3! - 2 \mid f(3!) - f(2) \Rightarrow 4 \mid f(3!) - 2,$$

mâu thuẫn, suy ra $f(3) \leq 3$. Theo (3) ta lại có $f(3) \geq 3 \Rightarrow f(3) = 3$. Ta có

$$f(6) = f(3!) = (f(3))! = 3! = 6 \Rightarrow 6! = f(6)! = f(6!) \Rightarrow f(720) = 720 \dots$$

Cứ tiếp tục như vậy ta có vô hạn số nguyên dương n sao cho $f(n) = n$. Đây là kết quả rất quan trọng để ta chỉ ra được

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, với mỗi số nguyên dương m , kết hợp với kết quả ở trên thì tồn tại vô hạn số nguyên dương $n > m$ sao cho $f(n) = n$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} m - n \mid f(m) - f(n) &\Rightarrow m - n \mid f(m) - n \\ m - n \mid f(m) - m + m - n &\Rightarrow m - n \mid f(m) - m \end{aligned}$$

với vô hạn số nguyên dương $n > m$. Điều này chỉ xảy ra khi $f(m) = m$. Do đó

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Lời giải 2. Ta sẽ chứng minh rằng, nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{Z}^+, n_0 \geq 2$ mà $f(n_0) = 1$ thì

$$f(n) = 1, \forall n \geq n_0. \quad (*)$$

Thật vậy, giả sử có $n \geq 2$ sao cho $f(n) = 1$, khi đó ta có

$$n \cdot n! = (n+1)! - n! \mid f((n+1)!) - f(n!) = [f(n+1)]! - [f(n)]!. \quad (**)$$

Do $n \cdot n!$ chia hết cho 2 nên $[f(n+1)]! - 1$ chia hết cho 2, suy ra $[f(n+1)]!$ là số lẻ, do đó $f(n+1) = 1$. Tương tự ta cũng có

$$f(n+2) = f(n+3) = \dots = 1.$$

Khẳng định (*) được chứng minh. Trở lại bài toán, từ i) suy ra $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$. Xét các trường hợp sau:

- ☑ Trường hợp 1: $f(1) = f(2) = 1$. Theo (*), ta có $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.
- ☑ Trường hợp 2: $f(1) = 2, f(2) = 1$. Theo (*), ta có $f(n) = 1, \forall n \geq 2$. Tuy nhiên điều này mâu thuẫn với ii) (chỉ cần thay $n = 1$ và $m \geq 3$ vào ii)).
- ☑ Trường hợp 3: $f(1) = 1, f(2) = 2$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương. Thật vậy, giả sử khẳng định đúng đến $n = k$; khi đó theo (**) (chú ý rằng tính chất này luôn đúng do i) và ii)), ta có

$$k \cdot k! \mid [f(k+1)]! - k!.$$

Suy ra $f(k+1) < 2k$, vì trong trường hợp ngược lại sẽ dẫn đến $[f(k+1)]!$ chia hết cho $k \cdot k!$; từ đó suy ra $k!$ chia hết cho $k \cdot k!$ (vô lý). Thêm vào đó, ta phải có

$$k = (k+1) - 1 \mid f(k+1) - f(1) = f(k+1) - 1.$$

Mà trong $2k-1$ số $1, 2, \dots, 2k-1$ có đúng $\left\lfloor \frac{2k-1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor 2 - \frac{1}{k} \right\rfloor = 1$ số chia hết cho k nên từ

$$f(k+1) - 1 < 2k-1, \quad f(k+1) - 1 : k$$

suy ra $f(k+1) - 1 = k$ hay $f(k+1) = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

- ☑ Trường hợp 4: $f(1) = f(2) = 2$. Trong trường hợp này, ta sẽ chứng minh $f(n) = 2$ cũng bằng quy nạp. Thật vậy, giả sử khẳng định đúng đến $n = k$; theo (**), ta có

$$k \cdot k! | [f(k+1)]! - 2.$$

Suy ra $f(k+1) < 2k$ (lý luận tương tự trường hợp 3 ở trên). Lại có

$$k-1 = (k+1) - 2 | f(k+1) - f(2) = f(k+1) - 2$$

và

$$k = (k+1) - 1 | f(k+1) - f(1) = f(k+1) - 2.$$

Do đó $k(k-1) | f(k+1) - 2$. Kết hợp với bất đẳng thức $f(k+1) < 2k$, ta suy ra $f(k+1) = 2$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có $f(n) = 2$ với mọi n nguyên dương. Hàm này cũng thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Lời giải 3. Từ i), ta suy ra $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$. Do $f(2) \in \{1, 2\}$ và

$$4 = (3! - 2) | f(3!) - f(2) = [f(3)]! - f(2)$$

nên nếu $f(3) \geq 4$ thì $f(3)! - f(2) > 20$, vô lí. Vậy $f(3) \in \{1, 2, 3\}$. Xét hai trường hợp sau:

- ☑ Trường hợp 1: $f(3) = 3$. Xét dãy (a_k) với $a_1 = 3$ và $a_{k+1} = a_k!$, ta dễ thấy $f(a_k) = a_k$ với mọi k nguyên dương và $\lim a_k = +\infty$. Bây giờ, cố định n và thay $m = a_k > n$ vào ii), ta được $a_k - n | a_k - f(n)$, suy ra

$$a_k - n | a_k - n + n - f(n) \Rightarrow a_k - n | n - f(n).$$

Cho $k \rightarrow +\infty$, ta được $f(n) = n$. Thử lại, hàm $f(n) = n$ thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

- ☑ Trường hợp 2: $f(3) \in \{1, 2\}$. Với $n > 3$, ta có

$$n! - 3 | f(n!) - f(3) = [f(n)]! - f(3).$$

Do $n! - 3$ chia hết cho 3 nên $[f(n)]! - f(3)$ chia hết cho 3. Nếu $f(n) \geq 3$ thì $[f(n)]! - f(3)$ chia 3 dư $f(3)$, vô lí, do đó $f(n) < 3$, tức $f(n) \in \{1, 2\}$. Tóm lại, ta có

$$f(n) \in \{1, 2\}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{Z}^+. \quad (***)$$

- Dễ thấy các hàm hằng $f(n) = 1$ và $f(n) = 2$ đều thỏa mãn yêu cầu đề bài.
- Xét trường hợp f khác hằng, khi đó do (***) nên tồn tại hai số $a, b \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(a) = 1$ và $f(b) = 2$. Theo ii), ta có

$$3 + b = (3 + a + b) - a | f(3 + a + b) - f(a) = f(3 + a + b) - 1$$

và

$$3 + a = (3 + a + b) - b | f(3 + a + b) - f(b) = f(3 + a + b) - 2.$$

Mà $3 + b > 2 \geq f(3 + a + b) - 1 \geq 0$; $3 + a > 2 > 2 - f(3 + a + b) \geq 0$ nên từ trên suy ra

$$1 = f(3 + a + b) = 2.$$

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ khả năng này không thể xảy ra.

Tóm lại, bài toán có ba nghiệm hàm là $f(n) = 1$, $f(n) = 2$ và $f(n) = n$.

Bài 14. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f(m! + n!) \mid f(m)! + f(n)!$ và $m + n$ là ước của $f(m) + f(n)$ với mọi số nguyên dương m, n . Từ giả thiết ta có

$$n + n \mid f(n) + f(n) \Rightarrow n \mid f(n), \forall n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Bây giờ ta giả sử p là số nguyên tố đủ lớn. Theo định lý Wilson, ta có

$$(p - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Do đó theo giả thiết ta có

$$p \mid f((p - 1)! + 1) \mid f(p - 1)! + f(1)!. \quad (2)$$

Do p là số nguyên tố đủ lớn nên p không là ước của $f(1)!$, vậy từ (2) suy ra p không là ước của $f(p - 1)!$, do đó $f(p - 1) \leq p - 1$. Kết hợp với (1) ta thu được kết quả: $f(p - 1) = p - 1$ với mọi số nguyên tố p đủ lớn. Với p là số nguyên tố đủ lớn ta có

$$p - 1 + n \mid f(p - 1) + f(n),$$

mà $f(p - 1) = p - 1$ nên

$$p - 1 + n \mid p - 1 + f(n) \Rightarrow p - 1 + n \mid p - 1 + n + f(n) - n,$$

dẫn tới

$$p - 1 + n \mid f(n) - n, \forall n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Với n là số nguyên dương tùy ý, do (3) đúng với mọi số nguyên tố đủ lớn nên $f(n) - n = 0$ hay $f(n) = n$. Như vậy $f(n) = n$ với mọi số nguyên dương n . Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 15. Cách 1. Nếu $f(1)$ có một ước nguyên tố p nào đó thì $f(1) + f(1)$ chia hết cho p và do $f(2) = f(1 + 1)$ và giả thiết bài toán nên $f(2)$ cũng chia hết cho p . Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(3), f(4), \dots$ chia hết cho p . Điều này mâu thuẫn với giả thiết f là toàn ánh. Do đó $f(1) = 1$. Bây giờ, với mỗi số p nguyên tố, gọi n_p là số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa tính chất $p \mid f(n)$, tức là

$$n_p = \min \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid f(n) \vdots p \right\}.$$

Rõ ràng $n_p > 1$. Ta có

$$\begin{aligned} f(n_p) + f(n_p) \vdots p &\Rightarrow f(n_p + n_p) \vdots p \Rightarrow f(2n_p) \vdots p \\ &\Rightarrow f(n_p) + f(2n_p) \vdots p \Rightarrow f(3n_p) \vdots p \Rightarrow \dots \Rightarrow f(kn_p) \vdots p \end{aligned}$$

Nghĩa là, nếu n là bội của n_p thì $f(n)$ chia hết cho p . Ngược lại, giả sử có số nguyên dương n sao cho $f(n)$ chia hết cho p . Nếu n không chia hết cho n_p thì

$$n = k \cdot n_p + r, \quad 0 < r < n_p,$$

mà $f(n) = f(k \cdot n_p + r)$ và giả thiết nên $f(k \cdot n_p) + f(r)$ chia hết cho p , lại theo lý luận ở trên thì $f(k \cdot n_p)$ chia hết cho p nên ta suy ra $p \mid f(r)$, mâu thuẫn với tính chất nhỏ nhất của n_p . Do đó, ta phải có n chia hết cho n_p . Tóm lại, ta có

$$p \mid f(n) \Leftrightarrow n_p \mid n. \quad (1)$$

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho số nguyên tố p . Khi đó $x \equiv y \pmod{n_p} \Leftrightarrow f(x) \equiv f(y) \pmod{p}$.

Chứng minh.

- ☑ Giả sử $x \equiv y \pmod{n_p}$. Ta chọn số nguyên dương $d > x$ sao cho $d \vdots n_p$. Do (1) nên $f(d) \vdots p$. Ta có

$$y - x + d \vdots n_p \stackrel{\text{do (1)}}{\Rightarrow} f(y - x + d) \vdots p \Rightarrow f(y) + f(d - x) \vdots p.$$

Mà $f(x + (d - x)) = f(d) \vdots p \Rightarrow f(x) + f(d - x) \vdots p$ nên

$$f(x) - f(y) \vdots p \Leftrightarrow f(x) \equiv f(y) \pmod{p}.$$

- ☑ Giả sử $f(x) \equiv f(y) \pmod{p}$. Giả sử $y > x$ và ta chọn số nguyên dương $d > x$ sao cho $d \vdots n_p$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(y - x) &\equiv f(y - x) + f(d) \equiv f(y + d - x) \equiv f(y) + f(d - x) \\ &\equiv f(x) + f(d - x) \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Do đó, sử dụng (1) suy ra $y - x \vdots n_p$.

Như vậy bổ đề 1 được chứng minh. Tiếp theo ta sẽ chứng minh:

$$x \equiv y \pmod{p} \Leftrightarrow f(x) \equiv f(y) \pmod{p}. \quad (2)$$

- ☑ Vì $1, 2, \dots, n_p$ đôi một không đồng dư với nhau theo modulo n_p nên theo cách chọn n_p thì $f(1), f(2), \dots, f(n_p)$ đều không chia hết cho p và theo bổ đề 1 thì $f(1), f(2), \dots, f(n_p)$ đôi một không đồng dư với nhau theo modulo p . Nếu $n_p > p$ thì khi chia n_p số $f(1), f(2), \dots, f(n_p)$ cho p ta được n_p số dư đôi một khác nhau và tất cả đều thuộc $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$, vô lí. Vậy $p \geq n_p$.

- ☑ Do f là toàn ánh nên tồn tại $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$f(x_1) = 1, f(x_2) = 2, \dots, f(x_p) = p.$$

Tất cả các số này khi chia cho p thì có các số dư khác nhau. Do đó theo bổ đề 1 suy ra $x_1, x_2, \dots, x_p$ đôi một không đồng dư với nhau theo modulo n_p , suy ra $p \leq n_p$, vì nếu $p > n_p$ thì tồn tại

$$x_i, x_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$$

sao cho $x_i \equiv x_j \pmod{n_p}$, mâu thuẫn.

Như vậy $p = n_p$ và (2) được chứng minh. Tiếp theo ta sẽ chứng minh $f(n) = n$ bằng phương pháp qui nạp. (3)

- ☑ Theo trên đã có $f(1) = 1$, vậy (1) đúng khi $n = 1$.

- ☑ Giả sử (1) đúng tới k (với $k \in \mathbb{N}^*$). Ta cần chứng minh $f(k + 1) = k + 1$.

- Nếu $f(k + 1) > k + 1$ thì $f(k + 1) - k \geq 2$, gọi p là ước nguyên tố của

$$f(k + 1) - k = f(k + 1) - f(k).$$

Khi đó

$$f(k + 1) \equiv f(k) \pmod{p} \stackrel{\text{do (2)}}{\Rightarrow} k + 1 \equiv k \pmod{p} \quad (\text{vô lí}).$$

- Nếu $f(k+1) < k+1$ thì $k+2 - f(k+1) \geq 2$, gọi p là ước nguyên tố của

$$k+2 - f(k+1) = k+1 - (f(k+1) - 1).$$

Khi đó

$$k+1 \equiv f(k+1) - 1 \pmod{p} \stackrel{\text{do (2)}}{\Rightarrow} f(k+1) \equiv f(f(k+1) - 1) \pmod{p}. \quad (*)$$

Nếu $f(k+1) = 1 = f(1)$ thì với số nguyên tố p bất kì, ta luôn có

$$p | f(k+1) - f(1) \Rightarrow p | k+1 - 1 \Rightarrow p | k \text{ (vô lí)}.$$

Suy ra $f(k+1) - 1 \geq 1$, từ đây, theo (*) và giả thiết quy nạp ta có

$$f(k+1) \equiv f(k+1) - 1 \pmod{p} \text{ (vô lí)}.$$

- Vậy $f(k+1) = k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra (3) đúng với mọi n nguyên dương. Vậy

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Cách 2 (tiếp nối từ (2)). Ta sẽ chứng minh rằng, với mọi số n nguyên dương, số $f(n+1) - f(n)$ không có ước nguyên tố. Thật vậy, giả sử ngược lại số $f(n+1) - f(n)$ có ước nguyên tố, gọi ước nguyên tố đó là p . Xét số nguyên dương ℓ đủ lớn sao cho $\ell p > f(n)$, do f toàn ánh nên tồn tại số nguyên dương x để

$$f(x) = \ell p - f(n) \Rightarrow f(x) + f(n) \vdots p.$$

Kết hợp với giả thiết và kết quả (1), ta suy ra $p | f(x+n)$ và $n_p | x+n$. (4)

Do $f(n) \equiv f(n+1) \pmod{p}$ nên ta cũng có $p | f(x) + f(n+1)$. Từ đó suy ra

$$p | f(x+n+1), \quad n_p | x+n+1. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), ta thu được điều mâu thuẫn do $(x+n, x+n+1) = 1$. Tóm lại, ta có

$$|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (6)$$

Từ (6), ta dễ dàng suy ra $f(2) = 2$. Giả sử

$$f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(n-1) = n-1.$$

Ta sẽ chứng minh $f(n) = n$. Nếu $f(n) \leq n-1$ thì $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sao cho

$$f(n) = j = f(j).$$

Chọn số nguyên tố p đủ lớn, khi đó $p | f(n) - f(j) \Rightarrow p | n - j$, vô lí. Do đó $f(n) \geq n$. Nếu $f(n) > n$ thì

$$f(n) - (n-1) \geq 2 \Rightarrow f(n) - f(n-1) \geq 2 \text{ (mâu thuẫn với (6))}.$$

Vậy $f(n) = n$. Thử lại ta thấy hàm $f(n) = n, n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện. Do đó

$$f(n) = n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 16. Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

(i) $\sum_{k=1}^n f(k)$ là số chính phương.

(ii) $f(n)$ chia hết n^3 .

Ta chứng minh $f(n) = n^3$ bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 1$, ta có

$$f(1) \mid 1^3 = 1 \Rightarrow f(1) = 1.$$

Giả sử $f(i) = i^3$ với mọi số nguyên $i \in [1, k-1], k \geq 2$. Ta chứng minh $f(k) = k^3$. Ta có

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \dots + f(k) &= (1^3 + \dots + (k-1)^3) + f(k) \\ &= (1 + 2 + \dots + k-1)^2 + f(k) \\ &= \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 + f(k) \\ &= (C_k^2)^2 + f(k) = m^2 \end{aligned}$$

với $m > C_k^2$ là số nguyên dương. Ta viết $m = C_k^2 + \ell$ với ℓ là số nguyên dương nào đó. Ta có

$$f(k) = m^2 - (C_k^2)^2 = \ell(k(k-1) + \ell) = \ell(k^2 - k + \ell).$$

Do $f(k) \mid k^3$, nên ta có

$$\ell(k^2 - k + \ell) \mid k^3\ell - k\ell(k^2 - k + \ell) = k^2\ell - k\ell^2.$$

Suy ra $k^2 - k + \ell \mid k^2 - k\ell$. Tuy nhiên, ta luôn có

$$(k^2 - k + \ell) - (k^2 - k\ell) = \ell - k + k\ell = (k-1)(\ell-1) + 2\ell - 1 > 0,$$

nên $k^2 - k + \ell > k^2 - k\ell$, suy ra $k^2 - k\ell = 0$, hay $\ell = k$. Suy ra $f(k) = k^3$. Vậy $f(n) = n^3$ với mọi số nguyên dương n . Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Do đã "quen biết" đẳng thức

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

nên ta dự đoán được nghiệm hàm là $f(n) = n^3$ với mọi số nguyên dương n .

Bài 17. Từ giả thiết, ta suy ra $1, f(x), f(x + f(1) - 1)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Suy ra

$$1 > |f(x) - f(x + f(1) - 1)|,$$

do đó $f(x) = f(x + f(1) - 1), \forall x \in \mathbb{Z}^+$. Ta sẽ chứng minh $f(1) = 1$. Giả sử $f(1) > 1$, khi đó từ giả thiết trên ta suy ra f là hàm tuần hoàn nên chỉ nhận hữu hạn giá trị. Như vậy bất đẳng thức tam giác

$$x < f(y) + f(y + f(x) - 1)$$

không thể đúng khi ta cho x nhận giá trị đủ lớn. Tóm lại, ta phải có $f(1) = 1$. Đến đây, bằng cách thay $y = 1$ vào giả thiết đề bài, ta suy ra $x, 1, f(f(x))$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Do đó

$$1 > |x - f(f(x))| \Rightarrow f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{Z}^+.$$

Kết quả này chứng tỏ f là một song ánh. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$f(n) = (n-1)[f(2)-1] + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (1)$$

bằng quy nạp. Rõ ràng khẳng định này đúng với $n = 1, 2$. Giả sử khẳng định (1) đúng đến $n = k \geq 2$, khi đó thay $x = 2$ và $y = f(k)$ vào giả thiết, ta suy ra $2, k, f(f(2) + f(k) - 1)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Suy ra

$$k-2 < f(f(2) + f(k) - 1) < k+2.$$

Do vậy, ta có $f(f(2) + f(k) - 1) \in \{k-1, k, k+1\}$.

☑ Nếu $f(f(2) + f(k) - 1) = k-1 = f(f(k-1))$ thì do f đơn ánh nên

$$f(2) + f(k) - 1 = f(k-1).$$

Sử dụng giả thiết quy nạp

$$f(k) = (k-1)[f(2)-1] + 1, \quad f(k-1) = (k-2)[f(2)-1] + 1,$$

ta suy ra $k[f(2)-1] + 1 = (k-2)[f(2)-1] + 1$ hay $f(2) = 1$, mâu thuẫn do f đơn ánh.

☑ Nếu $f(f(2) + f(k) - 1) = k = f(f(k))$ thì ta có $f(2) + f(k) - 1 = f(k)$, mâu thuẫn.

☑ Như vậy, ta phải có $f(f(2) + f(k) - 1) = k+1 = f(f(k+1))$. Suy ra

$$f(k+1) = f(2) + f(k) - 1 = k[f(2)-1] + 1.$$

Vậy $f(k+1) = k[f(2)-1] + 1$. Do đó Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định (1) đúng với mọi n nguyên dương. Từ (1), ta suy ra f là hàm tăng ngặt. Từ đó suy ra $f(n) \geq n$ và $n = f(f(n)) \geq f(n) \geq n$ với mọi n nguyên dương. Do vậy, dấu bằng trong các đánh giá trên phải xảy ra. Hay nói cách khác, ta có $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn.

Bài 18. Với giả thiết $af(a) + bf(b) + 2ab$ là số chính phương với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên ta dự đoán

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với hàm số $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta sẽ có $nf(n)$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và các tính chất đặc trưng như: nếu p là một số nguyên tố sao cho $p \mid f(n)$ thì $p \mid n$;

$$|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với giả thiết của bài toán ta sẽ đi chứng minh hai kết quả sau:

Bổ đề 2. $nf(n)$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $c \in \mathbb{N}^*$ sao cho $cf(c)$ không là số chính phương. Khi đó tồn tại số nguyên tố p sao cho

$$v_p(cf(c)) = 2k+1, k \in \mathbb{N}.$$

Chọn d là số nguyên dương thỏa mãn $v_p(d) > 2k+1$, khi đó

$$v_p(cf(c) + df(d) + 2cd) = 2k+1.$$

Do đó $cf(c) + df(d) + 2cd$ không là số chính phương. Do vậy bổ đề 2 được chứng minh.

Bổ đề 3. Nếu p là số nguyên tố lẻ, $p \mid f(n), n \in \mathbb{N}^*$ thì $p \mid n$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương c sao cho $p \mid f(c)$ nhưng p không là ước của c . Chọn số nguyên dương d sao cho $v_p(d) = 1$, khi đó do $df(d)$ là số chính phương nên $v_p(df(d))$ là số chẵn hay $p^2 \mid df(d)$. Do đó ta có

$$\begin{cases} p \mid cf(c) + df(d) + 2cd \\ p \mid 2cd, 2cd \not\equiv 0 \pmod{p^2} \\ cf(c) + df(d) + 2cd \not\equiv 0 \pmod{p^2} \end{cases}$$

Điều này không xảy ra vì $cf(c) + df(d) + 2cd$ là một số chính phương. Do đó bổ đề 3 được chứng minh. Quay trở lại bài toán. Đầu tiên ta tính $f(1)$, ta có

$$1.f(1) + 1.f(1) + 2.1.1 = 2f(1) + 2$$

là số chính phương nên tồn tại số nguyên dương u sao cho

$$2f(1) + 2 = u^2 \Rightarrow u:2 \Rightarrow u = 2t \Rightarrow f(1) + 1 = 2t^2. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $f(1)$ là số lẻ. Giả sử $f(1)$ có ước nguyên tố lẻ là p , theo bổ đề 3 ta được $p \mid 1$ vô lí. Do đó $f(1)$ là số lẻ và không có ước nguyên tố lẻ suy ra $f(1) = 1$. Thay $a = 2, b = 1$ vào điều kiện ban đầu ta được $2f(2) + 1f(1) + 2.2.1$ là số chính phương hay tồn tại số nguyên dương u sao cho $2f(2) + 5 = u^2$. (2)

Theo bổ đề 2 ta được $2f(2) = v^2$, trong đó v là số nguyên dương. Thay vào (2) thu được

$$v^2 + 5 = u^2 \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow f(2) = 2.$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh: với mọi số nguyên dương a thì $f(a) \leq a$. Giả sử phản chứng rằng, tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(a) > a$. Khi đó $f(a) \geq a + 1$. Từ giả thiết, tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\begin{aligned} af(a) + 1.f(1) + 2a &= k^2 \Rightarrow af(a) + 2a + 1 = k^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} k^2 > af(a) \\ k^2 < af(a) + 2\sqrt{af(a)} + 1 \end{cases} &\Rightarrow af(a) < k^2 < (\sqrt{af(a)} + 1)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Mà theo bổ đề 2 thì $af(a)$ và $(\sqrt{af(a)} + 1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp nên (3) là điều vô lí. Như vậy

$$f(a) \leq a, \forall a \in \mathbb{N}^*.$$

Ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (4)

Do $f(1) = 1, f(2) = 2$ nên (4) đúng khi $n = 1, n = 2$. Giả sử (4) đúng tới $k - 1$ (với $k \geq 2$), ta cần chứng minh $f(k) = k$. Do $k \geq 2$ nên

$$m_1^2 = kf(k) + 1.f(1) + 2k = kf(k) + 2k + 1 \geq 7 \Rightarrow m_1 \geq 3.$$

Giả sử $f(k) \leq k - 1$. Theo giả thiết, tồn tại số nguyên dương m_i sao cho

$$kf(k) + if(i) + 2ki = m_i^2, \forall i = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Do giả thiết quy nạp nên

$$kf(k) + i^2 + 2ki = m_i^2, \forall i = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Dễ thấy rằng $m_{i+1}^2 - m_i^2 = (i + 1)^2 - i^2 + 2k((i + 1) - i) = 2i + 1 + 2k > 0$ nên

$$3 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}. \quad (5)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} m_{k-1}^2 &= kf(k) + (k-1)^2 + 2k(k-1) \\ &\leq k(k-1) + 3k^2 - 4k + 1 = 4k^2 - 5k + 1 \\ &< 4k^2 - 4k + 1 = (2k-1)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $m_{k-1} < 2k-1$. Kết hợp với (5) ta được

$$3 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} < 2k-1. \quad (6)$$

Nếu $m_{i+1} - m_i \geq 2, \forall i = 1, 2, \dots, k-2$ thì

$$\begin{aligned} m_2 &\geq m_1 + 2 \\ m_3 &\geq m_2 + 2 \\ &\dots\dots\dots \\ m_{k-1} &\geq m_{k-2} + 2 \end{aligned}$$

suy ra $m_{k-1} \geq m_1 + 2(k-2) \geq 2k-1$, mâu thuẫn với (6). Vậy tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ sao cho

$$\begin{aligned} m_{i+1} &= m_i + 1 \Leftrightarrow m_{i+1}^2 = m_i^2 + 2m_i + 1 \\ &\Leftrightarrow (i+1)^2 + 2k(i+1) = i^2 + 2ki + 2\sqrt{kf(k) + i^2 + 2ki} + 1 \\ &\Leftrightarrow 2i + 2k = 2\sqrt{kf(k) + i^2 + 2ki} \\ &\Leftrightarrow i^2 + 2ki + k^2 = kf(k) + i^2 + 2ki \\ &\Leftrightarrow f(k) = k \text{ (mâu thuẫn với } f(k) \leq k-1). \end{aligned}$$

Do đó $f(k) > k-1$, kết hợp với $f(k) \leq k$ ta được $f(k) = k$. Như vậy theo nguyên lí quy nạp suy ra (4) đúng. Sau khi thử lại ta kết luận

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 19. Cách 1. Để cho gọn, nếu một số được viết dưới dạng lập phương của một số nguyên dương thì ta gọi số đó là số lập phương. Đặt

$$S(a, b) = a^2 f(a) + b^2 f(b) + 3ab(a+b).$$

Để giải bài toán này ta sẽ phát biểu một số bổ đề.

Bổ đề 4. m là số lập phương khi và chỉ khi $v_p(m) \equiv 3$ với mọi số nguyên tố p .

Chứng minh. Hiển nhiên.

Bổ đề 5. Với mỗi $a \in \mathbb{N}^*$ thì $a^2 f(a)$ là số lập phương.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a^2 f(a)$ không phải là số lập phương. Khi đó theo bổ đề 4, tồn tại số nguyên tố p sao cho $v_p(a^2 f(a)) \not\equiv 3$. Đặt $\alpha = v_p(a^2 f(a))$. Khi đó

$$v_p(S(a, p^{\alpha+1})) = \alpha.$$

Vì $\alpha \not\equiv 3$ nên theo bổ đề 4, từ $\alpha = v_p(S(a, p^{\alpha+1}))$ suy ra $S(a, p^{\alpha+1}) \not\equiv 3$, mâu thuẫn với giả thiết $S(a, p^{\alpha+1})$ là số lập phương. Vậy bổ đề 5 được chứng minh.

Bổ đề 6. Với $a \in \mathbb{N}^*$, nếu p là số nguyên tố mà $p|f(a)$ thì $p|a$.

Chứng minh. Vì $p^2 f(p), a^2 f(a)$ là những số lập phương (theo bổ đề 5) nên $p^2 f(p) : p^3$ (1)
và từ $f(a) : p$ suy ra $a f(a) : p^3$. (2)

Theo giả thiết, $S(a, p)$ là số lập phương, mà $S(a, p) : p$ nên $S(a, p) : p^3$. Kết hợp điều này với (1), (2) ta được $3ap(a + p) : p^3$. Do đó phải có $a : p$, vì nếu ngược lại, $a \not\vdots p$ thì $3ap(a + p)$ chỉ có thể chia hết cho p hoặc chia hết cho p^2 (khi $p = 3$). Vậy bổ đề 6 được chứng minh. Giả sử $f(1)$ có ước nguyên tố là p , theo bổ đề 6 ta được $p \mid 1$, vô lí, do đó $f(1)$ không có ước nguyên tố, suy ra $f(1) = 1$.

Bổ đề 7. Nếu tồn tại vô hạn số nguyên dương a mà $f(a) = a$ thì với mọi số nguyên dương b , ta có $f(b) = b$.

Chứng minh. Giả sử a là số nguyên dương mà $f(a) = a$. Xét số nguyên dương b tùy ý. Ta có

$$\begin{aligned} S(a, b) &= a^2 f(a) + b^2 f(b) + 3ab(a + b) \\ &= a^3 + b^2 f(b) + 3ab(a + b) \\ &= x_a^3, \end{aligned}$$

với x_a là một số nguyên dương. Suy ra

$$x_a^3 - (a + b)^3 = b^2 f(b) - b^3 = b^2 (f(b) - b).$$

Do đó $x_a^2 + x_a(a + b)^2 + (a + b)^2$ là ước nguyên dương của $b^2 (f(b) - b)$. Từ đây, vì có vô hạn số nguyên dương a sao cho $f(a) = a$, suy ra $b^2 (f(b) - b)$ phải có vô hạn ước nguyên dương. Vì thế phải có

$$b^2 (f(b) - b) = 0 \Rightarrow f(b) = b.$$

Vì b là số nguyên dương tùy ý nên bổ đề 7 được chứng minh.

Bổ đề 8. Với mọi số nguyên dương a ta có $f(a) \leq a$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(a) > a$. Theo bổ đề 5, tồn tại số nguyên dương x_a sao cho $a^2 f(a) = x_a^3$. Vì $f(a) > a$ nên

$$x_a^3 = a^2 f(a) > a^3 \Rightarrow x_a > a.$$

Vì thế

$$\begin{aligned} S(a, 1) &= a^2 f(a) + 1 + 3a(a + 1) \\ &= x_a^3 + 1 + 3a(a + 1) \\ &< x_a^3 + 1 + 3x_a(x_a + 1) \\ &= (x_a + 1)^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Hơn nữa từ (3) ta thấy $x_a^3 < S(a, 1)$. Như vậy

$$x_a^3 < S(a, 1) < (x_a + 1)^3,$$

mâu thuẫn với $S(a, 1)$ là một số lập phương. Vậy bổ đề 8 được chứng minh.

Bổ đề 9. Với mọi số nguyên dương n ta có $f(n) = n$.

Chứng minh. Xét số nguyên tố p tùy ý. Ta có

$$p^2 f(p) : p^3 \Rightarrow f(p) : p \Rightarrow f(p) = kp^\alpha. \tag{4}$$

Ta sẽ chứng minh $f(p)$ là một lũy thừa đúng của p .

☑ Từ (4), nếu $k = 1$ thì $f(p) = q^\alpha$.

☑ Từ (4), nếu $k > 1$ thì gọi q là một ước nguyên tố của k , khi đó $q \mid f(p)$, theo bổ đề 6 ta có $q \mid p$, suy ra $q = p$, do đó $f(p)$ là một lũy thừa đúng của p .

Tóm lại, $f(p) = p^\beta$. Theo bổ đề 8, ta có $f(p) = p^\beta \leq p$, suy ra $f(p) \in \{1, p\}$. Theo bổ đề 5 ta được $f(p) = p$, với mọi số nguyên tố p . Mà tập hợp các số nguyên tố là tập vô hạn nên theo bổ đề 7, ta có $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương. Vậy bổ đề 9 được chứng minh.

Thử lại ta thấy hàm số $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Như vậy có duy nhất hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Cách 2. Xét số nguyên tố p tùy ý. Ta có $S(p, p) = 2p^2 f(p) + 6p^3$ là một số lập phương, nghĩa là tồn tại số nguyên dương y_p sao cho

$$2p^2 f(p) + 6p^3 = y_p^3. \quad (2.1)$$

Từ (2.1) suy ra

$$y_p^3 \mid p \Rightarrow y_p \mid p \Rightarrow y_p^3 \mid p^3 \stackrel{(2.1)}{\Rightarrow} 2p^2 f(p) \mid p^3 \Rightarrow 2f(p) \mid p.$$

Mà p là số nguyên tố lẻ nên $f(p) \mid p$. Ta có

$$S(p, 1) = p^2 f(p) + f(1) + 3p(p+1) = m_p^3,$$

$$S(p, 2) = p^2 f(p) + 4f(2) + 6p(p+2) = n_p^3,$$

với m_p^3, n_p^3 là những số nguyên dương. Từ hai đẳng thức trên suy ra

$$m_p^3 > p^2 f(p); n_p^3 > p^2 f(p); n_p^3 - m_p^3 = 3p^2 + 9p + C, \quad (2.2)$$

với $C = 4f(2) - f(1)$. Từ đây thấy rằng với p là số nguyên tố lẻ đủ lớn thì $n_p > m_p$. Giả sử tồn tại vô hạn số nguyên tố lẻ p mà $f(p) \neq p$. Khi đó do

$$f(p) \mid p \Rightarrow f(p) \geq p,$$

suy ra có vô hạn số nguyên tố lẻ p sao cho $f(p) \geq 2p$. Với mỗi p như vậy, ta có

$$\begin{aligned} n_p^3 - m_p^3 &= (n_p - m_p) (n_p^2 + n_p m_p + m_p^2) \geq n_p^2 + n_p m_p + m_p^2 \geq 3\sqrt[3]{n_p^3 m_p^3} \\ &> 3\sqrt[3]{p^4 f(p)^2} \geq 3\sqrt[3]{p^4 \cdot 4p^2} = 3\sqrt[3]{4} p^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Từ (2.3) và (2.2) suy ra $3p^2 + 9p + C > 3\sqrt[3]{4} p^2 \Rightarrow 3 + \frac{9}{p} + \frac{C}{p^2} > 3\sqrt[3]{4}$, từ đây cho $p \rightarrow +\infty$

ta được $3 \geq 3\sqrt[3]{4}$, điều vô lí này chứng tỏ điều giả sử ở trên là sai, tức là, chỉ có hữu hạn số nguyên tố lẻ p mà $f(p) \neq p$, nghĩa là tồn tại số nguyên tố p_0 sao cho $f(p) = p$ với mọi số nguyên tố $p \geq p_0$. Xét số nguyên dương a tùy ý. Với p là số nguyên tố thỏa mãn $p \geq p_0$, xét các hiệu

$$\begin{aligned} H_1 &= (a + p + 1)^3 - (a^2 f(a) + p^3 + 3ap(a + p)) \\ &= (a + 1)^3 + p^3 + 3p(a + 1)(a + p + 1) - (a^2 f(a) + p^3 + 3ap(a + p)) \\ &= (a + 1)^3 - a^2 f(a) + 3p(p + 2a + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \left(a^2 f(a) + p^3 + 3ap(a+p) \right) - (a+p-1)^3 \\ &= \left(a^2 f(a) + p^3 + 3ap(a+p) \right) - \left((a-1)^3 + p^3 + 3(a-1)p(a+p-1) \right) \\ &= a^2 f(a) - (a+1)^3 + 3p(p+2a-1). \end{aligned}$$

Do đó khi $p \rightarrow +\infty$ thì $H_1 \rightarrow +\infty$ và $H_2 \rightarrow +\infty$. Vì thế, tồn tại số nguyên tố $p_a \geq p_0$ sao cho

$$(a + p_a - 1)^3 < a^2 f(a) + p_a^3 + 3ap_a(a + p_a) < (a + p_a + 1)^3. \quad (2.4)$$

Do $p_a \geq p_0$ nên

$$a^2 f(a) + p_a^3 + 3ap_a(a + p_a) = a^2 f(a) + p_a^2 f(p_a) + 3ap_a(a + p_a).$$

Do đó, theo giả thiết, $a^2 f(a) + p_a^3 + 3ap_a(a + p_a)$ là một số lập phương. Bởi thế, từ (2.4) suy ra

$$\begin{aligned} a^2 f(a) + p_a^3 + 3ap_a(a + p_a) &= (a + p_a)^3 \\ \Leftrightarrow a^2 f(a) + p_a^3 + 3ap_a(a + p_a) &= a^3 + p_a^3 + 3ap_a(a + p_a) \\ \Leftrightarrow f(a) &= a. \end{aligned}$$

Từ đây, vì a là số nguyên dương tùy ý nên ta có $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại ta thấy hàm số

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Như vậy có duy nhất hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lưu ý.

- ① Bài toán 19 là một phát triển của bài toán 18.
- ② Điểm mấu chốt trong lời giải là khẳng định $f(a) = a$ với vô hạn số nguyên dương a . Cả hai lời giải đã trình bày ở trên đều phải thông qua bước này. Trong thực tế, một trong những cách mà người ta có thể sử dụng để giải các phương trình hàm nói chung, và các phương trình hàm số học nói riêng, là cố gắng dự đoán nghiệm hàm cần tìm, sau đó tìm cách chứng minh từng bước một; đầu tiên, có thể chứng minh hàm cần tìm trùng với hàm dự đoán, trên một miền nhỏ hơn miền xác định của hàm cần tìm, rồi tìm cách thác triển một cách thích hợp miền đó để nhận được kết quả trên toàn miền xác định.

Bài 20. Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa

$$f(n)^p \equiv n \pmod{f(p)}$$

với mọi số nguyên dương n và mọi số nguyên tố p . Cho $n = p$ là số nguyên tố, ta có

$$p \equiv 0 \pmod{f(p)}$$

suy ra $f(p) = p$ hoặc $f(p) = 1$. Đặt $A = \{p \in \mathcal{P} : f(p) = p\}$.

☑ Trường hợp A là tập vô hạn. Khi đó ta có

$$n \equiv f(n)^p \equiv f(n) \pmod{p}, \forall p \in A.$$

Suy ra $f(n) = n$ với mọi số nguyên dương n .

- ☑ Trường hợp $A = \emptyset$. Khi đó $f(p) = 1, \forall p \in \mathcal{P}$. Ta thấy các hàm này thỏa bài toán.
- ☑ Trường hợp $A \neq \emptyset$ và A hữu hạn. Gọi q là phần tử lớn nhất của tập A . Nếu $q \geq 3$, thì với mọi số nguyên tố $p > q$, ta có $p \equiv (f(p))^q = 1 \pmod{q}$. Giữa hai số q và $2q$ luôn tồn tại một số nguyên tố p và $p \equiv 1 \pmod{q}$, đây là điều vô lí. Do đó $q = 2$, hay $A = \{2\}$. Tức là $f(2) = 2$ và $f(p) = 1$ với mọi số nguyên tố $p \geq 3$. Khi đó, ta có

$$n \equiv f(n)^2 \pmod{2}$$

suy ra $f(n)$ và n cùng tính chẵn lẻ.

Vậy

- ☑ $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;
- ☑ $f(p) = p, \forall p \in \mathcal{P}$;
- ☑ $f(2) = 2, f(p) = 1, \forall p \in \mathcal{P}, p \geq 3$ và $f(n)$ với n cùng tính chẵn lẻ với n là hợp số.

Thử lại ta thấy các nghiệm này đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 21. Giả sử $P(x)$ là một đa thức thỏa mãn bài toán.

Đầu tiên, ta xét trường hợp $\deg P(x) = 0$. Khi đó $P(x) = a_0$, với $a_0 \in \mathbb{Z}$. Theo giả thiết ta có

$$\left(2^{(2-1)^{2018}} - 1\right) : P(2) \Leftrightarrow 1 : a_0 \Leftrightarrow a_0 = \pm 1.$$

Vậy $P(x) = \pm 1$. Tiếp theo giả sử $\deg P(x) \geq 1$. Đặt

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

với $m \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = \overline{0; m}$.

- ☑ Trường hợp 1: $a_m > 0$. Khi đó có số nguyên dương N sao cho $P(x) > 0, \forall x > N$. Với $n \in \mathbb{N}^*, n > N$, xét số nguyên tố p là ước của $P(n)$. Từ giả thiết suy ra:

$$\left(n^{(n-1)^{2018}} - 1\right) : p. \quad (1)$$

Lại có:

$$\begin{aligned} P(n+p) &= a_m(n+p)^m + a_{m-1}(n+p)^{m-1} + \dots + a_1(n+p) + a_0 \\ &= P(n) + pQ(n). \end{aligned}$$

Suy ra $P(n+p) : p$ (với $Q(n) \in \mathbb{Z}$). Vì

$$\left((n+p)^{(n+p-1)^{2018}} - 1\right) : P(n+p)$$

nên $(n+p)^{(n+p-1)^{2018}} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow n^{(n+p-1)^{2018}} \equiv 1 \pmod{p}$, do đó $(n, p) = 1$. Theo định lý Euler ta có $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Khi đó từ

$$(n+p-1)^{2018} = n^{2018} + (p-1)A \text{ (với } A \in \mathbb{N}^*)$$

suy ra

$$n^{(n+p-1)^{2018}} \equiv n^{n^{2018} + (p-1)A} \equiv n^{n^{2018}} \left(n^{p-1}\right)^A \equiv n^{n^{2018}} \pmod{p}.$$

Mà $n^{(n+p-1)2018} \equiv 1 \pmod{p}$ nên $n^{n^{2018}} \equiv 1 \pmod{p}$. Hay

$$(n^{n^{2018}} - 1) : p. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và sử dụng tính chất $(a^m - 1; a^n - 1) = a^{(m;n)} - 1$, suy ra

$$(n^{n^{2018}} - 1; n^{(n-1)2018} - 1) : p \Rightarrow (n^{(n^{2018}; (n-1)2018)} - 1) : p \Rightarrow (n - 1) : p \quad (3)$$

(do $(n^{2018}; (n-1)^{2018}) = 1$). Xét số nguyên tố q với $q > N$. Theo (3), nếu gọi p là ước nguyên tố của $P(q+1)$ thì ta có

$$(q+1-1) : p \Rightarrow q : p.$$

Vì p, q là các số nguyên tố nên $q = p$. Từ đó suy ra $P(p+1) = p^{k_p}$ với mọi số nguyên tố $p > N$, k_p là số nguyên dương phụ thuộc p . Gọi $v_p(n)$ là số mũ đúng của ước nguyên tố p trong n , nghĩa là $n : p^k$ nhưng $n \not: p^{k+1}$. Áp dụng định lý sau: Với x, y là các số nguyên (không nhất thiết dương), n nguyên dương, p là số nguyên tố lẻ sao cho $p \mid (x-y)$ và x, y không chia hết cho p thì:

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

Ta được

$$v_p((p+1)^{p^{2018}} - 1) = v_p((p+1) - 1) + v_p(p^{2018}) = 2019.$$

Mà $P(p+1)$ là ước của $((p+1)^{p^{2018}} - 1)$ nên

$$v_p(P(p+1)) \leq v_p((p+1)^{p^{2018}} - 1) \Rightarrow k_p \leq 2019,$$

với mọi số nguyên tố $p > N$. Do dãy (k_p) có vô hạn phần tử (vì có vô hạn số nguyên tố $p > N$) nên tồn tại một dãy con thỏa mãn $P(p+1) = p^k$ với vô số số nguyên tố p . Suy ra $P(x) = (x-1)^k$ với $k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq 2019$.

☑ Nếu $a_m < 0$, bằng cách đặt $Q(x) = -P(x)$ và làm tương tự ta có

$$Q(x) = (x-1)^k \Rightarrow P(x) = -(x-1)^k$$

với $k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq 2019$. Thử lại ta thấy các đa thức

$$P(x) = (x-1)^k, P(x) = -(x-1)^k$$

với $k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq 2019$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán tại $n = 1$.

Vậy tất cả đa thức cần tìm là: $P(x) \equiv \pm 1$.

Bài 22. Phân tích: Ta có $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

$$f(p) = 1, \text{ với mọi } p \text{ nguyên tố}; \quad (i)$$

$$f(xy) = yf(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}^+. \quad (ii)$$

Giả thiết (ii) : $f(xy) = yf(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}^+$, giống $(uv)' = u'v + v'u$.

Giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo k rằng:

$$f(p^k) = kp^{k-1}, \text{ với mọi } p \text{ nguyên tố}. \quad (1)$$

✓ Với $k = 1$ thì (1) chính là (i).

✓ Giả sử (1) đã được chứng minh cho k nào đó ($k \in \mathbb{Z}^+$). Khi đó:

$$f(p^{k+1}) = f(p \cdot p^k) = pf(p^k) + p^k f(p) = p \cdot k \cdot p^{k-1} + p^k = (k+1)p^k.$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, (1) được chứng minh với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$. Tiếp theo ta sẽ chứng minh: $\forall t \in \mathbb{Z}^+$, dãy $(\alpha_i)_{i=1}^t \subset \mathbb{N}^*$ và $p_1, p_2, \dots, p_t$ là các số nguyên tố đôi một phân biệt, ta có:

$$f\left(\prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}\right) = \left(\prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}\right) \cdot \sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i}{p_i}. \quad (2)$$

Thật vậy, khi $t = 1$ thì (2) chính là (1) và đã được chứng minh. Giả sử (2) đã được chứng minh đến $t \in \mathbb{N}^*$. Ta bổ sung p_{t+1} là số nguyên tố khác với t số nguyên tố

$$p_1, p_2, \dots, p_t; p_{t+1} \in \mathbb{N}^*.$$

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^{t+1} p_i^{\alpha_i}\right) &= f\left(\prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i} \cdot p_{t+1}^{\alpha_{t+1}}\right) \\ &= p_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \cdot f\left(\prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}\right) + \prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i} \cdot f(p_{t+1}^{\alpha_{t+1}}) \\ &= p_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \cdot \left(\prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}\right) \cdot \sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i}{p_i} + \prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i} \cdot (\alpha_{t+1}) p_{t+1}^{\alpha_{t+1}-1} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{t+1} p_i^{\alpha_i}\right) \cdot \sum_{i=1}^{t+1} \frac{\alpha_i}{p_i}. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, cho ta (2), $\forall t \in \mathbb{N}^*$.

① Trước hết, nếu chọn $x = y = 1$ trong (ii) ta được:

$$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \neq 1.$$

Xét $1 < n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $\exists t \in \mathbb{N}^*, (\alpha_i)_{i=1}^t \subset \mathbb{N}^*$ và tồn tại $p_1, p_2, \dots, p_t$ là các số nguyên tố đôi một phân biệt để $n = \prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}$. Vì thế, theo (2) thì

$$f(n) = n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i}{p_i} = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^t \alpha_i \prod_{j \neq i} p_j = \prod_{i=1}^t p_i. \quad (*)$$

Với mỗi chỉ số $\ell \in \{1; 2; \dots; t\}$, ta có:
$$\begin{cases} \prod_{j=1}^t p_j : p_\ell \\ \prod_{j \neq i} p_j : p_\ell, \text{ nếu } i \neq \ell. \end{cases}$$

Vậy, $(*) \Rightarrow \alpha_\ell \cdot \prod_{j \neq \ell} p_j : p_\ell \Rightarrow \alpha_\ell : p_\ell, \forall \ell$, suy ra $\alpha_\ell \geq p_\ell$. Do đó $\sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i}{p_i} \geq t$.

Vậy nên để $f(n) = n$ thì

$$t = 1 \wedge \alpha_1 = p_1 \Leftrightarrow n = p^p.$$

Lại thấy: $3^3 < 2018 < 5^5$ nên $n = 5^5$ là số cần tìm.

- ② Ta cần xét $1 < n \in \mathbb{N}^*$ và biểu diễn $n = \prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}$, với $t \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_i)_{i=1}^t \subset \mathbb{N}^*$, $p_1, p_2, \dots, p_t$ là các số nguyên tố đôi một phân biệt. Lý luận như câu (1), ta thấy

$$\begin{aligned} f(n) = 2n &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i}{p_i} = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \wedge \alpha_1 = 2p_1 \\ t = 2 \wedge \alpha_1 = p_1, \alpha_2 = p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = p^{2p} \\ n = p^p \cdot q^q; p < q. \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ thấy $n = 2^2 \cdot 5^5 > 2018$ có $f(n) = 2n$. Ta chứng minh n này là số bé nhất. Nếu $m = p^p \cdot q^q$, với p, q là các số nguyên tố và $p < q$ và $m < n$ thì $q < 5$ (vì nếu như $q \geq 5$ thì $p^p \cdot q^q \geq p^p \cdot 5^5 \geq 2^2 \cdot 5^5 = n$, mâu thuẫn) nên $q \leq 3, p < q$. Suy ra

$$m = p^p \cdot q^q \leq 3^3 \cdot 3^3 < 2018.$$

Vậy số cần tìm là $n = 2^2 \cdot 5^5$.

