

BÀI TẬP VẬN DỤNG VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ-HÀM SỐ BẬC HAI VÀ TAM THỨC BẬC HAI

(Dành cho học sinh muốn chinh phục điểm 8+, 9+)

Câu 1: Tìm m để các hàm số sau đây xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

a) $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}$.

b) $y = \sqrt{2x-3m+4} + \frac{x-m}{x+m-1}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m \geq 0 \\ 2x-m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} (*)$

+) Nếu $m \geq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq m$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = [m; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset [m; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 0$: không thỏa mãn $m \geq 1$.

+) Nếu $m \leq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \leq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq \frac{m+1}{2}$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = [\frac{m+1}{2}; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset [\frac{m+1}{2}; +\infty) \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$: thỏa mãn điều kiện $m \leq 1$.

Vậy $m \leq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2x-3m+4 \geq 0 \\ x+m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3m-4}{2} \\ x \neq 1-m \end{cases}$

Do đó để hàm số xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$, ta phải có

$$\begin{cases} \frac{3m-4}{2} \leq 0 \\ 1-m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{4}{3} \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{4}{3}$$

Vậy $1 \leq m \leq \frac{4}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Tìm m để các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{-x+2m+6}$ xác định trên $(-1; 0)$.

b) $y = \sqrt{1-|2x^2+mx+m+15|}$ xác định trên $[1; 3]$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m > 0 \\ -x+2m+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ x \leq 2m+6 \end{cases} \Leftrightarrow m < x \leq 2m+6$

Do để hàm số xác định trên $(-1;0)$, ta phải có $\begin{cases} m \leq -1 \\ 2m+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.

Vậy $-3 \leq m \leq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số xác định khi $1 - |2x^2 + mx + m + 15| \geq 0 \Leftrightarrow |2x^2 + mx + m + 15| \leq 1$. (*)

Bài toán được chuyển về việc tìm m để (*) nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[1;3]$.

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[1;3]$ nên nghiệm đúng với $x=1, x=2$ tức là ta có:

$$\begin{cases} |2m+17| \leq 1 \\ |3m+23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m+17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8$$

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có :

$$(*) \Leftrightarrow |2x^2 - 8x + 7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2 - 8x + 7 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 : \text{thoả mãn.}$$

Vậy $m = -8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Tìm m để các hàm số:

a) $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+m-2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y = \frac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ xác định trên toàn bộ trục số.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $x^2 - 6x + m - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + m - 11 > 0$

Để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-3)^2 + m - 11 > 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m - 11 > 0 \Leftrightarrow m > 11$$

Vậy $m > 11$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} m+1 \geq 0 \\ 3x^2 - 2x + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + m - \frac{1}{3} \neq 0 \end{cases}$

Để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + m - \frac{1}{3} \neq 0 \end{cases}$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m - \frac{1}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$$

Vậy $m > \frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Tìm m để hàm số $y = (x-2)\sqrt{3x-m-1}$ xác định trên tập $(1; +\infty)$?
 A. $m < 2$. B. $m \leq 2$. C. $m > 2$. D. $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐK: } x \geq \frac{m+1}{3} \Rightarrow D = \left[\frac{m+1}{3}; +\infty \right).$$

Để hàm số xác định trên $(1; +\infty)$ thì $(1; +\infty) \subset \left[\frac{m+1}{3}; +\infty \right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow m+1 \leq 3 \Rightarrow m \leq 2$.

Câu 5: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$ là

- A. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$. B. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.
 C. $m \in [-3; 0]$. D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định của hàm số là: } \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}.$$

TH1. $2m-3 \geq m+5 \Leftrightarrow m \geq 8 \Rightarrow$ tập xác định của hàm số là: $D = \emptyset \Rightarrow m \geq 8$ loại.

TH2. $2m-3 < m+5 \Leftrightarrow m < 8 \Rightarrow$ TXĐ của hàm số là: $D = [2m-3; m+5) \setminus \{m\}$.

Để hàm số xác định trên khoảng $(0;1)$ thì $(0;1) \subset D$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq 0 \\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m}$. Tập các giá trị của m để hàm số xác định trên $[0;1)$ là $T = (-\infty; a) \cup [b; c) \cup [d; +\infty)$. Tính $P = a + b + c + d$.

Ⓐ. $P = -2$. Ⓑ. $P = -1$. Ⓒ. $P = 2$. Ⓓ. $P = 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq m+2 \end{cases}$.

Do đó tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{m+2; m\}$.

Vậy để hàm số xác định trên $[0;1)$ điều kiện là:

$$m; m+2 \notin [0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 < 0 \\ m \geq 1 \\ m < 0 < 1 \leq m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 1 \\ -1 \leq m < 0 \end{cases}.$$

Câu 7: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$.

Ⓐ. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. Ⓑ. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. Ⓒ. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. Ⓓ. $-1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $x - m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$.

Do đó hàm số xác định trên $(-1;2) \Leftrightarrow m \notin (-1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x-m+1} + \sqrt{2x-m}$ xác định với $\forall x > 0$.

Ⓐ. $m \geq 1$. Ⓑ. $m \leq 0$. Ⓒ. $m > 0$. Ⓓ. $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x-m+1 \geq 0 \\ 2x-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m-1 \\ x \geq \frac{m}{2} \end{cases}$.

Hàm số xác định với $\forall x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ \frac{m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0$.

Câu 9: Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-2m+1}$ xác định với mọi $x \in [1;3]$ là:

Ⓐ. $\{2\}$. Ⓑ. $\{1\}$. Ⓒ. $(-\infty; 2]$. Ⓓ. $(-\infty; 1]$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $x - 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2m - 1$.

Hàm số xác định với mọi $x \in [1; 3]$ thì $2m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}}$ có dạng $[a; b]$.

Tính $a + b$.

- (A). 3. (B). -1. (C). 0. (D). -3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = \sqrt{(\sqrt{x - 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4 - x^2} - 1)^2} = |\sqrt{x - 1} + 1| + |\sqrt{4 - x^2} - 1|.$$

$$\text{Do đó hàm số đã cho xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Do đó $a + b = 3$. Chọn A

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x - m + 2} + \frac{1}{\sqrt{5 - x}}$ có tập xác định $D = [0; 5)$.

- (A). $m \geq 0$. (B). $m \geq 2$. (C). $m \leq -2$. (D). $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định của hàm số đã cho là } \begin{cases} x - m + 2 \geq 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m - 2 \\ x < 5 \end{cases}$$

Hàm số có tập xác định $D = [0; 5) \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\sqrt{m + 1}}{3x^2 - 2x + m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- (A). $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$. (B). $m \geq -1$. (C). $m > \frac{1}{3}$. (D). $m \geq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \frac{\sqrt{m + 1}}{3x^2 - 2x + m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \geq 0 \\ 3x^2 - 2x + m \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}.$$

Câu 13: Tìm điều kiện của m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

- (A). $m \geq \frac{1}{4}$. (B). $m > \frac{1}{4}$. (C). $m > -\frac{1}{4}$. (D). $m \leq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 (\text{Đ do } a = 1) \\ \Delta \leq 0, \Delta = 1 - 4m \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$$

Vậy $m \geq \frac{1}{4}$ thỏa yêu cầu bài.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+9}{x-2m-1}$ xác định trên đoạn $[3; 5]$.

A. $m \leq 1$ hoặc $m \geq 2$.

B. $m > 3$ hoặc $m < 0$.

C. $m > 4$ hoặc $m < 1$.

D. $m > 2$ hoặc $m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số là $x - 2m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2m + 1$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow 2m + 1 \notin [3; 5] \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 < 3 \\ 2m + 1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}.$$

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thuộc tập xác định của hàm số $y = \frac{2+x}{x\sqrt{3-x}} + \sqrt{2x+1}$?

A. 3

B. 1

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\text{Tập xác định: } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3-x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 3 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Do x nguyên nên $x \in \{1; 2\}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{|x-2|-1}}$ có tập xác định là D_1 và hàm số

$g(x) = \frac{2x - \sqrt{m-2x}}{|x|+5}$ có tập xác định là D_2 . Tìm điều kiện của tham số m để $D_2 \subset D_1$.

A. $m < 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{|x-2|-1}}$$

$$\text{ĐKXD: } |x-2|-1 > 0 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \\ x-2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow D_1 = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$

Xét $g(x) = \frac{2x - \sqrt{m-2x}}{|x|+5}$

Ta thấy $|x|+5 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

ĐKXD: $m-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{m}{2} \Rightarrow D_2 = \left(-\infty; \frac{m}{2}\right]$

Để $D_2 \subset D_1$ thì $\frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow m < 2$.

Vậy với $m < 2$ thì $D_2 \subset D_1$.

Câu 17: Tìm m để hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

B. $m \in [-3; 0]$.

C. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$.

D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

*Gọi D là tập xác định của hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$.

* $x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}$.

*Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$

$\Leftrightarrow (0;1) \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định với mọi $x \in [0;2]$ khi $m \in [a;b]$. Giá trị của tổng $a+b$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định khi: $\begin{cases} x \geq 1-2m \\ x \leq 8-4m \end{cases}$

Hàm số xác định trên $[0; 2]$ nên $1-2m \leq 0 \leq 2 \leq 8-4m \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow a+b=2$

- Câu 19:** Tìm m để hàm số $y = \sqrt{-2x+3m+2} + \frac{x+1}{2x+4m-8}$ xác định trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- A. $m \in [-2; 4]$. B. $m \in [-2; 3]$. C. $m \in (-2; 3]$. D. $m \in [-2; 3]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là tập hợp các giá trị của x thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} -2x+3m+2 \geq 0 \\ 2x+4m-8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3m+2}{2} \\ x \neq 4-2m \end{cases}.$$

Để hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; -2)$ cần có: $\begin{cases} \frac{3m+2}{2} \geq -2 \\ 4-2m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq 3 \end{cases} \Rightarrow m \in [-2; 3].$

- Câu 20:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{x-2m} + \sqrt{7m+1-2x}$ chứa đoạn $[-1; 1]$?
- A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x-2m \neq 0 \\ 7m+1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2m \\ x \leq \frac{7m+1}{2} \end{cases}.$$

Để tập xác định của hàm số chứa đoạn $[-1; 1]$ thì ta phải có

$$\begin{cases} \frac{7m+1}{2} \geq 1 \\ 2m > 1 \\ 2m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1/7 \\ m > 1/2 \\ m < -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

Vậy không có giá trị nguyên âm nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 21:** Cho hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{m-2x}$ với $m \geq -2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để tập xác định của hàm số có độ dài bằng 1?
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ m-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{m}{2}$$

(do $m \geq -2$ nên $\frac{m}{2} \geq -1$).

Vậy $D = \left[-1; \frac{m}{2}\right]$. Độ dài của D bằng 1 khi và chỉ khi $\frac{m}{2} - (-1) = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên $(1; 2)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } y = -x^2 + (m-1)x + 2 = -\left(x - \frac{m-1}{2}\right)^2 + 2 + \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$$

Ta phân chia tập xác định $\mathbb{R}$ thành hai khoảng $\left(-\infty; \frac{m-1}{2}\right)$ và $\left(\frac{m-1}{2}; +\infty\right)$.

Trên khoảng $\left(-\infty; \frac{m-1}{2}\right)$ thì hàm số đồng biến, trên khoảng $\left(\frac{m-1}{2}; +\infty\right)$ nghịch biến.

Do đó điều kiện để hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$ là $(1; 2) \subset \left(\frac{m-1}{2}; +\infty\right)$ hay

$$\frac{m-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Cách 2.

Với mọi $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{[-x_1^2 + (m-1)x_1 + 2] - [-x_2^2 + (m-1)x_2 + 2]}{x_1 - x_2} = -(x_1 + x_2) + m - 1$$

Để hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$ khi và chỉ khi $-(x_1 + x_2) + m - 1 < 0, \forall x_1, x_2 \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq 3$.

Câu 23: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

$$\forall x \in D \text{ ta có } x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4-x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} \leq 2.$$

Mặt khác: $\sqrt{4-x^2} \geq 0$. Nên $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2, \forall x \in D$.

Vậy tập giá trị của hàm số $T = [0; 2]$.

Câu 24: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Lời giải

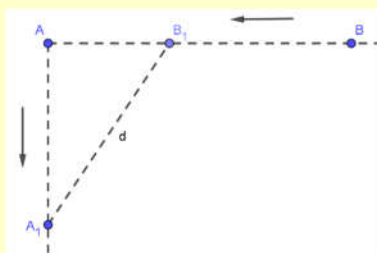
Điều kiện xác định: $x^2-4x+5 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 > 0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } x^2-4x+5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 1} \geq 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 + 1}} \leq 1.$$

Mặt khác: $\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}} > 0$. Nên $0 < \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}} \leq 1, \forall x \in D$.

Vậy tập giá trị của hàm số $T = (0;1]$.

Câu 25: Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai con tàu cùng khởi hành, một tàu chạy về hướng nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất?



- ☐ A. sau $\frac{7}{17}$ giờ xuất phát ☐ B. sau $\frac{5}{17}$ giờ xuất phát
☐ C. sau $\frac{9}{17}$ giờ xuất phát ☐ D. sau $\frac{8}{17}$ giờ xuất phát

Lời giải

Gọi d là khoảng cách của hai tàu sau khi xuất phát t (giờ), $t > 0$.

Ta có: $d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5 - 7t)^2 + (6t)^2 = 85t^2 - 70t + 25$.

Suy ra $d = d(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25} = \sqrt{85\left(t - \frac{7}{17}\right)^2 + \frac{180}{17}} \geq \frac{6\sqrt{85}}{17}$.

Khi đó $d_{\min} = \frac{6\sqrt{85}}{17}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = \frac{7}{17}$.

Vậy sau $\frac{7}{17}$ giờ xuất phát thì khoảng cách hai tàu nhỏ nhất là nhỏ nhất.

Câu 26: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 USD. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x USD thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

- ☐ A. 80 USD ☐ B. 70 USD ☐ C. 30 USD ☐ D. 90 USD

Lời giải

Gọi y (USD) là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x - 80)^2 + 1600 \leq 1600$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD ☒ D.

Câu 27: Tìm các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$.

Tung độ của một điểm thuộc đồ thị hàm số là số nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$. (1)

Vì hoành độ của điểm đó là số nguyên nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \\ x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \\ x=2 \\ x=0 \end{cases}$.

Vậy các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có tọa độ nguyên là

$$A(4; 2), B(-2; 0), C(2; 4), D(0; -2).$$

Câu 28: Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$?
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

 **Lời giải**

Chọn B

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Đặt $\sqrt{x+\sqrt{x}} = n, n \in \mathbb{N}$. Suy ra:

$$x + \sqrt{x} = n^2 \Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{x} + 1 - 4n^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x} + 1)^2 - (2n)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x} + 1 - 2n)(2\sqrt{x} + 1 + 2n) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} + 1 - 2n = 1 \\ 2\sqrt{x} + 1 + 2n = 1 \end{cases}$$

(do $2\sqrt{x} + 1 + 2n > 0$)

$$\Rightarrow 4\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Với $x=0$ thì $y=0$. Vậy có duy nhất một điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số, đó là điểm có tọa độ $(0;0)$.

Câu 29: Xác định hàm số $f(x)$ biết
 $f(x+3) = 2x-1$. b) $f(x-1) = x^2 - 3x + 3$.

 **Lời giải**

a) Đặt $t = x+3 \Rightarrow x = t-3$. Ta có: $f(x+3) = 2x-1 \Rightarrow f(t) = 2(t-3)-1 = 2t-7 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) = 2x-7 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách 2: Ta có: $f(x) = 2x-7 = f((x+3)-3) = 2(x-3)-1 = 2x-7 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$. Ta có:

$$f(x-1) = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow f(t) = (t+1)^2 - 3(t+1) + 3 = t^2 - t + 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = x^2 - x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Cách 2: Ta có: $f(x) = f((x-1)+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 3 = x^2 - x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Câu 30: Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. b) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Lời giải

a) Ta biến đổi biểu thức về dạng $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$. (1)

Từ (1) suy ra $f(x) = x^2 - 2$ với mọi $|x| \geq 2$.

Thử lại thấy $f(x) = x^2 - 2$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^2 - 2$.

b) Ta biến đổi biểu thức về dạng $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$. (2)

Từ (2) suy ra $f(x) = x^3 - 3x$ với mọi $|x| \geq 2$.

Thử lại thấy $f(x) = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^3 - 3x$.

Câu 31: Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x+3, \forall x \neq 1$. b) $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}, \forall x \neq -2, x \neq 1$.

Lời giải

a) Đặt $t = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1}, \forall x \neq 1$. Thay vào $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x+3$ ta được

$$f(t) = \frac{t+1}{t-1} + 3 = \frac{4t-2}{t-1}.$$

Suy ra $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$.

Thử lại thấy $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$.

b) Đặt $t = \frac{3x+1}{x+2} \Rightarrow x = \frac{2t-1}{3-t}, \forall x \neq -2$. Thay vào $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$ ta được

$$f(t) = \frac{\frac{2t-1}{3-t} + 1}{\frac{2t-1}{3-t} - 1} = \frac{t+2}{3t-4}. \text{ Suy ra } f(x) = \frac{x+2}{3x-4}.$$

Thử lại thấy $f(x) = \frac{x+2}{3x-4}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \frac{x+2}{3x-4}$.

Câu 32: Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4.$

b) $f(x) - xf(-x) = x + 1.$

c) $x^2f(x) + f(1-x) = 2x - x^4.$

Lời giải

a) Thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) - f(x) = (-x)^4 - 12(-x)^3 + 4 = x^4 + 12x^3 + 4.$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4 \\ -f(x) + 2f(-x) = x^4 + 12x^3 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) - 2f(-x) = 2x^4 - 24x^3 + 8 \quad (1) \\ -f(x) + 2f(-x) = x^4 + 12x^3 + 4 \quad (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) về theo về ta được

$$3f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 12 \text{ hay } f(x) = x^4 - 4x^3 + 4.$$

Thử lại thấy $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4.$

b) Thay x bằng $-x$ ta được $f(-x) + xf(x) = -x + 1.$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} f(x) - xf(-x) = x + 1 \\ f(-x) + xf(x) = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - xf(-x) = x + 1 \quad (1) \\ x^2f(x) + xf(-x) = -x^2 + x \quad (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) về theo về ta được

$$(x^2 + 1)f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{ hay } f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Thử lại thấy $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}.$

c) Thay x bằng $1-x$ ta được $(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4.$

Ta có hệ:

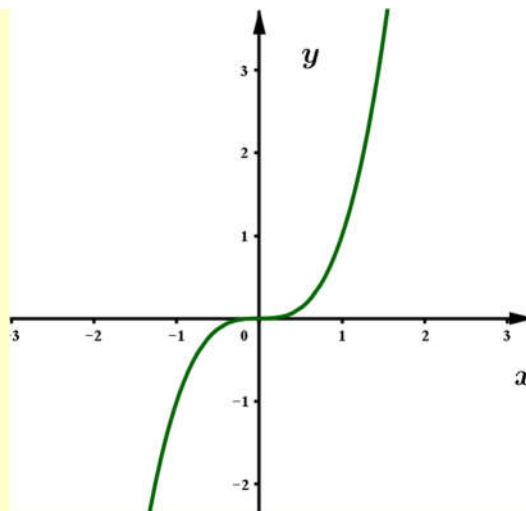
$$\begin{cases} x^2f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \quad (1) \\ (1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(1-x) = 2x - x^4 - x^2f(x).$ Thay vào (2) ta được

$$(1-x)^2 [2x - x^4 - x^2f(x)] + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \Leftrightarrow f(x) = 1 - x^2.$$

Thử lại thấy $f(x) = 1 - x^2$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = 1 - x^2.$

Câu 33: Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tính giá trị biểu thức $f(\sqrt{2018}) + f(-\sqrt{2018})$

- Ⓐ. -2018. Ⓑ. 0. Ⓒ. 2018. Ⓓ. 4036.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dáng của đồ thị ta thấy rằng hàm số đối xứng qua $O(0;0)$ nên là hàm số lẻ.

Suy ra $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$

Vì vậy $f(\sqrt{2018}) + f(-\sqrt{2018}) = 0$.

Câu 34: Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + 5$ và $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Tính tổng các hệ số của hàm số $f(g(x))$.

- Ⓐ. 18 Ⓑ. 19 Ⓒ. 20 Ⓓ. 21

Lời giải

Cách 1: $f(g(x)) = (x^3 + 2x^2 + 1)^2 + 5 = x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6$.

Vậy tổng các hệ số của $f(g(x))$ là $1 + 4 + 4 + 2 + 4 + 6 = 21$.

Cách 2: Áp dụng kết quả: “Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Khi đó tổng các hệ số của $P(x)$ là $P(1)$ ”, ta có tổng các hệ số của $f(g(x))$ là $f(g(1))$ mà $g(1) = 4$ nên

$f(g(1)) = 4^2 + 5 = 21$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}: f(x-1) = x^2 + 3x - 2$. Tìm biểu thức $f(x)$.

- Ⓐ. $f(x) = x^2 + 5x + 2$ Ⓑ. $f(x) = x^2 + 5x - 2$
 Ⓒ. $f(x) = x^2 + x - 2$ Ⓓ. $f(x) = x^2 + x + 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}: f(x-1) = x^2 + 3x - 2 = (x-1)^2 + 5(x-1) + 2$.

Do đó $f(x) = x^2 + 5x + 2$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{36\}$. Biết $f(2x-5) = x^2 + 3x - 2$ và $g(5x+1) = \frac{x}{x-7}$. Tính $g(f(1))$.

- Ⓐ. $g(f(1)) = \frac{-3}{4}$ Ⓑ. $g(f(1)) = \frac{3}{4}$ Ⓒ. $g(f(1)) = \frac{47}{4}$ Ⓓ. $g(f(1)) = \frac{-47}{4}$

 Lời giải

Chọn A

Ta có $2x-5=1 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy $f(1) = 3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = 16$.

Lại có $5x+1=16 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy $g(f(1)) = \frac{3}{3-7} = \frac{-3}{4}$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} \forall x \neq 0$. Tính $f(3)$.

- Ⓐ. $f(3) = 36$ Ⓑ. $f(3) = 18$ Ⓒ. $f(3) = 29$ Ⓓ. $f(3) = 25$

 Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Do đó $f(x) = x^3 - 3x$.

Vậy $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ thỏa mãn $f\left(\frac{3x-2}{x-1}\right) = x+2 \forall x \neq 1$. Tính $f(2) + f(4)$.

- Ⓐ. $f(2) + f(4) = 6$ Ⓑ. $f(2) + f(4) = 2$
Ⓒ. $f(2) + f(4) = -6$ Ⓓ. $f(2) + f(4) = -2$

 Lời giải

Đáp án A

Cách 1: Đặt $\frac{3x-2}{x-1} = t$

$$\Rightarrow x = \frac{t-2}{t-3} \Rightarrow x+2 = \frac{3t-8}{t-3}.$$

Do đó ta có

$$f(t) = \frac{3t-8}{t-3} \Rightarrow f(x) = \frac{3x-8}{x-3}.$$

Vậy $f(2) + f(4) = 6$.

Cách 2:

$$\frac{3x-2}{x-1} = 2 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow f(2)=2;$$

$$\frac{3x-2}{x-1} = 4 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=4.$$

$$\text{Vậy } f(2)+f(4)=6.$$

Câu 39: Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm các giá trị của m để

a) d và (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.

b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 - 4x + 3 = mx + 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - (4+m)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4+m \end{cases}$$

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi $4+m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

Với $x=0$ thì $y=3$ suy ra $A(0;3) \in Oy$. Với $x=4+m$ thì $y=m^2+4m+3$ suy ra $B(4+m; m^2+4m+3)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên OA. Suy ra $BH = |x_B| = |4+m|$.

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$S_{\Delta OAB} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot BH = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m+4| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow |m+4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-7 \end{cases}.$$

Vậy $m=-1$ hoặc $m=-7$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Giả sử $x_1=0$ và $x_2=4+m$. Theo giả thiết, ta có

$$x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow 0 + (4+m)^3 = 8 \Leftrightarrow 4+m=2 \Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy $m=-1$ hoặc $m=-7$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2. Áp dụng cho trường hợp không tìm cụ thể x_1, x_2 .

$$\text{Ta có } x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8 \quad (*)$$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (4+m)x = 0$ nên theo định lý Viet, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4+m \\ x_1x_2 = 0 \end{cases}. \text{ Thay vào } (*), \text{ ta được } (4+m)^3 - 3 \cdot 0 \cdot (4+m) = 8 \Leftrightarrow m = -2. \quad \square$$

Câu 40: Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị của mỗi hàm số sau luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh I của đồ thị luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

$$\text{a) } y = x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - 1.$$

$$\text{b) } y = x^2 - 2mx + m^2 - 1.$$

 Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là $x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - 1 = 0$. (1)

Ta có $\Delta = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{m^2}{4} - 1\right) = 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ hay (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2}$ suy ra $y = -1$. Do đó tọa độ đỉnh $I\left(\frac{m}{2}; -1\right)$.

Vì $y_I = -1$ nên đỉnh I luôn chạy trên đường thẳng cố định $y = -1$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$. (2)

Ta có $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ hay (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = m$ suy ra $y = -1$. Do đó tọa độ đỉnh $I(m; -1)$.

Vì $y_I = -1$ nên đỉnh I luôn chạy trên đường thẳng cố định $y = -1$.

 **Câu 41:** Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

 Lời giải.

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow y_0 = mx_0^2 + 2(m-2)x_0 - 3m + 1$, với mọi $m \Leftrightarrow m(x_0^2 + 2x_0 - 3) - 4x_0 - y_0 + 1 = 0$, với mọi m

$$\begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -4x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 13 \end{cases}$$

Vậy đồ thị luôn đi qua hai điểm cố định là $A_1(1; -3)$ hoặc $A_2(-3; 13)$ với mọi giá trị m .

 **Câu 42:** Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

a) $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$.

b) $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1 (m \neq 0)$.

 Lời giải.

a) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3 = ax + b$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (8m - 4 + a)x + 8m^2 - 3 - b = 0. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (8m - 4 + a)^2 - 8(8m^2 - 3 - b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16(-4+a)m + (-4+a)^2 + 8(3+b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4+a=0 \\ (-4+a)^2 + 8(3+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Vậy parabol $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = 4x - 3$.

b) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } mx^2 - (4m-1)x + 4m-1 = ax + b$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - (4m-1+a)x + 4m-1-b = 0. \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (4m-1+a)^2 - 4m(4m-1-b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 + 8m(-1+a)m + (-1+a)^2 - 16m^2 + 4m(1+b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 4(2a+b-1)m + (-1+a)^2 = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b-1=0 \\ -1+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Vậy parabol $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m-1$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$.

Câu 43: Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2 \quad (m \neq 0)$.

b) $y = (4m-2)x - 4m^2 - 2 \quad \left(m \neq \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

a) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } ax^2 + bx + c = 2mx = m^2 + 4m + 2$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b-2m)x + c + m^2 - 4m - 2 = 0. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (b-2m)^2 - 4a(c + m^2 - 4m - 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 4(1-a)m^2 - 4(b-4a)m + b^2 - 4ac + 8a = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ b-4a=0 \\ b^2-4ac+8a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=6 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 4x + 6$.

b) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } ax^2 + bx + c = (4m-2)x - 4m^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b-4m+2)x + c + 4m^2 + 2 = 0. \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (b - 4m + 2)^2 - 4a(c + 4m^2 + 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow [4m - (b + 2)]^2 - 4a(c + 4m^2 + 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16(1 - a)m^2 - 8(b + 2)m + (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ b + 2 = 0 \\ (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng $y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x - 2$.

Câu 44: Cho parabol (P) có phương trình $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x - 1) = x^2 - 5x + 5 \forall x \in \mathbb{R}$. Số giao điểm của (P) và trục hoành là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

 **Lời giải**

Chọn C

Ta có $f(x - 1) = x^2 - 5x + 5 = (x - 1)^2 - 3(x - 1) + 1$. Suy ra $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có $\Delta = 3^2 - 4.1.1 = 5 > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để hàm số $y = |x - 1| + |x + 3|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 4

B. 5

C. 2

D. 3

 **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có } y = |x - 1| + |x + 3| = \begin{cases} 2x + 2, & x \geq 1 \\ 4, & -3 \leq x < 1 \\ -2x - 2, & x < -3 \end{cases}$$

Trên $[1; +\infty)$, ta có $y \geq 4$ và dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

Trên $[-3; 1)$, ta có $y = 4$ và có bốn giá trị nguyên của x thuộc khoảng này.

Trên $(-\infty; -3)$, ta có $y = -2x - 2 > 4$.

Vậy $y_{\min} = 4$ và có 5 giá trị nguyên của x để $y_{\min} = 4$.

Bổ sung cách 2: sử dụng MTCT

$$f(x) = |x - 1| + |x + 3|$$

Table Range

Start: -9

End: 10

Step: 1

x	$f(x)$
-4	6
-3	4
-2	4
-1	4

-1

x	$f(x)$
-1	4
0	4
1	4
2	6

2

Dựa vào bảng giá trị chọn B

Câu 46: Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

A. 6

B. 5

C. 7

D. 8

 Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 + x - 2 = -(m+1)x + m + 2 \Leftrightarrow x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0 \quad (*)$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 20 > 0 \\ -m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4.$$

Vậy có 6 giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ thỏa mãn ycbt.

Câu 47: Cho parabol $(P): y = x^2 - mx$ và đường thẳng $(d): y = (m+2)x + 1$, trong đó m là tham số. Khi parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N , tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

A. một parabol

B. một đường thẳng

C. một đoạn thẳng

D. một điểm

 Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 - mx = (m+2)x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 1 = 0 \quad (*)$$

$(*)$ có a, c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Do đó (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m . Khi đó x_M, x_N là hai nghiệm phân biệt của $(*)$.

Theo Viet ta có $x_M + x_N = 2(m+1)$.

$$\text{Ta có } x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = m + 1.$$

$$\text{Suy ra } y_I = (m+2)(m+1) + 1$$

$$= (m+1)^2 + (m+1) + 1 = x_I^2 + x_I + 1.$$

Vậy I luôn thuộc parabol $y = x^2 + x + 1$ với mọi m .

Chú ý: Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Câu 48: Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ (1), m là tham số và đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + m^2$. Tính giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng (d) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$.

A. $m = \frac{3}{4}$.

B. $m = -\frac{3}{4}$.

C. $m = 1$.

D. $m = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và đường thẳng (d) là nghiệm của phương trình $x^2 - 3mx + m^2 + 1 = mx + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 1 = 0$ (*).

Đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 1$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$ (**).

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$, suy ra (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 1 > 0 \\ 4m \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Lại có, $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 1 \Leftrightarrow 4m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m = \frac{3}{4}$.

Câu 49: Cho parabol (P): $y = x^2 + 2x - 5$ và đường thẳng $d: y = 2mx + 2 - 3m$. Tìm tất cả các giá trị m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung.

A. $1 < m < \frac{7}{3}$.

B. $m > 1$.

C. $m > \frac{7}{3}$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 + 2x - 5 = 2mx + 2 - 3m \Leftrightarrow x^2 + 2(1-m)x - 7 + 3m = 0 \quad (*)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 + 7 - 3m > 0 \\ -2(1-m) > 0 \\ -7 + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 8 > 0 \\ 1-m < 0 \\ 3m-7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}.$$

Vậy $m > \frac{7}{3}$.

Câu 50: Gọi T là tổng tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính T .

- Ⓐ. $T = -9$. Ⓑ. $T = \frac{3}{2}$. Ⓒ. $T = -15$. Ⓓ. $T = 3$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là: $x^2 - 4x + m = 0$ (1).

(P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| = 3|x_2|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m > 0 \\ \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \end{cases}.$$

Mặt khác, theo định lý Viet cho phương trình (1) thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$.

Với $x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 \Rightarrow m = 3$ thỏa mãn.

Với $x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -2 \Rightarrow m = -12$ thỏa mãn.

Có hai giá trị của m là $m = 3$ và $m = -12$.

Vậy $T = -9$.

Câu 51: Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$ có 6 nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $a + b$.

- Ⓐ. $a + b = 6$ Ⓑ. $a + b = 4$ Ⓒ. $a + b = 1$ Ⓓ. $a + b = 2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$

$$\Leftrightarrow |x|\sqrt{(|x| - 2)^2} = m$$

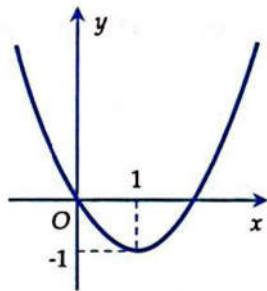
$$\Leftrightarrow |x|(|x| - 2) = m$$

Phương trình $|x|(|x| - 2) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số

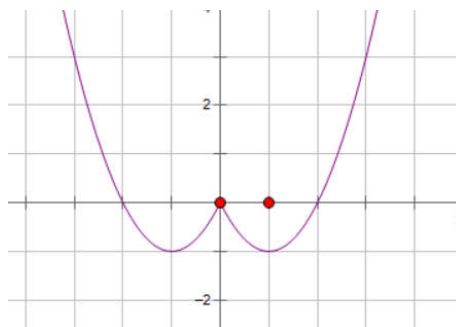
$y = |x|(|x| - 2)$ và đường thẳng $y = m$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$:

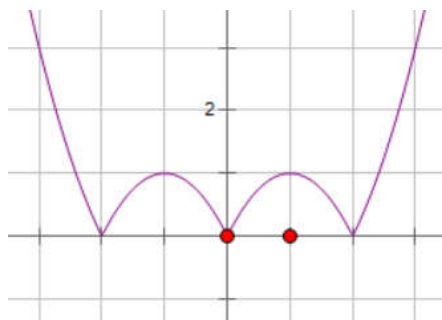
- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x(x - 2)$.



- Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = x(x - 2)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$.



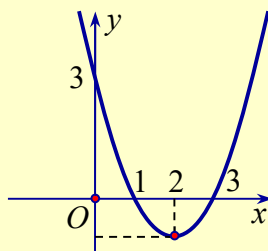
- Bước 3: Từ đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$ suy ra đồ thị hàm số $y = ||x|(|x| - 2)|$.



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; 1)$.

Vậy $a + b = 1$.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m - 2)f(|x|) + m - 3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. 1.

B. 3.

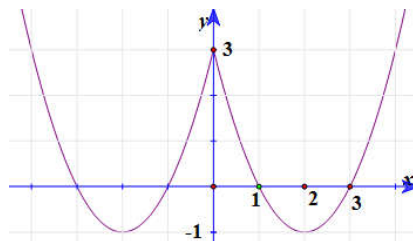
C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ gồm 2 phần: Phần 1 giữ nguyên phần (C) bên phải trục Oy ; phần 2 lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .



Ta có: $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 & (1) \\ f(|x|) = 3-m & (2) \end{cases}$.

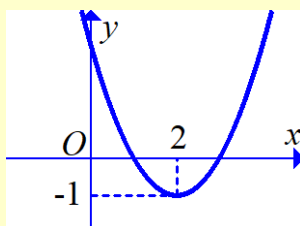
Từ đồ thị $(C') \Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt, khác hai nghiệm của phương trình (1) (*).

Từ đồ thị (C') , ta có $(*) \Leftrightarrow -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

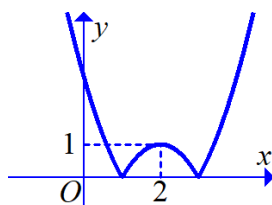


- Ⓐ. $0 < m < 1$. Ⓑ. $-1 < m < 0$. Ⓒ. $m = -1$; $m = 3$. Ⓓ. $m > 3$.

Lời giải

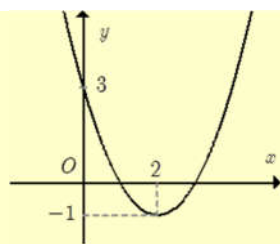
Chọn A

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$. Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ dưới đây.



Do đó phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.

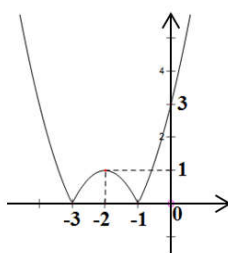


Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|ax^2 - bx + c| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

- ☐ A. $0 < m < 1$. ☐ B. $m = 0$.
☐ C. $m = 1$. ☐ D. không có giá trị của m .

Lời giải

Chọn D



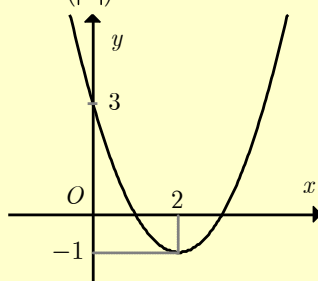
Đồ thị (C_1) của hàm số $y = ax^2 - bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c$ đối xứng với đồ thị (C) của hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ qua trục tung.

Từ đó suy ra đồ thị (C_2) của hàm số $y = |ax^2 - bx + c|$ gồm phần đồ thị (C_1) ở phía trên Ox (kể cả các điểm thuộc Ox) và phần đối xứng qua Ox của phần (C_1) nằm phía dưới trục hoành (như hình vẽ).

Dựa vào đồ thị suy ra đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C_2) tại 4 điểm phân biệt khi $0 < m < 1$, hay phương trình $|ax^2 - bx + c| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

Không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(0; 1)$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt



- ☐ A. $m = 4$. ☐ B. $m > 0$. ☐ C. $m > -1$. ☐ D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

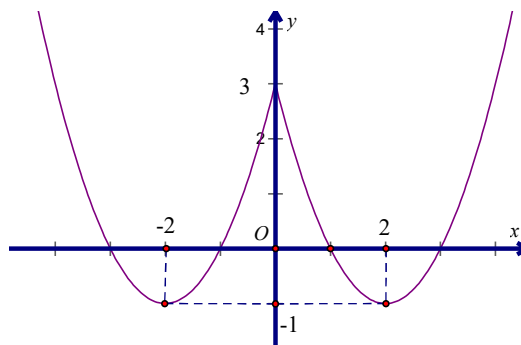
Đồ thị hàm số cắt Oy tại $(0; 3) \Rightarrow c = 3$

Đồ thị hàm số nhận $(2; -1)$ làm đỉnh nên ta có
$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Ta có $f(|x|) + 1 = m \Leftrightarrow y = f(|x|) = m - 1$

Ta có đồ thị hàm $y = f(|x|)$ (C) như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(|x|) + 1 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đường thẳng $y = m - 1 \Leftrightarrow m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$

Câu 56: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm.

A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. không tồn tại m .

Lời giải

Chọn B

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đạt GTNN bằng -1 tại $x = 2$ và có hệ số $a > 0$. Ta biểu diễn được: $f(x) = a(x - 2)^2 - 1 = ax^2 - 4ax + 4a - 1$

Do đó $f(2017x - 2018) = a(2017x - 2020)^2 - 1 \Rightarrow f(2017x - 2018) - 2 = a(2017x - 2020)^2 - 3$.

Vậy GTNN của $y = f(2017x - 2018) - 2$ bằng -3 tại $x = \frac{2020}{2017}$.

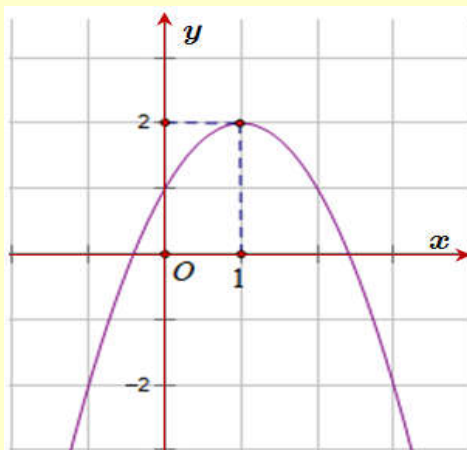
BBT của hàm số $y = |f(2017x - 2018) - 2|$ có dạng:

x	$-\infty$	x_1	$\frac{2020}{2017}$	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(2017x - 2018) - 2|$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm khi $m = 3$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(-x) + m - 2019 = 0$ có duy nhất một nghiệm.



A. $m = 2015$.

B. $m = 2016$.

C. $m = 2017$.

D. $m = 2019$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đạt GTLN bằng 2 tại $x = 1$ và có hệ số $a < 0$. Ta biểu diễn được: $f(x) = a(x-1)^2 + 2 = ax^2 - 2ax + a + 2$

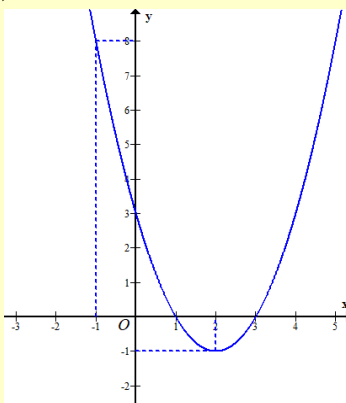
$$\Rightarrow f(-x) = a(x+1)^2 + 2.$$

Vậy GTLN của $y = f(-x)$ bằng 2 tại $x = -1$. (vì hệ số $a < 0$).

Số nghiệm của phương trình $f(-x) + m - 2019 = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 2019 - m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(-x)$ và đường thẳng $y = 2019 - m$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất khi $2019 - m = \max f(x) \Leftrightarrow 2019 - m = 2 \Leftrightarrow m = 2017$.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ):



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 4.

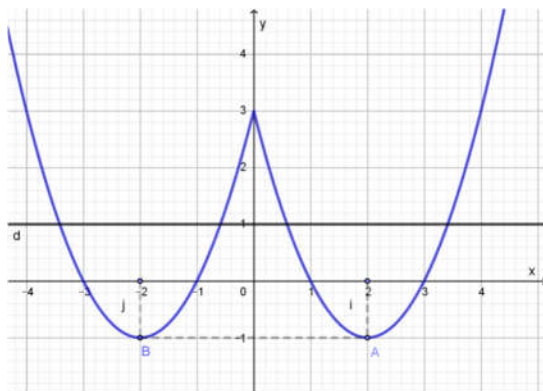
C. 3.

D. 2.

 Lời giải

Chọn C

* Vẽ đồ thị hàm số (C') của hàm số $y = f(|x|)$: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy , bỏ đi phần đồ thị (C) bên trái trục Oy và lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía bên phải trục Oy qua trục Oy .



* Ta có $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3-m \end{cases}$.

* Từ đồ thị (C') , ta có:

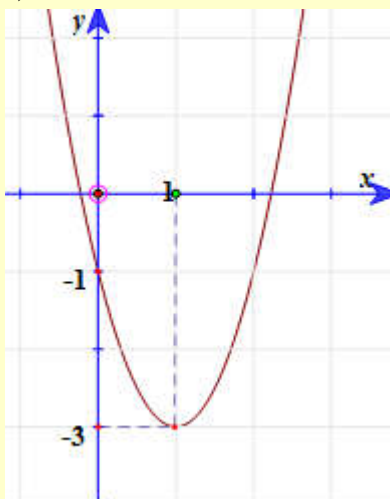
- Phương trình $f(|x|) = -1$ có hai nghiệm là $x = 2, x = -2$.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = 3-m$ có bốn nghiệm phân biệt khác ± 2 suy ra

Đường thẳng $d: y = 3-m$ cắt đồ thị (C') tại bốn điểm phân biệt khác A, B

$\Leftrightarrow -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Suy ra $m \in \{1, 2, 3\}$.

 **Câu 59:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f^2(|x|) + f(|x|) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A). 2.

(B). 6.

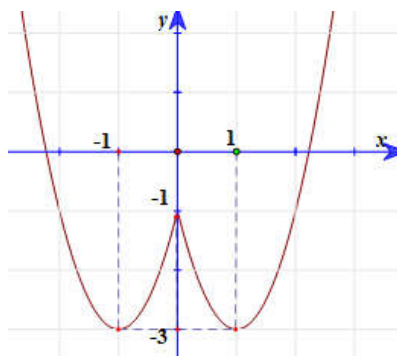
(C). 8.

(D). 7.

 Lời giải

Chọn B

+) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$



$$f^2(|x|) + f(|x|) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = 1 & (1) \\ f(|x|) = -2 & (2) \end{cases}$$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = 1$, từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta suy ra (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = -2$, từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta suy ra (2) có 4 nghiệm phân biệt (khác 2 nghiệm của (1)).

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 60: Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2017]$ để phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

(A). 2016.

(B). 2008.

(C). 2009.

(D). 2017.

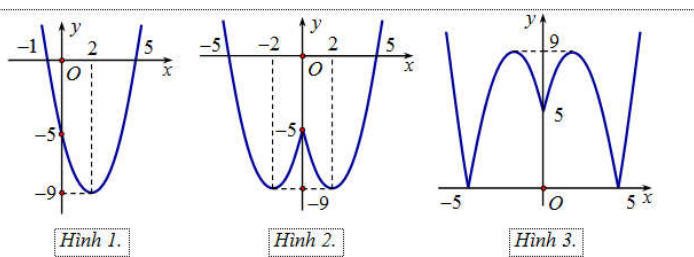
Lời giải

Chọn B

$$PT: |x^2 - 4|x| - 5| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4|x| - 5| = m(1).$$

Số nghiệm phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|(P)$ và đường thẳng $y = m$ (cùng phương Ox).

Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 5 (P_1)$ có đồ thị như hình 1.



Xét hàm số $y = x^2 - 4|x| - 5 (P_2)$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y = x^2 - 4|x| - 5 = x^2 - 4x - 5$ nếu $x \geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy .

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|$ (P), ta có: $y = \begin{cases} x^2 - 4|x| - 5 & (y \geq 0) \\ -(x^2 - 4|x| - 5) & (y < 0) \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox .

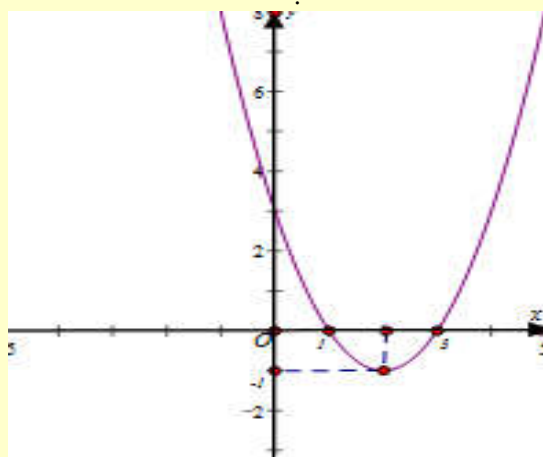
Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox .

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $|x^2 - 4|x| - 5| = m$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m = 0 \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0; 2017] \end{cases} \Rightarrow m \in \{10; 11; 12; \dots; 2017\}$.

Câu 61: Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S bằng

- Ⓐ. 0. Ⓑ. 1. Ⓒ. 2. Ⓓ. 4.

Lời giải

Chọn A

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

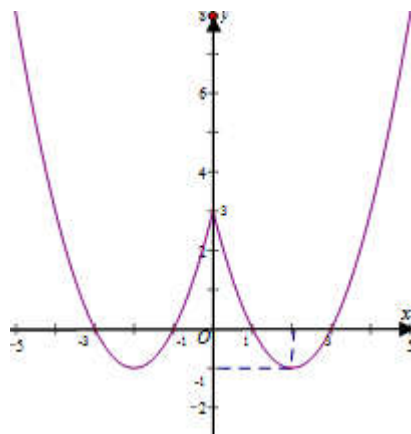
Xét (P_2): $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; có $y = f(x)$ là hàm số chẵn; nên (P_2) nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ (P_1); ta vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ (P_2) như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị (P_1) bên phải trục Oy .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị (P_1) bên phải trục Oy qua trục Oy .

(Bỏ phần đồ thị (P_1) bên trái trục Oy)

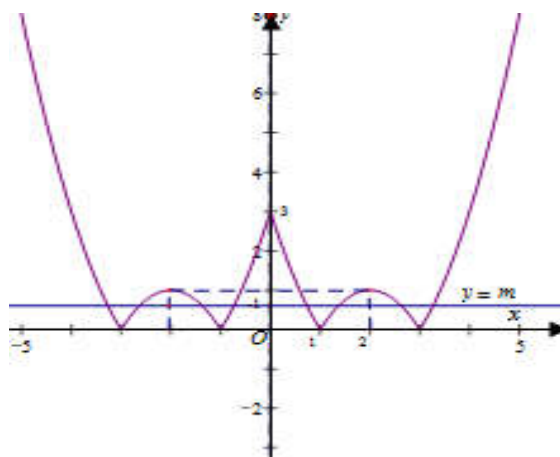


Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ (P_2) ta vẽ đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ (P_3) như sau

+) Giữ nguyên phần đồ thị (P_2) nằm trên trục Ox .

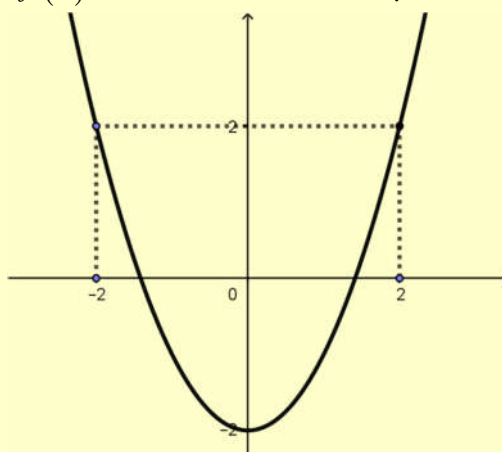
+) Lấy đối xứng phần đồ thị (P_2) nằm trên trục Ox qua trục Ox .

(Bỏ phần đồ thị (P_2) nằm phía dưới trục Ox)



Dựa vào đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ (P_3) ta có phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Kí hiệu $f^2(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $f^{2019}(x) = -2$ trên $[-2; 2]$ là

A. 2^{2019}

B. $2^{2018} + 1$

C. $2^{2018} - 1$

D. 2^{2018}

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $(2; 2)$, $(-2; 2)$, $(0; -2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 4a - 2b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow y = f(x) = x^2 - 2.$$

$$\text{Xét } f^2(x) = f(f(x)) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

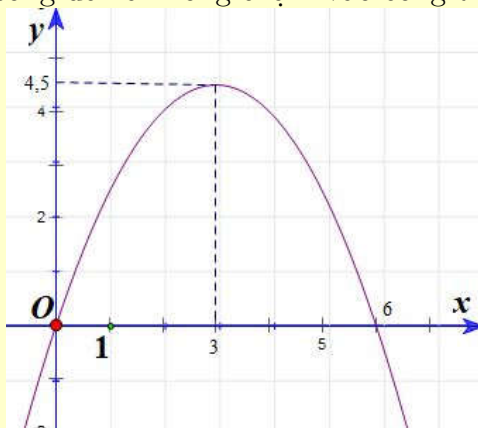
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{có } 2^1 \text{ nghiệm trên } [-2; 2].$$

$$+ f^3(x) = f(f(f(x))) = (x^4 - 4x^2 + 2)^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 + \sqrt{2} \\ x^2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ x = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \text{có } 2^2 \text{ nghiệm.}$$

$$+ f^{2019}(x) = -2 \text{ có } 2^{2018} \text{ nghiệm.}$$

Câu 63: Một chiếc cổng hình parabol (như hình vẽ), chiều rộng 6m, chiều cao 4,5m. Một chiếc xe tải với kích thước chiều rộng 2,2m và chiều cao 3m cần đi qua cổng. Khoảng cách tối thiểu (a mét) ô tô cách mép cổng để xe không chạm vào cổng thuộc khoảng nào sau đây?



A. $a \in (1, 1, 1, 3)$.

B. $a \in (0, 8; 1)$.

C. $a \in (0, 9; 1, 1)$.

D. $a \in (1; 1, 2)$.

Lời giải

Ta tìm phương trình của đường parabol: Vì parabol đi qua gốc O nên phương trình của nó có dạng $y = mx^2 + nx$ ($m \neq 0$).

Từ giả thiết suy ra đỉnh của parabol là $\left(3; \frac{9}{2}\right)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{-n}{2m} = 3 \\ \frac{9}{2} = 9m + 3n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1}{2} \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Parabol có phương trình là: } y = \frac{-1}{2}x^2 + 3x.$$

$$\text{Để tìm } a \text{ ta xét: } y > 3 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}x^2 + 3x > 3 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}$$

$3 - \sqrt{3} \approx 1,27...; 3 + \sqrt{3} \approx 4,73...$ suy ra $a \in (1,1; 1,3)$.

Khi đó xét ở chân bên phải của cổng, vì chiều rộng của cổng là 6m và của ô tô là 2,2m nên mép bên phải của ô tô cách chân cổng bên phải 1 khoảng gần bằng (nhỏ hơn) 1 đoạn là:

$6 - a - 2,2 > 3 - \sqrt{3}$ (m). Vậy ô tô đi lọt qua mà không chạm vào cổng.

Câu 64: Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

- Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.
- Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

Lời giải

a. Ta có: $h(t) = -t^2 + 2t + 3 \Leftrightarrow h(t) = -(t-1)^2 + 4 \Rightarrow \max h(t) = h(1) = 4$.

Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t = 1$ giây.

b. Ta có: $-t^2 + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại) hoặc $t = 3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.

Câu 65: Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

điểm 3 giây?

Lời giải

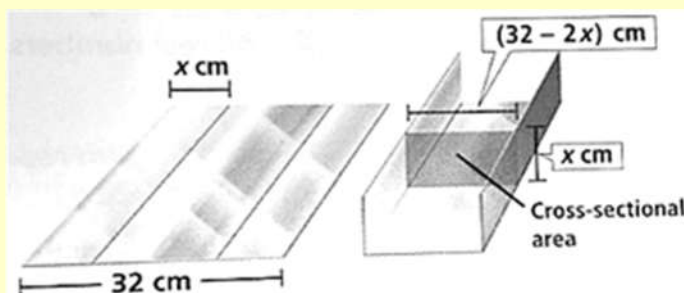
Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t) = at^2 + bt + c$ (tính bằng mét), t : giây, $t \geq 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 28 \\ a + b + c = 48 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 64 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow h(t) = -16t^2 + 64t \Rightarrow h(3) = 48.$$

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.

Câu 66: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 16)$.

$$\text{Ta có: } S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0; 16).$$

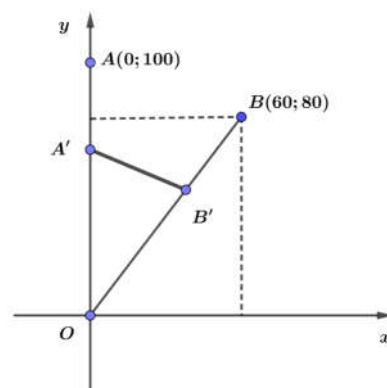
$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128.$$

Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 67: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0; 100)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 5 m/s.

Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60; 80)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 10 m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



Lời giải

Xét tại thời điểm t (giây), $t \in [0; 10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0; 100 - 5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60; 80)$ về $O(0; 0)$ trên quỹ đạo là đường thẳng có hệ số góc là

$$k = \tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Do đó tại thời điểm } t, \text{ nó có tọa độ là } \begin{cases} x = 60 - 10t \cdot \cos \alpha \\ y = 80 - 10t \cdot \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases} \Rightarrow B'(60 - 6t; 80 - 8t).$$

$$\text{Ta có: } \overline{A'B'} = (60 - 6t; -20 - 3t).$$

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$$d = A'B' = \sqrt{(60 - 6t)^2 + (20 + 3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

d nhỏ nhất khi hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 10]$.

$$\text{Ta có: } f(t) = 5(3t - 20)^2 + 2000 \geq 2000, \forall t \in [0; 10]$$

$$\Rightarrow \min_{t \in [0; 10]} f(t) = f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Câu 68: Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá

bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số buổi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng (x : đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000; 50000]$

$$\text{Ta có: } f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = f(42000) = 1440000.$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 69: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm?)

A. 2,56 giây

B. 2,57 giây

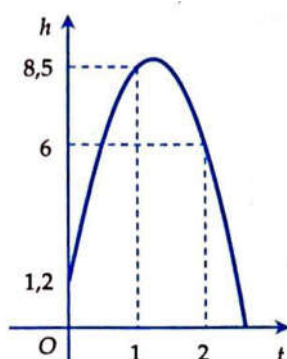
C. 2,58 giây

D. 2,59 giây

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình của parabol quỹ đạo là $h = at^2 + bt + c$. Từ giả thiết suy ra parabol đi qua các điểm $(0; 1,2)$, $(1; 8,5)$ và $(2; 6)$.



Từ đó ta có

$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ b = 12,2 \\ c = 1,2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của parabol quỹ đạo là $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

Giải phương trình

$h = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 12,2t + 1,2 = 0$ ta tìm được một nghiệm dương là $t \approx 2,58$.

Câu 70: Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth có phương trình $h = at^2 + bt + c$ ($a < 0$), trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\text{ m}$ và sau 1 giây thì nó đạt độ cao $8,5\text{ m}$, sau 2 giây nó đạt độ cao 6 m . Tính tổng $a + b + c$.

A. $a + b + c = 18,3$.

B. $a + b + c = 6,1$.

C. $a + b + c = 8,5$.

D. $a + b + c = -15,9$.

 **Lời giải**

Chọn C

Từ giả thiết của bài toán ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{49}{10} \\ b = \frac{61}{5} \\ c = 1,2 \end{cases}$$

$\Rightarrow a + b + c = \frac{17}{2}$.

Câu 71: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

A. 80 US**D.**

B. 160 US**D.**

C. 40 US**D.**

D. 240 US**D.**

 **Lời giải**

Chọn A

Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x - 80)^2 + 1600 \leq 1600$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 US**D.**

Câu 72: Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao 1 m sau đó 1 giây nó đạt độ cao 10 m và 3,5 giây nó ở độ cao 6,25 m. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

A. 11 m.

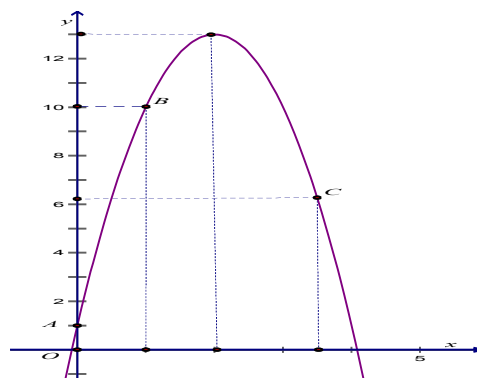
B. 12 m.

C. 13 m.

D. 14 m.

 **Lời giải**

Chọn C



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol nên phương trình có dạng $y = ax^2 + bx + c$

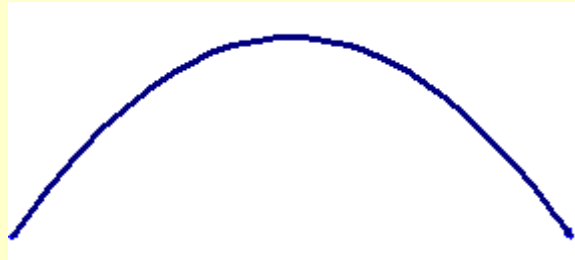
Theo bài ra gán vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B, C nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 10 \\ 12,25a + 3,5b + c = 6,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 12 \\ c = 1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình parabol là $y = -3x^2 + 12x + 1$.

Parabol có đỉnh $I(2;13)$. Khi đó quả bóng đạt vị trí cao nhất tại đỉnh tức $h = 13$ m.

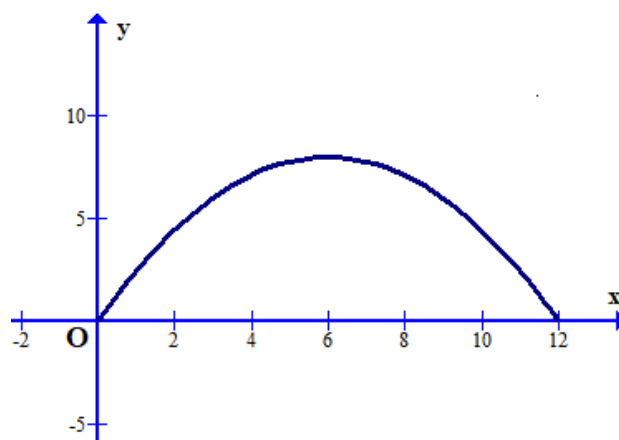
Câu 73: Một chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao 8 m như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang 6 m đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi chiều cao h của xe tải thỏa mãn điều kiện gì để có thể đi vào cổng mà không chạm tường?



- Ⓐ. $0 < h < 6$. Ⓑ. $0 < h \leq 6$. Ⓒ. $0 < h < 7$. Ⓓ. $0 < h \leq 7$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + bx$.

Vì chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao, theo hình vẽ ta có parabol đi qua các điểm $(12;0)$ và $(6;8)$, suy ra:

$$\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{9} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}.$$

Suy ra parabol có phương trình $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{3}$.

Do chiếc xe tải có chiều ngang 6 m đi vào vị trí chính giữa cổng nên xe sẽ chạm tường tại điểm $A(3; 6)$ khi đó chiều cao của xe là 6.

Vậy điều kiện để xe tải có thể đi vào cổng mà không chạm tường là $0 < h < 6$.

Câu 74: Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 64.

B. 4.

C. 16.

D. 8.

 **Lời giải**

Chọn C

Gọi x là chiều dài của hình chữ nhật.

Khi đó chiều rộng là $8 - x$.

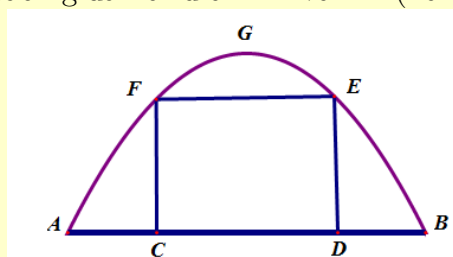
Diện tích hình chữ nhật là $x(8 - x)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai $f(x) = -x^2 + 8x$ trên khoảng $(0; 8)$ ta được

$$\max_{(0;8)} f(x) = f(4) = 16.$$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi chiều dài bằng chiều rộng bằng 4.

Câu 75: Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là 4m còn kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B . (xem hình vẽ bên dưới)



A. 5m.

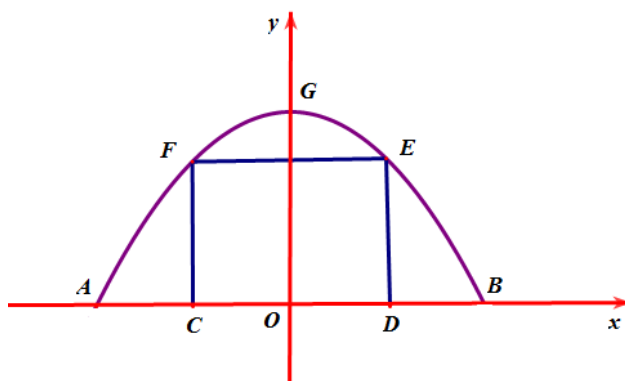
B. 8,5m.

C. 7,5m.

D. 8m.

 **Lời giải**

Chọn D



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng là 1 phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$.

Do parabol (P) đối xứng qua trục tung nên có trục đối xứng $x = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Chiều cao của cổng parabol là 4m nên $G(0; 4) \Rightarrow c = 4$.

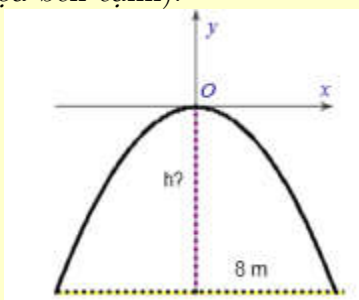
$$\Rightarrow (P): y = ax^2 + 4$$

Lại có, kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m nên $E(2; 3), F(-2; 3) \Rightarrow 3 = 4a + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

$$\text{Vậy } (P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 4.$$

Ta có $-\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$ nên $A(-4; 0), B(4; 0)$ hay $AB = 8$ (m).

Câu 76: Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d = 8$ m. Hãy tính chiều cao h của cổng (xem hình minh họa bên cạnh).



A. $h = 9$ m.

B. $h = 7$ m.

C. $h = 8$ m.

D. $h = 5$ m.

Lời giải

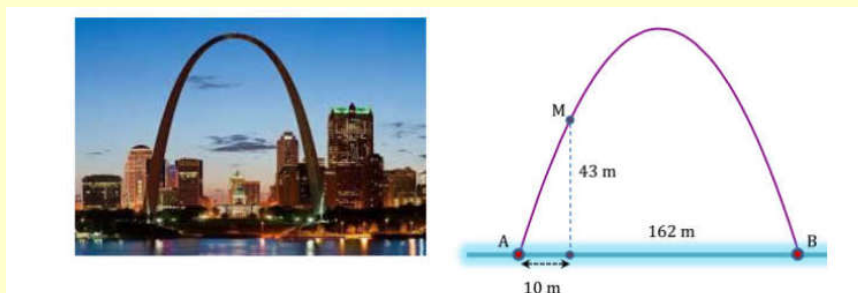
Chọn C

$(P): y = -\frac{1}{2}x^2$, có $d = 8$. Suy ra $\frac{d}{2} = 4$.

Thay $x = 4$ vào $y = -\frac{1}{2}x^2$. Suy ra $y = -8$. Suy ra $h = 8$ (cm).

Câu 77: Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43m so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10m. Giả sử

các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).



- ☐ A. 175,6 m.
 ☐ B. 197,5 m.
 ☐ C. 210 m.
 ☐ D. 185,6 m.

Lời giải

Chọn D

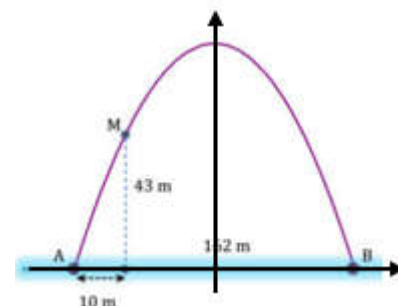
Gắn hệ tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ trùng với trung điểm của AB , tia AB là chiều dương của trục hoành (hình vẽ).

Parabol có phương trình $y = ax^2 + c$, đi qua các điểm: $B(81;0)$

và $M(-71;43)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} 81^2 a + c = 0 \\ 71^2 a + c = 43 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{81^2 \cdot 43}{81^2 - 71^2} \approx 185.6$$

Suy ra chiều cao của cổng là $c \approx 185,6$ m.

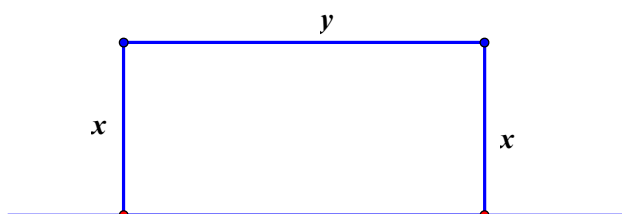


Câu 78: Cô Tình có 60m lưới muốn rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, cô Tình chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Em hãy tính hộ diện tích lớn nhất mà cô Tình có thể rào được?

- ☐ A. $400m^2$.
 ☐ B. $450m^2$.
 ☐ C. $350m^2$.
 ☐ D. $425m^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là x, y (như hình vẽ); $0 < x, y < 60$.

Ta có $2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$.

$$\text{Diện tích hình chữ nhật là } S = xy = x(60 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(60 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 60 - 2x}{2} \right)^2 = 450.$$

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $450(m^2)$, đạt được khi $x = 15, y = 30$.

Câu 79: Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm. Điều kiện cần và đủ của tham số m là

A. $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

B. $1 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

C. $m \neq -1$.

D.

$m \geq -1$.

 Lời giải

Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2mx - (m-3) \geq 0(*)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$, bất phương trình $(*)$ trở thành: $2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$, $(*)$ không thỏa mãn với mọi x . Do đó $m=-1$ không thỏa đề.

+ Với $m \neq -1$, bất phương trình $(*)$ đúng với mọi x

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + (m+1)(m-3) \leq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2m - 3 \leq 0 \\ m > -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

 **Câu 80:** Xét tất cả các tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a < b$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{a+b+c}{b-a}$ là

A. 2

B. 7

C. 4

D. 3

 Lời giải

Chọn D

Do $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq \frac{b^2}{4a} \\ b-a > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A = \frac{a+b+c}{b-a} \geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$

Đặt $u = b-a \Leftrightarrow b = a+u$. Ta có $A \geq \frac{4a^2+4a(a+u)+(a+u)^2}{4au} = \frac{9a^2+6au+u^2}{4au} = \frac{9a}{u} + \frac{u}{4a} + 6$

Áp dụng bất đẳng thức coossi cho hai số $\frac{9a}{4u}$ và $\frac{u}{4a}$ ta được

$A \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{9a}{4u} \cdot \frac{u}{4a}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{b^2}{4a} \\ u^2 = 9a^2 \end{cases} \Rightarrow b = c = 4a > 0$

 **Câu 81:** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 1 + |x-2| \leq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. Vô số.

B. 4.

C. 2.

D. 3

 Lời giải

Chọn C

TH1: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

$$x^2 - 3x + 1 + |x - 2| \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

So với điều kiện ta có $2 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$.

TH2: $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$$x^2 - 3x + 1 + |x - 2| \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 - x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

So với điều kiện ta có $1 \leq x < 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[1; 1 + \sqrt{2}]$.

Nghiệm nguyên là $\{1; 2\}$.

Câu 82: Tập nghiệm của bất phương trình $||x|^3 - 3x^2 + 2| > 2$ là

A. $(-3; 2)$.

B. $(-3; 3)$.

C. $(-3; 3) \setminus \{-2; 0\}$.

D. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

 Lời giải

$$\text{Ta có } ||x|^3 - 3x^2 + 2| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|^3 - 3x^2 + 2 < -2 \\ |x|^3 - 3x^2 + 2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|^3 - 3x^2 + 4 < 0 \quad (1) \\ |x|^3 - 3x^2 > 0 \quad (2) \end{cases}$$

Đặt $|x| = t$, với $t \geq 0$.

(1) trở thành $t^3 - 3t^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2)^2 < 0 \Leftrightarrow t < -1$ (Không thỏa mãn).

(2) trở thành $t^3 - 3t^2 > 0 \Leftrightarrow t^2(t-3) > 0 \Leftrightarrow t > 3$.

$$\text{Với } t > 3, \text{ ta có } |x| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 83: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$$

 Lời giải

$$\text{a) Ta có } -4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{16} < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}$$

Vậy với $m < -\frac{5}{8}$ là giá trị cần tìm.

Câu 84: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau $f(x) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$ luôn dương

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\sqrt{x^2 - x + m} - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + m} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 1 - 4(m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

Vậy với $m < \frac{5}{4}$ thì biểu thức đã cho luôn dương.

Câu 85: Chứng minh hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi m

$$\text{a) } y = \frac{mx}{(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2} \quad \text{b) } y = \sqrt{\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{n^2}}$$

Lời giải

a) Điều kiện $(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = (2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2$. Ta có

$$a_f = 2m^2 + 1 > 0, \Delta'_f = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0$$

Suy ra với mọi m ta có $f(x) = (2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Điều kiện $\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$ và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1$. Ta có

$$a_f = 2 > 0, \Delta'_f = (m+1)^2 - 2(m^2 + 1) = -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2 \leq 0$$

Suy ra với mọi m , ta có $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Xét tam thức bậc hai $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2$

Với $m = 0$ thì $g(x) = 2 > 0$

Với $m \neq 0$, ta có

$$a_g = m^2 > 0, \Delta'_g = m^2 - m^2(m^2 + 2) = -m^2(m^2 + 1) < 0$$

Suy ra với mọi m , ta có $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra với mọi m thì $\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$

Và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$ đúng với mọi x .

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 86: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $(m^2 + 1)x + m(x + 3) + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 2]$.

Lời giải

Bpt tương đương $(m^2 + m + 1)x + 3m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-3m-1}{m^2+m+1} \left(\text{do } m^2+m+1 = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right)$$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(\frac{-3m-1}{m^2+m+1}; +\infty \right)$

Bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 2]$ khi và chỉ khi $[-1; 2] \subset \left(\frac{-3m-1}{m^2+m+1}; +\infty \right)$

$$\text{Suy ra } \frac{-3m-1}{m^2+m+1} < -1 \Leftrightarrow \frac{m^2-2m}{m^2+m+1} < 0 \Leftrightarrow m^2-2m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2$$

Vậy $0 < m < 2$ thỏa mãn.

Câu 87: Tìm các giá trị của tham số m để bpt $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

Lời giải

-Với $m=1$ thì bpt trở thành $2x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$: Thỏa mãn

-Với $m < 1$, ta có $\Delta' = 1 - (m-1)(m+1) = 2 - m^2$

- Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra bpt vô nghiệm: không thỏa mãn.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì bpt tương đương $\frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1} < x < \frac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1}$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(\frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1}; \frac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \right)$: không thỏa mãn.

-Với $m > 1$, ta có $\Delta' = 1 - (m-1)(m+1) = 2 - m^2$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases} \text{ thì } (m-1)x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

-Nếu

Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ thỏa mãn.

Vậy $m > \sqrt{2}$ thỏa mãn.

-Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ thì bpt tương đương $\begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \\ x > \frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1} \end{cases}$

-Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1}; +\infty \right)$

Bpt nghiệm đúng với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi

$$(0; +\infty) \subset \left(\frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{m - 1}; +\infty \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{m - 1} \leq 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{2 - m^2} \leq 0 \\ m > 1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

-Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$, xét $m = \sqrt{2}$ thì bpt trở thành

$$(\sqrt{2} - 1)x^2 - 2x + \sqrt{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Không thỏa mãn. Vậy $m = 1, m > \sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$

Lời giải

Ta có $\Delta' = m^2 \geq 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1 - m$ và $x_2 = 1 + m$

-Nếu $m = 0$ thì bpt trở thành $x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn.

-Nếu $m > 0$ thì $x_1 = 1 - m < x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = [1 - m; 1 + m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ khi và chỉ khi $[1; 2] \subset [1 - m; 1 + m]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 1 - m \\ 2 \geq 1 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

-Nếu $m < 0$ thì $x_1 = 1 - m > x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = [1 + m; 1 - m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ khi và chỉ khi $[1; 2] \subset [1 + m; 1 - m]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 1 + m \\ 2 \geq 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Vậy $m \leq -1 \vee m \geq 1$ thỏa mãn.

Câu 89: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 > 0$ nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3m - 2 \end{cases}$$

-Nếu $3m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ thì bpt trở thành $(x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn.

-Nếu $3m - 2 < 1 \Leftrightarrow m < 1$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 3m - 2) \cup (1; +\infty)$

Bpt nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$ khi và chỉ khi $3m - 2 > -2 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy $0 < m < 1$ thỏa mãn.

Nếu $3m - 2 > 1 \Leftrightarrow m > 1$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 1) \cup (3m - 2; +\infty)$

Bpt nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$ khi và chỉ khi $3m - 2 < 2 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$

Vậy $1 < m < \frac{4}{3}$ thỏa mãn.

-Kết hợp các Th ta có $0 < m < \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 90: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2 + (3-m)x - 2m + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \leq 4$.

Lời giải

Ta có $\Delta = (3-m)^2 - 4(-2m+3) = m^2 + 2m - 3$

-Nếu $m = 1$ thì bpt trở thành $x^2 + 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ thỏa mãn.

-Nếu $m = -3$ thì bpt trở thành $x^2 + 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ thỏa mãn

-Nếu $-3 < m < 1$ thì $\Delta < 0$ mà hệ số $a = 1 > 0$ nên $x^2 + (3-m)x - 2m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

-Nếu $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$ thì $\Delta > 0$ nên phương trình $x^2 + (3-m)x - 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm

$$S = \left(-\infty; \frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2} \right) \cup \left(\frac{-3+m+\sqrt{m^2+2m-3}}{2}; +\infty \right)$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \leq -4$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & (-\infty; -4] \subset \left(-\infty; \frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2} \right) \\ \Leftrightarrow & -4 < \frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2+2m-3} < m+5 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \vee m > 1 \\ m > -5 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m > 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m + 5 > 0 \\ m^2 + 2m - 3 < (11-m)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m > -\frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.