

LƯ SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

HÌNH HỌC 11



CHƯƠNG III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

0355334679 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 11.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

NỘI DUNG

1. Tóm tắt lý thuyết cần nắm ở mỗi bài học
2. Bài tập có hướng dẫn giải và bài tập tự luyện
3. Phần bài tập trắc nghiệm đủ dạng và có đáp án.
4. Một số đề ôn kiểm tra

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để lần sau cuốn bài tập hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gọi về số 0355.334.679 – 0916 620 899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

MỤC LỤC

§1. VECTO TRONG KHÔNG GIAN	01 – 11
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.....	12 – 19
§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG.....	20 – 36
§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC.....	37 – 49
§5. KHOẢNG CÁCH	50 – 62
ÔN TẬP CHƯƠNG III	63 – 88
MỘT SỐ ĐỀ ÔN KIỂM TRA	89 – 95

CHƯƠNG III VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

---o0o---

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN VÀ SỰ ĐỒNG PHẪNG CỦA CÁC VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Vectơ, giá và độ dài của vectơ

- ♦ Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$, chỉ vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
- ♦ Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại hai vectơ có giá cắt nhau được gọi là hai vectơ không cùng phương. Hai vectơ cùng phương thì có thể cùng hướng hay ngược hướng.
- ♦ Độ dài của vectơ là độ dài đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là vectơ đơn vị. Kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$. Như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$

2. Hai vectơ bằng nhau, vectơ không

- ♦ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$
- ♦ Vectơ không là một vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau; cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ. Kí hiệu $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$

II. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ VECTƠ

1. Định nghĩa

- ♦ Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$
- ♦ Vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$ nếu $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với nhau, kí hiệu $\vec{b} = -\vec{a}$
- ♦ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

2. Tính chất

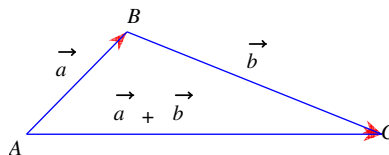
- ♦ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán)
- ♦ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp)
- ♦ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất vectơ không)
- ♦ $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

3. Các quy tắc cần nhớ khi tính toán

a. Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có:

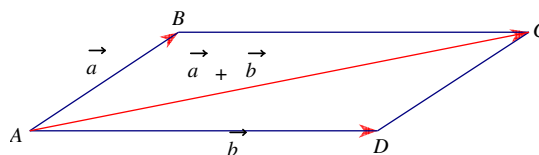
- ♦ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
- ♦ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$



b. Quy tắc hình bình hành

Với ABCD là hình bình hành

Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



c. Tính chất trung điểm, trọng tâm của tam giác

Với I là trung điểm của AB. Ta có: ♦ $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

- ♦ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm M

G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có: ♦ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ với

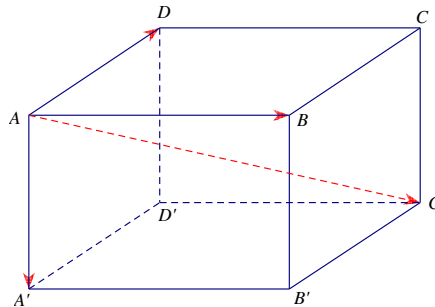
$$\diamond \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \text{ với mọi điểm } M$$

d. Quy tắc hình hộp

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$$



III. PHÉP NHÂN VECTO VỚI MỘT SỐ

1. Định nghĩa: Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$

2. Tính chất: Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và mọi số m, n ta có:

$$\diamond m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b} \quad \diamond (m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a} \quad \diamond m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$$

$$\diamond 1.\vec{a} = \vec{a} \quad \diamond (-1).\vec{a} = -\vec{a} \quad \diamond 0.\vec{a} = \vec{0}; k.\vec{0} = \vec{0}$$

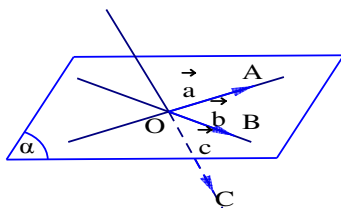
IV. ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẪNG CỦA BA VECTO

1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian

Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác vectơ-không. Nếu từ một điểm O bất kì ta vẽ

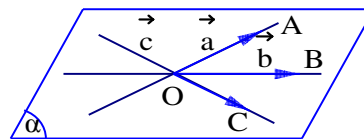
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ thì xảy ra hai trường hợp:

TH1. Các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng.



Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng

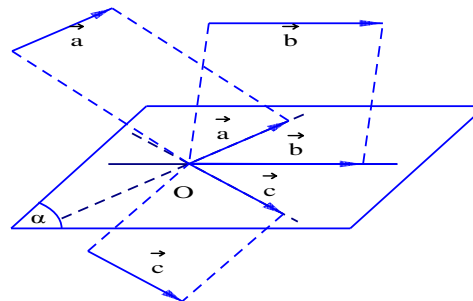
TH2. Các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng.



Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

2. Định nghĩa

Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng



3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Định lý 1. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.

4. Phân tích (biểu thị) một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng

Định lý 2. Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$, ta tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa các số m, n, p là duy nhất.

B. BÀI TẬP**DẠNG 1. Xác định các yếu tố của vector**

Phương pháp: ♦ Dựa vào định nghĩa các yếu tố của vector

♦ Dựa vào các tính chất hình học của hình đã cho

Bài 1.1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy kể tên các vector có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp lần lượt bằng các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}$

HD & Giải

Theo tính chất hình hộp, ta có:

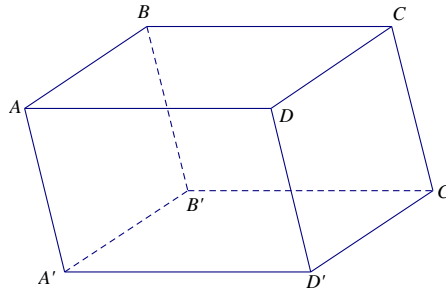
$$\diamond \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'};$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{B'A'} = -\overrightarrow{C'D'}$$

$$\diamond \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'};$$

$$\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{B'B} = -\overrightarrow{C'C} = -\overrightarrow{D'D}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}; \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{C'A'}, \dots$$

**DẠNG 2. Chứng minh các đẳng thức vector**

Phương pháp:

♦ Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp, các tính chất trung điểm, trọng tâm để biến đổi về này thành về kia và ngược lại.

♦ Sử dụng các tính chất của các phép toán về vector và các tính chất hình học của hình đã cho.

Bài 1.2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh rằng:

$$a) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$$b) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

$$c) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$$

HD & Giải

a) Theo qui tắc ba điểm, ta có

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \text{ và } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

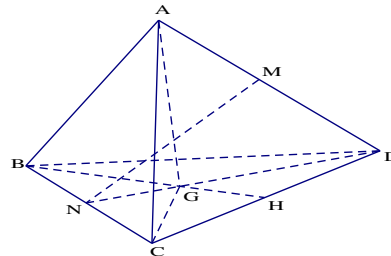
Do đó

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &+ \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{aligned}$$

Vì M là trung điểm của đoạn AD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ và

N là trung điểm của đoạn BC nên $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

$$\text{Do vậy: } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$



$$c) \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \end{cases}$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$ (Vì

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0})$$

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD, nên

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$$

Bài 1.3. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$

HD & Giải

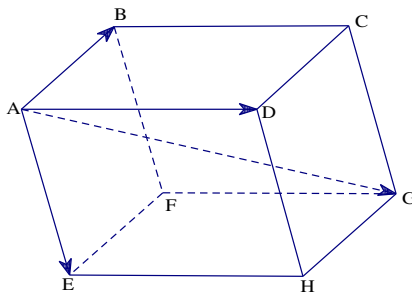
Theo tính chất hình hộp, ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$$

Hoặc ta dựa vào qui tắc hình hộp ta có ngay đpcm

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} \text{ (Gọi là qui tắc hình hộp)}$$



Bài 1.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng: $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$

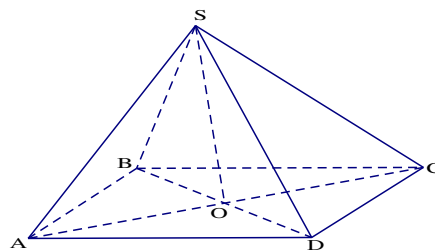
HD & Giải

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD

Ta có: $\vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO}$ (1) và $\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO}$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$



Bài 1.5. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DG}$$

HD & Giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{DA} = \vec{DG} + \vec{GA} \\ \vec{DB} = \vec{DG} + \vec{GB} \\ \vec{DC} = \vec{DG} + \vec{GC} \end{cases} \text{ Suy ra } \vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DG} \quad (\text{Vì } \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0})$$

Bài 1.6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ giác ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

a) $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

b) $\vec{PI} = \frac{1}{4}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$

HD & Giải

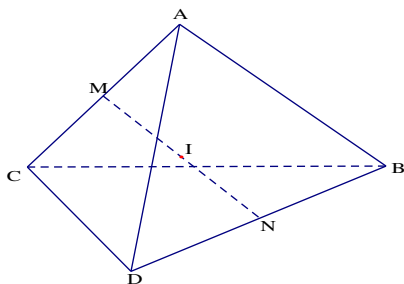
a) $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

Ta có $\vec{IA} + \vec{IC} = 2\vec{IM}$

$\vec{IB} + \vec{ID} = 2\vec{IN}$

Cộng vế theo vế, ta có

$\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = 2(\vec{IM} + \vec{IN}) = \vec{0}$ đpcm



b) $\vec{PI} = \frac{1}{4}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$

Với P là một điểm bất kì trong không gian, ta có

$\vec{IA} = \vec{PA} - \vec{PI}; \vec{IB} = \vec{PB} - \vec{PI}$

$\vec{IC} = \vec{PC} - \vec{PI}; \vec{ID} = \vec{PD} - \vec{PI}$

Do đó:

$\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}$

$= \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} - 4\vec{PI}$

Mà $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

Vậy $\vec{PI} = \frac{1}{4}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$

(I gọi là trọng tâm của tứ diện ABCD)

DẠNG 3. Chứng minh ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

Phương pháp:

♦ Dựa vào định nghĩa: Chứng tỏ các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có giá song song với một mặt phẳng

♦ Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector không cùng phương.

Bài 1.7. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

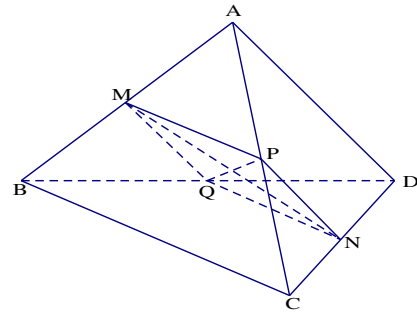
HD & Giải

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD
Ta có PN song song với MQ và

$PN = MQ = \frac{1}{2} AD$. Vậy Tứ giác MPNQ là hình

biên hành. Mặt phẳng (MNPQ) chứa đường thẳng MN và song song với các đường thẳng AD và BC.

Từ đó suy ra ba đường thẳng MN, AD, BC cùng song song với một mặt phẳng. Do đó ba vector $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



Bài 1.8. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABFE và K là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành BCGF.

Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

HD & Giải

Vector $\overrightarrow{BD}$ có giá thuộc mp(ABCD). Vector $\overrightarrow{IK}$ có giá song song với đường thẳng AC thuộc mp(ABCD). Vector $\overrightarrow{GF}$ có giá song song với đường thẳng BC thuộc mp(ABCD). Vậy ba vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

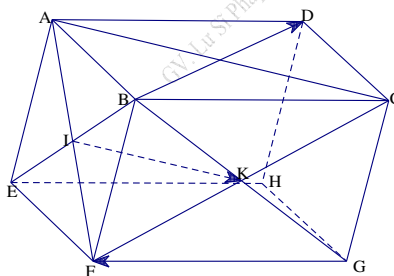
Cách khác:

Ta có

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{GF} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

$$= -\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK} \text{ (do } \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{IK})$$

Vậy $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK}$. Điều này chứng tỏ ba vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.



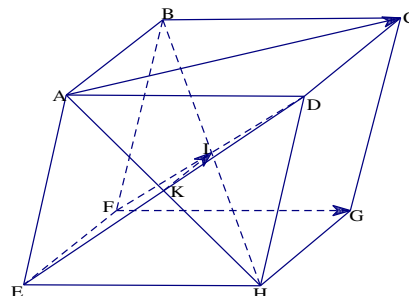
Bài 1.9. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của BH và DF. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

HD & Giải

Ta có $KI \parallel EF \parallel AB$ nên $KI \parallel (ABC)$,
 $FG \parallel BC$ và $AC \subset (ABC)$

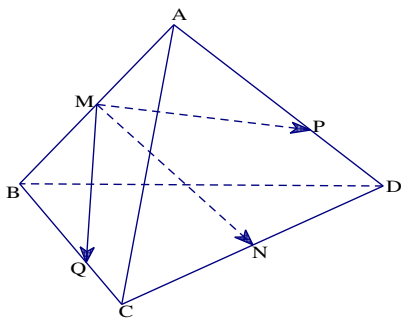
Do đó ba vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ có giá cùng song song với một mp(α) là mặt phẳng song song với mp(ABC).

Vậy ba vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng



Bài 1.10. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P và Q sao cho $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

HD & Giải



Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và
 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$
 Do đó $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ hay
 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ (1)

Mặt khác: Vì $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ nên $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$,

$\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BQ}$

Do đó từ (1) ta suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}) \\ &= \frac{3}{4} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ}) \\ &= \frac{3}{4} (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ})\end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Hệ thức $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ})$ chứng tỏ ba vector đồng phẳng, nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài 1.11. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mp(ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho

$\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

HD & Giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN}$ và

$$2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$$

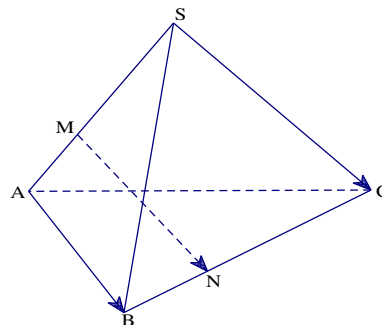
Do đó

$$3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN} = \vec{0}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

Do đó ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.



Bài 1.12. Trong không gian cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' chỉ chung nhau một điểm A.

Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng.

HD & Giải

Ta có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD'}$

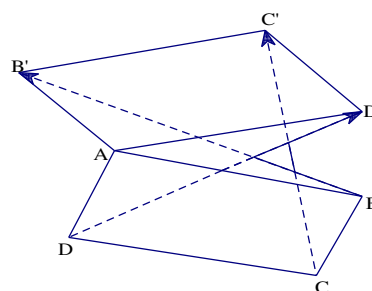
$$\text{Do đó } \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'})$$

Vì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC'}$

Vậy $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$. Hệ thức

$\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$ chứng tỏ ba vector

$\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng.



Bài 1.13. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BB' và A'C'. Gọi M là

điểm chia đoạn B'C' theo tỉ số $-\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng A, K, I, M nằm trên cùng một mặt phẳng.

HD & Giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Ta có

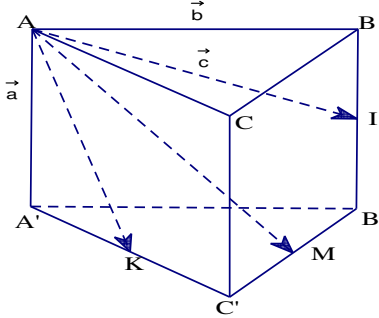
$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'K} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'M} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AI}$ đồng phẳng. Do đó A, M, K, I thuộc cùng một mặt phẳng



Bài 1.14. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi G là trọng tâm của tam giác A'BD. Chứng minh rằng A, G, C' thẳng hàng.

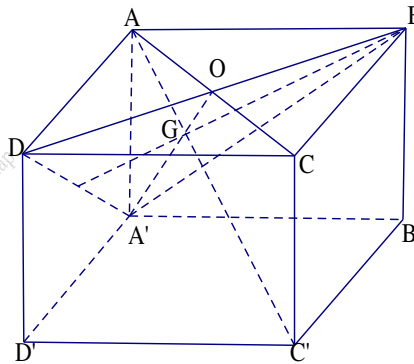
HD & Giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$
Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
(qui tắc hình hộp)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'O} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{A'B}) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'})\end{aligned}$$

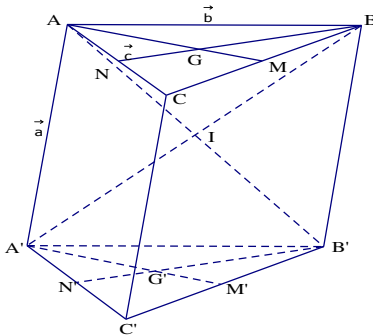
$$= \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$$

ra ba điểm A, G, C' thẳng hàng



Bài 1.15. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Gọi I là giao điểm của AB' và A'B. Chứng minh rằng GI // CG'.

HD & Giải



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GI} &= \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG'} &= \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} - \overrightarrow{AC} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right) = 2\overrightarrow{GI}\end{aligned}$$

Vậy GI // CG

Bài 1.16. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của tứ diện A'D'MN và BCC'D'. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.

HD & Giải

Đặt $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}, \vec{AA'} = \vec{c}$

Vì G' là trọng tâm của tứ diện BCC'D' nên

$$\vec{AG'} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AC'} + \vec{AD'})$$

Và G là trọng tâm của tứ diện A'D'MN nên

$$\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AA'} + \vec{AD'} + \vec{AM} + \vec{AN})$$

Từ đó

$$\vec{GG'} = \vec{AG'} - \vec{AG}$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{A'B} + \vec{D'C} + \vec{MC'} + \vec{ND'})$$

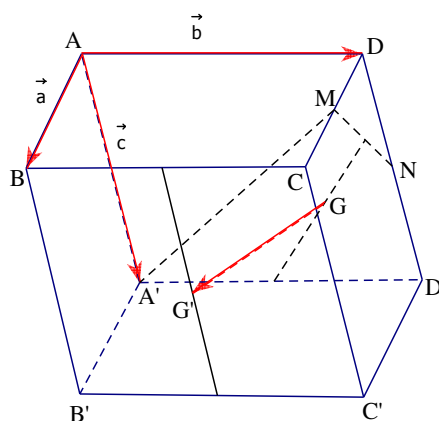
$$= \frac{1}{4}\left(\vec{a} - \vec{c} + \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(5\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{8}(5\vec{AB} - \vec{AA'})$$

Điều này chứng tỏ $\vec{AB}, \vec{AA'}, \vec{GG'}$ đồng phẳng.

Mặt khác G không thuộc mặt phẳng (ABB'A')

nên đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.



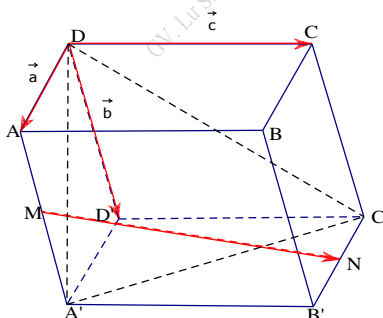
Bài 1.17. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AA' và B'C'. Chứng minh rằng đường thẳng MN và mặt phẳng (DA'C') song song với nhau.

HD & Giải

Chứng minh tương tự. Ta có

$$\vec{MN} = \vec{DC'} - \frac{1}{2}\vec{DA'}.$$

Vậy $\vec{MN}, \vec{DC'}, \vec{DA'}$ đồng phẳng
hay $MN \parallel (DA'C')$



Bài 1.18. Trong không gian cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mp(ABC) thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho

$$\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC} \text{ với mọi điểm O}$$

b) Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mp(ABC).

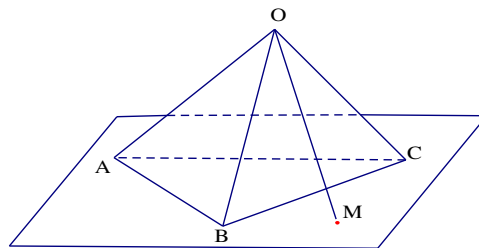
HD & Giải

a) Vì hai vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}$ không cùng phương nên điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có

$$\vec{AM} = l\vec{AB} + m\vec{AC} \text{ hay } \vec{OM} - \vec{OA} = l(\vec{OB} - \vec{OA}) + m(\vec{OC} - \vec{OA}) \text{ với mọi điểm O}$$

$$\text{Tức là } \vec{OM} = (1-l-m)\vec{OA} + l\vec{OB} + m\vec{OC}$$

$$\text{Đặt } 1-l-m = x, l = y, m = z \text{ thì } \vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC} \text{ với } x + y + z = 1$$



b) Từ $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với $x + y + z = 1$, ta có $\overrightarrow{OM} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

Hay $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$ Mà $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên M thuộc mp(ABC)

Lưu ý: Kết quả trên chứng tỏ x, y, z không phụ thuộc vào vị trí điểm

Bài 1.19. Cho hình chóp S.ABC. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = a.SA'$, $SB = b.SB'$, $SC = c.SC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'B'C') đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

HD & Giải

Vì các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = a.SA'$, $SB = b.SB'$, $SC = c.SC'$

Nên $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$

Vậy $\overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$

Mặt phẳng (A'B'C') đi qua G khi và chỉ khi bốn điểm G, A', B', C' đồng phẳng; nên theo bài 1.18 nêu

trên, điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 1$, tức là $a + b + c = 3$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. D. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

Câu 2. Cho tứ diện ABCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$. B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.
C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.

Câu 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' tâm O. Gọi I là tâm của hình bình hành ABCD. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó

- A. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.
C. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Câu 4. Cho hình hộp ABCD.A₁B₁C₁D₁. Gọi M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$. B. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$.
C. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$. D. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.

B. G, S, O không thẳng hàng.

C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$.

D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là sai ?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.

B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của $B'C'$, K là giao điểm của $A'I$ và $B'D'$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c})$.

B. $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{DK} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{DK} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{B'C}$ theo các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABEF$ và K là tâm của hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.B. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.C. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.D. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\overrightarrow{BD'} = 4\overrightarrow{BG}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = 4\overrightarrow{AG}$.

Câu 12. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vector $\overrightarrow{AG'}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

B. $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$.

C. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$.

D. $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Khẳng định nào dưới đây là sai ?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây là sai ?

A. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$. B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$. C. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$. D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

Câu 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$.

- A. $k = 2$. B. $k = 1$. C. $k = 0$. D. $k = 4$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$. B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.
C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$. D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. N là trung điểm BD .
B. N trùng với A .
C. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.
D. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BCDN$.

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$.

- A. $k = 2$. B. $k = 1$. C. $k = 4$. D. $k = 0$.

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương.

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. B. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. D. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Câu 24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức vector $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm CC' . B. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.
C. M là trung điểm BB' . D. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. B. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	B	C	A	D	A	A	B	B	C	D	D	A	C	A	D	B	D	A	C	B	C	C	A

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Tích vô hướng của hai vector trong không gian

1. Góc giữa hai vector trong không gian

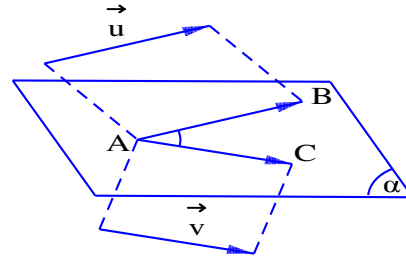
Định nghĩa: Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vector khác vector_không. Lấy một điểm A bất

kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và

$\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc

$\widehat{BAC} (0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 90^\circ)$ là góc giữa hai vector $\vec{u}$

và $\vec{v}$ trong không gian, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$



2. Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác vector_không.

Tích vô hướng của hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$ được xác định bởi

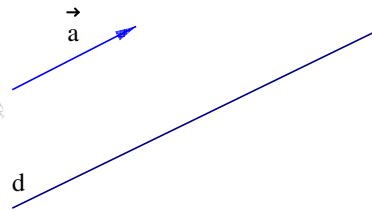
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ ta qui ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

II. Vector chỉ phương của đường thẳng

1. Định nghĩa

Vector $\vec{a}$ khác vector_không được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vector $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.



2. Nhận xét

- Nếu $\vec{a}$ là vector chỉ phương của đường thẳng d thì vector $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vector chỉ phương của đường thẳng d

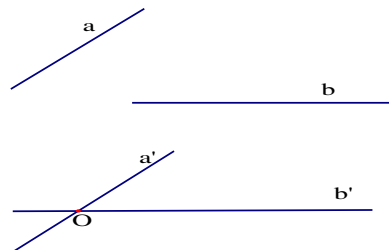
- Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vector chỉ phương $\vec{a}$ của nó.

III. Góc giữa hai đường thẳng

1. Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và song song hoặc trùng với a và b

Kí hiệu: $\alpha = (\widehat{a; b})$, chú ý $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$



2. Nhận xét

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b, ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại

- Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90°

- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai vector chỉ phương của các đường thẳng a và b và $\alpha = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ thì góc giữa hai

đường thẳng bằng α nếu $\alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $\alpha > 90^\circ$

IV. Hai đường thẳng vuông góc

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°

Kí hiệu: $a \perp b$

2. Nhận xét

- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai vector chỉ phương của các đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Cho hai đường thẳng song song. Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Các dạng toán

Dạng 1: Tính góc giữa hai đường thẳng

PP: Để xác định góc giữa hai đường thẳng a, b kí hiệu $(\widehat{a; b})$, ta thực hiện:

- Lấy một điểm A bất kì, xác định a' qua A và $a' \parallel a$, b' qua A và $b' \parallel b$.

- Khi đó $(\widehat{a; b}) = (\widehat{a'; b'})$

- Lưu ý: Điểm A có thể lấy ngay trên một trong hai đường thẳng

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

PP: Để chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta thực hiện:

- Cách 1: Nếu hai đường thẳng a, b cắt nhau thì có thể áp dụng các phương pháp chứng minh vuông góc trong hình học phẳng

- Cách 2: Chứng minh $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là hai vector chỉ phương của a, b

- Cách 3: Chứng minh $\left. \begin{matrix} b \parallel c \\ a \perp c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \perp b$

B. BÀI TẬP

Bài 2.1. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vector $\vec{OM}$ và $\vec{BC}$

HD & Giải

$$\text{Ta có } \cos(\vec{OM}, \vec{BC}) = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{BC}}{|\vec{OM}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{BC}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}$$

Mặt khác

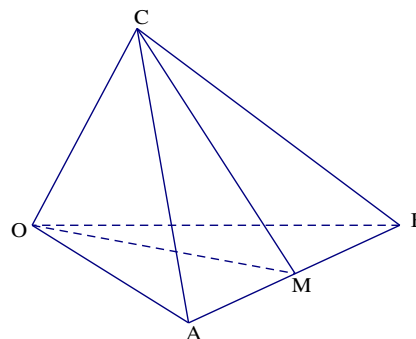
$$\begin{aligned} \vec{OM} \cdot \vec{BC} &= \frac{1}{2}(\vec{AO} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AO} \cdot \vec{OC} - \vec{AO} \cdot \vec{OB} + \vec{OB} \cdot \vec{OC} - \vec{OB} \cdot \vec{OB}) \end{aligned}$$

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = 1$ nên

$\vec{AO} \cdot \vec{OC} - \vec{AO} \cdot \vec{OB} + \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$ và

$$\vec{OB} \cdot \vec{OB} = 1. \text{ Do đó } \cos(\vec{OM}, \vec{BC}) = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } (\vec{OM}, \vec{BC}) = 120^\circ$$

$$\vec{OB}^2 = 1. \text{ Do đó } \cos(\vec{OM}, \vec{BC}) = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } (\vec{OM}, \vec{BC}) = 120^\circ$$



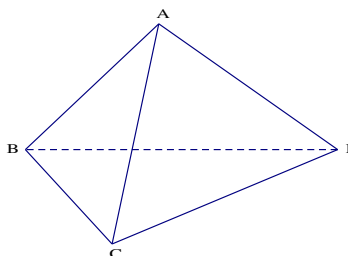
Bài 2.2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh là a . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

HD & Giải

Đặt $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{c}$

Ta có $\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = \vec{c} - \vec{b}$

$$\cos(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b})}{a \cdot |\vec{c} - \vec{b}|}$$



$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2}}{a^2} = 0 \quad \text{Vì } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a. \text{ Vậy } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ \text{ hay AB vuông góc với CD}$$

Bài 2.3. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a và BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

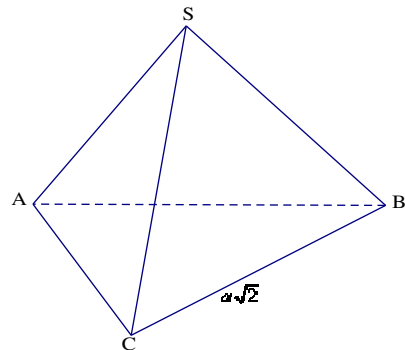
HD & Giải

$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{a \cdot a}$$

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a \cdot a}$$

Vì $CB^2 = a^2 + a^2 = AC^2 + AB^2$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Tam giác SAB đều nên $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$ và do đó $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$. Từ đó suy ra góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Bài 2.4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD và AC. Biết $AB = 2a, CD = 2a\sqrt{2}, MN = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

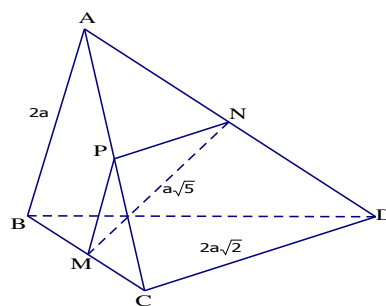
HD & Giải

Ta có PM là đường trung bình trong tam giác ABC và PN là đường trung bình trong tam giác ACD

Nên $PN = a\sqrt{2}, PM = a$ và $(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{PM, PN}) = \alpha$

$$\text{Ta lại có } \cos \alpha = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2 \cdot PM \cdot PN} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $\alpha = 135^\circ$. Vậy $(\widehat{AB, CD}) = 45^\circ$



Bài 2.5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD.

Biết $AB = CD = 2a; MN = a\sqrt{3}$. Tính $(\widehat{AB, CD})$.

HD & Giải

Gọi O là trung điểm của AC. Kẻ OM // AB, ON // CD. Khi đó

$$(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{OM, ON})$$

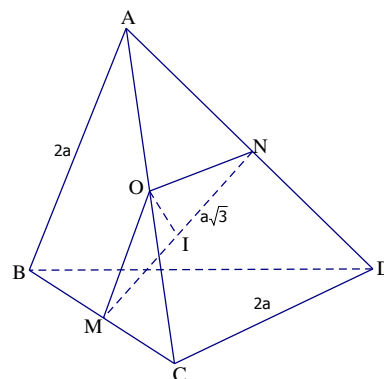
Ta có $OM = ON = a$. Gọi I là trung điểm MN khi đó $MI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $IO = \sqrt{OM^2 - MI^2} = \frac{a}{2}$. Do đó $\widehat{OMI} = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{MOI} = 60^\circ$

Vì tam giác OMN cân nên ta có $\widehat{MON} = 2\widehat{MOI} = 120^\circ$

Do vậy $(\widehat{AB, CD}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$



Bài 2.6. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều.

- a) Chứng minh rằng AB và CD vuông góc với nhau.
b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC, BD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

HD & Giải

a) Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ Đặt $AB = a$

ta có $AD = AB = AC = a$

Do đó

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

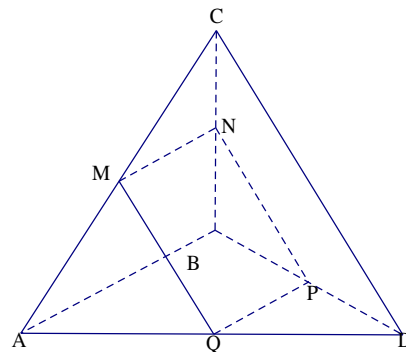
Vậy AB vuông góc với CD.

b) Ta có $MN \parallel PQ \parallel AB$ và $MN = PQ = \frac{AB}{2}$

Nên tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Vì $MN \parallel AB$ và $NP \parallel CD$ mà $AB \perp CD$

Nên tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.



Bài 2.7. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Chứng minh rằng:

- a) AB vuông góc với CD
b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $AB \perp MN$ và $MN \perp CD$

HD & Giải

a) Ta có

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Đặt $AB = a$ ta có $AD = AB = AC = a$. Do đó

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Vậy AB vuông góc với CD.

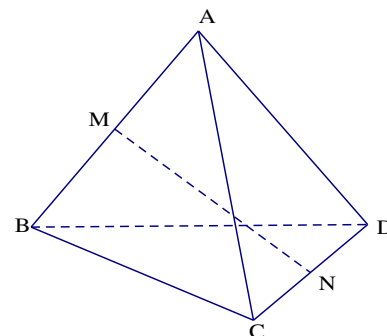
b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2)$

$$= \frac{1}{2} (AB^2 \cos 60^\circ + AB^2 \cos 60^\circ - AB^2) = 0$$

Do đó $AB \perp MN$

Chứng minh tương tự,

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0. \text{ Vậy } MN \perp CD$$



Bài 2.8. Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

HD & Giải

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sqrt{1 - \cos^2 A}$. Vì $\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$ nên

$$\sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{\frac{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2}}. \text{ Do đó } S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

Bài 2.9. Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^\circ$.

- a) Chứng minh rằng AC vuông góc với B'D'

b) Tính diện tích tứ giác A'B'CD

HD & Giải

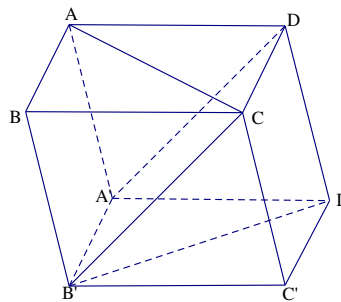
a) Ta có $AC \parallel A'C'$, $A'C' \perp B'D'$ (do $A'B'C'D'$ là hình thoi) nên $AC \perp B'D'$

b) Ta dễ thấy $A'B'CD$ là hình bình hành, ngoài ra $B'C = CD = a$ nên $A'B'CD$ là hình bình thoi. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BA} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0\end{aligned}$$

Do đó, ta có $CB' \perp CD$. Suy ra $A'B'CD$ là hình vuông

Vậy diện tích của hình vuông $A'B'CD$ bằng a^2 (đvdt)



Bài 2.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, mặt bên tam giác SAB là tam giác vuông tại A . Với mọi điểm M bất kỳ thuộc cạnh AD (M khác A và D), xét mặt phẳng α đi qua M và song song với SA, CD .

a) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng α là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và b , biết $AB = a, SA = b$, M là trung điểm của AD

HD & Giải

a) Dễ thấy thiết diện là tứ giác $MNPQ$ trong đó $MN \parallel QP \parallel CD$, MQ

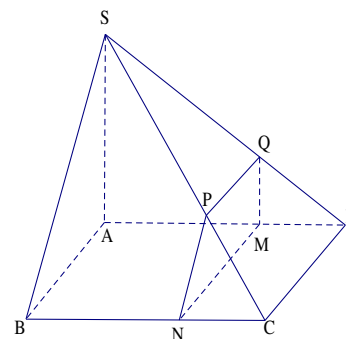
$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ MQ \parallel SA \Rightarrow MN \perp MQ \\ AB \perp SA \end{cases}$$

Nên thiết diện $MNPQ$ là hình thang vuông tại M

b) Ta có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ) \cdot MQ$

Do M là trung điểm của AD nên $MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}b$,

$PQ = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a$, $MN = a$. Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{b}{2} = \frac{3ab}{8}$ (đvdt)



Bài 2.11. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DAB là hai tam giác đều cạnh bằng a , $DC = a\sqrt{2}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AB và CD

b) Chứng minh AN vuông góc với BN

c) Tính góc giữa DA và BC

HD & Giải

a) Ta có $DM = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

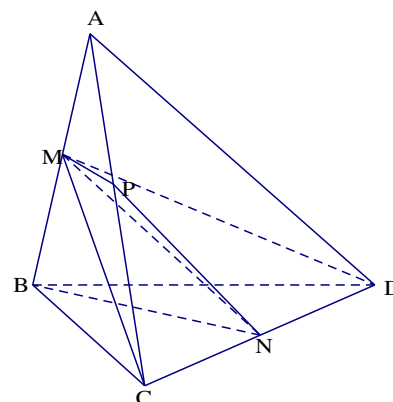
Suy ra $\triangle CMD$ là tam giác cân. Do đó $MN \perp CD$

Xét trong tam giác vuông CMN , ta có $MN^2 = CM^2 - CN^2 = \frac{a^2}{4}$ và

$$BN^2 = \frac{a^2}{2}$$

Suy ra $BM^2 + MN^2 = \frac{a^2}{2} = BN^2$. Vậy $MN \perp BM$ hay $MN \perp AB$

Do đó MN là đường vuông góc chung của AB và CD .



b) Ta có $BN = AN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $BN^2 + AN^2 = a^2 = AB^2$. Vậy $AN \perp BN$

c) Gọi P là trung điểm của AC. Suy ra $MP \parallel BC$, $PN \parallel AD$. Vậy $(\widehat{AD, BC}) = (\widehat{MP, PN})$

Ta có $MP = PN = MN = \frac{a}{2}$. Suy ra tam giác MNP là tam giác đều. Do đó $(\widehat{AD, BC}) = (\widehat{MP, PN}) = 60^\circ$

Bài 2.12. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a .

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tính độ dài của vector $\overrightarrow{IJ}$

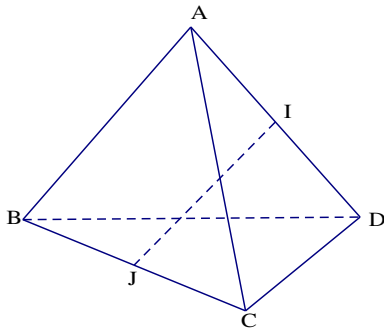
HD & Giải

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ Vì

ABCD là tứ diện đều nên $AB = AC = AD = a$ và

$$(\widehat{AB, AD}) = (\widehat{AB, AC}) = 60^\circ$$

Nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$



b) Ta có $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

Vậy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ}^2 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})^2 \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + a^2) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{IJ}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x \cdot BC$ ($0 < x < 1$). Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9.

B. 11.

C. 10.

D. 8.

Câu 2. Cho tứ diện ABCD có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 3. Cho tứ diện ABCD đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 60° .

B. 0° .

C. 30° .

D. 90° .

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Câu 5. Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC.

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. M là trực tâm tam giác ABC.

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

- A. 45° . B. 120° . C. 90° . D. 60° .

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai**?

- A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90° . B. Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60° .
C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45° . D. Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90° .

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng :

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. B. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. D. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD . Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là:

- A. $\frac{17}{3}$. B. $\frac{16}{3}$. C. 5. D. 6.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 120° .

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

- A. 120° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB .

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD . Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình thang. B. Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. D. Tứ giác không phải hình thang.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

- A. 60° . B. 90° . C. 120° . D. 45° .

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{JF})$ bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

- A. 45° . B. 120° . C. 90° . D. 60° .

Câu 18. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình chữ nhật. B. Hình vuông. C. Hình thang. D. Hình bình hành.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

- A. $a^2\sqrt{3}$. B. a^2 . C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $a^2\sqrt{2}$.

Câu 20. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

B. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

C. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c .

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN .

A. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

B. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

C. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{BB'D}$.

B. $\widehat{BDB'}$.

C. $\widehat{AB'C}$.

D. $\widehat{DA'C'}$.

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD , AD , AC lần lượt tại M , N , Q . Diện tích $MNPQ$ bằng:

A. $2\sqrt{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 30° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$.

B. a^2 .

C. $\frac{3}{4}a^2$.

D. $a^2\sqrt{2}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC .

A. 90° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Câu 27. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. 30° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 60° .

Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 120° .

B. 45° .

C. 90° .

D. 60° .

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 30. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	D	D	A	A	C	B	C	A	B	C	D	B	C	B
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	C	A	B	C	D	D	A	B	A	A	B	D	D	B

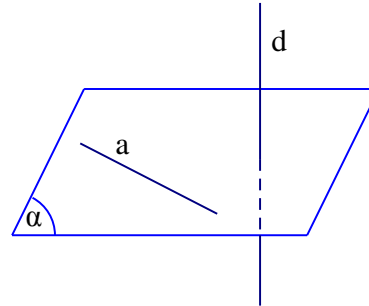
§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) .

Khi đó ta nói (α) vuông góc với d và kí hiệu $(\alpha) \perp d$ hoặc $d \perp (\alpha)$. Mỗi vectơ chỉ phương của đường thẳng d còn được gọi là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

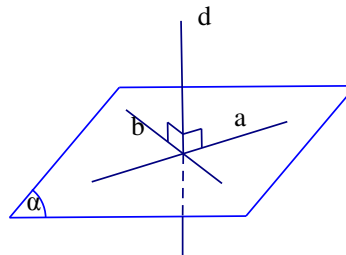


II. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định lí

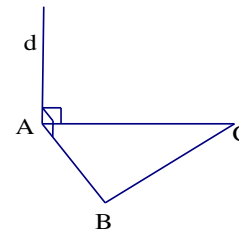
Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

$$\left. \begin{array}{l} d \perp a, d \perp b \\ \text{Nghĩa là: } a \cap b = M \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$



Hệ quả:

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.



III. Tính chất

Tính chất 1. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Mặt phẳng trung trực:

Mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Tính chất 2. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

IV. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Tính chất 1.

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

$$\left. \begin{array}{l} a // b \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp (\alpha)$$

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ \text{Nghĩa là: } b \perp (\alpha) \\ a \neq b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

Tính chất 2.

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này cũng vuông góc với mặt phẳng kia

$$\text{Nghĩa là: } \left. \begin{array}{l} (\alpha) // (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau

$$\text{Nghĩa là: } \left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

Tính chất 3.

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .

$$\text{Nghĩa là: } \left. \begin{array}{l} (\alpha) // a \\ b \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp a$$

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

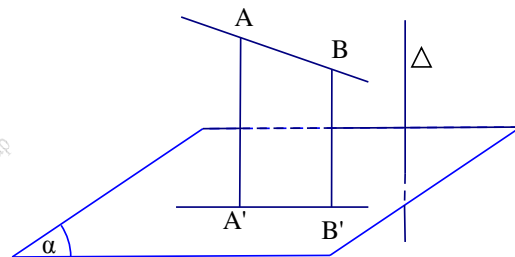
$$\text{Nghĩa là: } \left. \begin{array}{l} a \perp d \\ (\alpha) \perp d \\ a \not\subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) // a$$

V. Phép chiếu vuông góc và định lý ba đường vuông góc.

1. Phép chiếu vuông góc

- Cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) . Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α) .

- Phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song



2. Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc mặt phẳng (α) đồng thời không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .

Nghĩa là: Với b' là hình chiếu vuông góc của b lên (α) thì: $b \perp a \subset (\alpha) \Leftrightarrow b' \perp a$

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α)

- Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90° .

- Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa đường thẳng d và hình chiếu d' của nó lên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

Lưu ý: Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có: $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$

Các dạng toán

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

PP: Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α)

- Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) .
- Chứng minh đường thẳng d song song với đường thẳng a mà a vuông góc với (α) .
- Chứng minh đường thẳng d vuông góc với $mp(\beta)$ mà $mp(\beta)$ song song với $mp(\alpha)$

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

PP: Để chứng minh hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau:

- Áp dụng các phương pháp nêu trong §2
- Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) chứa đường thẳng b .
- Sử dụng định lý ba đường vuông góc

Dạng 3. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước
PP: Cho khối đa diện (S) , tìm thiết diện của (S) tạo bởi mặt phẳng (α) qua một điểm M cho trước và vuông góc với đường thẳng Δ cho trước.

Cách 1. Tìm hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a, b cùng vuông góc với Δ . Khi đó $mp(\alpha)$ qua M và (α) song song hoặc chứa a hay b . (Áp dụng TC3b)

Từ đó ta quy về dạng tìm thiết diện theo quan hệ song song

Cách 2. Xác định $mp(\alpha)$ bằng cách dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với đường thẳng Δ , trong đó có ít nhất một đường thẳng qua M . Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là $mp(\alpha)$ và quy về dạng tìm thiết diện theo quan hệ song song.

Dạng 4. Xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng α .

- Nếu $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow (d; (\alpha)) = 90^\circ$

- Nếu $d \not\perp (\alpha) \Rightarrow (d; d') = (d; (\alpha))$ với d' là hình chiếu vuông góc của d lên (α)

B. BÀI TẬP

Bài 3.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$

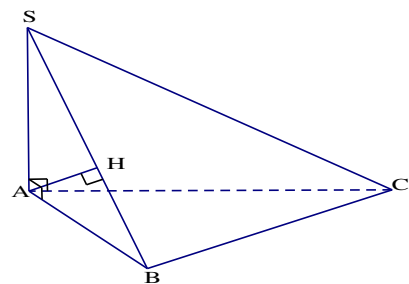
b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp SC$

HD & Giải

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ và $BC \perp AB$ (ΔABC vuông tại B). Từ đó suy ra $BC \perp (SAB)$

b) Vì $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$ và $AH \perp SB$

Nên $AH \perp (SBC)$. Từ đó suy ra: $AH \perp SC$



Bài 3.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD .

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$ và $BD \perp (SAC)$

c) Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc (AHK)

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$, từ đó suy ra $HK \perp AI$

HD & Giải

a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$

Ta có $BC \perp AB$ (vì $ABCD$ là hình vuông)
 $BC \perp SA$ (Vì $SA \perp (ABCD)$ và BC thuộc $(ABCD)$)

Từ đó suy ra: $BC \perp (SAB)$

Chứng minh: $CD \perp (SAD)$.

Làm tương tự như trên:

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$

Chứng minh: $BD \perp (SAC)$.

Làm tương tự như trên:

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

b) Chứng minh $SC \perp (AHK)$

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp (SAB) \\ AH \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp AH \text{ và theo giả thiết}$$

$SB \perp AH$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC)$

Vì $SC \subset (SBC)$ nên $AH \perp SC$ (1). Lập luận tương tự ta chứng minh được $AK \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $SC \perp (AHK)$ (Vì hai đường thẳng AH, AK cắt nhau và cùng vuông góc với SC nên chúng nằm trong mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC)

Ta có $AH \subset (AHK)$ vì nó đi qua điểm A và cùng vuông góc với SC. Vậy điểm I thuộc (AHK)

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$, từ đó suy ra $HK \perp AI$

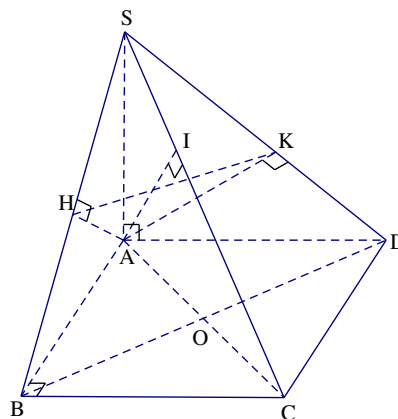
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau vì chúng có chung cạnh SA và $AB = AD$ (c.g.c).

Do đó $SB = SD$, $SH = SK$ nên $HK \parallel BD$

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $HK \perp (SAC)$. Do

$AI \subset (SAC)$ nên $HK \perp AI$



Bài 3.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O và có $SA = SC$, $SB = SD$.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. CMR: $IK \perp (SBD)$; $IK \perp SD$

HD & Giải

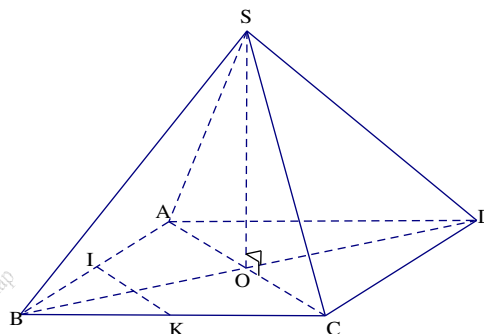
a) Ta có O là tâm của hình thoi nên O là trung điểm của AC. Tam giác SAC có $SA = SC$ nên $SO \perp AC$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$. Từ đó suy ra: $SO \perp (ABCD)$

b) Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \quad (1)$

Ta lại có: IK là đường trung bình trong tam giác BAC nên $IK \parallel AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IK \perp (SBD)$

Hơn nữa $SD \subset (SBD)$ nên $IK \perp SD$



Bài 3.4. Cho tứ diện ABCD có hai mặt bên ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng: $BC \perp (ADI)$

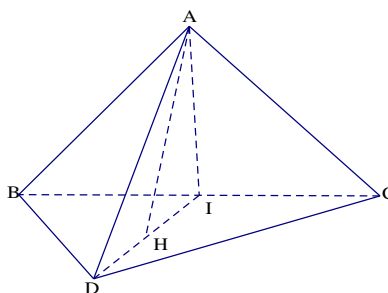
b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh rằng: $AH \perp (BCD)$

HD & Giải

a) Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADI)$

b) Ta có $\begin{cases} BC \perp (ADI) \\ AH \subset (ADI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$

Mà $DI \perp AH$ nên $AH \perp (BCD)$



Bài 3.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh rằng: $SO \perp (ABCD)$

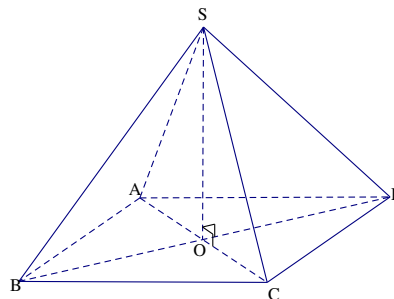
b) Chứng minh rằng: $AC \perp (ABD)$ và $BD \perp (SAC)$

HD & Giải

$$a) \text{ Ta có } \left. \begin{array}{l} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

$$b) \left. \begin{array}{l} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)$$

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$



Bài 3.6. Cho tứ diện đều ABCD. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

HD & Giải

Giả sử ta cần chứng minh $AB \perp CD$.

Gọi I là trung điểm của cạnh AB.

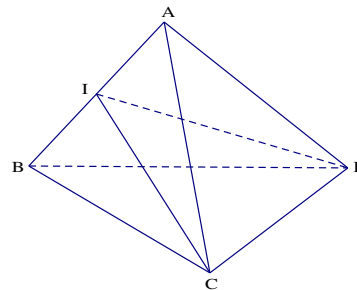
Ta có

$$\left. \begin{array}{l} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (CID)$$

Mà $CD \subset (CID)$ nên $AB \perp CD$

Chứng minh tương tự ta có $BC \perp AD$ và

$AC \perp BD$



Bài 3.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chứng minh các mặt bên của hình chóp đã cho là những tam giác vuông.

HD & Giải

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$ và $SA \perp AD$. Nên các tam giác SAB và SAD là các tam giác vuông tại A.

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

Vậy tam giác SBC vuông tại B

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \text{ Vậy tam giác SCD vuông tại D}$$

Một cách khác để chứng minh SCD vuông tại D

Đường thẳng SD có hình chiếu lên mp(ABCD) là AD.

Theo định lý ba đường vuông góc vì $CD \perp AD$ nên $CD \perp SD$

Khi đó ta có tam giác SCD vuông tại D.

Bài 3.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, có cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mp(ABCD)

a) Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các đường thẳng SB và SD. Chứng minh rằng $MN \parallel BD$ và tính góc giữa đường thẳng SC và mp(AMN)

b) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Chứng minh rằng tứ giác AMKN có hai đường chéo vuông góc

c) Tính góc giữa đường thẳng SC và mp(ABCD).

HD & Giải

a) i) Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau, có đường cao tương ứng là AM và AN

nên $BM = DN$

Mặt khác, tam giác SBD cân tại S nên $MN \parallel BD$

$$\text{ii) Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Từ đó suy ra $BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$

Nên $AM \perp (SBC)$. Do đó $AM \perp SC$

Tương tự ta cũng có: $AN \perp SC$

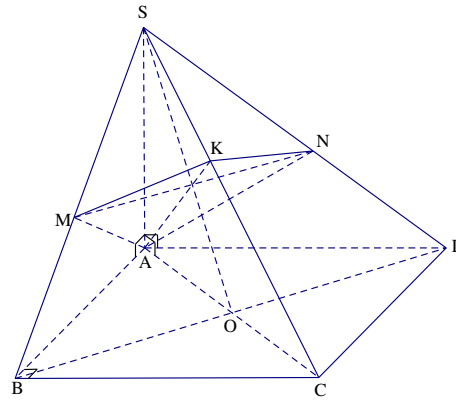
Vậy $SC \perp (AMN)$. Do đó góc giữa đường thẳng SC và mp(AMN) là 90°

$$\text{b) Ta có } \left. \begin{array}{l} MN \parallel BD \\ BD \perp (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \perp (SAC)$$

Từ đó suy ra $MN \perp AK$ (đpcm)

c) Ta có AC là hình chiếu của SC lên

mp(ABCD) nên $\widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC với mp(ABCD). Tam giác SAC vuông cân tại A có $SA = a\sqrt{2}$
Do đó $\widehat{SCA} = 45^\circ$



Bài 3.9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi và có SA vuông góc với mp(ABCD). Gọi I, K là hai điểm lần lượt lấy trên cạnh SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh rằng:
a) BD vuông góc với SC
b) IK vuông góc với mặt phẳng (SAC)

HD & Giải

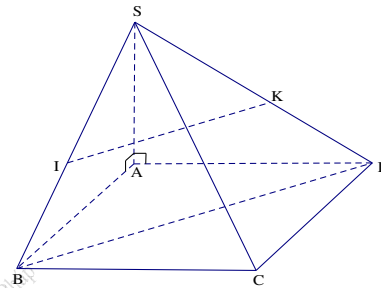
a) Ta có $\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp BD$

Mà $BD \perp AC$ (ABCD là hình thoi)

Suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

b) Ta có $BD \perp (SAC)$ và $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow IK \parallel BD$

Suy ra $IK \perp (SAC)$



Bài 3.10. Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng(ABC) và tam giác ABC vuông tại B. Trong mp(SAB) ta kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$

b) $SB \perp AN$

HD & Giải

a) $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\left. \begin{array}{l} BC \perp AM \\ SB \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (SBC)$

b) Ta có $BC \perp SB$ mà $MN \parallel BC$

Suy ra $\left. \begin{array}{l} MN \perp SB \\ SB \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow SB \perp (AMN) \Rightarrow SB \perp AN$

Bài 3.11. Cho hình tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc

a) Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn

b) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mp(ABC) trùng với trực tâm của tam giác ABC

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

HD & Giải

a) Đặt $OA = a; OB = b; OC = c$

Khi đó ta có:

$$AB^2 = a^2 + b^2; AC^2 = a^2 + c^2; BC^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2a^2}{2AB \cdot AC} > 0$$

Vậy A là góc nhọn

Tương tự, B và C là các góc nhọn. Vậy các góc của tam giác ABC đều nhọn

b) Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$

Vì H là hình chiếu của điểm O trên mp(ABC) nên $OH \perp (ABC)$

Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $AH \perp BC$

Tương tự, ta chứng minh được $BH \perp AC$

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC

c) Gọi M là giao điểm của AM và BC

Ta có $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OM$

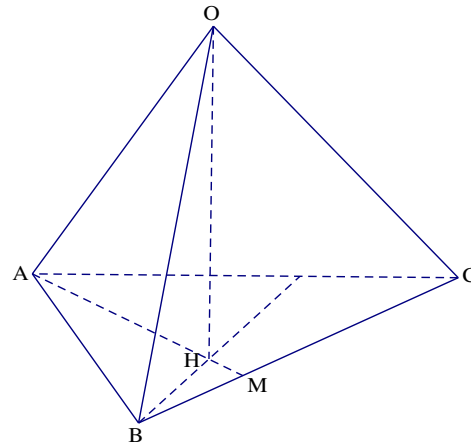
Mặt khác, $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OM$ và $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AM$

Vậy, xét trong tam giác vuông OAM, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2} \text{ và trong tam giác}$$

$$\text{vuông OBC, ta có } \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\text{Từ đó, ta suy } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$



Bài 3.12. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp mp(ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy

b) $SC \perp mp(BHK)$

c) $HK \perp mp(SBC)$

HD & Giải

a) Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC. Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA' \perp BC$ (Định lí ba đường vuông góc). Vì H là trực tâm của tam giác ABC, K là trực tâm của tam giác SBC nên H thuộc AA', K thuộc SA'. Vậy AH, SK và BC đồng quy tại A'.

b) Do H là trực tâm của tam giác ABC,

$$\text{ta có } \begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC)$$

Suy ra $BH \perp SC$ (1)

Mặt khác, K là trực tâm của tam giác SBC, nên $BK \perp SC$ (2)

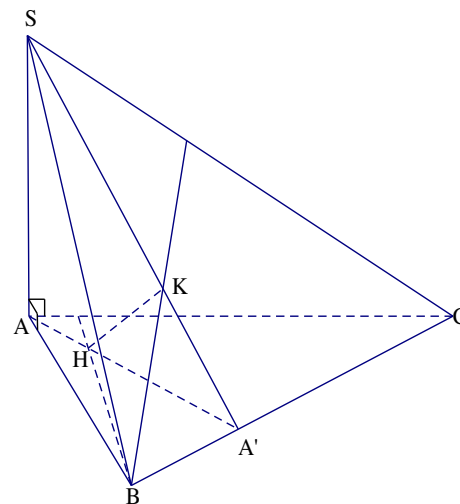
Vậy, từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BHK)$

c) Từ câu b) suy ra $HK \perp SC$ (1)

$$\text{Mặt khác, ta có } \begin{cases} SA' \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAA')$$

Suy ra $HK \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp mp(SBC)$



Bài 3.13. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $SA \perp mp(ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. M là điểm tùy ý trên cạnh AB sao cho $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

a) Tìm thiết diện của tứ diện tạo bởi (α) .

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích của thiết diện có giá trị lớn nhất.

HD & Giải

Vậy

$$\text{a) Ta có } \left. \begin{array}{l} SA \perp AB \\ BC \perp AB \\ \alpha \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SA // \alpha, BC // \alpha$$

$$\alpha \cap (SAB) = MQ // SA, (Q \in SB)$$

$$\alpha \cap (ABC) = MN // BC, (N \in AC)$$

$$\alpha \cap (SAC) = NP // SA, (P \in SC)$$

$$\alpha \cap (SBC) = QP // BC$$

Do đó, thiết diện cần tìm là tứ giác MNPQ

b) Ta có $MQ // NP // SA$, $MN // QP // BC$, suy ra MNPQ là hình bình hành

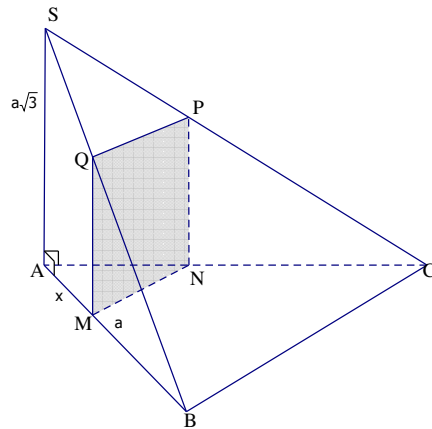
$$\text{Mặt khác, } \begin{cases} MQ // SA \\ MN // BC \\ SA \perp BC, (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow MQ \perp MN$$

Vậy tứ giác MNPQ là hình chữ nhật

$$\text{Khi đó } S_{MNPQ} = MQ.MN$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{MQ}{SA} &= \frac{BM}{BA} \Rightarrow MQ = \frac{SA.BM}{BA} \\ &= \frac{a\sqrt{3}(a-x)}{a} = \sqrt{3}(a-x) \end{aligned}$$



$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \frac{BC.AM}{AB} = \frac{a.x}{a} = x$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \sqrt{3}x(a-x) \text{ (đvdt)}$$

Mặt khác, ta có

$$\sqrt{3}x(a-x) \leq \sqrt{3} \cdot \left(\frac{x+a-x}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$\text{Hay } S_{MNPQ} \leq \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

Vậy S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ khi

$$x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Bài 3.14. Cho tứ diện ABCD trong đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng α . Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh AC, đặt $AM = x (0 < x < AC)$. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với AB và CD.

a) Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(P) đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng chu vi thiết diện nêu trên không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $AB = CD$.

HD & Giải

a) Mặt phẳng (P) cắt tứ diện ABCD theo thiết diện là hình bình hành MNPQ

$$\text{Ta có } S_{MNPQ} = NM.NP \sin(\widehat{MNP})$$

Do $MN // AB$, $NP // CD$ nên góc giữa MN và NP bằng góc giữa AB và CD, do đó

$$\sin(\widehat{MNP}) = \sin \alpha$$

Ta lại có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} = \frac{AC-x}{AC} \Rightarrow MN = \frac{AB}{AC}(AC-x)$$

$$\frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{AC} \Rightarrow MQ = \frac{CD}{AC}x$$

$$NP = MQ$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{AB.CD}{AC^2}(AC-x)x \sin \alpha$$

Từ đó diện tích thiết diện MNPQ đạt giá trị lớn

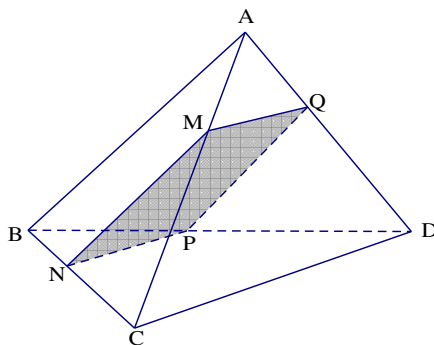
nhất khi và chỉ khi $x = \frac{AC}{2}$

Vậy, khi M là trung điểm của AC thì diện tích thiết diện của tứ diện ABCD cắt bởi (P) đạt giá trị lớn nhất.

b) Gọi p là nửa chu vi của thiết diện, khi đó

$$\begin{aligned} p &= MN + MQ = \frac{AB}{AC}(AC-x) + \frac{CD}{AC}x \\ &= \frac{CD-AB}{AC}x + AB \end{aligned}$$

Từ đó, chu vi thiết diện không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $CD - AB = 0$ hay $AB = CD$



Bài 3.15. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành với $AB = 2a; AD = a$. SAB là tam giác vuông cân tại A. Gọi M là một điểm trên cạnh AD với $AM = x (0 < x < a)$, (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB).

- a) Chứng minh rằng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình thang vuông
b) Tính diện tích của thiết diện đó theo a và x .

HD & Giải

- a) Vì M là điểm chung của α và mặt phẳng (ABCD); $\alpha \parallel (SAB)$ và $(ABCD) \cap (SAB) = AB$

Do đó $\alpha \cap (ABCD) = MN \parallel AB, (N \in BC)$

Tương tự: $\alpha \cap (SAD) = MQ \parallel SA, (Q \in SD)$

$\alpha \cap (SBC) = NP \parallel SB, (P \in SC)$

$\alpha \cap (SDC) = PQ \parallel DC$

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MNPQ

Hơn nữa:

$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ PQ \parallel CD (\parallel AB) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ \text{ và}$$

$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ MQ \parallel SA \Rightarrow MN \perp MQ \\ AB \perp SA \end{cases}$$

Từ đó suy ra MNPQ là hình thang vuông

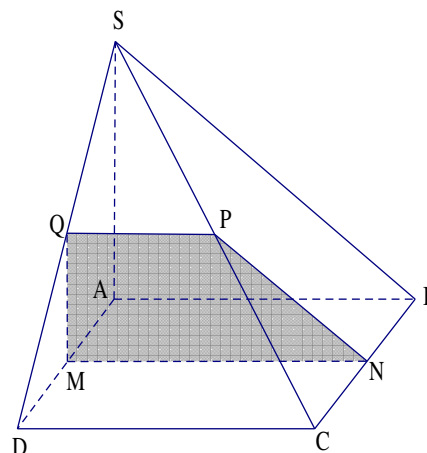
b) Ta có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (MN + PQ) \cdot MQ$

Mà $\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} \Rightarrow MQ = \frac{SA \cdot DM}{DA} = 2(a - x)$

$$\frac{PQ}{DC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow PQ = \frac{DC \cdot AM}{AD} = 2x$$

$$MN = 2a$$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (2a + 2x) 2(a - x) = 2(a^2 - x^2)$
(đvdt)



Bài 3.16. Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC đều cạnh a . $DA \perp (ABC)$ và $DA = 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua B và vuông góc với DC. Tìm thiết diện của tứ diện với (α) và tìm diện tích của thiết diện đó.

HD & Giải

Gọi M là trung điểm của AC, khi đó:

$$\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp DA (\text{do } DA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (ADC)$$

Vậy $BM \perp DC$

Dựng $MN \perp DC$ tại N ($N \in CD$)

Suy ra $DC \perp (BMN)$ hay $\alpha \equiv (BMN)$

Như vậy, thiết diện cần tìm là tam giác BMN

Vì $BM \perp (ADC)$ nên $BM \perp MN \subset (DAC)$

Do vậy $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} BM \cdot MN$ trong đó

$$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

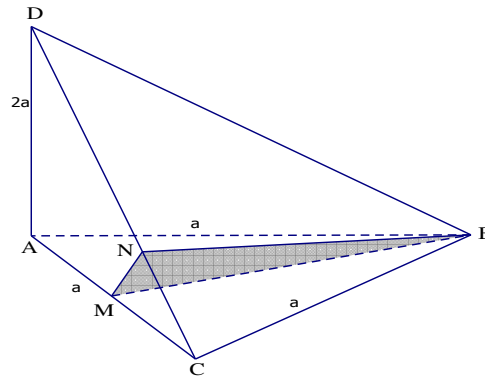
Mặt khác, xét hai tam giác vuông CMN và CAD có chung góc C, nên $\triangle CMN \sim \triangle CAD$

Suy ra

$$\frac{MN}{DA} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow MN = \frac{DA \cdot CM}{CD}$$

$$= \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20} \text{ (đvdt)}$$



Bài 3.17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông ở A và B, với $AB = BC = a$, $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = x (0 \leq x \leq a)$. Gọi α là mặt phẳng qua M, vuông góc với AB.

a) Tìm thiết diện của α với hình chóp S.ABCD. Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x .

HD & Giải

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ \alpha \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow BC // \alpha, SA // \alpha$$

Vậy

$$\alpha \cap (SAB) = MN // SA, (N \in SB)$$

$$\alpha \cap (ABCD) = MQ // BC, (Q \in CD)$$

$$\alpha \cap (SBC) = NP // BC, (P \in SC)$$

$$\alpha \cap (SBC) = NP // BC$$

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MNPQ

Hơn nữa, $MQ // NP (// BC)$. Suy ra MNPQ là hình thang

$$\text{Mặt khác: } \left\{ \begin{array}{l} MN // SA \\ MQ // BC \\ SA \perp BC, (SA \perp (ABCD)) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow MQ \perp MN$$

Vậy: Tứ giác MNPQ là hình thang vuông

$$\text{b) Tính } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MN \cdot (MQ + NP)$$

$$\text{Ta có } \frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \frac{SA \cdot BM}{BA} = 2(a - x)$$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow NP = x$$

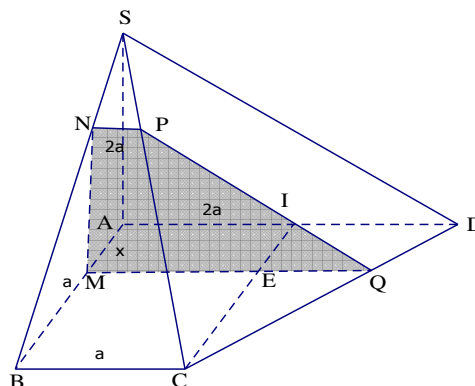
Gọi I là trung điểm AD và $E = MQ \cap CI$

Ta có:

$$\frac{EQ}{ID} = \frac{CE}{CI} \Rightarrow EQ = \frac{ID \cdot CE}{CI} = \frac{a(a - x)}{a} = a - x$$

$$\text{đó } MQ = ME + EQ = 2a - x$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = (a - x)(2a - x + x) = 2a(a - x) \text{ (đvdt)}$$



Bài 3.18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$. $AD = DC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Gọi E là trung điểm của SA. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm E và song song với AB cắt các cạnh SB, BC, AD lần lượt tại M, N, F.

a) Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi (P) là hình gì?

b) Tính diện tích của thiết diện nói trên theo a và x , với $x = AF$

HD & Giải

- a) Mặt phẳng (P) qua điểm E và song song với AB nên ta có,
 $(P) \cap (SAB) = EM, (EM \parallel AB)$
 $(P) \cap (ABCD) = FN, (FN \parallel AB)$

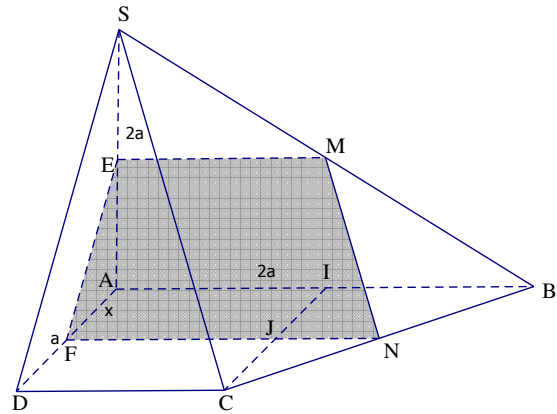
Vậy thiết diện cần tìm là hình thang EFMN
 Hơn nữa, $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp EF$
 Như vậy thiết diện MNFE là hình thang vuông tại E và F. Khi F trùng với D thì thiết diện là hình chữ nhật

b) Tính $S_{MNFE} = \frac{1}{2} EF \cdot (EM + FN)$

Ta có $EM = a, EF = \sqrt{a^2 + x^2}$. Gọi I là trung điểm của AB thì $IA = IB = a$
 Gọi J là giao điểm của FN và CI thì
 $FJ = AI = a, IJ = AF = x$
 Ta có

$$\frac{JN}{IB} = \frac{CJ}{CI} \Rightarrow JN = IB \cdot \frac{CJ}{CI} = a \cdot \frac{a-x}{a} = a-x$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S_{MNFE} &= \frac{1}{2} (a + 2a - x) \sqrt{a^2 + x^2} \\ &= \frac{(3a - x) \sqrt{a^2 + x^2}}{2} \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$



Bài 3.19. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC

- a) Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG
 b) Xét mặt (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại C_1 nằm giữa S và C. Khi đó, hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi (P).

HD & Giải

- a) Kẻ $SH \perp (ABC)$, do $SA = SB = SC$ nên ta có $HA = HB = HC$

Mặt khác, ABC là tam giác đều nên H trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.

Vậy $SG \perp (ABC)$

Xét tam giác vuông SAG, ta có

$$SG^2 = SA^2 - AG^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

$$\text{Suy ra } SG = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \text{ với } 3b^2 > a^2$$

- b) Vì (P) qua điểm A và vuông góc với SC nên AB nằm trong (P)

Do đó $AB \perp SC$

Kẻ đường cao AC_1 của tam giác SAC thì (P) chính là mp(ABC_1).

Do tam giác SAC cân tại S nên điểm C_1 nằm trên đoạn SC khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^\circ$

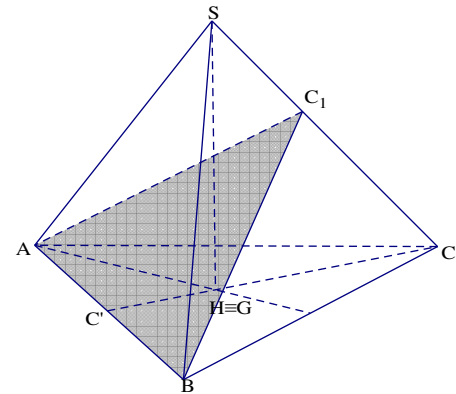
Điều này tương đương với $AC^2 < SA^2 + SC^2$ hay $a^2 < 2b^2$

Trong trường hợp này, thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (P) là tam giác cân ABC_1 .

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C'C_1 \text{ trong đó } AB = a, C' \text{ là trung điểm của } AB$$

Mặt khác, Xét trong tam giác $SC'C_1$, ta có $C'C_1 \cdot SC = SG \cdot CC'$

$$\text{Suy ra } C'C_1 = \frac{SG \cdot CC'}{SC} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{b} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b} \text{ Vậy } S_{\triangle ABC_1} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{4b} \quad (\text{đvdt})$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai ?

- A. $SC \perp BD$. B. $SO \perp BD$. C. $AD \perp SC$. D. $SA \perp BD$.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
 B. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β) .
 C. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ) .

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB . Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A. $CB \perp (SAC)$. B. Tam giác SDC vuông tại D .
 C. $CE \perp (SDC)$. D. $CE \perp (SAB)$.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) .
 B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α) .
 C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.
 D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB . Khẳng định nào dưới đây là sai ?

- A. $AH \perp SC$. B. $SA \perp BC$. C. $AH \perp BC$. D. $AH \perp AC$.

Câu 6. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau?

- A. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$. B. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.
 C. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$. D. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 7. Cho hình chóp (α) có đáy M là hình vuông. Mặt bên BC là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi $ABC.A'B'C'$ là góc giữa N và mặt phẳng (SAD) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, SB . Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

- A. $(IJK) \parallel (SAC)$. B. Góc giữa SC và BD bằng 60° .
 C. $BD \perp (IJK)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
 B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
 C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
 D. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\cot \varphi = \frac{5}{\sqrt{15}}$. B. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\varphi = 45^\circ$. B. $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\tan \varphi = 2$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD) .

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(A'CD')$. B. $(A'B'CD)$. C. $(A'BD)$. D. $(A'DC')$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) , khi đó

- A. I là trung điểm của AB . B. I là trọng tâm của tam giác ABC .
C. I là trung điểm của AC . D. I là trung điểm của BC .

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO . Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. B. $\tan \alpha = \sqrt{5}$. C. $\tan \alpha = 1$. D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a , SO vuông góc với đáy. Gọi M , N lần lượt là trung điểm SA và BC . Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Câu 17. Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$. B. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
C. H là trực tâm $\triangle ABC$. D. $OA \perp BC$.

Câu 18. Cho hai đường thẳng a , b và mặt phẳng (P) . Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$. B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$. D. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

Câu 19. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P) .

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b .

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC và $SH = \frac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC . Gọi α là góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

B. $\tan \alpha = \frac{2}{3}$.

C. $\tan \alpha = 1$.

D. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

Câu 21. Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$, $b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c) .

Câu 22. Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P) , đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

A. Δ vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P) .

B. Δ vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P) .

C. Δ vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P) .

D. Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P) .

Câu 23. Cho hình lập phương $MNQR$. Gọi α là góc giữa AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

C. $\alpha = 45^\circ$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng

A. $\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

B. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

C. $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

D. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 25. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BC \perp (SAH)$.

B. $SB \perp (CHK)$.

C. $HK \perp (SBC)$.

D. $BC \perp (SAB)$.

Câu 26. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . H là hình chiếu của O trên (ABC) . Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. H là trung điểm của cạnh BC .
- B. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- C. H là trọng tâm của tam giác ABC .
- D. H là trung điểm của cạnh AB .

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào dưới đây là sai ?

- A. $BC \perp SB$.
- B. Tam giác SCD vuông ở D .
- C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD .
- D. $IO \perp (ABCD)$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD) .

- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào dưới đây sai ?

- A. $CH \perp AK$.
- B. $CH \perp SB$.
- C. $CH \perp SA$.
- D. $AK \perp SB$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
- B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}$.
- C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$.
- D. $\tan \varphi = \sqrt{7}$.

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $A'A = A'B = A'D$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. trung điểm của AO .
- B. trọng tâm của tam giác ABD .
- C. tâm O của hình thoi $ABCD$.
- D. trọng tâm của tam giác BCD .

Câu 34. Mệnh đề nào sau đây sai ?

- A. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

Câu 35. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

- A. 45° .
- B. 60° .
- C. 90° .
- D. 30° .

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy (ABC)

- A. 60° .
- B. 90° .
- C. 30° .
- D. 45° .

Câu 37. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S . Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Độ dài cạnh SO bằng

- A. $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- B. $SO = a\sqrt{3}$.
- C. $SO = a\sqrt{2}$.
- D. $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác nhọn, cạnh bên $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) , khi đó

- A. H là trọng tâm của tam giác ABC .
- B. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- C. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- D. H là trực tâm của tam giác ABC .

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $CD \perp BD$.
- B. $AC = BD$.
- C. $AB = CD$.
- D. $AB \perp CD$.

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau. Điểm nào dưới đây các đều bốn đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$?

- A. Trung điểm của cạnh AD .
- B. Trọng tâm của tam giác ACD .
- C. Trung điểm của cạnh BD .
- D. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

- A. giao điểm của hai đường thẳng AC và BD .
- B. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- C. trọng tâm của tam giác ABC .
- D. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 42. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

- A. 90° .
- B. 30° .
- C. 45° .
- D. 60° .

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
- B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$.
- C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$.
- D. $\alpha = 30^\circ$.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, BD đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBD}$. B. Góc giữa AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ADB}$. D. Góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài các cạnh bên $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Độ dài đoạn thẳng SG bằng

- A. $\frac{\sqrt{9b^2 + 3a^2}}{3}$.
- B. $\frac{\sqrt{b^2 - 3a^2}}{3}$.
- C. $\frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$.
- D. $\frac{\sqrt{b^2 + 3a^2}}{3}$.

Câu 46. Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\varphi = 45^\circ$.
- B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{14}}{2}$.
- C. $\tan \varphi = \sqrt{7}$.
- D. $\varphi = 60^\circ$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $AB \perp (SAC)$.
- B. $CD \perp AC$.
- C. $SO \perp (ABCD)$.
- D. $CD \perp (SBD)$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\varphi = 45^\circ$.
- B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
- C. $\tan \varphi = \sqrt{5}$.
- D. $\varphi = 60^\circ$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

- A.** $SC \perp (AEC)$. **B.** $SC \perp (AED)$. **C.** $SC \perp (AEF)$. **D.** $SC \perp (AFB)$.

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\cos \alpha = 0$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	C	C	C	D	B	A	B	A	A	B	A	C	D	D	A	A	A	A	A	D	D	D	D	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	A	B	C	C	D	B	B	D	B	A	C	B	D	A	D	B	C	B	C	B	C	B	C	B

GV. Lư Sĩ Pháp

§4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

I. Góc giữa hai mặt phẳng

1. Định nghĩa:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow ((\alpha); (\beta)) = (a; b)$$

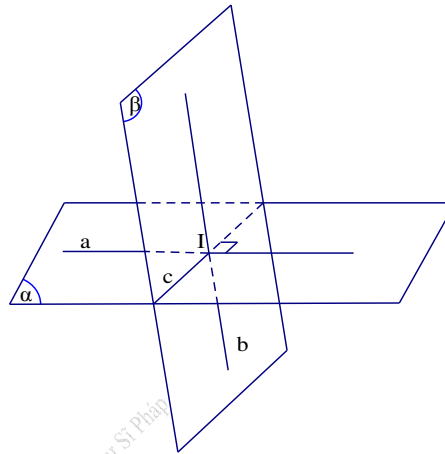
Nếu hai mặt phẳng đó song song hoặc trùng nhau thì ta nói rằng góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0° .

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

Khi hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo một giao tuyến là c , để tính góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (γ) vuông góc với c , lần lượt cắt (α) và (β) theo các giao tuyến a , b , lúc đó góc $((\alpha); (\beta)) = (a; b)$

Nghĩa là:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = c \\ (\gamma) \perp c \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{array} \right\} \Rightarrow ((\alpha); (\beta)) = (a; b)$$



Nói một cách khác: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến là c . Từ một điểm I bất kì trên c , ta dựng đường thẳng a trong (α) vuông góc với c và dựng đường thẳng b trong (β) vuông góc với c . Khi đó góc giữa (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b .

3. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Diện tích hình chiếu của đa giác: $S' = S \cos \varphi$

Với S là diện tích của đa giác nằm trong (P) , S' là diện tích hình chiếu vuông góc của đa giác đó trên (P') , φ là góc giữa (P) và (P')

II. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông. Kí hiệu $(\alpha) \perp (\beta)$ hoặc $(\alpha) \perp (\beta)$

2. Các định lý

Định lý 1:

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\text{Nghĩa là: } (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \exists d \subset (\alpha) : d \perp (\beta)$$

Hệ quả 1.

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Nghĩa là:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta); (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha); a \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta) \quad (\text{PP: Chứng minh đường thẳng vuông góc mp})$$

Hệ quả 2.

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng được một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong (α) .

Nghĩa là:
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta); A \in (\alpha) \\ A \in a \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset (\alpha)$$

Định lí 2.

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.

Nghĩa là:
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp (\gamma)$$

III. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

1. Định nghĩa

- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.
- Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật
- Hình lập phương là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.

2. Nhận xét

- Các mặt bên của hình lăng trụ đứng luôn luôn vuông góc với mặt phẳng đáy và là những hình chữ nhật.

IV. Hình chóp đều và hình chóp cắt đều

1. Hình chóp đều

- Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.
- Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

2. Hình chóp cắt đều

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cắt đều.

Các dạng toán

Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp: Dùng định nghĩa và Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp

Cách 1. Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia

Cách 2. Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90°

Dạng 3. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Phương pháp: Ngoài cách chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng trong bài 3, ta có thể vận dụng:

Cách 1: Chứng minh
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha); a \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$

Cách 2: Chứng minh
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp (\gamma)$$

Dạng 4. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước

Phương pháp: Để xác định thiết diện của một hình khối tạo bởi mp(α) qua a và (α) vuông góc với một mp(β) cho trước, ta thực hiện:

- Xác định mp(α) bằng cách từ một điểm trên a dựng đường thẳng b vuông góc với (β). Khi đó mp(α) xác định bởi 2 đường thẳng cắt nhau a và b.
- Qui về cách tìm thiết diện ở các phần trước đã học

B. BÀI TẬP

Bài 4.1. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{a}{2}$

- a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC)
b) Tính diện tích tam giác SBC

HD & Giải

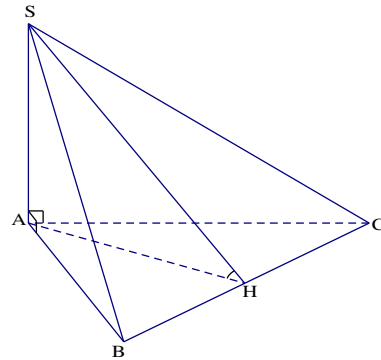
a) Gọi H là trung điểm của BC. Ta có
 $BC \perp AH$ (1)
Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC)
bằng $\widehat{SHA} = \varphi$

$$\tan \varphi = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình
chiếu vuông góc của tam giác SBC. Gọi S_1, S_2
lần lượt là diện tích của tam giác SBC và ABC.
Ta có

$$S_2 = S_1 \cos \varphi \Rightarrow S_1 = \frac{S_2}{\cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2} \text{ (đv}$$

dt)



Bài 4.2. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

- a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mp(SBC)
b) Tính góc giữa hai mp(SMN) và mp(SBC)

HD & Giải

a) Ta có $(SAC) \cap (SBC) = SC$
 $\left. \begin{array}{l} BN \perp AC \\ BN \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BN \perp (SAC)$. Suy ra $BN \perp SC$
Trong mp(SBC) dựng $BK \perp SC$ tại K. Khi đó
 $SC \perp (BKN)$
Ta lại có:
 $(BKN) \cap (SAC) = NK; (BKN) \cap (SBC) = BK$ Do
đó: $\left((SAC); (SBC) \right) = \left(\widehat{NK; BK} \right)$ là góc $\widehat{BKN}$

hay $180^\circ - \widehat{BKN}$
Mặt khác, $BN \perp (SAC) \Rightarrow BN \perp NK$ hay
 $\triangle BKN$ vuông tại N

Khi đó: $\tan \widehat{BKN} = \frac{BN}{NK}$, trong đó $BN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

Xét hai tam giác vuông đồng dạng
 $\triangle SAC \sim \triangle NKC$ (Vì có góc C chung)
Suy ra

$$\frac{NK}{SA} = \frac{NC}{SC} \Rightarrow NK = \frac{SA \cdot NC}{SC} = \frac{a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Do vậy

$$\tan \widehat{BKN} = \frac{BN}{NK} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BKN} = 60^\circ.$$

Hay $\left((SAC); (SBC) \right) = 60^\circ$

b) Ta có

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ S \in (SMN) \cap (SBC) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (SMN) \cap (SBC) = Sx \parallel MN \parallel BC$$

Hơn nữa, $BC \perp SB$ và $BC \perp SM$. Suy ra
 $Sx \perp SB$ và $Sx \perp SM$

Hay $\left((SMN); (SBC) \right) = \left(\widehat{MS; BS} \right)$ là góc $\widehat{BSM}$

hay $180^\circ - \widehat{BSM}$

Trong tam giác SBM ta có

$$\cos \widehat{BSM} = \frac{SM^2 + SB^2 - BM^2}{2 \cdot SM \cdot SB}$$

Trong đó

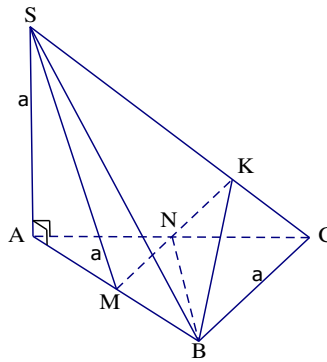
$$SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; SB = a\sqrt{2};$$

Do vậy

$$BM = \frac{a}{2}$$

$$\cos \widehat{BSM} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \widehat{BSM} \approx 18^\circ 26'.$$

$$\left((SMN); (SBC) \right) \approx 18^\circ 26'$$



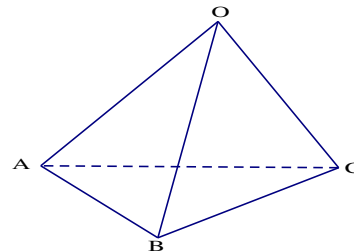
Bài 4.3. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau. Chứng minh rằng: $(OAB) \perp (OBC)$; $(OBC) \perp (OCA)$; $(OCA) \perp (OAB)$

HD & Giải

Ta có $\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

Mà $OA \subset (OAB)$ nên suy ra: $(OAB) \perp (OBC)$

Chứng minh tương tự, ta có
 $(OBC) \perp (OCA)$; $(OCA) \perp (OAB)$



Bài 4.4. Cho tứ diện ABCD, có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Chứng minh rằng: $(SAB) \perp (ABC)$; $(SAC) \perp (ABC)$; $(SBC) \perp (SAB)$

HD & Giải

Chứng minh $(SAB) \perp (ABC)$

Ta có: $\left. \begin{array}{l} SA \subset (SAB) \\ SA \perp (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

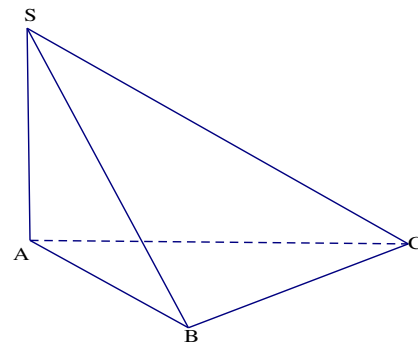
Chứng minh $(SAC) \perp (ABC)$

Ta có: $\left. \begin{array}{l} SA \subset (SAC) \\ SA \perp (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$

Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$

Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Và $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$.



Bài 4.5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a.

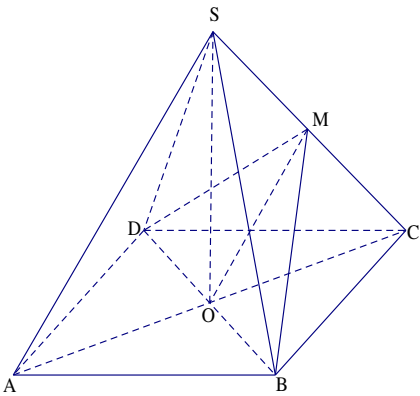
- Tính độ dài đường cao của hình chóp
- Gọi M là trung điểm SC, chứng minh: $(MBD) \perp (SAC)$
- Tính độ dài đoạn OM và góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD)

HD & Giải

a) Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Do S.ABCD là hình chóp đều, nên ta có: $SO \perp (ABCD)$

Do đó độ dài đường cao của hình chóp là SO

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



b) Chứng minh: $(MBD) \perp (SAC)$

Ta có $BS = BC = a$ và $MS = MC$. Suy ra

$$BM \perp SC \quad (1)$$

Tương tự: $DM \perp SC \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $SC \perp (DBM)$

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $(MBD) \perp (SAC)$

Bài 4.6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh a và có $SA = SB = SC = a$.

a) Chứng minh rằng: $(ABCD) \perp (SBD)$

b) Chứng minh rằng: Tam giác SBD là tam giác vuông

HD & Giải

a) Chứng minh rằng: $(ABCD) \perp (SBD)$

Gọi O là tâm của hình thoi ABCD

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)$$

Mà $AC \subset (ABCD)$ nên suy ra

$$(ABCD) \perp (SBD)$$

b) Vì $SA = SB = SC = a$ nên ba tam giác SAC,

BAC, DAC cân và bằng nhau

Do đó $SO = OD = OB$. Từ đó suy ra tam giác

SBD là tam giác vuông tại S

Bài 4.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60° ,

$$SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}; SC \perp (ABCD).$$

a) Chứng minh rằng: $(SBD) \perp (SAC)$

b) Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K. Tính độ dài IK

c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^\circ$ và từ đó suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mp (SAD)

HD & Giải

a) Chứng minh rằng: $(SBD) \perp (SAC)$

Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SC$ nên $BD \perp (SAC)$.

Ta suy ra $(SBD) \perp (SAC)$

b) Ta có hai tam giác SCA và IKA có chung góc A nên đồng dạng. Do đó:

$$\frac{IK}{SC} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IK = \frac{SC \cdot AI}{SA}$$

Mặt khác, trong tam giác vuông SCA có

$$SA = \sqrt{SC^2 + CA^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{4} + 3a^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \text{ Và}$$

c) Ta có tam giác OMC vuông tại M. nên

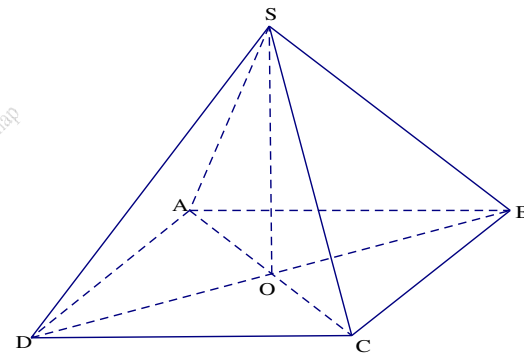
$$OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} (ABCD) \cap (MBD) = BD \\ BD \perp MO \subset (MBD) \\ \text{Ta có: } BD \perp CO \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow ((ABCD), (MBD)) = \widehat{MOC}$$

Mặt khác, ta có $OM = MC = \frac{a}{2}$ và $\widehat{OMC} = 90^\circ$,

nên suy ra $\widehat{MOC} = 45^\circ$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD) bằng 45°



$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } IK = \frac{SC \cdot AI}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a3\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2}$$

c) Vì $IK = IB = ID = \frac{a}{2}$ nên tam giác BKD là

tam giác vuông tại K hay $\widehat{BKD} = 90^\circ$

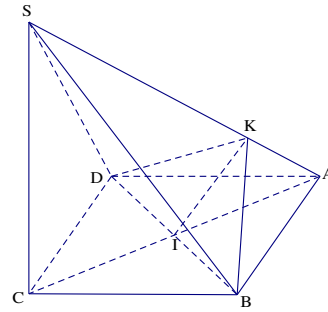
$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} SA \perp DB \\ SA \perp IK \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp (BDK) \Rightarrow SA \perp BK$$

và $SA \perp DK$

Vậy $\widehat{BKD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và

(SAD) và $\widehat{BKD} = 90^\circ$

Nên ta suy ra: $(SAB) \perp (SAD)$



Bài 4.8. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp mp(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Xác định $mp(\alpha)$, $mp(\alpha)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích của thiết diện.

HD & Giải

Dựng $AH \perp SD$

Ta có $\left. \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$
 $\Rightarrow CD \perp AH$

Vậy $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \subset \alpha$.

Do đó $\alpha = (AHB)$

Vì $\alpha \parallel CD$ nên

$\alpha \cap (SCD) = HK \parallel CD (K \in SC)$

Từ đó suy ra, thiết diện là hình thang ABKH.

Hơn nữa $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$

Vậy thiết diện là hình thang vuông tại A và H

Khi đó $S = \frac{1}{2}(AB + HK) \cdot AH$ trong đó

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2a$$

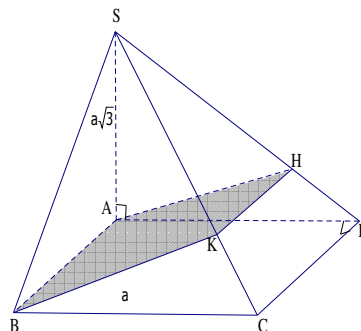
$$S_{\Delta SAD} = AH \cdot SD = SA \cdot AD$$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$SA^2 = SH \cdot SB \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{3a}{2}$$

$$\frac{HK}{CD} = \frac{SH}{SD} \Rightarrow HK = \frac{CD \cdot SH}{SD} = \frac{3a}{4}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} \left(a + \frac{3a}{4} \right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16} \text{ (đvdt)}$$



Bài 4.9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và có cạnh $SA \perp (ABCD)$. Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với cạnh SC, (α) cắt SC tại I.

a) Xác định giao điểm K của SO với mặt phẳng (α)

b) Chứng minh rằng: $(SBD) \perp (SAC)$ và $BD \parallel (\alpha)$

c) Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (α) . Tìm thiết diện cắt hình chóp S.ABCD bởi mặt phẳng (α) .

HD & Giải

a) Gọi I là giao điểm của (α) với SC.

Ta có $\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp SC \\ AI \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow AI \perp SC$

Vậy AI là đường cao của tam giác SAC.

Trong mặt phẳng (SAC), ta có $AI \cap SO = K$ và $AI \subset (\alpha)$.

Vậy: $K = SO \cap (\alpha)$

b) Ta có $\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ và

$BD \subset (SBD)$

Vậy: $(SBD) \perp (SAC)$

Mặt khác, ta có $\left. \begin{array}{l} SC \perp (\alpha) \\ BD \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow BD \parallel (\alpha)$
 $BD \not\subset (\alpha)$

c) Ta có $K = SO \cap (\alpha)$ và SO thuộc mặt phẳng (SBD) nên $K \in (\alpha) \cap (SBD)$

Mặt phẳng (SBD) chứa $BD \parallel (\alpha)$. Nên

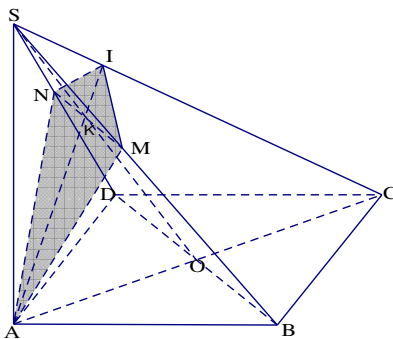
$(\alpha) \cap (SBD) = d \parallel BD$ hay

$(\alpha) \cap (SBD) = Kx \parallel BD$

Gọi M và N là giao điểm của d với SB và SD. Ta

được thiết diện là tứ giác AMIN có đường chéo

$AI \perp SC$ và $MN \parallel BD$.



Bài 4.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, có cạnh SA vuông góc với mp(ABCD) và $SA = a$.

a) Chứng minh rằng: $(SAD) \perp (SDC)$; $(SAC) \perp (SCB)$

b) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD), tính $\tan \varphi$

c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mp(SAC). Hãy xác định (α) và xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với (α) . Tính diện tích thiết diện đó.

HD & Giải

a) Ta có: $\left. \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SAD) \perp (SDC)$

Gọi I là trung điểm AB. Ta có AICD là hình vuông và IBCD là hình bình hành

Ta có: $\left. \begin{array}{l} DI \parallel BC \\ DI \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp AC$

Như vậy: $\left. \begin{array}{l} BC \perp AC \\ CB \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAC)$

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAC) \perp (SCB)$

b) Ta có

$\left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ AC \perp BC \\ SC \perp BC (cmt) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \widehat{SCA} \text{ Khi}$

đó: $\tan \varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Ta có: $\left. \begin{array}{l} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow DI \perp (SAC)$

Vậy (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mp(SAC) chính là mp(SDI)

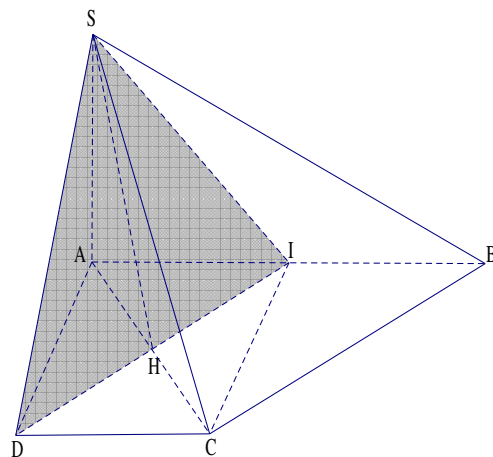
Do đó thiết diện của (α) với hình chóp

S.ABCD là tam giác đều SDI có cạnh là $a\sqrt{2}$.

Gọi H là tâm hình vuông AICD, ta có $SH \perp DI$

và $SH = \frac{DI\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$S_{\Delta SDI} = \frac{1}{2} SH \cdot DI = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt)



Bài 4.11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a

a) Chứng minh rằng AC' vuông góc với hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(B'CD')$

b) Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC' . Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích thiết diện đó.

HD & Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Vậy

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

Tương tự, ta có $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BA'} = 0$. Vậy $AC' \perp (A'BD)$

Do $(A'B'D) \parallel (B'CD')$ nên $AC' \perp (B'CD')$

b) Gọi M là trung điểm BC thì

$$MA = MC' = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ nên M thuộc mặt}$$

phẳng trung trực (α) của AC'

Tương tự, ta cũng chứng minh được N, Q, R, S cũng có tính chất đó (N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh CD, DD', D'A', A'B', B'B)

Vậy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi $mp(\alpha)$ là MNPQRS.

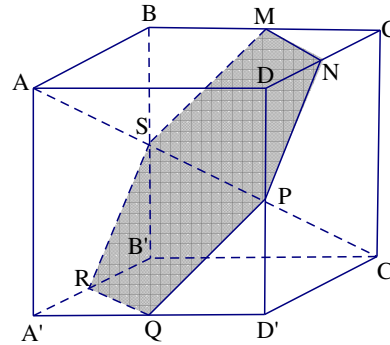
Hơn nữa,

$$MN = NP = PQ = QR = RS = SM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Do vậy thiết diện là lục giác đều

Diện tích của thiết diện:

$$S = 6 \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}$$



Bài 4.12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a . Gọi I là điểm thuộc cạnh AB; đặt $AI = x$, $(0 < x < a)$

a) Khi góc hai đường thẳng AC' và DI bằng 60° , hãy xác định điểm I

b) Tính theo a và x diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(B'DI)$. Tìm x để diện tích ấy nhỏ nhất.

HD & Giải

a) Đặt α là góc giữa DI và AC' thì

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{DI}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} \\ &= \frac{|(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'})|}{|\overrightarrow{DI}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} \\ &= \frac{|-a^2 + xa|}{\sqrt{a^2 + x^2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{|-a + x|}{\sqrt{a^2 + x^2} \cdot \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi ấy } \alpha = 60^\circ \text{ khi và chỉ khi } \frac{|-a + x|}{\sqrt{a^2 + x^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

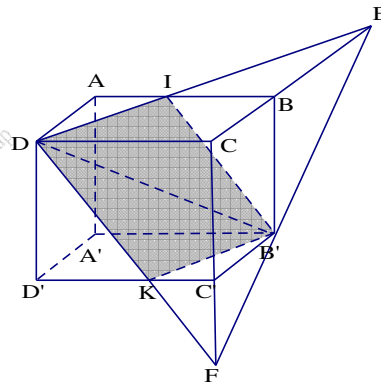
$$\Leftrightarrow x^2 - 8ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow x = a(4 - \sqrt{15}) \text{ (vì } 0 < x < a)$$

Vậy hệ thức trên xác định được vị trí điểm I

b) Gọi $E = DI \cap CD$;

$$F = B'E \cap CC'; K = DF \cap D'C'$$

Thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi $mp(B'DI)$ là tứ giác DIB'K và dễ thấy tứ giác đó hình bình hành



Diện tích của thiết diện:

$$S_{DIB'K} = 2S_{B'DI} = 2 \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{IB'}|^2 \cdot |\overrightarrow{ID}|^2 - (\overrightarrow{IB'} \cdot \overrightarrow{ID})^2} \text{ Trong}$$

$$\text{g đó } |\overrightarrow{IB'}|^2 \cdot |\overrightarrow{ID}|^2 = (a^2 + x^2) \left[a^2 + (a-x)^2 \right]$$

$$(\overrightarrow{IB'} \cdot \overrightarrow{ID})^2 = [(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BB'})]^2$$

$$= (\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA})^2 = [-x(a-x)]^2 = x^2(a-x)^2$$

Từ đó:

$$S_{DIB'K} = \sqrt{a^4 + a^2x^2 + a^2(a-x)^2}$$

$$= a\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2}$$

Khi đó, dễ thấy $S_{DIB'K}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$x = \frac{a}{2}$$

Bài 4.13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$.

Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60°

HD & Giải

Gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ OO_1 vuông góc với SC. Khi đó, ta có (BO_1D) vuông góc với SC. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) là góc giữa hai đường thẳng BO_1 và DO_1 . Mặt khác $OO_1 \perp BD$, $OO_1 < OC$ mà $OC = OB$ nên $\widehat{BO_1O} > 45^\circ$

Tương tự, $\widehat{DO_1O} > 45^\circ$ tức là $\widehat{BO_1D} > 90^\circ$

Như vậy, hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc 60° khi và chỉ khi

$\widehat{BO_1D} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{BO_1O} = 60^\circ$ (Vì $\triangle BO_1D$ cân tại O_1)

$$\Leftrightarrow BO = OO_1 \tan 60^\circ \Leftrightarrow BO = OO_1 \sqrt{3}$$

Ta lại có

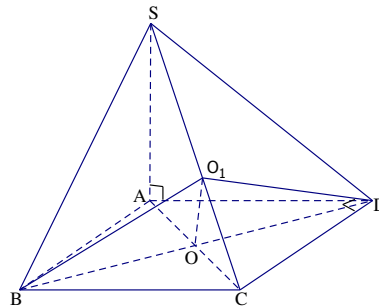
$$OO_1 = OC \sin \widehat{OCO_1} = OC \sin \widehat{ACS} = OC \cdot \frac{SA}{SC} \text{ Nh}$$

$$\text{ư vậy } BO = OO_1 \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow BO = \sqrt{3} OC \cdot \frac{SA}{SC} \Leftrightarrow SC \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot SA$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3} \cdot x \Leftrightarrow x = a$$

Vậy khi $x = a$ thì hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60°



Bài 4.14. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến là Δ . Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C thuộc (P), D thuộc (Q) sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD$. Xác định thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD. Tính diện tích của thiết diện khi $AC = AB = BD = a$.

HD & Giải

Gọi E là trung điểm BC thì $AE \perp BC$ (vì $\triangle ABC$ cân tại A)

Do $BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AE$ nên $AE \perp CD$

(Theo định lý ba đường vuông góc)

Trong mặt phẳng (CDB) kẻ

$EF \perp CD$, ($F \in CD$) thì mp (AEF) chính là mp

(α) và thiết diện cần tìm là tam giác AEF. Hơn nữa, tam giác AEF vuông tại E

$$\text{Diện tích tam giác AEF: } S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot EF.$$

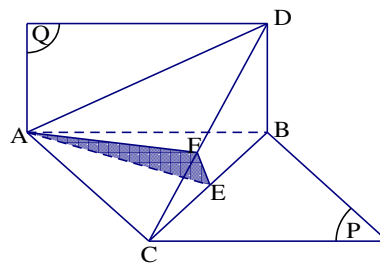
$$\text{Trong đó, ta có } AE = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Xét hai tam giác vuông đồng dạng CEF và CBD (vì có chung góc C)

Suy ra

$$\frac{EF}{DB} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow EF = \frac{CE \cdot DB}{CD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Vậy } S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \text{ (đvdt)}$$



Bài 4.15. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD

a) Tính AB, IJ theo a và x

b) Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc ?

HD & Giải

a) Vì J là trung điểm của CD và $AC = AD$ nên $AJ \perp CD$.

Do $mp(ACD) \perp mp(BCD)$ nên $AJ \perp (BCD)$.

Mặt khác $AC = AD = BC = BD$ nên tam giác

AJB vuông cân, suy ra $AB = AJ\sqrt{2}$

Mà $AJ = \sqrt{a^2 - x^2}$. Vậy $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ với

$a > x$

b) Do $IA = IB$, tam giác AJB vuông tại J nên

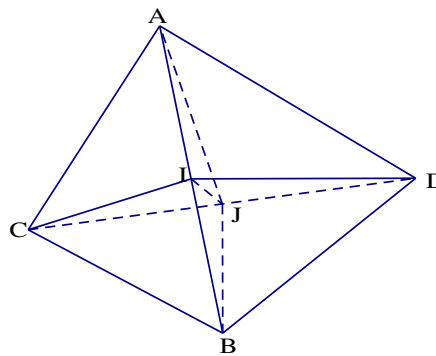
$$IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}$$

Ta có CI và DI cùng vuông góc với AB.

Vậy

$$(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow \widehat{CID} = 90^\circ \Leftrightarrow IJ = \frac{1}{2}CD$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2} \cdot 2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC) . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $SC \perp AI$.

B. Tam giác IAC đều.

C. $BC \perp AH$.

D. $(AHK) \perp (SBC)$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $BM \perp AC$.

B. $(SBM) \perp (SAC)$.

C. $(SAB) \perp (SBC)$.

D. $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\varphi = 30^\circ$.

Câu 5. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{5}$.

B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\varphi = 45^\circ$.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a , mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q) .

B. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q) .

C. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P) . Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q) .

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- C. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

Câu 9. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60° . Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

- A. $a\sqrt{2}$.
- B. $2a$.
- C. $3a$.
- D. $a\sqrt{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

- A. $\widehat{CSE}$.
- B. $\widehat{CSF}$.
- C. $\widehat{BSF}$.
- D. $\widehat{BSE}$.

Câu 11. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

- A. $\frac{a}{3}$.
- B. $\frac{a}{2}$.
- C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12. Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào sai?

- A. Các mặt bên là những hình vuông.
- B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
- C. Các cạnh bên là những đường cao.
- D. Đáy là đa giác đều.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\varphi = 60^\circ$.
- B. $\tan \varphi = 2\sqrt{3}$.
- C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.
- D. $\tan \varphi = \frac{1}{2}$.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .
- B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.
- C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .
- D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- B. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d . Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d .
- C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R) .
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $(SBC) \perp (SAC)$. B. $AI \perp BC$. C. $(ABI) \perp (SBC)$. D. $AI \perp SC$.

Câu 18. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC ; kẻ IH vuông góc SA ($H \in SA$). Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $BH \perp HC$. B. $SA \perp BH$. C. $(SDB) \perp (SDC)$. D. $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

- A. $SH = \frac{a}{2}$. B. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\cot \varphi = \sqrt{7}$. B. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}$. C. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$. D. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\tan \varphi = \sqrt{2}$. C. $\tan \varphi = \sqrt{6}$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Gọi H là trung điểm AB . Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 23. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.
C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
D. Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60° .

- A. $x = \frac{a}{2}$. B. $x = a$. C. $x = 2a$. D. $x = \frac{3a}{2}$.

Câu 25. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.
B. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.
C. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
D. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 26. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

- A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , $AB = 2a$,

$AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 30^\circ$.

B. $\varphi = 45^\circ$.

C. $\varphi = 60^\circ$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A . Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $SH \perp AB$.

B. $HI \perp AB$.

C. $(SAB) \perp (SAC)$.

D. $(SHI) \perp (SAB)$.

Câu 29. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 45^\circ$.

B. $\varphi = 30^\circ$.

C. $\varphi = 90^\circ$.

D. $\varphi = 60^\circ$.

Câu 30. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) hoặc $(Q) \equiv (R)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc tù.

D. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) .

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	C	D	C	C	A	A	B	D	D	D	A	B	B	C
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	A	C	A	B	B	D	B	B	A	A	D	C	A	D

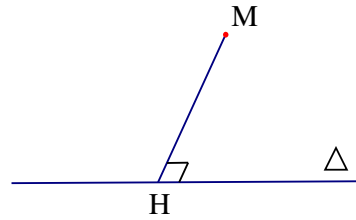
§5. KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

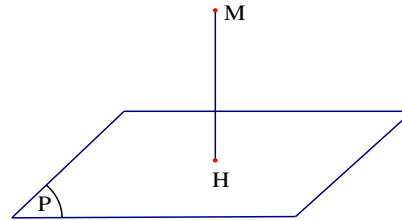
1. Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng Δ .

Cho một điểm M và đường thẳng Δ . Khoảng cách giữa hai điểm M và H được gọi là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ , với H là hình chiếu của M lên Δ . Kí hiệu $d(M; \Delta)$



2. Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P)

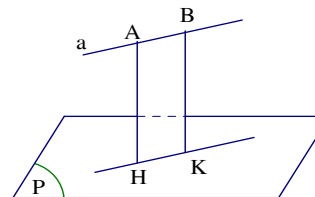
Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, với H là hình chiếu vuông góc của M lên (P). Kí hiệu $d(M, (P))$



II. Khoảng cách giữa hai đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc a tới mặt phẳng (P). Kí hiệu $d(a, (P))$

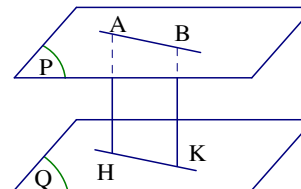


2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. Kí hiệu $d((P); (Q))$. Nghĩa là :

$$d((P); (Q)) = d(M, (Q)), \forall M \in (P) \text{ hay}$$

$$d((P), (Q)) = d(N, (P)), \forall N \in (Q)$$



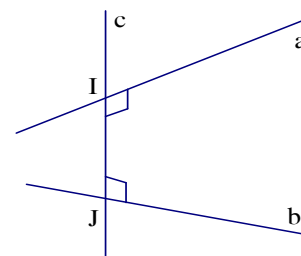
III. Đường vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Định nghĩa

- Đường thẳng c cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.
- Nếu đường vuông góc chung c cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại I, J thì độ dài đoạn thẳng IJ gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó



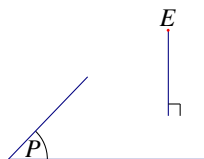
2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong

Các dạng toán

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

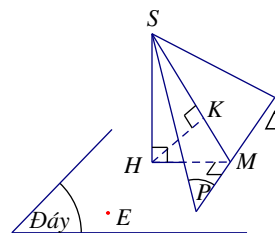
Tính khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(E, (P))$



1. Mặt phẳng (P) không chứa đường cao SH

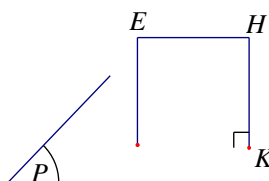
Bước 1. Dựng $d(H, (P))$

- ①. Xác định giao tuyến $\Delta = (P) \cap (\text{Đáy})$
 - ②. Từ điểm H kẻ $HM \perp \Delta$ và nối SM .
 - ③. Kẻ $HK \perp SM$
- Suy ra: $d(H, (P)) = HK$



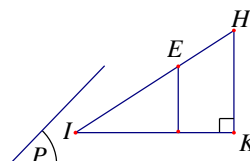
Bước 2. Tính $d(E, (P))$ thông qua HK bằng kĩ thuật đổi điểm

Trường hợp 1. $EH \parallel (P)$



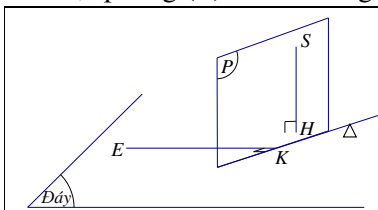
Ta có: $d(E, (P)) = HK$

Trường hợp 2. $EH \cap (P) = I$



$$\frac{d(E, (P))}{d(H, (P))} = \frac{IE}{IH} \Rightarrow d(E, (P)) = \frac{IE}{IH} \cdot d(H, (P))$$

2. Mặt phẳng (P) chứa đường cao SH



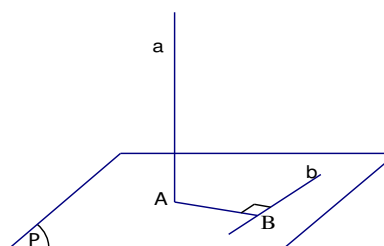
Xác định giao tuyến $\Delta = (P) \cap (\text{Đáy})$
Kẻ $EK \perp \Delta$. Suy ra $d(E, (P)) = EK$

Dạng 2: Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

PP: Để xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b , ta thực hiện:

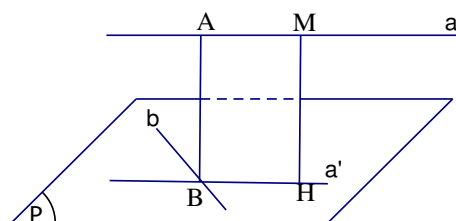
Cách 1: Áp dụng cho trường hợp $a \perp b$

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và $(P) \perp a$ tại A
- Dựng $AB \perp b$ tại B. Khi đó $d(a; b) = AB$



Cách 2:

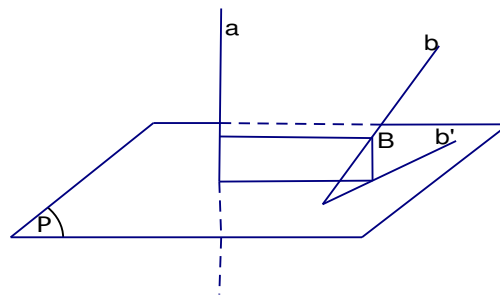
- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và $(P) \parallel a$
- Chọn điểm M trên a , dựng $MH \perp (P)$ tại H
- Từ H, dựng $a' \parallel a$, cắt b tại B
- Từ B, dựng đường thẳng song song với MH cắt a tại A. Khi đó $d(a; b) = AB$



Cách 3.

- Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại O
- Dựng hình chiếu vuông góc H của O trên b'
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt

- b tại B
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A . Khi đó $d(a; b) = AB$



B. BÀI TẬP

Bài 5.1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .

HD & Giải

Khoảng cách từ điểm S tới mặt đáy (ABC) bằng độ dài đường cao SH của hình chóp tam giác đều

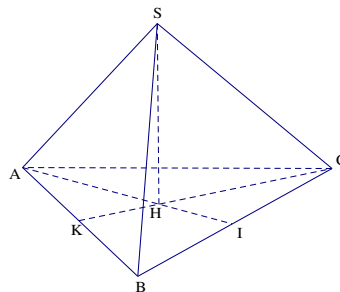
$$SH^2 = SA^2 - AH^2$$

Gọi $I = AH \cap BC$, ta có

$$AH = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Do đó: } SH^2 = SA^2 - AH^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2$$

$$\text{Vậy: } d(S, (ABC)) = SH = a$$



Bài 5.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

HD & Giải

Vì $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Nên hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H

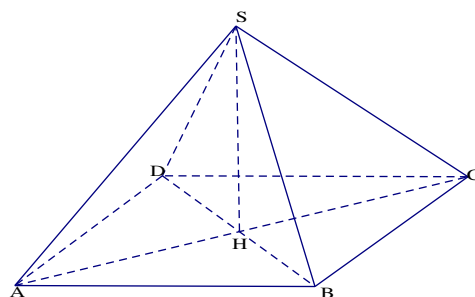
Mà $HA = HB = HC = HD$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$H = AC \cap BD$$

$$\text{Do vậy: } d(S, (ABCD)) = SH$$

Ta có:

$$\begin{aligned} SH^2 &= SA^2 - AH^2 = SA^2 - \frac{AC^2}{4} = SA^2 - \frac{AB^2 + BC^2}{4} \\ &= 2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}. \text{ Vậy: } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Bài 5.3. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm AB và F là điểm trên AB sao cho $FA = 2FB$. Tính $d(B, (SAC))$; $d(E, (SBC))$; $d(F, (SBC))$

HD & Giải

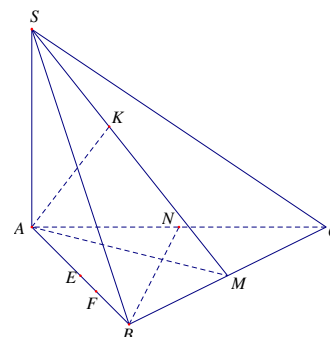
$$\text{a) } d(B, (SAC)) = ?$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} B \in (ABC) \\ (ABC) \cap (SAC) = AC \Rightarrow d(B, (SAC)) = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ K \in BN \perp AC \end{cases}$$

$$\text{b) } d(E, (SBC)) = ?$$

Trước tiên, dựng $d(A, (SBC))$:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A \in (ABC) \\ (ABC) \cap (SBC) = BC \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK \\ K \in AM \perp BC \\ SM \perp BC, AK \perp SM \end{cases}$$



Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = a\sqrt{2}$, $AK = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}$

Sau đó, đổi điểm E cho A . Ta có: $AE \cap (SBC) = B$, $\frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}$

Do đó: $d(E, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{66}}{22}$

c) $d(F, (SBC)) = ?$. Ta có: $\frac{d(F, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{BF}{BA} = \frac{1}{3}$. Suy ra: $d(F, (SBC)) = \frac{1}{3} d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{66}}{33}$

Bài 5.4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính

- a) $d(O, (SAD))$ b) $d(A, (SCD))$ c) $d(O, (SCD))$
d) $d(A, (SBC))$ e) $d(O, (SBC))$ f) $d(C, (SAB))$

HD & Giải

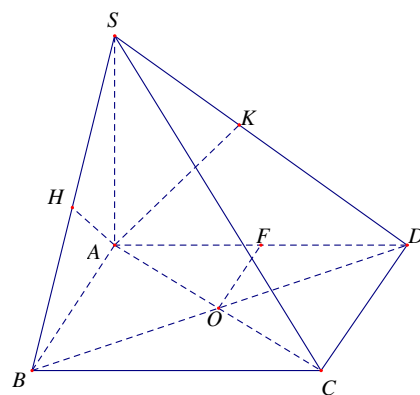
a) $d(O, (SAD)) = OF = \frac{a}{2}$ b) $d(A, (SCD)) = AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

c) $d(O, (SCD)) = \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

d) $d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

e) $d(O, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

f) $d(C, (SAB)) = CB = a$



Bài 5.5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD .

HD & Giải

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Trong mặt phẳng (SAC) vẽ $OH \perp SC$

Ta có: $\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ mà } OH \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$

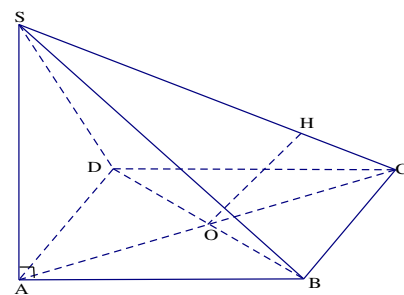
Vậy OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD

Độ dài đoạn OH là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD

Mặt khác, ta có hai tam giác vuông SAC và OHC đồng dạng vì có chung góc nhọn C

Do đó $\frac{SA}{SC} = \frac{OH}{OC} (= \sin C) \Rightarrow OH = \frac{SA \cdot OC}{SC}$

Ta có $SA = a$, $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$. Vậy: $OH = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$



Bài 5.6. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối diện của tứ diện đều đó.

HD & Giải

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Ta có $IC = ID$ vì IC, ID là hai trung tuyến của hai tam giác đều bằng nhau.

Do đó $IK \perp CD$

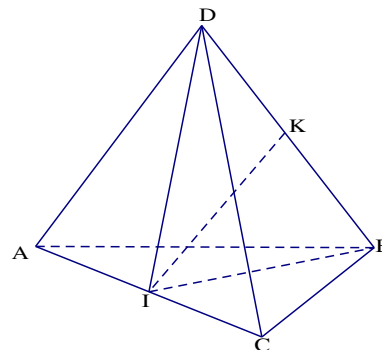
Tương tự, ta có $IK \perp AB$

Vậy IK là đường vuông góc chung của hai cạnh đối diện của tứ diện đều AB và CD

Như vậy: $d(AB, CD) = IK$

Xét trong tam giác vuông IKC, ta có

$$IK^2 = IC^2 - KC^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}. \text{ Vậy: } d(AB, CD) = IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Bài 5.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a , cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm cạnh SC và M là trung điểm của AB

a) Chứng minh rằng: $IO \perp (ABCD)$

b) Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM

HD & Giải

a) Ta có: $\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ OI \parallel SA \end{array} \right\} \Rightarrow OI \perp (ABCD)$

b) Trong mặt phẳng (ICM) ta dựng $IH \perp CM (H \in CM)$. Trong mp (ABCD) dựng $OH \perp CM$

Từ đó suy ra $CM \perp (OHI) \Rightarrow CM \perp HI$

Do đó $d(I, SC) = IH$

Xét tam giác vuông HOI, ta có

$$IH^2 = IO^2 + OH^2$$

$$\text{Mặt khác, ta có } OI = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$$

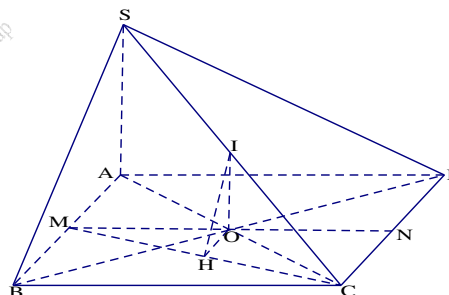
Gọi N là giao điểm của MO với cạnh CD. Hai tam giác vuông

MHO và MNC đồng dạng nên

$$\frac{OH}{CN} = \frac{OM}{MC} \Rightarrow OH = \frac{CN \cdot OM}{MC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{2\sqrt{5}} \text{ Vậ}$$

$$y \text{ } d(I, SC) = IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}$$

GV. Lư Sĩ Pháp



Bài 5.8. Cho tam giác ABC với $AB = 7\text{cm}$, $CA = 8\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm O sao cho $AO = 4\text{cm}$. Tính $d(O, BC) = ?$

HD & Giải

Ta dựng $AH \perp BC$ tại H

Ta có $OA \perp AH \subset (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của OA lên mp(ABC)

Suy ra: $OH \perp BC$ theo định lí ba đường vuông góc.

$$\text{Do vậy } d(O, BC) = OH = \sqrt{OA^2 + AH^2}$$

Với $OA = 4\text{cm}$, theo công thức Hê-rông, ta có

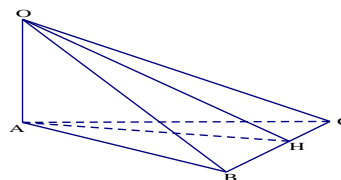
$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}$$

(đvdt)

$$\text{Và } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S}{BC} = \frac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } d(O, BC) = OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = 8 \text{ (cm)}$$



Bài 5.9. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Xác định đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau:

a) SB và CD b) SA và BD c) SB và AD d) SC và BD

HD & Giải

a) Ta có $\left. \begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Suy ra

$$BC \perp SB$$

Mặt khác $BC \perp DC$. Do đó BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD

$$\text{Vậy } d(SB; CD) = BC = a$$

b) Ta có $AO \perp SA$ và $SA \perp (ABCD)$ và $AO \perp BD$

Vậy AO là đoạn vuông góc chung của SA và BD

$$\text{và } d(SA; BD) = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

c) Ta có $\left. \begin{matrix} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{matrix} \right\} \Rightarrow AD \perp (SAB)$. Suy ra

$$AD \perp SB$$

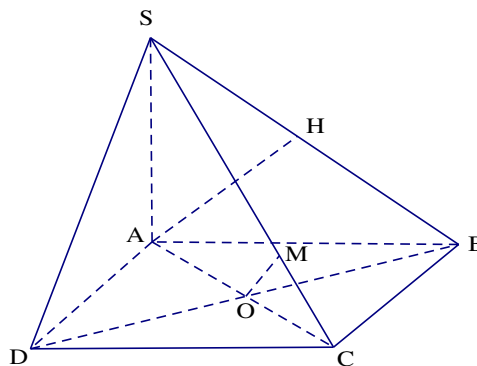
Trong mặt phẳng (SAB), từ A dựng $AH \perp SB$, khi đó AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD.

$$\text{Vậy } d(SB; AD) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

d) Ta có $\left. \begin{matrix} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{matrix} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) (*)$

Trong mặt phẳng (SAC), từ O dựng $OM \perp SC$ và từ (*) suy ra $OM \perp BD$. Khi đó OM là đoạn vuông góc chung của SC và BD. Vậy $d(SC; BD) = OM$

$$\text{Ta có } \frac{OM}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OM = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



Bài 5.10. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. gọi G là trọng tâm của tam giác đáy ABC.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABC)

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SG

HD & Giải

a) SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên $SG \perp (ABC)$

$$\text{Do đó } d(S, (ABC)) = SG.$$

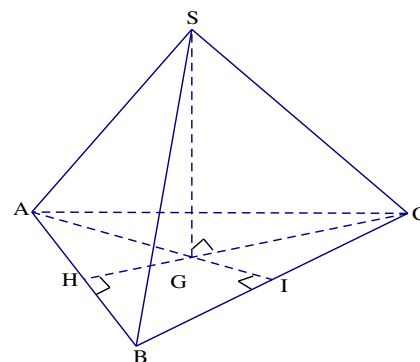
$$\text{Ta có } SG^2 = SA^2 - AG^2 = (2a)^2 - \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3a\sqrt{3}}{2} \right) \right]^2 = a^2 \text{ Vậy}$$

$$d(S, (ABC)) = SG = a$$

b) Ta có $CG \perp AB$ tại H và $SG \perp GH$ nên GH là đoạn vuông góc chung của AB và SG.

$$\text{Vậy } d(AB; SG) = GH$$

$$\text{Ta có } GH = \frac{1}{3} HC \text{ mà } HC = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \text{ nên } HG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Bài 5.11. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a . Tính khoảng cách giữa A'B và B'C'.

HD & Giải

Ta có $B'C' \parallel BC$. Suy ra $B'C' \parallel (A'BC)$

$$\text{Do vậy } d(AB'; B'C') = d(B'C'; (A'BC))$$

Gọi D, F lần lượt là trung điểm của BC và B'C'. Khi đó $d(B'C'; (A'BC)) = d(F; (A'BC))$

Ta lại có $\left. \begin{array}{l} B'C' \perp FD \\ B'C' \perp A'F \end{array} \right\} \Rightarrow B'C' \perp (A'DF)$. Suy ra $BC \perp (A'DF)$

vì $BC \parallel B'C'$

Trong mặt phẳng $(A'DF)$, dựng đường cao $FH \perp A'D$

Khi đó $FH \perp BC$ ($BC \perp (A'DF)$). Vậy $FH \perp (A'BC)$. Do đó

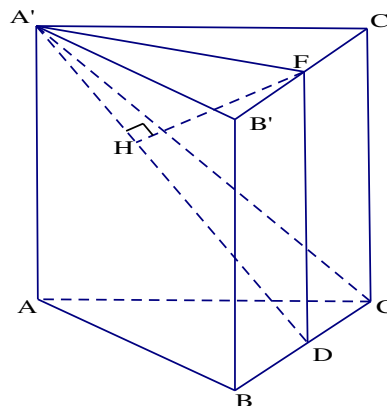
$d(F; (A'BC)) = FH$

Trong tam giác vuông $A'FD$, ta có

$$\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{A'F^2} + \frac{1}{FD^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

Suy ra $FH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và

$B'C'$ là $\frac{a\sqrt{21}}{7}$



Bài 5.12. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, góc giữa BB' và $BB' = a$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60° và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ.

HD & Giải

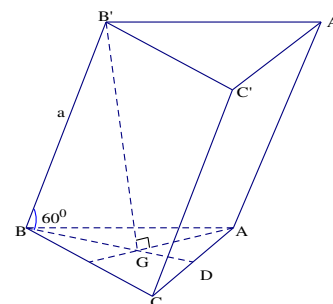
Gọi D là trung điểm AC và G là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có $B'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^\circ$

Vì $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $d((ABC); (A'B'C')) = B'G$

Do đó $B'G = BB' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy khoảng cách giữa hai mặt đáy của

lăng trụ là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Bài 5.13. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

HD & Giải

Từ giả thuyết suy ra các tam giác $A'AD$, BAD , $A'AB$ là các tam giác cân cùng có góc ở đỉnh bằng 60° nên chúng là những tam giác đều.

Như vậy tứ diện $A'ABD$ là tứ diện đều.

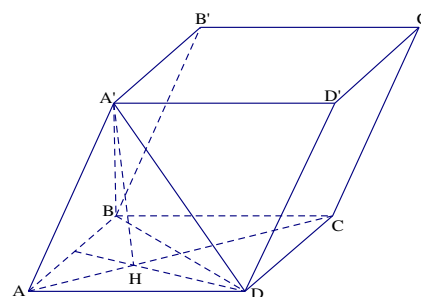
Khi đó hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ chính là trọng tâm của tam giác ABD .

Vì $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$

$\Rightarrow d((ABCD); (A'B'C'D')) = d(A'; (ABCD)) = A'H$

Trong tam giác vuông AHA' , có

$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Bài 5.14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$
a) Tính khoảng cách từ điểm A và B đến mặt phẳng (SCD) .

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

HD & Giải

a) Vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ nên ta có:

$AD \parallel BC$ và $AB = BC = CD = a$, đồng thời

$AC \perp CD, AB \perp BD, AC = BD = a\sqrt{3}$

Như vậy $\left. \begin{array}{l} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $AH \perp SC$ tại H. Ta có $AH \perp CD$ và $AH \perp SC$ nên $AH \perp (SCD)$.

Vậy $d(A, (SCD)) = AH$

Xét tam giác SAC vuông tại A có AH là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2}.$$

Vậy $AH^2 = 2a^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$

b) Gọi I là trung điểm của AD ta có $BI \parallel CD$ nên BI song song với mặt phẳng (SCD). Từ đó suy ra $d(B, (SCD)) = d(I, (SCD))$.

Mặt khác, ta có AI cắt (SCD) tại D nên

$$d(I, (SCD)) = \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vì $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$. Do đó

$d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$

Dựng đường thẳng $Ad \perp BC$ tại E

$\Rightarrow BC \perp (SAE)$

Trong mặt phẳng (SAE) dựng $AF \perp AE$ tại F.

Ta có $\left. \begin{array}{l} AF \perp AE \\ AF \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AF \perp (SBC)$

Vậy $AF = d(A, (SBC))$

Xét tam giác vuông AEB, ta có

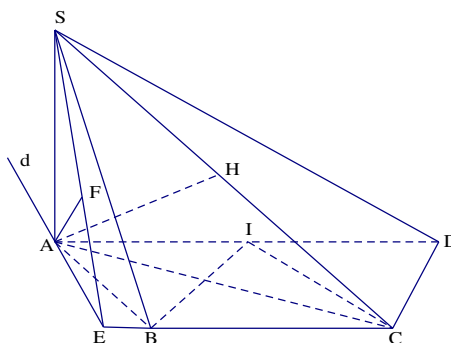
$$AE = AB \cdot \sin \widehat{ABE} = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Xét tam giác SAE vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{9}{6a^2} \text{ Do}$$

$$\text{đó } AF^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$d(AD, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Bài 5.15. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh $7a$, có cạnh $SC = 7a$ và $SC \perp (ABC)$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SA và BC

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

HD & Giải

a) Gọi H là trung điểm BC. Qua A vẽ AD song song với BC và bằng HC

Khi đó: $BC \parallel DA$ nên $(SA, BC) = (SA, DA) = \widehat{SAD}$

Ta có: AHCD là hình chữ nhật nên ta có $CD \perp DA$

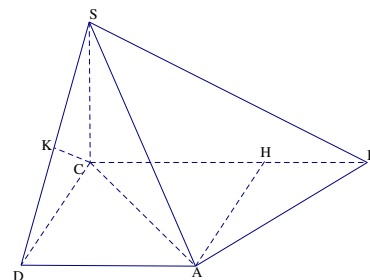
Theo định lý ba đường vuông góc, ta có $SD \perp DA$

$$\text{Do đó: } \cos \widehat{SAD} = \frac{AD}{SA} = \frac{HC}{SA} = \frac{\frac{7a}{2}}{7a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Vậy: } \widehat{SAD} \approx 69^\circ 17'$$

b) Vì $BC \parallel AD$ nên $BC \parallel (SAD)$. Do đó $d(SA, BC) = (BC, (SAD)), (SA \subset (SAC))$

Trong tam giác SCD, ta dựng $CK \perp SD \Rightarrow CK \perp (SAD)$. Như vậy $CK = d(BC, (SAD))$

$$\text{Xét trong tam giác vuông SCD, ta có } \frac{1}{CK^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{(7a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{7a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{21a^2}$$



$$(\text{vì } CD = AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{7a\sqrt{3}}{2}). \text{ Vậy: } CK = a\sqrt{21}$$

Bài 5.16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O, có cạnh $AB = a$. Đường cao SO của hình chóp vuông góc với mặt đáy (ABCD) và có $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB chéo nhau

HD & Giải

Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB chéo nhau bằng khoảng cách giữa AB và mp(SCD) chứa SC và song song với AB

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và CD thì ta có O là trung điểm của IK và $IK \perp CD$.

Do đó: $d(AB, (SCD)) = d(I, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} CD \perp SO \\ CD \perp OK \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SOK)$$

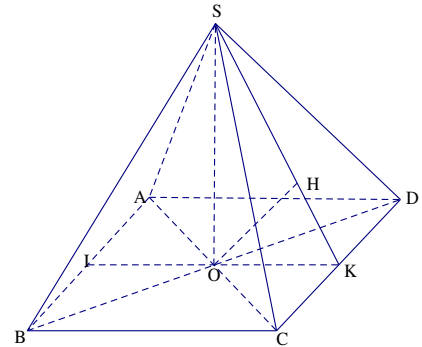
$$\Rightarrow (SCD) \perp (SOK), (OK \subset (SOK))$$

Trong tam giác vuông SOK, dựng $OH \perp SK$ nên $OH \perp (SCD)$

Do đó: $OH = d(O, (SCD))$.

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy: } d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$



Bài 5.17. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

- Tính khoảng cách từ S đến mp(ABCD)
- Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mp(SCD)
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC

HD & Giải

- Gọi H là giao điểm của AC và BD. Do S.ABCD là hình chóp đều nên $SH \perp (ABCD)$

$$d(S, (ABCD)) = SH$$

Ta có: Tam giác SAC là tam giác đều, nên

$$SH = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

- Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có $d(AB, (SCD)) = d(E, (SCD)) = EK$ (EK là đường cao của tam giác SEF)

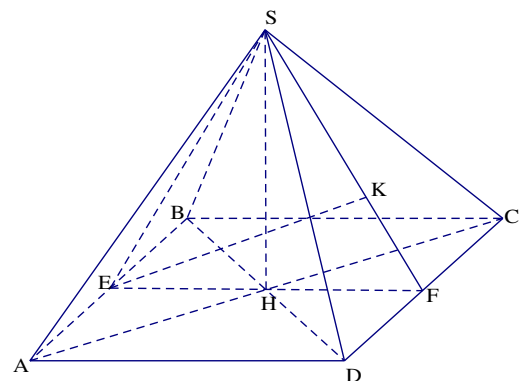
Hai tam giác vuông SHF và EKF có chung góc F nên chúng đồng dạng

$$\text{Do đó: } \frac{EK}{SH} = \frac{EF}{SF} \Rightarrow EK = \frac{SH \cdot EF}{SF}$$

$$EK = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{\frac{6a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}$$

- Vì AB và SC chéo nhau, $AB \parallel mp(SCD)$ nên

$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = EK = \frac{a\sqrt{42}}{7}$$



Bài 5.16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$

- a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp đã cho là những tam giác vuông
 b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD)
 c) Tính góc giữa đường thẳng SC và mp(ABCD)
 d) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên cạnh SB và SD. CMR: $SC \perp (AMN)$
 e) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SAB)

HD & Giải

a) Tự chứng minh

b) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp DC \\ SD \perp DC \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{SDA} \text{ là góc giữa}$$

hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD)

Tam giác SAD vuông tại A, nên

$$\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 30^\circ \text{ c) Ta}$$

có AC là hình chiếu của SC lên mp(ABCD) nên

$\widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC với mp(ABCD). Tam giác SAC vuông tại A

$$\text{Do đó } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SCA} \approx 26^\circ 33'$$

$$\text{d) Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Từ đó suy ra $BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$

Nên $AM \perp (SBC)$. Do đó $AM \perp SC$

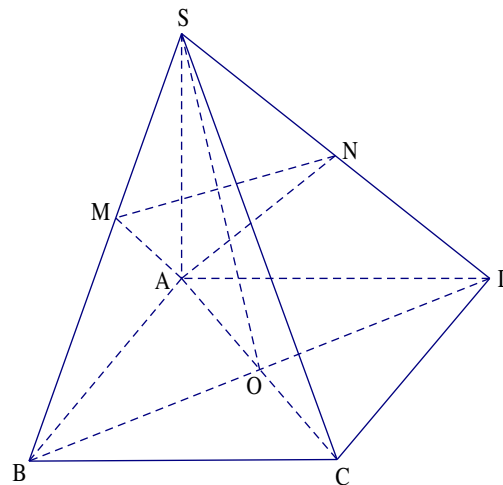
Tương tự ta cũng có: $AN \perp SC$

Vậy $SC \perp (AMN)$.

e) $d(AD, (SAB)) = AM$

Ta có: Tam giác SAB là tam giác vuông cân

$$\text{tại A và } SB = a\sqrt{2} \text{ nên } AM = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AC , tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM .

A. $d = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

B. $d = 5a\sqrt{3}$.

C. $d = \frac{5a}{2}$.

D. $d = a\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD' .

A. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

C. $d = a\sqrt{2}$.

D. $d = 2a$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN .

A. $d = \sqrt{5}$.

B. $d = 5$.

C. $d = 10$.

D. $d = 3\sqrt{5}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 60° . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC .

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $d = \frac{a}{2}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO .

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ($ABCD$). Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

A. $d = 1$.

B. $d = \sqrt{2}$.

C. $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .

A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a$, $BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = a$.

B. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

C. $d = a\sqrt{5}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$). Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = a\sqrt{2}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $d = 2a$.

D. $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

D. $d = \frac{a}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

B. $d = \frac{\sqrt{42}}{14}$.

C. $d = \frac{1}{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

A. $d = 2a$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

D. $d = a\sqrt{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Cạnh bên SA vuông

góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

A. $d = \frac{2}{3}$.

B. $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $d = \frac{2a}{3}$.

D. $d = 1$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD .

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{2a}{3}$.

D. $2a$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN) .

A. $d = a\sqrt{5}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $d = 2a$.

D. $d = \frac{3a}{2}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = a$.

B. $d = a\sqrt{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB .

A. $d = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

B. $d = 2a$.

C. $d = a\sqrt{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60° . Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a .

A. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .

A. $d = \sqrt{2}$.

B. $d = 2$.

C. $d = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

D. $d = 2\sqrt{2}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC) .

A. $d = \frac{a}{2}$.

B. $d = a\sqrt{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

D. $d = a$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30° . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a .

A. $d = a\sqrt{3}$.

B. $d = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

D. $d = a$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO . Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB .

A. $d = 4a$. B. $d = \frac{4a\sqrt{22}}{11}$. C. $d = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. D. $d = 2a$.

Câu 26. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{3a}{4}$. B. $d = \frac{3}{4}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $d = \frac{a}{4}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC . Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD) .

A. $d = \sqrt{3}$. B. $d = a\sqrt{3}$. C. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA') .

A. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $d = \frac{\sqrt{6}}{4}$. D. $d = \sqrt{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $d = a\sqrt{3}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $d = a$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{285}}{19}$. B. $d = \frac{\sqrt{285}}{38}$. C. $d = \frac{a\sqrt{285}}{38}$. D. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

ĐÁP ÁN

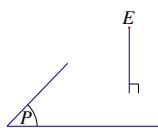
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	A	A	A	B	D	D	A	D	B	C	B	C	B	A
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	B	B	C	D	D	C	C	C	B	A	D	B	A	C

ÔN TẬP CHƯƠNG III. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BỔ SUNG KHOẢNG CÁCH

I. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Tính khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(E, (P))$



1. Mặt phẳng (P) không chứa đường cao SH

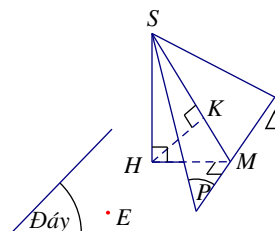
Bước 1. Dựng $d(H, (P))$

①. Xác định giao tuyến $\Delta = (P) \cap (\text{Đáy})$

②. Từ điểm H kẻ $HM \perp \Delta$ và nối SM .

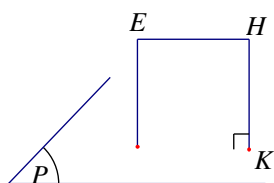
③. Kẻ $HK \perp SM$

Suy ra: $d(H, (P)) = HK$



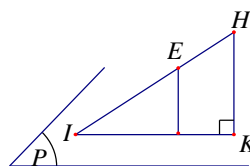
Bước 2. Tính $d(E, (P))$ thông qua HK bằng kỹ thuật đổi điểm

Trường hợp 1. $EH \parallel (P)$



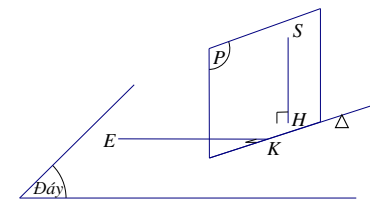
Ta có: $d(E, (P)) = HK$

Trường hợp 2. $EH \cap (P) = I$



$$\frac{d(E, (P))}{d(H, (P))} = \frac{IE}{IH} \Rightarrow d(E, (P)) = \frac{IE}{IH} \cdot d(H, (P))$$

2. Mặt phẳng (P) chứa đường cao SH



Xác định giao tuyến $\Delta = (P) \cap (\text{Đáy})$

Kẻ $EK \perp \Delta$. Suy ra $d(E, (P)) = EK$

Các ví dụ

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm AB và F là điểm trên AB sao cho $FA = 2FB$. Tính $d(B, (SAC)); d(E, (SBC)); d(F, (SBC))$

HD & Giải

a) $d(B, (SAC)) = ?$

Ta có:

$$\begin{cases} B \in (ABC) \\ (ABC) \cap (SAC) = AC \Rightarrow d(B, (SAC)) = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ K \text{ẽ } BN \perp AC \end{cases}$$

b) $d(E, (SBC)) = ?$

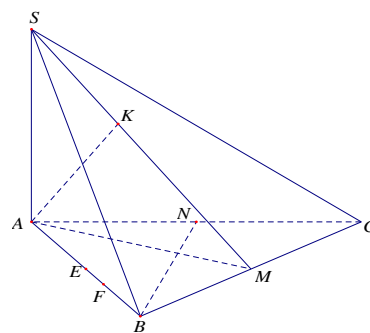
Trước tiên, dựng $d(A, (SBC))$:

$$\begin{cases} A \in (ABC) \\ (ABC) \cap (SBC) = BC \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK \\ K \text{ẽ } AM \perp BC \\ SM \perp BC, AK \perp SM \end{cases}$$

Sau đó, đổi điểm E cho A . Ta có:

$$AE \cap (SBC) = B, \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó: } d(E, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{66}}{22}$$



$$\text{Ta có: } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = a\sqrt{2}$$

$$AK = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}$$

c) $d(F, (SBC)) = ?$. Ta có:

$$\frac{d(F, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{BF}{BA} = \frac{1}{3}. \text{ Suy ra:}$$

$$d(F, (SBC)) = \frac{1}{3} d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{66}}{33}$$

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính

- a) $d(O, (SAD))$ b) $d(A, (SCD))$ c) $d(O, (SCD))$
d) $d(A, (SBC))$ e) $d(O, (SBC))$ f) $d(C, (SAB))$

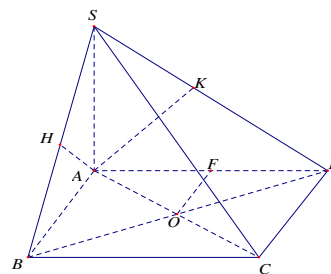
HD & Giải

$$\text{a) } d(O, (SAD)) = OF = \frac{a}{2} \quad \text{b) } d(A, (SCD)) = AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{c) } d(O, (SCD)) = \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{d) } d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \text{e) } d(O, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{f) } d(C, (SAB)) = CB = a$$



Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính $d(A, (SCD))$

HD & Giải

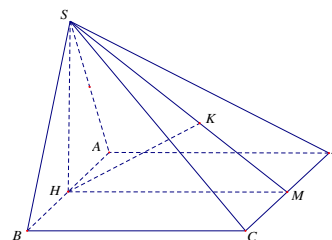
Trước tiên: $d(H, (SCD))$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} H \in (ABCD), (ABCD) \cap (SCD) = CD \\ K \text{ẽ } HM \perp CD, HK \perp SM \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } d(H, (SCD)) = HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Sau đó: Đổi A về điểm H , Ta có $AH \parallel l \cap (SCD)$

$$\text{Nên } d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$



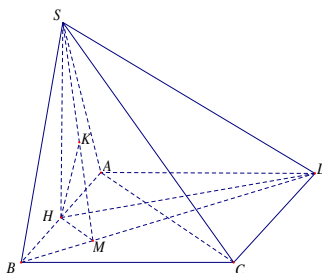
Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a và $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của AB . Tính $d(A, (SBD))$

HD & Giải

Tính được $HD = \frac{a\sqrt{5}}{2}, SH = a$

$d(H, (SBD)) = HK = \frac{a}{3}$ suy ra

$d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = \frac{2a}{3}$



Bài 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của AB và góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng 60° . Tính $d(B, (ACC'A'))$

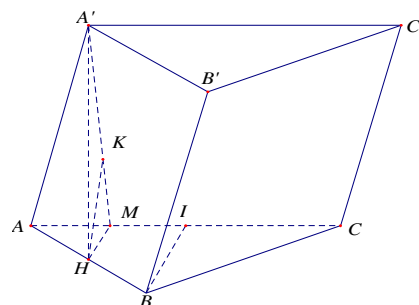
HD & Giải

Ta có: $(AA', (ABC)) = 60^\circ, A'H = a\sqrt{3}, BI = a\sqrt{3},$

$HM = \frac{1}{2}BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

$d(H, (ACC'A')) = d(H, (ACA')) = HK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Suy ra: $d(B, (ACC'A')) = d(B, (AA'C)) = 2HK = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$



Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính a) $d(A, (SBD))$. b) $d(C, (SBD))$.

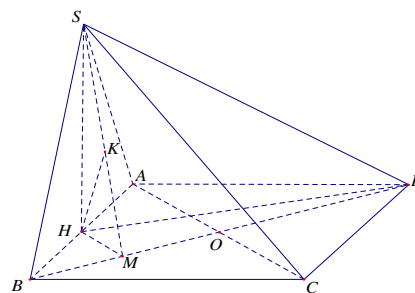
HD & Giải

a) Ta có: $d(H, (SBD)) = AK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$

Do $HM = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{d(H, (SBD))}{d(A, (SBD))} = \frac{BH}{BA} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

b) $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)).$



Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính a) $d(D, (SAC))$. b) $d(B, (SAC))$.

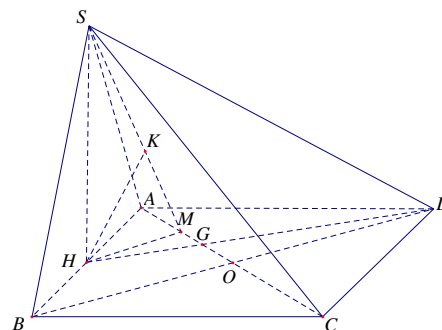
HD & Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD

Ta có: $\frac{d(D, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{DG}{IG} = 2 \Rightarrow d(D, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$

Ta lại có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HM = \frac{BO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}$

Vậy $d(D, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$



Bài 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính theo a khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SCD) .

HD & Giải

Gọi I là trung điểm CD và H là tâm hình vuông $ABCD$

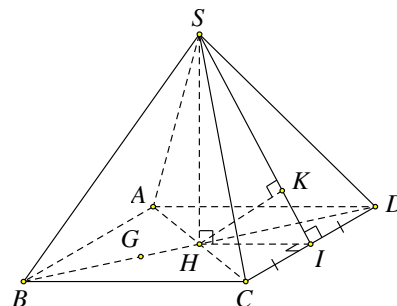
$$\text{Ta có } HI = \frac{a}{2}; SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Xét tam giác vuông SHI ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Gọi $d_1 = d(G, (SCD))$, ta

$$\text{có: } \frac{HK}{d_1} = \frac{DH}{DG} = \frac{3}{4} \Rightarrow d_1 = \frac{4}{3} HK = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$$



Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh đáy bằng $2a$. Biết $SO \perp (ABCD)$, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a}{2}$. Tính SO và S_{ABCD} .

HD & Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên BC . K là hình chiếu vuông góc của O trên SH . Ta có:

$$d(O, (SBC)) = OK = \frac{a}{2}; OH = BO \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Ta lại có: } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3}a^2.$$

II. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2 . Phương pháp tính $d(\Delta_1, \Delta_2)$	
Gọi (P) chứa Δ_2	
Trường hợp 1. $\Delta_1 \perp (P)$ tại M. Từ M, dựng $MN \perp \Delta_2$ tại N. Suy ra: $d(\Delta_1, \Delta_2) = MN$ Lưu ý: (P): có sẵn hình. MN: Đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2	
Trường hợp 2. $\Delta_1 \parallel (P)$ $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(\Delta_1, (P)) = d(E, (P))$ Lưu ý: (P): có sẵn hình hoặc không có sẵn, phải dựng mặt phẳng (P)	

Các ví dụ

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh $SA \perp (ABCD)$ và

$$SA = a\sqrt{3}. \text{ Tính}$$

- a) $d(SC, BD)$ b) $d(SB, AD)$ c) $d(SB, CD)$
d) $d(SC, AD)$ e) $d(SB, AC)$ f) $d(SA, BD)$

HD & Giải

a) $d(SC, BD)$. Ta có: $BD \perp (SAC)$ tại O ($DB \perp SC$)

$$\text{Từ } O, \text{ kẻ } OH \perp SC \Rightarrow d(BD, SC) = OH. \text{ Ta có: } \triangle HCO \sim \triangle ACS \Rightarrow \frac{HO}{SA} = \frac{OC}{SC}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

b) $d(SB, AD)$. Ta có: $SB \perp AD$ (do $AD \perp (SBC)$)

Từ A kẻ $AK \perp SB$. Suy ra: $d(SB, AD) = AK$

$$= \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c) $d(SB, CD)$. Ta có: $CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(SB, CD)$

$$= d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA = a$$

d) $d(SC, AD)$. Ta có: $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SC)$

$$= d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

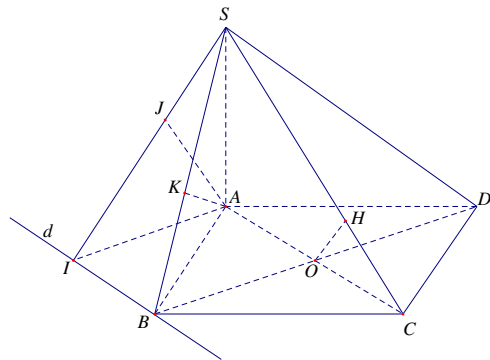
e) $d(SB, AC)$. Dựng (P) chứa SB và song song với AC . Qua B , kẻ $d \parallel AC \Rightarrow (P)$ chính là $mp(SB, d)$.

$$\text{Khi đó: } d(SB, AC) = d(AC, (P)) = d(A, (P))$$

Từ A , kẻ $AI \perp d$ và $AJ \perp SI$. Suy ra $d(A, (P)) = AJ$

$$\text{Ta có: } AIBO \text{ là hình chữ nhật, nên } AI = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}; AJ = \frac{AI \cdot SA}{\sqrt{AI^2 + SA^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}. \quad d(A, (P)) = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

f) $d(SA, BD) = AO$ (do $SA \perp BD$); g) $d(AB, SC) = AM$, $AM \perp SD$



Bài 2. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2\sqrt{2}a$, $AB = a$, $BC = 2a$. Tính $d(SC, BD)$

HD & Giải

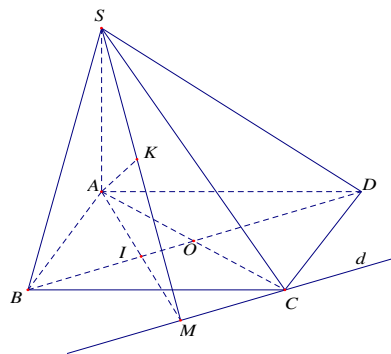
$d(SC, BD)$. Dựng (P) chứa SC và song song với BD . Qua C , kẻ $d \parallel BD \Rightarrow (P)$ chính là $mp(SC, d)$.

$$\text{Khi đó: } d(SC, BD) = d(BD, (P)) = d(B, (P))$$

$$= d(O, (P)) = \frac{1}{2} d(A, (P)) = \frac{1}{2} AK = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$$

(Từ A , kẻ $AM \perp d$ và $AK \perp SM$)

GV. Lư Sĩ Pháp



Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Biết

$AB = a$, $SO = a$. Tính:

a) $d(SC, AB)$

b) $d(SA, BD)$

c) $d(SC, BD)$

d) $d(SB, AC)$

HD & Giải

a) $d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$

$$\text{Ta có: } d(O, (SCD)) = OK = \frac{OM \cdot SO}{\sqrt{OM^2 + SO^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

(hiệu: $(SCD) \cap (ABCD) = CD$, từ O , $OM \perp CD$ và kẻ $OK \perp SM$)

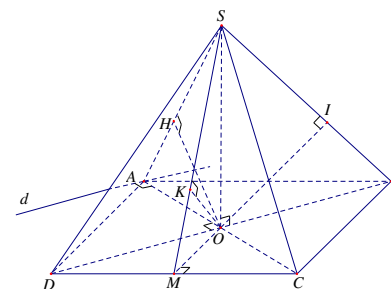
$$\text{Ta lại có: } \frac{d(A, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{CA}{CO} = 2$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

b) $d(SA, BD)$. Qua A , kẻ $d \parallel BD$. Gọi $(P) \equiv (SA, d)$

$$\text{Ta có: } d(BD, (P)) = d(B, (P)) = d(O, (P))$$

$$= \frac{OA \cdot SO}{\sqrt{OA^2 + SO^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



c) $d(SC, BD) = 2d(O, (P))$, với $(P) \equiv (SC, a)$, $a \parallel BD$

d) $d(SB, AC)$. Ta có:

$AC \perp (SOB)$, kẻ $OI \perp SB$

Suy ra: $d(SB, AC) = OI$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

HD & Giải

Gọi I là trung điểm AC . Do ΔABC đều nên $BI \perp AC$.

Trong mặt phẳng (ABC) , dựng hình bình hành $AIBE$.

Ta có $\widehat{AIB} = 90^\circ$ nên là $AIBE$ hình chữ nhật.

Do (SBE) chứa SB và song song với AC nên

$$d(AC; SB) = d(AC; (SBE)) = d(A; (SBE)).$$

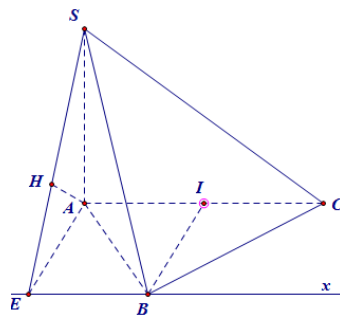
$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BE \perp AE \\ BE \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BE \perp (SAE) \Rightarrow BE \perp AH \text{ mà}$$

$$AH \perp SE$$

$$\text{Suy ra } AH \perp (SAE) \text{ hay } d(AC; SB) = AH.$$

Theo đề bài, $(\widehat{SB, (ABC)}) = \widehat{SBA} = 60^\circ$. Suy ra

$$SA = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}. \text{ Mặt khác } AE = BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Trong tam giác SAE vuông tại A ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2}.$$

$$\text{Do đó } AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}. \text{ Vậy } d(AC; SB) = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SA (hình vẽ). Biết hai đường thẳng CM và SB hợp với nhau một góc 45° , khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB bằng bao nhiêu?

HD & Giải

Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow MN \parallel SB$ và $MN = \frac{1}{2} SB$.

Do ΔABC là tam giác đều có cạnh bằng 1 $\Rightarrow CN \perp AB; CN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $\left\{ \begin{array}{l} CN \perp SA \\ CN \perp AB \end{array} \right. \Rightarrow CN \perp (SAB) \Rightarrow CN \perp MN$ hay ΔCNM là tam giác vuông.

Do $MN \parallel SB \Rightarrow \widehat{CMN}$ là góc tạo bởi hai đường thẳng CM và $SB \Rightarrow \widehat{CMN} = 45^\circ$.

ΔCNM là tam giác vuông cân tại

$$N \Rightarrow MN = CN = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SB = 2MN = \sqrt{3}.$$

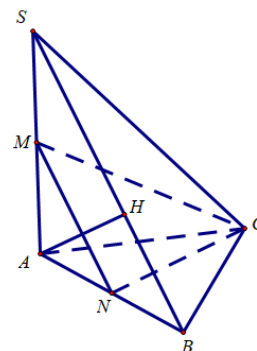
$$\text{Xét } \Delta SAB \text{ vuông tại } A \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Gọi } AH \perp SB \Rightarrow AH \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Do $\left\{ \begin{array}{l} SB \parallel MN \\ MN \subset (CMN) \end{array} \right. \Rightarrow SB \parallel (CMN)$ suy ra khoảng cách giữa hai đường

thẳng SB và CM bằng khoảng cách từ SB đến

$$(CMN) \Rightarrow d(SB; (CMN)) = \frac{1}{2} AH = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$



Bài 6. Cho hình $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 4a$, $SA \perp (ABCD)$ và cạnh

SC tạo với đáy một góc 60° . Gọi M là trung điểm của BC , N là điểm trên AD sao cho $DN = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SB .

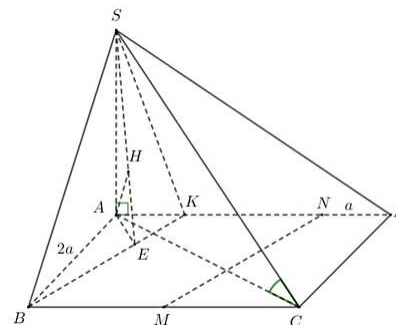
HD & Giải

Lấy $K \in AD : AK = a \Rightarrow AK \parallel MN \Rightarrow MN \parallel (SBK)$

$$d(MN, SB) = d(MN, (SBK)) = d(N, (SBK))$$

$$= 2d(A, (SBK)) = 2AH = \frac{2a\sqrt{285}}{19}.$$

$$\left(\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AK^2} \right)$$



Bài 7. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng bao nhiêu?

HD & Giải

Vẽ hình chữ nhật $AEGF$. Ta có: $CG \parallel (SAF)$

Do đó: $d(GC, SA) = d(GC, (SAF)) = GH$ (H là hình chiếu vuông góc của G lên SF)

$$\text{Ta có: } SG = AG \tan 60^\circ = a; GF = \frac{a}{2}; GH = \frac{GF \cdot SG}{\sqrt{GF^2 + SG^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SB và AC .

HD & Giải

Gọi H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Kết hợp giả thiết

$(SAB) \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp (ABC)$.

Dựng hình bình hành $ACBD$, kẻ $HK \perp BD$ ($K \in BD$), kẻ

$HI \perp SK$ ($I \in SK$).

Ta có

$$AC \parallel (SBD) \Rightarrow d(SB, AC) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))_{Ta}$$

có $AH \cap (SBD) = B$ và $AB = 2HB$ suy ra

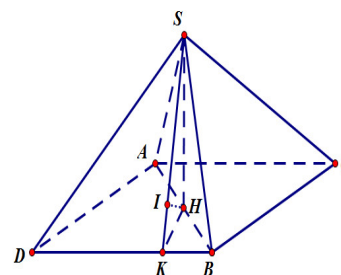
$$d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp HK \Rightarrow BD \perp (SHK) \Rightarrow BD \perp HI \text{ mà } HI \perp SK \\ BD \perp SH \end{cases}$$

$$\Rightarrow HI \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HI \quad (2)$$

Tính HI dựa vào tam giác vuông SHK có đường cao HI , với

$$SH = \frac{a}{2}; HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Theo công thức

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{28}{3a^2}$$

$$\Rightarrow HI = \frac{\sqrt{21}}{14}a \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$d(SB, AC) = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a tâm O và

$SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$

b) Chứng minh rằng $(SIJ) \perp (SBC)$

c) Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC)

d) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy, giữa mặt bên và mặt đáy.

e) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB

f) Mặt phẳng α chứa SI và $\alpha \perp BC$ cắt hình chóp theo một thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện đó.

HD & Giải

a) Ta có $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$ và ABCD là hình vuông

nên $AC = BD = a\sqrt{2}$

Do đó hai tam giác SAC và SBD là hai tam giác đều, từ đó ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp IJ \\ BC \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SIJ)$$

Mà $BC \subset (SBC)$. Suy ra $(SIJ) \perp (SBC)$

c) Trong mặt phẳng (SIJ) dựng $OH \perp SJ$. Khi đó $OH \perp BC$ (vì $BC \perp (SIJ)$)

Suy ra $OH \perp (SBC)$ hay $d(O; (SBC)) = OH$

$$\text{Xét trong tam giác vuông SOJ, ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{14}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{42}}{14}. \text{ Vậy } d(O; (SBC)) = \frac{a\sqrt{42}}{14}$$

d) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

Ta có $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABCD). Vậy

$$(\widehat{SA, (ABCD)}) = \widehat{SAO} = 60^\circ \text{ (vì tam giác SAC đều cạnh bằng } a\sqrt{2})$$

Tính tương tự với các cạnh SB, SC, SD với mặt đáy (ABCD)

Tính góc giữa các mặt bên với mặt đáy.

Ta có $(SAD) \cap (ABCD) = AD$ và $IJ \perp AD$, $SI \perp AD$ (Vì tam giác SAD cân tại S)

Do đó $((SAD); (ABCD)) = (\widehat{SI, IJ}) = \widehat{SIO}$

$$\text{Xét trong tam giác SIO, ta có } \tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{6} \Rightarrow \widehat{SIO} = \arctan \sqrt{6}$$

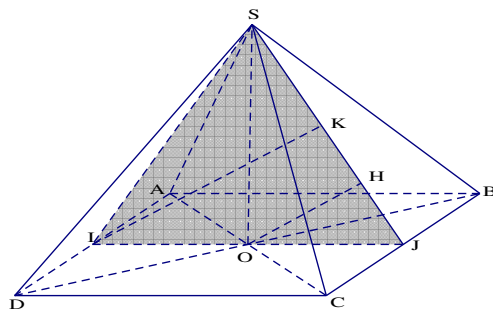
$$\text{Vậy } ((SAD); (ABCD)) = \arctan \sqrt{6}$$

Tính tương tự đối với các mặt còn lại.

e) Ta có $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$.

Suy ra $d(AD; SB) = d(AD; (SBC)) = d(I; (SBC))$

Trong mặt phẳng (SIJ), dựng $IK \perp SJ$. Khi đó $d(I; (SBC)) = IK$



Xét hai tam giác đồng dạng JOH và JIK, ta có $IK = 2OH = \frac{a\sqrt{42}}{7}$. Vậy $d(AD; SB) = \frac{a\sqrt{42}}{7}$

f) Ta có $BC \perp (SIJ)$ và $SI \subset \alpha, \alpha \perp BC$. Suy ra $\alpha \equiv (SIJ)$ hay thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng

α là tam giác SIJ. Vậy $S_{\triangle SIJ} = \frac{1}{2} SO.IJ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ (đvdt)

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO vuông góc với mp(ABCD) và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC, F là trung điểm đoạn BE.

a) Chứng minh rằng: $(SOF) \perp (SBC)$

b) Tính khoảng cách từ O và A đến mp(SBC)

c) Gọi (α) là mặt phẳng qua AD và vuông góc với mp(SBC). Xác định thiết diện của hình chóp với (α) . Tính diện tích thiết diện này.

d) Tính góc giữa (α) và mp(ABCD)

HD & Giải

a) Ta có $\widehat{A} = \widehat{C} = 60^\circ$ nên tam giác BCD là tam giác đều.

Như vậy: $\left. \begin{array}{l} DE \perp BC \\ OF \parallel DE \end{array} \right\} \Rightarrow OF \perp BC$

Mặt khác, ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$

Ta suy ra: $BC \perp (SOF)$, do đó $(SOF) \perp (SBC)$

b) Tính $d(O, (SBC)) = ?$

Trong mp (SOF) dựng $OH \perp SF$ thì $OH \perp (SBC)$

Do đó $d(O, (SBC)) = OH$

Ta có: $SO \perp OF$ nên tam giác SOF vuông tại O

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OF^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{\left(\frac{DE}{2}\right)^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$= \frac{16}{3a^2} + \frac{16}{9a^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$$

$$\text{Vậy } d(O, (SBC)) = OH = \frac{3a}{8}$$

Tính $d(A, (SBC)) = ?$

Gọi $I = FO \cap AD, (I \in AD)$. Trong mp(SIF) dựng $IK \perp SF$

Vì $AD \parallel (SBC)$ nên $d(A, (SBC)) = d(I, (SBC)) = IK$

$$\text{Ta có: } IK = 2OH = \frac{3a}{4}$$

c) Ta có $AD \subset (\alpha)$ và $IK \perp (SBC)$ nên (α) chính là mp(SDK)

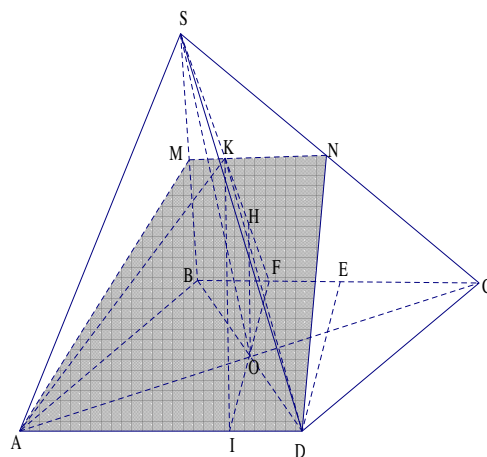
Giao tuyến của (α) với mp (SBC) là đường thẳng $MN \parallel BC$ (MN qua K, với $M \in SB, N \in SC$)

Ta xác định được thiết diện là hình thang ADNM. $S_{ADNM} = \frac{1}{2}(MN + AD).IK$.

$$\text{Ta có } \frac{SK}{SF} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MN = \frac{BC.SK}{SF}$$

Mặt khác, xét tam giác vuông SOF ta tính được $SF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và xét tam giác vuông SKI ta tính được

$$SK = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Do đó } MN = \frac{a}{2}. \text{ Vậy: } S_{ADNM} = \frac{1}{2}(MN + AD).IK = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + a\right) \cdot \frac{3a}{4} = \frac{9a^2}{16} \text{ (đvdt)}$$



$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (ABCD) = AD \\ \text{d) Ta có: } IF \perp AD \\ IK \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{KIF} \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (\alpha) \text{ và } mp(ABCD)$$

$$\text{xét tam giác vuông IKF tại K, có } \cos \widehat{KIF} = \frac{IK}{IF} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{KIF} = 30^\circ$$

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$,

$$SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) và độ dài cạnh SC
- Chứng minh SB vuông góc với BC
- Chứng minh rằng: $(SAC) \perp (ABCD)$
- Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD), tính $\tan \varphi$

HD & Giải

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD)
Khi đó $d(S, (ABCD)) = SH$.

Ta có $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $HA = HB = HD$. Vậy H là trọng tâm của tam giác đều ADB

$$\text{Xét tam giác vuông SAH, ta có } SH^2 = SA^2 - AH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3} = \frac{5a^2}{12}$$

$$\text{Vậy } SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

- Ta có:

$$CH = CO + OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Xét tam giác vuông SHC, ta có:

$$SC^2 = SH^2 + HC^2 = \frac{5a^2}{12} + \frac{4a^2}{3} = \frac{7a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } SC = \frac{a\sqrt{7}}{2}. \text{ Nên tam giác SBC vuông tại}$$

B. Vậy $SB \perp BC$

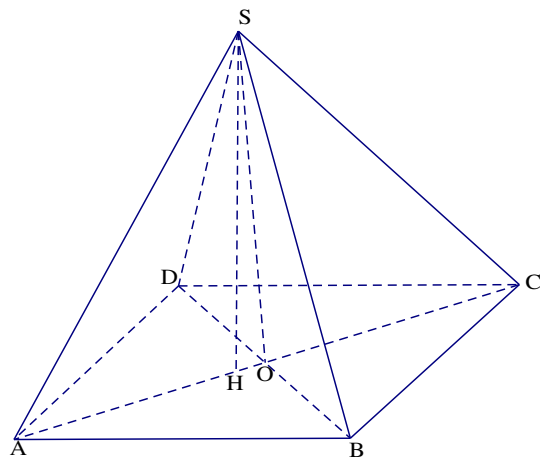
- Ta có $H \in AC$ do đó $SH \subset (SAC)$

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $(SAC) \perp (ABCD)$

$$\left. \begin{array}{l} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ \text{d) Ta có: } OH \perp BD \\ OS \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{SOA} = \varphi$$

Là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD)

$$\tan \varphi = \frac{SH}{HO} = \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{6}{a\sqrt{3}} = \sqrt{5}$$



Bài 4. Cho hình thoi ABCD tâm O, có cạnh a và có $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại O lấy điểm S sao cho $SB = a$.

- Chứng minh tam giác SAC là tam giác vuông và SC vuông góc với BD
- Chứng minh: $(SAD) \perp (SAB); (SCB) \perp (SCD)$
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD

HD & Giải

- Hai tam giác SOB và AOB có OB chung và

$SB = AB = a$ nên chúng bằng nhau

Do đó $SO = AO = CO$, suy ra tam giác SAC vuông tại S .

Mặt khác: $\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Như vậy: $\left. \begin{array}{l} BD \perp (SAC) \\ SC \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow DB \perp SC$

b) Gọi I là trung điểm của SA .

Vì $BS = BA = a$ nên $BI \perp SA$

Và $DS = DA = a$ nên $DI \perp SA$. Ta suy ra

$\widehat{BID}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

Trong tam giác vuông AOB , ta có:

$$OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Trong tam giác vuông cân BID , ta có

$$OI = \frac{OA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Như vậy: $OB = OI = OD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ do đó tam

giác BID vuông tại I

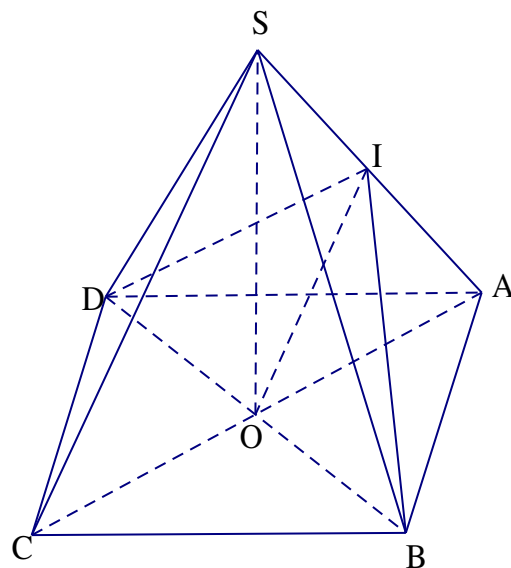
Hay $(SAD) \perp (SAB)$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$(SCB) \perp (SCD)$

c) Ta có: $\left. \begin{array}{l} OI \perp SA \\ OI \perp DB \end{array} \right\} \Rightarrow OI$ là đường vuông góc chung của SA và BD

$$\text{Như vậy: } d(SA, BD) = OI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Hãy xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau BD' và $B'C$.

b) Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD' và $B'C$.

HD & Giải

a) Ta có $\left. \begin{array}{l} B'C \perp BC' \\ B'C \perp D'C' \end{array} \right\} \Rightarrow B'C \perp (D'C'B)$

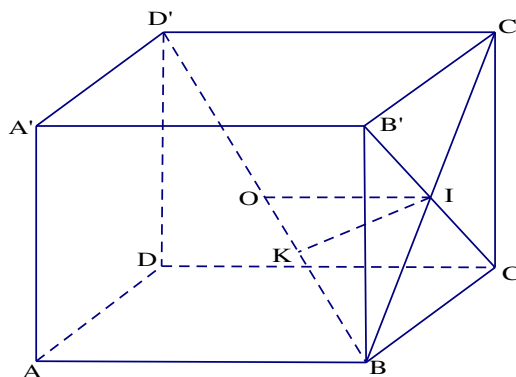
$$= \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow KI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Gọi I là tâm hình vuông $BCC'B'$. Trong mặt phẳng $(BC'D')$ vẽ $IK \perp BD'$ tại K .

Ta có IK là đường vuông góc chung của BD' và $B'C$.

b) Gọi O là trung điểm của BD' . Vì tam giác IOB vuông tại I nên:

$$\frac{1}{KI^2} = \frac{1}{IO^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$



Bài 6. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , có $AD = 2a, AB = BC = a$. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S . Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên Sc và SD . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$

b) AD', AC' và AB cùng nằm trên một mặt phẳng

c) Đường thẳng $C'D'$ luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S di động trên tia Ax .

HD & Giải

a) Áp dụng định lí ba đường vuông góc, ta chứng minh được

$$SB \perp BC \text{ nên } \widehat{SBC} = 90^\circ$$

Vì tam giác ABC vuông cân nên $\widehat{ACB} = 45^\circ$, từ đó suy ra

$$\widehat{ACD} = 90^\circ. \text{ Áp dụng định lí ba đường vuông góc, ta chứng minh}$$

được $SC \perp CD$ hay $\widehat{SCD} = 90^\circ$

b) Trong mặt phẳng (SAC) vẽ $AC' \perp SC$ và trong mặt phẳng (SAD) vẽ $AD' \perp SD$.

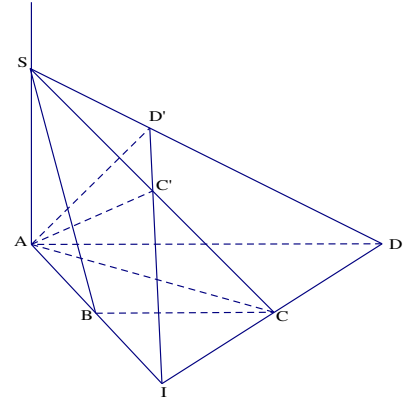
Ta có

$$\left. \begin{array}{l} AC' \perp CD (do CD \perp (SAC)) \\ AC' \perp SC \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow AC' \perp (SCD) \Rightarrow AC' \perp SD$$

$$\text{Ta lại có } \left. \begin{array}{l} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$$

Ba đường thẳng AD' , AC' và AB cùng đi qua điểm A và vuông góc với SD nên cùng nằm trong mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SD.



c) Ta có $C'D'$ là giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SCD). Do đó khi S di động trên tia Ax thì $C'D'$ luôn đi qua điểm I cố định là giao điểm của AB và CD.

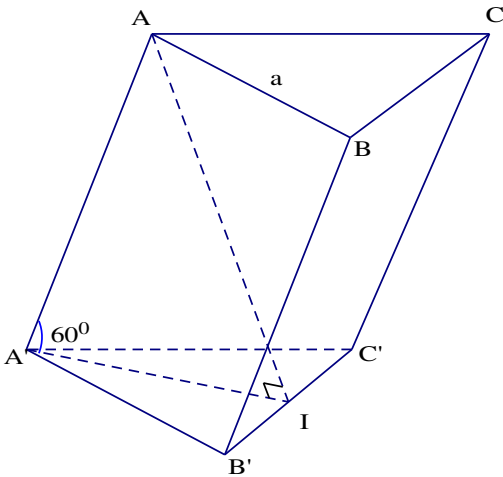
$$(AB \subset (\alpha), CD \subset (SCD))$$

Bài 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Các cạnh bên của lăng trụ tạo với mặt phẳng đáy góc 60° và hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm I của cạnh $B'C'$.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ.

b) Chứng minh rằng mặt bên $BCC'B'$ là một hình vuông.

HD & Giải



Ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $d((ABC); (A'B'C')) = AI$

$$\text{Do đó } AI = AA' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy khoảng}$$

$$\text{cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ là } \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{b) Ta có } \left. \begin{array}{l} B'C' \perp A'I \\ B'C' \perp AI \end{array} \right\} \Rightarrow B'C' \perp (AIA')$$

$$\Rightarrow B'C' \perp AA'. \text{ Mà } AA' \parallel BB' \parallel CC' \text{ nên } B'C' \perp BB'$$

Vậy mặt bên $BCC'B'$ là một hình vuông vì nó là hình thoi có một góc vuông.

a) Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Theo giả thiết ta

$$\text{có } AI \perp (A'B'C') \text{ và } \widehat{AA'I} = 60^\circ$$

Bài 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, góc giữa BB' với mặt phẳng (ABC) bằng 60° và $BB' = a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ.

HD & Giải

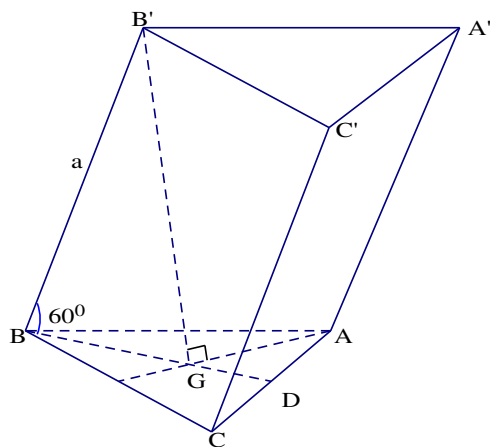
Gọi D là trung điểm AC và G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\text{Ta có } B'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^\circ$$

$$\text{Vì } (ABC) \parallel (A'B'C') \text{ nên } d((ABC); (A'B'C')) = B'G$$

$$\text{Do đó } B'G = BB' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy khoảng}$$

$$\text{cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ là } \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Bài 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

HD & Giải

Gọi E là trung điểm của BB' . Khi đó mặt phẳng (AME) song song với $B'C$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$ bằng khoảng cách giữa $B'C$ đến mặt phẳng (AME)

Hơn nữa

$$d(B'C; (AME)) = d(C; (AME)) = d(B; (AME))$$

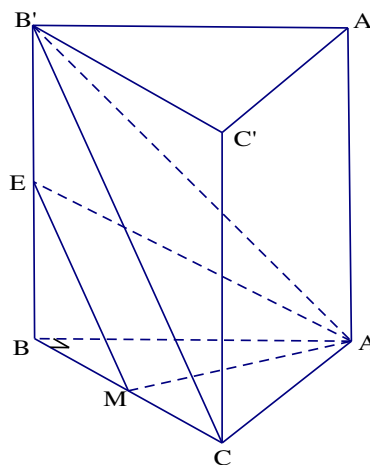
Gọi h là khoảng cách từ B đến mp (AME) . Do tứ diện $BAME$ có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và

$$B'C \text{ là } \frac{a\sqrt{7}}{7}$$



Bài 10. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BC$.

a) Tính AA'

b) Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (ABC)

HD & Giải

a) Gọi D là trung điểm của BC , ta có

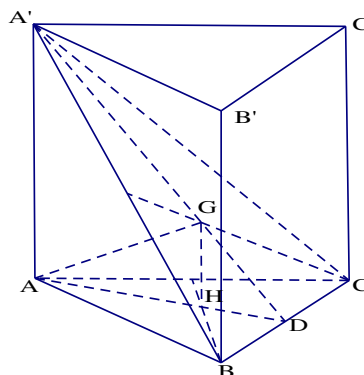
$$BC \perp AD \Rightarrow BC \perp A'D, \text{ suy ra } \widehat{ADA'} = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } AA' = AD \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

b) Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC

$$\left. \begin{array}{l} GH \parallel AA' \\ AA' \perp (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow GH \perp (ABC)$$

$$\text{Suy } d(G; (ABC)) = GH = \frac{AA'}{3} = \frac{a}{2}$$



Bài 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, Gọi I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) .

HD & Giải

Trong tam giác $A'AB$ hạ đường cao $AK \perp A'B (K \in A'B)$ Vì

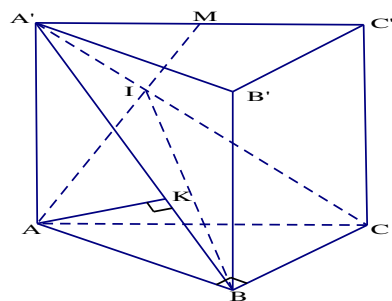
$BC \perp (ABB'A')$ nên $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC)$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK

Trong tam giác $A'AB$ vuông tại A , có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy}$$

khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$



Bài 12. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC .

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

HD & Giải

a) Gọi H là trung điểm của BC . Suy ra $A'H \perp (ABC)$. Vì

$(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $d((ABC); (A'B'C')) = A'H$

Do tam giác ABC vuông cân tại A nên

$$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a.$$

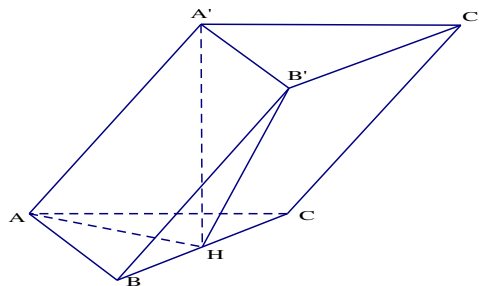
Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ là $a\sqrt{3}$.

b) Ta có $\left. \begin{matrix} AA' \parallel BB' \\ B'C' \parallel BC \end{matrix} \right\} \Rightarrow (AA'; B'C') = (BB'; BC) = \widehat{B'BH}$

Trong tam giác vuông $A'B'H$ có: $H'B = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác $B'BH$ cân tại B' . Áp dụng

định lí Côsin có: $\cos \widehat{B'BH} = \frac{BB'^2 + BH^2 - B'H^2}{2BB' \cdot BH} = \frac{4a^2 + a^2 - 4a^2}{2 \cdot 2a \cdot a} = \frac{1}{4}$. Suy ra $\widehat{B'BH} \approx 75^\circ 31'$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O . $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

- Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$
- Chứng minh rằng $MN \perp SB$
- Tính góc giữa SO và mặt phẳng (SAB)
- Tính góc giữa hai đường thẳng MN và SO

Bài 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm M của cạnh $B'C'$. Chứng minh rằng $B'B$ vuông góc với $B'C'$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O . SA vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SA = a$.

- Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$
- Trong tam giác SAC , kẻ OK vuông góc với SC tại K . Chứng minh rằng $SC \perp BK$
- Gọi I là trung điểm của AB . Tính góc giữa đường thẳng SB và CD
- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ASD) .

Bài 4. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'C'$ vuông góc với BD .

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O . SB vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SB = a\sqrt{3}$. Gọi N là trung điểm SD , M là hình chiếu của B trên SC .

- Chứng minh rằng $AO \perp (SBD)$
- Tính góc giữa đường thẳng NO và BM
- Chứng minh BD vuông góc với NC
- Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) .

Bài 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.DEF$, có tam giác ABC vuông tại A , $AD \perp (DEF)$ và $AB = AD$. Chứng minh rằng CE vuông góc với BD .

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O . SA vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SA = 2a$.

- Chứng minh rằng $CD \perp (SAD)$
- Tính góc giữa đường thẳng AB và SC
- Chứng minh BD vuông góc với SC
- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .

Bài 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^\circ$. Chứng minh $A'C$ vuông góc với $B'D$.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . SA vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SA = AB = a$ và $SD = 2a$. Gọi M là trung điểm của SB

- Chứng minh rằng $AD \perp (SAB)$
- Tính góc giữa đường thẳng OM và BC
- Chứng minh AM vuông góc với SC
- Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) .

Bài 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.DEF$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , các cạnh bên vuông góc đáy và mặt bên $ABED$ là hình vuông tâm O . Chứng minh tam giác ODF là tam giác vuông.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . SA vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SA = AD = a\sqrt{3}$ và $SB = 2a$. Gọi I là trung điểm của SD .

- Chứng minh rằng $AB \perp (SAD)$
- Tính góc giữa đường thẳng OI và CD
- Chứng minh AI vuông góc với SC
- Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) .

Bài 12. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.DEF$ có đáy DEF là tam giác vuông tại E , các cạnh bên vuông góc đáy và mặt bên $BCEF$ là hình vuông tâm O . Chứng minh tam giác ODF là tam giác vuông.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O . SO vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và SO , kẻ OP vuông góc với SA .

- a) Chứng minh rằng $SA \perp (PBD)$
 b) Tính góc giữa đường thẳng AD và SB
 c) Chứng minh MN vuông góc với AD
 d) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABCD).

Bài 14. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng $A'H$ vuông góc với mp(ABC). Chứng minh rằng AA' vuông góc với BC.

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O. SA vuông góc với

mp(ABCD); $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và SC; I là giao điểm của BM và AC.

- a) Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBM)$
 b) Chứng minh CD vuông góc với SM
 c) Tính khoảng cách từ điểm N đến mp(ABI)
 d) Tính góc giữa đường thẳng NO và đường thẳng SD.

Bài 16. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Tính khoảng cách giữa $A'B$ và $B'C'$.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a. SA vuông góc mp(ABCD),

$SC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SD.

- a) Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD);
 b) Chứng minh SC vuông góc với AM;
 c) Tính góc giữa SD và mp(SAB).

Bài 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A,

$AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy.

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a. SA vuông

góc mp(ABCD), $SC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SB.

- a) Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD);
 b) Chứng minh SC vuông góc với AM;
 c) Tính góc giữa SB và mp(SAD).

Bài 20. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, góc giữa BB' với mặt phẳng (ABC) bằng 60° và $BB' = a$. Hình chiếu của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ.

Bài 21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mp(ABCD),

$SA = a\sqrt{3}$ và $SD = 2a$

- a) Chứng minh mp(SAC) vuông góc với mp(SBD)
 b) Tính góc giữa mp(SCD) và mp(ABCD)
 c) Tính khoảng cách từ điểm O đến mp(SAB).

Bài 22. Cho hình chóp đều tam giác S.ABC, gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu của I lên SC. Chứng minh tam giác HIC là tam giác vuông.

Bài 23. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, SA vuông góc với mp(ABCD),

$SA = a, SB = a\sqrt{2}$ và $SD = 2a$

- a) Chứng minh mp(SAB) vuông góc với mp(SAD)
 b) Tính góc giữa mp(SBC) và mp(ABCD)
 c) Tính khoảng cách từ điểm O đến mp(SAB).

Bài 24. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.DEF, có đáy ABC là tam giác vuông tại B và mặt bên ABED là hình vuông tâm O. Chứng minh tam giác ODF là tam giác vuông.

Bài 25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a. SA vuông góc mp(ABCD),

$SB = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SD.

- a) Chứng minh BD vuông góc với mặt phẳng (SAC);
 b) Chứng minh SC vuông góc với AM;
 c) Tính góc giữa SO và mp(ABCD).

Bài 26. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Góc

giữa đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm A' đến $mp(ABC)$.

Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a . SA vuông

góc $mp(ABCD)$, $SB = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SB .

a) Chứng minh CD vuông góc với mặt phẳng (SAD) ;

b) Chứng minh SC vuông góc với AM ;

c) Tính góc giữa SC và $mp(ABCD)$.

Bài 28. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình lăng trụ đứng.

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A . SB vuông góc với $mp(ABC)$,

$BC = 5a, AC = 4a$ và $SB = 5a\sqrt{3}$

a) Chứng minh $mp(SAB)$ vuông góc với $mp(SAC)$

b) Tính góc tạo bởi giữa đường thẳng SC và $mp(ABC)$

c) Tính khoảng cách từ điểm B đến $mp(SAC)$

Bài 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = 2a$ và

$BC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C$.

Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, SD vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SB = 5a$.

a) Chứng minh $mp(SBC)$ vuông góc với $mp(SCD)$

b) Tính góc giữa $mp(SCD)$ và $mp(SAB)$

c) Tính khoảng cách từ điểm D đến $mp(SAB)$.

Bài 32. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại C . Biết cạnh bên của hình lăng trụ bằng $7a, AB = 5a$ và $AC = 3a$. Tính khoảng cách từ điểm C đến $mp(C'AB)$.

Bài 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết góc tạo bởi cạnh $A'B$ và mặt phẳng đáy là 30° $AC = 5a$ và $AB = 3a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến $mp(B'AC)$.

Bài 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, SB vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SD = 5a$.

a) Chứng minh $mp(SAB)$ vuông góc với $mp(SAD)$

b) Tính góc giữa $mp(SAB)$ và $mp(SCD)$

c) Tính khoảng cách từ điểm B đến $mp(SAD)$.

Bài 35. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết cạnh bên của hình lăng trụ bằng $7a, AB = 3a$ và $AC = 5a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến $mp(B'AC)$.

Bài 36. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết góc tạo bởi cạnh AC' và mặt phẳng đáy là 30° $AC = 5a$ và $AB = 3a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến $mp(B'AC)$.

Bài 37. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B ; $SA \perp (ABC)$. Cho

$SA = a, BC = BA = a\sqrt{2}$

a) Chứng minh rằng $mp(SAB)$ vuông góc với $mp(SBC)$

b) Trong mặt phẳng (SAB) , vẽ AH vuông góc với SB tại H . Chứng minh $AH \perp mp(SBC)$

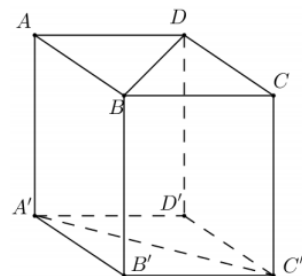
c) Gọi O là trung điểm của AC , K là hình chiếu vuông góc của O trên $mp(SBC)$. Tính độ dài đoạn thẳng OK .

Bài 38. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Góc hợp bởi mặt bên và mặt đáy bằng 30° . Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và $mp(SCD)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

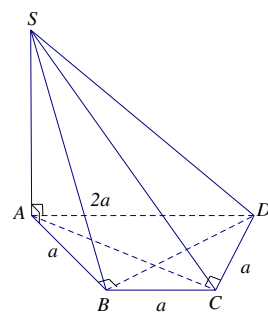
Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a . Tìm khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$.

- A. $d = a\sqrt{2}$. B. $d = a\sqrt{3}$.
C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $d = a$.



Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA = a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $d(A, (SCD)) = 2a\sqrt{2}$. B. $d(A, (SCD)) = a\sqrt{2}$.
C. $d(A, (SCD)) = a$. D. $d(A, (SCD)) = a\sqrt{3}$.



Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào dưới đây là sai ?

- A. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$. B. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.
C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$. D. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Đường thẳng SO vuông góc với mp $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC , F là trung điểm đoạn BE . Tính khoảng cách h từ O đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $h = \frac{3a}{8}$. B. $h = \frac{3a}{4}$. C. $h = \frac{3a}{2}$. D. $h = 3a$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .

- A. $d(SB, CD) = \frac{a}{2}$. B. $d(SB, CD) = a$. C. $d(SB, CD) = a\sqrt{2}$. D. $d(SB, CD) = 2a$.

Câu 6. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = OB = a$ và $OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

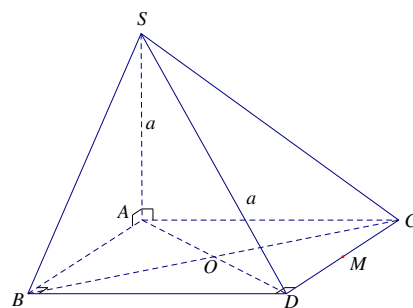
- A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

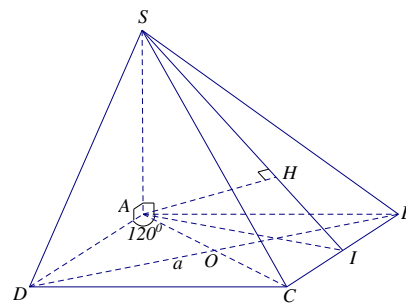
- A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD . Tìm khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) .

- A. $d(M, (SAB)) = a$. B. $d(M, (SAB)) = a\sqrt{2}$.
C. $d(M, (SAB)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $d(M, (SAB)) = \frac{a}{2}$.



Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $BD = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm A đến $mp(SBC)$.



- A. $d(A, SBC) = \frac{3a}{4}$. B. $d(A, SBC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
C. $d(A, SBC) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $d(A, SBC) = \frac{a}{4}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

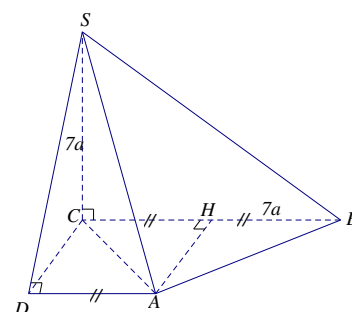
Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = AC = AD = 3$. Tìm diện tích S của tam giác BCD .

- A. $S = \frac{9}{2}$. B. $S = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. C. $S = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. D. $S = \frac{27}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tìm góc φ giữa mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 45^\circ$. D. $\varphi = 120^\circ$.

Câu 13. Hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh $7a$, cạnh SC vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SC = 7a$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tìm $\cos \varphi$.



- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{7}$.
C. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{7}$.

Câu 14. Tìm khoảng cách d giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a .

- A. $d = \frac{2a}{3}$. B. $d = 2a$. C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP .
B. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì, ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
C. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
D. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{5}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{5a}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $a\sqrt{5}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng

(ABC) và $SA = \frac{a}{2}$. Tìm diện tích S của tam giác SBC .

A. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

B. $S = a^2$.

C. $S = \frac{3}{2}a^2$.

D. $S = \frac{a^2}{2}$.

Câu 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách h giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện $A'ABD$.

A. $d = a\sqrt{2}$.

B. $d = \frac{3a}{2}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'}$.

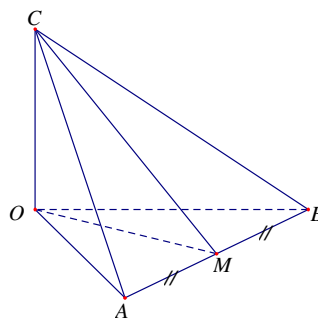
Câu 20. Cho tứ diện $OABC$ có AO, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $AO = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc φ giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\varphi = 135^\circ$.

B. $\varphi = 30^\circ$.

C. $\varphi = 120^\circ$.

D. $\varphi = 60^\circ$.



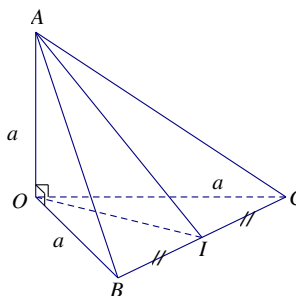
Câu 21. Cho tứ diện $OABC$ có AO, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $AO = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Tìm khoảng cách d giữa đường thẳng OA và BC .

A. $d = 2a$.

B. $d = \frac{a}{2}$.

C. $d = a\sqrt{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



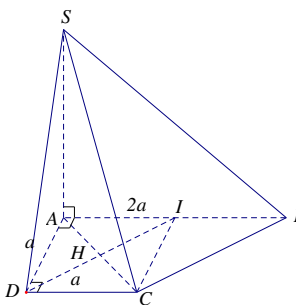
Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $AB = 2a, AD = DC = a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \frac{1}{5}$.

B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\tan \varphi = \frac{1}{2}$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.



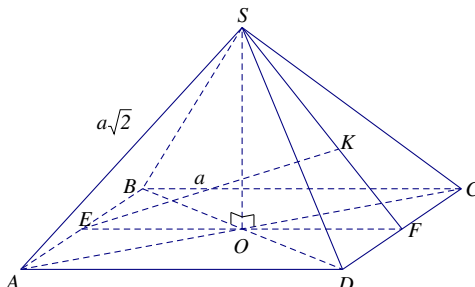
Câu 23. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) .

A. $d(AB, (SCD)) = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.

B. $d(AB, (SCD)) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

C. $d(AB, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

D. $d(AB, (SCD)) = \frac{a\sqrt{42}}{6}$.



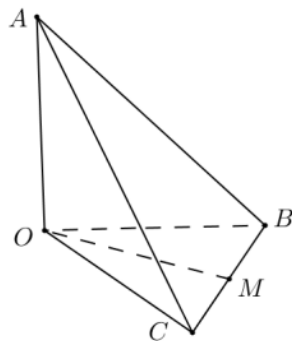
Câu 24. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Tìm khoảng cách

d từ điểm S tới mặt phẳng đáy.

- A. $d = a$. B. $d = \frac{3}{2}a$. C. $d = a\sqrt{2}$. D. $d = a\sqrt{3}$.

Câu 25. Cho tứ diện $OABC$ có AO, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $AO = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC . Tìm góc φ giữa hai đường thẳng OM và AB .

- A. $\varphi = 90^\circ$. B. $\varphi = 60^\circ$.
C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\varphi = 45^\circ$.



Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. D. a .

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

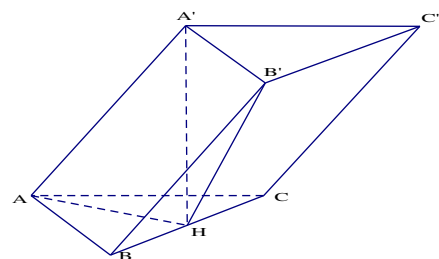
Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

- A. $d(AB, SC) = a\sqrt{35}$. B. $d(AB, SC) = a\sqrt{42}$.
C. $d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{42}}{7}$. D. $d(AB, SC) = a\sqrt{3}$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC .

Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là φ . Tìm $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$. B. $\cos \varphi = -\frac{1}{4}$.
C. $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.



Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .

A. $d(SC, CD) = 2a$.

B. $d(SC, CD) = a$.

C. $d(SC, CD) = a\sqrt{2}$.

D. $d(SC, CD) = a\sqrt{3}$.

Câu 34. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC .

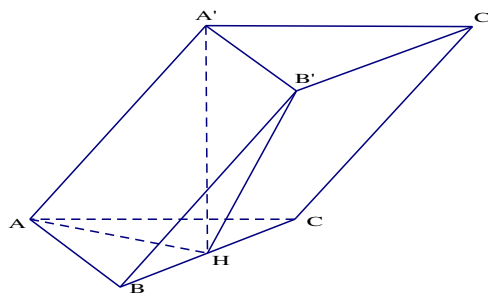
Tìm khoảng cách h giữa hai mặt đáy.

A. $h = a$.

B. $h = a\sqrt{3}$.

C. $h = a\sqrt{5}$.

D. $h = a\sqrt{2}$.



Câu 35. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $d(A, (A'BD)) = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

B. $BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

C. $d(AB, CC') = b$.

D. $d(BB', DD') = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Câu 36. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$.

B. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC .

C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

D. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.

Câu 37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\frac{\sqrt{30}a}{6}$.

B. $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$.

C. $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$.

D. $\frac{\sqrt{30}a}{12}$.

Câu 39. Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a}$. Vectơ nào sau đây không phải là vectơ chỉ phương của d ?

A. $k\vec{a}; (k \neq 0)$.

B. $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $2\vec{a}$.

D. $\vec{0}$.

Câu 40. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

D. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 41. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$.

Câu 42. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với

mặt phẳng kia;

C. Hai mặt phẳng $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) \cap (\beta) = d$. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d .

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ) .

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

- A.** 60° . **B.** 90° . **C.** 30° . **D.** 45° .

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính khoảng cách h từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

- A.** $h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.
C. $h = \frac{a\sqrt{15}}{6}$. **D.** $h = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 45. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c .

- A.** $h = a + b + c$. **B.** $h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
C. $h = \sqrt{a + b + c}$. **D.** $h = a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD và φ là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm $\tan \varphi$.

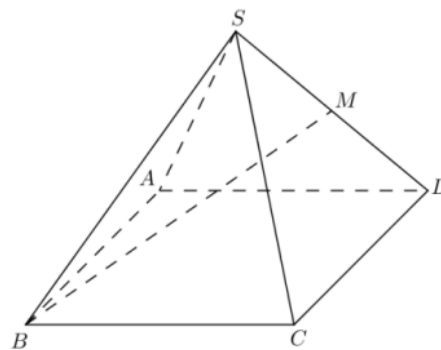
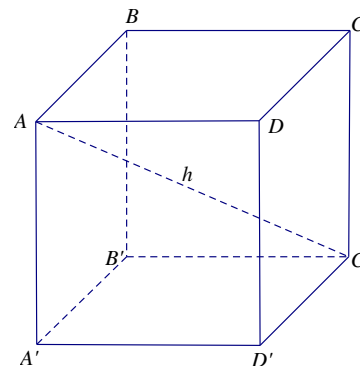
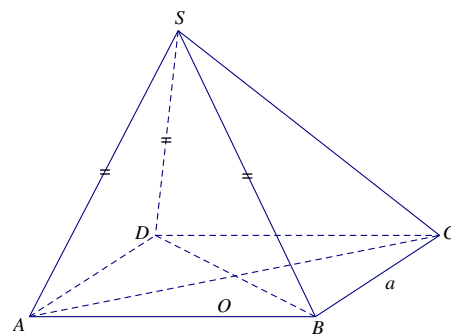
- A.** $\tan \varphi = \frac{2}{3}$. **B.** $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\tan \varphi = \frac{1}{3}$. **D.** $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.** $d(A, (BCC'B')) = \frac{3}{2}a$. **B.** $d(A, (A'BD)) = \frac{a}{3}$.
C. $d(A, (CDD'C')) = a\sqrt{2}$. **D.** $AC' = a\sqrt{3}$.

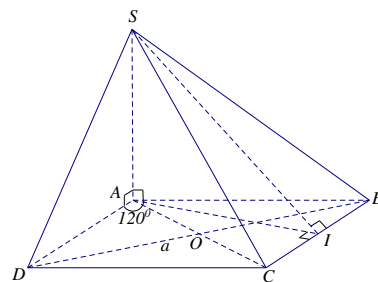
Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $C, AC = a, BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A.** 30° . **B.** 90° . **C.** 45° . **D.** 60° .



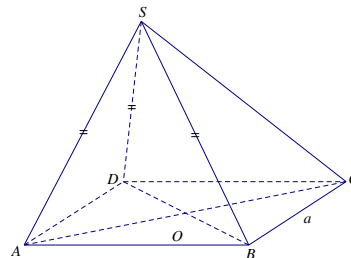
Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $BD = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 60° . Tìm chiều cao h của hình chóp.

A. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $h = a$. C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $h = \frac{a}{2}$.



Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \sqrt{5}$. B. $\tan \varphi = \sqrt{7}$.
C. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

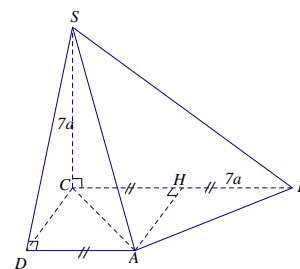


Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Câu 52. Hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh $7a$, cạnh SC vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SC = 7a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. $d(SA, BC) = a\sqrt{21}$. B. $d(SA, BC) = \frac{7a\sqrt{3}}{3}$.
C. $d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{21}}{21}$. D. $d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.



Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là α . Tìm $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\tan \alpha = \sqrt{2}$. C. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. D. $\tan \alpha = 1$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

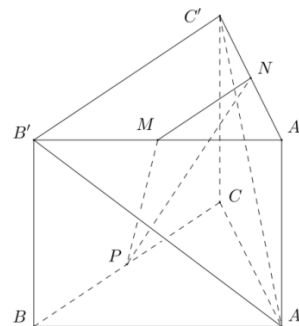
A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. B. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. a .

Câu 55. Gọi h là độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a . Tìm h .

A. $h = 3a$. B. $h = 2a$. C. $h = a\sqrt{3}$. D. $h = a\sqrt{2}$.

Câu 56. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C'$ và BC . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) . Tìm $\cos \varphi$.

A. $\cos \varphi = \frac{18\sqrt{13}}{65}$. B. $\cos \varphi = \frac{17\sqrt{13}}{65}$.
C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{13}}{65}$. D. $\cos \varphi = \frac{6\sqrt{13}}{65}$.



Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Đường thẳng SO vuông góc với mp($ABCD$) và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC , F là trung điểm đoạn BE . Tính khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC).

- A. $h = \frac{a}{2}$. B. $h = \frac{3a}{8}$. C. $h = \frac{a}{4}$. D. $h = \frac{3a}{4}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. Góc hợp giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

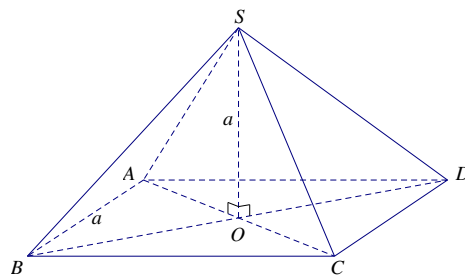
Câu 59. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a}{2}$. Tìm góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).

- A. $\varphi = 150^\circ$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\varphi = 30^\circ$.

Câu 60. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$. Đường thẳng SO của hình chóp vuông góc với mặt đáy ($ABCD$) và $SO = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB .

- A. $d(SC, AB) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$. B. $d(SC, AB) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

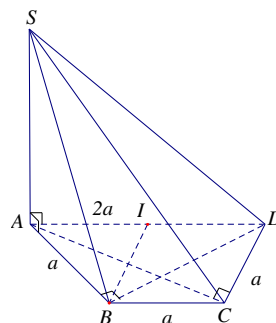
- C. $d(SC, AB) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $d(SC, AB) = a\sqrt{5}$.



Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Gọi I là trung điểm của AD và với $SA = a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

- A. $d(B, (SCD)) = \frac{a}{2}$. B. $d(B, (SCD)) = \frac{3a}{2}$.

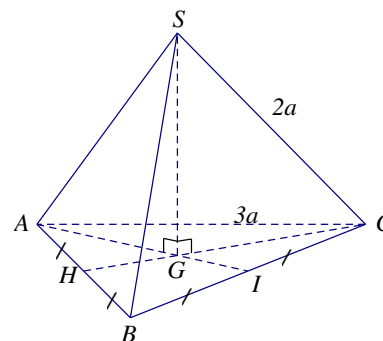
- C. $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $d(B, (SCD)) = a\sqrt{2}$.



Câu 62. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SG .

- A. $d(AB, SG) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $d(AB, SG) = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

- C. $d(AB, SG) = \frac{a}{3}$. D. $d(AB, SG) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Câu 63. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = a^2\sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = a^2\sqrt{3}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 64. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy $AB=3a, AC=a$ và $SC=2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° .
- B. 90° .
- C. 45° .
- D. 30° .

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA=a\sqrt{6}$. Tìm góc φ giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\varphi=90^\circ$.
- B. $\varphi=30^\circ$.
- C. $\varphi=45^\circ$.
- D. $\varphi=60^\circ$.

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa $mp(SCD)$ và $mp(ABCD)$ là α . Tìm $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$.
- B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- C. $\tan \alpha = 1$.
- D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 68. Cho tam giác ABC với $AB=7cm, BC=5cm, CA=8cm$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm O sao cho $AO=4cm$. Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC .

- A. $d(O, BC)=3cm$.
- B. $d(O, BC)=8cm$.
- C. $d(O, BC)=4cm$.
- D. $d(O, BC)=9cm$.

Câu 69. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $d(S, (ABCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- B. $d(S, (ABCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- C. $d(S, (ABCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- D. $d(S, (ABCD)) = \frac{a}{2}$.

Câu 70. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tìm khoảng cách h giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

- A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- B. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- C. $h = \frac{a}{3}$.
- D. $h = 2a$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	B	A	B	C	B	A	B	D	B	A	A	C	D	A	D	C	C	C	D	B	A	A	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	B	A	D	B	C	D	B	B	A	C	D	B	D	A	C	D	D	C	B	C	D	A	C	A
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
B	A	A	A	C	C	D	C	D	B	C	D	A	A	D	D	C	B	A	B					

MỘT SỐ ĐỀ ÔN KIỂM TRA MỘT TIẾT

Đề 1

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Qua một điểm O cho trước có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

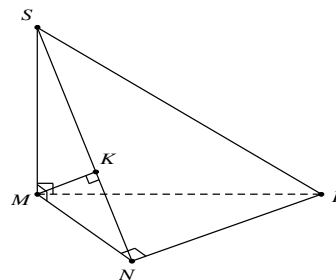
- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 2: Hình chóp tứ giác đều có đáy là hình gì?

- A. Hình thoi. B. Hình vuông. C. Hình chữ nhật. D. Hình bình hành.

Câu 3: Cho hình chóp $S.MNP$ có đáy MNP là tam giác vuông tại N , cạnh bên SM vuông góc với đáy, MK là đường cao của ΔSMN . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $MK \perp SM$. B. $MK \perp MN$.
C. $MK \perp NP$. D. $MK \perp MP$.



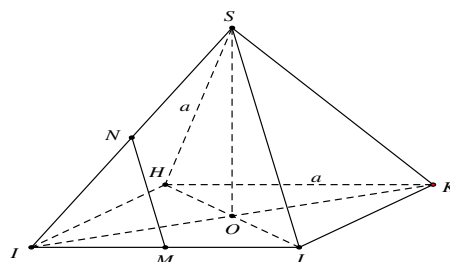
Câu 4: Lấy lại dữ kiện của câu 3. Xác định góc giữa đường thẳng SP và (MNP)

- A. $\widehat{MNP}$ B. $\widehat{PSM}$ C. $\widehat{SMP}$ D. $\widehat{SPM}$

Câu 5: Cho hình chóp tứ giác đều $S.HIJK$ có các cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng a , O là giao điểm hai đường chéo.

M, N lần lượt là trung điểm IJ, SI Khẳng định nào dưới đây **sai** ?

- A. $(SHJ) \perp (SKI)$. B. $KI \perp SH$.
C. $KI \perp SJ$. D. $(SHJ) \perp (SKH)$.



Câu 6: Lấy lại dữ kiện của câu 5. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

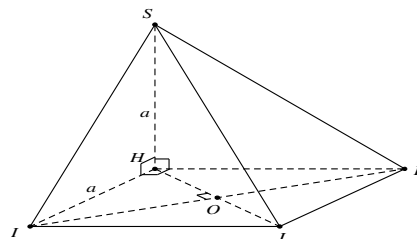
- A. $d(I, (SHJ)) = IO$ B. $d(I, (SHJ)) = KO$
C. $d(I, (SHJ)) = 2d(K, (SHJ))$ D. $d(I, (SHJ)) = d(K, (SHJ))$

Câu 7: Lấy lại dữ kiện của câu 5. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và SH

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 8: Cho hình chóp $S.HIJK$ có đáy là hình vuông tâm O , $SH \perp (HIJK)$, $SH = HI = a$. Khẳng định nào dưới đây **sai** ?

- A. $(SIJ) \perp (SKJ)$. B. $(SHK) \perp (SKJ)$.
C. $(SHK) \perp (HIJK)$. D. $(SHI) \perp (SHK)$.



Câu 9: Lấy lại dữ kiện của câu 8. Góc giữa hai mặt phẳng $(HIJK)$ và (SIJ) là

- A. $\widehat{SIH}$. B. $\widehat{SIK}$. C. $\widehat{SJI}$. D. $\widehat{KIJ}$.

Câu 10: Lấy lại dữ kiện của câu 8. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. $d(H, (SIJ)) = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $d(H, (SIJ)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
C. $d(H, (SIJ)) = a$. D. $d(H, (SIJ)) = a\sqrt{2}$.

II. Phần tự luận

Bài 1: Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy $MNPQ$ là hình vuông tâm O , cạnh đáy bằng $3a$. Biết $SM \perp (MNPQ)$, $SM = a\sqrt{3}$.

a. Chứng minh rằng: $(SMP) \perp (SNQ)$.

b. Tính góc giữa đường thẳng MQ và (SPQ) .

c. Tính $d(P, (SNQ))$.

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm AD , O là giao điểm giữa AC và BD , O' là giao điểm giữa $A'C'$ và $B'D'$. Tính khoảng cách giữa $B'O$ và $O'M$.

Đề 2

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Qua một điểm O cho trước có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

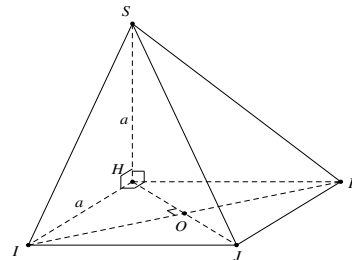
- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 2: Hình chóp đều có các mặt bên là hình gì?

- A. Tam giác đều. B. Tam giác vuông. C. Tam giác cân. D. Hình bình hành.

Câu 3: Cho hình chóp $S.HIJK$ có đáy là hình vuông tâm O , $SH \perp (HIJK)$, $SH = HI = a$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $(SHI) \perp (SHK)$. B. $(SIJ) \perp (SHJ)$.
C. $(SHK) \perp (SKJ)$. D. $(SHK) \perp (HIJK)$.



Câu 4: Lấy lại dữ kiện của câu 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $(HIJK)$ và (SKJ)

- A. $\widehat{SKH}$ B. $\widehat{SJK}$ C. $\widehat{SKI}$ D. $\widehat{KSH}$

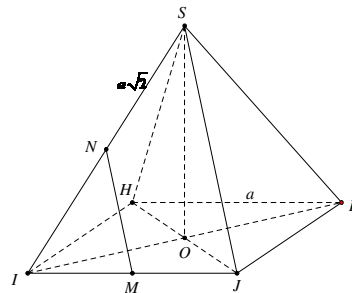
Câu 5: Lấy lại dữ kiện của câu 3. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $d(H, (SKJ)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $d(H, (SKJ)) = \frac{a\sqrt{2}}{3}$
C. $d(H, (SKJ)) = a$ D. $d(H, (SKJ)) = a\sqrt{2}$

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.HIJK$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, cạnh đáy bằng a , O là giao điểm hai đường chéo.

M, N lần lượt là trung điểm IJ, SI Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $(SHJ) \perp (SKI)$. B. $(SHJ) \perp (SIJ)$.
C. $KI \perp SJ$. D. $KI \perp SH$.



Câu 7: Lấy lại dữ kiện của câu 6. Khẳng định nào sau đây **sai**?

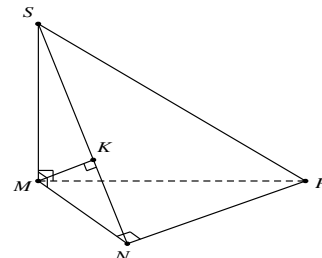
- A. $d(I, (SHJ)) = IO$ B. $d(I, (SHJ)) = KO$
C. $d(I, (SHJ)) = 2HO$ D. $d(I, (SHJ)) = d(K, (SHJ))$

Câu 8: Lấy lại dữ kiện của câu 6. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và SH

- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

Câu 9: Cho hình chóp $S.MNP$ có đáy MNP là tam giác vuông tại N , cạnh bên SM vuông góc với đáy, MK là đường cao của ΔSMN . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $MK \perp SM$. B. $MK \perp MP$.
C. $MK \perp MN$. D. $MK \perp SP$.



Câu 10: Lấy lại dữ kiện của câu 9. Góc giữa đường thẳng SN và (MNP) là

A. $\widehat{SMN}$.B. $\widehat{NSM}$.C. $\widehat{MNP}$.D. $\widehat{SNM}$.

II. Phần tự luận

Bài 1: Cho hình chóp $S.BDEF$ có đáy $BDEF$ là hình vuông tâm O , cạnh đáy bằng $3a$. Biết $SB \perp (BDEF)$, $SB = a\sqrt{3}$.

- Chứng minh rằng: $(SBE) \perp (SDF)$.
- Tính góc giữa đường thẳng BD và (SDE) .
- Tính $d(E, (SDF))$.

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm BC , O là giao điểm giữa AC và BD , O' là giao điểm giữa $A'C'$ và $B'D'$. Tính khoảng cách giữa $D'O$ và $O'M$.

Đề 3

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BC = BA = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) .

- $(A'B, (ABC)) = 120^\circ$.
- $(A'B, (ABC)) = 30^\circ$.
- $(A'B, (ABC)) = 45^\circ$.
- $(A'B, (ABC)) = 60^\circ$.

Câu 2: Cho tứ diện $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Hỏi tứ diện có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

- 2.
- 3.
- 4.
- 1.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}$, với mọi điểm M .
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 4: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a và đường cao $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng.

- $\frac{a\sqrt{15}}{15}$.
- $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- $a\sqrt{2}$.
- $a\sqrt{15}$.

Câu 5: Cho hình chóp có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$.

Câu 6: Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a}$. Vectơ nào sau đây không là vectơ chỉ phương của d ?

- $-\frac{1}{2}\vec{a}$.
- $2\vec{a}$.
- $\vec{0}$.
- $k\vec{a}; (k \neq 0)$.

Câu 7: Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên $2a$. Khoảng cách từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy bằng.

- $a\sqrt{2}$.
- a .
- $a\sqrt{3}$.
- $\frac{3a}{2}$.

Câu 8: Cho a, b, c là các đường thẳng, mệnh đề nào là đúng?

- Cho $a \perp b$ và b nằm trong mặt phẳng (α) . Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
- Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a ; (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
- Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .
- Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

Câu 9: Cho hình chóp có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SD = 2a$. Khẳng định nào dưới đây là sai ?

- A. $SO \perp AC$.
 B. $(SAC) \perp (SBD)$.
 C. $BC \perp AB$.
 D. $(SD, (ABCD)) = 60^\circ$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$. Biết góc giữa SC và mặt đáy bằng 60° . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2$.
 B. $(SC, (ABC)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.
 C. $AC = 2a$.
 D. $SA = 2a\sqrt{3}$.

II. Phần tự luận

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, SD vuông góc với mp($ABCD$) và $SB = 5a$.

a) Chứng minh mp(SBC) vuông góc với mp(SCD)

b) Tính góc giữa mp(SCD) và mp(SAB)

c) Tính khoảng cách từ điểm D đến mp(SAB).

Bài 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình lăng trụ đứng.

Đề 4

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
 B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}$, với mọi điểm M .
 C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
 D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 2: Cho hình chóp có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SD = 2a$. Khẳng định nào dưới đây là sai ?

- A. $BC \perp AB$.
 B. $SO \perp AC$.
 C. $(SAC) \perp (SBD)$.
 D. $(SD, (ABCD)) = 60^\circ$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BC = BA = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC).

- A. $(A'B, (ABC)) = 30^\circ$.
 B. $(A'B, (ABC)) = 120^\circ$.
 C. $(A'B, (ABC)) = 60^\circ$.
 D. $(A'B, (ABC)) = 45^\circ$.

Câu 4: Cho hình chóp có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
 B. $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$.
 C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

Câu 5: Cho tứ diện $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Hỏi tứ diện có bao nhiêu mặt là tam giác vuông ?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 6: Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên $2a$. Khoảng cách từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy bằng.

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Câu 7: Cho a, b, c là các đường thẳng, mệnh đề nào là đúng ?

- A. Cho $a \perp b$ và b nằm trong mặt phẳng (α) . Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
 B. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a ; (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
 C. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .
 D. Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

Câu 8: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a và đường cao $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng.

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{15}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{15}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$. Biết góc giữa SC và mặt đáy bằng 60° . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $(SC, (ABC)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$. B. $AC = 2a$.
C. $SA = 2a\sqrt{3}$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2$.

Câu 10: Cho đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{a}$. Vector nào sau đây không là vector chỉ phương của d ?

- A. $k\vec{a}; (k \neq 0)$. B. $2\vec{a}$. C. $-\frac{1}{2}\vec{a}$. D. $\vec{0}$.

II. Phần tự luận

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a . SA vuông

góc mp $(ABCD)$, $SB = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SB .

- a). Chứng minh CD vuông góc với mặt phẳng (SAD) ;
b). Chứng minh SC vuông góc với AM ;
c). Tính góc giữa SC và mp $(ABCD)$.

Bài 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = 2a$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C$.

Đề 5

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau?

- A. Nếu $a \parallel (P)$ và $a \parallel b$ thì $b \parallel (P)$. B. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$. D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là hai tam giác cân chung đáy BC . Tìm mệnh đề đúng:

- A. $AB \perp AD$ B. $AD \perp BC$ C. $AB \perp CD$ D. $AC \perp BD$

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy có tâm O và cạnh bằng a , cạnh bên bằng a . Khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

- A. A B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a}{\sqrt{6}}$ D. $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC . Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ B. $\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$. C. $\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

Câu 5: Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **SAI**?

- A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$ B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$
C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Câu 6: Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì:

- A. Song song với nhau.
B. Trùng nhau.
C. Hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.
D. Không song song với nhau

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A $SB \perp (ABC)$, $AB = AC = a$, $SB = a\sqrt{2}$, .

Góc giữa SC và mp (ABC) là:

- A. 45° B. 90° C. 60° D. 30°

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBD) và (ABCD) là:

- A. góc $\widehat{SBA}$ B. góc $\widehat{SIC}$ C. góc $\widehat{SDA}$ D. góc $\widehat{SIA}$

Câu 9: Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH là đường cao của tam giác SAB, thì khẳng định nào sau đây đúng nhất.

- A. $AH \perp AC$ B. $AH \perp SA$ C. $AH \perp (SAC)$ D. $AH \perp SC$

Câu 10: cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và AD

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

II. Phần tự luận

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh $CD \perp (SAD)$

b) Tính góc giữa SD và (SAB).

c) Gọi M là trung điểm AD. Tính khoảng cách từ M đến (SBC)

Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = BB' = a$. Gọi M là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa AM và B'C.

Đề 6

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Cho tứ diện ABCD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}$, với mọi điểm M.
C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $AH \perp AC$. B. $AH \perp BC$. C. $SA \perp BC$. D. $AH \perp SC$.

Câu 3: Cho 3 đường thẳng phân biệt a, b, c và mặt phẳng (α) Tìm khẳng định đúng:

- A. $\begin{cases} a \perp b \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \perp c$. B. $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \parallel c$.
C. $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp c$. D. $\begin{cases} a \perp b, a \perp c \\ b \subset (\alpha), c \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$.

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và ABCD. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng ABCD. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ là:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 5: Cho hình chóp AC có đáy BD là hình thoi và $SA = SC$. Các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $BD \perp (SAC)$. B. $BA \perp (SAD)$. C. $SO \perp (ABCD)$. D. $AC \perp (SBD)$.

Câu 6: Cho hình chóp $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng?

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 120° .

Câu 7: Cho tứ diện ABCD. Người ta định nghĩa “G là trọng tâm tứ diện 30° khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ”. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của a, b, c và (α) .
B. G tùy ý.

C. G là trung điểm của đoạn $\begin{cases} a \perp b \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a \perp c$ (I, J lần lượt là trung điểm AB và $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a // c$).

D. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD .

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $SA \perp BC$ và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , 30° , $SA = a$. Góc giữa SB và 60° bằng:

A. 60° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 30° .

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi O là hình chiếu của S lên $(ABCD)$. Khi đó:

A. $d(A, (SBD)) = AS$. B. $d(A, (SBD)) = AD$. C. $d(A, (SBD)) = AC$. D. $d(A, (SBD)) = AO$.

II. Phần tự luận

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh rằng: $BC \perp (SAB)$

b) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) .

c) Gọi M là trung điểm SB . Tính khoảng cách từ điểm M đến (SAC) .

Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = AC = AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm $AB, A'C'$. Tính khoảng cách giữa $B'M$ và AN .

GV. Lư Sĩ Pháp