

BÀI 1. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B ta có một vectơ, được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Định nghĩa

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu là A , điểm cuối B . Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

Các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ, độ dài của vectơ, sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ, vectơ – không, sự bằng nhau của hai vectơ, ... được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

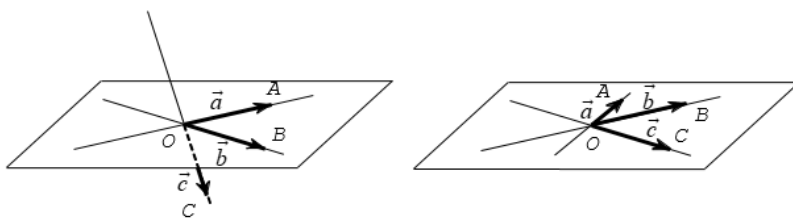
II – ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẪNG CỦA BA VECTO

1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian

Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác vectơ – không. Nếu từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ thì có thể xảy ra hai trường hợp:

- Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó ta nói rằng vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
- Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Trong trường hợp này giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ luôn luôn song song với một mặt phẳng.



a) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng b) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

Chú ý. Việc xác định sự đồng phẳng hoặc không đồng phẳng của ba vectơ nói trên không phụ thuộc vào việc chọn điểm O .

Từ đó ta có định nghĩa sau đây:

2. Định nghĩa

Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Từ định nghĩa ba vector đồng phẳng và từ định lý về sự phân tích (hay biểu thị) một vector theo hai vector hai vector không cùng phương trong hình học phẳng chúng ta có thể chứng minh được định lý sau đây:

Định lý 1

Trong không gian cho hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và vector $\vec{c}$. Khi đó ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

Định lý 2

Trong không gian cho ba vector không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Khi đó với mọi vector $\vec{x}$ ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

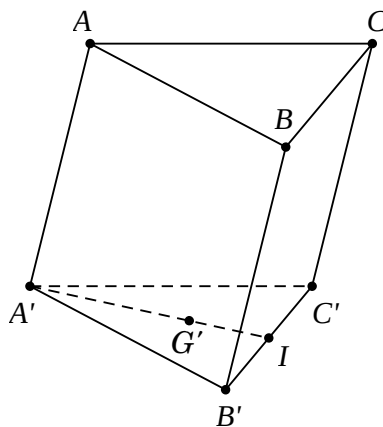
Dạng 1. Biểu diễn vector

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vector $\overrightarrow{AG'}$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. B. $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. C. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. D. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'})$.

$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

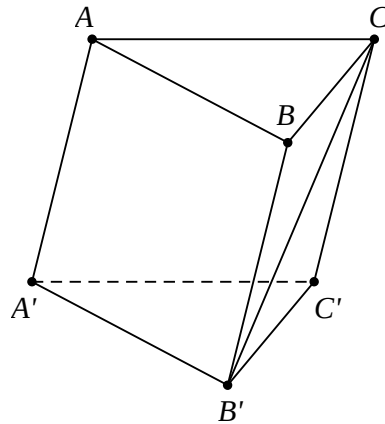
Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $BB'C'C$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}$
 $= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

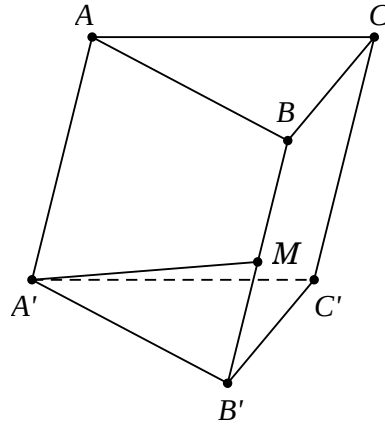
Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C



Vì M là trung điểm của $BB' \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

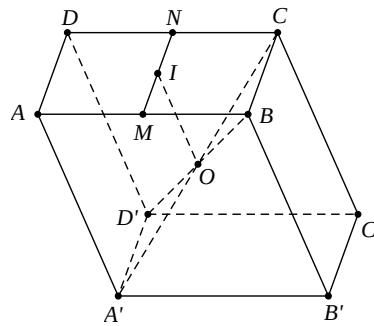
C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

D.

$2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Vì I là trung điểm của MN suy ra $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

Kết hợp với $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{DB'} \right) = -\frac{1}{4} (\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$$

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của $B'C'$, K là giao điểm của $A'I$ và $B'D'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c})$.

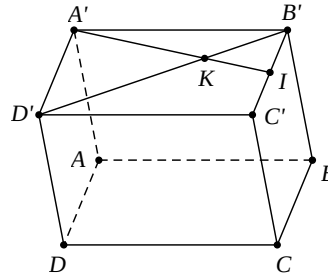
B. $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{DK} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{DK} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Lời giải

Chọn A



Vì I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'} = 2\overrightarrow{A'I}$.

Và K là giao điểm của $A'I$, $B'D'$ nên theo định lí Talet $\Rightarrow \overrightarrow{A'K} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'K} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AK} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AK}$.

$$= \vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c}.$$

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

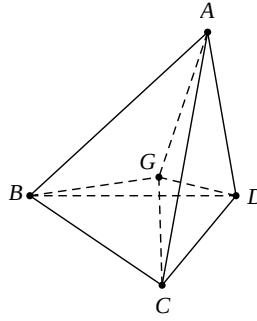
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A



Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{4} \cdot 4\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \longrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \\ &= \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}). \end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ nên mệnh đề $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ sai.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

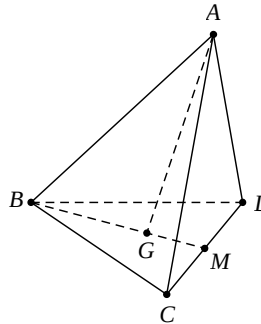
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của CD suy ra $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}).$

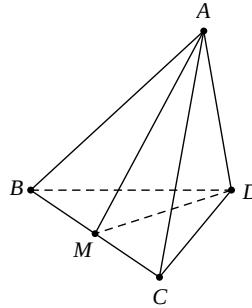
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}).$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}).$

Lời giải

Chọn A



Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}).$$

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b}).$

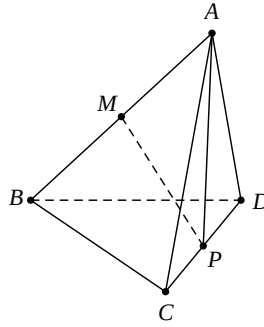
B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c}).$

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d}).$

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}).$

Lời giải

Chọn D



Vì M, P lần lượt là trung điểm của $AB, CD \Rightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AP} \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$.

Dạng 2. Đẳng thức vector

Câu 1: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

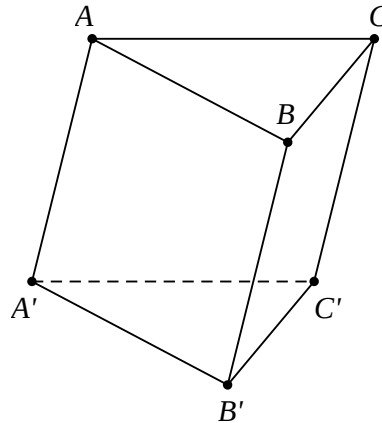
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

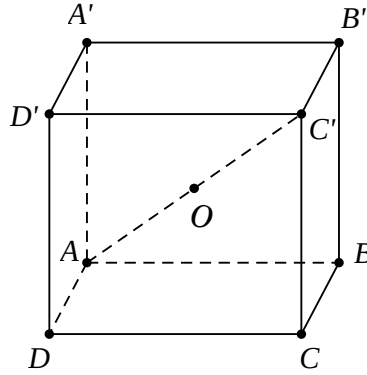
B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Lời giải

Chọn B



Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Mà O là trung điểm của AC' suy ra $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

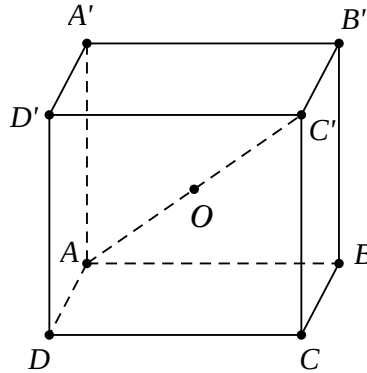
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

☐ **A đúng**, vì theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

☐ **B đúng**, vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{D'A} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

☐ **C sai**, vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'} \end{cases}$ mà $\overrightarrow{AB'} \neq \overrightarrow{AD'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

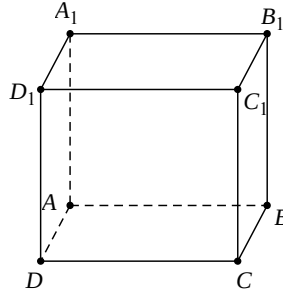
- **D đúng**, vì $\begin{cases} (1): \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} \\ (2): \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC'} \end{cases} \Rightarrow (1) = (2).$

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.
 B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$.
 C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$.
 D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

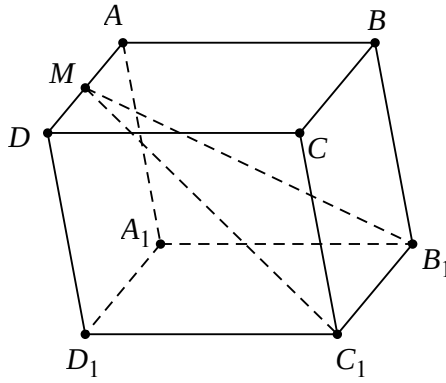
- **A đúng**, vì $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1A_1} \end{cases}$ suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.
 □ **B đúng**, vì $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$.
 □ **C đúng**, vì $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}$ (quy tắc hình hộp).
 □ **D sai**, vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BD_1} \neq \overrightarrow{BC}$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$.
 B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.
 C. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.
 D. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A sai**, vì $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1D_1})$.

$$= \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}) = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}.$$

□ **B đúng**, vì $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{C_1D_1})$.

$$= \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1D_1}) = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$$

□ **C sai**, vì $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ (từ B).

□ **D sai**, vì $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG}$.

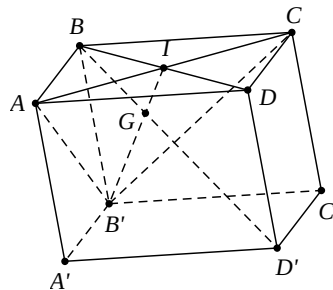
B. $\overrightarrow{AC'} = 4\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{BD'} = 4\overrightarrow{BG}$.

D. $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow I$ là trung điểm của BD .

$$\text{Ta có } \triangle BIG \sim \triangle D'B'G \Rightarrow \frac{BG}{D'G} = \frac{BI}{D'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BG}{BD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}.$$

Cách 2. Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.

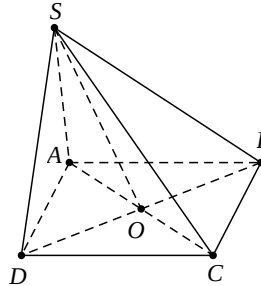
Do G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ suy ra $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Vì O là trung điểm của AC suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \vec{c}$ (1).

Và O là trung điểm của BD suy ra $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} = \vec{b} + \vec{d}$ (2).

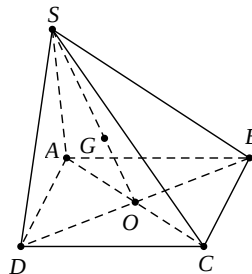
Từ (1) và (2), suy ra $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. G, S, O không thẳng hàng. B. $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.
C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$. D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG} \Rightarrow$ ba điểm G, S, O thẳng hàng.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$.

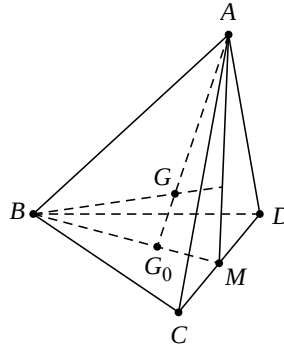
B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$.

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$.

D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$.

Lời giải

Chọn C



Vì G_0 là giao điểm của đường thẳng AG với mặt phẳng (BCD) .

Suy ra G_0 là trọng tâm của tam giác $BCD \Rightarrow \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} + \overrightarrow{G_0D} = \vec{0}$.

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_0} + \underbrace{\overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} + \overrightarrow{G_0D}}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_0} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

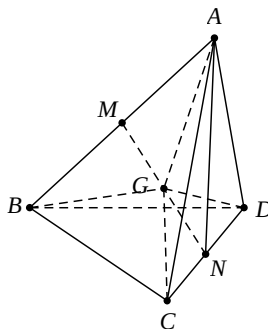
B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN} \end{cases}$

Mà G là trung điểm của $MN \Rightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{MG}$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$.

A. $k = 4$.

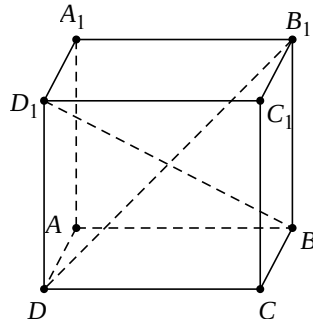
B. $k = 1$.

C. $k = 0$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} \Rightarrow k = 1$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$.

A. $k = 0$.

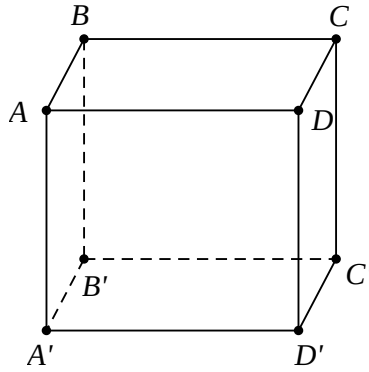
B. $k = 1$.

C. $k = 4$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{D'A}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \overrightarrow{AD'} + k\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow k=1$.

Câu 13: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN . Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

A. $k=2$.

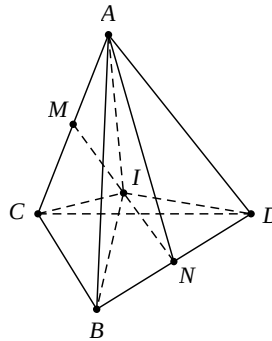
B. $k=4$.

C. $k=1$.

D. $k=0$.

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \end{cases}$.

Mặt khác $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$ (I là trung điểm của MN) $\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}}_{\vec{0}} + (2k-2)\overrightarrow{IB} + (k-1)\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (k-1)(2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$ mà $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} \neq \vec{0}$ suy ra $k-1=0 \Leftrightarrow k=1$.

Câu 14: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

A. $k = 4$.

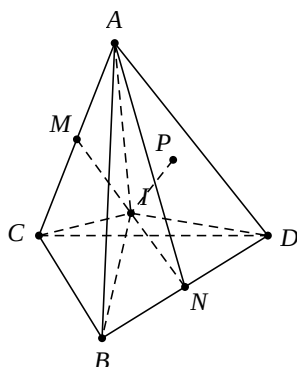
B. $k = \frac{1}{2}$.

C. $k = \frac{1}{4}$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \end{cases}$.

Mặt khác $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$ (I là trung điểm của MN) $\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = 4\overrightarrow{PI}$

Mà $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ nên suy ra $4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

A. $k = \frac{1}{2}$.

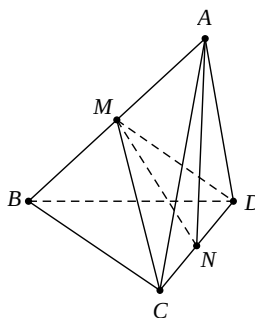
B. $k = \frac{1}{3}$.

C. $k = 3$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có N là trung điểm của $CD \Rightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ (1).

Và M là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

Dạng 3. Đồng phẳng của ba vector

Câu 1: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vector $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

B. Hai vector $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.

C. Hai vector $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương.

D. Ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Chọn A

Giả sử, ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng, khi đó $\vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} m\vec{y} = m\vec{a} - m\vec{b} - m\vec{c} \\ n\vec{z} = -3n\vec{b} - 2n\vec{c} \end{cases} \Rightarrow m\vec{y} + n\vec{z} = m\vec{a} - (m+3n)\vec{b} - (m+2n)\vec{c}.$$

$$\text{Khi đó } 2\vec{a} + \vec{b} = m\vec{a} - (m+3n)\vec{b} - (m+2n)\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m+3n = -1 \\ m+2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}.$$

Vậy ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 2: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Ba vector $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Ba vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Ba vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B

Ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m, n : \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

Với $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$.

Suy ra $\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = m(3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) + n(2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c})$.

$$= (3m+2n)\vec{a} - 3(m+n)\vec{b} + (2m-3n)\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n=1 \\ -3m-3n=-2 \\ 2m-3n=4 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

Vậy ba vectơ kể trên không đồng phẳng.

Chú ý. Bạn đọc làm tương tự với các **A, C, D** để thấy được các vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Câu 3: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p \neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

☐ Với $m+n+p=0 \Rightarrow m=n=p=0$ suy ra $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ nên chưa kết luận được ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

☐ Với $m+n+p \neq 0$ suy ra tồn tại ít nhất một số khác 0.

Giả sử $m \neq 0$, ta có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c}$.

Suy ra tồn tại n, p để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

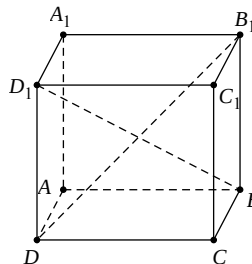
B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CD_1}$ suy ra $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABEF$ và K là tâm của hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

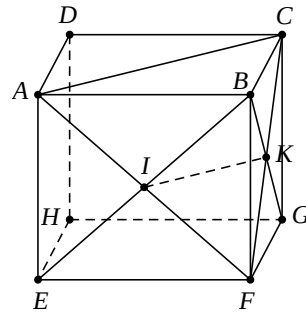
B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B



Vì I, K lần lượt là trung điểm của AF và CF .

Suy ra IK là đường trung bình của tam giác $AFC \Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD)$.

Mà $GF \parallel (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$ suy ra ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $k = 4$.

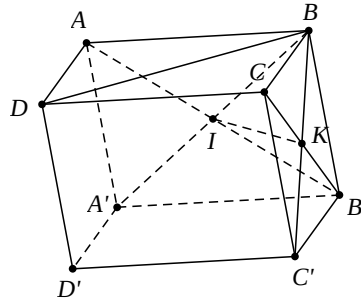
B. $k = 1$.

C. $k = 0$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

☐ A đúng, vì $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AC}$ cùng thuộc mặt phẳng $(B'AC)$.

☐ B đúng, vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

☐ C sai, vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K}$

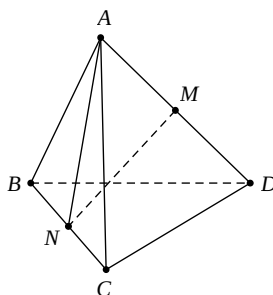
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} \Rightarrow k = 1$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

- A. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- B. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
- C. Ba vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- D. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC suy ra: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ và $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})$.

Khi đó, dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

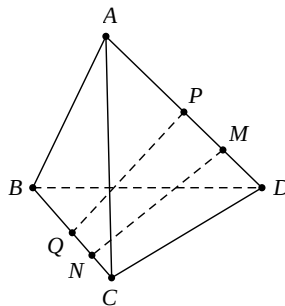
- ☐ A đúng, vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- ☐ B đúng, vì MN không nằm trong mặt phẳng (ABC) .
- ☐ C sai, tương tự ta thấy AN không nằm trong mặt phẳng (MNC) .
- ☐ D đúng, vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy điểm M, N sao cho $AM = 3MD, BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- B. Ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
- C. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
- D. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A



Theo bài ra, ta có M, N lần lượt là trung điểm của PD, QC .

Khi đó, dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A sai**, vì
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$$

Suy ra $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

□ **B đúng**, vì
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

□ **C đúng**, vì với cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên, ta có $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

□ **D đúng**, vì biểu diễn giống **A**, ta được $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ (1); $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$ (2). Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

A. $x = -1$.

B. $x = -2$.

C. $x = -3$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm x để ba vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

Hệ thức (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$.

Hệ thức (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{BC}$.

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (2+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + (x+3)\overrightarrow{BC}$.

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng khi $2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

A. $x = \frac{2}{3}$.

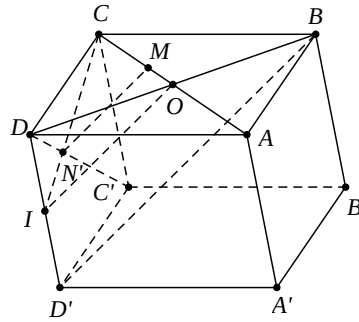
B. $x = \frac{1}{3}$.

C. $x = \frac{1}{4}$.

D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình hình hành $ABCD$ và I là trung điểm của DD' .

Nối $C'D$ cắt CI tại $N' \Rightarrow N'$ là trọng tâm của tam giác CDD' .

Ta có OI là đường trung bình của tam giác BDD' suy ra $OI \parallel BD'$.

Mặt khác $\frac{CN'}{CI} = \frac{CM}{CO}$ nên $MN' \parallel OI$ suy ra $MN' \parallel BD'$.

Theo bài ra, ta có $MN \parallel BD' \longrightarrow N \equiv N' \Rightarrow C'N = \frac{2}{3}C'D \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì

A. $a + b + c = 3$.

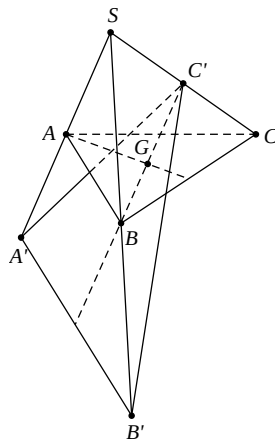
B. $a + b + c = 4$.

C. $a + b + c = 2$.

D. $a + b + c = 1$.

Lời giải

Chọn A



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Khi đó $3\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$ mà $\overrightarrow{SA} = a.\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB} = b.\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC} = c.\overrightarrow{SC'}$.

Suy ra $3\overrightarrow{SG} = a.\overrightarrow{SA'} + b.\overrightarrow{SB'} + c.\overrightarrow{SC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}.\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}.\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}.\overrightarrow{SC'}$.

Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng.

Do đó, tồn tại ba số l, m, n sao cho $(l^2 + m^2 + n^2 \neq 0)$ và $l.\overrightarrow{GA'} + m.\overrightarrow{GB'} + n.\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow l.(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA'}) + m.(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB'}) + n.(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SC'}) = \vec{0} \Leftrightarrow (l + m + n)\overrightarrow{SG} = l.\overrightarrow{SA'} + m.\overrightarrow{SB'} + n.\overrightarrow{SC'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{l}{l + m + n}.\overrightarrow{SA'} + \frac{m}{l + m + n}.\overrightarrow{SB'} + \frac{n}{l + m + n}.\overrightarrow{SC'} = \frac{a}{3}.\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}.\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}.\overrightarrow{SC'}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = \frac{l}{l + m + n} + \frac{m}{l + m + n} + \frac{n}{l + m + n} = 1 \Rightarrow a + b + c = 3.$$

Dạng 4. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức vector

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Điểm M xác định bởi đẳng thức vector $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng G .
 B. M thuộc tia AG và $AM = 3AG$.
 C. G là trung điểm AM .
 D. M là trung điểm AG .

Lời giải

Chọn B

Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Kết hợp giả thiết, suy ra $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. N là trung điểm BD .
 B. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BCDN$.

C. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

C. N trùng với A .

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{DC}$.

Đẳng thức chứng tỏ N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Ta định nghĩa " G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ". Khẳng định nào sau đây sai?

A. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AB và CD .

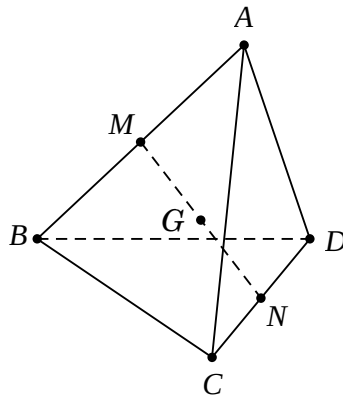
B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD .

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC .

D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$

$\longrightarrow G$ là trung điểm IJ . Do đó A đúng.

Tương tự, B và C đều đúng.

Vậy cả A, B, C đều đúng.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M được xác định bởi đẳng thức vector $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là tâm của mặt đáy $ABCD$.

B. M là tâm của mặt đáy $A'B'C'D'$.

C. M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

D. Tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải

Chọn C

Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$.

Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + 4\overrightarrow{MO} = \vec{0} + 4\overrightarrow{MO} = 4\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = 4\overrightarrow{MO'}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MO'} = \vec{0} \Leftrightarrow 4(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'} = \vec{0}.$$

Vậy điểm M cần tìm là trung điểm của OO' .

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức vector $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB' .

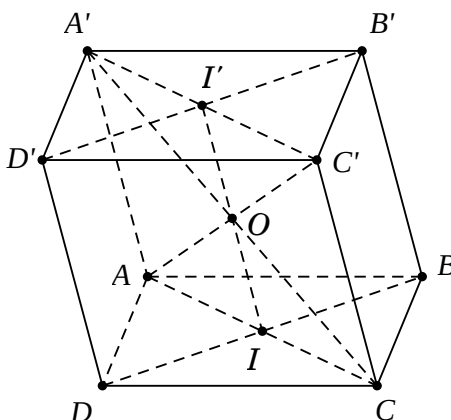
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm CC' .

D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD, A'B'C'D'$. Suy ra O là trung điểm của II' .

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{IB}.$$

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên từ đẳng thức $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{IB}$ suy ra M là trung điểm BB' .

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

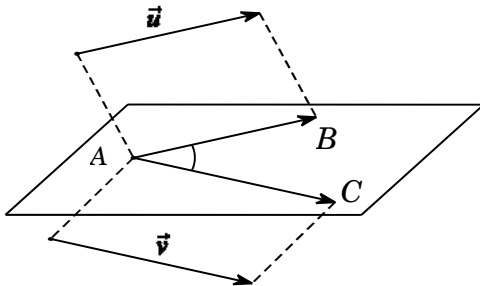
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ ($0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$) là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức:

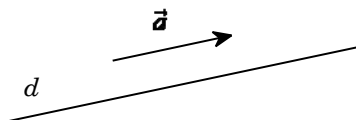
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

II – VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

Vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d .



2. Nhận xét

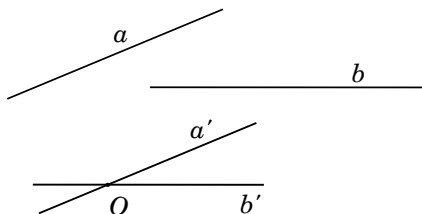
- Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d .
- Một đường thẳng trong không gian hoàn toàn xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.

c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vector chỉ phương cùng phương.

III – GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b .



2. Nhận xét

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

b) Nếu $\vec{u}$ là vector chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vector chỉ phương của đường thẳng b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .

IV – HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Người ta kí hiệu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau là $a \perp b$.

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vector chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

b) Cho hai đường thẳng song song. Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

c) Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

B. PHÂN LOẠI

Dạng 1. Tính góc giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Cách 1: (Theo phương pháp hình học)

- Lấy điểm O tùy ý (ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng), qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho.
- Tính một góc trong các góc được tạo bởi giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O .
- Nếu góc đó nhọn thì đó là góc cần tìm, nếu góc đó tù thì góc cần tính là góc bù với góc đã tính.

Cách 2: (Theo phương pháp vector)

- Tìm $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là các vector chỉ phương của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 tính $\vec{u}_1, \vec{u}_2$
- Khi đó $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi I là trung điểm của BC. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng DI và AB.

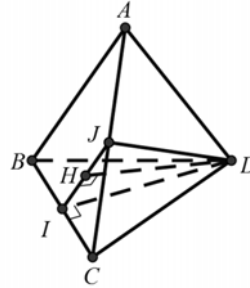
Hướng dẫn giải

Đặt cạnh của tứ diện có độ dài là a .

Gọi J là trung điểm của AC.

Ta có: $IJ \parallel AB \Rightarrow (AB, DI) = (IJ, DI) = \widehat{DIJ}$

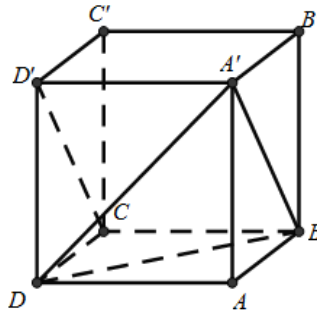
Kẻ $HD \perp IJ, (H \in IJ)$



$$\text{Ta có: } \cos \widehat{DIJ} = \frac{IH}{DI} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ví dụ 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Xác định Góc tạo bởi hai đường thẳng BD và CD'.

Hướng dẫn giải



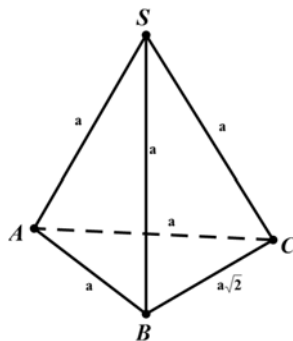
Do $BA' \parallel CD'$ nên góc giữa BD và CD' là góc giữa BD và BA'

Mà $\Delta A'BD$ là tam giác đều nên góc giữa BD và BA' là 60° .

Vậy góc giữa BD và CD' là 60° .

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = AC = AB = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Xác định góc giữa hai đường thẳng CS và AB.

Hướng dẫn giải



Trước hết ta tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$

Từ giả thiết suy ra $\triangle ABC$ vuông cân tại A

Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + 0}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{a \cdot a \cdot \cos 120^\circ}{a \cdot a} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra: $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60° .

Ví dụ 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AC ta có:

$$IM = IN = a$$

Áp dụng định lý cosin trong $\triangle IMN$

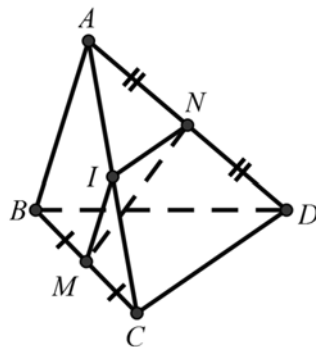
$$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2IM \cdot IN \cos \widehat{MIN}$$

$$3a^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \widehat{MIN}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{MIN} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra: $\widehat{MIN} = 120^\circ$

Vậy: $(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{IM, IN}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong không gian

1. Phương pháp

Cách 1: Dùng định nghĩa: $a \perp b \Leftrightarrow (\widehat{a, b}) = 90^\circ$

Cách 2: Dùng định lý: $\begin{cases} b // c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$

Cách 3: Sử dụng tích vô hướng: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng: $SA \perp BC, SB \perp AC, SC \perp AB$

Hướng dẫn

Chứng minh: $SA \perp BC$

$$\begin{aligned} \text{Xét: } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} \\ &= |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SC}| \cos \widehat{ASC} - |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cos \widehat{ASB} = 0 \Rightarrow SA \perp BC \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD .

- Chứng minh $AG \perp CD$
- Gọi M là trung điểm của CD . Tính góc giữa AC và BM .

Hướng dẫn

a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}; \overrightarrow{AC} = \vec{c}; \overrightarrow{AD} = \vec{d}$

Chứng minh : $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Với

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

$$\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = (\vec{d} - \vec{c})$$

Từ đó: $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

b) Ta có:

$$\cos(\widehat{AC, BM}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BM}|}$$

Với

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{4}$$

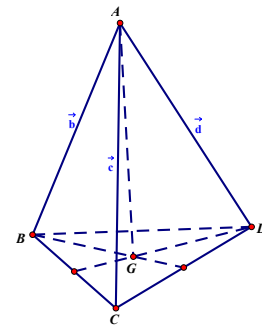
$$|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BM}| = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).
- Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c .
- Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.
- Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Lời giải



Chọn A

A đúng theo định nghĩa.

B sai vì có thể b và c chéo nhau.

C sai vì có thể là góc vuông.

D sai. Nếu góc giữa hai vectơ chỉ phương là α với $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng α , nếu góc giữa hai vectơ chỉ phương là α với $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng $180^\circ - \alpha$.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Chọn D

Câu 3: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D

Vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P) .

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45° .

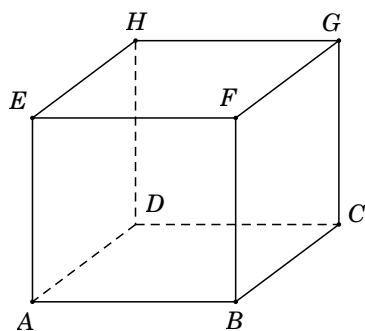
B. 90° .

C. 120° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông) nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{BAE} = 90^\circ$ ($ABFE$ là hình vuông).

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90° .

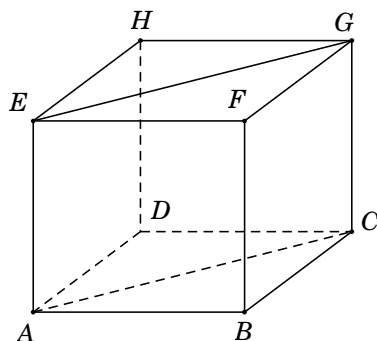
B. 60° .

C. 45° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 45° .

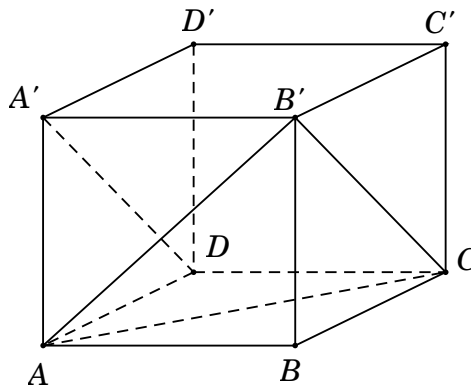
B. 90° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương. Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB' = B'C = CA = a\sqrt{2}$) do đó $\widehat{B'CA} = 60^\circ$.

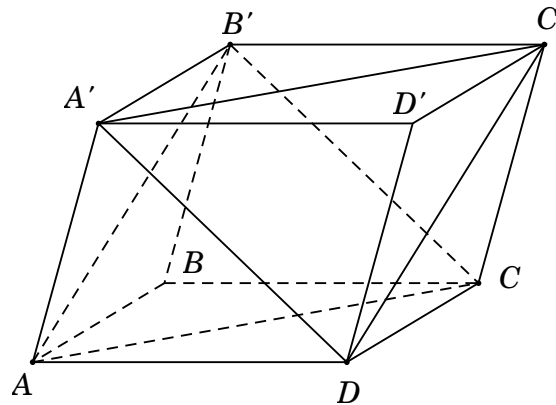
Lại có, DA' song song CB' nên $(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^\circ$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

- A. $\widehat{AB'C}$. B. $\widehat{DA'C'}$. C. $\widehat{BB'D}$. D. $\widehat{BDB'}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC \parallel A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành) mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên

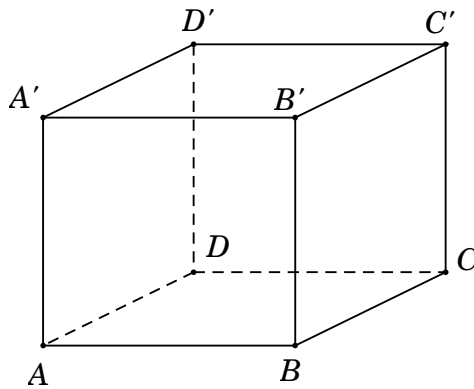
$$(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}.$$

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai**?

- A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90° . B. Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60° .
C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45° . D. Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90° .

Lời giải

Chọn B



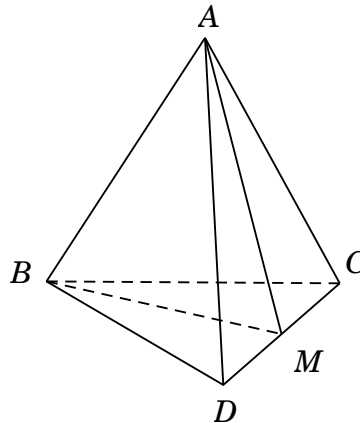
Ta có $(AA', B'D') = (BB', B'D') = \widehat{BB'C} = 90^\circ$. Khẳng định B sai.

Câu 9: Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD .

Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ và $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Do đó $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

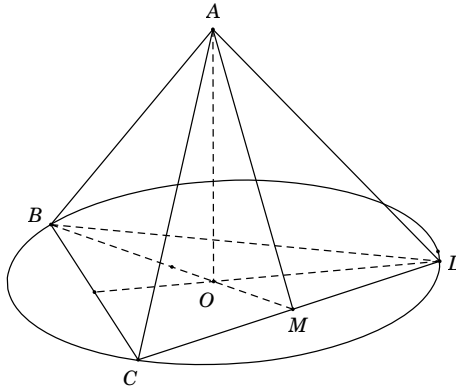
Suy ra $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90° .

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

- A. 0° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD .

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AM \perp CD, OM \perp CD$.

Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}) = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MO} = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AO và CD bằng 90° .

Câu 11: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

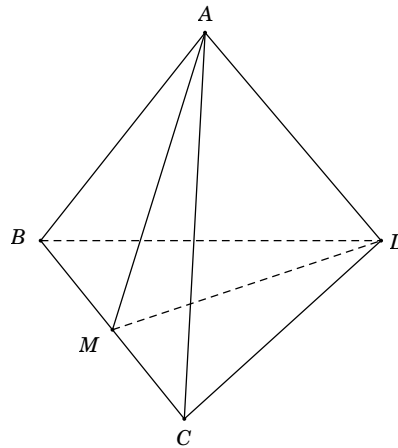
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử cạnh của tứ diện là a .

Tam giác BCD đều $\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$$\begin{aligned}
\text{Mặt khác: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \\
&= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos 30^\circ - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 60^\circ \\
&= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \\
\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) &= \frac{\sqrt{3}}{6} > 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = (AB, DM) \Rightarrow \cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60° .

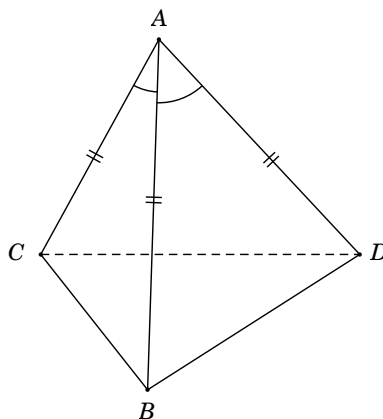
B. 45° .

C. 120° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}
&= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\
&= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 60^\circ.
\end{aligned}$$

$$\text{Mà } AC = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. 120° .

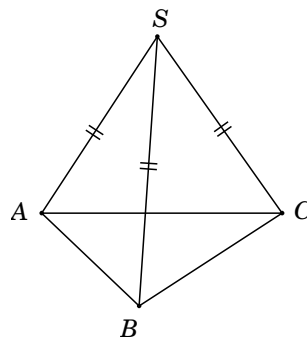
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}$

$$= |\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cdot \cos(\widehat{SCB}) - |\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SA}| \cdot \cos(\widehat{SCA})$$

$$= SC \cdot SB \cdot \cos \widehat{BSC} - SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC}.$$

Mà $SA = SB = SC$ và $\widehat{BSC} = \widehat{ASC} \Rightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Do đó $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 90^\circ$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB .

A. 30° .

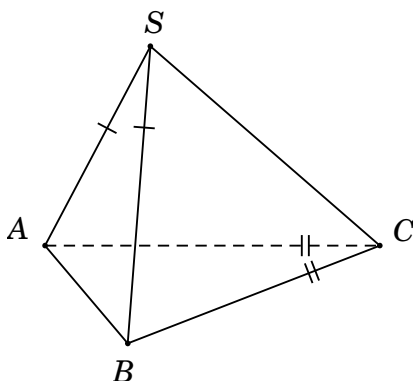
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Xét $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CS} \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$= CS \cdot CA \cdot \cos \widehat{SCA} - CS \cdot CB \cdot \cos \widehat{SCB}$$

$$= CS \cdot CA \cdot \frac{SC^2 + CA^2 - SA^2}{2SC \cdot CA} - CS \cdot CB \cdot \frac{SC^2 + CB^2 - SB^2}{2SC \cdot CB}$$

$$= \frac{SC^2 + CA^2 - SA^2}{2} - \frac{SC^2 + CB^2 - SB^2}{2} = 0 \text{ (do } SA = SB \text{ và } CA = CB)$$

Vậy $SC \perp AB$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC$ và $\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC .

A. 30° .

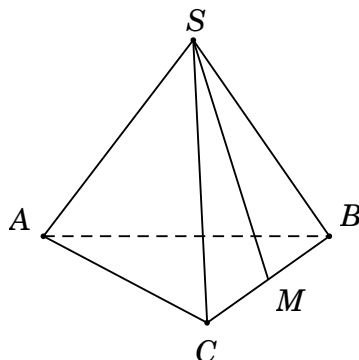
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



$$\text{Xét } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$$

$$= |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SC}| \cdot \cos(\widehat{SAC}) - |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cdot \cos(\widehat{SAB})$$

$$= SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SA \text{ chung} \\ AB = AC \Rightarrow \triangle SAB = \triangle SAC \text{ (c-g-c)} \\ \widehat{SAB} = \widehat{SAC} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} SC = SB \\ \widehat{ASC} = \widehat{ASB} \end{cases}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Vậy $SA \perp BC$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

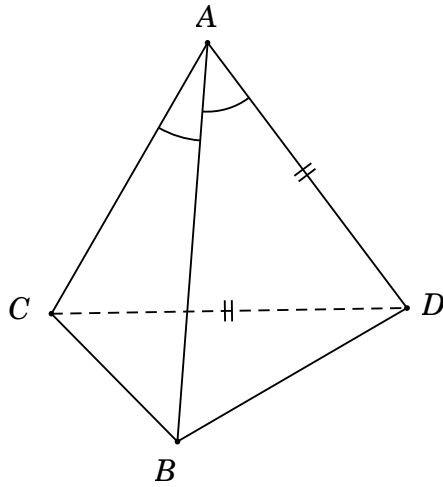
B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\cos(AB, CD) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{AB \cdot CD}$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \\ &= AB \cdot AD \cdot \frac{1}{2} - AB \cdot \frac{3}{2} AD \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} AB \cdot AD = -\frac{1}{4} AB \cdot CD. \end{aligned}$$

Do có $\cos(AB, CD) = \frac{\left| -\frac{1}{4} AB \cdot CD \right|}{AB \cdot CD} = \frac{1}{4}.$

Vậy $\cos \varphi = \frac{1}{4}.$

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120° .

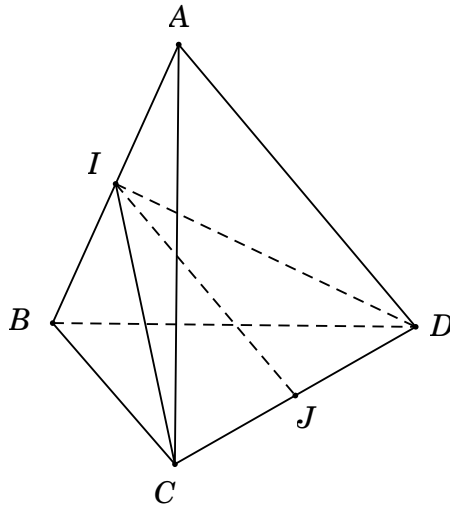
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn $CD \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$.

Tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều $\Rightarrow CI \perp AB$.

Tương tự, ta có $\triangle ABD$ đều nên $DI \perp AB$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}) = 90^\circ.$$

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc (IE, JF) bằng

A. 30° .

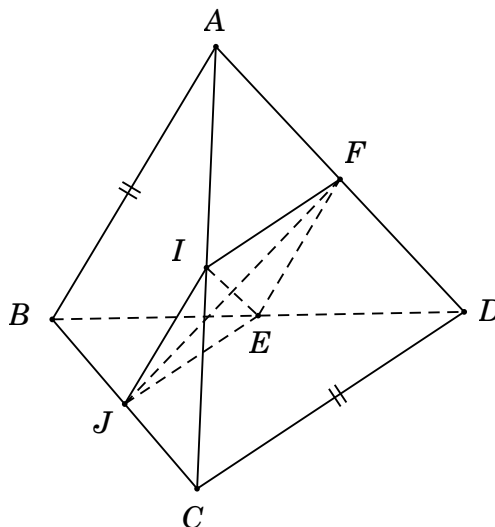
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có IF là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow \begin{cases} IF \parallel CD \\ IF = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} JE \parallel CD \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF \parallel JE \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}AB \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90^\circ$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 45° .

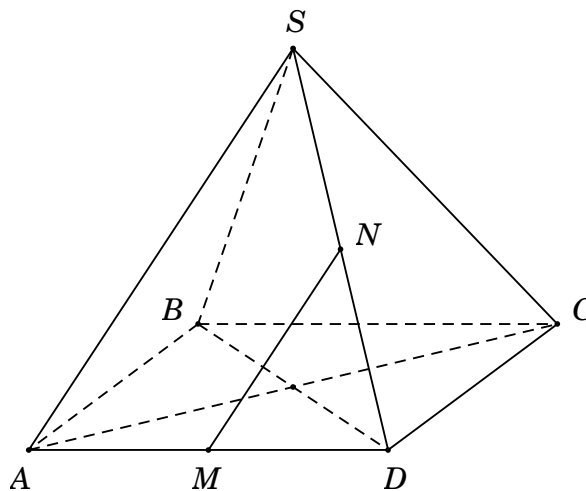
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S .

Từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của $\triangle DSA \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$

Khi đó $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow MN \perp SC \Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 90° .

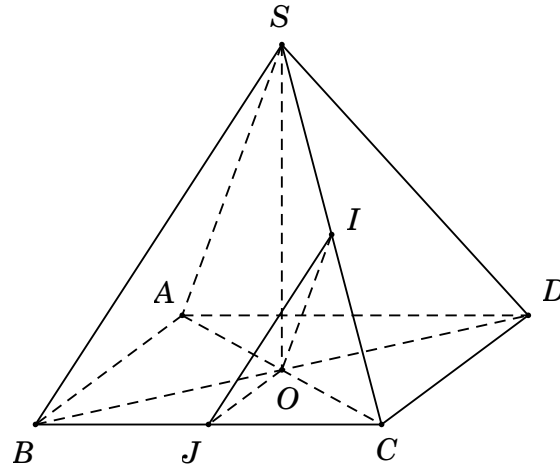
B. 45° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OJ$ là đường trung bình của $\triangle BCD$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD \end{cases}.$$

Vì $CD \parallel OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$.

$$\text{Xét tam giác } IOJ, \text{ có } \begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle IOJ \text{ đều.}$$

Vậy $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = \widehat{IJO} = 60^\circ$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a .

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\triangle CBD = \triangle SBD$ ($c - c - c$).

Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.

Xét tam giác SAC , ta có $SO = CO = \frac{1}{2}AC$.

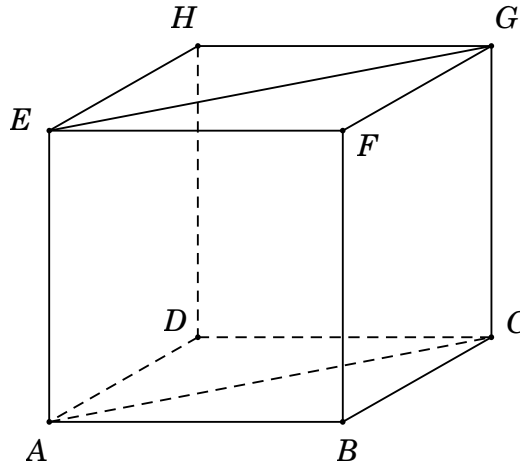
Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy).
 Vậy $SA \perp SC$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

- A. $a^2\sqrt{3}$. B. a^2 . C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Mặt khác $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

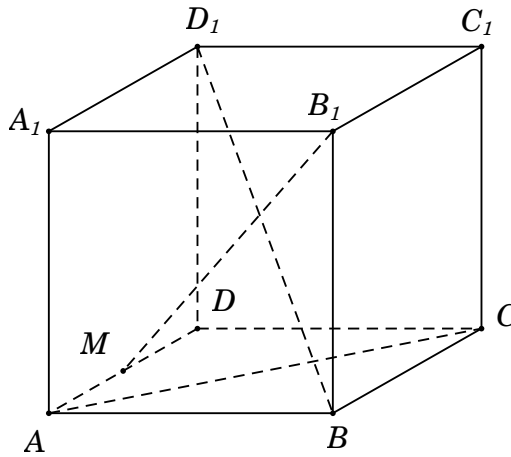
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 + 0 = a^2.$$

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



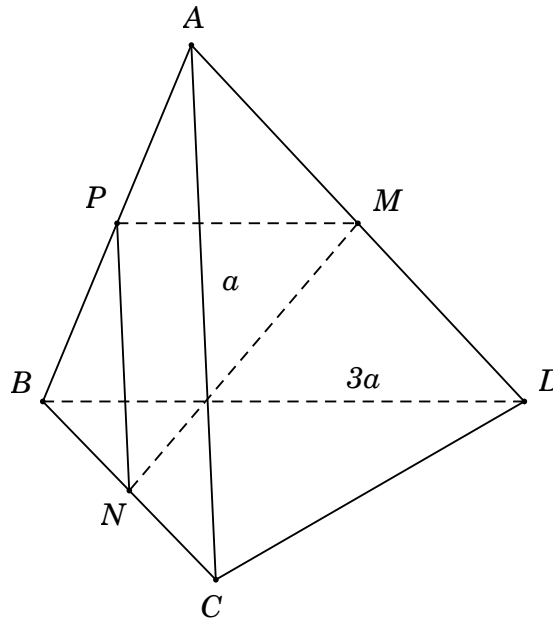
$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1} &= (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}) \\
 &= \underbrace{\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BA}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AD}}_{=0} + \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DD_1}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BA}}_{=0} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DD_1}}_{=0} \\
 &= \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN .

A. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
 B. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.
 C. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
 D. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của $AB \Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle ABC$

$$\text{và } \triangle ABD. \text{ Suy ra } \begin{cases} PN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2} \\ PM = \frac{1}{2}BD = \frac{3a}{2} \end{cases}$$

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow PN \perp PM$ hay tam giác $\triangle PMN$ vuông tại P

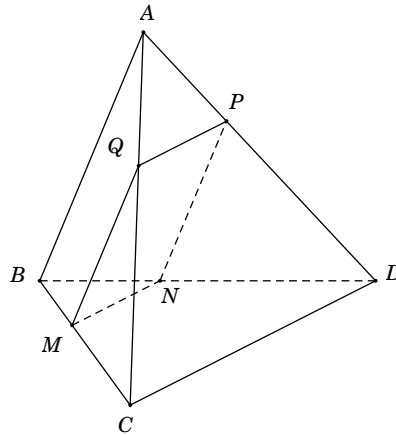
$$\text{Do đó } MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD . Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình thang. B. Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. D. Tứ giác không phải hình thang.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB.$$

Tương tự ta có $MN // CD, NP // AB, QP // CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN \perp MQ$ (do $AB \perp CD$).

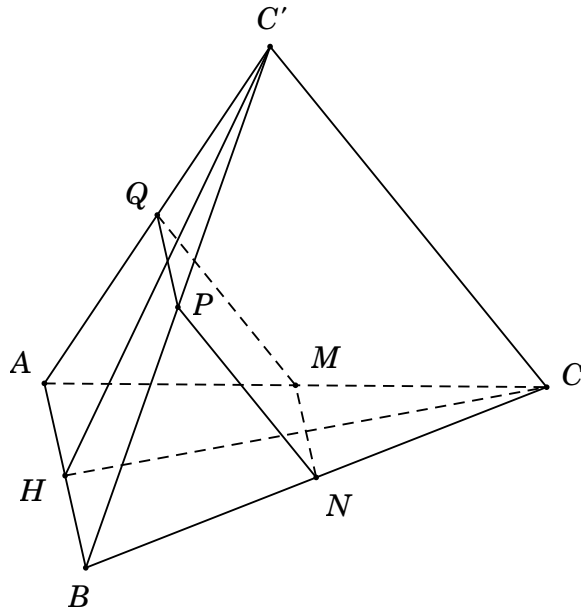
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 26: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình chữ nhật. C. Hình vuông. D. Hình thang.

Lời giải

Chọn B



Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$

$$\Rightarrow \begin{cases} PQ = MN = \frac{1}{2}AB \\ PQ // AB // MN \end{cases} \Rightarrow MNPQ \text{ là hình bình hành.}$$

Gọi H là trung điểm của AB . Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB \end{cases}$.

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} PQ // AB \\ PN // CC' \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN.$$

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6, CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q . Diện tích $MNPQ$ bằng:

A. $2\sqrt{2}$.

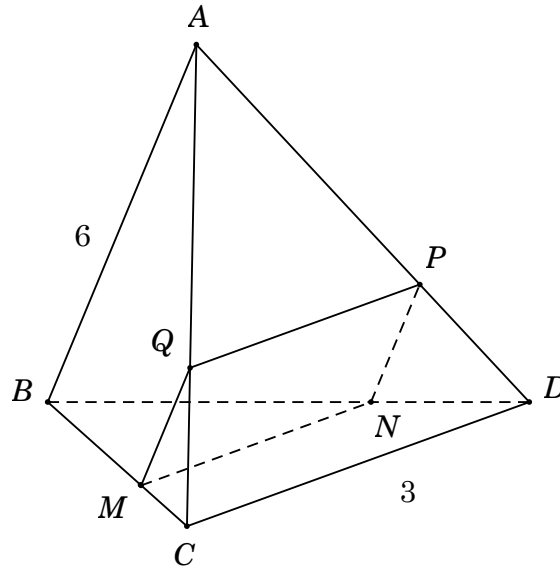
B. $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB.$$

Tương tự ta có $MN // CD$, $NP // AB$, $QP // CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $(\widehat{AB;CD}) = (\widehat{QM;MP}) = 60^\circ$. Suy ra $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ$.

$$\text{Ta có } \triangle CMQ \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MQ}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MQ = 2.$$

$$\triangle AQN \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{QN}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow QN = 2.$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD . Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là:

A. 5.

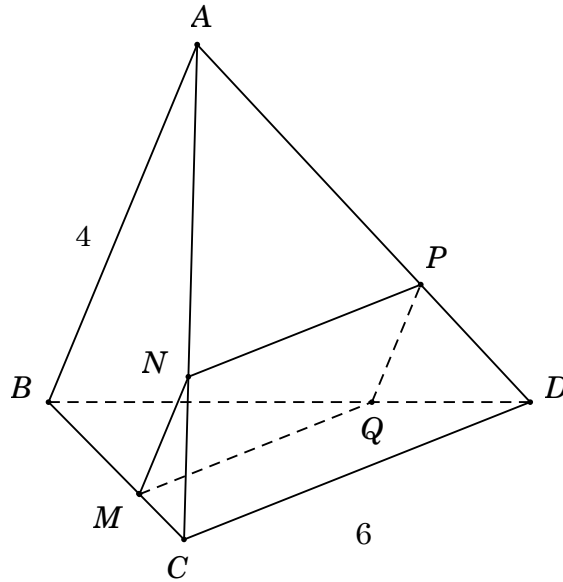
B. 6.

C. $\frac{17}{3}$.

D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MN \end{cases} \Rightarrow MN // AB.$

Tương tự ta có $MQ // CD, NP // CD, QP // AB$. Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $(\widehat{AB;CD}) = (\widehat{MN;MQ}) = \widehat{NMQ} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

$$\text{Lại có } \triangle CMN \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{4}{3};$$

$$\triangle ANP \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{NP}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow NP = 4.$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = MN \cdot NP = \frac{16}{3}.$$

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x \cdot BC$ ($0 < x < 1$). Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9.

B. 11.

C. 10.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned}
P &= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 \\
&= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\
&= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$.

Vậy $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC .

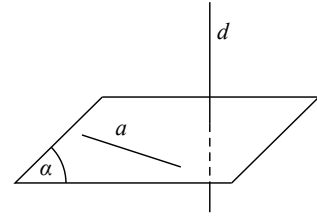
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) .

Kí hiệu $d \perp (\alpha)$.



2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định lý

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

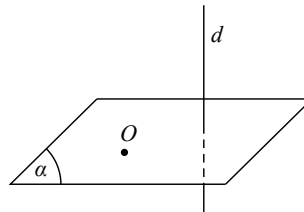
Hệ quả

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

3. Tính chất

Tính chất 1

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

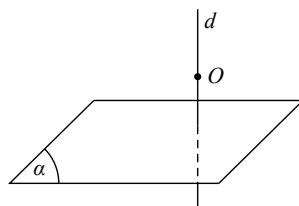


Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng

Người ta gọi mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

Tính chất 2

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

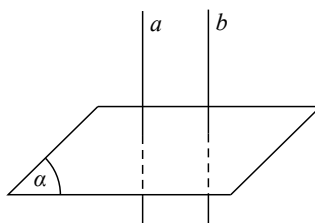


4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

Tính chất 1

Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

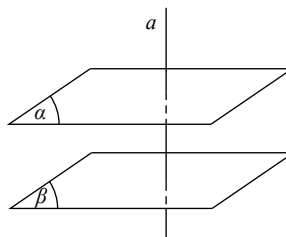
Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Tính chất 2

Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

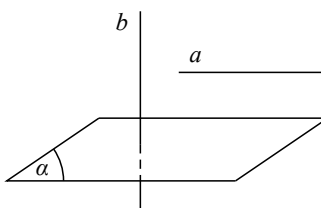
Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Tính chất 3

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .

Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.



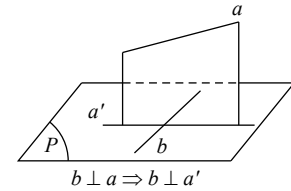
5. Định lý ba đường vuông góc

Định nghĩa

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương vuông góc tới mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) .

Định lí (Định lí 3 đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) . Khi đó điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P) .

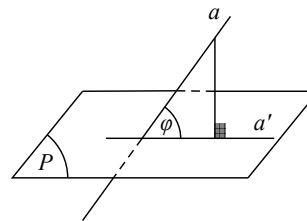


6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa

Nếu đường thẳng $a \perp (P)$ thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .



Chú ý: Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

1. Phương pháp

Ta cần nắm vững các tính chất sau

Tính chất 1

- Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 2

- Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tính chất 3

- a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .
- b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left. \begin{array}{l} a // b \\ (P) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp b.$

B. $\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ b // (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp a.$

C. $\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ b \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // a.$

D. $\left. \begin{array}{l} a \perp (Q) \\ b \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // (Q).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$\left. \begin{array}{l} a // b \\ (P) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp b$ là mệnh đề đúng. Nghĩa là, cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này sẽ vuông góc với đường thẳng kia.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a // b.$

B. $\left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \neq b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b.$

C. $\left. \begin{array}{l} (P) // (Q) \\ a \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a // (Q).$

D. $\left. \begin{array}{l} a // (P) \\ (P) \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a // (Q).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

- Mệnh đề A sai. Vì khi đó hai đường thẳng a và b có thể song song hoặc trùng nhau. Mệnh đề A chỉ đúng khi a và b phân biệt.
- Mệnh đề B đúng. Thật vậy, ta thấy:
 - + Nếu a cắt b tại M . Như vậy, qua điểm M ta vẽ được hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với (P) : Vô lí. Vậy a không cắt b .
 - + Nếu a chéo b . Lấy điểm N trên a . Qua N vẽ đường thẳng $b' // b$.
Do $b \perp (P)$ nên $b' \perp (P)$. Như vậy từ điểm N ta có hai đường thẳng a và b' cùng vuông góc với (P) : Vô lí. Vậy a và b không chéo nhau.
 - + Trường hợp a trùng b không xảy ra vì $a \neq b$ (giả thiết).

Vậy $a // b$.

- Mệnh đề C sai. Mệnh đề đúng là $a \perp (Q)$.
- Mệnh đề D sai. Vì lúc này a có thể song song hoặc chứa trong (Q) .

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } \left. \begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \\ c \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow b // (P).$$

$$\text{B. } \left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow b // (P).$$

$$\text{C. } \left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b // (P) \\ b \subset (P) \end{array} \right].$$

$$\text{D. } \left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ a // (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // (Q).$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

A sai: Lúc này b có thể chứa trong, hoặc cắt, hoặc song song với (P) . Mệnh đề chỉ đúng khi $a \perp (P)$.

B sai: Vì lúc này b có thể chứa trong (P) . Mệnh đề chỉ đúng khi $b \not\subset (P)$.

D sai: Thật vậy, nếu $(P) // (Q)$ hoặc $(P) \equiv (Q)$ thì do $a \perp (P)$ nên $a \perp (Q)$: Vô lí (Trái với giả thiết $a // (Q)$).

Ví dụ 4: Cho $\left\{ \begin{array}{l} a, b, c \subset (\alpha) \\ c \perp a, c \perp b \end{array} \right.$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a cắt b .

B. $a // b$.

C. $a \equiv b$.

$$\text{D. } \left[\begin{array}{l} a // b \\ a \equiv b \end{array} \right].$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Vì a, b, c đồng phẳng và $c \perp a, c \perp b$ nên $a // b$ hoặc $a \equiv b$.

Ví dụ 5: Cho $\left\{ \begin{array}{l} a, b \subset (\alpha) \\ c // (\alpha) \\ c \perp a, c \perp b \end{array} \right.$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a cắt b .

B. $a // b$.

$$\text{C. } \left[\begin{array}{l} a // b \\ a \equiv b \end{array} \right].$$

D. $a \equiv b$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ví dụ 6: Cho $\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ c \text{ cắt } (\alpha) \\ c \perp a, c \perp b \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \text{ cắt } b$.

B. $a // b$.

C. $\begin{cases} a // b \\ a \equiv b \end{cases}$.

D. $a \equiv b$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) .

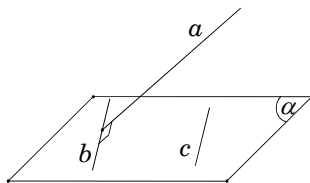
B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α) .

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề C sai vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (α) . Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (α) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (α) .

Câu 2: Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P) , đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P) .

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P) .

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P) .

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P) .

Lời giải

Chọn D

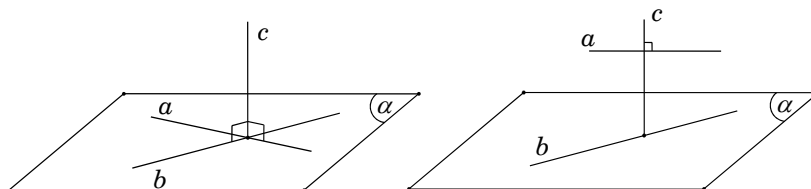
Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P) . (Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.
- C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải

Chọn B



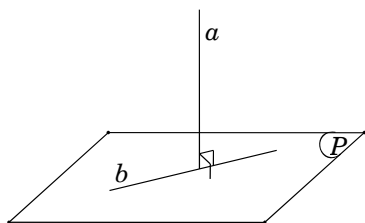
Mệnh đề ở câu B sai vì: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Câu 4: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.
- B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
- C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.
- D. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải

Chọn D



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P) .

Câu 5: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P) . Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
- B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

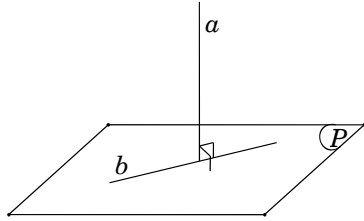
C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

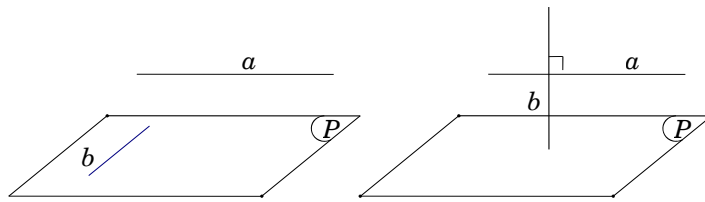
Lời giải

Chọn B

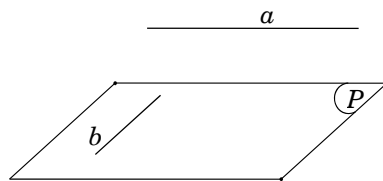
Mệnh đề A sai vì b có thể nằm trong (P) .



Mệnh đề C sai vì b có thể cắt (P) hoặc b nằm trong (P) .



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P) .



Câu 6: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.

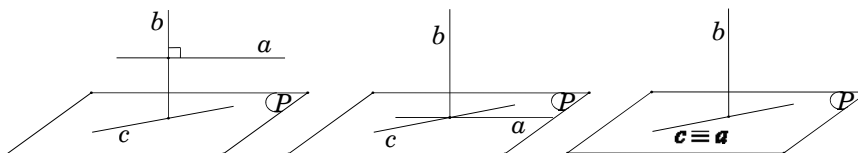
C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$, $b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c) .

Lời giải

Chọn D

Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c .



Câu 7: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

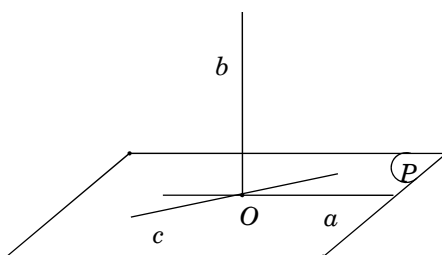
B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề C sai vì qua một điểm O cho trước có **vô số** đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

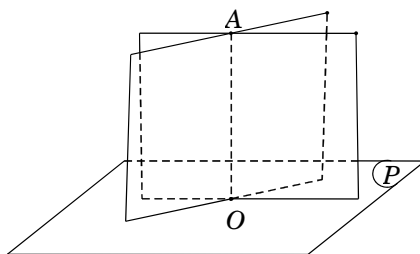
B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn D



Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

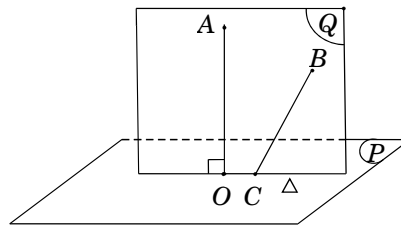
C. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β) .

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ) .

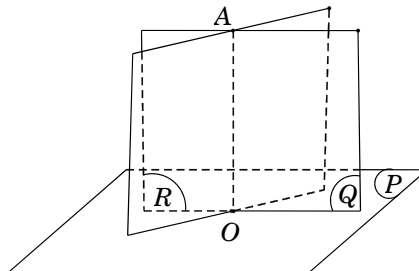
Lời giải

Chọn D

Mệnh đề A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.



Mệnh đề B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.



Mệnh đề C sai vì đường thẳng AB có thể không vuông góc với giao tuyến.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P) .

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b .

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề B sai vì hai góc này phụ nhau.

Mệnh đề C sai vì (P) có thể trùng (Q) .

Mệnh đề D sai vì a có thể trùng b .

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Từ đó suy ra đường thẳng vuông góc với đường thẳng

1. Phương pháp

Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ta có thể sử dụng một trong các cách sau

1.
$$\begin{cases} a \perp b \subset (\alpha) \\ a \perp c \subset (\alpha) \Rightarrow a \perp (\alpha) \text{ (a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau)} \\ b \cap c = A \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} a // b \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha) \text{ (a song song với một đường thẳng b vuông góc (P))}$$
3.
$$\begin{cases} a \perp (\beta) \\ (\alpha) // (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$
4. $AB \perp (\alpha) = \{M \mid MA = MB\}, (\alpha) \text{ là mặt phẳng trung trực của } AB$
5.
$$\begin{cases} \triangle ABC \subset (\alpha) \\ MA = MB = MC \Rightarrow MO \perp (\alpha) \\ OA = OB = OC \end{cases}$$

Để chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng ngoài 4 cách đã biết ở bài hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng thêm các cách sau

1.
$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$
2.
$$\begin{cases} a // (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$
3.
$$\begin{cases} a' = \text{hch}_{\alpha}(a) \\ b \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$$
4.
$$\begin{cases} \triangle ABC, a \perp AB \\ a \perp AC \end{cases} \Rightarrow a \perp BC$$

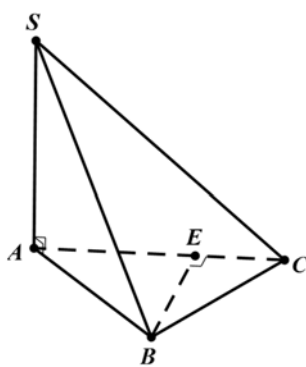
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Kẻ BE vuông góc với AC ($E \in AC$). Khi đó:

- A. $BE \subset (SBC)$.
- B. $BE \subset (SAB)$.
- C. $BE \perp (SAC)$.
- D. BE là đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C



Do $SA \perp BE$, $BE \perp AC \Rightarrow BE \perp (SAC)$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại C . Kẻ $SA \perp (ABC)$, $AE \perp SC$ và $AF \perp SB$. Khi đó:

- A. $AF \parallel BC$.
- B. $AE \subset (SBC)$.
- C. $AF \perp (SBC)$.
- D. $SB \perp (AEF)$.

Hướng dẫn giải

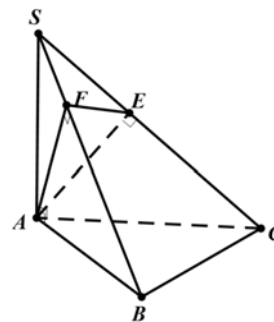
ĐÁP ÁN D

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AE \quad (1)$$

Theo giả thiết: $SC \perp AE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp SB$ mà $AF \perp SB \Rightarrow SB \perp (AEF)$.



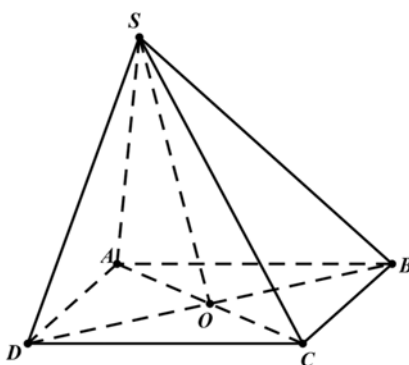
Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$.

Khi đó:

- A. SO là đường cao của hình chóp.
- B. Tam giác SBD vuông cân.
- C. Tam giác SAC vuông cân.
- D. $SO = \frac{1}{2}BD$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A



O là tâm hình thoi $\Rightarrow$ O là trung điểm của AC, BD mà mỗi $\triangle SAC, \triangle SBD$ cân $\Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO$ là đường cao hình chóp.

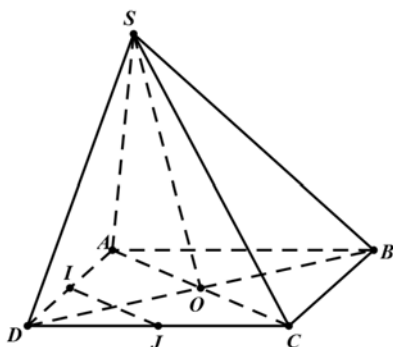
Lưu ý: Tam giác $\triangle SAC, \triangle SBD$ chỉ cân chứ không vuông

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và BC thì

- A. $IJ \perp (SAD)$.
- B. $IJ \perp (SCD)$.
- C. $IJ \perp (SAC)$.
- D. $IJ \perp (SBD)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D



$\triangle SAC, \triangle SBD$ cân $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow SO &\perp IJ \\ IJ // AC &\Rightarrow IJ \perp BD \\ \Rightarrow IJ &\perp (SBD). \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S . Trên cạnh AB lấy một điểm M với $AM = x (0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M song song với AC và SB cắt BC, SB, SA lần lượt tại N, P, Q . Giá trị x để S_{MNPQ} lớn nhất bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.

Phân tích: Trước hết ta phải xác định được $MNPQ$ là hình chữ nhật

Vì $(\alpha) // SB$ và $(\alpha) // AC$ nên $MNPQ$ là hình bình hành.

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp SO \text{ (}\triangle ACS \text{ cân)} \\ AC \perp BD \text{ (đường chéo hình vuông)} \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)$$

$$\Rightarrow AC \perp SB, \text{ mà } MQ // SB \Rightarrow MN \perp MQ$$

Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $MN // AC$

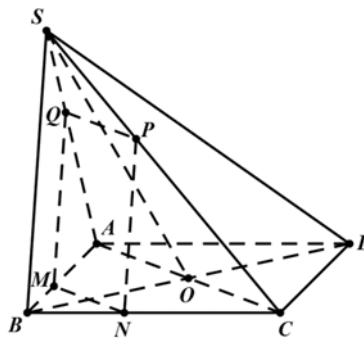
$$\Rightarrow MN = \frac{BM}{BA} \cdot AC = \frac{a-x}{a} \cdot a\sqrt{2} = (a-x)\sqrt{2}$$

$$\triangle SAB \text{ có: } MQ // SB \Rightarrow MQ = \frac{AM}{AB} \cdot SB = \frac{bx}{a}$$

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \frac{b\sqrt{2}}{a} (a-x)x$$

$$\text{Ta có: } \frac{(a-x)+x}{2} \geq \sqrt{(a-x)x} \Rightarrow \frac{a^2}{4} \geq (a-x)x$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } a-x=x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$



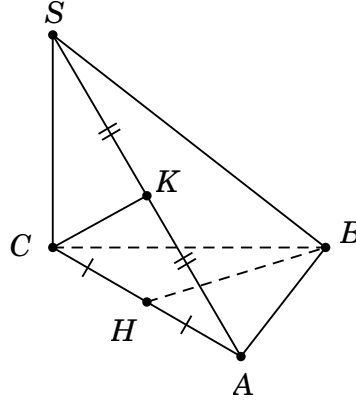
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $CH \perp AK$. B. $CH \perp SB$. C. $CH \perp SA$. D. $AK \perp SB$.

Lời giải

Chọn D



Vì H là trung điểm của AB , tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$ mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.

Mặt khác $AK \subset (SAB) \longrightarrow CH$ vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK .

Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB . Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $SA \perp BC$.

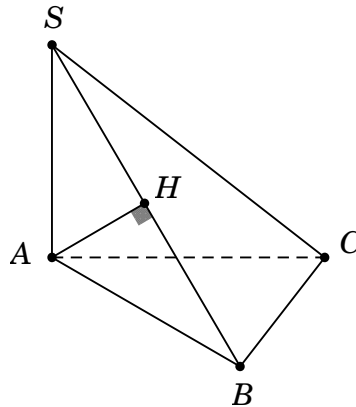
B. $AH \perp BC$.

C. $AH \perp AC$.

D. $AH \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B , có $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

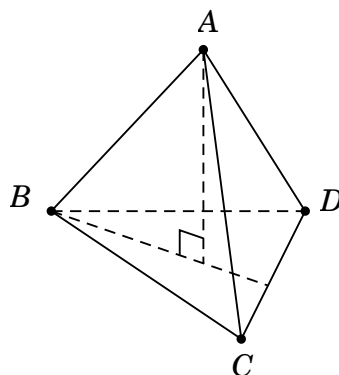
Nếu $AH \perp AC$ mà $SA \perp AC$ suy ra $AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $CD \perp BD$. B. $AC = BD$. C. $AB = CD$. D. $AB \perp CD$.

Lời giải

Chọn D



Vì AH vuông góc với $mp(BCD)$ suy ra $AH \perp CD$. (1)

Mà H là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow BH \perp CD$. (2)

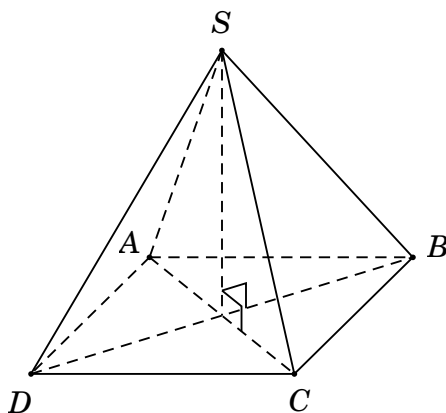
Từ (1),(2) suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $AB \perp (SAC)$. B. $CD \perp AC$. C. $SO \perp (ABCD)$. D. $CD \perp (SBD)$.

Lời giải

Chọn C



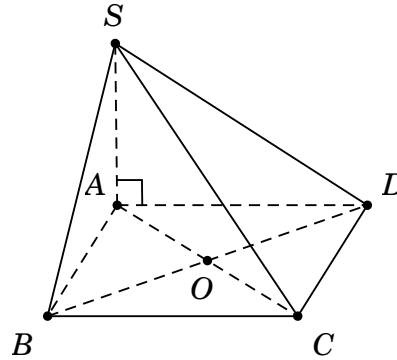
Vì $SA = SC \Rightarrow \triangle SAC$ cân tại S mà O là trung điểm $AC \Rightarrow SO \perp AC$.

Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$ mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?
- A. $SA \perp BD$. B. $SC \perp BD$. C. $SO \perp BD$. D. $AD \perp SC$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với $mp(ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mà $ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow AC \perp BD$ nên suy ra $BD \perp (SAC)$.

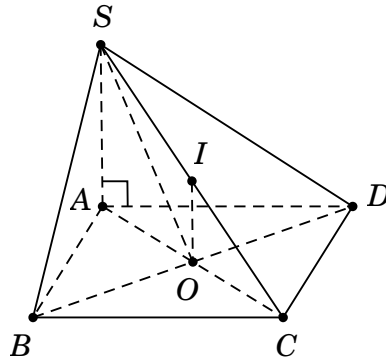
Mặt khác $SO \subset (SAC)$ và $SC \subset (SAC)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases}$.

Và AD, SC là hai đường thẳng chéo nhau.

- Câu 16:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào dưới đây là sai?
- A. $IO \perp (ABCD)$. B. $BC \perp SB$.
C. Tam giác SCD vuông ở D . D. (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD .

Lời giải

Chọn D



Vì O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC suy ra OI là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OI \parallel SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$ mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB$.

Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} (SA \perp (ABCD)) \Rightarrow CD \perp SD$.

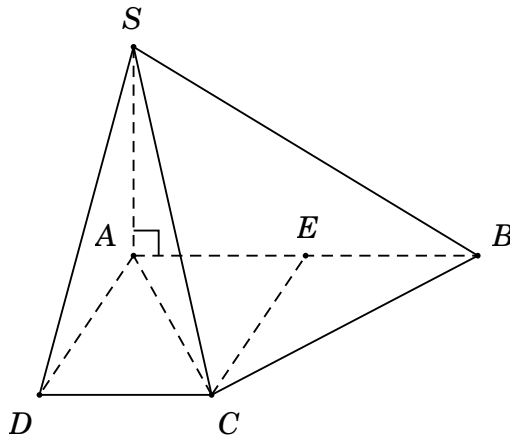
Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \longrightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB . Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A.** $CE \perp (SAB)$. **B.** $CB \perp (SAC)$.
C. Tam giác SDC vuông tại D . **D.** $CE \perp (SDC)$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \text{ (do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB)$. Do đó A đúng.

Vì $CE = AD = a \Rightarrow CE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$. Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) nên suy ra $CB \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó C đúng.

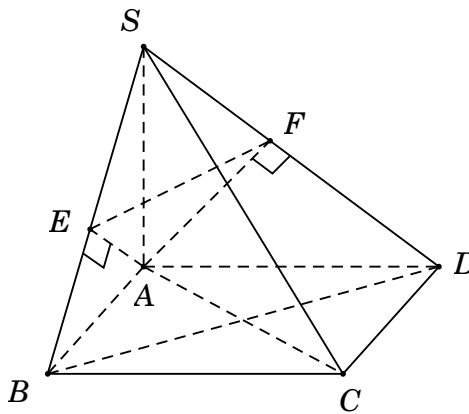
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D là đáp án sai.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $SC \perp (AFB)$. B. $SC \perp (AEC)$. C. $SC \perp (AED)$. D. $SC \perp (AEF)$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

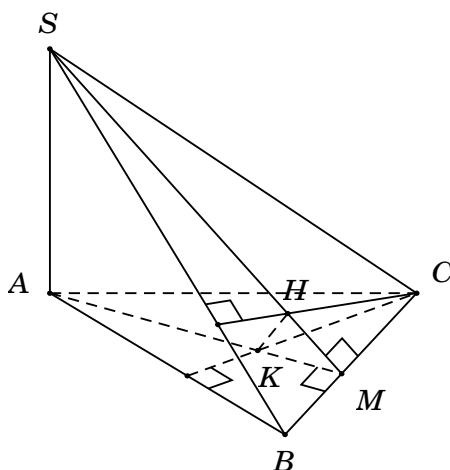
Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 19: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $BC \perp (SAH)$. B. $SB \perp (CHK)$. C. $HK \perp (SBC)$. D. $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



● Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$. Do đó A đúng.

● Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.

Mặt khác có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$. Do đó B đúng.

● Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Do đó C đúng.

Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D sai.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$.

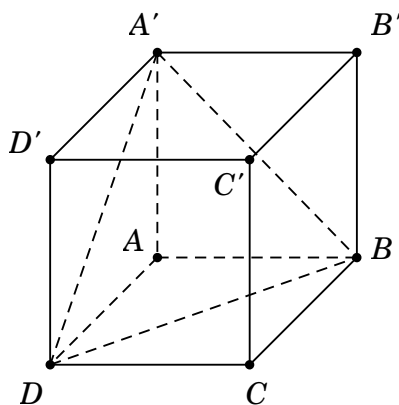
B. $(A'DC')$.

C. $(A'CD')$.

D. $(A'B'CD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AA'D'A$ là hình vuông suy ra $AD' \perp A'D$. (1)

Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp A'D$. (2)

Từ (1),(2) suy ra $A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$.

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ mà $AA' \perp BD$ ($AA' \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$. Kết hợp với $A'D \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $OA \perp BC$.

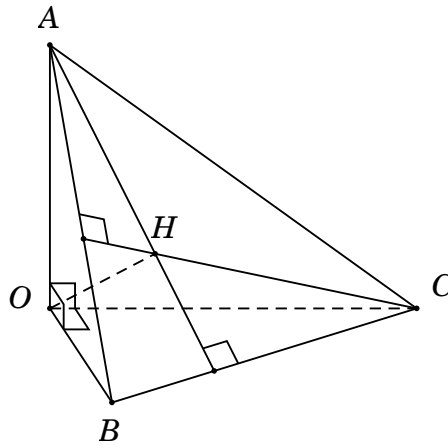
B. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

C. H là trực tâm $\triangle ABC$.

D. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Lời giải

Chọn D



● $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$. Do đó A đúng. (1)

● Gọi $I = AH \cap BC$.

Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp OI$.

Tam giác vuông BOC , ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Tam giác vuông AOI , ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Do đó B đúng.

● Từ chứng minh trên $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI$. (3)

Gọi $J = BH \cap AC$. Chứng minh tương tự ta có $AC \perp BJ$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra H là trực tâm $\triangle ABC$. Do đó C đúng.

Vậy D là đáp án sai.

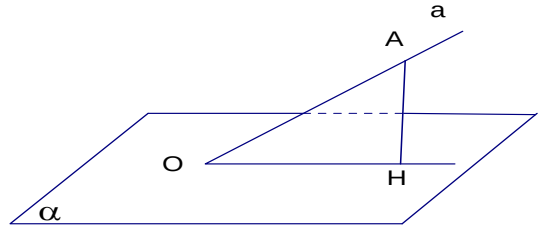
Dạng 3. Xác định góc – hình chiếu – tính độ dài

1. Phương pháp

- Bước 1: Tìm giao điểm O của a với α .
- Bước 2: Chọn $A \in a$ và dựng $AH \perp \alpha$, với $H \in \alpha$.

Khi đó: $\widehat{AOH} = (\widehat{a, \alpha})$

- Bước 3: Tính số đo của $\widehat{AOH}$ dựa trên các hệ thức lượng trong tam giác.



Các trường hợp đặc biệt

- $a \perp (\alpha) \Rightarrow [\widehat{a, (\alpha)}] = 90^\circ$
- $\begin{cases} a // (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow [\widehat{a, (\alpha)}] = 0^\circ$

Chú ý: Nếu $[\widehat{a, (\alpha)}] = \varphi$ thì $0 \leq \varphi < 90^\circ$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện SABC có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$, $AB = a\sqrt{3}$, tam giác SBC cân tại S.

a) Góc α giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC) là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

b) Góc β giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

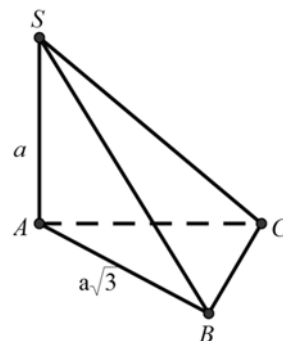
Hướng dẫn giải

Xác định góc α và β . Ta có:

$$SA \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \text{ là hình chiếu của SB trên } (ABC) \\ AC \text{ là hình chiếu của SC trên } (ABC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \widehat{SBA} \\ \beta = \widehat{SCA} \end{cases}$$



a) ĐÁP ÁN A

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại A. Do đó:

$$\tan \alpha = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

b) ĐÁP ÁN B

$$\Delta SAB: SB^2 = SA^2 + AB^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = 4a^2$$

Do đó: $SB = 2a \Rightarrow SC = SB = 2a$

Mặt khác: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại A

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{SA}{SC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Góc α giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

b) Góc β giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (ABCD) là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

c) Góc γ giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) là

- A. 30° . B. 60° . C. $\gamma = 45^\circ$. D. 90° .

Hướng dẫn giải

Xác định góc α và β . Ta có:

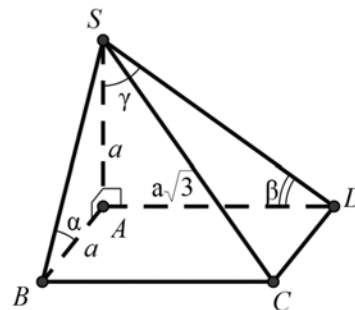
$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} AB \text{ là hình chiếu của } SB \text{ trên } (ABCD) \\ AD \text{ là hình chiếu của } SD \text{ trên } (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \widehat{SBA} \\ \beta = \widehat{SDA} \end{cases}$$

a) ĐÁP ÁN C

Góc α giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{SBA}$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{SBA} = \alpha = 45^\circ.$$



b) ĐÁP ÁN A

Góc β giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{SDA}$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{SA}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30^\circ.$$

c) ĐÁP ÁN B

$$DA \perp (SAB) \Rightarrow SA \text{ là hình chiếu của } SD \text{ trên } (SAB) \Rightarrow \gamma = \widehat{ASD}$$

$$\Delta SAD \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \gamma = \frac{AD}{SA} = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = 60^\circ.$$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $BC = a$,

$AA' = a\sqrt{2}$ và $\cos \widehat{BA'C} = \frac{5}{6}$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Đặt } AB = x \text{ thì } A'B^2 = A'C^2 = x^2 + 2a^2$$

Áp dụng định lý côsin trong $\Delta A'BC$, ta có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BA'C} &= \frac{A'B^2 + A'C^2 - BC^2}{2A'B \cdot A'C} \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4a^2 - a^2}{2(x^2 + 2a^2)} &= \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = a \end{aligned}$$

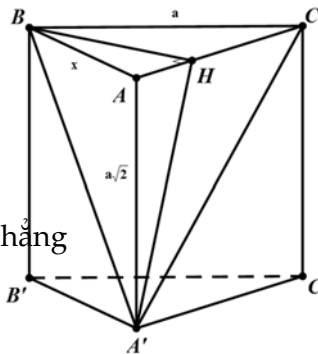
Kẻ $BH \perp AC$, khi đó $BH \perp (AA'C'C)$

Suy ra góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng

$(AA'C'C)$ là góc $\widehat{BA'H}$.

Trong tam giác vuông $A'BH$ có

$$\sin \widehat{BA'H} = \frac{BH}{A'B} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BA'H} = 30^\circ.$$



Ví dụ 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết

$AB = 3\text{cm}$, $BC' = 3\sqrt{2}\text{cm}$. Góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Gọi H là trung điểm của cạnh AC , suy ra HC' là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ACC'A')$

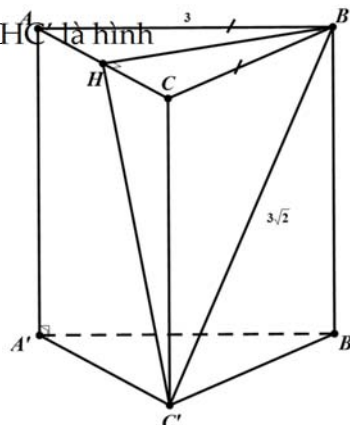
$$\text{Do đó } (\widehat{BC', (ACC'A')}) = (\widehat{BC', HC'})$$

Ta có tam giác BHC' vuông tại H , cạnh

$$BH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Ta có } \sin \widehat{HC'B} = \frac{BH}{BC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HC'B} = 30^\circ.$$

$$\text{Vậy } (\widehat{BC', (ACC'A')}) = 30^\circ.$$



Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{A} = 60^\circ$. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy $ABCD$. Cho $BB' = a$. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.

Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết ta có $B'O \perp (ABCD)$

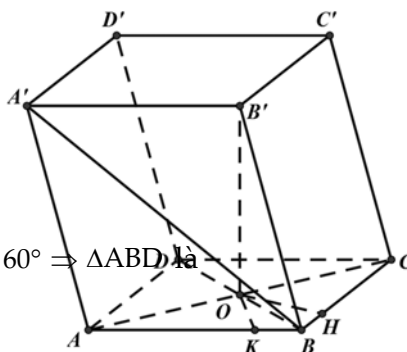
$$\begin{cases} B'B \cap (ABCD) = B \\ B'O \perp (ABCD), O \in (ABCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hình chiếu $B'B$ trên $(ABCD)$ là OB

$$\Rightarrow (B'B, (ABCD)) = (B'B, BO) = \widehat{B'BO}$$

Tam giác ABD có $AB = AD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là

tam giác đều $\Rightarrow OB = \frac{a}{2}$



Trong tam giác vuông $B'OB$: $\cos \widehat{B'OB} = \frac{OB}{BB'} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B'OB} = 60^\circ$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $4a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tam giác SAB có diện tích bằng $\frac{8a^2\sqrt{6}}{3}$.

Côsin của góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{19}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{5}$. C. $\frac{6}{25}$.
D. $\frac{19}{25}$.

Hướng dẫn giải

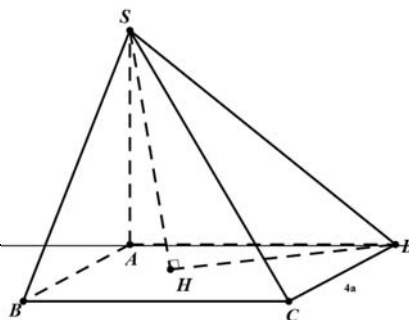
ĐÁP ÁN A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng (SBC)

$$\Rightarrow (\widehat{SD; (SBC)}) = \widehat{HSD} \Rightarrow \cos(\widehat{SD; (SBC)}) = \cos \widehat{DSH} = \frac{SH}{SD}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} SA \cdot AB = \frac{1}{2} SA \cdot 4a = \frac{8a^2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SA = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$$

$$V_{D.SBC} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{SBC} \text{ và}$$



$$\begin{aligned}
 V_{D.SBC} &= V_{S.BCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{BCD} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 4a = \frac{32a^3\sqrt{6}}{9} \\
 \Rightarrow \frac{1}{3} DH \cdot S_{SBC} &= \frac{32a^3\sqrt{6}}{9} \Rightarrow DH = \frac{32a^3\sqrt{6}}{3S_{SBC}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Từ } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot SB = 2a \cdot SB$$

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = \left(\frac{4a\sqrt{6}}{3} \right)^2 + 16a^2 = \frac{80a^2}{3} \Rightarrow SB = a\sqrt{\frac{80}{3}} \Rightarrow S_{SBC} = 2a^2\sqrt{\frac{80}{3}}$$

$$\text{Thế vào (1)} \Rightarrow DH = \frac{32a^3\sqrt{6}}{3 \cdot 2a^2\sqrt{\frac{80}{3}}} = \frac{4a\sqrt{10}}{5}$$

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = \left(\frac{4a\sqrt{6}}{3} \right)^2 + 16a^2 = \frac{80a^2}{3} \Rightarrow SD = a\sqrt{\frac{80}{3}}$$

$$\Rightarrow SH^2 = SD^2 - HD^2 = \frac{80a^2}{3} - \left(\frac{4a\sqrt{10}}{5} \right)^2 = \frac{304a^2}{15}$$

$$\Rightarrow SA = a\sqrt{\frac{304}{15}} \Rightarrow \cos(\widehat{SD; (SBC)}) = \frac{SH}{SD} = \frac{a\sqrt{\frac{304}{15}}}{a\sqrt{\frac{80}{3}}} = \frac{\sqrt{19}}{5}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, SB . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $(IJK) \parallel (SAC)$.

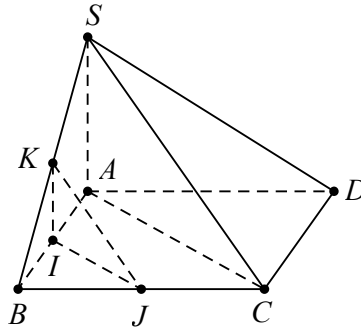
B. Góc giữa SC và BD bằng 60° .

C. $BD \perp (IJK)$.

D. $BD \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác SBC , có $\frac{BK}{BS} = \frac{BJ}{BC} = \frac{1}{2}$ suy ra JK song song với SC (1).

Tam giác SAB , có $\frac{BI}{BA} = \frac{BK}{BS} = \frac{1}{2}$ suy ra IK song song với SA (2).

Từ (1),(2) suy ra $mp(IJK) // mp(SAC)$ (*).

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC$ mà $SA \perp BD$ suy ra $BD \perp (SAC)$.

Kết hợp với (*), ta được $BD \perp (IJK)$. Vậy góc giữa hai đường thẳng SC, BD bằng 90° .

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, BD đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

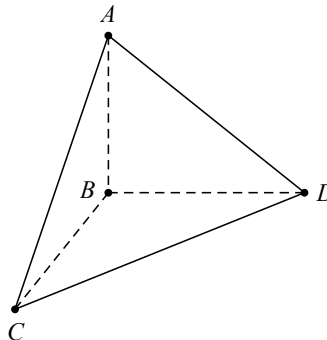
B. Góc giữa AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

D. Góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ A sai, vì $\begin{cases} CB \perp BD \\ CB \perp BA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABD) \Rightarrow B$ là hình chiếu của C trên $mp(ABD)$.

Suy ra góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

□ **B đúng**, vì $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow B$ là hình chiếu của A trên $mp(BCD)$.

Suy ra góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

□ **C sai**, vì $\begin{cases} BD \perp BA \\ BD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow B$ là hình chiếu của D trên $mp(ABC)$.

Suy ra góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{DAB}$.

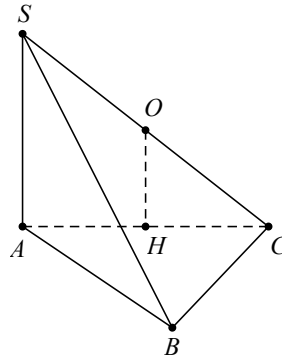
□ **D sai**, vì B là hình chiếu của C trên $mp(ABD)$ suy ra góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . H là hình chiếu của O trên (ABC) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. H là trung điểm của cạnh AB .
- B. H là trung điểm của cạnh BC .
- C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- D. H là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Chọn C



Ta có SA vuông góc với $mp(ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow O$ là trung điểm của SC .

Theo bài ra, ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \parallel SA \Rightarrow H$ là trung điểm của AC .

Mà tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

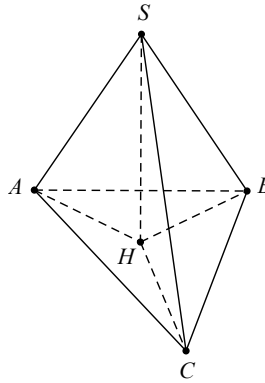
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác nhọn, cạnh bên $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) , khi đó

- A. H là trực tâm của tam giác ABC .

- B. H là trọng tâm của tam giác ABC .
- C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Chọn C



Vì H là hình chiếu vuông góc của S trên $mp(ABC)$ nên ta có

- ☐ Tam giác SAH vuông tại H , có $SA^2 = AH^2 + SH^2$.
- ☐ Tam giác SBH vuông tại H , có $SB^2 = BH^2 + SH^2$.
- ☐ Tam giác SCH vuông tại H , có $SC^2 = CH^2 + SH^2$.

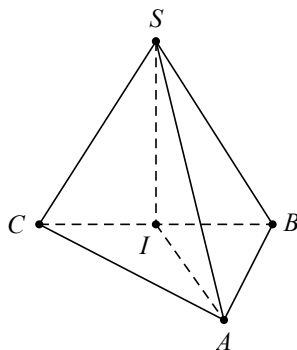
Kết hợp điều kiện $SA = SB = SC$ suy ra $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) , khi đó

- | | |
|---|--|
| <p>A. I là trung điểm của AB.</p> <p>C. I là trung điểm của AC.</p> | <p>B. I là trọng tâm của tam giác ABC.</p> <p>D. I là trung điểm của BC.</p> |
|---|--|

Lời giải

Chọn D



Đặt $SA = a$. Tam giác SAB vuông cân tại S , có $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC cân tại S , có $\widehat{CSA} = 60^\circ$ suy ra $SA = SC = AC = a$.

Áp dụng định lí Cosin cho tam giác SBC , ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2.SB.SC.\cos \widehat{BSC}$

$$\Rightarrow BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2.\cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3} = \sqrt{AB^2 + AC^2}.$$

Khi đó, tam giác ABC vuông tại A mà I là hình chiếu của S trên $mp(ABC)$.

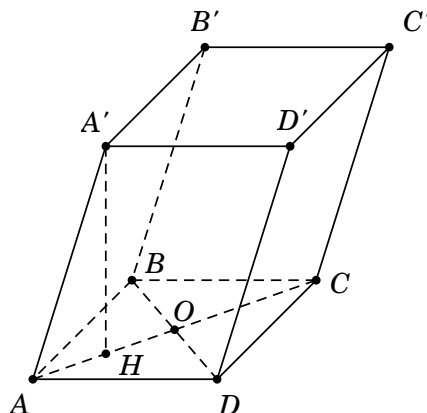
Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay chính là trung điểm BC .

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $A'A = A'B = A'D$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. trung điểm của AO .
- B. trọng tâm của tam giác ABD .
- C. tâm O của hình thoi $ABCD$.
- D. trọng tâm của tam giác BCD .

Lời giải

Chọn B



Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB = AD$ mà $\widehat{BAD} = 60^\circ$ suy ra tam giác ABD đều (1).

Ta có $A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (2).

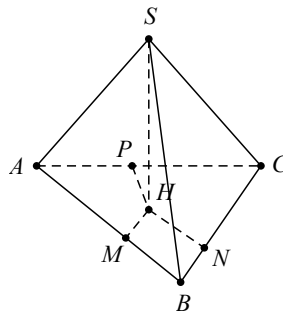
Từ (1),(2) suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

- A. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- B. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- C. trọng tâm của tam giác ABC .
- D. giao điểm của hai đường thẳng AC và BD .

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) .

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của S trên các cạnh AB, AC, BC .

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp HM$, tương tự ta được $HN \perp AC, HP \perp BC$.

Khi đó $\widehat{(SAB);(ABC)} = \widehat{(SM;HM)} = \widehat{SMH}$, tương tự suy ra $\Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH}$.

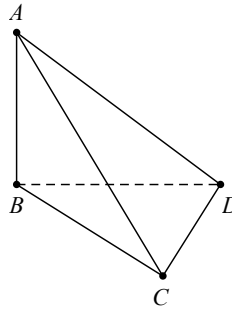
$\Rightarrow \triangle SMH = \triangle SNH = \triangle SPH \Rightarrow HM = HN = NP \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a, BC = b, CD = c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng

- A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- B. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.
- C. $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.
- D. $\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B .

Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$ tam giác BCD vuông tại C .

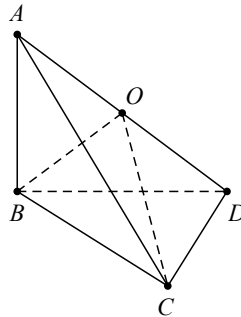
Khi đó $\begin{cases} AD^2 = AB^2 + BD^2 \\ BD^2 = BC^2 + CD^2 \end{cases} \Rightarrow AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau. Điểm nào dưới đây các đều bốn đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$?

- A. Trung điểm của cạnh BD .
- B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- C. Trung điểm của cạnh AD .
- D. Trọng tâm của tam giác ACD .

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B .

Suy ra $IA = IB = ID = \frac{AD}{2}$, với I là trung điểm của AD . (1)

Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$ tam giác ACD vuông tại C .

Suy ra $EA = EC = ED = \frac{AD}{2}$, với E là trung điểm của AD . (2)

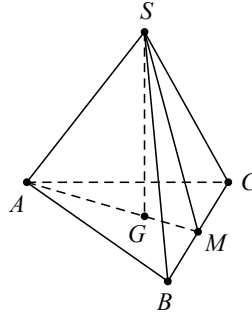
Từ (1),(2) suy ra $I \equiv E$ nên trung điểm của cạnh AD cách đều A, B, C, D .

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài các cạnh bên $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Độ dài đoạn thẳng SG bằng

- A. $\frac{\sqrt{9b^2 + 3a^2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{b^2 - 3a^2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{b^2 + 3a^2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SB = SC$ và G là trọng tâm tam giác ABC

Suy ra G là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC) .

Gọi M là trung điểm của BC suy ra $BM = CM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác ABC đều cạnh a , có $GM = \frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác SBM vuông tại M , có $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

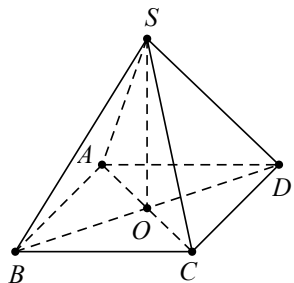
Tam giác SGM vuông tại G , có $SG = \sqrt{SM^2 - GM^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$.

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S . Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Độ dài cạnh SO bằng

- A. $SO = a\sqrt{3}$. B. $SO = a\sqrt{2}$. C. $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$

Khi đó $\widehat{SA; (ABCD)} = \widehat{SA; OA} = \widehat{SAO} = 45^\circ \Rightarrow$ tam giác SAO vuông cân. (1)

Tam giác ABC vuông cân tại B , có $OA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $SO = OA = a\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD) .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{SC; (ABD)} = \widehat{SC; (ABCD)} = \widehat{SC; AC} = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác vuông SAC , ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{SA}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{SCA} = 60^\circ$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$.

B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\tan \varphi = 2$.

D. $\varphi = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SO trên mặt đáy $(ABCD)$ là AO . Do đó $\widehat{(SO; (ABCD))} = \widehat{(SO; OA)} = \widehat{SOA}$.

Trong tam giác vuông SAO , ta có $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = 2\sqrt{2}$.

Vậy SO hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc nhọn φ thỏa mãn $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy (ABC)

A. 30° .

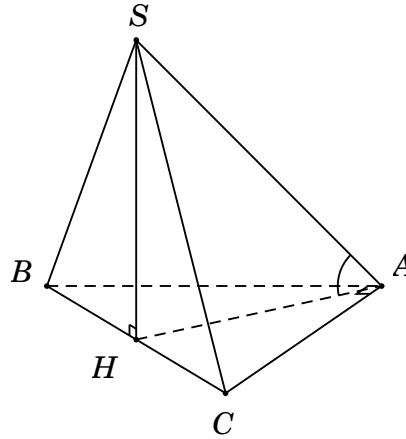
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp (ABC)$.

Vì $SH \perp (ABC)$ nên HA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) .

Do đó $\widehat{(SA, (ABC))} = \widehat{(SA, AH)} = \widehat{SAH}$.

• Tam giác SBC đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.

• Tam giác ABC vuông tại A nên $AH = \frac{1}{2}BC = a$.

Tam giác vuông SAH , có $\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \varphi = \frac{5}{\sqrt{15}}$.

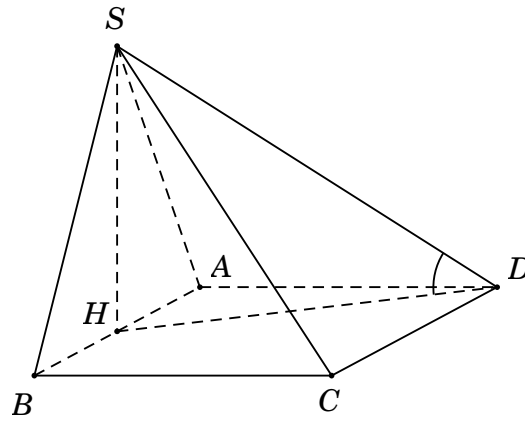
B. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$ là HD .

Do đó $\widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{(SD, HD)} = \widehat{SDH}$.

• Tam giác SAB đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

• $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông SHD , có $\cot \widehat{SDH} = \frac{DH}{SH} = \frac{5}{\sqrt{15}}$.

Câu 16: Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \sqrt{7}$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 45^\circ$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi O là tâm mặt đáy $(ABCD)$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Vì $SO \perp (ABCD)$, suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó $\widehat{(SA, (ABCD))} = \widehat{(SA, AO)} = \widehat{SAO}$.

Tam giác vuông SOA , có $\tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \frac{\sqrt{SB^2 - BO^2}}{AO} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\cos \alpha = 0$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là trọng tâm tam giác đều $BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

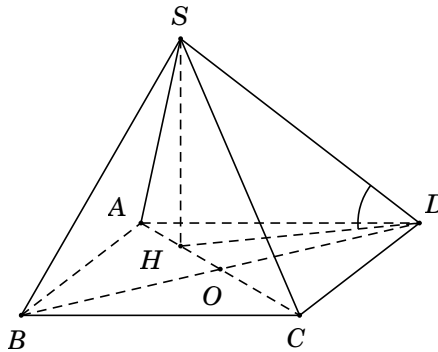
Khi đó $\alpha = \widehat{ABH} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO . Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \alpha = \sqrt{5}$. B. $\tan \alpha = 1$. C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\tan \alpha = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng $(ABCD)$ là HD .

Do đó $\widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$.

- Tính được $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.
- Trong tam giác ADH , có $DH = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH \cdot AD \cdot \cos 45^\circ} = a\sqrt{10}$.

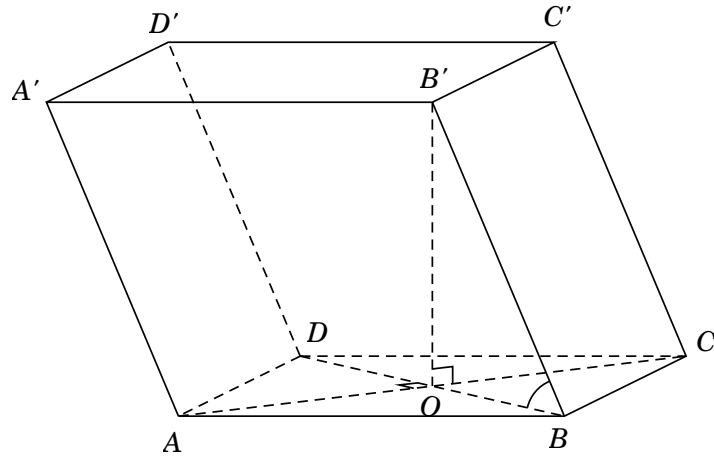
Tam giác vuông SHD , có $\tan \widehat{SDH} = \frac{SH}{HD} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 19: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết $B'O \perp (ABCD)$.

Do đó $\widehat{BB', (ABCD)} = \widehat{BB', BO} = \widehat{B'BO}$.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a , suy ra $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$.

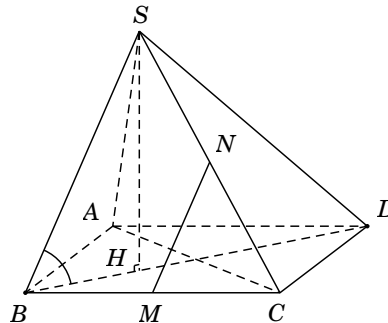
Tam giác vuông $B'BO$, có $\cos \widehat{B'BO} = \frac{BO}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B'BO} = 60^\circ$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC và $SH = \frac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC . Gọi α là góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$. B. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. C. $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. D. $\tan \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $MN \parallel SB$. Do đó $\widehat{MN, (ABCD)} = \widehat{SB, (ABCD)}$.

Do $SH \perp (ABCD)$ nên $\widehat{MN, (ABCD)} = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, HB} = \widehat{SBH}$.

Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$; $BH = \frac{BD}{3} = \frac{2a}{3}$.

Tam giác SHB , có $\tan \widehat{SBH} = \frac{SH}{BH} = \frac{3}{4}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a , SO vuông góc với đáy. Gọi M , N lần lượt là trung điểm SA và BC . Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 30° .

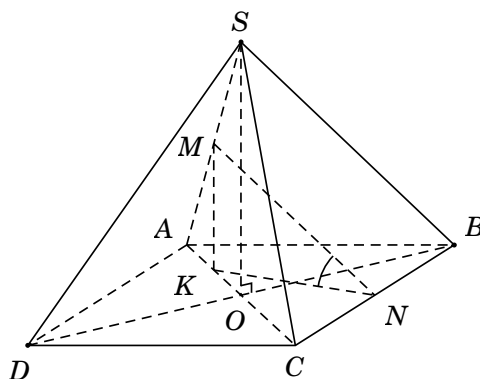
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Kẻ $MK \parallel SO$, do $SO \perp (ABCD)$, suy ra $MK \perp (ABCD)$.

Do đó $\widehat{MN, (ABCD)} = \widehat{MN, NK} = \widehat{MNK}$. Ta có $CK = \frac{3}{4}CA = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác CNK , có $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \frac{CN^2 + CK^2 - KN^2}{2CN \cdot CK} \Rightarrow KN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Tam giác vuông MNK , có $\cos \widehat{MNK} = \frac{NK}{MN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MNK} = 60^\circ$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

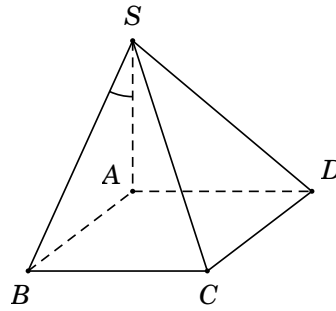
B. $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\varphi = 60^\circ$.

D. $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAD) là SA . Do đó $\widehat{SB, (SAD)} = \widehat{(SB, SA)} = \widehat{BSA}$.

Tam giác vuông SAB , ta có $\cos \widehat{BSA} = \frac{SB}{SA} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

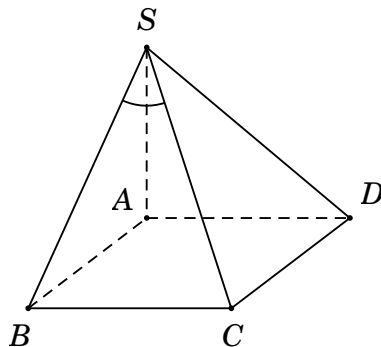
B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

C. $\alpha = 30^\circ$.

D. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB) là SB . Do đó $\widehat{SC, (SAB)} = \widehat{(SC, SB)} = \widehat{CSB}$.

Tam giác vuông SAB , có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7}$.

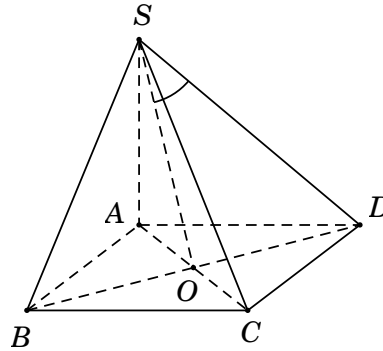
Tam giác vuông SBC , có $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\tan \varphi = \sqrt{5}$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\varphi = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $45^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$, suy ra $SA = AC = 2a\sqrt{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$, ta có $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAC) là SO . Do đó $\widehat{SD, (SAC)} = \widehat{SD, SO} = \widehat{DSO}$.

Ta có $DO = \frac{1}{2}BD = a\sqrt{2}$; $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{SA^2 + DO^2} = a\sqrt{10}$.

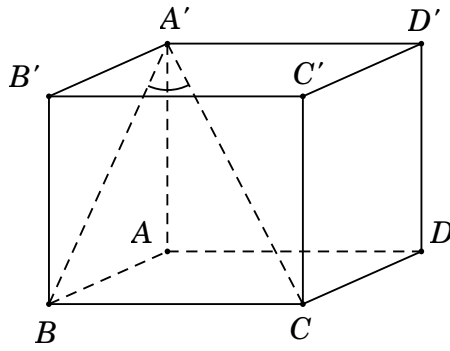
Tam giác vuông SOD , có $\tan \widehat{DSO} = \frac{OD}{OS} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B)$.

Do đó $\widehat{A'C, (AA'B'B)} = \widehat{A'C, A'B} = \widehat{CA'B}$.

Vì $BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp BA'$ nên tam giác $A'BC$ vuông tại B .

Tam giác vuông $A'BC$, có $\tan \widehat{CA'B} = \frac{BC}{A'B} = \frac{BC}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

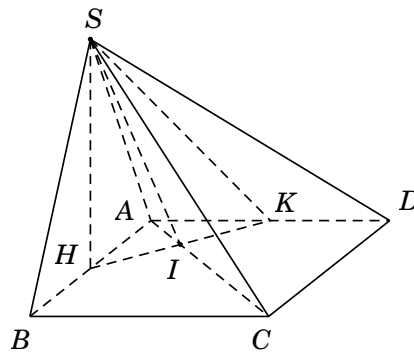
Vậy $A'C$ tạo với mặt phẳng $(AA'B'B)$ một góc 30° .

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \sqrt{7}$. B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = HK \cap AC$. Do H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $HK \parallel BD$. Suy ra $HK \perp AC$. Lại có $AC \perp SH$ nên suy ra $AC \perp (SHK)$.

Do đó $\widehat{SA, (SHK)} = \widehat{SA, SI} = \widehat{ASI}$.

Tam giác SIA vuông tại I , có $\tan \widehat{ASI} = \frac{AI}{SI} = \frac{\frac{1}{4}AC}{\sqrt{SA^2 - AI^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD) .

A. 30° .

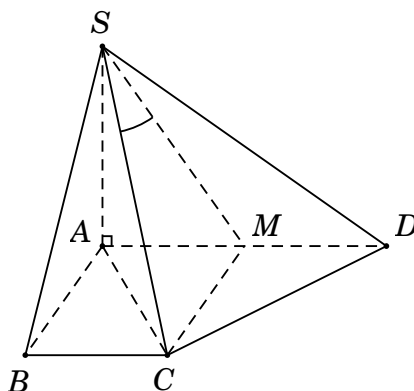
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AD , suy ra $ABCM$ là hình vuông nên $CM \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$.

Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAD) là SM .

Do đó $\widehat{SC, (SAD)} = \widehat{SC, SM} = \widehat{CSM}$.

Tam giác vuông SMC , có $\tan \widehat{CSM} = \frac{CM}{SM} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \widehat{CSM} = 30^\circ$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và mặt phẳng (SAD) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 60^\circ$.

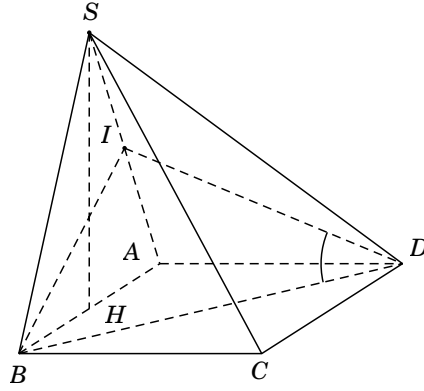
B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm SA . Do tam giác SAD đều nên $BI \perp SA$. (1)

Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAD) \Rightarrow AD \perp BI$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $BI \perp (SAD)$ nên hình chiếu vuông góc của BD trên mặt phẳng (SAD) là ID . Do đó $\widehat{BD, (SAD)} = \widehat{BD, ID} = \widehat{BDI}$.

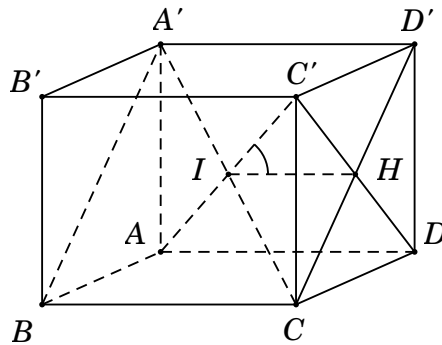
Tam giác BDI vuông tại I nên $\sin \widehat{BDI} = \frac{BI}{BD} = \frac{\frac{AB\sqrt{3}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $A'C \cap AC' = I$; $C'D \cap CD' = H$.

Ta có $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD') \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' trên mặt phẳng $(A'BCD')$.

Do đó $\widehat{AC'}, (\widehat{A'BCD'}) = \widehat{C'I}, (\widehat{A'BCD'}) = \widehat{C'I}, \widehat{HI} = \widehat{C'IH}$.

Trong tam giác vuông $C'HI$, có $\tan \widehat{C'IH} = \frac{C'H}{IH} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{2}$.

Dạng 4. Thiết Diện

Phương pháp

Việc xác định thiết diện với một khối đa diện với một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước, trước hết ta phải tìm được điểm chung của một mặt phẳng đã cho với một mặt của khối đa diện, sau đó dựa vào mối quan hệ giữa tính song song và vuông góc để tìm ra phương của giao tuyến giữa mặt đã cho và các mặt của khối đa diện. Thường ta hay dùng hệ quả sau để tìm điểm chung

$$1) \begin{cases} a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \subset (\alpha); \\ a // (\alpha) \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} O \in b \perp a \\ O \in (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow b \subset (\alpha)$$

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

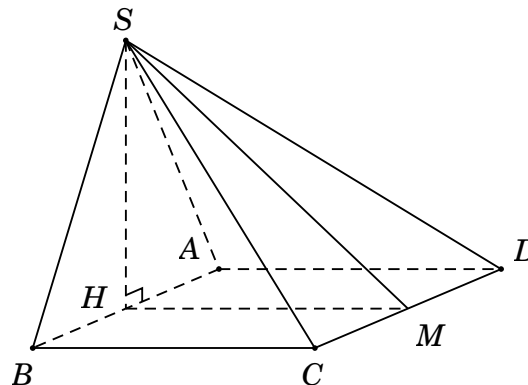
B. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $S = a^2\sqrt{3}$.

D. $S = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Suy ra:

- $SH \subset (\alpha)$.
- $SH \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM \perp AB$ ($M \in CD$) $\Rightarrow HM \subset (\alpha)$.

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H .

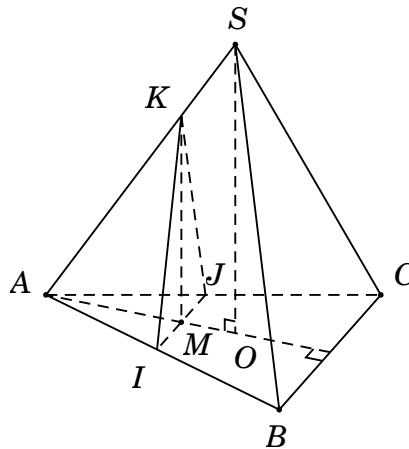
$$\text{Ta có } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HM = BC = 2a. \text{ Vậy } S_{\Delta SHM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tâm O ; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO ($M \neq A; M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO . Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

- A. $S = 2a^2$. B. $S = 2x^2$. C. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. D. $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MK \parallel SO$ với $K \in SA$.

Khi đó thiết diện là tam giác KIJ .

Diện tích tam giác IKJ là $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK$.

Trong tam giác ABC , ta có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'}$ suy ra $IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO , ta có $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO}$ suy ra $MK = \frac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

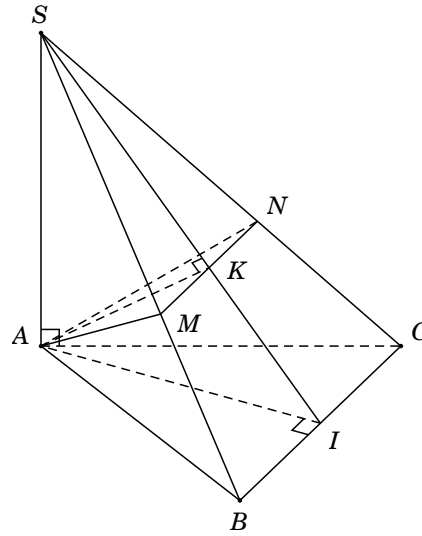
B. $S_{\Delta AMN} = \frac{4a^2\sqrt{21}}{49}$.

C. $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2\sqrt{21}}{7}$.

D. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Kẻ $AK \perp SI$ ($K \in SI$).

Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N .

Khi đó thiết diện là tam giác AMN .

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow MN \perp AK$.

Tam giác vuông SAI , có $AK = \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBC , có $\frac{MN}{BC} = \frac{SK}{SI} = \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7} \Rightarrow MN = \frac{4a}{7}$.

Vậy $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AK \cdot MN = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{16}$.

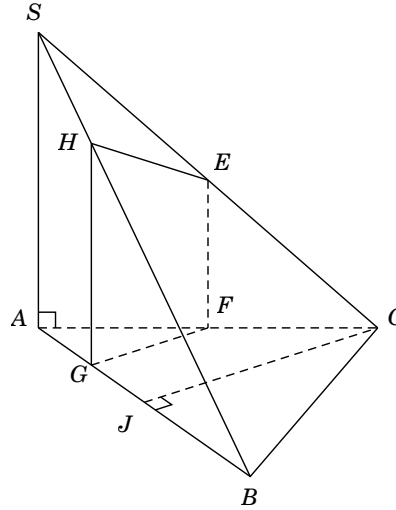
B. $S_{EFGH} = \frac{a^2\sqrt{7}}{32}$.

C. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

D. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi F là trung điểm AC , suy ra $EF \parallel SA$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$. (1)

Gọi J, G lần lượt là trung điểm AB, AG .

Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG \parallel CJ$ nên $FG \perp AB$. (2)

Trong $\triangle SAB$ kẻ $GH \parallel SA$ ($H \in SB$), suy ra $GH \perp AB$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.

$$\text{Do đó } S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH) \cdot FG.$$

$$\text{Ta có } EF = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}; FG = \frac{1}{2}CJ = \frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{GH}{SA} = \frac{BG}{BA} \Rightarrow GH = BG = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_{EFGH} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4} \right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\triangle BIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{10}$.

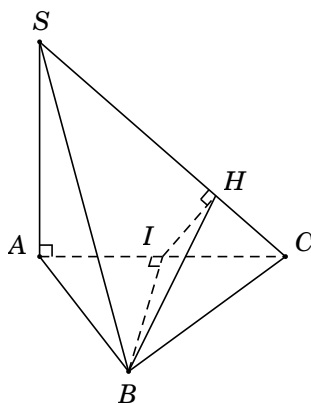
B. $S_{\triangle BIH} = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$.

C. $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

D. $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC , suy ra $BI \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$. (1)

Kẻ $IH \perp SC$ ($H \in SC$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BIH)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH .

Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I .

Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS , suy ra

$$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI \cdot SA}{CS} = \frac{CI \cdot SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta BIH} = \frac{1}{2} BI \cdot IH = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}.$$

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b . Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC . Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C .

A. $a > b\sqrt{2}$.

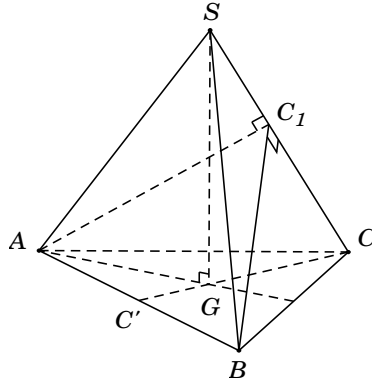
B. $a > b\sqrt{3}$.

C. $a < b\sqrt{2}$.

D. $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi C' là trung điểm AB . Suy ra C, C', G thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC. (1)$

Trong tam giác SAC , kẻ $AC_1 \perp SC. (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC .

Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^\circ$.

Suy ra $\cos \widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \rightarrow a < b\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10.

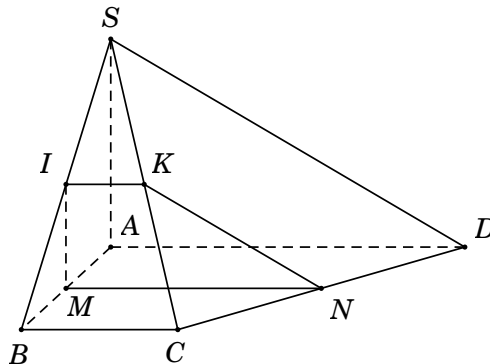
B. 20.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Chọn C



Do $(P) \perp AB \Rightarrow (P) \parallel SA$.

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset (P)$.

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel IK \Rightarrow IK \subset (P)$.

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M .

Ta có:

$$MI \text{ là đường trung bình của tam giác } SAB \Rightarrow MI = \frac{1}{2}SA = 3.$$

$$IK \text{ là đường trung bình của tam giác } SBC \Rightarrow IK = \frac{1}{2}BC = 3.$$

$$MN \text{ là đường trung bình của hình thang } ABCD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 7.$$

$$\text{Vậy } S_{MNKI} = \frac{IK + MN}{2} \cdot MI = 15.$$

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tâm O , đường cao AA' ; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' ($M \neq A'$; $M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA' . Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{IJE} = -2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

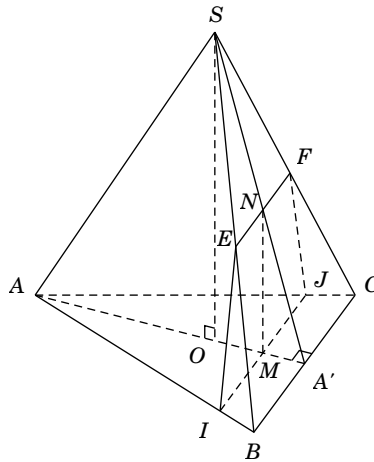
B. $S_{IJE} = 2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

C. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$.

D. $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn A



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MN \parallel SO$ với $N \in SA'$.

Qua N kẻ $EF \parallel BC$ với $E \in SB, F \in SC$.

Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.

Diện tích hình thang $S_{IJFE} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$.

Tam giác ABC , có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SBC , có $\frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA'} = \frac{OM}{OA'} \Rightarrow EF = \frac{OM \cdot BC}{OA'} = 2(x\sqrt{3} - a)$.

Tam giác SOA' , có $\frac{MN}{SO} = \frac{MA'}{OA'} \Rightarrow MN = \frac{SO \cdot MA'}{OA'} = 2(3a - 2x\sqrt{3})$.

Vậy $S_{IJFE} = \frac{2}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(3a - 2x\sqrt{3}) = -2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{AMIN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{7}$.

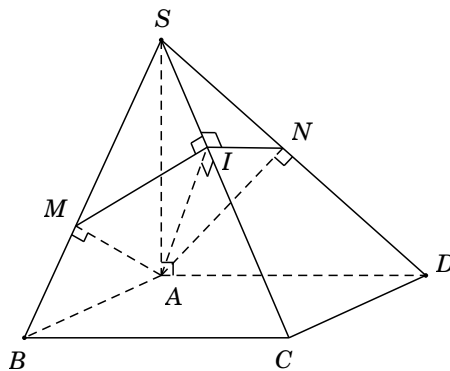
B. $S_{AMIN} = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.

C. $S_{AMIN} = \frac{6a^2\sqrt{6}}{35}$.

D. $S_{AMIN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác SAC , kẻ $AI \perp SC$ ($I \in SC$).

Trong mp(SBC), dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M .

Trong mp(SCD), dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N .

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là tứ giác $AMIN$.

Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM$. (1)

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MI$.

Chứng minh tương tự, ta được $AN \perp NI$.

Do đó $S_{AMIN} = S_{\Delta AMI} + S_{\Delta ANI} = \frac{1}{2}AM \cdot MI + \frac{1}{2}AN \cdot NI$.

Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên

$$AM = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}; AI = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{2}; AN = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Suy ra } MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{30}}{5} \text{ và } NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = \frac{a\sqrt{14}}{7}.$$

$$\text{Vậy } S_{AMIN} = \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{5} + \frac{2a\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{7} \right) = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}.$$

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB' . Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. Hình thang cân.

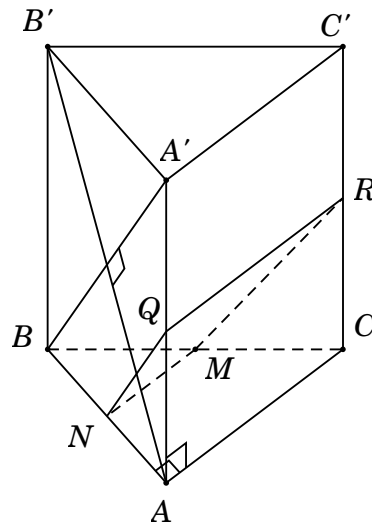
B. Hình thang vuông.

C. Tam giác.

D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABB'A') \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \subset (\alpha).$

Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow BA' \perp AB'$.

Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \parallel BA'$ với $Q \in AA'$.

Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \parallel AC$ với $R \in CC'$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).

BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Góc giữa hai mặt phẳng

1. Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Nhận xét:

- Cho hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) ; $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a và b . Gọi φ là góc giữa (P) và (Q) . Khi đó, ta có:

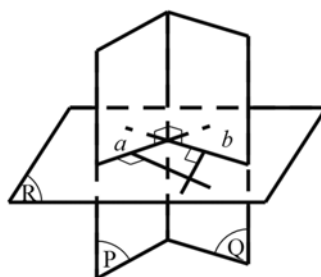
$$\begin{cases} \varphi = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) & \text{nếu } (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \leq 90^\circ \\ \varphi = 180^\circ - (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) & \text{nếu } (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) > 90^\circ \end{cases}$$

Như vậy, góc giữa hai mặt phẳng luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90° .

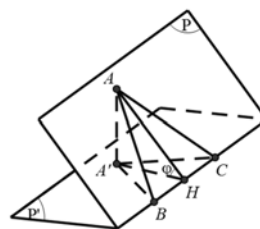
- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu nó nằm trên đường thẳng vuông góc với (P) .

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến x , để tính góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (R) vuông góc với x , lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến a và b . Lúc đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b .



3. Định lý 1. Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì $S' = S \cos \varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') .



$$dt(\Delta A'BC) = dt(\Delta ABC) \cdot \cos \varphi$$

II. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Định nghĩa. Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, kí hiệu: $(P) \perp (Q)$ hay $(Q) \perp (P)$.

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$ (Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)).

Từ định nghĩa trên ta suy ra: $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2}$, với $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ theo thứ tự là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q) .

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

a) Định lí 2. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\left. \begin{array}{l} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

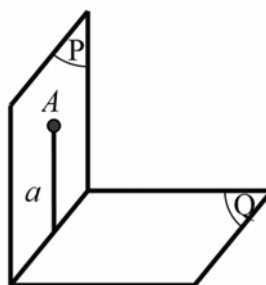
Chú ý: Dùng định lí này để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.

b) Các hệ quả

Hệ quả 1

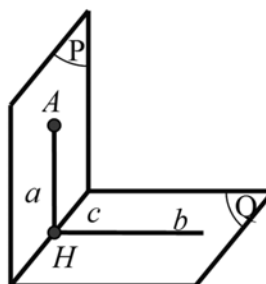
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) .

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a, a \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset (P)$$



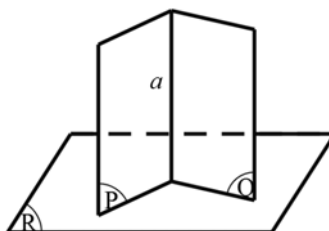
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào thuộc (P) , vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) sẽ vuông góc với mặt phẳng (Q) .

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q)$$



Hệ quả 2. Hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\left. \begin{array}{l} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (R)$$



Hệ quả 3. Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .

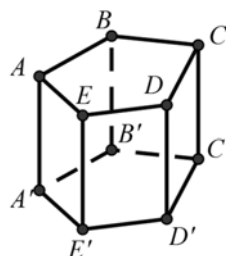
$$a \text{ không vuông góc với } (P) \Rightarrow \exists!(Q): \begin{cases} (Q) \supset a \\ (Q) \perp (P) \end{cases}.$$

III. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương

1. Hình lăng trụ đứng

a) **Định nghĩa.** Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

b) **Nhận xét.** Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.



2. Hình lăng trụ đều

a) **Định nghĩa.** Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

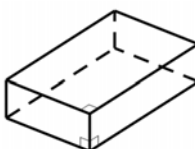
b) **Nhận xét.** Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau. Ngoài ra, hình lăng trụ đều có các tính chất của hình lăng trụ đứng.



3. Hình hộp đứng

a) **Định nghĩa.** Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

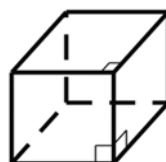
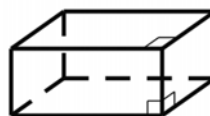
b) **Nhận xét.** Trong hình hộp đứng bốn mặt bên đều là hình chữ nhật.



4. Hình hộp chữ nhật

a) **Định nghĩa.** Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

b) **Nhận xét.** Tất cả sáu mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.



5. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp có tất cả các mặt là hình vuông.

IV. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

1. Định nghĩa đều

Định nghĩa. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

- Đường vuông góc với mặt đáy kẻ từ đỉnh gọi là đường cao của hình chóp.

Từ định nghĩa, suy ra:

- Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đáy.

Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.



2. Hình chóp cụt đều

Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là hình chóp cụt đều.

Đoạn thẳng nối tâm của hai đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.

Từ định nghĩa suy ra: Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân bằng nhau.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) . Do $(P) \parallel (Q) \Rightarrow d \perp (Q)$.

Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d . Mà $\begin{cases} d \perp (P) \\ d \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (Q) \end{cases}$.

Có vô số mặt phẳng (R) chứa d . Do đó có vô số mặt phẳng qua M , vuông góc với (P) và (Q) .

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp a và b trùng nhau, sẽ tồn tại mặt phẳng chứa a và b không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa c .

C sai. Trong trường hợp a và b cắt nhau, mặt phẳng (a, b) chứa b nhưng không vuông góc với a .

D sai. Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và chéo nhau, nếu $(\alpha) \supset a$, $(\alpha) \parallel b$ và $(\beta) \supset b$, $(\beta) \parallel a$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

B sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d . Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d .

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R) .

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp $a \in d$, $b \in d$, khi đó AB trùng với d .

C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

D sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn D

A sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

B, C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau.

B sai. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng qua đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước thì không có mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng đó.

D sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P) . Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q) .
- B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a , mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q) .
- C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q) .
- D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải

Chọn B

Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và chéo nhau, nếu $(P) \supset a$, $(P) // b$ và $(Q) \supset b$, $(Q) // a$ thì $(P) // (Q)$.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) .
- B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) hoặc $(Q) \equiv (R)$.
- C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.
- D. Cả 3 mệnh đề trên đều đúng.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào sai?

- A. Đáy là đa giác đều.
- B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
- C. Các cạnh bên là những đường cao.
- D. Các mặt bên là những hình vuông.

Lời giải

Chọn D

Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình chữ nhật.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
- B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.
- C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Lời giải

Chọn B

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Phương pháp

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta dùng định lí: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\left. \begin{array}{l} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

Như vậy, việc chứng minh hai mặt phẳng vuông góc quy về việc chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho đường thẳng a và hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left. \begin{array}{l} a \subset (P) \\ (Q) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow (Q) \perp (P).$

B. $\left. \begin{array}{l} (Q) \perp (P) \\ a \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q).$

C. $\left. \begin{array}{l} \Delta = (P) \cap (Q) \\ a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q).$

D. Có 2 câu đúng trong 3 câu trên.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Theo định lí: “Nếu $(P) \supset a$ và $a \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$ ” thì A đúng.

Ví dụ 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Gọi a là đường thẳng nằm trong (P) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \perp \Delta$ thì $a \perp (Q)$.

B. $\left. \begin{array}{l} a \perp \Delta \\ (P) \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q).$

C. Nếu $a \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$.

D. Chỉ có 1 câu sai trong 3 câu trên.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$\left. \begin{array}{l} a \subset (P) \\ a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q):$ Sai. Vậy A sai.

$\left. \begin{array}{l} a \perp \Delta \\ (P) \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q):$ Đúng. Vậy B đúng.

$$\left. \begin{array}{l} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp (Q): \text{Đúng. Vậy C đúng.}$$

Ví dụ 3: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là Δ . $A \in (P)$ và $A \notin (Q)$.

Qua A, vẽ đường thẳng Δ' vuông góc với (Q). Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $\Delta' \subset (P)$.

B. Δ' chéo Δ .

C. $\Delta' \perp \Delta$.

D. Có 2 câu đúng trong 3 câu trên.

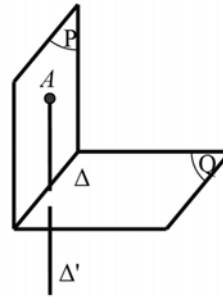
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ \Delta' \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta' \subset (P): \text{Đúng. vậy A đúng.}$$

Vì $\Delta' \subset (P)$ và $\Delta \subset (P)$ nên Δ' chéo Δ là sai. Vậy B sai.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' \perp (Q) \\ \Delta \subset (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta' \perp \Delta: \text{Đúng. Vậy C đúng.}$$



Ví dụ 4: Cho đường thẳng a và hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Khẳng định nào sau đây đúng?

$$\left. \begin{array}{l} a \subset (P) \\ a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q).$$

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (Q) \\ a \text{ cắt } \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset (P).$$

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset (P).$$

D. Cả 3 câu đều sai.

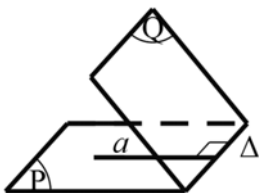
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

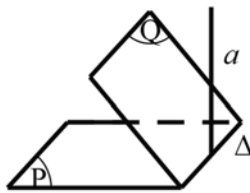
Thiếu giả thiết $(P) \perp (Q)$ nên A sai (hình 1).

Thiếu giả thiết nên B sai (hình 2).

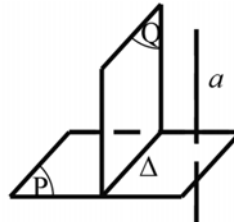
Thiếu giả thiết Δ cắt a nên C sai (hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

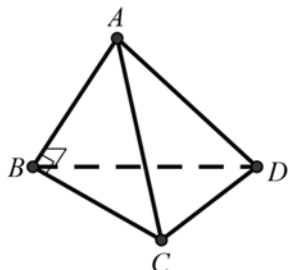
Ví dụ 5: Cho tứ diện ABCD có tam giác ABD và tam giác ABC vuông tại B. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $CB \perp AD$. **B.** $AB \perp (BCD)$.
- C.** $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **D.** Cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên $AB \perp BC$ và $\triangle ABD$ vuông tại B nên $AB \perp BD$. Từ đó suy ra $AB \perp (BCD)$. Vậy B đúng.



Ví dụ 6: Cho tam giác ABC đều, cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D, lấy điểm S. Để cho mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAC), SD có độ dài tính theo a bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $a\sqrt{6}$.

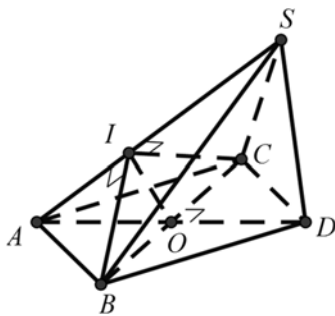
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Vì $SD \perp (BCD)$ nên ΔSDB và ΔSDC vuông tại D.

Mà $DB = DC$ (ABCD là hình thoi)
nên $\triangle SDB = \triangle SDC$. Suy ra, $SB = SC$.

Mặt khác $AB = AC$ ($\triangle ABC$ đều) nên $\triangle SAB = \triangle SAC$. Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ C trong $\triangle SCA$, ta có $SA \perp IB$ và $SA \perp IC$. Suy ra $SA \perp (BIC)$.



Đề cho $(SAB) \perp (SAC)$, ta phải có $\widehat{BIC} = 90^\circ$.

Suy ra $OI = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ (O là trung điểm của BC).

ΔAIO vuông tại I cho $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\Delta AIO \sim \Delta ADS \text{ nên } SD = \frac{AD}{AI} \cdot IO \Rightarrow SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

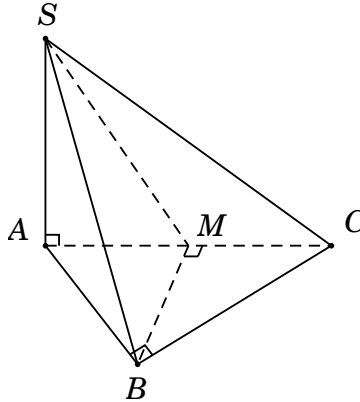
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $BM \perp AC$.
B. $(SBM) \perp (SAC)$.
C. $(SAB) \perp (SBC)$.
D. $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$. Do đó A đúng.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Do đó C đúng.

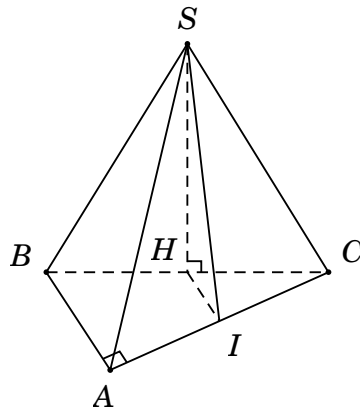
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A . Gọi H , I lần lượt là trung điểm của BC và AB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $SH \perp AB$.
B. $HI \perp AB$.
C. $(SAB) \perp (SAC)$.
D. $(SHI) \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn C



Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$. Do đó A đúng.

Ta có HI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $HI \parallel AC \Rightarrow HI \perp AB$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI)$. Do đó D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì C là đáp án sai.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $AI \perp SC$.

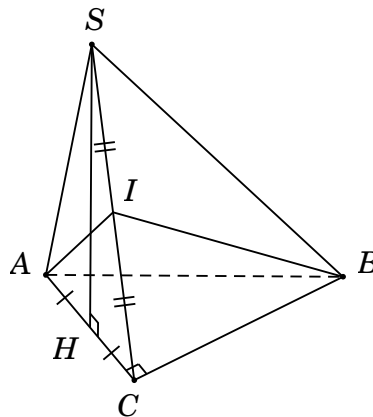
B. $(SBC) \perp (SAC)$.

C. $AI \perp BC$.

D. $(ABI) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$. Do đó A đúng.

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$. Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$. Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$. Do đó C đúng.

Từ mệnh đề A và C suy ra mệnh đề D đúng.

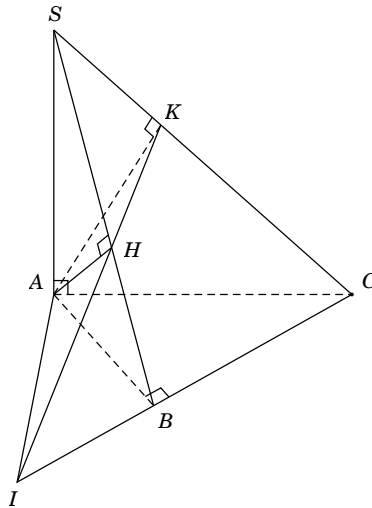
Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC) . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.** $BC \perp AH$. **B.** $(AHK) \perp (SBC)$. **C.** $SC \perp AI$. **D.** Tam giác IAC đều.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do đó A đúng.

Lại có $AH \perp SB$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Lại có theo giả thiết $SC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SBC) \perp (AHK)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ AI \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp AI$. Do đó C đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 5: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC ; kẻ IH vuông góc SA ($H \in SA$). Khẳng định nào sau đây sai?

A. $SA \perp BH$.

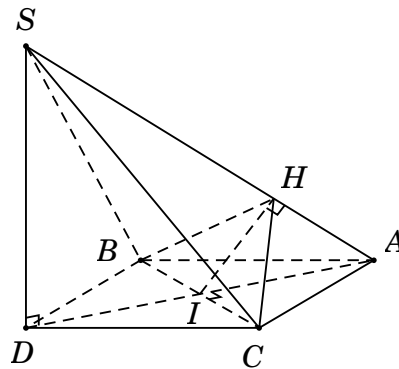
B. $(SDB) \perp (SDC)$.

C. $(SAB) \perp (SAC)$.

D. $BH \perp HC$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$. Do đó A đúng.

Tính được $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA^2 = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\triangle AHI \sim \triangle ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI \cdot SD}{AS} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến

IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^\circ$ hay $BH \perp HC$. Do đó D đúng.

Từ mệnh đề A và D suy ra mệnh đề C đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Dạng 3. Tính góc giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

- Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến x, để xác định góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (K) vuông góc với x lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến a và b. Lúc đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b.
- Để tìm góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta thường làm như sau:
 - Xác định một điểm A trên (P), vẽ $AH \perp (Q)$ (tại H).
 - Vẽ $HO \perp x$ tại O thì $AO \perp x$.
 - Góc $(OA, OH) \leq 90^\circ$ là góc cần tìm.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° .
D. 90° .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

Kẻ đường cao AH của $\triangle ABC$, ta có:

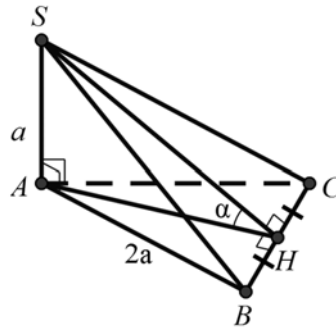
$BC \perp AH$, AH là hình chiếu của SH trên mặt phẳng (ABC) nên suy ra $BC \perp SH$.

Vậy $\alpha = \widehat{SHA}$.

Tam giác SHA vuông tại A có: $SA = a$,

$AH = a\sqrt{3}$ (đường cao của tam giác đều ABC).

Suy ra: $\tan \alpha = \frac{SA}{AH} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.



Ví dụ 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Giá trị

góc α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° .
D. 90° .

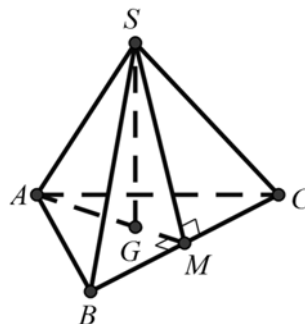
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Xác định góc α . Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta có $SG \perp (ABC)$. Kẻ $AM \perp BC$ thì trọng tâm G của $\triangle ABC$ thuộc AM .

GM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) nên $BC \perp SM$. Suy ra góc cần tìm là $\alpha = \widehat{SMG}$.

Tính α . Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều ABC , cạnh a), suy ra



$$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Tam giác SMB vuông tại M nên:

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow SM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác SGM vuông tại G nên:

$$\cos \alpha = \frac{GM}{SM} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'C')$, thì $\cos \alpha$ có giá trị bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đều nên B và C là hình chiếu vuông góc của B' và C' trên (ABC) .

Tam giác $AB'C'$ cân tại A . Gọi I là trung điểm của $B'C'$ thì $AI \perp B'C'$.

Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'I \Rightarrow \triangle AA'I$ vuông tại A' .

$$\text{Do đó: } AI^2 = AA'^2 + A'I^2 = 3a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{15a^2}{4}.$$

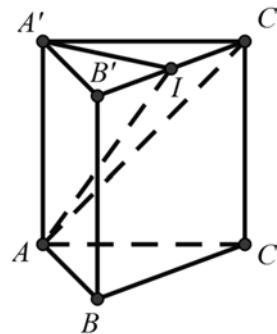
$$\text{Suy ra } AI = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$+ \text{ Diện tích } \triangle AB'C': S = \frac{1}{2}B'C' \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}.$$

$$+ \text{ Diện tích } \triangle ABC: S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Áp dụng công thức diện tích hình chiếu của đa giác, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{S'}{S} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$



Ví dụ 4: Cho hình chóp tam giác O.ABC có OA, OB, OC vuông góc đôi một. Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA). Tổng $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ có giá trị bằng

A. 2.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

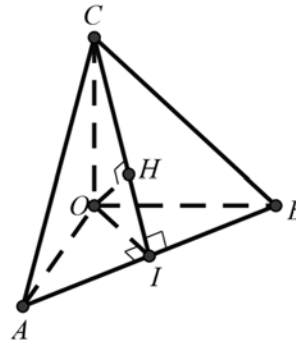
ĐÁP ÁN C

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (ABC).

Đặt OA = a, OB = b, OC = c và OH = h.

Kéo dài CH cắt AB tại I, ta chứng minh được

$AB \perp (OCI)$ và $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.



Suy ra góc giữa (ABC) và (OAB) là $\widehat{OIC} = \alpha$.

Trong $\triangle OCI$ ta có: $\widehat{OIC} = \widehat{COH} = \alpha$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Trong $\triangle OCH$ ta có: $\cos \alpha = \frac{OH}{OC} = \frac{h}{c}$.

Chứng minh tương tự: $\cos \beta = \frac{h}{a}$, $\cos \gamma = \frac{h}{b}$.

Do đó $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{h^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 1$.

Chú ý: Có thể chứng minh bài toán bằng cách dùng công thức diện tích hình chiếu như sau:

Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, OAB, OBC, OCA.

Do $OC \perp (OAB)$ nên $\triangle OAB$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle ABC$ lên (OAB).

Ta có: $S_1 = S \cos \alpha$.

Mặt khác $\triangle HAB$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle OAB$ lên (ABC) nên:

$$S_{HAB} = S_{OAB} \cdot \cos \alpha = S_1 \cos \alpha = S \cos^2 \alpha.$$

Chứng minh tương tự: $S_{HBC} = S \cos^2 \beta$; $S_{HCA} = S \cos^2 \gamma$.

Do đó: $S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA} = S \cos^2 \alpha + S \cos^2 \beta + S \cos^2 \gamma$.

Hay $S = S(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = a$.
Đề góc tạo bởi $(AB'C')$ và (ABC) bằng 60° thì độ dài cạnh bên của lăng trụ bằng bao nhiêu?

A. a .

B. $a\sqrt{3}$.

C. $2a$.

D. $a\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp BB'$ nên $BC \perp (ABB'A')$.

Mà $B'C' \parallel BC$ nên $B'C' \perp (ABB'A')$. Suy ra:

$B'C' \perp AB' \Rightarrow \triangle AB'C'$ vuông tại B' .

Gọi S là diện tích của $\triangle AB'C'$ và S' là diện tích $\triangle ABC$.

Từ giả thiết ta có:

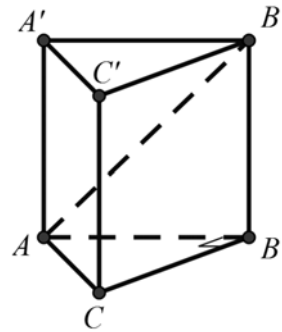
$$S' = S \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{a^2}{2} = S \cdot \frac{1}{2}. \text{ Do đó}$$

$$S = a^2.$$

$$\text{Mà } S = \frac{1}{2} B'C' \cdot AB' \Rightarrow AB' = 2a.$$

Từ tam giác ABB' vuông tại B ta có:

$$BB'^2 = AB'^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow BB' = a\sqrt{3}.$$



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 60^\circ$.

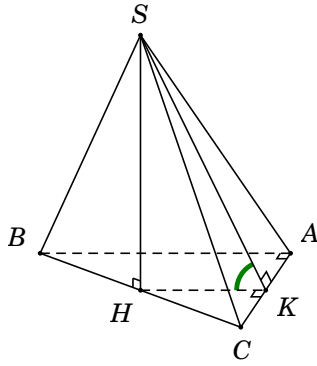
B. $\tan \varphi = 2\sqrt{3}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

D. $\tan \varphi = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

Do đó $\widehat{(SAC), (ABC)} = \widehat{(SK, HK)} = \widehat{SKH}$.

Tam giác vuông ABC , có $AB = BC \cdot \cos \widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

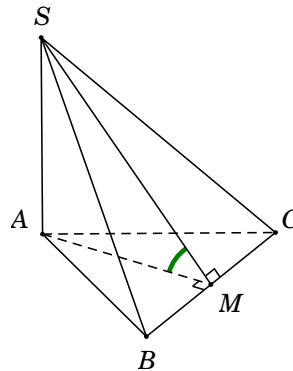
Tam giác vuông SHK , có $\tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC , suy ra $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Do đó $\widehat{(SBC)}, \widehat{(ABC)} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA}$.

Tam giác ABC đều cạnh a , suy ra trung tuyến $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SAM , có $\sin \widehat{SMA} = \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Gọi Q là trung điểm BC , suy ra $OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ) \Rightarrow BC \perp SQ$.

Do đó $\widehat{(SBC)}, \widehat{(ABCD)} = \widehat{SQ, OQ} = \widehat{SQO}$.

Tam giác vuông SOQ , có $\tan \widehat{SQO} = \frac{SO}{OQ} = \sqrt{3}$.

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{5}$.

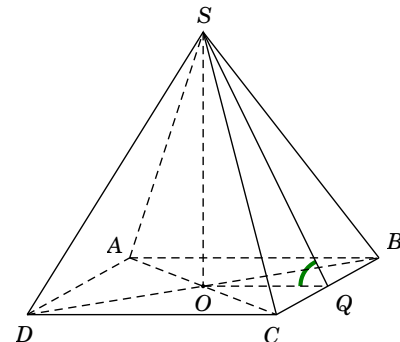
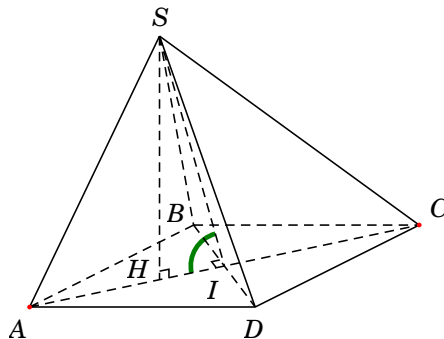
B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\varphi = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a .

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam giác đều ABD .

$$\text{Suy ra } HI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ và } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI \perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI \perp BD$.

$$\text{Do đó } \widehat{(SBD), (ABCD)} = \widehat{SI, AI} = \widehat{SIH}.$$

$$\text{Trong tam vuông } SHI, \text{ có } \tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{HI} = \sqrt{5}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

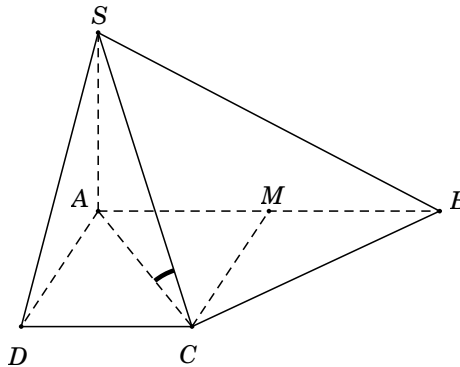
B. $\varphi = 45^\circ$.

C. $\varphi = 60^\circ$.

D. $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow ADCM \text{ là hình vuông } CM = AD = a = \frac{AB}{2}.$$

Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC.$$

$$\text{Do đó } \widehat{(SBC), (ABCD)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}.$$

$$\text{Tam giác } SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 90^\circ$.

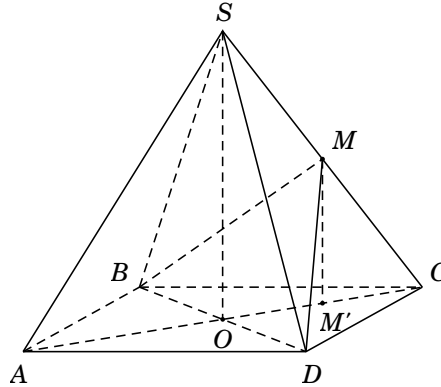
B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 45^\circ$.

D. $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' \parallel SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.

Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có $S_{\Delta M'BD} = \cos \varphi \cdot S_{\Delta MBD}$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\Delta M'BD}}{S_{\Delta MBD}} = \frac{BD \cdot MO}{BD \cdot M'O} = \frac{MO}{M'O} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Câu 7: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

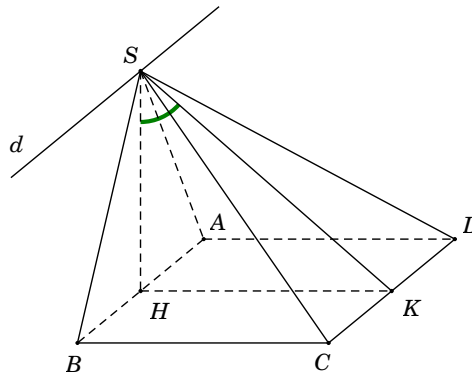
B. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB .

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$

Từ đó suy ra $\widehat{(SAB), (SCD)} = \widehat{SH, SK} = \widehat{HSK}$.

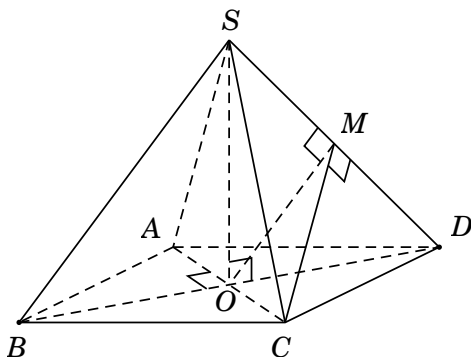
Trong tam giác vuông SHK , có $\tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\tan \varphi = \sqrt{6}$. **B.** $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của SD . Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD$.

Do đó $\overline{(SBD), (SCD)} = \overline{OM, CM}$.

Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

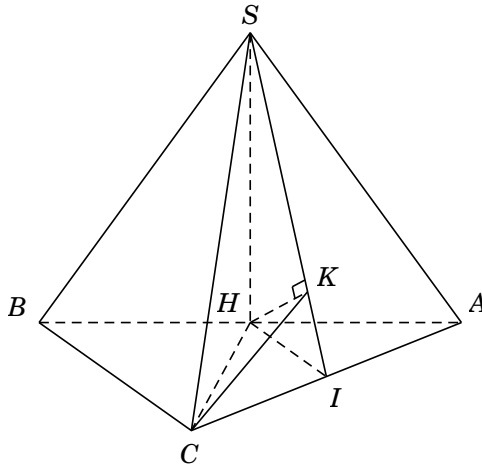
Tam giác vuông MOC , có $\tan \widehat{CMO} = \frac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\cot \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cot \varphi = \sqrt{7}$. **C.** $\cot \varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\cot \varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)

Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.

Gọi I là trung điểm $AC \longrightarrow HI \parallel BC \xrightarrow{BC \perp AC} HI \perp AC$. (3)

Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)

Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.

Kẻ $HK \perp SI$ ($K \in SI$). (5)

Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.

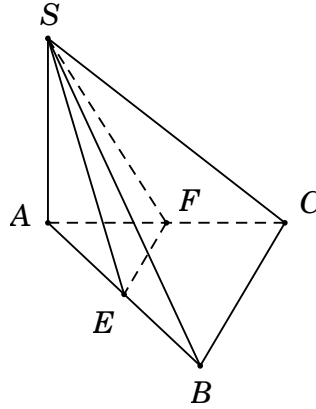
Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC .

Xét tam giác CHK vuông tại K , có $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.

Do đó $\cos \widehat{CHK} = \frac{HK}{CH} = \frac{2}{3}$.

Nhận xét. Bài làm sử dụng lý thuyết " $\begin{cases} d_1 \perp (\alpha) \\ d_2 \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(\alpha), (\beta)} = \widehat{d_1, d_2}$ ". Nếu ta sử dụng lý thuyết quen thuộc "góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến" thì rất khó.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$.B. $\widehat{BSF}$.C. $\widehat{BSE}$.D. $\widehat{CSE}$.**Lời giải****Chọn C**

Gọi (d) là đường thẳng đi qua S và song song với EF .

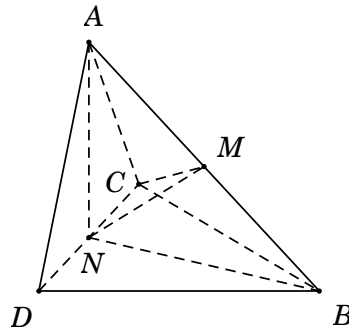
Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF \parallel BC$.

Khi đó $(d) \parallel EF \parallel BC \Rightarrow (SEF) \cap (SBC) = (d)$ (1).

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \begin{matrix} (SA \perp (ABC)) \\ \end{matrix}$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SE \\ BC \perp SB \end{cases}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} (d) \perp SE \\ (d) \perp SB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SEF); (SBC)} = \widehat{(SE; SB)} = \widehat{BSE}$.

Câu 12: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.B. $\frac{a}{2}$.C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.D. $\frac{a}{3}$.**Lời giải****Chọn A**

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Ta có $AN \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD)$ suy ra $AN \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp BN$.

Tam giác ABC cân tại C , có M là trung điểm của AB suy ra $CM \perp AB$.

Giả sử $(ABC) \perp (BCD)$ mà $CM \perp AB$ suy ra $CM \perp (ABD) \Rightarrow CM \perp DM$.

Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại $M \Rightarrow MN = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow AB = CD = 2x$.

Lại có $AN = BN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, mà $AB^2 = AN^2 + BN^2$.

Suy ra $2(a^2 - x^2) = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60° .

A. $x = \frac{3a}{2}$.

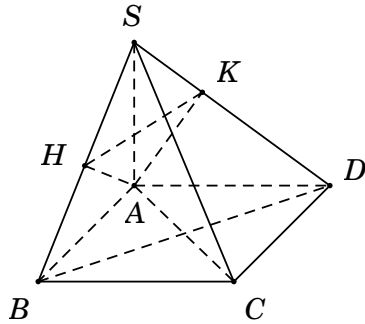
B. $x = \frac{a}{2}$.

C. $x = a$.

D. $x = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Từ A kẻ AH vuông góc với SB ($H \in SB$).

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với SD ($K \in SD$), tương tự, chứng minh được $SK \perp (SCD)$.

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $\widehat{(SBC);(SCD)} = \widehat{(AH;AK)} = \widehat{HAK} = 60^\circ$.

Lại có $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^\circ$ suy ra tam giác AHK đều.

Tam giác SAB vuông tại S , có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$.

Vì $HK \parallel BD$ suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60° . Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $2a$.

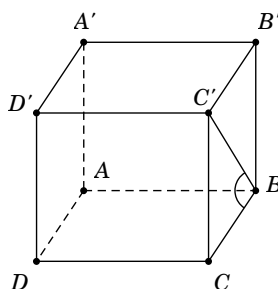
B. $3a$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BB' \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BB'C'B)$.

Khi đó $\begin{cases} (ABC') \cap (BB'C'B) = BC' \\ (ABCD) \cap (BB'C'B) = BC \\ (ABC') \cap (ABCD) = AB \end{cases}$ suy ra $\widehat{(ABC'); (ABCD)} = \widehat{(BC'; BC)} = \widehat{C'BC} = 60^\circ$.

Đặt $AA' = x$, tam giác BCC' vuông tại C , có $\tan \widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow x = \tan 60^\circ \cdot a = a\sqrt{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

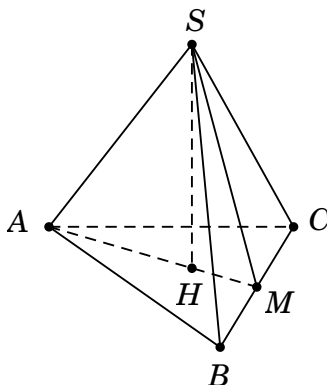
B. $SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $SH = \frac{a}{2}$.

D. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA = SB = SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi M là trung điểm của BC , ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Khi đó $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{(SM;AM)} = \widehat{SMA} = 60^\circ$.

Tam giác ABC đều có $AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác AHM vuông tại H , có $\tan \widehat{SMA} = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2}$.

Vậy độ dài đường cao $SH = \frac{a}{2}$.

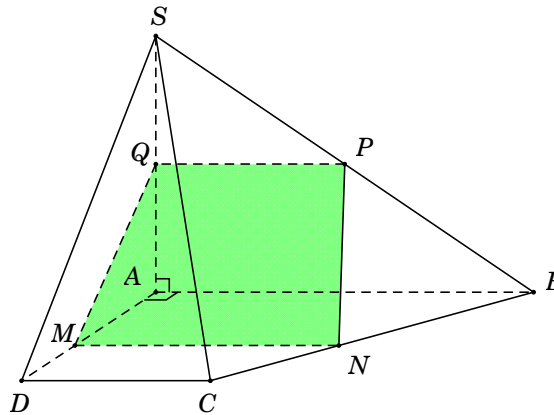
Dạng 4. Thiết diện

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , đáy lớn AB ; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi Q là điểm trên cạnh SA và $Q \neq A$, $Q \neq S$; M là điểm trên đoạn AD và $M \neq A$. Mặt phẳng (α) qua QM và vuông góc với mặt phẳng (SAD) . Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

- A. tam giác. B. hình thang cân.
C. hình thang vuông. D. hình bình hành.

Lời giải

Chọn C

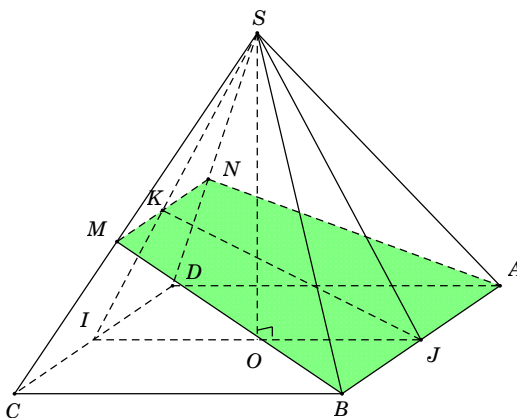


Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$. Mà $(\alpha) \perp (SAD)$ suy ra $AB \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại N .

Qua E kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại P .

Khi đó thiết diện là hình thang $MNPQ$ (do $MN \parallel PQ$).



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và AB .

Trong tam giác SIJ kẻ $JK \perp SI$.

Trong tam giác SIJ , qua K kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại M , cắt SD tại N .

Ta dễ dàng chứng minh được $(ABMN) \perp (SCD)$.

Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang $ABMN$.

Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên suy ra $AN = BM$.

Vậy thiết diện là hình thang cân.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a$, $AD = DC = a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \frac{a^2}{2}$.

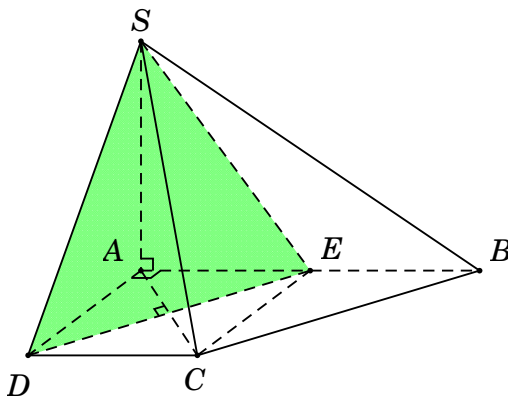
B. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

C. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

D. $S = \frac{a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E là trung điểm AB , suy ra $AECD$ là hình vuông nên $DE \perp AC$. (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DE$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $DE \perp (SAC) \Rightarrow (SDE) \perp (SAC)$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} (SDE) \supset SD \\ (SDE) \perp (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \equiv (SDE)$.

Vậy thiết diện là tam giác SDE .

Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + DA^2} = a\sqrt{2}$; $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}$; $DE = AC = DC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Do đó tam giác SDE đều có cạnh $a\sqrt{2}$ nên $S_{\Delta SDE} = \frac{SD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD) . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

A. $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

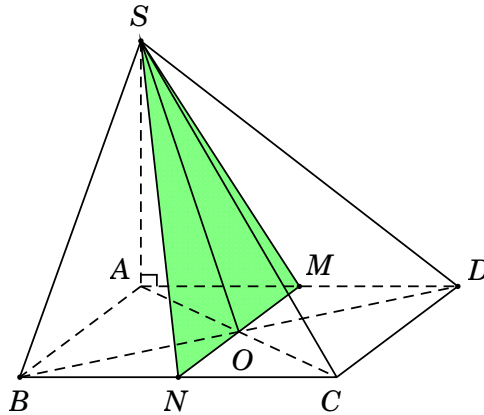
B. $S = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$.

C. $S = \frac{a^2}{2}$.

D. $S = a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC . Khi đó:

- MN đi qua O .
- $\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$.

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN .

Tam giác SMN vuông tại M nên $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} SM \cdot MN = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$.

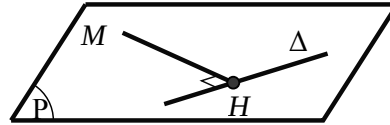
BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

a) Định nghĩa:

Khoảng cách từ một điểm M đến đường thẳng Δ là khoảng cách giữa hai điểm M và H trong đó H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ .



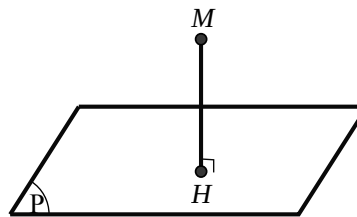
Ký hiệu: $d(M, \Delta) = MH$.

b) Chú ý: Nếu $M \in \Delta$ thì $d(M, \Delta) = 0$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

a) Định nghĩa:

Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai điểm M và H , trong đó H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) .



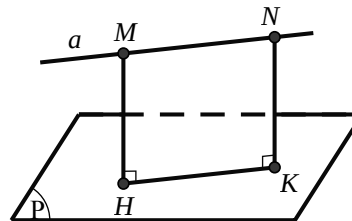
Kí hiệu: $d(M, (P)) = MH$.

b) Chú ý: Nếu $M \in (P)$ thì $d(M, (P)) = 0$.

3. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

a) Định nghĩa:

Khoảng cách từ một đường thẳng a đến một mặt phẳng (P) song song với a bằng khoảng cách từ một điểm tùy ý của a đến (P) .



Tức là: $d(a, (P)) = d(M, (P)), \forall M \in a$.

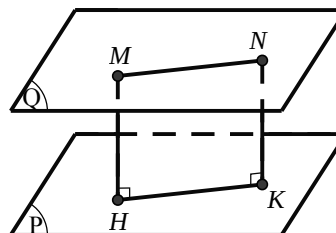
b) Chú ý: Khi $\begin{cases} a \cap (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d(a, (P)) = 0$.

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

a) Định nghĩa:

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm tùy ý của mặt này đến mặt kia.

Tức là: $d((P), (Q)) = d(M, (Q)), \forall M \in (P)$.



b) Chú ý: Khi $\begin{cases} (P) \cap (Q) \\ (P) \equiv (Q) \end{cases} \Rightarrow d((P), (Q)) = 0$.

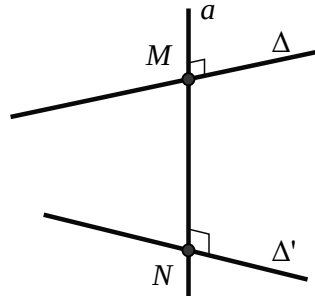
5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

a) Định nghĩa:

• Đường thẳng a gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' nếu a

cắt Δ ở M và cắt Δ' ở N đồng thời vuông góc với cả Δ và Δ' .

- Đoạn MN được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.



b) Chú ý:

- Khi $\begin{cases} \Delta \cap \Delta' \\ \Delta \equiv \Delta' \end{cases} \Rightarrow d(\Delta, \Delta') = 0.$
- Khi $\Delta // \Delta' \Rightarrow d(\Delta, \Delta') = d(M, \Delta')$
với $\forall M \in \Delta.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương Pháp

Cách xác định:

Việc dựng hình chiếu của một điểm trên đường thẳng trong không gian, ta có thể làm theo 2 cách sau:

- Dựng mặt phẳng đi qua điểm và đường thẳng đã cho. Rồi trên mặt phẳng đó qua điểm đã cho dựng đoạn vuông góc từ điểm tới đường thẳng.
- Dựng một mặt phẳng đi qua điểm đã cho và vuông góc với đường thẳng, lúc đó giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng vừa dựng chính là hình chiếu của điểm trên đường thẳng.

Tính toán: Sau khi đã xác định được khoảng cách cần tính, ta dùng các hệ thức lượng trong tam giác, đa giác, đường tròn, ... để tính toán.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD' bằng

- A. $\frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$ B. $\frac{b\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$
- C. $\frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$ D. $\frac{abc\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

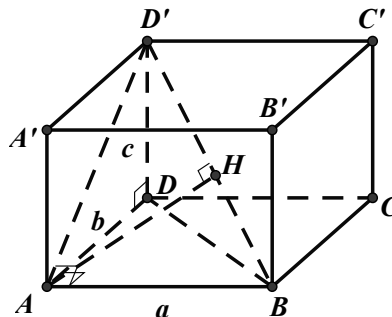
Do $AB \perp AD'$ nên tam giác ABD' vuông tại A . Trong tam giác ABD' kẻ đường cao AH thì $AH = d(A, BD')$.

Trong $\triangle ADD'$, ta có:

$$AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$BD' = \sqrt{AB^2 + AD'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Xét $\triangle ABD'$, ta được:



$$AH.BD' = AB.AD'$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB.AD'}{BD'} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{Vậy } d(A, BD') = AH = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O , cạnh a , hình chiếu của C' trên (ABC) trùng với tâm của đáy. Cạnh bên CC' hợp với (ABC) góc 60° . Gọi I là trung điểm của AB . Khoảng cách

Câu 2.1. từ điểm O đến đường thẳng CC' bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{a}{4}$. D. $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Theo giả thiết, suy ra: $C'O \perp (ABC)$, suy ra:

$$OC = \text{hch}_{(ABC)} CC' \Rightarrow (\widehat{CC', (ABC)}) = \widehat{C'CO}$$

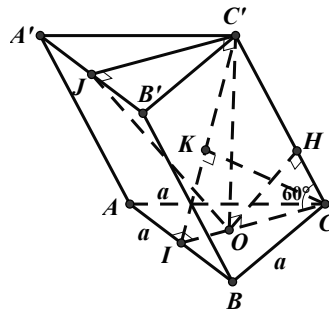
Theo giả thiết, ta có: $\widehat{C'CO} = 60^\circ$

Trong $(C'CO)$ dựng $OH \perp CC'$ tại H ta được:

$$d(O, CC') = OH.$$

$$\text{Xét } \triangle COH \Rightarrow OH = OC \cdot \sin 30^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Suy ra: } d(O, CC') = \frac{a}{2}.$$



Câu 2.2. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng IC' bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{13}}{3}$. B. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Tính $d(C, IC')$

Trong $(C'IC)$ dựng $CK \perp IC'$ tại K ta được: $d(C, IC') = CK$

$$\text{Xét } \triangle CIC' \Rightarrow OC' \cdot CI = CK \cdot IC' \Rightarrow CK = \frac{OC' \cdot CI}{IC'}$$

$$\text{Mà } OC' = OC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a; CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$IC'^2 = IO^2 + OC'^2 = \frac{a^2}{12} + a^2 = \frac{13a^2}{12}$$

$$\text{Nên } d(C, IC') = CK = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3a}{\sqrt{13}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

Câu 2.3. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng $A'B'$ bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{7}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

ĐÁP ÁN C

Tính $d(O, A'B')$

Vì $C'O \perp (ABC) // (A'B'C') \Rightarrow OC' \perp (A'B'C')$. Gọi J là trung điểm của $A'B' \Rightarrow C'J \perp A'B' \subset (A'B'C') \Rightarrow OJ \perp A'B'$ (định lí 3 đường vuông góc)

Tức là: $d(O, A'B') = OJ$

$$\text{Xét } \triangle OC'J \Rightarrow OJ = \sqrt{OC'^2 + C'J^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Tức là: } d(O, A'B') = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

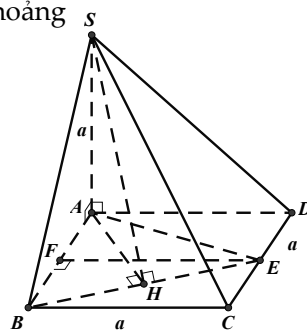
Vì $SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng (ABCD) nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lí 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EF = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} AH \cdot BE$$

$$\text{Mà } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Nên } AH = \frac{a^2}{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \text{ mà } \triangle SAH \text{ vuông tại A, nên:}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$



Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{17}$. C. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Hướng dẫn giải

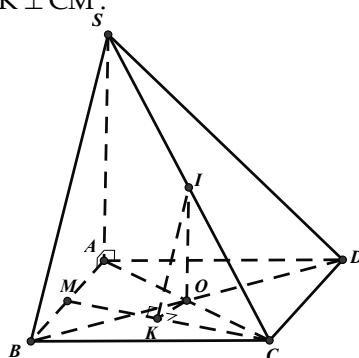
ĐÁP ÁN C

Do $IO \perp (ABCD)$ nên nếu dựng $OK \perp CM$ ($K \in CM$) thì $IK \perp CM$.

Tức là: $d(I, CM) = IK$.

$$\text{Mà } IK = \sqrt{OI^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + OK^2}$$

$$\text{Do } S_{\triangle OMC} = \frac{1}{2} OK \cdot MC$$



$$\Rightarrow OK = \frac{2S_{OMC}}{MC} = \frac{2\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{Suy ra } IK = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{20}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Ví dụ 5: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , gọi O là tâm của đáy và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi I là trung điểm của BC và K là hình chiếu của O lên SI . Khoảng cách từ O đến SA bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải

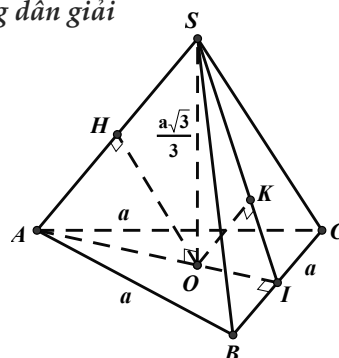
ĐÁP ÁN D

Dựng $OH \perp SA$ tại $H \Rightarrow d(O, SA) = OH$

$$\text{Ta có: } OA = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = SO,$$

$$\text{suy ra: } OH = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Vậy } d(O, SA) = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



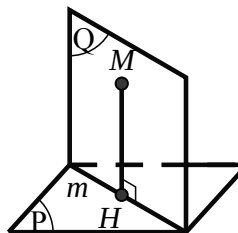
DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG

1. Phương pháp

Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc dựng hình chiếu của điểm trên mặt phẳng, ta hay dùng một trong các cách sau:

Cách 1:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M và vuông góc với (P) .
- Xác định $m = (P) \cap (Q)$.
- Dựng $Mx \perp m = (P) \cap (Q)$, suy ra $H = Mx \cap m$ là điểm cần tìm.



Cách 2:

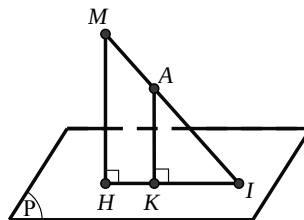
Giả sử đã biết đường thẳng $d \perp (\alpha)$, dựng $Mx // d \perp (\alpha)$, lúc đó $H = Mx \cap (P)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) .

Cách 3:

Dựa vào tính chất trục của tam giác: Cho ΔABC nằm trên (P) , hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC , tức là nếu $MA = MB = MC$ khi đó hình chiếu của điểm M trên (P) là tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Chú ý. Khi tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta cần biết vận dụng chú ý sau một cách khéo léo để từ việc phải tính khoảng cách từ một điểm này đến mặt phẳng (khó xác định) đến việc tính khoảng cách từ điểm khác đến mặt phẳng (dễ xác định hơn).

- Nếu $MA \parallel (\alpha) \Rightarrow d(M, (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.
- Nếu $MA \cap (\alpha) = I \Rightarrow \frac{d(M, (\alpha))}{d(A, (\alpha))} = \frac{IM}{IA}$.



2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng 30° . Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm CD bằng

- A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{4a}{3}$. D. $\frac{5a}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Dễ dàng chứng minh được $DB \perp (SAC) \Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của DS lên (SAC) là SO , góc giữa SD và (SAC) là $\widehat{DSO} = 30^\circ$. Đặt $DO = x$, ta có $SO = x\sqrt{3}$ (O là giao của AC và BD)

$$\text{Từ } SO^2 = AO^2 + SA^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow DN \parallel BM$

Suy ra

$$d(D; (SBM)) = d(N; (SBM)) = \frac{1}{2} d(A; (SBM))$$

Kẻ $AI \perp BM$, $AH \perp SM$.

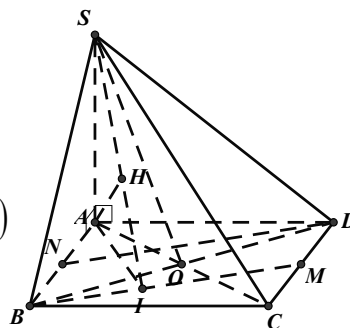
Từ đó chứng minh được

$$AH \perp (SBM) \Rightarrow d(A; (SBM)) = AH$$

$$\text{Trong } (ABCD): S_{ABM} = S_{ABCD} - 2S_{BCM} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Mà } S_{ABM} = \frac{1}{2} AI \cdot BM \Rightarrow AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}a \Rightarrow d(D; (SBM)) = \frac{a}{3}.$$



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$ và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa cạnh bên SC với đáy là 60° . Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{38}}{29}$. B. $\frac{3a\sqrt{58}}{29}$. C. $\frac{3a\sqrt{38}}{29}$. D. $\frac{3a}{29}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD và K là hình chiếu vuông góc của A trên SH .

Ta có $SA \perp BD$ và $AH \perp BD$ nên

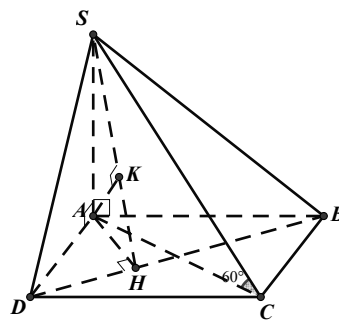
$$BD \perp (SAH).$$

Suy ra $AK \perp BD$. Mà $AK \perp SH$
nên $AK \perp (SBD)$

$$\text{Ta có: } d(C; (SBD)) = d(A; (SBD)) = AK$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{29}{18a^2}$$

$$\text{Vậy } d(C; (SBD)) = AK = \frac{3a\sqrt{58}}{29}.$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Từ I lần lượt vẽ các đường thẳng song song với SB, SD cắt BC, CD tại P, Q. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AD. Khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{11}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{9}$. C. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Qua A dựng $AH \perp SO$. Dễ dàng chứng minh được $AH \perp BD$

Khi đó $AH = d(A, (SBD))$

Trong tam giác vuông SAC, ta có:

$$\begin{aligned} CI \cdot SC &= AC^2 \\ \Rightarrow \frac{IC}{SC} &= \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2} \\ &= \frac{AB^2 + BC^2}{SA^2 + (AB^2 + BC^2)} = \frac{2a^2}{2a^2 + 3a^2} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\triangle CBS \text{ có } IP \parallel SP \Rightarrow \frac{IP}{SB} = \frac{CP}{CB} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Áp dụng định lý Talet: } \frac{BE}{CQ} = \frac{BP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BE}{CQ} = \frac{BC - CP}{PC} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Mà } AB = CD = CQ + QP = CQ + BE = \frac{5}{3}BE$$

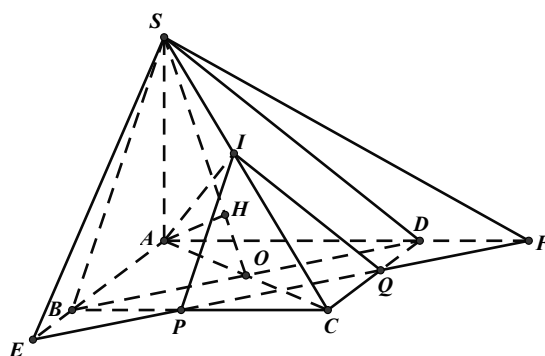
Do $\triangle AEF$ vuông tại A nên:

$$S_{AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF = \frac{1}{2}AE^2 = \frac{1}{2}(AB + BE)^2 = \frac{32}{25}AB^2 = \frac{32a^2}{25} \text{ (đvdt)}$$

$$\frac{DA}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow d(E, (SBD)) = \frac{3}{5}d(A, (SBD))$$

$$\text{Tam giác } SAO \text{ vuông tại A, khi đó } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{7}$$

$$\text{Vậy } d(E, (SBD)) = \frac{3a\sqrt{21}}{7}.$$



Ví dụ 4: Cho khối chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, $BA = a$, $BC = 2a$, $SA = 2a$,

$SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{8a}{9}$. B. $\frac{a}{9}$. C. $\frac{2a}{9}$. D. $\frac{5a}{9}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN

Vì $BC \perp (SAB)$ nên: $AH \perp BC$, $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp HK$, $AH \perp SC$ mà $AK \perp SC$

$\Rightarrow SC \perp (AHK)$

Ta có: $AH = \frac{AB \cdot SA}{SB} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$,

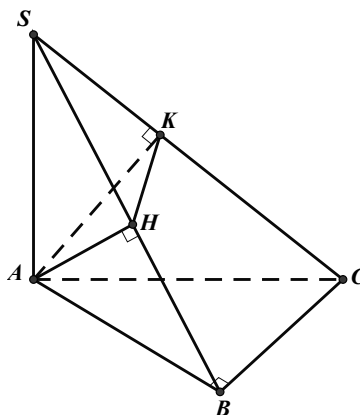
$AK = \frac{AC \cdot SA}{SC} = \frac{2\sqrt{5}a}{3}$,

$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{8a}{3\sqrt{5}}$, $SK = \frac{4a}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8a}{3\sqrt{5}} = \frac{32}{135}a^3$

Mặt khác $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}a$ nên $S_{AHS} = \frac{4}{5}a^2$

Vậy khoảng cách cần tìm là: $d(K, (SAB)) = \frac{3V_{KSAH}}{S_{AHS}} = \frac{8a}{9}$.



Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{5a}{3}$. B. $\frac{4a}{3}$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Gọi I là trung điểm AD.

Ta có $CI = IA = ID = \frac{AD}{2}$, suy ra $\triangle ACD$ vuông tại C $\Rightarrow CD \perp AC$.

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

nên ta có $CD \perp SD$ hay $\triangle SCD$ vuông. Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ B, H đến (SCD)

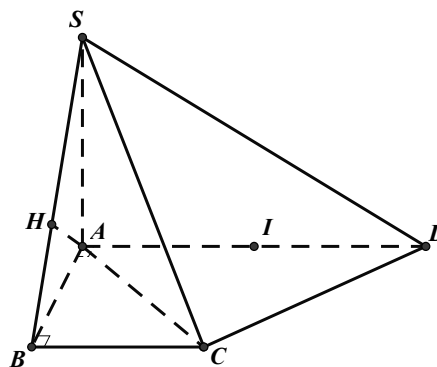
Ta có: $\triangle SAB \sim \triangle SHA \Rightarrow \frac{SA}{SH} = \frac{SB}{SA}$

$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$

mà $\frac{SH}{SB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$

Thể tích khối tứ diện S.BCD: $V_{SBCD} = \frac{1}{3}SA \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$,



$$CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a \Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \sqrt{2}a^2$$

$$\text{Ta có: } V_{S.BCD} = \frac{1}{3}d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \frac{3.\frac{\sqrt{2}a^3}{2}}{\sqrt{2}a^2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ H đến (SCD) là } d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}.$$

Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc bằng 60° . Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB$ (1)

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $\widehat{SKH} = 60^\circ$

$$\text{Ta có } SH = HK.\tan \widehat{SKH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

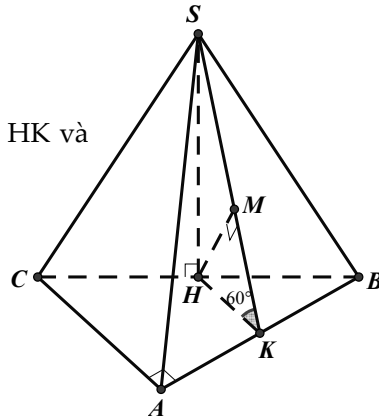
Vì $IH \parallel SB$ nên $IH \parallel (SAB)$.

Do đó $d(I, (SAB)) = d(H, (SAB))$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M

$\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HM$

$$\text{Ta có } \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 2a$, $AC = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Khoảng cách từ trung điểm M của cạnh BC đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{3a}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

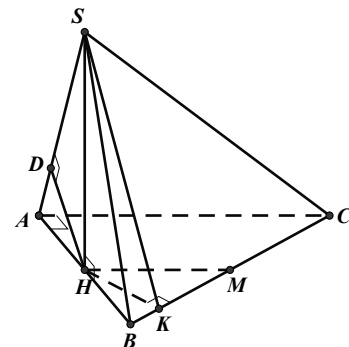
Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $HK \perp BC$ tại K

$\Rightarrow BC \perp (SHK)$

Từ giả thiết ta có: $\widehat{SHK} = 30^\circ$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 4a$$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{HK}{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Trong tam giác SHK có $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \frac{a}{2}$

Do M là trung điểm của cạnh BC nên $MH \parallel AC$, do đó $MH \parallel (SAC)$.

Suy ra: $d(M, (SAC)) = d(H, (SAC))$

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $HD \perp SA$ tại D. Ta có:

$$AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp DH \Rightarrow DH \perp (SAC)$$

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HD = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy $d(M, (SAC)) = d(H, (SAC)) = HD = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 8: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60° . Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB$ (1)

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa

SK và HK bằng $\widehat{SKH} = 60^\circ$.

Ta có: $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

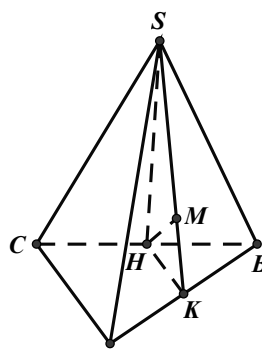
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$

Vì $IH \parallel SB$ nên $IH \parallel (SAB)$. Do đó $d(I, (SAB)) = d(H, (SAB))$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HM$

Ta có: $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(I, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

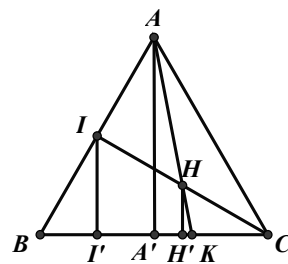
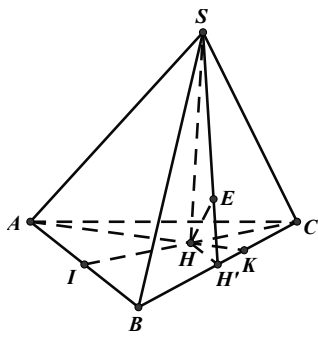


Ví dụ 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{29}}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{3\sqrt{29}}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B



Ta có: $CI = \sqrt{AC^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $AH = \sqrt{AI^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$, suy ra $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{4}$.

Gọi A' , H' , I' lần lượt là hình chiếu của A , H , I trên BC , E là hình chiếu của H trên SH' thì $HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HE$.

Ta có: $HH' = \frac{1}{2}II' = \frac{1}{4}AA' = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. Từ $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HH'^2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$

Vậy $d(H; (SBC)) = \frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{112}}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{111}}$. C. $\frac{6a}{\sqrt{112}}$. D. $\frac{3a}{\sqrt{112}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Trong (SBD) kẻ $OE \parallel SH$ khi đó ta có OC , OD , OE đôi một vuông góc.

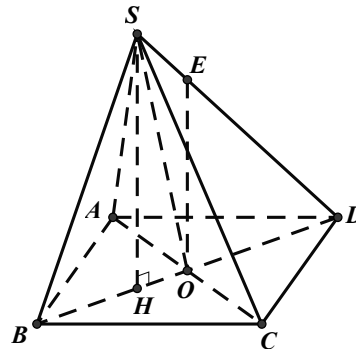
Và: $OC = \frac{a}{2}$, $OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OE = \frac{3a}{8}$

Áp dụng công thức:

$$\frac{1}{d^2(O, (SCD))} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OE^2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{3a}{\sqrt{112}}$$

Mà $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = \frac{6a}{\sqrt{112}}$.



DẠNG 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐƯỜNG THẲNG ĐẾN MẶT PHẪNG

1. Phương pháp

Việc tính khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nó, hoặc tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đều quy về việc tính khoảng cách từ điểm đến mặt

phẳng. Cần lưu ý việc chọn điểm trên đường hoặc trên mặt sao cho việc xác định khoảng cách đơn giản nhất.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Hình chiếu vuông góc của A trên $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của $B'C'$.

Câu 1.1. Khoảng cách từ AA' đến mặt bên $(BCC'B')$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $AA' // BB' \subset (BCC'B')$

$$\Rightarrow AA' // (BCC'B')$$

Gọi $J = \text{hch}_{AA'} I \Rightarrow IJ \perp AA' // BB' \Rightarrow IJ \perp BB'$

Mặt khác, theo giả thiết suy ra:

$$\begin{cases} B'C' \perp AI \subset (AA'I) \\ B'C' \perp BI \subset (AA'I) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'I)$$

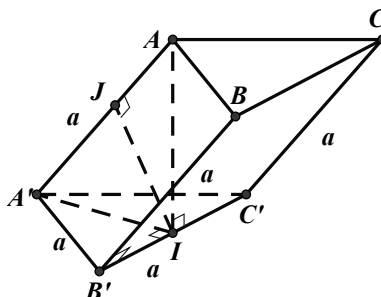
Suy ra: $IJ \perp B'C'$, tức là $IJ \perp (BCC'B')$,

mà $J \in AA'$ nên $d(AA', (BCC'B')) = IJ$

Trong $\triangle AA'I \Rightarrow IJ \cdot AA' = AI \cdot A'I \Rightarrow IJ = \frac{AI \cdot A'I}{AA'}$.

Dễ thấy $A'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI = \sqrt{AA'^2 - A'I^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

Suy ra: $IJ = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(AA', (BCC'B')) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.



Câu 1.2. Khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ bằng

- A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Hai đáy của lăng trụ song song nên $d((ABC), (A'B'C')) = d(A, (A'B'C'))$ mà $A \in (ABC)$ và

$$AI \perp (A'B'C') \Rightarrow d((ABC), (A'B'C')) = AI = \frac{a}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

2.1. Khoảng cách từ AA' đến $(BDD'B')$ bằng

- A. $\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. B. $\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. C. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. D. $\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $AA' // BB' \subset (BDD'B')$

$\Rightarrow AA' \parallel (BDD'B')$. Do đó:

$$d(AA', (BDD'B')) = d(A, (BDD'B'))$$

Gọi $H = h_{ch_{BD}} A \Rightarrow AH \perp BD$ mà

$(BDD'B') \perp (ABCD)$ suy ra:

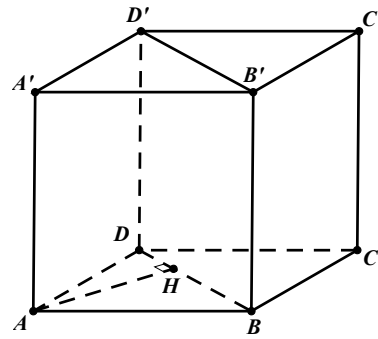
$AH \perp (BDD'B')$. Tức là:

$$d(A, (BDD'B')) = AH$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \triangle ABD \Rightarrow \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \end{aligned}$$

$$\text{nên } AH^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Vậy: } d(AA', (BDD'B')) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



2.2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' , BB' . Khoảng cách từ MN đến $(ABC'D')$ bằng

A. $\frac{2abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

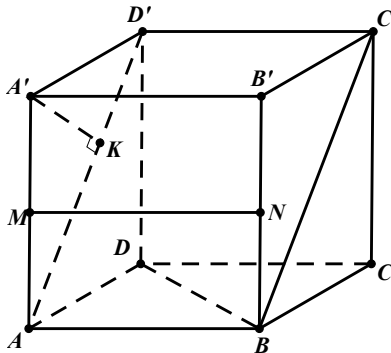
B. $\frac{abc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$

C. $\frac{bc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$

D. $\frac{2ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C



Ta có: $MN \parallel AB \subset (ABC'D') \Rightarrow MN \parallel (ABC'D')$. Suy ra:

$d(MN, (ABC'D')) = d(M, (ABC'D'))$, nhưng $A'M$ cắt mặt phẳng $(ABC'D')$ tại A và M là trung điểm của AA' . Nên:

$$d(M, (ABC'D')) = \frac{1}{2} d(A', (ABC'D'))$$

Gọi $K = h_{ch_{AD'}} A' \Rightarrow A'K \perp AD'$ mà $(ABC'D') \perp (AA'D'D)$, suy ra:

$A'K \perp (ABC'D')$. Tức là: $d(A', (ABC'D')) = A'K$.

$$\text{Xét } \triangle A'AD' \Rightarrow \frac{1}{A'K^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'D'^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{c^2 + b^2}{c^2 b^2}, \text{ nên:}$$

$$A'K^2 = \frac{c^2 b^2}{c^2 + b^2} \Rightarrow A'K = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \text{ Vậy } d(M, (ABC'D')) = \frac{bc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AD'B')$ và $(C'BD)$ bằng

A. $\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

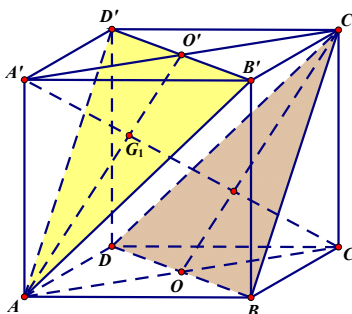
B. $\frac{abc}{\sqrt{ab + bc + ca}}.$

C. $\frac{abc}{2\sqrt{a^2 + c^2 + c^2}}.$

D. $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D



Ta có: $B'D' \parallel BD \subset (C'BD) \Rightarrow B'D' \parallel (C'BD)$

Gọi $O = AC \cap BD, O' = A'C \cap B'D'$

Suy ra: $AO' \parallel C'O \subset (C'BD) \Rightarrow AO' \parallel (C'BD)$

Mà $AO', B'D' \subset (AB'D'), AO' \cap B'D' = O' \Rightarrow (AD'B') \parallel (C'BD)$

Ta đã chứng minh được $A'C$ bị các mặt $(AD'B'), (C'BD)$ chia thành ba đoạn bằng nhau.

Do đó: $d((AD'B'), (C'BD)) = d(G_1, (C'BD)) = d(A', (AD'B'))$

Vì $A'A, A'B', A'D'$ đôi một vuông góc, nếu:

$$\frac{1}{d^2(A', (AD'B'))} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Vậy: } d(A', (AD'B')) = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = d((AD'B'), (C'BD))$$

Ta cần chú ý kết quả sau: Nếu tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc thì:

$$d(O, (ABC)) = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , mặt bên SBC vuông góc với đáy ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, SA, AC . Khoảng cách giữa hai (MNP) và (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}.$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}.$

D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

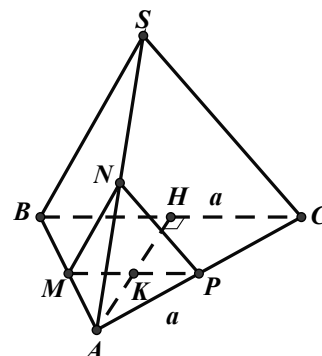
Theo giả thiết, suy ra:

$$MN \parallel SB \subset (SAB) \Rightarrow MN \parallel (SAB)$$

$$NP \parallel SC \subset (SAC) \Rightarrow NP \parallel (SAC)$$

Mà $MN, NP \subset (MNP), MN \cap NP = N$ nên $(MNP) \parallel (SBC).$

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$
(do ΔABC đều)



Mà $(ABC) \perp (SBC)$ và $AH \subset (ABC)$

$BC = (ABC) \cap (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Gọi $K = AH \cap MP \Rightarrow KH \perp (SBC) \Rightarrow d(K, (SBC)) = KH$

Vì $(MNP) \parallel (SBC)$ và $K \in (MNP)$

Do đó: $d((MNP), (SBC)) = d(K, (SBC)) = KH = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy bằng

A. $\frac{a}{3}$.

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

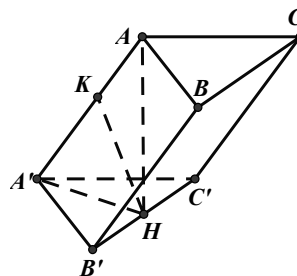
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy chính bằng AH .

Trong $\triangle HAA'$, ta có: $\widehat{A'} = 30^\circ$.

$$AH = AA' \cdot \sin \widehat{A'} = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$



DẠNG 4. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Phương pháp

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- **Cách 1:** Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song với b . Khoảng cách từ b đến (P) là khoảng cách cần tìm.
- **Cách 2:** Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.
- **Cách 3:** Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

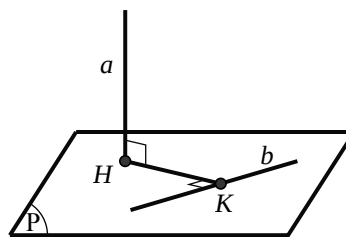
Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

- **Cách 1:** Khi $a \perp b$

+ Dựng một $(P) \supset b, (P) \perp a$ tại H .

+ Trong (P) dựng $HK \perp b$ tại K .

+ Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b .

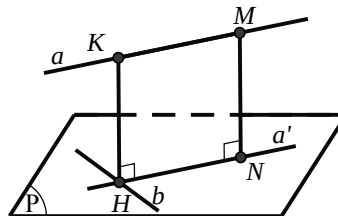


- **Cách 2:**

+ Dựng $(P) \supset b, (P) \parallel a$.

+ Dựng $a' = h_{(P)}a$, bằng cách lấy $M \in a$ dựng đoạn $MN \perp (P)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song a .

+ Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK \parallel MN \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung.



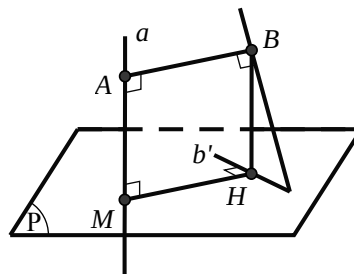
- **Cách 3:**

+ Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm M .

+ Dựng hình chiếu b' của b trên (P) .

+ Dựng hình chiếu vuông góc H của M trên b' .

+ Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại điểm B.



+ Qua B dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại điểm A. Khi đó, AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AD=2AB$, $SA \perp (ABCD)$, $SC=2a\sqrt{5}$ và góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° , M là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{510}}{17}$. B. $\frac{a\sqrt{51}}{17}$. C. $\frac{2a\sqrt{510}}{17}$. D. $\frac{3a\sqrt{510}}{17}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SC$ có hình chiếu trên $(ABCD)$ là AC

$$\Rightarrow \widehat{(\overline{SC, ABCD})} = \widehat{(\overline{SC, AC})} = \widehat{SCA} = 60^\circ$$

Ta giác SAC vuông tại A

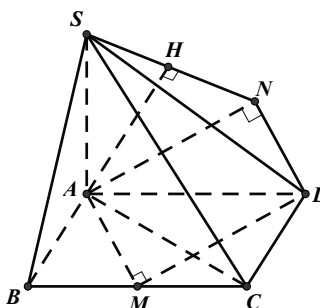
$$\Rightarrow AC = SC \cdot \cos 60^\circ = a\sqrt{5}$$

và $SA = SC \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{15}$

Ta có $AB^2 + AD^2 = AC^2$

$$\Leftrightarrow 5AB^2 = 5a^2 \Leftrightarrow AB = a$$

Dựng hình bình hành AMDN và dựng $AH \perp SN$ tại H.



Ta có:

- $AM // DN \Rightarrow AM // (SDN) \Rightarrow d(AM, (SDN)) = d(A, (SDN))$

- $AM \perp MD$ nên $AMDN$ là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow ND \perp AN \text{ mà } DN \perp SA \Rightarrow DN \perp (SAN)$$

$$\Rightarrow DN \perp AH \text{ mà } AH \perp SN \Rightarrow AH \perp (SDN) \Rightarrow d(A, (SDN)) = AH$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{15a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{17}{30a^2} \\ \Rightarrow AH &= \frac{a\sqrt{510}}{17}. \text{ Vậy } d(AM, SD) = \frac{a\sqrt{510}}{17}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CM bằng

A. $\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{17}}$.

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Gọi N là trung điểm cạnh SA.

Do $SB \parallel (CMN)$ nên

$$\begin{aligned} d(SB, CM) &= d(SB, (CMN)) \\ &= d(B, (CMN)) = d(A, (CMN)) \end{aligned}$$

Kẻ $AE \perp MC$, $E \in MC$ và kẻ

$AH \perp NE$, $H \in NE$

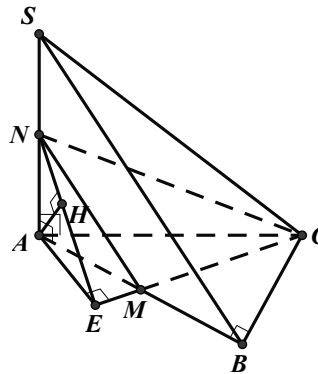
Chứng minh được

$$AH \perp (CMN) \Rightarrow d(A, (CMN)) = AH$$

Tính $AE = \frac{2S_{AMC}}{MC}$ trong đó:

$$\left. \begin{aligned} S_{AMC} &= \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin \widehat{CAM} = \frac{1}{2} a \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 \sqrt{3} \\ MC &= a\sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AE = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Tính được } AH = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}} \Rightarrow d(A, (CMN)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}} \Rightarrow d(SB, CM) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}}.$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, D, SA vuông góc với đáy, $SA = AD = a$, $AB = 2a$. Khoảng cách giữa AB và SC bằng

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $2a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $AB \parallel DC$ nên

$$d(AB, SC) = d(AB, (SDC)).$$

Trong mặt phẳng (SAD) từ A kẻ

$AH \perp SD$, $H \in SD$ (1)

Ta có:

$$\left. \begin{aligned} DC &\perp AD \\ DC &\perp SA \end{aligned} \right\} \Rightarrow DC \perp (SAD)$$

$$\Rightarrow DC \perp AH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$

$$AH = d(A, (SCD)) = d(AB, SC)$$

$$\text{Trong tam giác vuông SAD có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

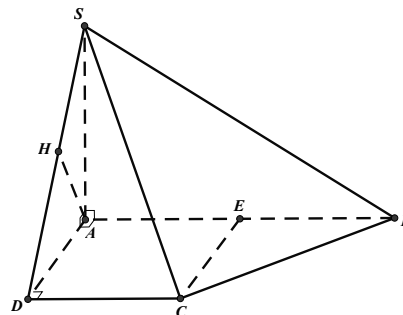
Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SD bằng

A. $\frac{3a}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{a}{\sqrt{15}}$.

D. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$.



Hướng dẫn giải

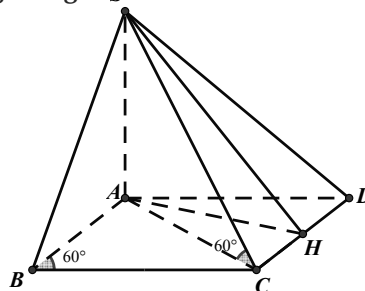
ĐÁP ÁN D

$$d(AB, SD) = d(A, (SCD)) = \frac{3V_{S.ACD}}{S_{SCD}}$$

Gọi H là trung điểm CD. Ta có:
 $CD \perp SH$.

$$\text{Do đó } S_{SCD} = \frac{1}{2} CD \cdot SH = \frac{a^2 \sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Vậy } d(AB, SD) = d(A, (SCD)) = \frac{3V_{S.ACD}}{S_{SCD}} = \frac{3a}{\sqrt{15}}.$$



Lưu ý: Ở trên ta đã sử dụng công thức $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$. Đây là công thức thể tích của khối

đa diện học ở chương trình 12 $\left(V = \frac{1}{3} B \cdot h \right)$

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

- A. $\frac{3a}{2}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Trong mặt phẳng (ABCD) đường thẳng qua D song song với AC, cắt đường thẳng AB tại E.

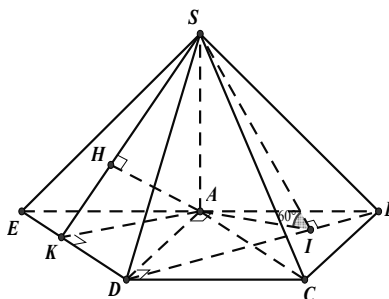
Trong tam giác ADE kẻ đường cao AK ($K \in DE$) $\Rightarrow (SAK) \perp (SDE)$. Dựng

$AH \perp SK$ tại H, suy ra $AH \perp (SDE)$.

Do $AC \parallel (SDE)$

$$\Rightarrow d(AC; SD) = d(A; (SDE)) = AH$$

$$\text{Ta có: } AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4} \Rightarrow d(AC; SD) = \frac{3a}{4}.$$



Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{7}}{14}$. B. $\frac{3a\sqrt{7}}{4}$. C. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{8}$.

Hướng dẫn giải

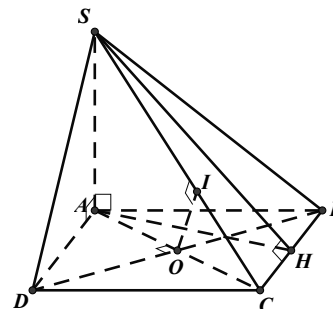
ĐÁP ÁN C

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $DB \perp AC$, $BD \perp SC$ nên $BD \perp (SAC)$ tại O.

Kẻ $OI \perp SC \Rightarrow OI$ là đường vuông góc chung của BD và SC.

Sử dụng hai tam giác đồng dạng ICO và ACS hoặc



đường cao của tam giác SAC, suy ra được $OI = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

$$\text{Vậy } d(BD, SC) = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC theo a bằng

- A. $\frac{a}{19}$. B. $\frac{2a\sqrt{38}}{9}$. C. $\frac{a\sqrt{38}}{19}$. D. $\frac{a\sqrt{38}}{9}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Từ C dựng $CI \parallel DE \Rightarrow DE \parallel (SCI)$.

Từ A dựng $AK \perp CI$, cắt ED tại H và CI tại K.

Trong (SAK) dựng $HT \perp SK$.

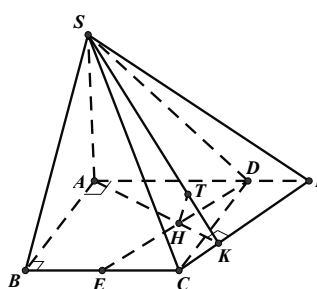
Do $CI \perp (SAK)$ nên $HT \perp (SCI)$

$$AK = \frac{CD \cdot AI}{CI} = \frac{3a}{\sqrt{5}},$$

$$HK = \frac{1}{3} AK = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$d(DE, SC) = d(H, (SCI))$$

$$= HT = \frac{SA \cdot HK}{SK} = \frac{a\sqrt{38}}{19}.$$



Ví dụ 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = AD = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{10}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Trong mặt phẳng (SAD),

vẽ $AH \perp SD$, $H \in SD$

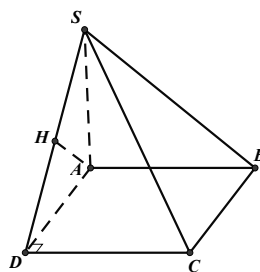
Mặt khác ABCD là hình chữ nhật nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Vậy khoảng cách giữa AB và SC chính là AH.

Trong tam giác vuông SAD có AH là đường cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ví dụ 9: Cho hình chóp S.ABC có tam giác SAB đều cạnh a, tam giác ABC cân tại C. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc hợp bởi cạnh SC và mặt đáy là 30° . Tính khoảng cách của hai đường thẳng SA và BC.

A. $\frac{3a}{\sqrt{13}}$.

B. $\frac{3a}{13}$.

C. $\frac{a}{13}$.

D. $\frac{2a}{13}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Gọi H là trung điểm cạnh AB, ta có SH là đường cao của hình chóp S.ABC và CH là đường cao của tam giác ABC. Từ giả thiết ta được $\widehat{SCH} = 30^\circ$. Tam giác SHC vuông tại H nên

$$\frac{SH}{CH} = \tan 30^\circ \Rightarrow CH = SH \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$

Dựng hình bình hành ABCD, khi đó

$$d(BC, SA) = d(BC, (SAD))$$

$$= d(B, (SAD)) = 2d(H, (SAD))$$

Gọi G, K lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng AD và SG. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AD \perp HG \\ AD \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (SHG) \Rightarrow HK \perp AD$$

Mà $HK \perp SG$ nên $HK \perp (SAD)$ hay $d(H, (SAD)) = HK$

Tam giác SHG vuông tại H nên:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

$$\text{Vậy } d(BC, SA) = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

Ví dụ 10: Cho hình chóp S.ABCD, tứ giác ABCD là hình thang cân, hai đáy là BC và AD. Biết $SA = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{a}{7}$.

D. $\frac{3a}{7}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = 3S_{ABI} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

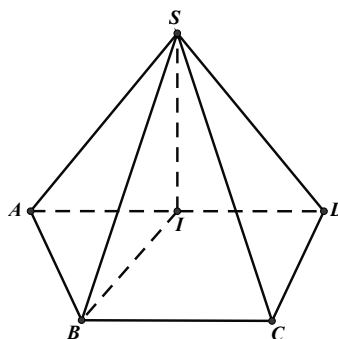
Xét $\triangle SBI$ vuông tại I có:

$$SI^2 = SB^2 - BI^2 = a^2 \Rightarrow SI = a$$

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \end{array} \right\} \Rightarrow AD \parallel (SBC)$$

$$\Rightarrow d(AD, BC) = d(AD, (SBC))$$

$$= d(I, (SBC)) = \frac{3V_{SIBC}}{S_{SBC}}$$



$$V_{SIBC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12};$$

$$S_{SBC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2 \sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Vậy } d(AD, SB) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN TỐC ĐỘ

Câu 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách từ C đến AC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ D đến đường thẳng SB bằng

- A. a. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB = 14, BC = 10, AC = 16$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm O sao cho $OA = 8$. Khoảng cách từ điểm O đến cạnh BC bằng

- A. $8\sqrt{3}$. B. 16. C. $8\sqrt{2}$. D. 24.

Câu 4: Hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $SA = SC = SM = a\sqrt{5}$. Khoảng cách từ S đến cạnh AB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{19}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{19}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc BAC bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 2HB$. Đường thẳng SO tạo với mặt phẳng (ABCD) góc 60° với O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{3a\sqrt{7}}{15}$. B. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{11}$. D. $\frac{2a\sqrt{7}}{15}$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABC có các mặt ABC, SBC là những tam giác đều cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) nằm trong tam giác ABC. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$. B. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{3a\sqrt{13}}{11}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật tâm I, có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm AI. Biết SH vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAC vuông tại S. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $\frac{3a}{\sqrt{11}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{13}}$. C. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$. D. $\frac{5a}{\sqrt{17}}$.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $BD = 2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD) bằng

- A. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{4a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = a, BC = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu

của S lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{4a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABC có $AB = AC$, $BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AB.

Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{4a\sqrt{37}}{37}$. B. $\frac{a}{\sqrt{37}}$. C. $\frac{3a\sqrt{37}}{37}$. D. $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm I của AC và BD. Mặt bên (SAB) hợp với đáy một góc 60° . Biết rằng $AB = BC = a$, $AD = 3a$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB) theo a bằng

- A. $\frac{4a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{3a\sqrt{3}}{7}$. D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc $\widehat{DAB} = 120^\circ$.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{3a}{7}$. D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi ABCD có độ dài các cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại G, lấy điểm S sao cho $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) theo a bằng

- A. $\frac{a}{\sqrt{17}}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$. D. $\frac{a}{\sqrt{37}}$.

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $BD = 2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD) bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. C. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$.

Câu 15: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D') bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$, $AB = 5a$, $BC = 3a$, $CD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và AD.

Câu 16.1. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (BCD) bằng

- A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{4}$. D. $\frac{5a}{2}$.

Câu 16.2. Gọi (P) là mặt phẳng chứa MN và đi qua trung điểm K của AB. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) bằng

A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{5a}{4}$. D. $\frac{5a}{2}$.

Câu 17: Cho hình chóp cắt tứ giác đều ABCD.A'B'C'D'. Đáy lớn ABCD có cạnh bằng a, đáy nhỏ A'B'C'D' có cạnh bằng b. Góc giữa mặt bên và đáy lớn bằng 60° . Khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình chóp cắt đều bằng

A. $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD') bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD bằng

A. $\frac{a\sqrt{39}}{15}$. B. $\frac{6a\sqrt{39}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{39}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{39}}{11}$.

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{25}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{45}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 21: Cho hình chóp S.ABC có $SC = \frac{a\sqrt{70}}{5}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = a$ và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA bằng

A. $\frac{3a}{5}$. B. $\frac{4a}{5}$. C. $\frac{a}{5}$. D. $\frac{2a}{5}$.

Câu 22: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $3a$. Chân đường cao hạ từ đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AH$, góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. B. $\frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{19}}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{39}}$. D. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 23: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của H và AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy (ABCD) là 45° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a bằng

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$. C. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 24: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SD hợp với mặt đáy một góc 60° và hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt đáy là trung điểm của cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng

A. $\frac{a\sqrt{345}}{31}$. B. $\frac{a\sqrt{546}}{31}$. C. $\frac{a\sqrt{645}}{31}$. D. $\frac{a\sqrt{465}}{31}$.

Câu 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, với

$AB = BC = a$, $AD = 2a$ ($a > 0$). Các mặt bên (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{3a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$ cạnh bên $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{40}$. B. $\frac{a\sqrt{30}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại B và C, $AB = 2BC = 4CD = 2a$, giả sử M và N lần lượt là trung điểm AB và BC. Hai mặt phẳng (SMN) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SB hợp với (ABCD) một góc 60° . Khoảng cách giữa SN và BD bằng

- A. $a\sqrt{\frac{3}{15}}$. B. $a\sqrt{\frac{3}{65}}$. C. $a\sqrt{\frac{3}{55}}$. D. $a\sqrt{\frac{3}{35}}$.

Câu 28: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B. Biết $AD = 2AB = 2BC = 2a$, $SA = SD = SC = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. ĐÁP ÁN C

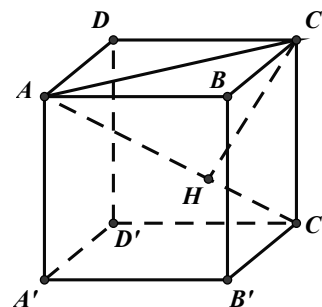
Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}\Delta BAC' &= \Delta CA'A = \Delta DAC' = \Delta A'AC \\ &= \Delta B'C'A = \Delta D'C'A\end{aligned}$$

nên khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.

Hạ CH vuông góc với AC', ta được:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC'^2} + \frac{1}{CC'^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Câu 2. ĐÁP ÁN A

Gọi H là giao điểm của AC và BD.

$$AB = BC = CD = DA = a \Rightarrow ABCD \text{ là hình thoi.}$$

Do đó $AC \perp BD$ đồng thời H là trung điểm của AC và BD.

$$\Delta SAC \text{ cân tại } S \Rightarrow SH \perp AC \quad (1)$$

$$\Delta SBD \text{ cân tại } S \Rightarrow SH \perp BD \quad (2)$$

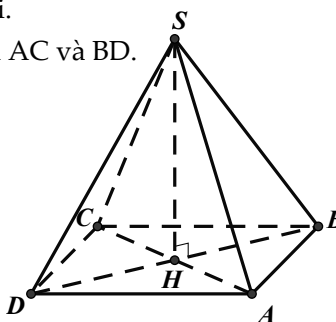
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } SH \perp (ABCD) \quad (3)$$

$$\text{Vì } SA = SB = SC = SD$$

$$\text{nên } HA = HB = HC = HD$$

$$\text{Suy ra } ABCD \text{ là hình vuông (tứ giác đều)} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta được S.ABCD là hình chóp tứ giác đều.



Xét ΔSBD ta có: $SA = SB = a, BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BD^2 = SB^2 + SD^2$.

Thế nên ΔSBD vuông tại S.

Suy ra $DS \perp SB$. Vậy $d(D, SB) = DS = a$.

Câu 3. ĐÁP ÁN B

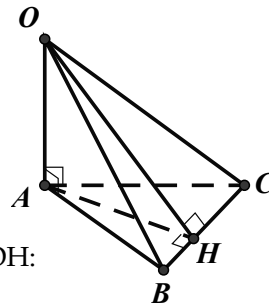
Nửa chu vi tam giác ABC: $p = \frac{14+16+10}{2} = 20$

$$S_{ABC} = \sqrt{20 \cdot (20-14)(20-16)(20-10)} = 40\sqrt{3}$$

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{80\sqrt{3}}{10} = 8\sqrt{3}$$

Nối OH thì $OH \perp BC$. Khoảng cách từ O đến BC là OH:

$$OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = 16$$



Câu 4. ĐÁP ÁN B

Chân đường cao hình chóp là tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC (Do $SA = SC = SM$).

Góc $\widehat{AMC} = 120^\circ$, nên H ở ngoài tam giác AMC và HAM là tam giác đều nên:

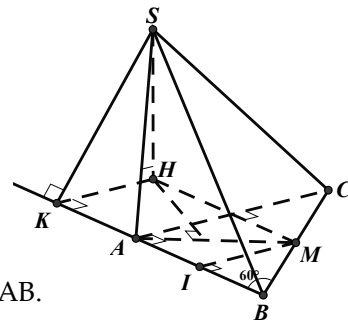
$$HM = AM = a$$

$$SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$$

Từ H kẻ $HK \perp AB$ thì $SK \perp AB$: SK là khoảng cách từ S đến cạnh AB.

$$HK = MI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (do ABM là tam giác đều cạnh bằng a)}$$

$$SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{19a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$



Câu 5. Phân tích:

$$\text{Ta có } d(B, (SCD)) = \frac{3}{2}d(H, (SCD)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3V_{H,SCD}}{S_{SCD}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{V_{H,SCD}}{S_{SCD}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{V_{S,HCD}}{S_{SCD}}$$

ĐÁP ÁN B

Trong tam giác SHO có:

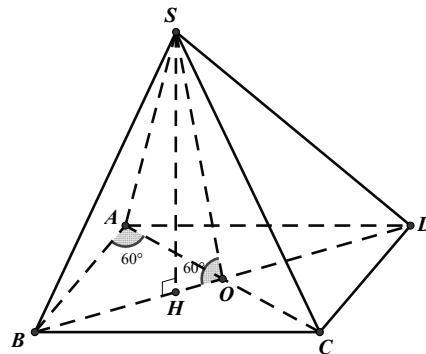
$$\begin{aligned} SH &= HO \cdot \tan 60^\circ \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} S_{HCD} &= \frac{1}{2} CO \cdot HD = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot (OD + OH) \\ &= \frac{a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{16} \end{aligned}$$

$$V_{S,HDC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{HDC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{16} = \frac{a^3}{96} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \frac{a\sqrt{57}}{6}; SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$



$$SD = \frac{a\sqrt{57}}{6}; SC = \frac{a\sqrt{21}}{6}; CD = a, p = \frac{SC + SD + CD}{2}$$

$$S_{SCD} = \sqrt{p(p-SC)(p-SD)(p-CD)} = \frac{a^2\sqrt{21}}{12} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } d(B, (SCD)) = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 6. ĐÁP ÁN B

Gọi M là trung điểm của BC.

Lập luận được góc giữa (SBC) và (ABC) là $\widehat{SMA} = 60^\circ$

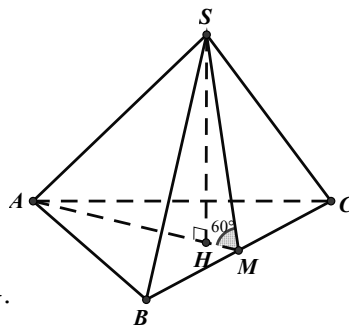
ΔSAM đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow S_{SAM} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} BC \cdot S_{SAM} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

$$d(B, (SAC)) = \frac{3V_{B.SAC}}{S_{SAC}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16 \cdot \frac{a^2\sqrt{39}}{16}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$



Câu 7. ĐÁP ÁN D

$$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$$

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } S \Rightarrow SH^2 = HA \cdot HC$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a, \text{ suy ra:}$$

$$HA = \frac{a}{2}, HC = \frac{3a}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$CI = 2HI \Rightarrow d(C, (SBD)) = 2d(I, (SBD))$$

Hạ $HN \perp BD, N \in BD$ và $HK \perp SN, KN$.

Suy ra: $HK \perp (SBD)$ nên $d(H, (SBD)) = HK$

$$\text{Ta có: } AB \cdot AD = 2S_{ABD} = 2HN \cdot BD \Rightarrow HN = \frac{AB \cdot AD}{2BD} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{15}}. \text{ Vậy } d(C, (SBD)) = 2HK = \frac{3a}{\sqrt{15}}.$$

Câu 8. ĐÁP ÁN D

Kẻ $SH \perp AC, H \in AC$

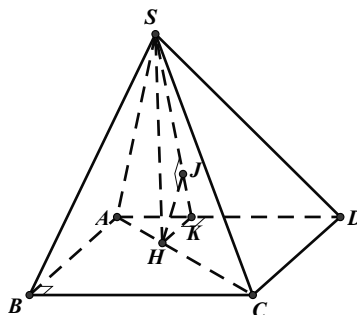
Do $(SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a, SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow CA = 4HA$$

$$\Rightarrow d(C, (SAD)) = 4d(H, (SAD))$$



$$\text{Do } BC // (SAD) \Rightarrow d(B, (SAD)) = d(C, (SAD)) = 4d(H, (SAD))$$

$$\text{Kẻ } HK \perp AD \text{ (} K \in AD \text{), } HJ \perp SK \text{ (} J \in SK \text{)}$$

$$\text{Chứng minh được } (SHK) \perp (SAD) \text{ mà } HJ \perp SK \Rightarrow HJ \perp (SAD)$$

$$\Rightarrow d(H, (SAD)) = HJ; \Delta AHK \text{ vuông tại } K \Rightarrow HK = AH \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow HJ = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}. \text{ Vậy } d(B, (SAD)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 9. ĐÁP ÁN D

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC và O là tâm của hình chữ nhật, ta

$$\begin{aligned} \text{có: } BH &= \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + (2\sqrt{2}a)^2} = a \end{aligned}$$

Ta có $SH \perp (ABCD)$ nên góc giữa SB và mặt phẳng (ABCD) là góc $\widehat{SBH} = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SHB ta có:

$$SH = BH \tan \widehat{SBH} = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có: } d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2 \cdot \frac{3}{2}d(H, (SBC)) = 3d(H, (SBC))$$

$$\text{Kẻ } HK \perp BC \text{ (} K \in BC \text{), } HI \perp SK \text{ (} I \in SK \text{)} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$$

$$\text{Do đó } BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp HI \quad (2)$$

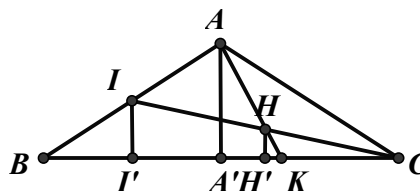
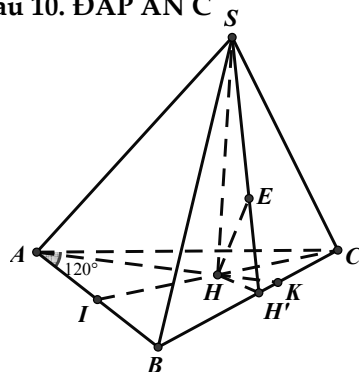
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } HI \perp (SBC) \text{ nên } d(H, (SBC)) = HI$$

$$\text{Ta có } HK = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}a. \text{ Trong tam giác vuông SHK ta có:}$$

$$HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{3}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{9}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = 3d(H, (SBC)) = 3HI = \frac{3a\sqrt{21}}{14}.$$

Câu 10. ĐÁP ÁN C



Theo định lý Côsin trong tam giác ABC ta được $AB = AC = a$

$$\text{Ta có } CI^2 = AI^2 + AC^2 - 2AI.AC.\cos 120^\circ = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow CI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Do đó: } AH^2 = \frac{2(AI^2 + AC^2) - CI^2}{4} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Suy ra } SH = AH.\tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$$

AH cắt BC tại K. Gọi A', H', I' lần lượt là hình chiếu của A, H, I trên BC.

$$\text{Ta có: } \frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AK}{HK} = \frac{AA'}{HH'} = 4 \Rightarrow d(A; (SBC)) = 4d(H; (SBC))$$

Gọi E là hình chiếu của H trên SH' thì $HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HE$

$$HH' = \frac{1}{4}AA' = \frac{a}{8} \text{ và từ } \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HH'^2} \Rightarrow HE = \frac{3a}{4\sqrt{37}}$$

$$\text{Vậy } d(A; (SBC)) = 4HE = \frac{3a\sqrt{37}}{37}.$$

Câu 11. ĐÁP ÁN D

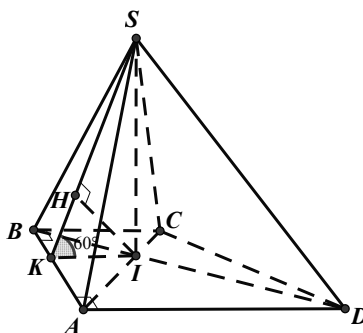
Gọi K là hình chiếu của I lên AB.

Suy ra $\widehat{SKI} = 60^\circ$.

$$\text{Do } IK \parallel AD \Rightarrow \frac{KI}{AD} = \frac{BI}{BD}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \frac{BI}{ID} &= \frac{BC}{AD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{BI}{BI + ID} &= \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{KI}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow KI = \frac{3a}{4} \Rightarrow SI = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$



Gọi H là hình chiếu của I lên SK. Ta có $\left. \begin{array}{l} AB \perp IK \\ AB \perp SI \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp IH$

Từ đó suy ra $IH \perp (SAB) \Rightarrow d(I; (SAB)) = IH$

Mà do $DB = 4IB \Rightarrow d(D; (SAB)) = 4d(I; (SAB)) = 4IH$

$$\text{Lại có } \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{16}{27a^2} + \frac{16}{9a^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{3}}{8}. \text{ Vậy } d(D; (SAB)) = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 12. ĐÁP ÁN B

$$\left. \begin{array}{l} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$$

$$\text{Kẻ } OK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOK)$$

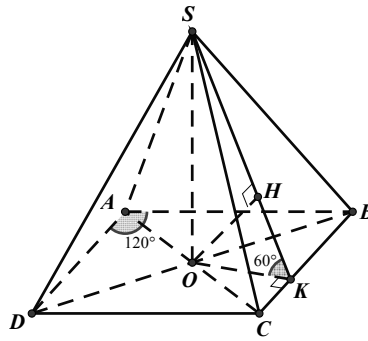
$$\Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SKO} = 60^\circ$$

$$AO \cap (SBC) = C$$

$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = 2d(O; (SBC))$$

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \perp (SOK) \\ (SBC) \cap (SOK) = SK \\ OH \perp SK \end{array} \right\} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O; (SBC)) = OH$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8} \Rightarrow d(A; (SBC)) = \frac{3a}{4}.$$



Câu 13. ĐÁP ÁN B

$$\widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABD \text{ đều cạnh } a.$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AC = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SG = \sqrt{GA \cdot GC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

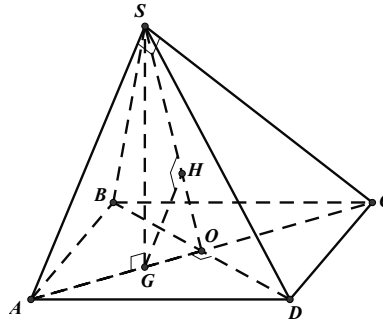
(ΔSAC vuông tại S, đường cao SG).

Kẻ $GH \perp SO \Rightarrow GH \perp (SBD)$ vì

$$BD \perp GH \subset (SAO) \Rightarrow d(G; (SBD)) = GH$$

ΔSGO vuông tại G, đường cao GH

$$\Rightarrow \frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GO^2} = \frac{27}{2a^2} \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{27}}.$$



Câu 14. ĐÁP ÁN C

Kẻ $SH \perp AC, H \in AC$

Do $(SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

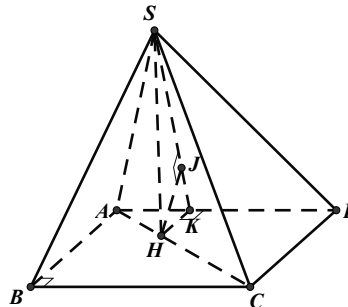
$$SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a,$$

$$SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow CA = 4HA \Rightarrow d(C; (SAD)) = 4d(H; (SAD))$$

Do $BC \parallel (SAD) \Rightarrow d(B; (SAD)) = d(C; (SAD)) = 4d(H; (SAD))$



Kẻ $HK \perp AD$ ($K \in AD$), $HJ \perp SK$ ($J \in SK$)

Chứng minh được $(SHK) \perp (SAD)$ mà $HJ \perp SK \Rightarrow HJ \perp (SAD)$

$$\Rightarrow d(H, (SAD)) = HJ$$

$$\Delta AHK \text{ vuông tại } K \Rightarrow HK = AH \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

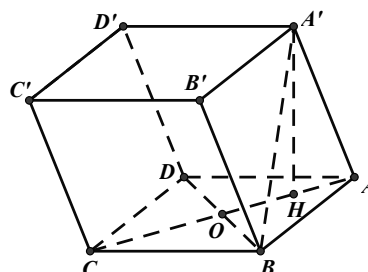
$$\Rightarrow HJ = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}. \text{ Vậy } d(B, (SAD)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 15. ĐÁP ÁN C

Hạ $A'H \perp AC$, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp A'O \end{cases} \Leftrightarrow BD \perp (OAA')$$

$$\Rightarrow BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$$



Và vì $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên $A'H$ chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Nhận xét rằng hình chóp $A'.ABD$ là hình chóp đều, nên ta lần lượt có:

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

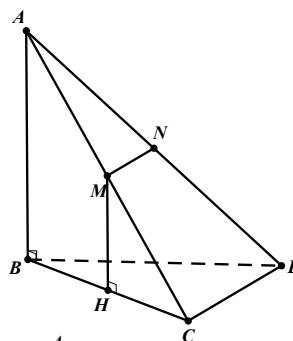
Câu 16.1. ĐÁP ÁN D

$$\begin{cases} MN \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (BCD)$$

$$\begin{cases} \text{Từ M kẻ } MH \parallel AB \\ AB \perp (BCD) \end{cases} \Rightarrow MH \perp (BCD)$$

$$\text{Vậy: } MH = d(MN, (BCD))$$

$$\Delta ABC \text{ cho: } MH = \frac{AB}{2} = \frac{5a}{2}.$$

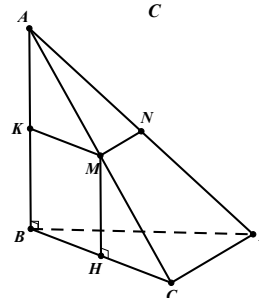


Câu 16.2. ĐÁP ÁN D

Tính $d((P), (BCD))$:

$$\begin{cases} MN \parallel CD \\ MK \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (BCD)$$

$$\begin{cases} M \in (P) \\ MH \perp (BCD) \end{cases} \Rightarrow MH = d((P), (BCD)) = \frac{5a}{2}.$$



Câu 17. ĐÁP ÁN C

Lưu ý: Cần chú ý rằng, trong hình chóp cắt đều thì các mặt bên là những hình thang cân bằng nhau, các góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng nhau.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông ABCD và A'B'C'D'; K và J lần lượt là trung điểm của A'D' và AD.

Gọi H là hình chiếu của K trên (ABCD) thì $KH \perp OJ$ tại H và KH là khoảng cách cần tìm.

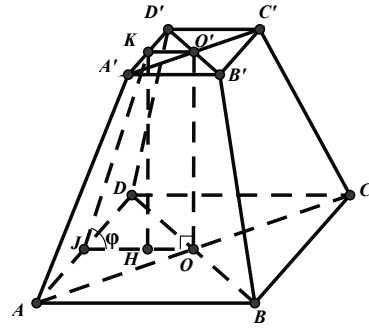
Gọi φ là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp cắt thì

$$\varphi = \widehat{KJH} = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có: } O'K = \frac{b}{2}; OJ = \frac{a}{2}.$$

$$KHOO' \text{ là hình chữ nhật nên: } JH = OJ - O'K = \frac{a-b}{2}$$

$$\Delta HJK: \tan \varphi = \frac{KH}{HJ} = \frac{2.KH}{a-b} \Rightarrow KH = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}.$$



Câu 18. Phân tích:

Chứng minh $B'D \perp BC'$:

$$\left\{ \begin{array}{l} BC' \perp CB' \\ BC' \perp DC (DC \perp (BB'C'C)) \end{array} \right\} \Rightarrow BC' \perp (CDA'B') \Rightarrow BC' \perp B'D \quad (1)$$

Chứng minh $A'C' \perp B'D$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp BB' (BB' \perp (A'B'C'D')) \end{array} \right\} \Rightarrow A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp B'D \quad (2)$$

Xác định giao điểm K và H:

$$\left. \begin{array}{l} (BB'D'D) \supset B'D \\ (BC'A') \cap (BB'D'D) = BO' (O' = A'C' \cap B'D') \\ B'D \cap BO' = K \end{array} \right\} \Rightarrow B'D \cap (BC'A') = K$$

$$\left. \begin{array}{l} (BB'D'D) \supset B'D \\ (ACD') \cap (BB'D'D) = D'O (O = AC \cap BD) \\ B'D \cap D'O = H \end{array} \right\} \Rightarrow B'D \cap (ACD') = H$$

ĐÁP ÁN B

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } B'D \perp (BC'A') \quad (3)$$

Mặt khác:

$$\left. \begin{array}{l} BC' // AD' \\ BA' // CD' \end{array} \right\} \Rightarrow (BC'A') // (ACD') \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } B'D \perp (ACD') \quad (5)$$

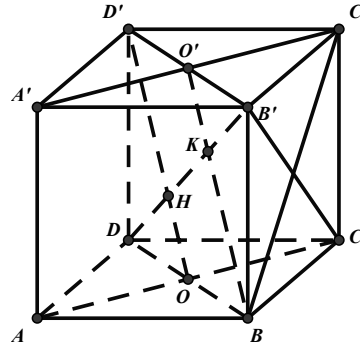
$$\text{Ta có: } B'D \cap (BA'C') = K, B'D \perp (BC'A'),$$

$$B'D \cap (D'AC) = H, B'D \perp (ACD')$$

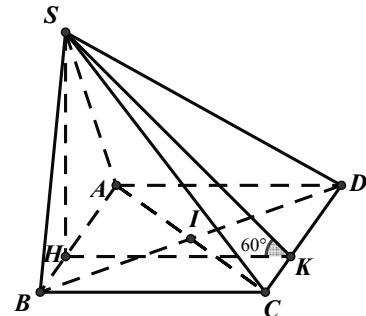
Do đó KH là khoảng cách cần tìm.

$$\Delta BDB': B'D^2 = BD^2 + B'B^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow B'D = a\sqrt{3}$$

$$\text{Dễ thấy trong hình chữ nhật } BB'D'D \text{ ta có: } KH = \frac{1}{3} B'D = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Câu 19. ĐÁP ÁN A



Kẻ $HK \perp CD$ ($K \in CD$). Khi đó:

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$$

Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là góc

$$\widehat{SKH} = 60^\circ$$

Trong tam giác vuông SHK :

$$SH = HK \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$$

$$\text{Vì } (SBC) \parallel AD \Rightarrow d(AD, SC) = d(A, (SBC)).$$

Trong (SAB) kẻ $AI \perp SB$, khi đó:

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AI. \text{ Mà } SB \perp AI \Rightarrow AI \perp (SBC)$$

$$\text{Vậy } d(AD, SC) = d(A, (SBC)) = AI = \frac{SH \cdot AB}{SB} = \frac{2a\sqrt{3} \cdot 3a}{\sqrt{12a^2 + a^2}} = \frac{6a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 20. ĐÁP ÁN D

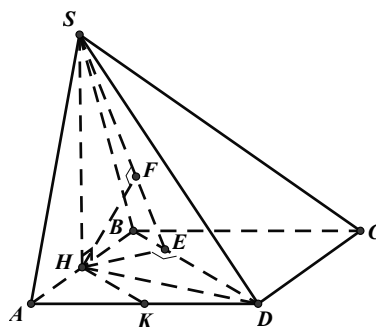
$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HD$. Ta có:

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{SD^2 - HD^2} \\ &= \sqrt{SD^2 - (AH^2 + HD^2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow SH = a\sqrt{3}$$

$$HK \parallel BD \Rightarrow HK \parallel (SBD)$$

$$\Rightarrow d(HK, SD) = d(H, (SBD))$$



Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên BD và F là hình chiếu vuông góc của H trên SE.

Ta có: $BD \perp HE$ và $BD \perp SH$ nên $BD \perp (SHE) \Rightarrow BD \perp HF$ mà $HF \perp SE$ do đó $HF \perp (SBD)$. Suy

$$\text{ra } d(H, (SBD)) = HF$$

$$\text{Ta có: } HE = HB \sin \widehat{EBH} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HF = \frac{HS \cdot HE}{\sqrt{HS^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(HK, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 21. ĐÁP ÁN B

Tam giác AHC vuông cân cạnh a nên

$$CH = a\sqrt{2}$$

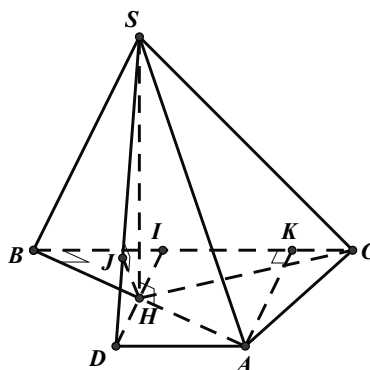
Tam giác SHC vuông tại H nên

$$SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Dựng $AK \perp BC$, $HI \perp BC$. Đường thẳng qua A song song với BC cắt IH tại D $\Rightarrow BC \parallel (SAD)$

$$\Rightarrow d(BC, SA) = s(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = 2d(H, (SAD))$$

$$AD \perp (SDH) \Rightarrow (SAD) \perp (SDH).$$



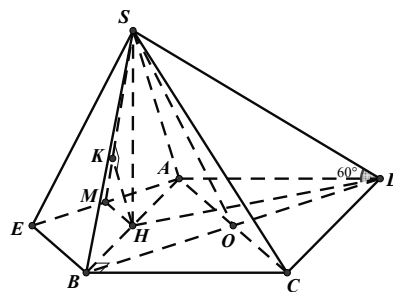
Ta có $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Tính } HD = \frac{a\sqrt{5}}{2}; SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

Dựng E sao cho AEBO là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của AE. Hạ HK vuông góc với SM.

$$\text{Chứng minh } HK \perp (SAE) \text{ và tính được } HK = \frac{a\sqrt{465}}{62}$$

$$\text{Tính được } d(BD; SA) = 2HK = \frac{a\sqrt{465}}{31}.$$



Câu 25. ĐÁP ÁN A

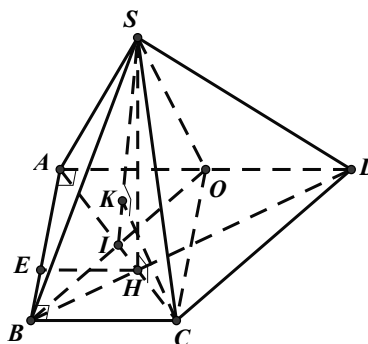
Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và

$$BH = \frac{1}{3}BD$$

Kẻ $HE \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHE)$, hay

$$((SAB); (ABCD)) = \widehat{SEH} = 60^\circ$$

$$\text{Mà } HE = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$



Gọi O là trung điểm AD, ta có ABCD là hình vuông cạnh a $\Rightarrow \Delta ACD$ có trung tuyến

$$CO = \frac{1}{2}AD$$

$CD \perp AC \Rightarrow CD \perp (SAC)$ VÀ $BO \parallel CD$ hay $CD \parallel (SBO)$ và $BO \perp (SAC)$

$$d(CD; SB) = d(CD; (SBO)) = d(C; (SBO))$$

$$\text{Tính chất trọng tâm tam giác BCO} \Rightarrow IH = \frac{1}{3}IC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow IS = \sqrt{IH^2 + HS^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$$

Kẻ $CK \perp SI$ mà $CK \perp BO \Rightarrow CK \perp (SBO) \Rightarrow d(C; (SBO)) = CK$

$$\text{Trong tam giác SIC có: } S_{SIC} = \frac{1}{2}SH \cdot IC = \frac{1}{2}SI \cdot CK \Rightarrow CK = \frac{SH \cdot IC}{SI} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(CD, SB) = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 26. ĐÁP ÁN B

Từ giả thiết có tam giác ABC đều cạnh a.

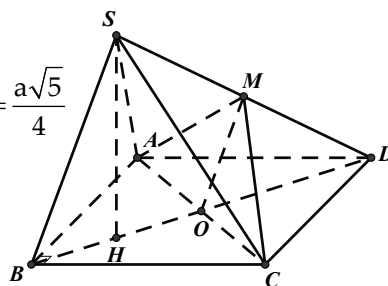
$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow HD = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4}a\sqrt{3}$$

$$SH^2 = SD^2 - HD^2 = 2a^2 - \frac{27a^2}{16} = \frac{5a^2}{16} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$SB^2 = SH^2 + HB^2 = \frac{5a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp OM$$



$$\text{Diện tích tam giác MAC là } S_{MAC} = \frac{1}{2} OM.AC = \frac{1}{4} SB.AC = \frac{1}{4} \frac{a\sqrt{2}}{2} .a = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$$

$$SB // OM \Rightarrow SB // (MAC)$$

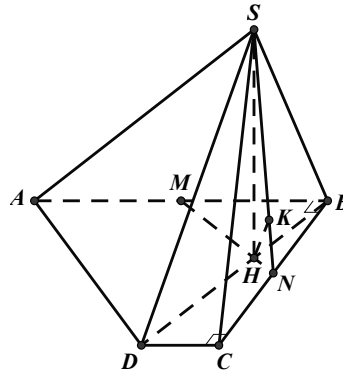
$$\Rightarrow d(SB; CM) = d(SB; (MAC)) = d(S; (MAC)) = d(D; (MAC))$$

$$\begin{aligned} V_{M.ACD} &= \frac{1}{3} d(M; (ABCD)) . S_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S; (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \\ &= \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{96} \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} V_{M.ACD} &= \frac{1}{3} d(D; (MAC)) . S_{MAC} \\ \Rightarrow d(D; (MAC)) &= \frac{3V_{M.ACD}}{S_{MAC}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{15}}{96}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{8}. \end{aligned}$$

Câu 27. ĐÁP ÁN B



$$\text{Gọi } H = MN \cap BI \Rightarrow (SMN) \cap (SBI) = SH$$

Do hai mặt phẳng (SMN) và (SBI) cùng vuông góc với (ABCD) $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Để thấy BH là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng đáy, suy ra $\widehat{SBH} = 60^\circ$.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và BC, mà $AB = 4CD$ nên suy ra $MN \perp BD$ tại H.

$$\text{Xét tam giác BMN ta có: } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Xét tam giác SBH lại có:

$$\tan \widehat{SBH} = \frac{SH}{HB} \Rightarrow SH = HB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Tính khoảng cách giữa SN và BD.

$$\text{Do } \begin{cases} BD \perp SH \\ BD \perp MN \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SMN)$$

Dựng HK vuông góc SN, suy ra HK là đoạn vuông góc chung của SN và BD $\Rightarrow d(BD, SN) = HK$.

$$\text{Xét } \triangle BHN \text{ có: } HN = \sqrt{BN^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Xét } \triangle SHN \text{ ta có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{20}{a^2} + \frac{5}{3a^2} = \frac{65}{3a^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{3}{65}}$$

$$\text{Vậy } d(BD, SN) = a\sqrt{\frac{3}{65}}.$$

Câu 28. ĐÁP ÁN D

Theo giả thiết ta có $BC = AB = a$

Gọi H là trung điểm của AD

$$\Rightarrow HA = HD = a$$

Từ giả thiết $\Rightarrow ABCH$ là hình vuông cạnh a tâm O

$$\Rightarrow \begin{cases} CH = a \\ CO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Trong tam giác ACD có CH là trung tuyến và

$$CH = \frac{1}{2}AD$$

$\Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) $\Rightarrow SK \perp (ABCD)$, SK là đường cao của hình chóp S.ABC.

Hơn nữa các tam giác vuông SKA, SKC và SKD bằng nhau vì SK chung và $SA = SD = SC = 3a \Rightarrow KA = KC = KD$

$\Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD $\Rightarrow K$ trùng với H.

Trong tam giác vuông SHD ta có: $SH^2 = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$

Tứ giác BCDH là hình bình hành (vì $HD \parallel BC$, $HD = BC$) $\Rightarrow CD \parallel BH$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \parallel BH \subset (SBH) \\ CD \not\subset (SBH) \end{cases} \Rightarrow CD \parallel (SBH)$$

Ta có SB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} CD \parallel (SBH) \\ SB \subset (SBH) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SBH)) = d(C, (SBH))$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} CO \perp HB \\ CO \perp SH \end{cases} \Rightarrow CO \perp (SBH) \Rightarrow d(C, (SBH)) = CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

