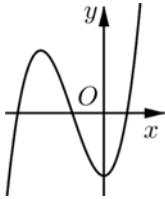


BÀI 6. ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ SỰ TƯƠNG GIAO

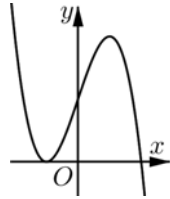
Dạng 1: Dựa vào Đồ thị hàm số

Bài tập 1. Hình dạng có thể có của đồ thị hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$ là những hình nào trong các hình sau đây?



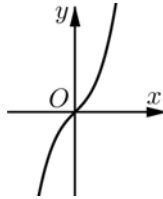
(Hình I)

A. (I).



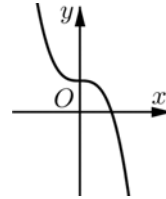
(Hình II)

B. (II).



(Hình III)

B. (I) hoặc (III).



(Hình IV)

D. (II) hoặc (IV).

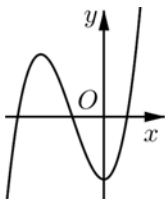
Hướng dẫn giải.

Chọn A.

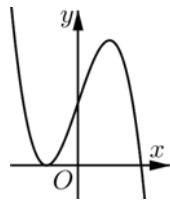
Hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II) và (IV).

Xét $y' = 3x^2 + 2bx - 1$ có $\Delta_{y'} = b^2 + 3 > 0, \forall b \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số có hai cực trị.

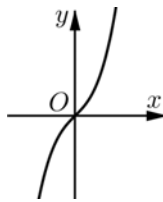
Bài tập 2. Biết rằng hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị là một trong các dạng dưới đây:



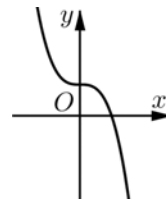
(Hình I)



(Hình II)



(Hình III)



(Hình IV)

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị như (I) có được khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị như (II) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị như (III) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm.

D. Đồ thị như (IV) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm kép.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

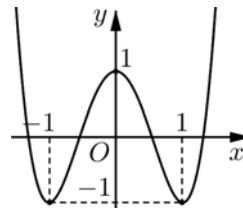
Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính $f(2)$.

A. $f(2) = 15$.

B. $f(2) = 16$.

C. $f(2) = 17$.

D. $f(2) = 18$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $y' = f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1), B(1;-1)$ và đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $B(1;-1)$ nên ta có hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}.$$

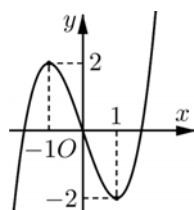
Do đó: $y = f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1 \longrightarrow f(2) = 17.$

Dạng 2: Bảng biến thiên

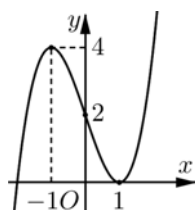
Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

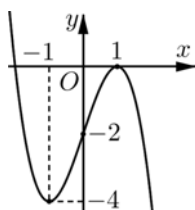
Đồ thị nào trong các phương án A, B, C, D thể hiện hàm số $y = f(x)$?



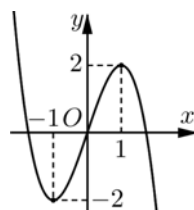
A



B



C



D

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

- Hàm số có giá trị cực đại bằng 2 và giá trị cực tiểu bằng -2. Loại đáp án B và C.
- Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$ nên chỉ có đáp án A là phù hợp.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$a - b + c - 1$	-24	$+\infty$	

Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + 3c$.

A. $P = -9.$

B. $P = -3.$

C. $P = 3.$

D. $P = 9.$

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là -1 và $3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ 27 + 6a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \end{cases}.$

Lại có $f(3) = -24 \longrightarrow 27 + 9a + 3b + c = -24 \longrightarrow c = 3.$

Vậy $P = a + b + 3c = -3.$

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $P = 2$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 0$. (1)

Lại có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$. (2)

Giải hệ (1) và (2), ta được $a = -1, b = 2, c = 1 \longrightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$a+b$	0	-1	$+\infty$

Hiệu $a - b$ bằng

A. -3 .

B. -1 .

C. 1 .

D. 3 .

Hướng dẫn giải.

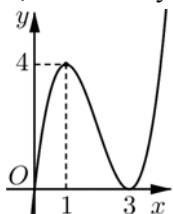
Chọn D.

Đạo hàm $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

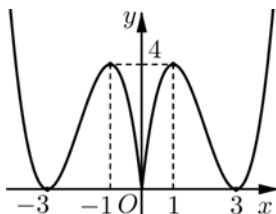
Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2a + b) = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

Dạng 3 : Phép suy đồ thị

Bài tập 1. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong bốn đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

B. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

C. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

D. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

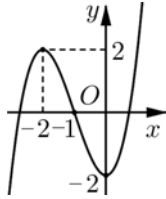
Hướng dẫn giải.

Chọn D.

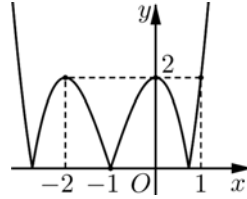
Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \geq 0$.
- Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ ở trên qua trục Oy .

Bài tập 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x|^3 + 3x^2 - 2$.

B. $y = |x^3 + 3x^2 - 2|$.

C. $y = ||x|^3 + 3x^2 - 2|$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.

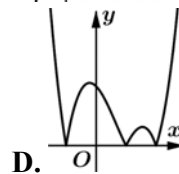
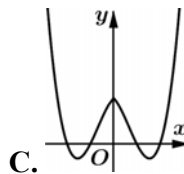
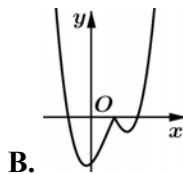
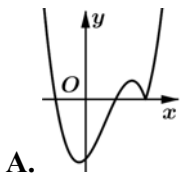
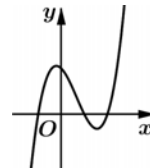
Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y \geq 0$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y < 0$ qua trục Ox .

Bài tập 3. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



Hướng dẫn giải.

Chọn A.

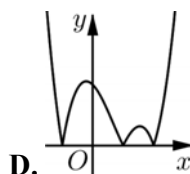
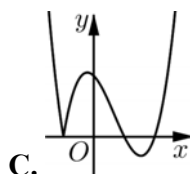
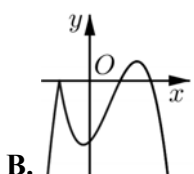
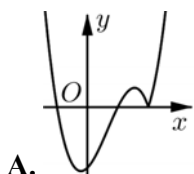
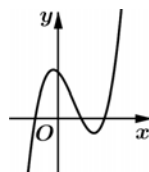
Ta có $y = |x-2|(x^2-1) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1) & \text{ khi } x \geq 2 \\ -(x-2)(x^2-1) & \text{ khi } x < 2 \end{cases}$.

Suy ra đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x \geq 2$ (bên phải đường thẳng $x = 2$).
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x < 2$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được đồ thị hàm số cần tìm.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây trong các đáp án A, B, C, D là đồ thị của hàm số $y = |x+1|(x^2-3x+2)$?



Hướng dẫn giải.

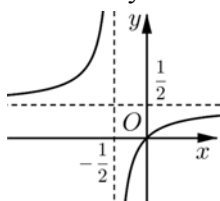
Chọn C.

Ta có $y = |x+1|(x^2-3x+2) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1) & \text{khi } x \geq -1 \\ -(x-2)(x^2-1) & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

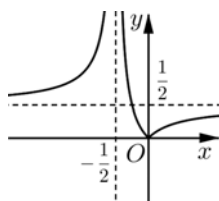
Suy ra đồ thị của hàm số $y = |x+1|(x^2-3x+2)$ giống hoàn toàn phần đồ thị của hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x \geq -1$ (bên phải đường thẳng $x = -1$).

Đối chiếu các đáp án ta

Bài tập 5. Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$.

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$.

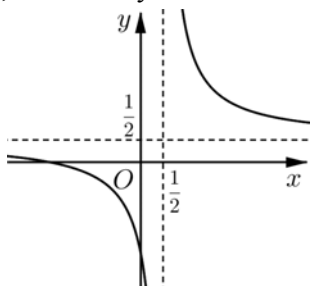
C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$.

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$.

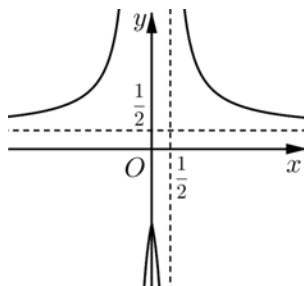
Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = -\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)$. B. $y = \frac{|x|+2}{2|x|-1}$. C. $y = \left|\frac{x+2}{2x-1}\right|$. D. $y = \frac{|x|+2}{2x-1}$.

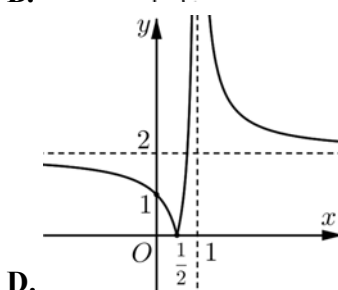
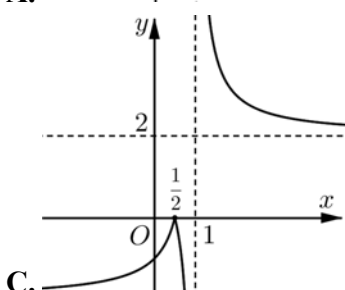
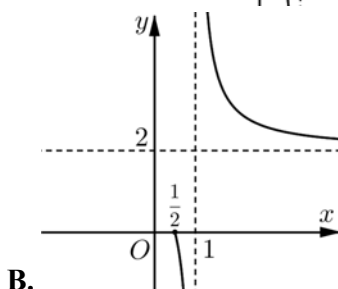
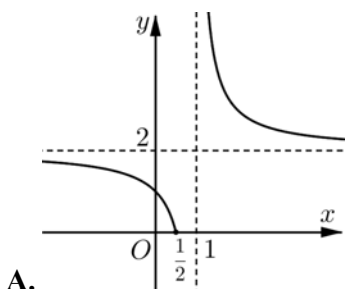
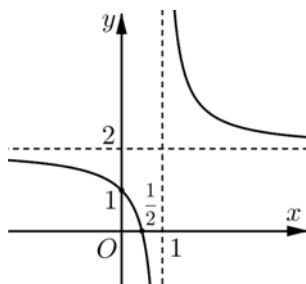
Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Bài tập 7. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị

như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$

có đồ thị là hình nào trong các đáp án sau:



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

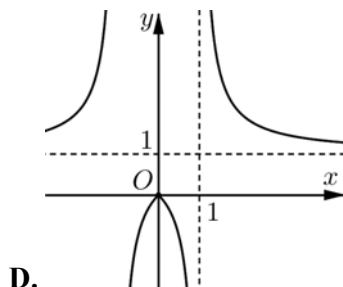
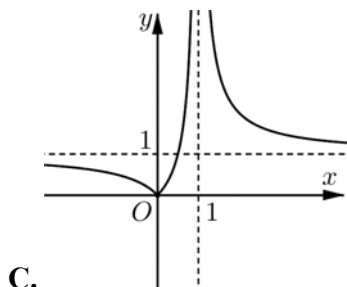
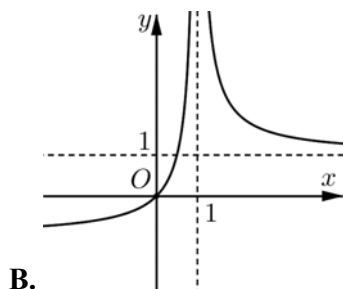
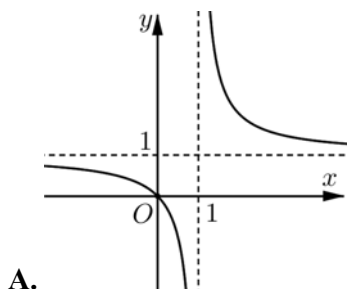
Ta có $y = \frac{|2x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x = \frac{1}{2}$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$.

Bài tập 8. Trong các đồ thị hàm số sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$?



Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ bằng cách:

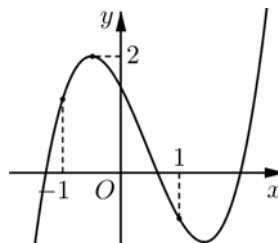
- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x = 1$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x = 1$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$.

Dạng 4: Xác định dấu của các tham số của hàm số dựa vào tính chất đồ thị

Bài tập 1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- B.** $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
- C.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D.** $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

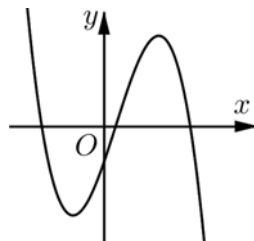
Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $\begin{cases} x_{CT} > 1 \\ -1 < x_{CB} < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_{CB} + x_{CT} > 0 \\ x_{CB} \cdot x_{CT} < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \longrightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \longrightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} c < 0 \end{cases} \text{ . Vậy } a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

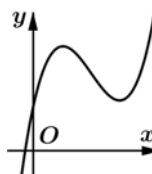


Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $ac > 0, bd < 0$.
- B. $ac > 0, bd > 0$.
- C. $ac < 0, bd < 0$.
- D. $ac < 0, bd > 0$.



Hướng dẫn giải.

Chọn A.

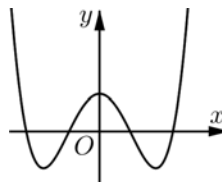
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

- Dễ dàng suy ra $a > 0$ và $d > 0$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đều dương nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt,

suy ra $\frac{c}{3a} > 0$ và $-\frac{2b}{3a} > 0 \xrightarrow{a>0} b < 0$. Vậy $ac > 0, bd < 0$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$.

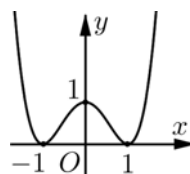
Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0$.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c = 1$.
- B. $a > 0, b < 0, c = 1$.
- C. $a > 0, b > 0, c = 1$.
- D. $a > 0, b > 0, c > 0$.



Hướng dẫn giải.

Chọn B.

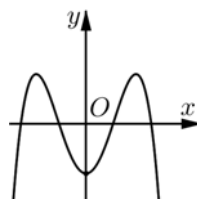
Bài tập 6. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0.$

B. $a < 0, b > 0, c < 0.$

C. $a < 0, b < 0, c > 0.$

D. $a < 0, b < 0, c < 0.$



Hướng dẫn giải.

Chọn B.

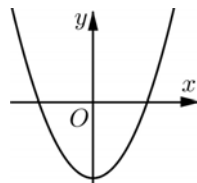
Bài tập 7. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a > 0, b \geq 0, c < 0.$

B. $a > 0, b < 0, c \leq 0.$

C. $a > 0, b \geq 0, c > 0.$

D. $a < 0, b < 0, c < 0.$



Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a > 0$.

Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab \geq 0 \xrightarrow{a > 0} b \geq 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a > 0, b \geq 0, c < 0$.

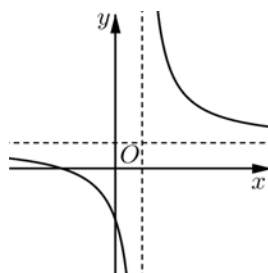
Bài tập 8. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $b > 0, c > 0, d < 0.$

B. $b > 0, c < 0, d < 0.$

C. $b < 0, c < 0, d < 0.$

D. $b < 0, c > 0, d < 0.$



Hướng dẫn giải.

Chọn A.

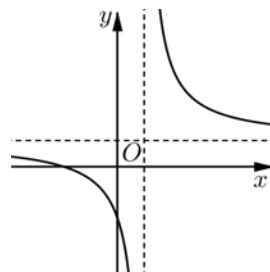
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

• Khi $y = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$. • Khi $x = 0 \rightarrow y = \frac{b}{d} < 0 \xrightarrow{b > 0} d < 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} > 0 \xrightarrow{d < 0} c > 0$.

Vậy $b > 0, c > 0, d < 0$.

Bài tập 99. Hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c - ab > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c - ab = 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.

Hướng dẫn giải.

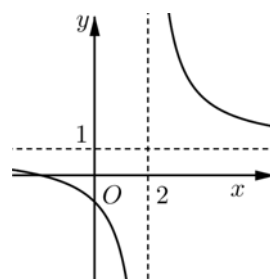
Chọn A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = a > 0$; tiệm cận ngang $y = b > 0$.

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống (từ trái sang phải) nên suy ra đạo hàm

$$y' = \frac{c-ab}{(x-a)^2} < 0, \forall x \neq a \longrightarrow c - ab < 0. \text{ Vậy } a > 0, b > 0, c - ab < 0.$$

Bài tập 10. Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?



- A. $y' < 0, \forall x \neq 1$.
- B. $y' < 0, \forall x \neq 2$.
- C. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
- D. $y' > 0, \forall x \neq 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Suy ra $y' < 0, \forall x \neq 2$.

Dạng 5: Xác định số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$-\infty$	4	-2	4	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2|f(x)| - 7 = 0$ là

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $2|f(x)| - 7 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f(x) = \pm \frac{7}{2}$.

Dựa vào BBT, suy ra $f(x) = \frac{7}{2}$ có 4 nghiệm; $f(x) = -\frac{7}{2}$ có 2 nghiệm.

Cách 2. Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm số $|f(x)|$ như sau

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	0	x_3	1	x_4	$+\infty$
y	$+\infty$	0	4	0	2	0	4	0	$+\infty$

Dựa vào BBT $\longrightarrow 2|f(x)| - 7 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{7}{2}$ có 6 nghiệm.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	2		2		

Gọi m là số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 3$ và n là số nghiệm của phương trình $f(|x|) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m + n = 4$. B. $m + n = 6$. C. $m + n = 7$. D. $m + n = 8$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm số $g(x) = |f(x)|$ như hình bên (trong đó a là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với trục hoành).

Dựa vào BBT $\longrightarrow |f(x)| = 3$ có 3 nghiệm.

x	$-\infty$	a	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	$+$		$-$	0	$+$
$g(x)$			$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$
		2	0		2	

Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm $h(x) = f(|x|)$ như hình bên. Dựa vào BBT $\longrightarrow f(|x|) = 3$ có 4 nghiệm.

Vậy $m + n = 3 + 4 = 7$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$	2	$+\infty$	

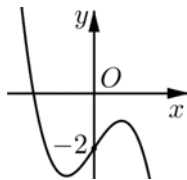
Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



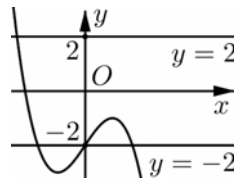
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $[f(x)]^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 & (1) \\ f(x) = -2 & (2) \end{cases}$. Do đó số nghiệm của

phương trình $[f(x)]^2 = 4$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với hai đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: Phương trình (1) có 1 nghiệm; Phương trình (2) có 3 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.



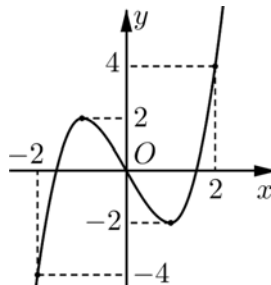
Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên $[-2; 2]$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $|f(x) - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy (1) có 3 nghiệm; (2) có 2 nghiệm.

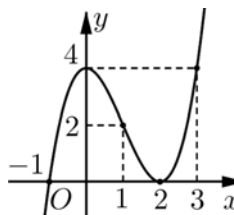
Bài tập 5: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x) - 5f(x) + 4} = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x)-5f(x)+4} = 1 \Leftrightarrow f^3(x)-3f^2(x)+4 = 3f^2(x)-5f(x)+4$

$$\Leftrightarrow f^3(x)-6f^2(x)+5f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 & (1) \\ f(x)=1 & (2) \\ f(x)=5 & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy (1) có 2 nghiệm; (2) có 3 nghiệm; (3) có 1 nghiệm.

Bài tập 6. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

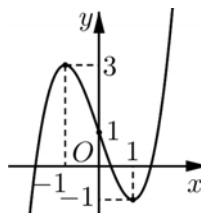
Hỏi phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

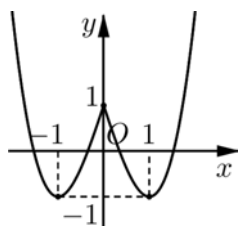


Hướng dẫn giải.

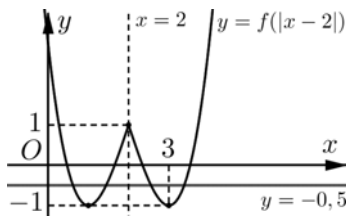
Chọn C.

Đồ thị hàm số $f(|x-2|)$, được suy từ đồ thị $f(x)$ bằng cách:

- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $f(x)$ phía bên phải Oy (xóa phần đồ thị bên trái Oy) qua Oy (xem Hình 1);
- Tịnh tiến đồ thị ở bước trên sang phải 2 đơn vị (xem Hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

Từ đồ thị của hàm số $f(|x-2|)$, suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài tập 7. Cho hàm số $y = (x-1).f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m^2 - m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x-1|.f(x)$ tại hai điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$.

A. $m > 0$.

B. $m < 1$.

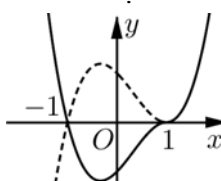
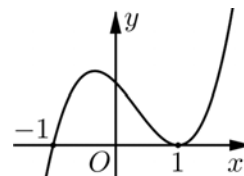
C. $0 < m < 1$.

D. $m > 1$ hoặc $m < 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Từ đồ thị hàm số $y = (x-1).f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $f(x)|x-1|$ như hình bên.



Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $|x-1|.f(x) = m^2 - m$ có hai nghiệm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi

$$m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}.$$

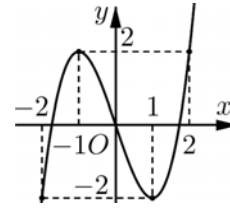
Bài tập 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f[f(x)] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.



Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra phương trình

$$f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \quad (-2 < a < -1) & (1) \\ f(x) = b \quad (0 < b < 1) & (2) \\ f(x) = c \quad (1 < c < 2) & (3) \end{cases}$$

Mỗi phương trình đều có 3 nghiệm.

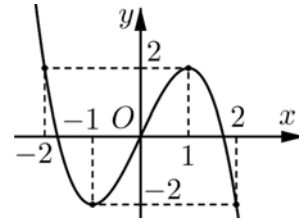
Bài tập 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) = -2$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 9.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra phương trình $f(f(x)) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy (1) có 3 nghiệm; (2) có 2 nghiệm.

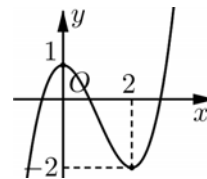
Bài tập 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x^2) + 3 = 0$ là

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.



Hướng dẫn giải.

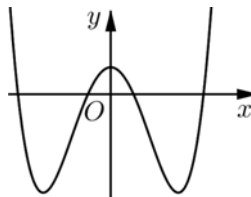
Chọn C.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Khi đó phương trình đã cho trở thành: $f(t) = -\frac{3}{2}$. (*)

Số nghiệm của (*) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$. Dựa vào đồ

thị, phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 < 0 \text{ (loại)} \\ 0 < t_2 < 2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{t_2} \\ t_3 > 2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{t_3} \end{cases}$.

Bài tập 11. Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 + n$ với $m, n \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết phương trình $x^4 + mx^2 + n = 0$ có k nghiệm thực phân biệt, $k \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $k = 2, mn < 0$.

B. $k = 2, mn > 0$.

C. $k = 4, mn < 0$.

D. $k = 4, mn > 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $x^4 + mx^2 + n = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, suy ra $k = 4$.

Do đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $m < 0$, ta thấy hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $n > 0 \rightarrow mn < 0$.

Dạng 6: Biện luận số nghiệm của phương trình

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'			
	—		+
y	2		$+\infty$
		$-\infty$	

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt.

A. $1 < m < \frac{3}{2}$.

B. $1 \leq m < \frac{3}{2}$.

C. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

D. $1 < m < 2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

YCBT $\Leftrightarrow 1 < 2m - 1 < 2 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}$.

Nhận xét: Sai lầm hay gặp là cho $1 \leq 2m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'					
	—		—		—
y		$+\infty$		$+\infty$	
	-3		2		3
	$-\infty$		$-\infty$		

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

A. $m \leq -2$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \leq -2, m \geq 1$.

D. $m < -2, m > 1$.

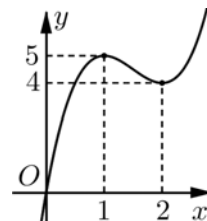
Hướng dẫn giải.

Chọn D.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 > 3 \\ 2m+1 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}.$$

Nhận xét: Nếu yêu cầu bài toán có duy nhất một nghiệm thực $\Leftrightarrow -3 \leq 2m+1 \leq 3$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(|x|) + m = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.



A. $m < -5$.

B.

$-5 < m < -4$.

C. $4 < m < 5$.

D. $m > -4$.

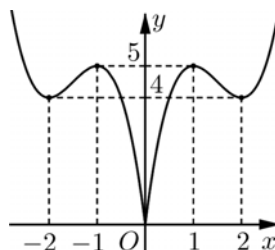
Hướng dẫn giải.

Chọn B.

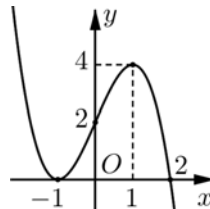
Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.

Ta có $f(|x|) + m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = -m$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 4 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -4$.



Bài tập 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2|f(x)| - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?



A. 3.

B. 4.

C. 7.

D. 8.

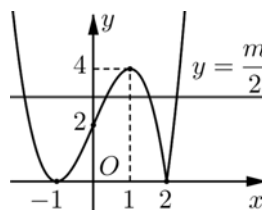
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ.

Ta có $2|f(x)| - m = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{m}{2}$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 0 < \frac{m}{2} < 4 \Leftrightarrow 0 < m < 8$.



Bài tập 5. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $(0; 4)$.

B. $(4; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (4; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Ph trình h đ đ đ: $(x-1)(x^2+mx+m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+mx+m=0 \end{cases} \quad (1)$.

YCBT $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+m.1+m \neq 0 \\ \Delta=m^2-4m > 0 \end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

- Nếu nhẩm được một nghiệm x_0 thì phương trình tương đương $\begin{cases} x=x_0 \\ ax^2+b'x+c'=0 \end{cases}$.
- Cô lập tham số m và lập bảng biến thiên hoặc dùng đồ thị.
- Nếu không nhẩm được nghiệm và không cô lập được m thì bài toán được giải quyết theo hướng tích hai cực trị, cụ thể:
 - Đồ thị cắt trục hoành đúng ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$.
 - Đồ thị có hai điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} = 0$.
 - Đồ thị có một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$ hoặc hàm số không có cực trị.

Chú ý: Nếu $y'=3ax^2+2bx+c=0$ nhẩm được hai nghiệm thì tính y_{CD}, y_{CT} dễ dàng. Trường hợp không nhẩm được nghiệm thì dùng mối liên hệ hai nghiệm đó là hệ thức Viet.

Bài tập 6. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt là

A. $(-4;0)$.

B. $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-4)$.

D. $(-\infty;-4) \cup (0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải.**Chọn A.**

Xét hàm bậc ba $y=x^3-3x^2$, có

$$y'=3x^2-6x \longrightarrow y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow y_{CD}=0 \\ x=2 \longrightarrow y_{CT}=-4 \end{cases}.$$

Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có YCBT $\Leftrightarrow y_{CT} < m < y_{CD} \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Bài tập 7. Cho phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m=-\frac{1}{2}, m=-1$.

B. $m=-\frac{1}{2}, m=-\frac{5}{2}$.

C. $m=\frac{1}{2}, m=\frac{5}{2}$.

D. $m=1, m=-\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải.**Chọn A.**

Xét hàm bậc ba $f(x)=2x^3-3x^2$, có

$$f'(x)=6x^2-6x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow y_{CD}=0 \\ x=1 \longrightarrow y_{CT}=-1 \end{cases}.$$

Dựa vào dấu hiệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = y_{\text{CD}} \\ 2m+1 = y_{\text{CT}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = 0 \\ 2m+1 = -1 \end{cases}$.

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $m \neq 0$. B. $m > 0$. C. $m \neq 3$. D. $m > 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Ta có $y' = 3x^2 - 2mx = x(3x - 2m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2m}{3} \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị và hai giá trị cực trị trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{3} \neq 0 \\ y(0) \cdot y\left(\frac{2m}{3}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 \cdot \left(\frac{-4m^3}{27} + 4\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Bài tập 9. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có đúng hai điểm chung với trục hoành.

- A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = \sqrt[3]{2}$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. D. $m = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow$ hàm số có hai điểm cực trị và tích hai cực trị bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ y(0) \cdot y(2m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2 \cdot (-4m^3 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Bài tập 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3mx + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m \leq 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với:

- **TH1.** Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow m \leq 0$.
- **TH2.** Hàm số có hai cực trị $y_{\text{CD}}, y_{\text{CT}}$ thỏa mãn $y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ y(-\sqrt{m}) \cdot y(\sqrt{m}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2 + 2m\sqrt{m})(2 - 2m\sqrt{m}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m < 1$.

Bài tập 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-1)+1$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt $A(1;1)$, B , C .

- A.** $m \neq 0$. **B.** $m < \frac{9}{4}$. **C.** $0 \neq m < \frac{9}{4}$. **D.** $m = 0, m > \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ph trình h đ đ: $-x^3 + 3x - 1 = m(x-1)+1$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x - 2 + m = 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Bài tập 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

- A.** $m > -3$. **B.** $m = -3$. **C.** $m > -2$. **D.** $m = -2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

$$\text{Ph trình h đ đ: } x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Để } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

$$\text{Giả sử } x_1 = 1. \text{ Khi đó } x_2, x_3 \text{ là hai nghiệm của } (*). \text{ Theo Viet, ta có: } \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 x_3 = -m - 2 \end{cases}$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = 4 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2 x_3 = 4 \Leftrightarrow 4 + 2(m+2) = 4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Bài tập 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B , C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4, với $M(1;3)$.

- A.** $m = 3$. **B.** $m = 2, m = 3$. **C.** $m = -2, m = -3$. **D.** $m = -2, m = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

$$\text{Ph trình h đ đ: } x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{cases} (*)$$

Để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -2 \neq m < -1 \end{cases}$$

$$\text{Gọi } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của } (*). \text{ Theo định lí Viet, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Giải sử } B(x_1; x_1 + 4), C(x_2; x_2 + 4). \text{ Ta có } BC = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} \text{ và } d[M, d] = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{YCBT: } S_{\triangle MBC} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(M, d)BC = 4 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 (\text{thỏa mãn}) \\ m = -2 (\text{loại}) \end{cases}.$$

Bài tập 14. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$ là

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(-\infty; 3)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

$$\text{Phản trình hệ: } x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (m - 2) > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2$.

Giả sử $x_2 > 1$ thì $x_1 = 2 - x_2 < 1$, suy ra $x_1 < 1 < x_2$.

Theo giả thiết $BA = BC$ nên B là trung điểm của AC do đó $x_B = 1$ và $x_A = x_1, x_C = x_2$. Khi đó ta có $x_A + x_C = 2x_B$ nên d luôn cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn $AB = BC$. Vậy với $m < 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- A.** $m = 1$. **B.** $m = 2, m = -1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

$$\text{Ta có } ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \xrightarrow{\text{Viet}} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \xrightarrow{x_1 + x_3 = 2x_2} x_2 = -\frac{b}{3a}.$$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8 = 0. (*)$$

Từ giả thiết suy ra phương trình (*) có một nghiệm $x = m$.

$$\text{Thay } x = m \text{ vào phương trình } (*), \text{ ta được } m^3 - 3m \cdot m^2 + 6m \cdot m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Thử lại: } \bullet \text{ Với } m = -1, \text{ ta được } x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 : \text{ thỏa mãn.} \\ x = 2 \end{cases}$$

• Với $m = 2$, ta được $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: không thỏa mãn.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài tập 16. Với điều kiện nào của tham số k thì phương trình $4x^2(1 - x^2) = 1 - k$ có bốn nghiệm phân biệt?

- A.** $0 < k < 2$. **B.** $k < 3$. **C.** $-1 < k < 1$. **D.** $0 < k < 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Xét hàm trùng phương $y = 4x^2(1-x^2) = -4x^4 + 4x^2$, có

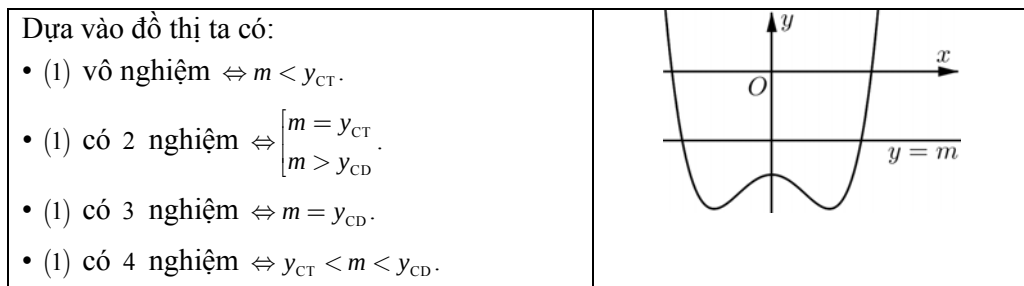
$$y' = -16x^3 + 8x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y(0) = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \end{cases}.$$

YCBT $\Leftrightarrow y_{CT} < 1 - k < y_{CD} \Leftrightarrow 0 < 1 - k < 1 \Leftrightarrow 0 < k < 1$.

Biện luận số nghiệm của phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$ ($a > 0, b < 0$). (1)

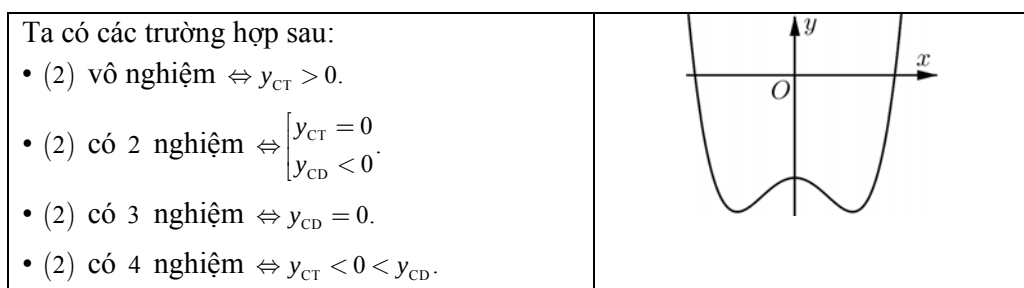
Cách 1. Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ và đường thẳng $y = m$ (có phương song song với trục hoành)

Do hệ số $a > 0, b < 0$ nên đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng như sau:



Cách 2. Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m \longleftrightarrow ax^4 + bx^2 + c - m = 0$. (2)

Do hệ số $a > 0, b < 0$ nên đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c - m$ có dạng như sau:



Bài tập 17. Cho hàm số $y = x^4 - m(m+1)x^2 + m^3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

- A.** $m > 1$. **B.** $m > -\sqrt{2}$. **C.** $m > \sqrt{2}$. **D.** $0 < m \neq 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Xét hàm trùng phương $y = x^4 - m(m+1)x^2 + m^3$, có

$$y' = 4x^3 - 2m(m+1)x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y = m^3 \\ x^2 = \frac{m(m+1)}{2} \longrightarrow y = -\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 \end{cases}.$$

YCBT $\Leftrightarrow$ hàm số có ba điểm cực trị và $y_{CT} < 0 < y_{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m(m+1)}{2} > 0 \\ -\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 < 0 < m^3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 1.$$

Bài tập 18. Cho hàm số $y = -x^4 + 2(2+m)x^2 - 4 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Xét hàm trùng phương $y = -x^4 + 2(2+m)x^2 - 4 - m$, có

$$y' = -4x^3 + 4(2+m)x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2+m \end{cases}.$$

Dựa vào dấu hiệu của hàm trùng phương với hệ số của x^4 âm, ta có các trường hợp sau thỏa mãn yêu cầu bài toán:

• Hàm số có một cực trị và cực trị đó âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq 0 \\ -4-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -2.$

• Hàm số có ba điểm cực trị và giá trị cực đại âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ y(\pm\sqrt{2+m}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ m^2 + 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m < 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-3; -2; -1\}.$

Bài tập 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

- A. $0 < m < 1.$ B. $m < -2, m > 5.$ C. $1 < m < \frac{3}{2}.$ D. $0 < m < \frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-3}{x+1} = x - 2m \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow x - 3 = (x - 2m)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0. \quad (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$

Bài tập 20. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc m . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

- A. $m < 0.$ B. $m \neq 0.$ C. $m > 0.$ D. $0 < m \neq 1.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Đường thẳng d có dạng $y = m(x - 1) = mx - m.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+2}{x-1} = mx - m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow x + 2 = (mx - m)(x - 1) \Leftrightarrow \underbrace{mx^2 - (2m+1)x + m - 2}_{g(x)} = 0. \quad (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ mg(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m[m - (2m+1) + m - 2] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Bài tập 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số

$y = \frac{-2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

A. $\begin{cases} m = -7 \\ m = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = -7 \\ m = 5 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-2x+1}{x+1} = -x + m \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow -2x+1 = (-x+m)(x+1) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 - 4(1-m) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 + 2\sqrt{3} \\ m < -3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = 1-m \end{cases}$. Giả sử $A(x_1; -x_1 + m)$ và $B(x_2; -x_2 + m)$.

$$\text{YCBT: } AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài tập 22. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$

(C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m = -3$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x}{x-1} = x - m + 2 \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x = (x - m + 2)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0. \quad (*)$$

Ta có $\Delta = m^2 - 2m + 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 - m + 2)$ và $B(x_2; x_2 - m + 2)$ là tọa độ giao điểm của d và (C).

$$\text{Ta có } AB^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 2(m+1)^2 - 8(m-2) = 2(m-1)^2 + 16 \geq 16.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$.

Bài tập 23. Tìm giá trị thực của tham số k sao cho đường thẳng $d: y = x + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là bằng nhau.

- A. $k = -4$. B. $k = -3$. C. $k = -1$. D. $k = -2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = x + 2k + 1 \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x + 2k + 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2k = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = k^2 - 2k > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k > 2 \\ k < 0 \end{cases}.$$

Gọi $x_1 \neq x_2$ là hai nghiệm của (*). Giả sử $A(x_1; x_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; x_2 + 2k + 1)$.

$$\text{YCBT: } d[A, Ox] = d[B, Ox] \Leftrightarrow |x_1 + 2k + 1| = |x_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2k + 1 = -(x_2 + 2k + 1) \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4k - 2 \Leftrightarrow -2k = -4k - 2 \Leftrightarrow k = -1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài tập 24. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -2$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x-1} = x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = (x + m)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 + (m - 3)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 + m)$ và $B(x_2; x_2 + m)$.

$$\text{YCBT } \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - m) + m(3 - m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Bài tập 25. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -2$. B. $m = 0$. C. $m = -\frac{1}{5}$. D. $m = -\frac{11}{5}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1} = -3x+m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (-3x+m)(x-1) \Leftrightarrow 3x^2 - (1+m)x + m+1 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 10m - 11 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{1+m}{3}$ và $x_1 x_2 = \frac{m+1}{3}$.

Giả sử $A(x_1; -3x_1+m)$ và $B(x_2; -3x_2+m)$. Suy ra $G\left(\frac{x_1+x_2}{3}; \frac{-3(x_1+x_2)+2m}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{YCBT: } G \in \Delta &\longrightarrow \frac{x_1+x_2}{3} - 2 \cdot \frac{-3(x_1+x_2)+2m}{3} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1+m}{9} - 2 \cdot \frac{-(m+1)+2m}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5} \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $4S_{\Delta IAB} = 15$, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị.

A. $m = -5$.

B. $m = 5$.

C. $m = \pm 5$.

D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-4}{x-1} = 2x+m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x-4 = (2x+m)(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m-4)x - m+4 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{4-m}{2}$ và $x_1 x_2 = \frac{4-m}{2}$.

Giả sử $A(x_1; 2x_1+m)$ và $B(x_2; 2x_2+m)$.

$$\text{YCBT: } 4S_{IAB} = 15 \Leftrightarrow 2AB \cdot d[I, AB] = 15 \Leftrightarrow 2AB \cdot \frac{|m|}{\sqrt{5}} = 15 \Leftrightarrow 4AB^2 \cdot m^2 = 1125$$

$$\Leftrightarrow 20(x_1 - x_2)^2 m^2 = 1125 \Leftrightarrow 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] m^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 16)m^2 = 225 \Leftrightarrow m^2 = 25 \Leftrightarrow m = \pm 5 \text{ (thỏa mãn)}.$$