

Chương 8

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

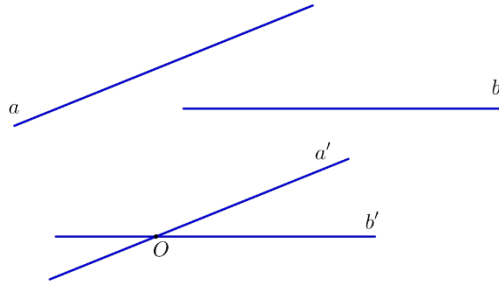
Bài 1 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Góc giữa hai đường thẳng.

Định nghĩa:

- Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian, kí hiệu (a, b) , là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b .



❖ Chú ý:

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng a, b ta có thể lấy một điểm O nằm trên một trong hai đường thẳng đó và vẽ đường thẳng song song với đường thẳng còn lại.
- Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ 0° đến 90° .
- Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.
- Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .

II. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian.

Định nghĩa:

- Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

❖ **Chú ý:**

- a) Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
- b) Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- c) Trong không gian, khi có hai đường thẳng phân biệt a, b cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba c thì chưa kết luận được $a // b$ như trong hình học phẳng.
- d) Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:

GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp:

+ **Cách 1:** Nắm vững khái niệm cơ bản. Dùng định nghĩa.

+ **Cách 2:** Dùng định lí Cosin cho tam giác thường.

+ **Cách 3:** Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD :

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}.$$

Thông thường ta phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ theo ba

vectơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

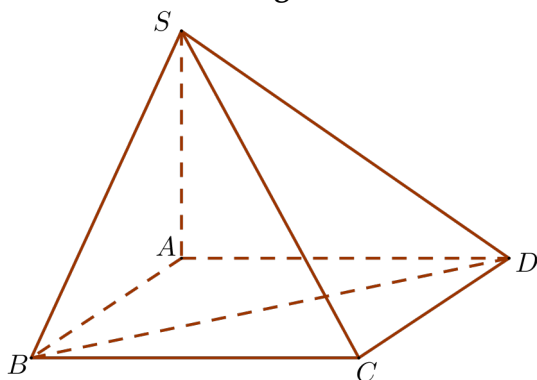
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết

$SA = a\sqrt{3}, SA \perp AB, SA \perp AD$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) SB và CD .

b) SB và SD .

Lời giải



a) Tính góc giữa SB và CD .

Ta có: $CD \parallel AB \Rightarrow (SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

$$(SB, CD) = \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

b) Tính góc giữa SB và SD .

$$\text{Ta có: } SB^2 = SA^2 + AB^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = 4a^2$$

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = 4a^2$$

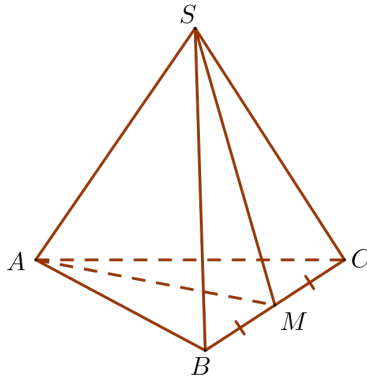
$$\text{Và } BD = a\sqrt{2}$$

$$\cos \widehat{BSD} = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2 \cdot SB \cdot SD} = \frac{4a^2 + 4a^2 - 2a^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a} = \frac{3}{4}$$

$$(SB, SD) = \widehat{BSD} = \arccos \frac{3}{4}.$$

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính góc giữa AM và SM .

Lời giải



$$\text{Ta có: } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \widehat{SMA} = \frac{SM^2 + AM^2 - AS^2}{2 \cdot SM \cdot AM} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$(SM, AM) = \widehat{SMA} = \arccos \frac{1}{3}.$$

DẠNG 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Phương pháp:

+ **Cách 1:** Dùng định nghĩa.

+ **Cách 2:** $d \perp (P) \supset a \Rightarrow d \perp a$.

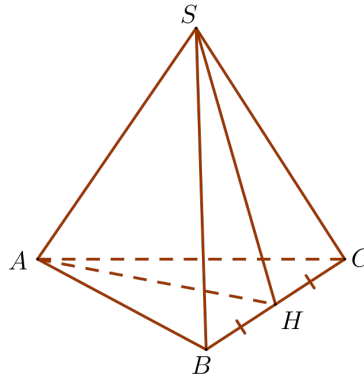
+ **Cách 3:** Nắm vững khái niệm phương, hướng của 2 vector.

Muốn chứng minh $AB \perp CD$. Ta chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Thông thường ta phân tích hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ theo ba vector không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

Lời giải



Cách 1:

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AS} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = AS \cdot AC \cdot \cos \widehat{SAC} - AS \cdot AB \cdot \cos \widehat{SAB} = 0$$

Do đó số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 90° .

Cách 2: Vì $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ nên $\triangle SAC = \triangle SAB$, suy ra $SB = SC$, nên hai tam giác ABC và SBC là tam giác cân. Gọi H là trung điểm BC , ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{array} \right. \Rightarrow (SAH) \perp BC \text{ nên } SA \perp BC \Rightarrow (SA, BC) = 90^\circ.$$

Do đó số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 90° .

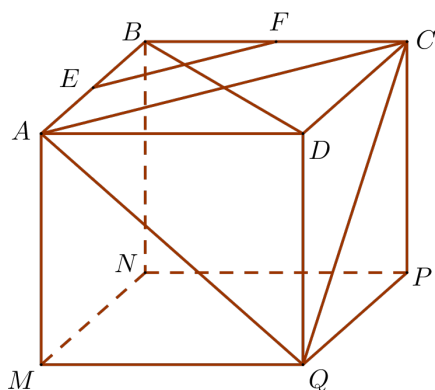
Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ có sáu mặt đều là các hình vuông.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

a) Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

b) Tính góc giữa EF và AQ .

Lời giải



a) Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

Ta thấy: EF là đường trung bình của $\triangle ABC$
 $\Rightarrow EF \parallel AC$.

Mà: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp AA' \end{cases}$ nên $EF \perp BD, EF \perp AM$

b) Tính góc giữa EF và AQ .

Ta có: $EF \parallel AC \Rightarrow (EF, AQ) = (AC, AQ) = \widehat{CAQ}$.

Nhận thấy: $AC = AQ = CQ = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \triangle ACQ$ đều $\widehat{CAQ} = 60^\circ$.

$\Rightarrow (EF, AQ) = \widehat{CAQ} = 60^\circ$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh có độ dài bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.

a) Chứng minh: $BO \perp CD$.

b) Gọi M là trung điểm của CD . Tính góc giữa AC và BM .

Bài 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC .

a) Chứng minh: $MN \perp CD$.

b) Tính góc giữa MC và MD .

c) Gọi E là trung điểm của AC . Chứng minh: $QE \perp PE$.

d) Chứng minh: $AB \perp CD$.

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh: $SA \perp SC$.

b) Gọi P là trung điểm của AC , N là trung điểm của SB . Chứng minh: $SP \perp SB$.

c) Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, $SA \perp AB$, $SA \perp AD$ và $SA = 2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AB và N là trung điểm BC .

a) Tính góc giữa SD và BC .

b) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM và DN .

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, $SA \perp AC$ và $SA = 2a$.

a) Chứng minh: $SA \perp BC$, $SA \perp CD$.

b) Gọi I là trung điểm của CD . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI .

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2BC = 2a$ và $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, $SA \perp AC$. Biết rằng $\widehat{SCA} = 60^\circ$.

a) Chứng minh: $SA \perp BC$.

b) Tính góc giữa BC và SD .

c) Gọi I là trung điểm của CD . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AI và SD .

Bài 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp BC$, $AB \perp BD$. Biết tam giác BCD

vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CE .

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC . Tính số đo của góc hợp bởi IJ và SB .

Bài 9: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' .

Bài 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, C'D'$.

a) Chứng minh: $MN \perp B'D'$.

b) Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A) Thiết diện là hình chữ nhật. B) Thiết diện là hình vuông.
 C) Thiết diện là hình bình hành. D) Thiết diện là hình thang.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
 B) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.
 C) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
 D) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 3: Trong không gian cho 3 đường thẳng phân biệt a, b, c . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A) Nếu $a // b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.
 B) Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a // b$.
 C) Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a // b$.
 D) Nếu a và b cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha) // c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c .

Câu 4: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A) Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.
 B) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
 C) Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.
 D) Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$ hay $b \subset (P)$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

- A) 45° . B) 90° . C) 120° . D) 60° .

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA', CD bằng

- A) 90° . B) 60° . C) 30° . D) 45° .

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp AD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và CD . Góc giữa PQ và AB là?

- A) 90° . B) 60° . C) 30° . D) 45° .

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **sai**?

- A) Góc giữa AC và B_1D_1 bằng 90° .
B) Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60° .
C) Góc giữa AD và B_1C bằng 45° .
D) Góc giữa BD và A_1C_1 bằng 90° .

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc (IE, JF) bằng

- A) 30° . B) 45° . C) 60° . D) 90° .

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 là

- A) 45° . B) 90° . C) 60° . D) 120° .

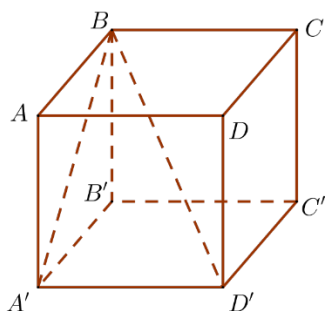
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều, có $SA = AB = a$. Góc giữa SA và CD là

- A) 60° . B) 30° . C) 90° . D) 45° .

Câu 12: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ có cạnh bằng a , chiều cao bằng $2a$. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF .

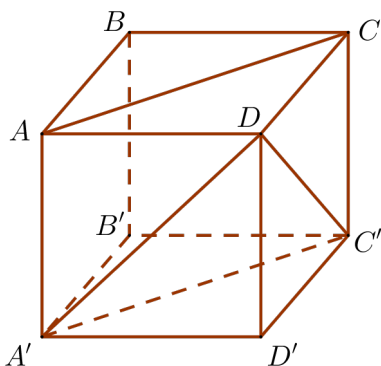
- A) $\frac{\sqrt{5}}{10}$. B) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D) $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AD và BD' là



- A) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là



- A) 45° . B) 30° . C) 60° . D) 90° .

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:

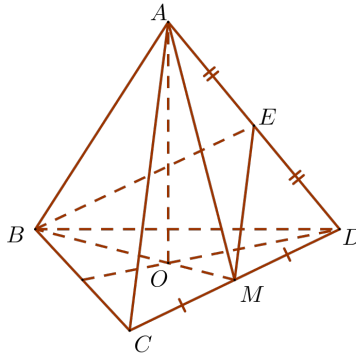
- A) 45° . B) 30° . C) 90° . D) 60° .

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:



a) Chứng minh: $AO \perp CD$.

$$\begin{cases} BC = BD \\ OC = OD \end{cases} \Rightarrow BO \perp CD$$

b) Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc giữa AC và BM.

Gọi E là trung điểm của AD

$\Rightarrow ME$ là đường trung bình của $\triangle ACD$

$$\Rightarrow ME \parallel AC, ME = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}.$$

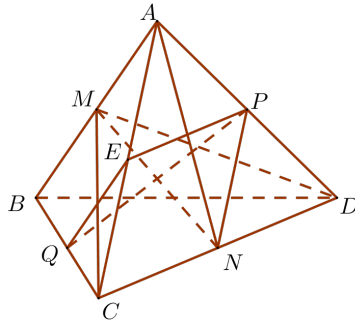
Ta có: $(AC, BM) = (ME, BM) = \widehat{BME}$.

$$\text{Với: } BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \cos \widehat{BME} = \frac{BM^2 + ME^2 - BE^2}{2BM \cdot ME} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow (AC, BM) = \widehat{BME} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 73^\circ.$$

Bài 2:



a) Chứng minh: $MN \perp CD$.

Ta có: $MC = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle MCD$ cân tại M .

Mà: N là trung điểm của CD

Nên: $MN \perp CD$.

b) Tính cosin góc giữa MC và MD .

Ta có: $\cos(\widehat{MC, MD}) = \cos \widehat{CMD} = \frac{MC^2 + MD^2 - CD^2}{2MC \cdot MD}$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{MC, MD}) = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

c) Gọi E là trung điểm của AC . Chứng minh: $QE \perp PE$.

Tương tự câu a, ta có $QP \perp AD$.

$$PQ^2 = QD^2 - PD^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Ta thấy: PE, QE lần lượt là đường trung bình của $\triangle ABC$ và $\triangle ACD$.

$$\text{Nên: } QE = PE = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } QE^2 + PE^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} = PQ^2.$$

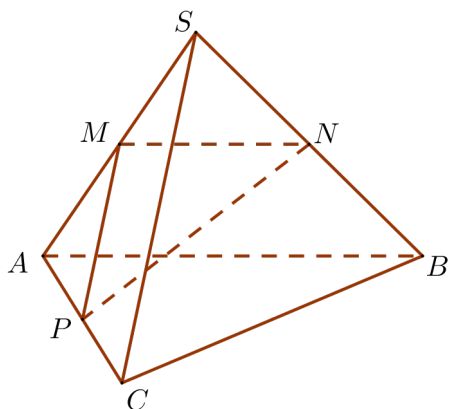
$\Rightarrow \triangle PQE$ vuông tại E .

Hay: $PE \perp QE$.

d) Chứng minh: $AB \perp CD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \parallel QE \\ CD \parallel PE \Rightarrow AB \perp CD. \\ PE \perp QE \end{cases}$$

Bài 3:



a) Chứng minh: $SA \perp SC$.

Ta có:
$$\begin{cases} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow SA^2 + SC^2 = AC^2 (= 2a^2)$$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S .

b) Gọi P là trung điểm của AC , N là trung điểm của SB . Chứng minh: $SP \perp BP$.

Ta có: ΔSAC vuông tại S và P là trung điểm của AC

$$\Rightarrow SP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có:
$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2 \\ BC^2 = (a\sqrt{3})^2 = 3a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 (= 3a^2)$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

Xét ΔABP vuông tại A , ta có:

$$BP^2 = AB^2 + AP^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SB^2 + SP^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2 \\ BP^2 = \frac{3}{2}a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow SB^2 + SP^2 = BP^2 \left(= \frac{3}{2}a^2 \right)$$

$\Rightarrow \Delta SBP$ vuông tại $S \Rightarrow SP \perp SB$.

c) Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

Gọi M là trung điểm của SA

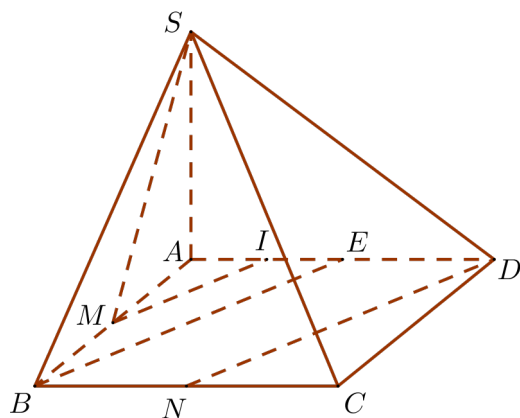
$$\text{Suy ra: } \begin{cases} MP \parallel SC, MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2} \\ MN \parallel AB, MP = \frac{1}{2}SC = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Ta có: $(SC, AB) = (MP, MN)$.

$$\text{Xét } \Delta MNP, \text{ ta có: } \cos \widehat{NMP} = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN \cdot MP} = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{NMP} = 120^\circ \text{ hay } (SC, AB) = (MP, MN) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Bài 4:



a) Tính góc giữa SD và BC .

Ta có: $BC \parallel AD \Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA}$.

Xét ΔSAD vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{2a\sqrt{3}}{2a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ.$$

b) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM và DN .

Gọi E là trung điểm của AD và I là trung điểm AE .

Dễ thấy tứ giác $BNDE$ là hình bình hành và MI là đường trung bình của $\triangle ABE$.

Khi đó $DN // BE // MI$.

Ta có: $AM = a$ và $AI = \frac{AE}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét $\triangle SAM$ vuông tại A , ta có:

$$SM^2 = SA^2 + AM^2 = (2a\sqrt{3})^2 + a^2 = 13a^2.$$

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A , ta có:

$$SI^2 = SA^2 + AI^2 = (2a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}a^2.$$

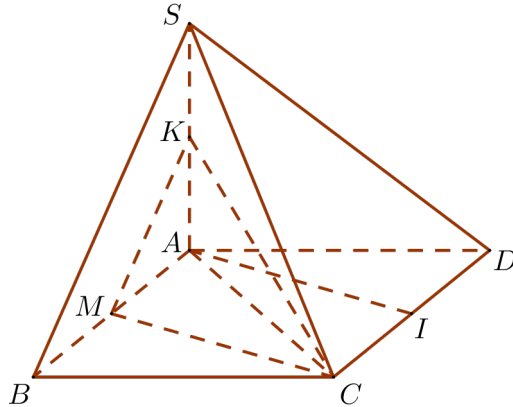
Xét $\triangle AMI$ vuông tại A , ta có:

$$MI^2 = AI^2 + AM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Xét $\triangle SMI$, ta có:

$$\cos \widehat{SMI} = \frac{SM^2 + MI^2 - SI^2}{2 \cdot SM \cdot MI} = \frac{13a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{49}{4}a^2}{2 \cdot \sqrt{13a^2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}a^2}} = \frac{2}{\sqrt{65}}.$$

Bài 5:



a) Chứng minh: $SA \perp BC$, $SA \perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AD \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow SA \perp CD.$

b) Gọi I là trung điểm của CD . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI .

Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AB và SA thì MK là đường trung bình của ΔSAB .

Khi đó $MK // SB$.

Ta thấy: Tứ giác $AICM$ là hình bình hành

Nên: $MC // AI$.

Suy ra $(SB, AI) = (MK, CM)$.

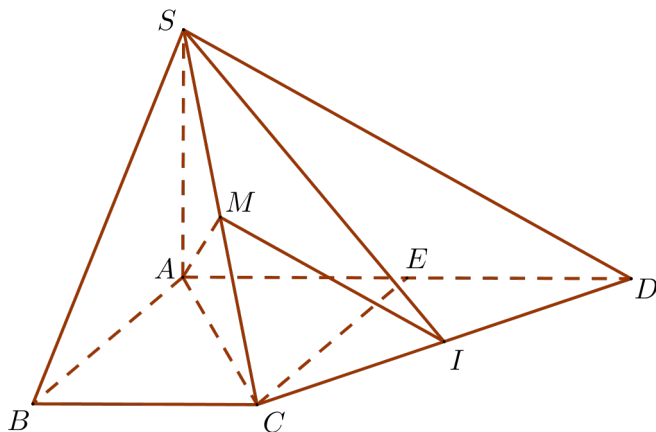
$$\text{Ta có: } MK = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Tương tự: } MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{3a}{2} \text{ và } KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = 2a.$$

$$\text{Khi đó: } \cos \widehat{KMC} = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2 \cdot KM \cdot MC} = \frac{\frac{5}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2 - 4a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3a}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{15}.$$

$$\Rightarrow \cos(SB, AI) = \frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

Bài 6:



a) Chứng minh: $SA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AD \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC.$

b) Tính góc giữa BC và SD .

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

Ta có: $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$.

Do $AD \parallel BC \Rightarrow (BC, SD) = (AD, SD)$.

Ta có: $\tan \widehat{ADS} = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{6}}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow (SD, BC) = \widehat{ADS} = \arctan \frac{\sqrt{6}}{2}$.

c) Gọi I là trung điểm của CD . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AI và SD

Gọi E là trung điểm của AD

Suy ra tứ giác $ABCE$ là hình vuông

Do đó: $CE = AE = DE = a$.

$\Rightarrow \triangle ACD$ vuông cân tại C .

$\Rightarrow AC = CD = a\sqrt{2}$.

Ta có: $AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Gọi M là trung điểm $SC \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SD \\ MI = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \end{cases}$.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A , có AM là đường trung tuyến

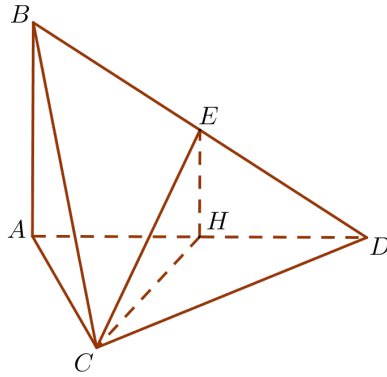
Nên: $AM = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{(a\sqrt{6})^2 + (a\sqrt{2})^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Ta có: $MI \parallel SD \Rightarrow (SD, AI) = (SD, MI) = \widehat{MIA}$

Mà: $\cos \widehat{MIA} = \frac{IA^2 + IM^2 - AM^2}{2 \cdot IA \cdot IM} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{3}{5}$.

Vậy: $\cos(SD, AI) = \frac{3}{5}$.

Bài 7:



Gọi H là trung điểm $BD \Rightarrow \begin{cases} EH // AB \\ EH = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow CH = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Ta có: $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = a\sqrt{3}$.

Ta thấy: $AD^2 = CA^2 + CD^2 (= 3a^2) \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C .

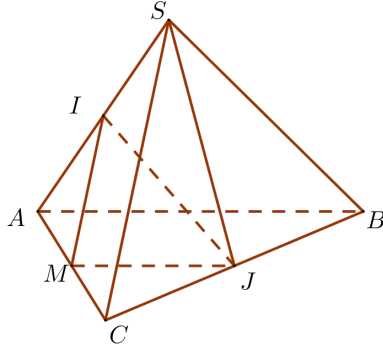
Mà CE là đường trung tuyến. Nên $CE = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $EH // AB \Rightarrow (AB, CE) = (EH, CE) = \widehat{HEC}$.

Mà: $\cos \widehat{HEC} = \frac{CE^2 + EH^2 - CH^2}{2 \cdot CE \cdot EH} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow (AB, CE) = \widehat{HEC} = 45^\circ$.

Bài 8:



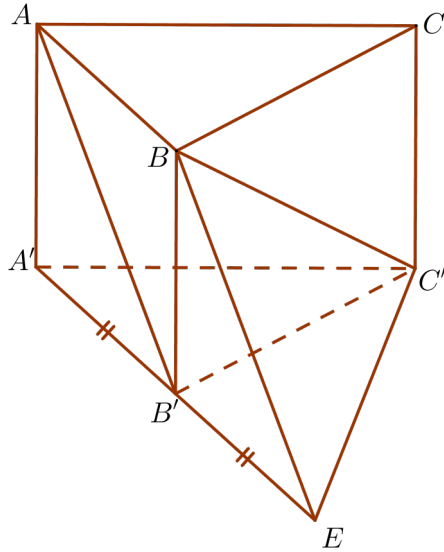
Gọi M là trung điểm AB thì MI, MJ lần lượt là đường trung bình của tam giác ASC và ABC .

Ta có: $MI = MJ = \frac{a}{2}$.

Mặt khác $JA = JS = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ tam giác JSA cân tại $J \Rightarrow JI \perp SA$

Khi đó $IJ = \sqrt{SJ^2 - SI^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MI^2 + MJ^2 = IJ^2$ nên tam giác MIJ vuông cân tại $M \Rightarrow (IJ; SB) = (IJ; IM) = 45^\circ$.

Bài 9:



Gọi E là điểm đối xứng của A' qua B' ta có $B'A' = B'E$.

Ta có $ABEB'$ là hình bình hành nên $AB' \parallel BE$.

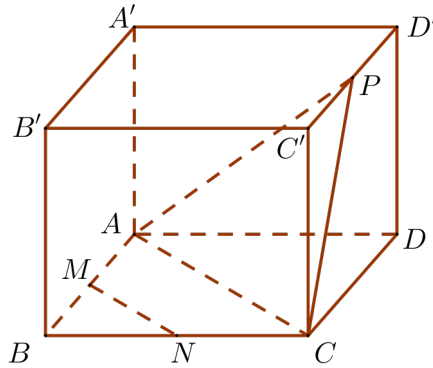
Lại có $A'E = 2a$, $B'C' = \frac{1}{2}A'E \Rightarrow \triangle EA'C'$ vuông tại C' .

Khi đó $C'E = \sqrt{A'E^2 - A'C'^2} = a\sqrt{3}$, $BE = AB' = a\sqrt{3}$.

$BC' = \sqrt{BB'^2 + C'B'^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \triangle BEC'$ là tam giác đều.

Do đó $(AB', BC') = (BE; BC') = \widehat{EBC'} = 60^\circ$.

Bài 10:



a) Chứng minh: $MN \perp B'D'$.

Dễ thấy MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$.

Mà $\begin{cases} AC \perp BD \\ BD \parallel B'D' \end{cases}$, nên $MN \perp B'D'$.

b) Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP .

Ta thấy MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN \parallel AC$.

$\Rightarrow (MN, AP) = (AC, AP) = \widehat{CAP}$.

Lại có $AC = a\sqrt{2}$ và $CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$AP = \sqrt{A'P^2 + AA'^2} = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2 + AA'^2} = \frac{3a}{2}$.

Do đó $\cos \widehat{CAP} = \frac{AP^2 + AC^2 - CP^2}{2 \cdot AP \cdot AC} = \frac{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

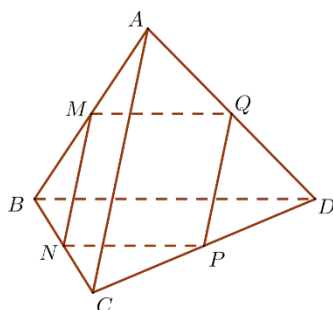
$\Rightarrow (MN, AP) = \widehat{CAP} = 45^\circ$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.A	2.D	3.A	4.B	5.B	6.D	7.A	8.B	9.D	10.C
11.A	12.A	13.D	14.B	15.C					

Câu 1: Chọn A.



Giả sử thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $AC \perp BD \Rightarrow MQ \perp PQ$

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 2: Chọn D.

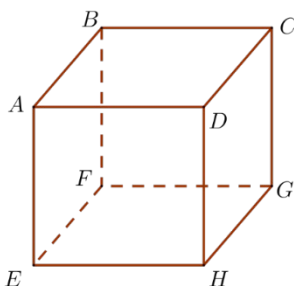
Trong không gian một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 3: Chọn A.

Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.

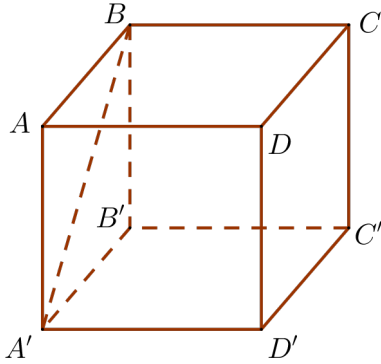
Câu 4: Chọn B.

Câu 5: Chọn B.



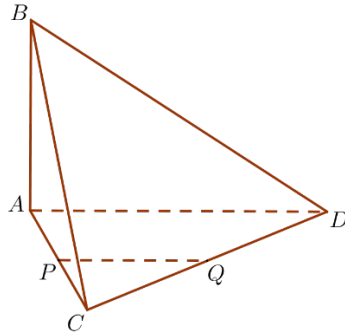
$$\begin{cases} AB \perp AE \\ AE \parallel DH \end{cases} \Rightarrow AB \perp DH \Rightarrow (AB, DH) = 90^\circ.$$

Câu 6: Chọn D.



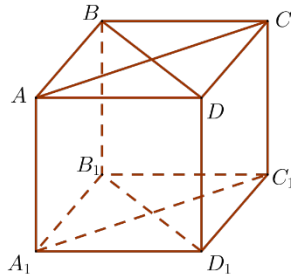
Do $CD // AB$ nên $(BA', CD) = (BA', AB) = \widehat{A'BA} = 45^\circ$.

Câu 7: Chọn A



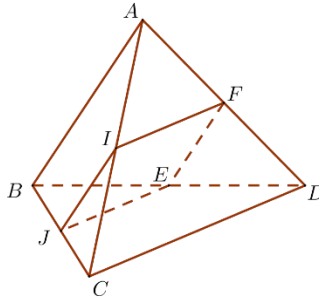
Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ PQ // AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp PQ$.

Câu 8: Chọn B



Ta có: $\begin{cases} B_1D_1 \perp DD_1 \\ AA_1 // DD_1 \end{cases} \Rightarrow (AA_1, B_1D_1) = (DD_1, B_1D_1) = 90^\circ$.

Câu 9: Chọn D.



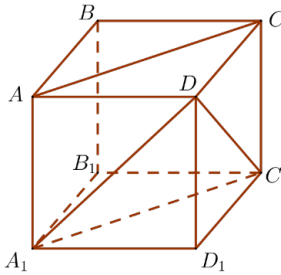
Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} IJ = \frac{1}{2}AB \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases} \text{ mà } AB = CD \text{ nên } IJ = JE.$$

Do đó $IJEF$ là hình thoi.

Suy ra $(IE, JF) = 90^\circ$.

Câu 10: Chọn C.

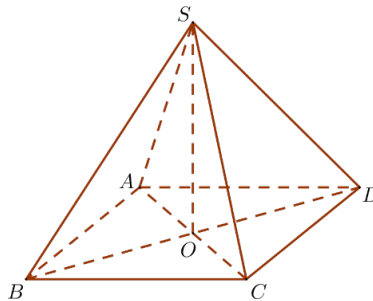


Vì $A_1C_1 \parallel AC \Rightarrow (AC, DA_1) = (A_1C_1, DA_1) = \widehat{DA_1C_1}$.

Vì tam giác DA_1C_1 đều nên $\widehat{DA_1C_1} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa $(AC, DA_1) = 60^\circ$.

Câu 11: Chọn A.

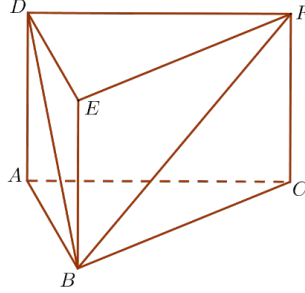


Ta có $AB \parallel CD$ nên $(SA, CD) = (SA, AB) = \widehat{SAB}$.

Mặt khác $S.ABCD$ là chóp đều nên $SA = SB$ do đó tam giác SAB đều nên $\widehat{SAB} = 60^\circ$.

Vậy $(SA, AB) = 60^\circ$.

Câu 12: Chọn A.



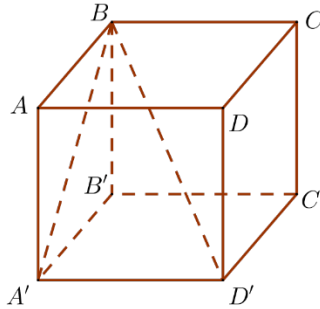
Ta có $AC \parallel DF \Rightarrow (AC, BF) = (DF, BF) = \widehat{BFD}$.

Mặt khác $BD = BF = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$ và $DF = a$.

Do đó $\cos \widehat{DFB} = \frac{FD^2 + FB^2 - BD^2}{2.FD.FB} = \frac{\sqrt{5}}{10} > 0$

Vậy $\cos(\widehat{AC; BF}) = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

Câu 13: Chọn D.

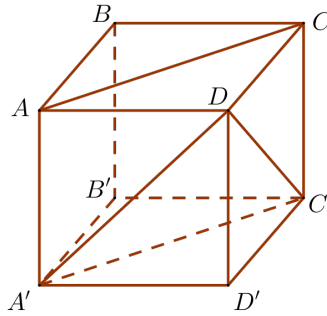


Ta có $AD \parallel A'D' \Rightarrow (BD', AD) = (BD', A'D') = \widehat{BD'A'}$.

Mặt khác $BA' = a\sqrt{2}$, $BD' = a\sqrt{3}$.

Do đó $\cos \widehat{BD'A'} = \frac{D'B'^2 + D'A'^2 - BA'^2}{2.D'B'.D'A'} = \frac{(a\sqrt{3})^2 + a^2 - (a\sqrt{2})^2}{2.a\sqrt{3}.a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Chọn B.

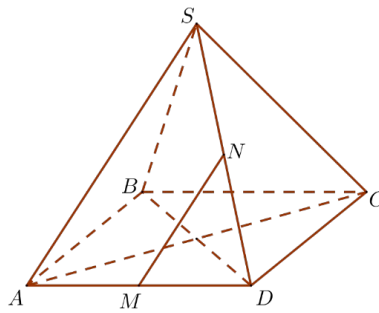


Đặt $AB = a$, ta có $AC \parallel A'C' \Rightarrow (AC; A'D) = (A'C'; A'D) = \widehat{DA'C'}$.

Mặt khác $A'D = DC' = A'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta A'DC'$ là tam giác đều nên $\widehat{DA'C'} = 60^\circ$.

Vậy $(AC; A'D) = (A'C'; A'D) = 60^\circ$.

Câu 15: Chọn C.



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S .

Khi đó: $(MN, SC) = (SA, SC) = \widehat{ASC} = 90^\circ$.

$$\Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ.$$

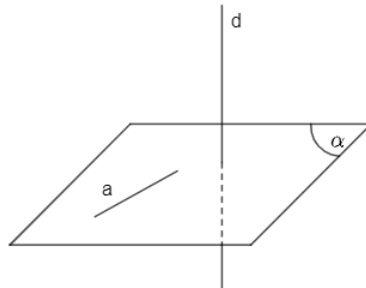
Bài 2 **ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT
PHẪNG**

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

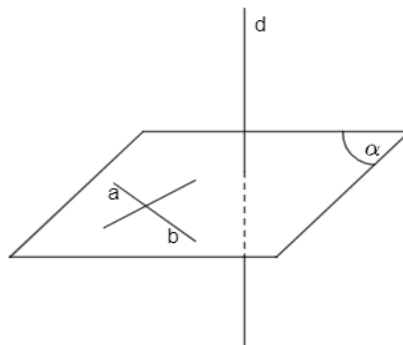
a. Định nghĩa.

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong (α) , ký hiệu $d \perp (\alpha)$



b. Các định lí

Định lí 1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì $d \perp (\alpha)$.

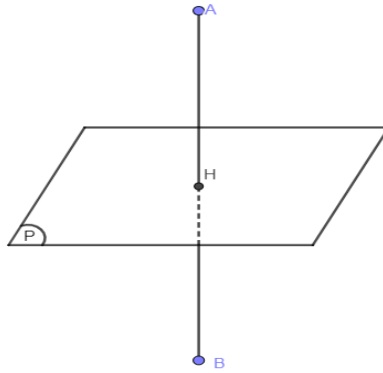


Định lí 2:

- + Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- + Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

c. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

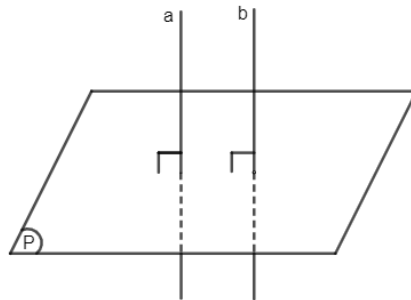
Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó. Mọi điểm nằm trên mặt phẳng trung trực luôn cách đều 2 đầu đoạn thẳng.



2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

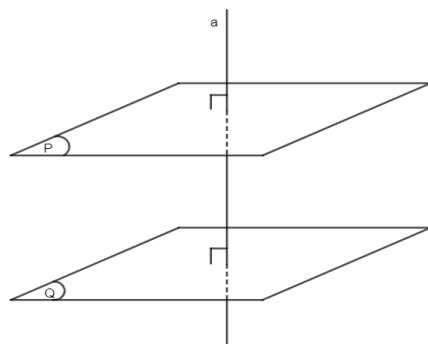
Định lí 3:

- Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



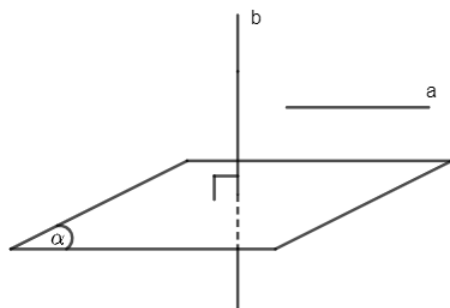
Định lí 4:

- Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Định lí 5:

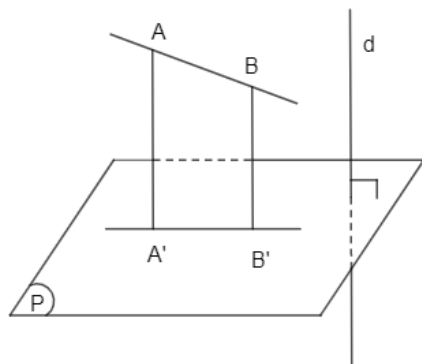
- Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.



3. Phép chiếu vuông góc

a. Định nghĩa.

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P) . Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (P) .



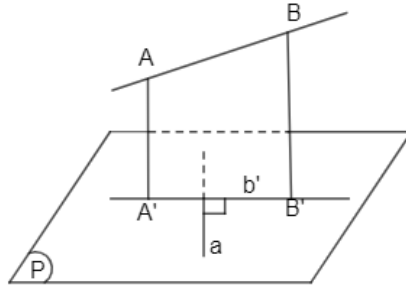
Chú ý:

- a) Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.
- b) Người ta còn dùng “phép chiếu lên (P) ” thay cho “phép chiếu vuông góc lên (P) ”. Nếu H' là hình chiếu vuông góc của H lên mặt phẳng (P) thì ta cũng nói “ H' là hình chiếu của H trên mặt phẳng (P) ”.

b. Định lí ba đường vuông góc.

Định lí 6:

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .



B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:

CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

Phương pháp:

- + Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) , ta chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong (α) (**định lí 1**):

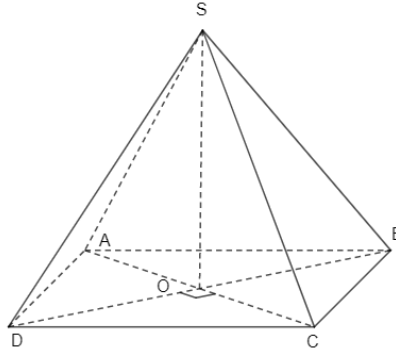
$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \cap b = M \\ a, b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$

- + Sử dụng **định lí 3**:

$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ a \parallel b \end{cases} \Rightarrow b \perp (\alpha)$$

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải

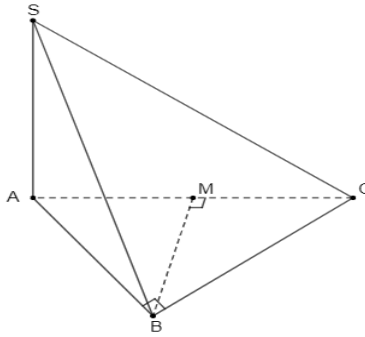


Ta có tam giác SAC cân tại S , có SO là đường trung tuyến nên $SO \perp AC$, tương tự ta có $SO \perp BD$. Do AC và BD là hai đường thẳng cắt nhau trong $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $SA \perp (ABC)$. Chứng minh:

- $BC \perp (SAB)$.
- Gọi M là trung điểm AC . Chứng minh $BM \perp (SAC)$.

Lời giải



- Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Ta lại có $BC \perp AB$ (tam giác ABC vuông cân tại B), 2 đường thẳng AB và SA cắt nhau trong (SAB) nên $BC \perp (SAB)$.

- Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BM$.

Ta lại có $BM \perp AC$ (tam giác ABC vuông cân tại B có BM đường trung tuyến).

Mà 2 đường thẳng SA và AC cắt nhau trong (SAC) nên $BM \perp (SAC)$.

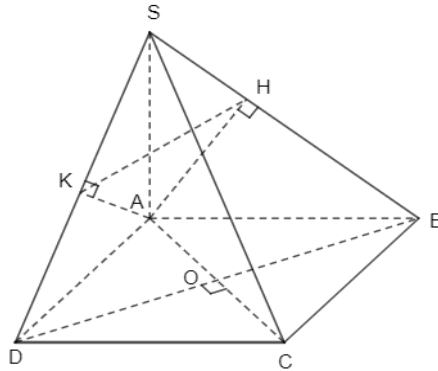
Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh: $BD \perp (SAC)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Chứng minh: $AH \perp (SBC)$.

c) Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên SD . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA (SA \perp ABCD) \\ AC \cap BD = O \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{cases}$ suy ra $BD \perp (ABCD)$.

b) Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ SA \cap AB = A \\ SA, AB \subset (SAB) \end{cases}$ suy ra $BC \perp (SAB)$, khi đó $BC \perp AH$.

mà $AH \perp SB$. Ta lại có SB và BC là hai đường thẳng cắt nhau trong (SBC) nên $AH \perp (SBC)$.

c) Dễ dàng chứng minh được $AK \perp (SCD)$, suy ra $AK \perp SC$,
mà $AH \perp SC$ (do $AH \perp (SBC)$) nên $SC \perp (AHK)$.

DẠNG 2:

CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

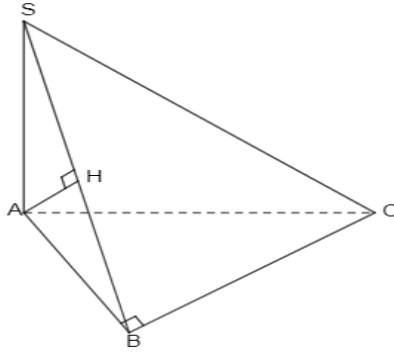
Phương pháp:

+ Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b , ta chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) chứa b .

+ Sử dụng **định lí ba đường vuông góc**.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Gọi H là đường cao trong tam giác SAB . Chứng minh: $AH \perp BC$.

Lời giải

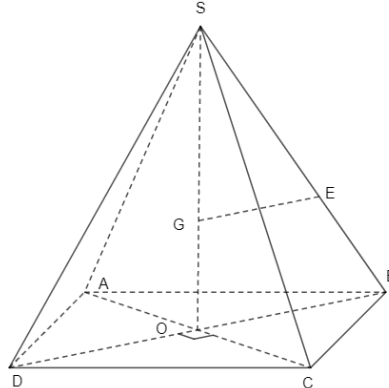


$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \left(SA \perp (ABCD) \right) \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} .$$

Suy ra $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $AH \perp BC$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SO \perp (ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác (SAC) và điểm E nằm trên cạnh SB sao cho $2EB = SE$. Chứng minh rằng: $GE \perp SA$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \\ BD \cap AC = O \\ BD, AC \subset (ABCD) \end{cases} \quad \text{suy ra } BD \perp (SAC) .$$

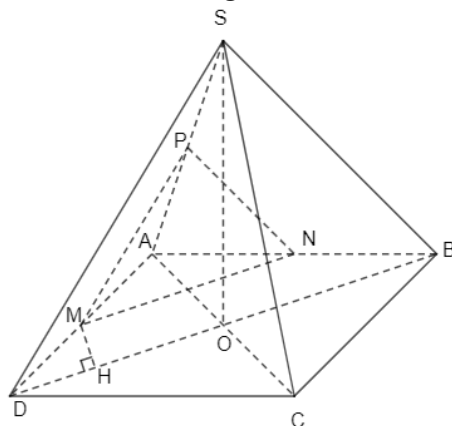
Trong $\triangle SOB$ có $\frac{SG}{SO} = \frac{SE}{SB} = \frac{2}{3}$ suy ra $GE \parallel BD$

Do đó $GE \perp (SAC)$, mà $SA \subset (SAC)$ nên $GE \perp SA$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD . Biết $SA = SC$, $SB = SD$, chứng minh:

- SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Gọi M là trung điểm AD , H là hình chiếu của M lên BD . Chứng minh: $MH \perp SD$.
- Gọi N, P lần lượt là trung điểm AB, SA . Chứng minh: $MH \perp NP$.

Lời giải



- Tam giác SAC cân tại S , SO là đường trung tuyến nên $SO \perp AC$.
Tam giác SBD cân tại S , SO là đường trung tuyến nên $SO \perp BD$.
Mà AC và BD là hai đường cắt nhau trong $(ABCD)$,
khi đó $SO \perp (ABCD)$.
- Do $SO \perp (ABCD)$ nên OD là hình chiếu của SD trên $(ABCD)$.
Ta có $MH \perp OD$ ($MH \perp BD$) nên $MH \perp SD$. (**đlí ba đường vuông góc**).
- Ta có $MN \parallel BD$ (đường trung bình trong tam giác ABD).
Ta lại có $NP \parallel SB$ (đường trung bình trong tam giác SAB).
Suy ra $(MNP) \parallel (SBD)$, mà $MH \perp (SBD)$ nên $MH \perp (MNP)$.
Vậy $MH \perp NP$ (do $NP \subset (MNP)$).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều. Gọi E, F là trung điểm AB, CD . Cho biết tam giác SCD vuông tại S . Chứng minh:

a) $AB \perp (SEF)$ và $CD \perp (SEF)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên EF . Chứng minh: $SH \perp AC$.

Bài 2: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt (ABC) và (BCD) là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC . Gọi I là trung điểm BC .

a) Chứng minh rằng: $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi AH là đường cao trong ΔADI . Chứng minh: $AH \perp (BCD)$.

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC . Chứng minh:

$IJ \perp (SBD)$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACD và H trên cạnh SD sao cho $HD = 2HS$. Chứng minh: $HG \perp (ABCD)$.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, biết $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, K lần lượt được lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh:

a) $BD \perp SC$.

b) $IK \perp (SAC)$.

Bài 5: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại B . Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AM \perp SB$ tại M . Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$

b) Chứng minh: $SB \perp AN$.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC . Chứng minh: $SI \perp (ABC)$.

Bài 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là các trực tâm của các tam giác BCD và ACD . Chứng minh rằng:

- $CD \perp (ABH)$.
- $CD \perp (ABK)$.
- Ba đường AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông O , SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC và SD .

- Chứng minh rằng: $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.
- Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
- Chứng minh AH, AK cùng vuông góc SC . Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng.

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có vô số mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A) Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

B) Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b .

C) Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (P) .

D) Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (P) thì a song song hoặc chứa trong mặt phẳng (P) .

Câu 3: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A) Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α) .

B) Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

C) Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong (α) thì d vuông góc với một đường thẳng bất kì trong (α) .

D) Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp (a)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A) $AC \perp (SAB)$. B) $BC \perp (SAB)$. C) $AB \perp (SBC)$. D) $AC \perp (SBC)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A) $BC \perp (SAB)$. B) $CD \perp (SAD)$. C) $AC \perp (SBD)$. D) $BD \perp (SAC)$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A) $SA \perp AB$. B) $CD \perp (SAD)$. C) $AB \perp SB$. D) $BD \perp (SAC)$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông tại B . Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A) $AH \perp SB$. B) $AH \perp BC$. C) $AH \perp AC$. D) $AH \perp SC$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Chọn khẳng định **đúng**.

A) $BC \perp AC$. B) $BC \perp AH$. C) $BC \perp SC$. D) $BC \perp AB$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và

$SA = SC$, $SB = SD$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A) $AC \perp SA$. B) $AC \perp (SBD)$. C) $SA \perp BD$. D) $BD \perp (SAC)$.

Câu 10: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

- A) Nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
B) Nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp (P)$.
C) Nếu $a // (P)$ và $a // b$ thì $b // (P)$.
D) Nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b // a$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB , BC và SB . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A) $(IJK) // (SAC)$. B) $BD \perp (IJK)$.
C) $(\widehat{SD, BC}) = 60^\circ$ D) $BD \perp (SAC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A) $AK \perp (SCD)$. B) $BD \perp (SAC)$.
C) $AH \perp (SCD)$ D) $BC \perp (SAC)$.

Câu 13: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A) H là trọng tâm của tam giác ABC .
B) H là trung điểm của BC .
C) H là trực tâm của tam giác ABC
D) H là trung điểm của AC .

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Chọn khẳng định **sai**?

- A) $(SC, EF) = 90^\circ$. B) $(SC, AE) = 90^\circ$.
C) $(SC, AF) = 90^\circ$. D) $(SC, BC) = 90^\circ$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , biết $AD = CD = a$ và $AB = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm AB . Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A) $CE \perp (SAB)$.

B) $CB \perp SB$.

C) $CE \perp (SDC)$.

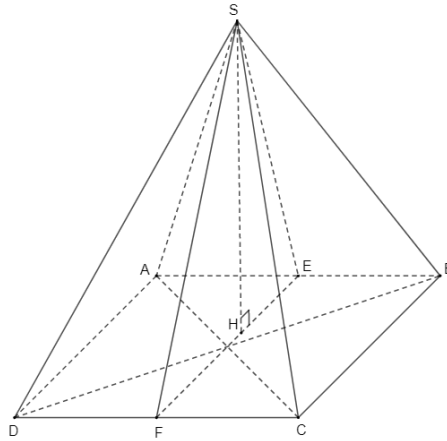
D) $SC \perp CD$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:



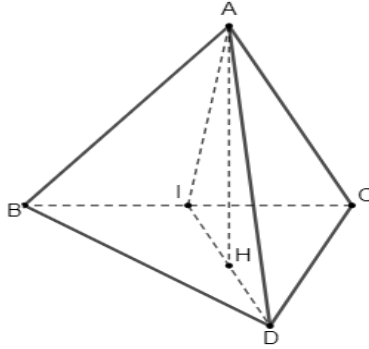
$$\text{a) } \begin{cases} EF \perp AB \\ SE \perp AB \\ SE \cap SF = S \\ SE, EF \subset (SEF) \end{cases} \quad \text{suy ra } AB \perp (SEF).$$

Ta có $AB \parallel CD$ nên $CD \perp (SEF)$

$$\text{b) } \begin{cases} SH \perp EF \\ SH \perp AB \quad (AB \perp (SEF)) \\ AB \cap EF = E \\ EF, AB \subset (ABCD) \end{cases}$$

suy ra $SH \perp (ABCD)$, mà $AC \subset (ABCD)$, khi đó $SH \perp AC$

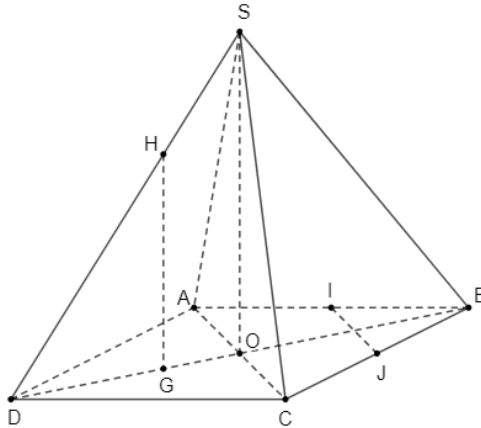
Bài 2:



a) Ta có 2 tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle DCB$ là tam giác cân tại A và D nên $DI \perp BC$ và $AI \perp BC$. Mà DI và AI là 2 đường cắt nhau trong mặt phẳng (ADI) , khi đó $BC \perp (ADI)$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} AH \perp DI \\ AH \perp BC \\ DI \cap BC = I \\ DI, BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD).$$

Bài 3:



a) Ta có hai tam giác SAC và tam giác SBD cân tại S nên SO vuông góc với AC và BD .

Mà AC và BD là 2 đường cắt nhau trong $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

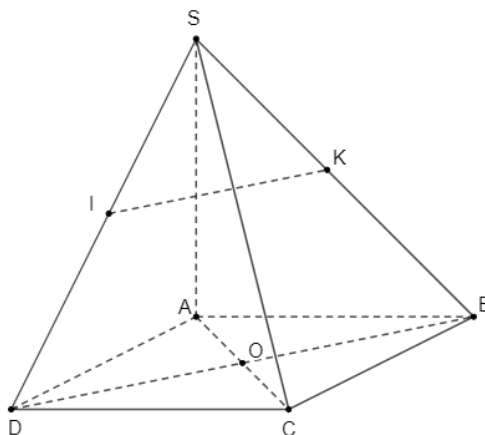
$$\text{b) Ta có } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \\ SO \cap BD = O \\ SO, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$$

Ta lại có IJ là đường trung bình tam giác ABC nên $IJ \parallel AC$ nên $IJ \perp (SBD)$

c) Vì G là trọng tâm $\triangle ACD$ nên $\frac{DG}{DO} = \frac{DH}{DS} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $HG \parallel SO$, mà $SO \perp (ABCD)$ nên $HG \perp (ABCD)$.

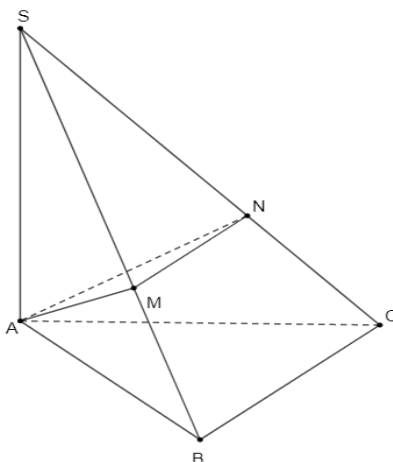
Bài 4:



a) $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \\ SA \cap AC = A \\ SA, AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC), \text{ khi đó } BD \perp SC.$

b) Ta có $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$ nên $IK \parallel BD$, mà $BD \perp (SAC)$ nên $IK \perp (SAC)$.

Bài 5:



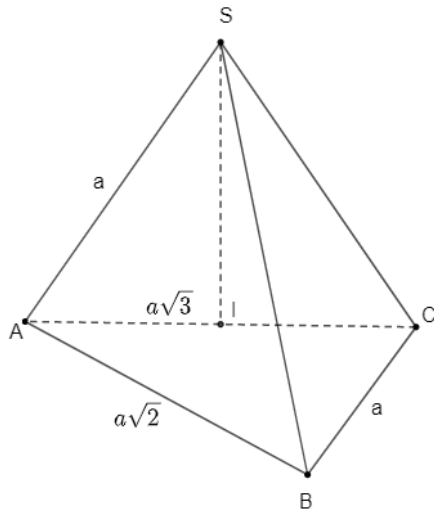
$$\text{a) Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ SA \cap AB = A \\ SA, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp SB \\ SB \cap BC = B \\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC).$$

$$\text{b) Ta có } \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} \text{ nên } MN \parallel BC, \text{ mà } BC \perp (SAB), \text{ khi đó } MN \perp (SAB).$$

Suy ra $SB \perp AN$.

Bài 6:



Đặt độ dài $SA = SB = SC = a$

Ta có $\triangle SAB$ vuông cân tại S nên $AB = a\sqrt{2}$.

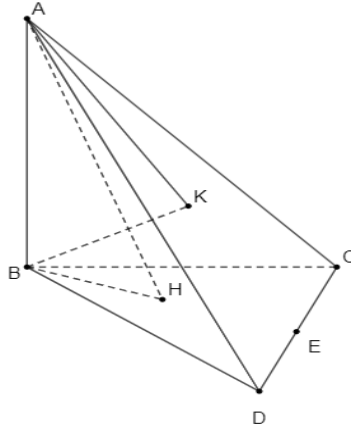
Ta có $\triangle SBC$ cân tại S , có $\widehat{BSC} = 60^\circ$ nên $\triangle SBC$ đều cạnh a .

Trong $\triangle SAC$ có $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$.

Dễ thấy $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3a^2$ nên tam giác ABC vuông tại B suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và I là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy nên $SI \perp (ABC)$.

Bài 7:



$$\text{a) } \begin{cases} CD \perp BH \\ CD \perp AB \\ AB \cap BH = B \\ AB, BH \subset (ABH) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH).$$

$$\text{b) } \begin{cases} CD \perp AK \\ CD \perp AB \\ AK \cap AB = A \\ AK, AB \subset (ABK) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABK).$$

c) Trong $\triangle ACD$, gọi $AK \cap CD = E$.

Ta có $CD \perp (ABK)$, khi đó $CD \perp (ABE)$, suy ra $CD \perp BE$ ($BE \subset (BCD)$).

Trong mặt phẳng (BCD) , ta có $BH \perp CD$ (H là trực tâm $\triangle BCD$).

Suy ra 3 điểm B, H, E thẳng hàng.

Vậy ba đường AK, BH, CD đồng quy tại E .

Bài 8 :

$$\text{a) } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB); \quad \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \\ SA \cap AD = A \\ SA, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

$$\text{b) } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \\ AC \cap SA = A \\ AC, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Ta lại có $BD \cap (SAC) = O$, mà O là trung điểm BD nên (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD .

$$\text{c) } \begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \\ SB \cap BC = B \\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC), \text{ suy ra } AH \perp SC.$$

$$\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \\ SD \cap CD = D \\ SD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD), \text{ suy ra } AK \perp SC.$$

$$\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \\ AH \cap AK = A \\ AH, AK \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$$

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AI \\ AH \cap AI = A \\ AH, AI \subset (AHI) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHI).$$

Ta có hai mặt phẳng (AHK) và (AHI) cùng vuông góc với SC và đi qua điểm A nên $(AHI) \equiv (AHK)$.

Suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.

Nhớ: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước. (**định lý 2**)



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.B	2.C	3.B	4.B	5.C	6.D	7.C	8.B	9.A	10.A
11.C	12.A	13.C	14.A	15.A					

Bài 1: Chọn B.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

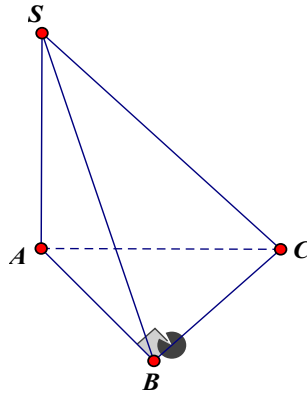
Bài 2: Chọn C.

Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (P) .

Bài 3: Chọn B.

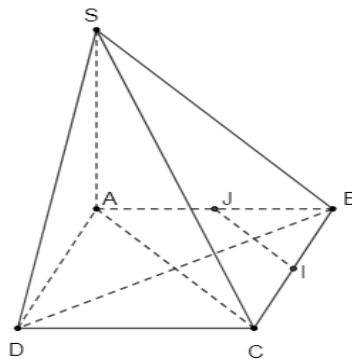
Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

Bài 4: Chọn B.



$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD).$$

Bài 5: Chọn C.



$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD). \text{ Mà } IJ \parallel AC \text{ nên } IJ \perp (SBD).$$

Bài 6: Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \\ SO \cap AC = O \\ SO, AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Bài 7: Chọn C.

Dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SAB)$, từ đó suy ra $AH \perp (SBC)$.

Khi đó $AH \perp SB$, $AH \perp BC$, $AH \perp SC$. Vậy đáp án C sai.

Bài 8: Chọn B.

Tương tự câu 7, chứng minh $AH \perp (SBC)$, khi đó $BC \perp AH$.

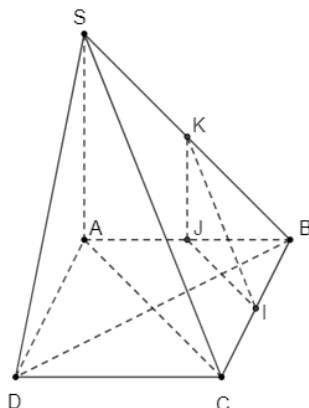
Bài 9: Chọn A.

Dễ dàng chứng minh $SO \perp (ABCD)$ từ đó chứng minh được $BD \perp (SAC)$.

Bài 10: Chọn A.

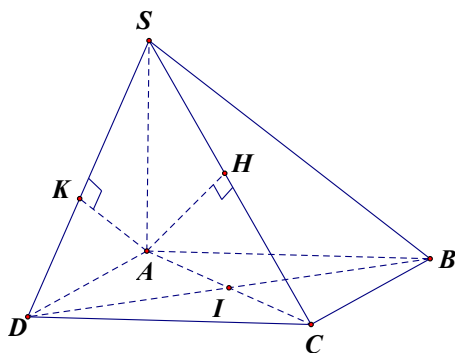
Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

Bài 11: Chọn C.



Các đáp án A, B, D đều đúng. Đáp án C chưa đủ dữ kiện để kết luận $(\widehat{SD, BC}) = 60^\circ$.

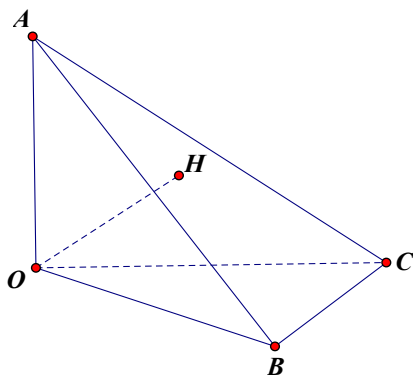
Bài 12: Chọn A.



Ta có $\left. \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SCD)$.

Bài 13: Chọn C.



Ta có

$\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.

Mà $OH \perp (OBC) \Rightarrow OH \perp BC$.

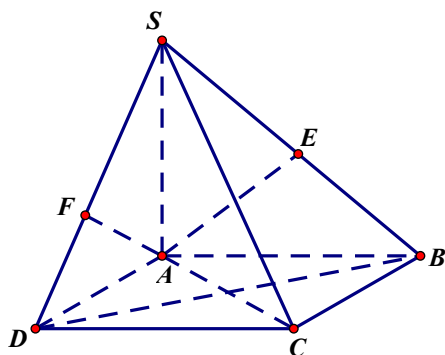
Vậy ta có:

$\left. \begin{array}{l} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$.

Chứng minh tương tự ta có $AB \perp CH$.

Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC .

Bài 14: Chọn A.



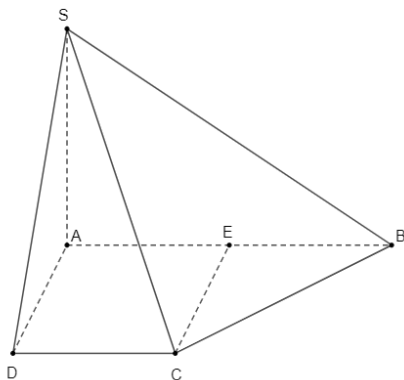
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Lại có $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$.

$AE \perp SB, AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC, (1)$.

Chứng minh tương tự ta có $SC \perp AF$, (2)

Vậy từ (1) và (2) ta có $SC \perp (AEF)$.

Bài 15: Chọn A.



$$\begin{cases} CE // AD \\ AD \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB) .$$

Chương VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Bài 3

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Góc giữa hai mặt phẳng.

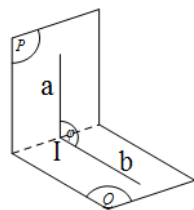
- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

Bước 1: Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Bước 2: Lấy 1 điểm I tùy ý thuộc d . Trong mp (P) dựng đường thẳng a đi qua I và vuông góc với đường thẳng d .

Bước 3: Trong mp (Q) dựng đường thẳng b đi qua I và cũng vuông góc với đường thẳng d .

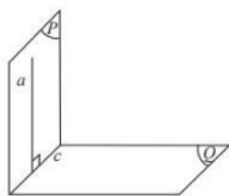
Khi đó: Góc giữa hai mp (P) và (Q) chính bằng góc giữa a và b .



II. Hai mặt phẳng vuông góc.

- Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° . Ký hiệu: $(P) \perp (Q)$.
- Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

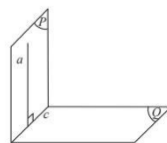
$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$



III. Tính chất của hai mặt phẳng vuông góc.

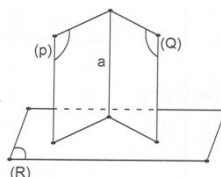
- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow a \perp (Q) \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases}$$



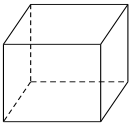
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$



IV. Hình lăng trụ đứng, hình hộp, hình lập phương.

Tên	Định nghĩa	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng	là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy		- Cạnh bên vuông góc với hai đáy. - Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều	là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều		- Hai đáy là hai đa giác đều. - Mặt bên là các hình chữ nhật. - Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng	là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành		- Bốn mặt bên là hình chữ nhật. - Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật	là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật		- Sáu mặt là hình chữ nhật. - Độ dài a, b, c của 3 cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

			- Độ dài đường chéo d được tính theo 3 kích thước $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Hình lập phương	là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau		- Sáu mặt là hình vuông. - Độ dài đường chéo d được tính theo công thức $d = a\sqrt{3}$

V. Hình chóp đều và hình chóp cụt.

- Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

❖ Nhận xét:

- Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

- Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là hình chóp cụt đều.

❖ Nhận xét:

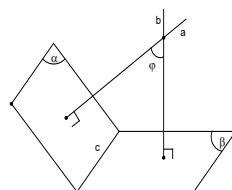
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Phương pháp:

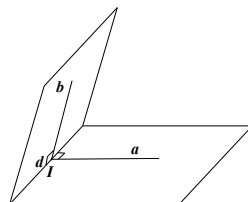
Cách 1: Dùng định nghĩa: Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng mặt phẳng (P) và (Q) chính là góc giữa hai đường thẳng a và b



Cách 2: Ta thực hiện theo 2 bước

Bước 1: Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Bước 2: Tìm 1 điểm I thuộc d sao cho trong mp (P) ta dễ dàng tìm được một đường thẳng a đi qua I và vuông góc với đường thẳng d và trong mp (Q) ta tìm được một đường thẳng b cũng đi qua I và vuông góc với đường thẳng d .



Khi đó: Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) chính bằng góc giữa a và b

Cách 3: Nếu hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau thì góc giữa chúng bằng 90°

Cách 4: Ta sử dụng công thức tính diện tích hình chiếu của một đa giác trong không gian: $S' = S \cdot \cos \varphi$

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy. Tìm góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

Lời giải

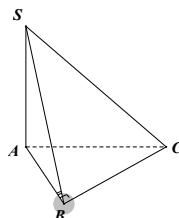
Ta có:

$$(SBC) \cap (ABC) = BC \quad (1)$$

$$AB \subset (ABC), AB \perp BC \quad (2)$$

$$SB \subset (SBC), SB \perp BC \quad (BC \perp (SBC)) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra góc giữa 2 mp (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA}$.



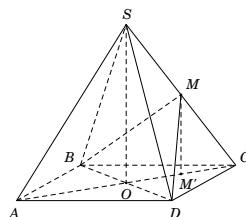
Ví dụ 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Lời giải

Gọi M' là trung điểm OC

$$\Rightarrow MM' \parallel SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp M'O \\ BD \perp MM' \end{cases} \Rightarrow BD \perp MO$$



$$MM' = \frac{1}{2}SO = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}; M'O = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}; MO = \sqrt{MM'^2 + M'O^2} = \frac{a}{2}$$

Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có $S_{\Delta M'BD} = \cos \varphi \cdot S_{\Delta MBD}$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\Delta M'BD}}{S_{\Delta MBD}} = \frac{BD \cdot M'O}{BD \cdot MO} = \frac{M'O}{MO} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trên BC lấy điểm I sao cho tam giác SDI vuông tại S . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SDI) và $(ABCD)$ là 60° . Tính độ dài SI .

Lời giải

Từ A dựng $AK \perp ID$ ($K \in ID$)

$$\Rightarrow ID \perp (SAK) \Rightarrow ID \perp SK$$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SDI) và

$(ABCD)$ là góc $\widehat{AKS} = 60^\circ$

Tam giác SAK vuông tại A , ta có:

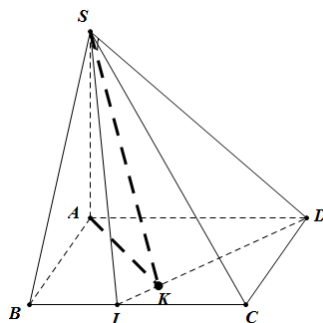
$$\sin \widehat{ASK} = \frac{SA}{SK} \Rightarrow SK = \frac{SA}{\sin \widehat{ASK}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Tam giác SAD vuông tại A , ta có:

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$$

Tam giác SID vuông tại S , SK là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SD^2} \Rightarrow \frac{1}{SI^2} = \frac{3}{4a^2} - \frac{1}{5a^2} \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{55}}{11}$$



DẠNG 2:

DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA ĐA GIÁC

Phương pháp:

+ Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mặt phẳng (α) và S' là diện tích của đa giác (H') - là hình chiếu của (H) trên mặt phẳng (β) thì

$$S' = S \cdot \cos \varphi, \text{ trong đó } \varphi \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (\alpha) \text{ và } (\beta).$$

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác SBC vuông cân tại S , có $SB = a$. Mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc 30° . Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải

Do ΔSBC vuông cân tại S có $SB = a$ nên diện tích ΔSBC là:

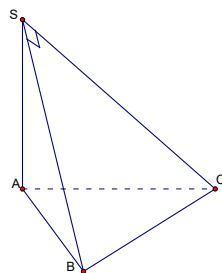
$$S = \frac{1}{2} SB \cdot SC = \frac{a^2}{2}$$

Vì $SA \perp (ABC)$ nên ΔABC là hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mp (ABC) . Gọi φ là góc giữa hai mp (SBC) và mp (ABC) ta có $\varphi = 30^\circ$.

Áp dụng tính chất diện tích hình chiếu của đa giác, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC} \cos \varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Vậy diện tích tam giác ABC bằng: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$



Ví dụ 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng bên (SBC) hợp với đáy một góc 60° . Tính diện tích ΔSBC .

Lời giải

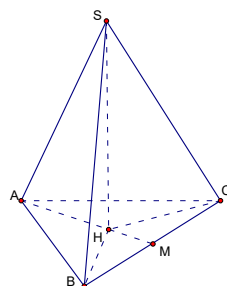
Gọi H là trọng tâm của ΔABC , M là trung điểm cạnh BC .

Ta có $SH \perp (ABC)$ tại H . Do đó ΔHBC là hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mp (ABC) .

$$\text{Ta có: } S_{\Delta HBC} = S_{\Delta SBC} \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{S_{\Delta HBC}}{\cos 60^\circ} = 2S_{\Delta HBC}$$

$$\text{Ta lại có: } S_{\Delta HBC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta SBC} = 2S_{\Delta HBC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, mặt bên (SDC) hợp với đáy một góc 45° . Tính diện tích tam giác SDC .

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD$

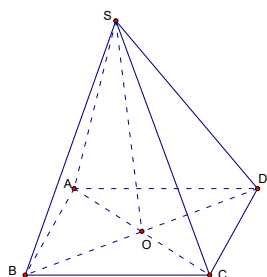
Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$ tại O

Hình chiếu vuông góc của ΔSDC lên mp($ABCD$) là ΔODC .

$$S_{\Delta ODC} = S_{\Delta SDC} \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow S_{\Delta SDC} = \frac{S_{\Delta ODC}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} S_{\Delta ODC}$$

$$\text{Mà } S_{\Delta ODC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta SDC} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{4}.$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{DAB} = 120^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm cạnh BC , góc $\widehat{SMA} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác SBC .

Lời giải

Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{DAB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$

Ta có: ΔABC là tam giác đều cạnh a . Suy ra $AM \perp BC$ (1)

Mà $SA \perp BC$ nên $SM \perp BC$ (2)

Ta lại có: $(SBC) \cap (ABCD) = BC$ (3)

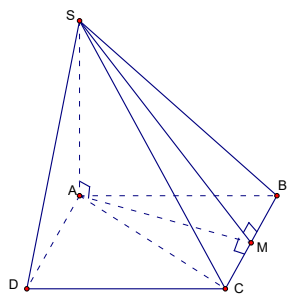
Từ (1), (2) và (3) suy ra góc giữa mp (SBC) và đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SMA}$

Do $SA \perp (ABCD)$ tại A nên hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mp($ABCD$) là ΔABC .

Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC} \cdot \cos \widehat{SMA}$

$$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos 60^\circ} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta SBC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$



Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh AA', BB' . Mặt phẳng (α) đi qua M và B' , song song với cạnh CP cắt lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo thiết diện là một tam giác có diện tích bằng $a^2 \sqrt{6}$. Tính độ dài cạnh AB theo a , biết góc giữa mp (α) với đáy (ABC) bằng 45° .

Lời giải

Gọi N là trung điểm cạnh CC' .

Ta có, thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mp(α) là tam giác MNB' .

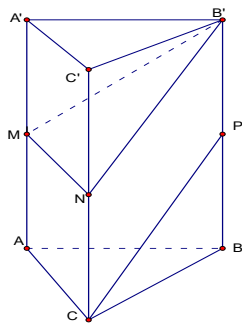
Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên hình chiếu vuông góc của $\Delta MNB'$ lên mp(ABC) là ΔACB .

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ACB} = S_{\Delta MNB'} \cdot \cos 45^\circ = a^2 \sqrt{3}$$

$$\text{Mà } S_{\Delta ACB} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \text{ nên } \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a$$

Vậy $AB = 2a$.



DẠNG 3: **CHỨNG MINH HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC**

Phương pháp:

+ **Cách 1:** Ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

+ **Cách 2:** Ta chứng minh góc giữa chúng là 90° .

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Chứng minh: $(AB'C) \perp (BDB')$

Lời giải

Ta có:

$AC \perp BD$ (do tứ giác $ABCD$ là hình vuông)

$AC \perp BB'$ (do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ đứng có cạnh bên vuông góc với đáy)

$$\Rightarrow AC \perp (BDB') \Rightarrow (AB'C) \perp (BDB').$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD , I là giao điểm của AC và BM . Chứng minh: $(SAC) \perp (SMB)$

Lời giải

+ Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$ (1).

+ Xét tam giác vuông ABM có:

$$\tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{AM} = \sqrt{2}.$$

Xét tam giác vuông ACD có:

$$\tan \widehat{ACD} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có:

$$\cot \widehat{AIM} = \cot \left(180^\circ - (\widehat{AMB} + \widehat{CAD}) \right) = -\cot (\widehat{AMB} + \widehat{CAD}) = -\frac{1 - \tan \widehat{AMB} \cdot \tan \widehat{CAD}}{\tan \widehat{AMB} + \tan \widehat{CAD}} = 0$$

$$\Rightarrow \widehat{AIM} = 90^\circ \Rightarrow BM \perp AC$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BM \perp (SAC)$ mà $BM \subset (SMB)$ nên $(SAC) \perp (SMB)$

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC . Chứng minh:

a) $(SAB) \perp (SAD)$

b) $(SAB) \perp (SBC)$

c) $(SHC) \perp (SDI)$

Lời giải

a) Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Ta có:

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

Như vậy:

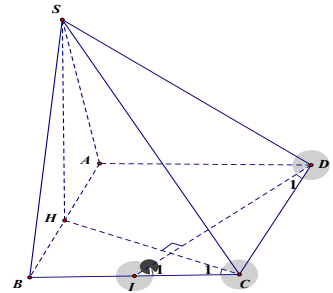
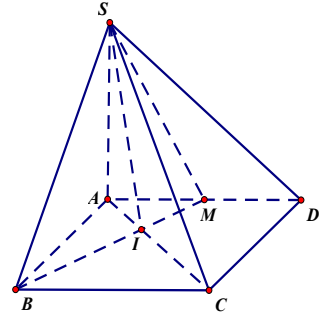
$$\begin{cases} AD \perp AB (gt) \\ AD \perp SH (SH \perp (ABCD)) \Rightarrow AD \perp (SAB), \\ AD, SH \subset (SAB) \end{cases}$$

mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$.

b) Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta được $(SBC) \perp (SAB)$

c) Ta lại có: $\triangle BCH = \triangle CDI (c.g.c) \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$,

mà $\widehat{D}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ \Rightarrow HC \perp DI$



Như vậy
$$\begin{cases} HC \perp DI \\ HS \perp DI \text{ (} SH \perp (ABCD) \text{)} \Rightarrow DI \perp (SHC), \\ CH, SH \subset (SHC) \end{cases}$$

mà $DI \subset (SDI) \Rightarrow (SDI) \perp (SHC)$.

DẠNG 4:

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC LIÊN QUAN HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:

+ **Cách 1:** Ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

+ **Cách 2:** Ta chứng minh góc giữa chúng là 90° .

Phương pháp tính góc giữa hai mặt phẳng

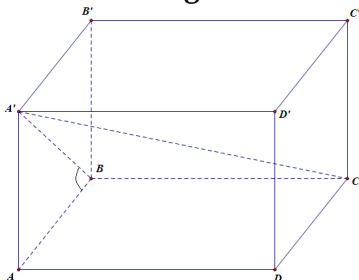
- Tìm giao tuyến $(P) \cap (Q) = \Delta$.
- Trong (P) tìm a vuông góc với Δ , trong (Q) tìm b vuông góc với Δ và a, b cắt nhau tại I .
- Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b .

Chú ý: Trong một số trường hợp nếu chỉ yêu cầu tính góc giữa hai mặt phẳng thì chúng ta có thể áp dụng công thức hình chiếu để tính.

Công thức hình chiếu: Gọi hình (H) có diện tích S ; hình (H') là hình chiếu của (H) trên mặt phẳng (α) có diện tích S' ; φ là góc giữa mặt phẳng chứa (H) và mp (α) . Lúc đó, ta có công thức sau: $S' = S \cdot \cos \varphi$.

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA' = 4$. Tính góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp A'B$

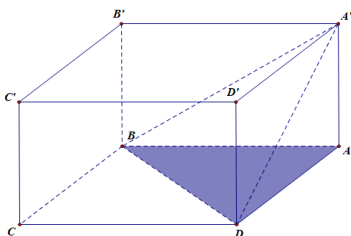
Mặt khác $AB \perp BC$ và $(A'BC) \cap (ABCD) = BC$

Do đó $\widehat{(A'BC);(ABCD)} = \widehat{(A'B, AB)} = \widehat{A'BA}$.

Ta có $\tan \widehat{A'BA} = \frac{AA'}{AB} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{A'BA} \approx 54,7^\circ$

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a$, $AA' = 3a$. Tính góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có hình chiếu của $\Delta A'BD$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ là ΔABD nên

$$\cos(\widehat{(A'BD), (ABCD)}) = \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta A'BD}}$$

$$A'B = \sqrt{10}a, A'D = \sqrt{13}a, BD = \sqrt{5}a \Rightarrow S_{\Delta A'BD} = \sqrt{p(p - A'B)(p - A'D)(p - BD)} = \frac{7}{2}a^2$$

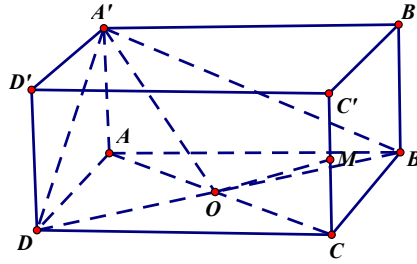
$$\text{Mặt khác } S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta A'BD}} = \frac{2}{7} \Rightarrow \widehat{(A'BD), (ABCD)} \approx 73,4^\circ$$

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$.

Gọi M là trung điểm của CC' . Tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Lời giải



Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Ta có $BD = (A'BD) \cap (MBD)$

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A')$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} BD \perp (ACC'A') \\ (ACC'A') \cap (A'BD) = OA' \Rightarrow \left(\overline{(A'BD)}, \overline{(MBD)} \right) = \left(\overline{OM}, \overline{OA'} \right) \\ (ACC'A') \cap (MBD) = OM \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } OM = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$$

$$OA'^2 = AC^2 + AA'^2 = \frac{a^2}{2} + b^2; MA'^2 = A'C'^2 + MC'^2 = a^2 + \frac{5b^2}{4}$$

$$(A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \triangle OMA' \text{ vuông tại } O$$

$$\Rightarrow OM^2 + OA'^2 = MA'^2 \Leftrightarrow \frac{2a^2 + b^2}{4} + \frac{a^2}{2} + b^2 = a^2 + \frac{5b^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } (A'BD) \perp (MBD) \text{ khi } \frac{a}{b} = 1.$$

DẠNG 5:

HAI MẶT PHẶNG VUÔNG GÓC LIÊN QUAN HÌNH LẬP PHƯƠNG

Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:

+ **Cách 1:** Ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

+ **Cách 2:** Ta chứng minh góc giữa chúng là 90° .

Phương pháp tính góc giữa hai mặt phẳng

- Tìm giao tuyến $(P) \cap (Q) = \Delta$.
- Trong (P) tìm a vuông góc với Δ , trong (Q) tìm b vuông góc với Δ và a, b cắt nhau tại I .

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của BD' . Diện tích thiết diện là:

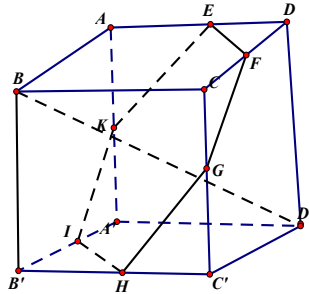
A. $S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

B. $S = a^2$.

C. $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

D. $S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AD . Ta có $EB = ED'$ nên E thuộc mặt phẳng trung trực của BD' .

Gọi F, G, H, I, K lần lượt là trung điểm của $CD, CC', B'C', A'B', AA'$.

Chúng minh tương tự ta có các điểm trên đều thuộc mặt phẳng trung trực của BD' . Vậy thiết diện của hình lập phương cắt bởi thuộc mặt phẳng trung trực của BD' là hình lục giác đều $EFGHIK$ có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích thiết diện là: $S = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$.

C đúng

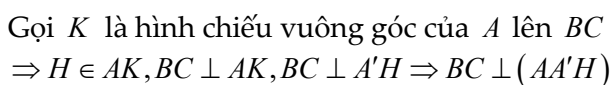
DẠNG 6:

HAI MẶT PHẶNG VUÔNG GÓC LIÊN QUAN HÌNH LĂNG TRỤ

Phương pháp

+ **Cách 1:** $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \widehat{((P), (Q))} = 90^\circ$

+ **Cách 2:** $\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) .

Bài 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có

Bài 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và mp $(A'BCD')$.

Bài 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính số đo của góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

Bài 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α, β, φ là 3 góc tạo bởi đường chéo AC' với 3 cạnh chung đỉnh A .

Tính $A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \varphi$.

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy $ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A , có đáy lớn $AB, AB = 2a, AD = DC = a$. Vẽ $AH \perp SC, H \in SC$ và M là trung điểm của AB . Góc giữa (SCD) và (ABC) là 60° . Tính $\widehat{(SAD), (SMC)}$.

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60° .

Bài 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa (SBC) và (SCD) .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (1) Góc giữa hai mặt phẳng là 90° .
- (2) Mọi đường thẳng trong (P) đều vuông góc với (Q) .
- (3) Tồn tại đường thẳng trong (Q) vuông góc với (P) .
- (4) Nếu (R) vuông góc với (Q) thì (R) song song với (P) .
- (5) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với $(P), (R)$ vuông góc với (Q) thì (R) vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) .

A) 3

B) 4

C) 1

D) 5.

Câu 2: Xét các mệnh đề sau:

- (1) Hình hộp là hình lăng trụ đứng.
- (2) Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng.
- (3) Hình lập phương là hình lăng trụ đứng.
- (4) Hình lăng trụ tứ giác đều là lăng trụ đứng.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là:

A) 4.

B) 3.

C) 2.

D) 1.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$,
 $SA \perp (ABCD)$. Gọi α là góc giữa $(ABCD)$ và (SCD) . Tính α ?

- A) $\alpha = 30^\circ$. B) $\alpha = 45^\circ$. C) $\alpha = 60^\circ$. D) $\alpha = 90^\circ$.

Câu 4: Cho tam giác ABC đều cạnh a và có G là trọng tâm. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AG}$. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$,
 $SA = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi α là góc giữa $(ABCD)$ và (SBD) . Tính α ?

- A) $\alpha = 30^\circ$. B) $\alpha = 45^\circ$. C) $\alpha = 60^\circ$. D) $\alpha = 90^\circ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O ,
 $SO \perp (ABCD)$, các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . M là trung điểm SC . Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) là?

- A) $\alpha = 30^\circ$ B) $\alpha = 90^\circ$ C) $\alpha = 60^\circ$ D) $\alpha = 45^\circ$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A) $(SCD) \perp (SAD)$. B) $(SDC) \perp (SAI)$.
C) $(SBC) \perp (SAB)$. D) $(SBD) \perp (SAC)$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều.
 $SA = \frac{a}{2}$, $SA \perp (ABC)$. Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy (ABC)

bằng 30° , diện tích tam giác SBC bằng $\frac{a^2}{2}$. Tính độ dài cạnh AB ?

- A) $AB = a$. B) $AB = a\sqrt{2}$. C) $AB = a\sqrt{3}$. D) $AB = 2a$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A) $(AB'C) \perp (B'BD)$. B) $(AB'C) \perp (BA'C')$.
C) $(AB'C) \perp (D'BC)$. D) $(AB'C) \perp (D'AB)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a ,
góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A) $\tan \varphi = \sqrt{5}$. B) $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. C) $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D) $\varphi = 45^\circ$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và

D , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = 2a, AD = a, SB = 3a$. Khi đó, tỉ số diện tích của ΔSBC và ΔABC bằng:

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. D) $\frac{5}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM = \frac{a}{2}, DN = \frac{3a}{4}$. Chọn khẳng định đúng.

- A) $(SBC) \perp (SCD)$. B) $(SAM) \perp (SBC)$.
C) $(SAN) \perp (SCD)$. D) $(SAM) \perp (SMN)$.

Câu 12: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có

$AA' = 3a, AB = a, AD = 2a$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng $(B'AC)$ và $(ABCD)$ bằng:

- A) $75^{\circ}20'$. B) $72^{\circ}33'$ C) $73^{\circ}23'$. D) $74^{\circ}53'$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC' . Diện tích của thiết diện là:

- A) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng a và $ADD'A'$ là hình vuông. Cạnh đáy của lăng trụ bằng:

- A) a . B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D) $\frac{a}{2}$.

Câu 15: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^{\circ}$ và cạnh bên $BB' = a$. Tính cosin giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$, với I là trung điểm CC' ?

- A) $\frac{\sqrt{30}}{8}$. B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{4}$. D) $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



Bài 1:

Dựng $AH \perp SD (H \in SD)$.

Ta có $AH \perp SD, AH \perp CD$ (Vì $CD \perp (SAD)$)

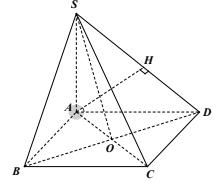
$$\Rightarrow AH \perp (SCD)$$

Ngoài ra ta có $AD \perp (SAB)$. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là:

$$((SCD), (SAB)) = (\widehat{AH, AD}) = \widehat{HAD}$$

Ta có $\widehat{DAH} = \widehat{DSA}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{SAH}$).

$$\tan \widehat{DSA} = \frac{AD}{AS} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{DSA} = 30^\circ.$$

**Bài 2:**

Gọi H là trung điểm của BC , suy ra

$$SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \parallel AB$ nên

$$HK \perp AC.$$

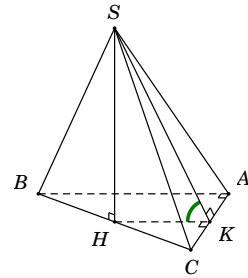
$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$$

$$\text{Do đó } (\widehat{SAC}, \widehat{ABC}) = (\widehat{SK, HK}) = \widehat{SKH}$$

Tam giác vuông ABC , có

$$AB = BC \cdot \cos \widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$$

$$\text{Tam giác vuông } SHK, \text{ có } \tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SKH} \approx 73^\circ.$$

**Bài 3:**

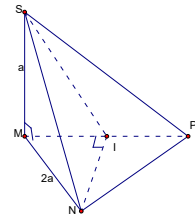
Gọi I là trung điểm cạnh MN , ta có: $NI \perp MP$.

Mà $NI \perp SM$ nên $NI \perp (SMP)$

Hình chiếu vuông góc của ΔSNP lên mp (SMP) là ΔSIP

$$S_{\Delta SIP} = S_{\Delta SNP} \cos 30^\circ \Rightarrow S_{\Delta SNP} = \frac{S_{\Delta SIP}}{\cos 30^\circ} = \frac{S_{\Delta SMP} \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Mà } S_{\Delta SMP} = \frac{1}{2} SM \cdot MP = a^2 \text{ nên } S_{\Delta SNP} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$$

**Bài 4:**

Kẻ $BH \perp A'C, (H \in A'C)$ (1)

Mặt khác, ta có: $BD \perp AC$ (gt), $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BD$

$\Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow BD \perp A'C$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A'C \perp (BDH) \Rightarrow A'C \perp DH$. Do đó,

$$\widehat{((BA'C), (DA'C))} = \widehat{(HB, HD)}.$$

Xét tam giác vuông $BA'C$ có:

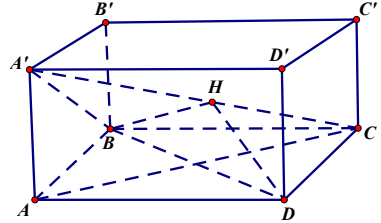
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA'^2} = \frac{8}{15a^2}$$

$$\Rightarrow BH = a\sqrt{\frac{15}{8}} \Rightarrow DH = a\sqrt{\frac{15}{8}}$$

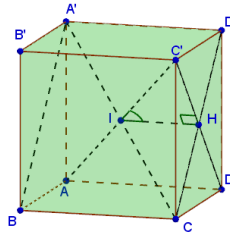
Ta có:

$$\cos \widehat{BHD} = \frac{2BH^2 - BD^2}{2BH^2} = -\frac{68}{225} \Rightarrow \widehat{BHD} \approx 107^\circ 35'.$$

$$\text{Vậy } \widehat{((BA'C), (DA'C))} \approx 72^\circ 24'.$$



Bài 5:



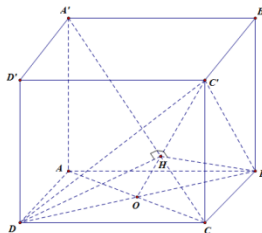
$$\text{Gọi } \begin{cases} A'C \cap AC' = I \\ C'D \cap CD' = H \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD')$ nên IH là hình chiếu vuông góc của

AC' lên $(A'BCD') \Rightarrow \widehat{C'IH}$ là góc giữa AC' và $(A'BCD')$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{C'IH} = \frac{C'H}{IH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{C'IH} \approx 54^\circ$$

Bài 6:



$A'C$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDC'$ nên $A'C \perp (BDC')$

Gọi $H = A'C \cap C'O$ suy ra $HB \perp A'C, HD \perp A'C$ mà $A'C = (BA'C) \cap (DA'C)$ nên $((BA'C), (DA'C)) = (\widehat{HB}, \widehat{HD}) = \widehat{BHD}$ hoặc $180^\circ - \widehat{BHD}$

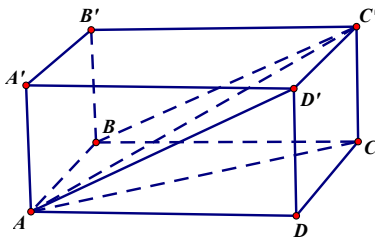
$$\text{Xét } \triangle BHD \text{ có } \cos \widehat{BHD} = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB \cdot HD}$$

Gọi cạnh của hình lập phương là a khi đó

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{A'B^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{6}}{3} = HD$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{BHD} = \frac{\frac{4a^2}{3} - 2a^2}{\frac{4a^2}{3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ \Rightarrow ((BA'C), (DA'C)) = 60^\circ.$$

Bài 7:



$$\text{Ta có: } \begin{cases} \alpha = (\widehat{AC', AA'}) = \widehat{AC'C} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AC}{AC'} \\ \beta = (\widehat{AC', AB}) = \widehat{BAC'} \Rightarrow \sin \beta = \frac{BC'}{AC'} \\ \varphi = (\widehat{AC', AD}) = \widehat{C'AD} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{DC'}{AC'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \varphi = \frac{AC^2 + BC'^2 + DC'^2}{AC'^2} = 2$$

Bài 8:

Ta có: $AD \parallel CM$.

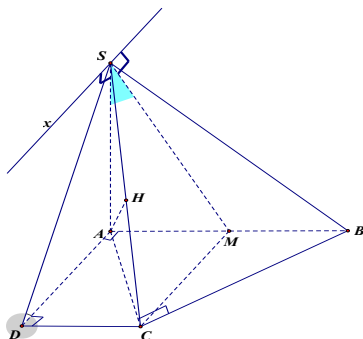
$$\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SCM) \\ AD \parallel CM \\ AD \subset (SAD), CM \subset (SCM) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAD) \cap (SCM) = Sx (Sx \parallel AD \parallel CM)$$

Ta có:

$$DA \perp SA (DA \perp (SAB)) \Rightarrow SA \perp Sx$$

$$CM \perp (SAB) (\text{vì } CM \parallel AD) \Rightarrow SM \perp CM \Rightarrow SM \perp Sx$$



Do đó: $\widehat{((SAD), (SCM))} = \widehat{(SA, SM)} = \widehat{ASM}$

$$\tan \widehat{ASM} = \frac{AM}{AS} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASM} = 30^\circ.$$

Bài 9:

Từ A kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$

Từ A kẻ $AK \perp SD (K \in SD)$

Tương tự, chứng minh được $SK \perp (SCD)$

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra

$$\widehat{((SBC), (SCD))} = \widehat{(AH, AK)} = \widehat{HAK} = 60^\circ$$

Lại có $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^\circ$. suy ra tam giác AHK đều.

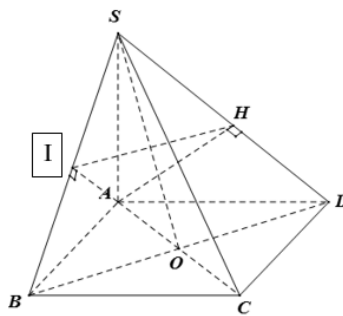
Tam giác SAB vuông tại S có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

$$\text{Suy ra } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$$

Vì $HK \parallel BD$ suy ra

$$\frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$$

Bài 10:



Dựng $AI \perp SB \Rightarrow AI \perp (SBC)$, dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa AI và AH .

Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông SAB và SAD ta có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}; SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5};$$

$$AI.SB = AB.AS \Rightarrow AI = \frac{a.a}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}; AH.SD = AD.AS \Rightarrow AH = \frac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$SI = \frac{SA^2}{SB} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$SH = \frac{SA^2}{SD} = \frac{a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Áp dụng hàm số cos cho hai tam giác BSD và IHS có chung góc S

$$\cos \hat{S} = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2.SB.SD} = \frac{2a^2 + 5a^2 - 5a^2}{2.a\sqrt{2}.a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$IH^2 = SI^2 + SH^2 - 2.SI.SH.\cos \hat{S} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{5} - 2.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{a}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\cos \widehat{IAH} = \frac{AI^2 + AH^2 - IH^2}{2.AI.AH} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{4a^2}{5} - \frac{a^2}{2}}{2.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{2a}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{IAH} = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right).$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.A	2.B	3.C	4.B	5.B	6.B	7.A	8.A	9.A	10.B
11.D	12.C	13.C	14.D	15.D					

Câu 1: Chọn A.

Mệnh đề thứ nhất đúng theo định nghĩa về góc. Mệnh đề thứ hai sai và mệnh đề thứ ba đúng theo định nghĩa hai mặt phẳng vuông góc. Mệnh đề thứ tư sai vì (R) có thể trùng với (Q) Mệnh đề thứ năm đúng theo tính chất hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng ấy.

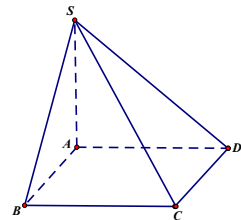
Câu 2: Chọn B.

Mệnh đề (1) sai. Các cạnh bên không vuông góc với mặt đáy.

Câu 3: Chọn C.

$$\begin{cases} (ABCD) \cap (SCD) = CD \\ AD \perp CD \\ SD \perp CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(ABCD);(SDC)} = \widehat{SDA}$$

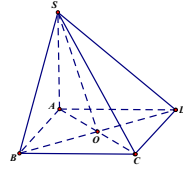
$$\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$



Câu 4: Chọn B.

$$\begin{cases} (ABCD) \cap (SBD) = BD \\ AO \perp BD \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(ABCD); (SBD)} = \widehat{SOA}$$

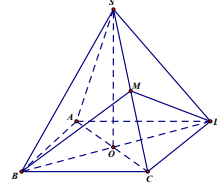
$$\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$



Câu 5: Chọn B.

$$\begin{cases} MD \perp SC \\ MB \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (MBD) \Rightarrow (SAC) \perp (MBD)$$

Suy ra $\alpha = 90^\circ$.



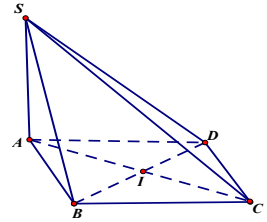
Câu 6: Chọn B.

Không có đường thẳng nào nằm trong mp (SDC) vuông góc với (SAI) .

$$(SCD) \perp (SAD) \text{ vì } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$

$$(SBC) \perp (SAB) \text{ vì } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$(SBD) \perp (SAC) \text{ vì } \begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$



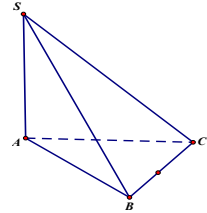
Câu 7: Chọn A.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác SBC lên mp (ABC)

Áp dụng công thức $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle SBC} \cdot \cos 30^\circ$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Tam giác ABC đều nên $AB^2 = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = a^2 \Rightarrow AB = a$



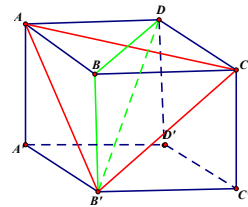
Câu 8: Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BB' \perp AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow (BB'D) \perp AC$$

$$\Rightarrow (BB'D) \perp (AB'C).$$

Câu 9: Chọn A.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a .



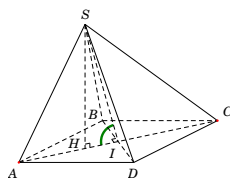
Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam giác đều ABD .

$$\text{Suy ra } HI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ và } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI \perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI \perp BD$.

$$\text{Do đó } ((SBD), (ABCD)) = (\widehat{SI, AI}) = \widehat{SIH}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SHI, \text{ có } \tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{HI} = \sqrt{5}$$



Câu 10: Chọn B.

Gọi M là trung điểm cạnh AB . Ta có: tứ giác $ADCM$ là hình vuông, $\triangle CBM$ vuông cân tại M , $BC = a\sqrt{2}$.

$$\triangle SBC \text{ vuông tại } C, SC = \sqrt{SB^2 - BC^2} = a\sqrt{7}$$

Do $CM = \frac{1}{2}AB = a$, $CM \perp AB$ nên $\triangle ACB$ vuông cân tại B .

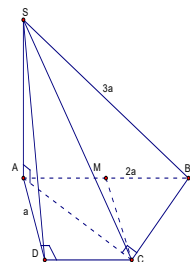
$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp BC \\ AC \perp BC \\ BC = (SBC) \cap (ABCD) \end{cases}$$

Nên góc giữa mp (SBC) và mp $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$

$$\cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $\triangle ABC$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle SBC$ lên mp $(ABCD)$

$$\text{Vậy } \frac{S_{\triangle SBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{\cos \widehat{SCA}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$



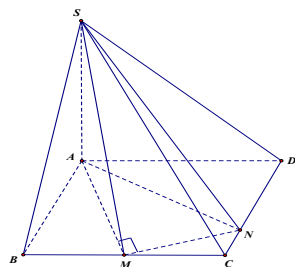
Câu 11: Chọn D.

Áp dụng Pitago cho các tam giác vuông ABM, CMN, ADN . Ta có:

$$\left. \begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + BM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \\ MN^2 &= CM^2 + CN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{16} \\ AN^2 &= AD^2 + DN^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{25a^2}{16} \end{aligned} \right\}$$

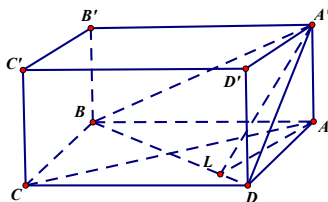
$$\Rightarrow AM^2 + MN^2 = AN^2.$$

Theo định lý đảo Pitago thì $\triangle AMN$ vuông tại M . Nên $MN \perp AM$.



Ta có: $\begin{cases} MN \perp AM \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAM) . \text{ Mà } MN \subset (SMN) \Rightarrow (SAM) \perp (SMN) .$

Câu 12: Chọn D.



Kẻ $AL \perp BD$. Ta có: $\begin{cases} BD \perp AA' \\ BD \perp AL \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'L) \Rightarrow BD \perp A'L$

Do $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ BD \perp A'L \\ BD \perp AL \end{cases} \Rightarrow ((A'BD), (ABCD)) = (AL, A'L)$

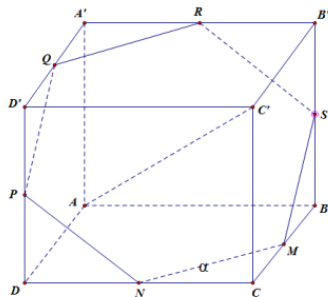
Xét tam giác ABC :

$$\frac{1}{AL^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4AB^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AL^2 = \frac{4AB^2}{5} \Rightarrow AL = \frac{2\sqrt{5}AB}{5}$$

Xét tam giác $A'AL$

$$\tan \widehat{A'AL} = \frac{AA'}{AL} = \frac{4AB}{2\sqrt{5}AB} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \widehat{A'AL} \approx 77^{\circ}23' \Rightarrow \sin \widehat{A'AL} \approx 0,98 .$$

Câu 13: Chọn C.

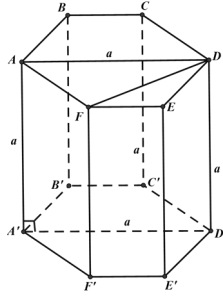


Gọi M là trung điểm BC , khi đó $MA = MC' = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực của AC' . Tương tự ta cũng có các điểm N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm $DC, DD', D'A', A'B', B'B$ và cũng thuộc mặt phẳng trung trực.

Vậy thiết diện cần tìm là lục giác đều $MNPQRS$ và có diện tích bằng

$$6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 .$$

Câu 14: Chọn D.



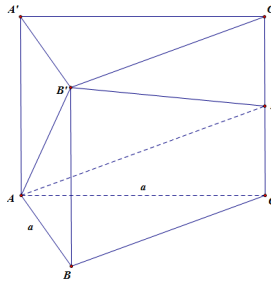
Tổng số đo các góc của hình lục giác là $4.180^0 = 720^0$. Vì $ABCDEF$ là hình lục giác đều nên mỗi góc của hình lục giác đều $ABCDEF$ là $120^0 \Rightarrow \widehat{FAB} = 120^0$. Vì $ABCDEF$ là hình lục giác đều nên ta suy ra:

$$AD \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{FAB} \text{ và } \widehat{EDC} \Rightarrow \widehat{FAD} = \frac{\widehat{FAB}}{2} = 60^0.$$

Tam giác AFD vuông tại F có $\widehat{FAD} = 60^0$ và $AD = a$ ta suy ra:

$$\cos \widehat{FAD} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AF = AD \cdot \cos \widehat{FAD} = a \cdot \cos 60^0 = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}.$$

Câu 15: Chọn D.



Ta có $AB' = a\sqrt{2}$, $AI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2}$ mà

$$B'C'^2 = BC^2 = a^2 + a^2 - 2a.a.\cos 120^0 = 3a^2. \text{ Suy ra } B'I = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Do đó } AB'^2 + AI^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta AB'I \text{ vuông tại } A.$$

Ta có ΔABC là hình chiếu của $\Delta AB'I$ trên (ABC) .

$$\text{Mà } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^0 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Nên } S_{\Delta AB'I} = \frac{1}{2} \cdot AB' \cdot AI = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Gọi } (\widehat{(ABC), (AB'I)}) = \varphi \text{ khi đó } S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AB'I} \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Chương VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

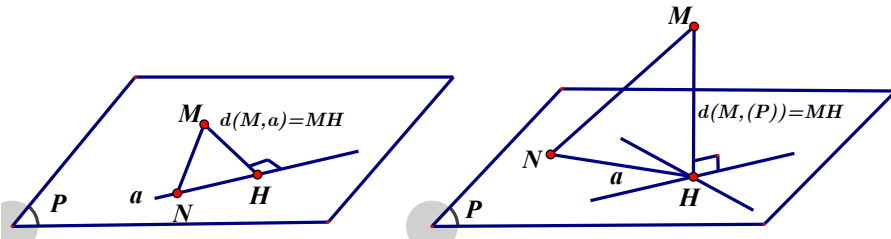
Bài 4

KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng.

- Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến đường thẳng a , ký hiệu $d(M, a)$. Khi đó $d(M, a) = MH$.
- Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) , ký hiệu $d(M, (P))$. Khi đó $d(M, (P)) = MH$.

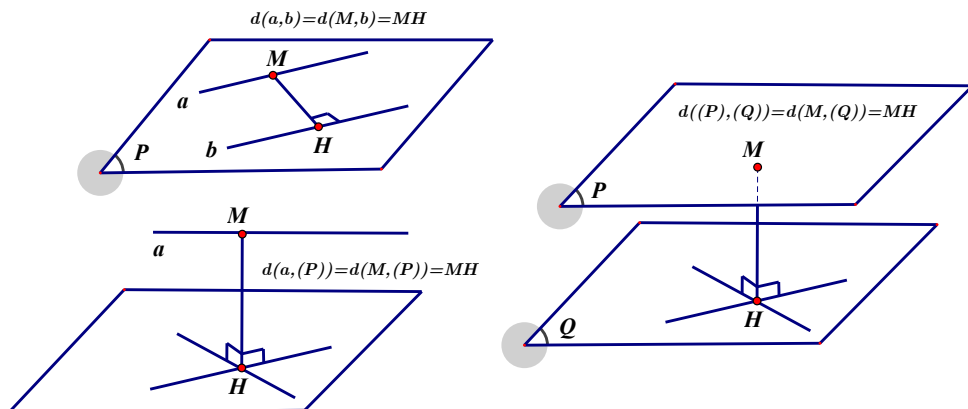


- ❖ Chú ý:
- * $d(M, a) = 0 \Leftrightarrow M \in a$.
 - * $d(M, (P)) = 0 \Leftrightarrow M \in (P)$.
 - * Với mọi điểm N tùy ý thuộc a , luôn có $d(M, a) \leq MN$.
 - * Với mọi điểm N tùy ý thuộc (P) , luôn có $d(M, (P)) \leq MN$.

II. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song.

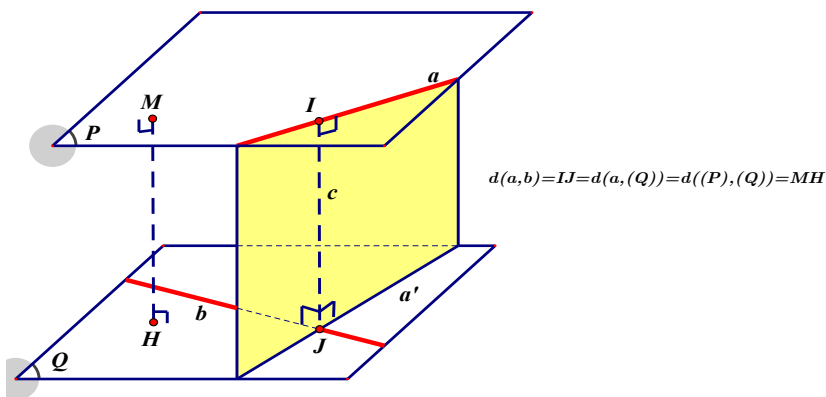
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên a đến b , kí hiệu $d(a, b)$.
- Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên a đến (P) , kí hiệu $d(a, (P))$.

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên (P) đến (Q) , kí hiệu $d((P),(Q))$.



III. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

- Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là đường vuông góc chung của a và b .
- Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, ký hiệu $d(a,b)$. Khi đó $d(a,b)=IJ$.



❖ Chú ý:

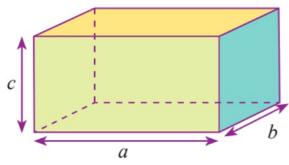
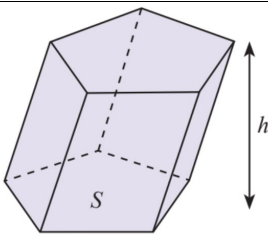
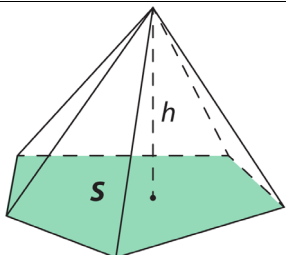
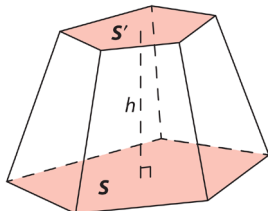
- * Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

$$d(a,b) = d(a,(Q)), \text{ với } a \parallel (Q), b \subset (Q)$$

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

$$d(a,b) = d((P),(Q)), \text{ với } (P) \parallel (Q), a \subset (P), b \subset (Q)$$

IV. Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp.

Tên khối	Hình dáng	Công thức thể tích
Khối hộp chữ nhật		$V = a.b.c$
Khối lăng trụ		$V = S.h$
Khối chóp		$V = \frac{1}{3}.S.h$
Khối chóp cụt		$V = \frac{1}{3}.h.(S + \sqrt{S \cdot S'} + S')$

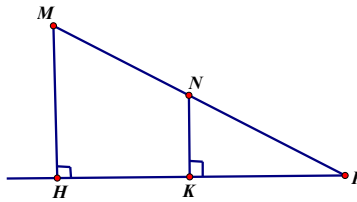
B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:

XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp:

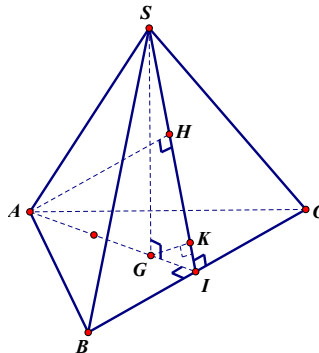
- + Xác định hình chiếu H của điểm M đến đường thẳng a
 - * Trong mặt phẳng chứa M và a , kẻ $MH \perp a$ tại H .
 - * Dụng (P) chứa M và vuông góc a tại $H \Rightarrow MH \perp a$ tại H .
- + Sử dụng các công thức tính độ dài đoạn thẳng để tính MH :
 - * $\triangle MHN$ vuông tại H : $MH^2 = MN^2 - NH^2$
 - * $\triangle MAB$ vuông tại M có MH là đường cao:
 - $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2}$.
 - $MH = \frac{MA \cdot MB}{AB} = \frac{MA \cdot MB}{\sqrt{MA^2 + MB^2}}$.
 - * $\triangle MAB$ có MH là đường cao: $S_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MH \Rightarrow MH = \frac{2 \cdot S_{MAB}}{AB}$.
 - * Dùng tỉ lệ: $\begin{cases} MN \cap a = P \\ d(N, a) = NK \end{cases} \Rightarrow \frac{d(M, a)}{d(N, a)} = \frac{MP}{NP}$.



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ tất cả các cạnh bằng $2a$, $SG \perp (ABC)$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$, I là trung điểm BC .

- a) Tính khoảng cách từ S đến AI
- b) Tính khoảng cách từ A đến SI .

Lời giải



a) Ta có $SG \perp AI$ tại $G \Rightarrow d(S, AI) = SG$.

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = a\sqrt{3}, AG = \frac{2}{3} AI = \frac{2\sqrt{3}}{3} a.$$

Xét ΔSAG vuông tại G có:

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

$$\text{Vậy } d(S, AI) = SG = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

b) Trong (SAI) : Vẽ $AH \perp SI$ tại $H \Rightarrow d(A, SI) = AH$,

Vẽ $GK \perp SI$ tại $K \Rightarrow d(G, SI) = GK$.

$$\text{Ta có: } AG \cap SI = I \Rightarrow \frac{d(A, SI)}{d(G, SI)} = \frac{AI}{GI} \Rightarrow d(A, SI) = AH = \frac{AI}{GI} \cdot GK$$

ΔSGI vuông tại G có GK là đường cao:

$$GK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3}\right)^2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}a.$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AI}{GI} \cdot GK = \frac{3}{1} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{9}a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

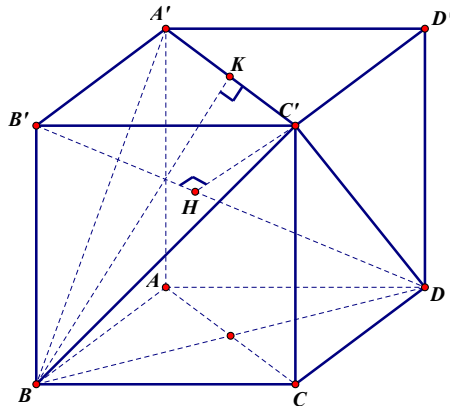
$$\text{Vậy } d(A, SI) = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$.

a) Tính khoảng cách từ C' đến $B'D$.

b) Tính khoảng cách từ B đến $A'C'$.

Lời giải



a) Qua G ta dựng mặt phẳng vuông góc với $A'C'$ cắt $A'C'$ tại H :

+ $BG \cap AC = I \Rightarrow BG \perp AC$ tại I (ΔABC đều)

$$+ \begin{cases} BG \perp AC \subset (ACC'A') \\ BG \perp A'A \subset (ACC'A') \Rightarrow BG \perp (ACC'A') \\ AC \cap A'A = A' \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} BG \perp (ACC'A') \\ BG \subset (B'BG) \end{cases} \Rightarrow (B'BG) \perp (A'C'CA)$$

$$+ \begin{cases} (B'BG) \perp (A'C'CA) \\ (B'BG) \cap (A'C'CA) = HI \Rightarrow A'C' \perp (B'BG) \Rightarrow A'C' \perp GH \\ A'C' \perp HI \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(G, A'C') = GH.$$

Xét ΔGIH vuông tại I có:

$$GH = \sqrt{GI^2 + IH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 + (3a)^2} = \frac{\sqrt{327}}{6} a.$$

$$\text{Vậy } d(G, A'C') = \frac{\sqrt{327}}{6} a.$$

b) Trong $(C'A'G)$, kẻ $C'K \perp A'G \Rightarrow d(C', A'G) = C'K$.

$\Delta A'AG$ vuông tại A có:

$$A'G = \sqrt{A'A^2 + AG^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2} = \frac{2\sqrt{21}}{3} a.$$

$\Delta C'A'G$ có GH và $C'K$ là hai đường cao:

$$\Rightarrow A'G \cdot C'K = A'C' \cdot GH \Rightarrow C'K = \frac{A'C' \cdot GH}{A'G} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{327}}{6} a}{\frac{2\sqrt{21}}{3} a} = \frac{\sqrt{763}}{28} a.$$

$$\text{Vậy } d(C', A'G) = \frac{\sqrt{763}}{28} a.$$

DẠNG 2:

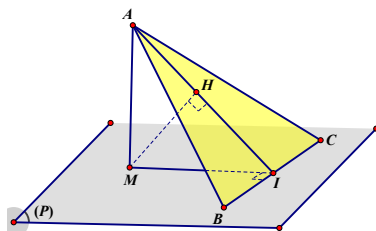
XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG

Phương pháp:

+ Xác định hình chiếu của điểm lên mặt

* Dựng trực tiếp: $AM \perp (P)$ tại $M \Rightarrow d(A, (P)) = AM$

* Dựng hình chiếu từ chân đường vuông góc



Ta có: $\begin{cases} AM \perp (P) \\ BC \subset (P) \end{cases} \Rightarrow AM \perp BC.$

Trong (P) , dựng $MI \perp BC$:

$$\begin{cases} BC \perp MI \subset (AMI) \\ BC \perp AM \subset (AMI) \\ MI \cap AM = M \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (AMI)$$

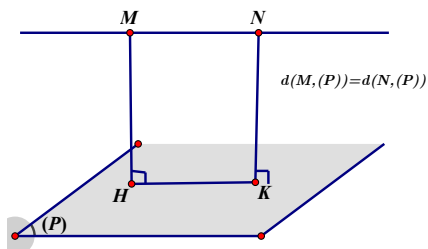
Trong (AMI) , dựng $MH \perp AI$:

$$\begin{cases} BC \perp (AMI) \\ MH \subset (AMI) \end{cases} \Rightarrow BC \perp MH$$

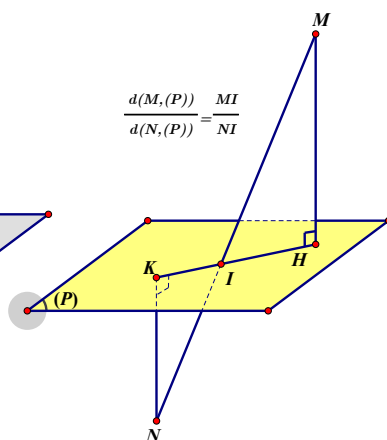
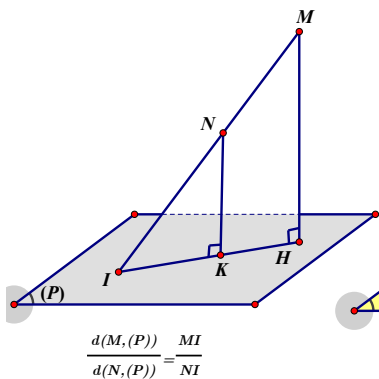
$$\begin{cases} MH \perp AI \subset (ABC) \\ MH \perp BC \subset (ABC) \\ AI \cap BC = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow MH \perp (ABC)$$

+ Sử dụng tính chất song song: $MN \parallel (P) \Rightarrow d(M, (P)) = d(N, (P))$



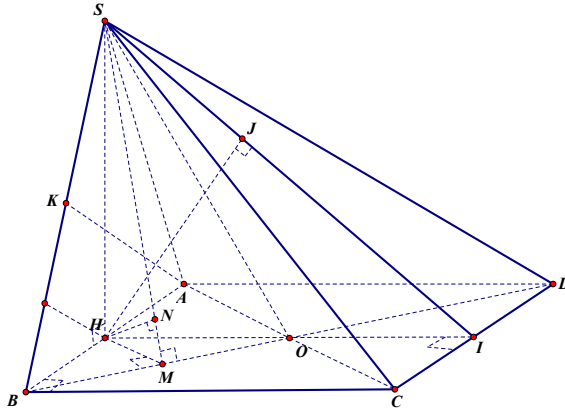
+ Sử dụng tỉ lệ: $MN \cap (P) = I \Rightarrow \frac{d(M, (P))}{d(N, (P))} = \frac{MI}{NI}.$



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

- Tính khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.
- Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .
- Tính khoảng cách từ A đến (SCD) .
- Tính khoảng cách từ C đến (SBD) .

Lời giải



- a) Trong (SAB) , lấy H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB): SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- b) $\begin{cases} BC \perp AB \subset (SAB) \\ BC \perp SH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp (SAB). \\ AB \cap SH = H \end{cases}$

Trong (SAB) , lấy K là trung điểm $SB \Rightarrow AK \perp SB$

$$\begin{cases} AK \perp SB \subset (SBC) \\ AK \perp BC \subset (SBC), (BC \perp AK \subset (SAB)) \Rightarrow AK \perp (SBC). \\ SB \cap BC = B \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- c) $AH \parallel CD \Rightarrow AH \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)).$

Trong $(ABCD)$, lấy I là trung điểm $CD \Rightarrow HI \perp CD$.

Trong (SHI) , dựng $HJ \perp SI$ tại J , ta có:

$$\begin{cases} CD \perp HI \subset (SHI) \\ CD \perp SH \subset (SHI), (SH \perp CD \subset (ABCD)) \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp HJ \\ HI \cap SH = H \\ HJ \perp CD \subset (SCD) \\ HJ \perp SI \subset (SCD) \Rightarrow HJ \perp (SCD) \Rightarrow d(H, (SCD)) = HJ \\ CD \cap SI = I \end{cases}$$

ΔSHI vuông tại H có HJ là đường cao:

$$HJ = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

Vậy $d(A, (SCD)) = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$

d) $CA \cap (SBD) = O \Rightarrow \frac{d(C, (SBD))}{d(A, (SBD))} = \frac{CO}{AO} = 1 \Rightarrow d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$

$AH \cap (SBD) = B \Rightarrow \frac{d(A, (SBD))}{d(H, (SBD))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2(H, (SBD))$

Trong $(ABCD)$, dựng $HM \perp BD$ tại $M \Rightarrow M$ là trung điểm BO

Trong (SHM) , dựng $HN \perp SM$ tại N :

$$\begin{cases} BD \perp HM \subset (SHM) \\ BD \perp SH \subset (SHM) \Rightarrow BD \perp (SHM) \Rightarrow BD \perp HN \subset (SHM). \\ HM \cap SH = H \\ HN \perp BD \subset (SBD) \\ HN \perp SM \subset (SBD) \Rightarrow HN \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HN. \\ BD \cap SM = M \end{cases}$$

ΔSHM vuông tại H có HN là đường cao:

$$HN = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{30}}{10}a.$$

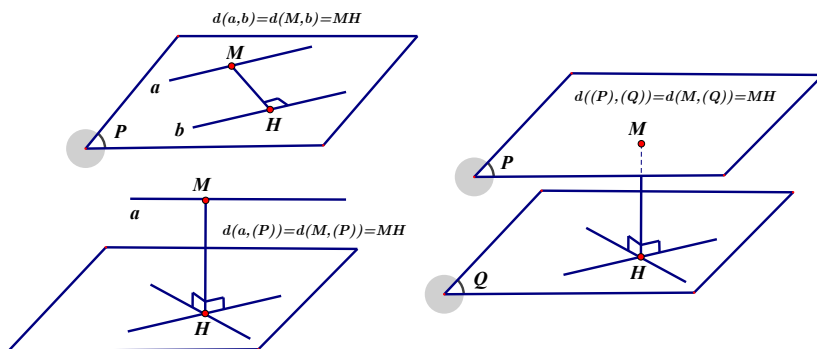
Vậy $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = 2(H, (SBD)) = 2HN = \frac{\sqrt{30}}{5}a.$

DẠNG 3:

XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐỐI TƯỢNG SONG SONG

Phương pháp:

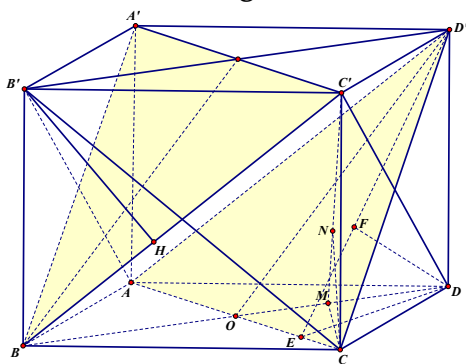
+ Quy bài toán tìm khoảng cách giữa các đối tượng song song về tìm khoảng cách từ điểm đến đường – khoảng cách từ điểm đến mặt.



Ví dụ 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 3a$, $DD' = 2a$.

- Tính khoảng cách giữa CC' và AA' ; $C'D'$ và AB .
- Tính khoảng cách giữa $A'B'$ và $(C'D'AB)$; BB' và $(ACC'A')$.
- Tính khoảng cách giữa $(BA'C')$ và $(D'AC)$.
- Tính khoảng cách giữa AB' và $(C'BD)$.

Lời giải



a) Ta có:

$$+ CC' \parallel AA' \Rightarrow d(CC', AA') = d(C, AA') = CA = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = a\sqrt{10}.$$

$$+ C'D' \parallel AB \Rightarrow d(C'D', AB) = d(D', AB) = D'A = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{13}.$$

b) Ta có: $\left. \begin{array}{l} A'B' \parallel AB \\ A'B' \not\subset (C'D'AB) \end{array} \right\} \Rightarrow A'B' \parallel (C'D'AB).$

$$\Rightarrow d(A'B', (C'D'AB)) = d(B', (C'D'AB)).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp BB' \subset (CBB'C') \\ AB \perp BC \subset (CBB'C') \Rightarrow AB \perp (CBB'C'). \\ BB' \cap BC = B \end{cases}$$

Trong $(CBB'C')$ vẽ $B'H \perp BC'$ tại H

$$\begin{cases} B'H \perp BC' \subset (C'D'AB) \\ B'H \perp AB \subset (C'D'AB) \Rightarrow B'H \perp (C'D'AB) \Rightarrow d(B', (C'D'AB)) = B'H \\ BC' \cap AB = B \end{cases}$$

$\Delta BB'C$ vuông tại B' có $B'H$ là đường cao:

$$B'H = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(3a)^2}}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}a.$$

$$\text{Vậy } d(A'B', (C'D'AB)) = \frac{6\sqrt{13}}{13}a.$$

$$\text{c) Ta có: } \begin{cases} A'B \parallel CD' \\ BC' \parallel D'A \\ A'B \cap BC' = B \text{ trong } (A'BC') \Rightarrow (A'BC') \parallel (CD'A). \\ CD' \cap D'A = D' \text{ trong } (CD'A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d((A'BC'), (CD'A)) = d(B, (CD'A)).$$

$$BD \cap (D'AC) = O \Rightarrow \frac{d(B, (D'AC))}{d(D, (D'AC))} = \frac{BO}{DO} = 1.$$

$$\Rightarrow d(B, (D'AC)) = d(D, (D'AC)).$$

Trong $(ABCD)$, vẽ $DE \perp AC$ tại E

Trong $(D'DE)$, vẽ $DF \perp D'E$ tại F

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp DE \subset (D'DE) \\ AC \perp DD' \subset (D'DE) \Rightarrow AC \perp (D'DE) \Rightarrow AC \perp DF .. \\ DE \cap DD' = D \end{cases}$$

$$\begin{cases} DF \perp D'E \subset (D'AC) \\ DF \perp AC \subset (D'AC) \Rightarrow DF \perp (D'AC) \Rightarrow d(D, (D'AC)) = DF \\ D'E \cap AC = E \end{cases}$$

$$\Delta DAC \text{ vuông tại } D \text{ có } DE \text{ là đường cao} \Rightarrow \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2}.$$

$$\Delta D'DE \text{ vuông tại } D \text{ có } DF \text{ là đường cao} \Rightarrow \frac{1}{DF^2} = \frac{1}{DD'^2} + \frac{1}{DE^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{DF^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{49}{36a^2}.$$

$$\Rightarrow DF = \frac{6}{7}a.$$

$$\text{Vậy } d((A'BC'), (CD'A)) = \frac{6}{7}a.$$

$$\text{d) Ta có: } \begin{cases} AB' \parallel C'D \\ C'D \subset (C'DB) \Rightarrow AB' \parallel (C'DB) \Rightarrow d(AB', (C'BD)) = d(A, (C'BD)). \\ AB' \not\subset (C'DB) \end{cases}$$

$$AC \cap (C'BD) = O \Rightarrow \frac{d(A, (C'BD))}{d(C, (C'BD))} = \frac{AO}{CO} = 1.$$

$$\Rightarrow d(A, (C'BD)) = d(C, (C'BD)).$$

Trong $(ABCD)$, vẽ $CM \perp BD$ tại M ..

Trong $(CC'M)$, vẽ $CN \perp C'M$ tại N , chứng minh tương tự như câu c:

$$d(C, (C'BD)) = CN = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CC'^2}}} = \frac{6}{7}a$$

$$\text{Vậy } d(AB', (C'BD)) = \frac{6}{7}a.$$

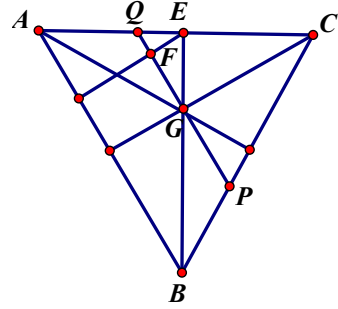
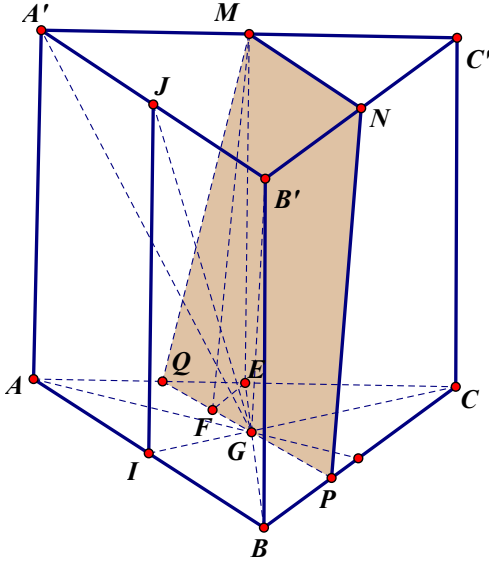
Ví dụ 6. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'C'$ và $B'C'$; G là trọng tâm ΔABC , mặt phẳng (MNG) cắt CB, CA lần lượt tại P và Q .

a) Biết khoảng cách giữa CC' và $(ABB'A')$ bằng $a\sqrt{3}$, tính khoảng cách giữa $A'A$ và $B'B$.

b) Biết khoảng cách giữa PQ và $A'B'$ bằng $\frac{2\sqrt{21}}{3}a$, tính khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ.

c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

Lời giải



a) Ta có: $CC' \parallel (ABB'A') \Rightarrow d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A'))$

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow CI \perp AB$.

$$\begin{cases} CI \perp AB \subset (ABB'A') \\ CI \perp A'A \subset (ABB'A') \Rightarrow CI \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = CI = a\sqrt{3} . \\ AB \cap AA' = A \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = AC = BC = a\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a .$$

Ta có $AA' \parallel BB' \Rightarrow d(AA', BB') = d(A, BB') = AB = a$.

Vậy $d(AA', BB') = 2a$.

b) Ta có: $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN \subset (MNG) \Rightarrow (MNG) \cap (ABC) = Gx \parallel MN \parallel AB . \\ AB \subset (ABC) \end{cases}$

Ta có $PQ \parallel AB \parallel A'B' \Rightarrow d(PQ, A'B') = d(G, A'B')$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$.

$$\Rightarrow \begin{cases} IJ \perp AB, IJ \perp A'B' \\ GI \perp AB, GI \perp A'B' \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp (GIJ) \Rightarrow A'B' \perp GJ \text{ tại } J .$$

$$\Rightarrow d(G, A'B') = GJ = \frac{2\sqrt{21}}{3} a .$$

$$\Delta GIJ \text{ vuông tại } I \Rightarrow IJ = \sqrt{GJ^2 - GI^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{21}}{3} a\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3}\right)^2} = 3a .$$

Vậy $d((ABC), (A'B'C')) = A'A = B'B = IJ = 3a$.

c) Ta có: $MN \parallel PQ \Rightarrow d(MN, PQ) = d(M, PQ) = MF$ với F là hình chiếu của M lên PQ .

$$\begin{cases} PQ \perp MF \\ PQ \perp ME \end{cases} \Rightarrow PQ \perp (MFE) \Rightarrow PQ \perp EF.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow MF &= \sqrt{ME^2 + EF^2} = \sqrt{(3a)^2 + \frac{1}{\frac{1}{EQ^2} + \frac{1}{EG^2}}} \\ &= \sqrt{(3a)^2 + \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{1}{6} \cdot 2a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3}\right)^2}}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}a. \end{aligned}$$

Diện tích hình thang $MNPQ$:

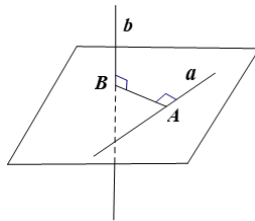
$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= \frac{1}{2}(MN + PQ) \cdot d(MN, PQ) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}A'B' + \frac{2}{3}AB \right) \cdot MF \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a + \frac{2}{3} \cdot 2a \right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}a = \frac{7\sqrt{5}}{8}a^2. \end{aligned}$$

DẠNG 4:

XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Phương pháp:

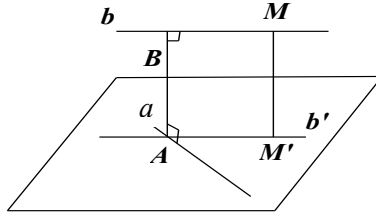
+ Trong trường hợp a, b chéo nhau và $a \perp b$



* Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .

* Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A , ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .

+ Trong trường hợp a, b chéo nhau và không vuông góc nhau.



* Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .

* Lấy một điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M' .

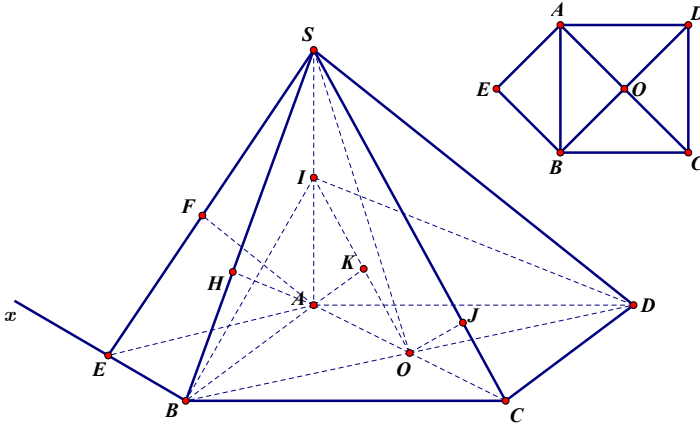
* Từ M' dựng $b' // b$ cắt a tại A .

* Từ A dựng $AB // MM'$ cắt b tại B , độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $a\sqrt{2}$, cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc mặt đáy.

- Tính khoảng cách giữa BC và SD .
- Tính khoảng cách giữa SC và AD ; SC và BD .
- Tính khoảng cách giữa AC và SB .

Lời giải



$$a) \begin{cases} CD \perp SA \subset (SAD) \\ CD \perp AD \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \subset (SAD). \\ SA \cap AD = A \end{cases}$$

Ta có: $CD \perp SD$ tại D , $CD \perp BC$ tại C .

$\Rightarrow CD$ là đoạn vuông góc chung của SD và BC .

$\Rightarrow d(SD, BC) = CD = 2a$.

Cách khác:

$$\begin{cases} BC // AD \subset (SAD) \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC // (SAD) \Rightarrow d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) \\ = d(C, (SAD)) = CD = a\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \begin{cases} AD // BC \subset (SBC) \\ AD \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AD // (SBC). \\ \Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)).$$

Trong (SAB) vẽ $AH \perp SB$ tại H

$$\begin{cases} BC \perp SA \subset (SAB) \\ BC \perp AB \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \subset (SAB). \\ SA \cap AB = A \end{cases} \\ \begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp BC \subset (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = a. \\ SB \cap BC = B \end{cases}$$

Vậy $d(AD, SC) = a$.

Trong (SAC) vẽ $OJ \perp SC$ tại J .

$$\begin{cases} BD \perp AC \subset (SAC) \\ BD \perp SA \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OJ \subset (SAC). \\ AC \cap SA = A \end{cases}$$

Ta có: $OJ \perp BD$ tại O , $OJ \perp SC$ tại J .

$\Rightarrow OJ$ là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

$$\Rightarrow d(BD, SC) = OJ = d(O, SC) = \frac{1}{2} d(A, SC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

Cách khác: Gọi I là trung điểm $SA \Rightarrow OI // SC$.

$$\begin{cases} SC // OI \subset (IBD) \\ SC \not\subset (IBD) \end{cases} \Rightarrow SC // (IBD) \Rightarrow d(SC, BD) = d(SC, (IBD)) = d(C, (IBD)). \\ CA \cap (IBD) = O \Rightarrow \frac{d(C, (IBD))}{d(A, (IBD))} = \frac{CO}{AO} = 1 \Rightarrow d(C, (IBD)) = d(A, (IBD)).$$

Trong (SAC) vẽ $AK \perp OI$ tại K .

$$\begin{cases} AK \perp OI \subset (IBD) \\ AK \perp BD \subset (IBD) \Rightarrow AK \perp (IBD). \\ OI \cap BD = O \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(A, (IBD)) = AK = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AO^2}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, BD) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

c) Trong $(ABCD)$ vẽ $Bx \parallel AC$, $AE \perp Bx$ tại E , $AF \perp SE$ tại F .

$$\begin{cases} AC \parallel BE \subset (SBE) \\ AC \not\subset (SBE) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (SBE).$$

$$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBE)) = d(A, (SBE)).$$

$$\begin{cases} BE \perp AE \subset (SAE) \\ BE \perp SA \subset (SAE) \Rightarrow BE \perp (SAE) \Rightarrow BE \perp AF \subset (SAE). \\ AE \cap SA = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} AF \perp BE \subset (SBE) \\ AF \perp SE \subset (SBE) \Rightarrow AF \perp (SBE) \Rightarrow d(A, (SBE)) = AF. \\ BE \cap SE = E \end{cases}$$

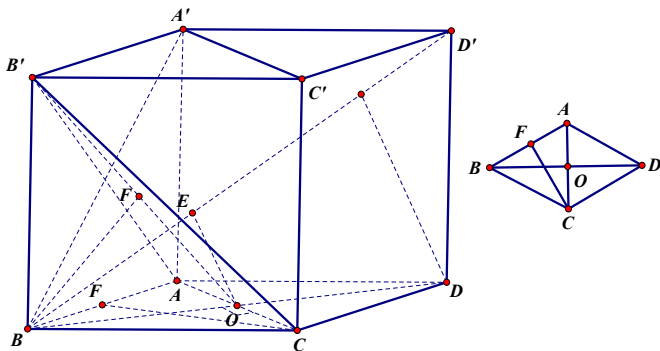
$$AF = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AS^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{1}{2} \cdot 2a\right)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2}}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Ví dụ 8. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a , góc $\widehat{DAB} = 120^\circ$.

- Tính khoảng cách giữa BD và CC' .
- Tính khoảng cách giữa AC và BD' .
- Tính khoảng cách giữa AC và $A'B'$.
- Tính khoảng cách giữa CD và AB' .
- Tính khoảng cách giữa AB' và $A'C'$.

Lời giải



a) Hình thoi $ABCD$ có cạnh $AC = a, BD = a\sqrt{3}$, O là tâm.

Ta có: $CO \perp BD$ tại O , $CO \perp CC'$ tại C .

$\Rightarrow CO$ là đoạn vuông góc chung của BD và CC' .

$$\Rightarrow d(BD, CC') = CO = \frac{a}{2}.$$

b) Trong $(BDD'B')$ vẽ $OE \perp BD'$ tại E

$$\begin{cases} AC \perp BD \subset (BDD'B') \\ AC \perp DD' \subset (BDD'B') \Rightarrow AC \perp (BDD'B') \Rightarrow AC \perp OE \subset (BDD'B'). \\ BD \cap DD' = D \end{cases}$$

Ta có: $OE \perp BD'$ tại E , $OE \perp AC$ tại O .

$\Rightarrow OE$ là đoạn vuông góc chung của AC và BD' .

$$\Rightarrow d(AC, BD') = OE = d(O, BD') = \frac{1}{2} d(D, BD') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DD'^2}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

c) AC và $A'B'$ là hai đường thẳng chéo nhau nằm trong hai mặt đáy song song, nên $d(AC, A'B') = d((ABCD), (A'B'C'D')) = a$.

d) Gọi F là trung điểm $AB \Rightarrow CF \perp AB$ tại F , $CF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{cases} CF \perp AB \subset (ABB'A') \\ CF \perp AA' \subset (ABB'A') \Rightarrow CF \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = CF = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \\ AB \cap AA' = A \end{cases}$$

CD và AB' là hai đường thẳng chéo nhau nằm trong hai mặt bên song song, nên $d(CD, AB') = d((CDD'C'), (AB'BA)) = d(C, (AB'BA)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$e) \left\{ \begin{array}{l} A'C' // AC \subset (ACB') \\ A'C' \not\subset (ACB') \end{array} \Rightarrow A'C' // (ACB') \right\} \Rightarrow d(A'C', AB') = d(A'C', (ACB'))$$

$$A'C' \not\parallel AB' \Rightarrow d(A'C', AB') = d(A', (ACB')) = d(B, (ACB')).$$

Trong $(BDD'B')$ vẽ $BF \perp B'O$ tại F

$$\left\{ \begin{array}{l} BF \perp B'O \subset (B'AC) \\ BF \perp AC \subset (B'AC) \\ B'O \cap AC = O \end{array} \Rightarrow BF \perp (B'AC) \Rightarrow d(B, (B'AC)) = BF.$$

$$BF = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BO^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

$$\text{Vậy } d(A'C', AB') = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

DẠNG 5:

XÁC ĐỊNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP - KHỐI LĂNG TRỤ - KHỐI HỘP

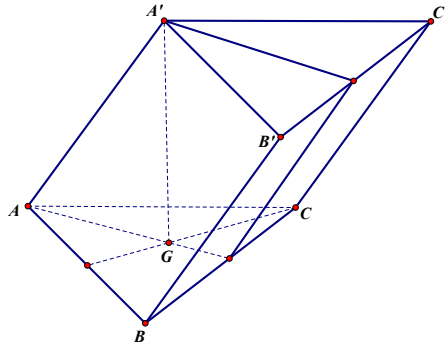
Phương pháp:

- + Sử dụng các công thức phù hợp tính diện tích đáy.
- + Xác định và sử dụng công thức phù hợp tính chiều cao khối.
- + Sử dụng công thức tính thể tích ứng với khối cần tính.

Ví dụ 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên tạo với mặt đáy góc 60° , đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của $\triangle ABC$.

- a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$
- b) Người ta cắt bỏ khối chóp $B.A'B'C'$ ra khỏi khối lăng trụ này. Tính thể tích phần còn lại của khối lăng trụ.

Lời giải



$$a) \quad AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow d((ABC), (A'B'C')) = A'G = AG\sqrt{3} = 2a.$$

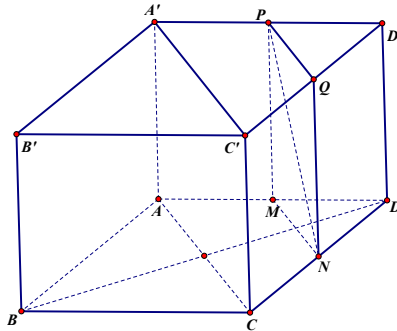
$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot d((ABC), (A'B'C')) = \frac{\sqrt{3}}{4} (2a)^2 \cdot 2a = 2\sqrt{3}a^3.$$

$$b) \quad V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot S_{A'B'C'} \cdot d(B, (A'B'C')) = \frac{1}{3} \cdot S_{A'B'C'} \cdot A'G = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$\Rightarrow \text{Thể tích phần còn lại: } V_{A'C'ABC} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3.$$

Ví dụ 10. Một căn phòng trưng bày được thiết kế theo dạng hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh $6m$. Người ta dựng bức tường $PQNM$ như hình vẽ có diện tích $18m^2$ chia phòng làm hai phần, phần lớn hơn là không gian trưng bày của phòng, tính thể tích phần không gian trưng bày của căn phòng.

Lời giải



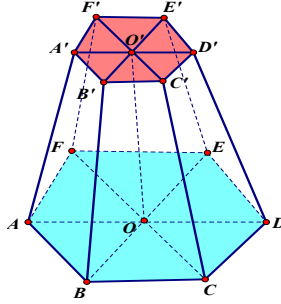
$$S_{PQNM} = MN \cdot NQ = \frac{1}{2} AC \cdot NQ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot NQ = 18 \Rightarrow NQ = 6m.$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD.A'B'C'D'} &= S_{ABCD} \cdot d((ABCD), (A'B'C'D')) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot AA' \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} AC^2 \cdot NQ = 108\sqrt{3} (m^3) \end{aligned}$$

$$V_{MND, QPD'} = S_{MND} \cdot d((MND), (QPD')) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 \cdot 6 = \frac{27\sqrt{3}}{2} m^3.$$

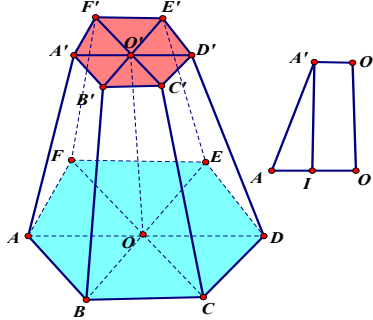
$$\Rightarrow \text{Thể tích phần trung bày: } V = 108\sqrt{3} - \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{189\sqrt{3}}{2} m^3.$$

Ví dụ 11. Để tạo nên một chiếc lồng đèn hình chóp cắt đều như hình bên dưới cần dùng 3 loại thanh tre có độ dài lần lượt là $30cm, 60cm, 90cm$, sao cho lồng đèn cao nhất có thể. Tính thể tích lồng đèn này.



Lời giải

Vì để lồng đèn cao nhất nên thanh $90cm$ được dùng làm cạnh bên, các thanh $30cm, 60cm$ lần lượt dùng làm các cạnh đáy lớn và đáy nhỏ của hình chóp cắt.



$$h = A'I = \sqrt{90^2 - (60 - 30)^2} = 60\sqrt{2} (cm).$$

$$S = S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 60^2 = 5400\sqrt{3} (cm^2).$$

$$S' = S_{A'B'C'D'E'F'} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 30^2 = 1350\sqrt{3} (cm^2).$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} h \cdot (S + S' + \sqrt{SS'}) = 189000\sqrt{6} (cm^3).$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = 2a$; $BC = \frac{3a}{2}$; $AD = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của BD . Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính:

- Khoảng cách từ C đến (SBD) .
- Khoảng cách từ B đến (SAH) .

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) vuông góc với đáy và $SA = SB = b$.

- Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.
- Gọi I , H lần lượt là trung điểm của CD và AB . Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SHC) .
- Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) .
- Tính khoảng cách từ AD đến mặt phẳng (SBC) .

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy; $SA = a\sqrt{3}$. Tam giác ABC đều cạnh a .

- Tính khoảng cách SA và BC .
- Tính khoảng cách SB và CI với I là trung điểm của AB .
- Tính khoảng cách từ B tới mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách từ J tới mặt phẳng (SAB) với J là trung điểm của SC .

Bài 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, và SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết góc giữa (SCD) và đáy bằng 60° .

- Tính khoảng cách từ O đến (SCD) với O là tâm đáy.
- Tính khoảng cách từ G đến (SAB) với G là trọng tâm tam ΔSCD .
- Tính khoảng cách giữa SA và BD .
- Tính khoảng cách giữa CD và AI với I là điểm thuộc SD sao cho $SI = \frac{1}{2}ID$.

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 2a$, $AD = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng

($ABCD$) là điểm H thuộc AB với $AH = HB$. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng ($ABCD$) bằng 60° .

- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).
- Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SE với E là điểm thuộc AD sao cho $AE = a$.

Bài 6: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với ($ABCD$) và góc giữa (SBC) và đáy bằng 60° .

- Tính khoảng cách giữa BC và SD .
- Tính khoảng cách giữa CD và SB .
- Tính khoảng cách giữa SA và BD .
- Tính khoảng cách giữa SI và AB , với I là trung điểm của CD .
- Tính khoảng cách giữa DJ và SA , với J là điểm trên cạnh BC sao cho $BJ = 2JC$.
- Tính khoảng cách giữa DJ và SC , với J là điểm trên cạnh BC sao cho $BJ = 2JC$.
- Tính khoảng cách giữa AE và SC , với E là trung điểm của BC .

Bài 7: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$, mặt bên $ACC'A'$ là hình vuông. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AC, CC', A'B'$ và H là hình chiếu của A lên BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MP và HN .

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi $AC = 2a$, $BD = 3a$, $AC \perp BD$ và SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$), cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa AB và SC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Bài 10: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Bài 11: Một cái lều ngủ hình chóp cụt đều có hai đáy lần lượt là hai hình vuông cạnh 130cm và 160cm . Theo thông số in trên lều thì lều có dung tích không gian bên trong là 3798 lít. Hỏi một người cao $1,75\text{m}$ có thể đứng thẳng bên trong lều mà không bị vướng đầu không?

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A) $\frac{\sqrt{57}a}{3}$. B) $\frac{\sqrt{57}a}{6}$. C) $\frac{2\sqrt{57}a}{3}$. D) $\frac{\sqrt{57}a}{12}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C) $a\sqrt{2}$. D) $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

- A) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C) $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. D) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, $AB = a, AC = b, AD = c$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng

- A) $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$. B) $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$.
C) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. D) $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Câu 5: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = AC = 3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho $HC = 2HB$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng

- A) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B) $a\sqrt{3}$. C) $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. D) $\frac{a}{2}$.

Câu 6: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

- A) $\frac{a}{2}$. B) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. D) a .

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$, $CC_1 = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 bằng:

- A) a . B) $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. C) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và $A'B'$ bằng

- A) a . B) $\frac{a}{2}$. C) $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. D) $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Câu 9: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình thang cân $ABCD$ có $AC \perp BD$, $AC = 2a$, cạnh AA' tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \frac{1}{3}HC$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là:

- A) $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B) $2a^3\sqrt{3}$. C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D) $a^3\sqrt{3}$.

Câu 10: Một tấm bìa hình vuông có cạnh $50cm$. Người ta cắt bỏ đi ở một góc tấm bìa hình vuông cạnh $16cm$ rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Thể tích khối hộp chữ nhật là

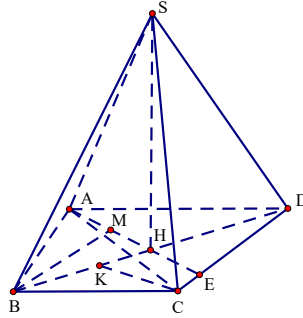
- A) $5184cm^3$. B) $8704cm^3$. C) $4608cm^3$. D) $18496cm^3$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:



a) Dựng $CK \perp BD \Rightarrow d(C, (SBD)) = CK$. Ta có $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = a\sqrt{13}$.

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}BC.d(D, BC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot 2a = \frac{3a^2}{2}. \text{ Do đó } d = CK = \frac{2S_{BCD}}{BD} = \frac{3a^2}{a\sqrt{13}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

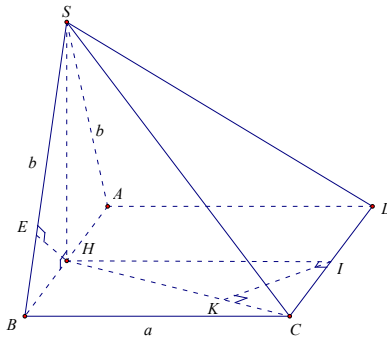
b) Dựng $BM \perp AH \Rightarrow d(B, (SAH)) = BM$.

Lại có $AH = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền).

$$S_{ABH} = \frac{1}{2}AB.d(H, AB) = \frac{1}{2}2a \cdot \frac{AD}{2} = \frac{1}{2}2a \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{2S_{ABH}}{AH} = \frac{3a^2}{\frac{a\sqrt{13}}{2}} = \frac{6a}{\sqrt{13}}.$$

Bài 2:



a) Gọi H là trung điểm của AB . Vì $SA = SB$ nên $SH \perp AB$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ (ABCD) \perp (SAB) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

$$\Rightarrow d(S, (ABCD)) = SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}.$$

$$\text{b) Kẽ } IK \perp HC, \text{ ta có } \begin{cases} IK \perp HC \\ IK \perp SH \end{cases} \Rightarrow IK \perp (SHC) \Rightarrow d(I, (SHC)) = IK.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IH^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(I, (SHC)) = IK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{c) } \frac{d(D, (SHC))}{d(I, (SHC))} = \frac{DC}{IC} = 2 \Rightarrow d(D, (SHC)) = 2d(I, (SHC)) = 2IK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{d) Kẽ } HE \perp SB, \text{ ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp HE,$$

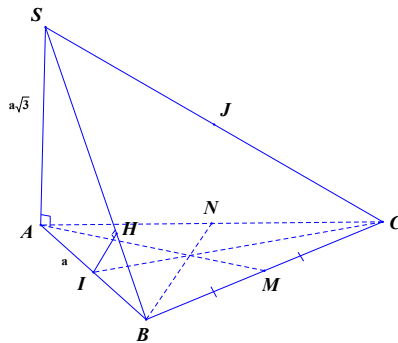
$$\text{mà } HE \perp SB, \text{ do đó } HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HE.$$

$$\text{Mà } d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC)) = 2HE.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{4b^2 - a^2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b}.$$

$$\text{Vậy } d(AD, (SBC)) = 2HE = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}.$$

Bài 3:



a) Gọi M là trung điểm của BC . Ta có:

$$\begin{cases} SA \perp AM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow d(SA, BC) = AM = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\Rightarrow CD \perp AH$ mà $AH \perp SD$ nên

$$AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH = \frac{AS \cdot AD}{SD} = \frac{3a \cdot a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}a} = \frac{3a}{2}.$$

$$AO \cap (SCD) = C \Rightarrow \frac{d(O, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O, (SCD)) = \frac{3a}{4}.$$

b) Gọi M là trung điểm của CD . Ta có S, G, M thẳng hàng và $\frac{GS}{MS} = \frac{2}{3}$.

$$CD // (SAB) \Rightarrow d(M, (SAB)) = d(O, (SAB)) = DA = \sqrt{3}a.$$

(vì $M \in CD$ và $DA \perp (SAB)$).

$$MG \cap (SAB) = S \Rightarrow \frac{d(G, (SAB))}{d(M, (SAB))} = \frac{GS}{MS} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G, (SAB)) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

c) Trong $(ABCD)$, kẻ $AK \perp BD$ tại K . Ta có $\begin{cases} AK \perp SA \\ AK \perp BD \end{cases} \Rightarrow d(SA, BD) = AK$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(SA, BD) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{d) Theo giả thiết } SI = \frac{1}{2}ID \Rightarrow SI = \frac{1}{3}SD = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \text{ và } ID = \frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

$$\text{Ta có: } CD // (ABI) \Rightarrow d(CD, AI) = d(CD, (ABI)) = d(D, (ABI)).$$

Trong (SAD) . Kẻ $DP \perp AI$ tại P . Ta có $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp DP$.

Do đó $DP \perp (ABI) \Rightarrow d(D, (ABI)) = DP$.

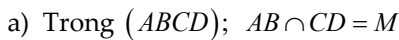
$$\begin{aligned} IA^2 &= SI^2 + SA^2 - 2SI \cdot SA \cdot \cos \widehat{ISA} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a \right)^2 + 9a^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}a \cdot 3a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{3}a^2 \Rightarrow IA = \frac{\sqrt{39}}{3}a. \end{aligned}$$

$$S_{\Delta ADI} = \frac{1}{2}DI \cdot DA \cdot \sin \widehat{ADI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}a \cdot a\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}a^2$$

$$\text{Và } S_{\Delta ADI} = \frac{1}{2}DP \cdot AI = \sqrt{3}a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{3}a \cdot DP \Rightarrow DP = \frac{6\sqrt{13}}{13}a.$$

$$\text{Vậy } d(CD, AI) = \frac{6\sqrt{13}}{13}a.$$

Bài 5:



Trong (SHC) , kẻ $HP \perp SC$. Ta có $HP \perp (SCD) \Rightarrow d(H, (SCD)) = HP$.

$$\text{Vậy } d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

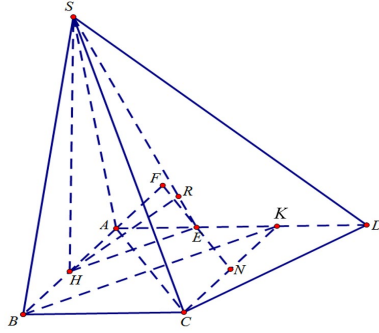
$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

b) Trong (SAB) , kẻ $HP \perp SB$ tại Q . Ta có:

Ta dễ dàng chứng minh được $HQ \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HQ$.

$$\text{Vi } AD//BC \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

c) $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.



d) Gọi N là trung điểm của KC . Trong $(ABCD)$, EQ kéo dài cắt AB tại F

$$BK = 2a\sqrt{2} \Rightarrow HE = a\sqrt{2}; SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = a\sqrt{17}.$$

$AF = KN = a; HE \parallel BK; EN \parallel AC \Rightarrow HE \perp EN$ (do $AC \perp BK$) mà $EN \perp SH$
 $\Rightarrow EN \perp (SHE) \Rightarrow (SEN) \perp (SHE)$.

Trong (SHE) , kẻ $HR \perp SE \Rightarrow HR \perp (SEN) \Rightarrow HR = d(H, (SEN))$.

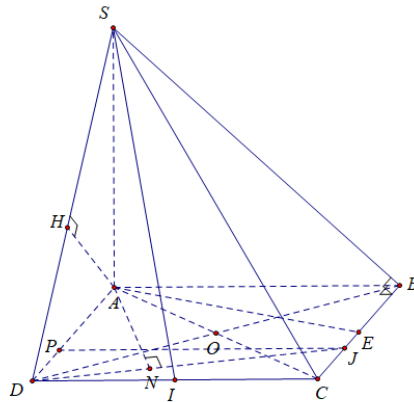
$$\text{Ta có } HR = \frac{HS \cdot HE}{SE} = \frac{a\sqrt{30}}{\sqrt{17}}.$$

Vì $AC \parallel (SEN) \Rightarrow d(SE, AC) = d(AC, (SEN)) = d(A, (SEN))$.

$$\text{Mà } AH \cap (SEN) = F \Rightarrow \frac{d(A, (SEN))}{d(H, (SEN))} = \frac{AF}{HF} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow d(A, (SEN)) = \frac{a\sqrt{30}}{2\sqrt{17}}. \text{ Vậy } d(SE, AC) = \frac{a\sqrt{30}}{2\sqrt{17}}.$$

Bài 6:



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ AB \subset (ABCD); AB \perp BC \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SBA} = 60^\circ \\ SB \subset (SBC); B \perp BC \end{cases}$

Trong ΔSAB , ta có: $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$

a) $\begin{cases} SD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \subset (SAD) \end{cases}$

$$\Rightarrow d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = BA = a.$$

b) $\begin{cases} SB \subset (SAB) \\ CD \parallel AB \subset (SAB) \end{cases}$

$$\Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = AD = a$$

c) Gọi O là trung điểm $BD \Rightarrow AO \perp BD$ (vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a)

Ta lại có $AO \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD).$

Vậy AO là đường vuông góc chung của hai đường SA và BD hay

$$d(SA, BD) = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

d) Ta có: $\begin{cases} SI \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \subset (SCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow d(AB, SI) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH \text{ với } H \text{ là hình chiếu vuông góc của } A \text{ lên } SD.$$

$$\text{Khi đó ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

e) Từ J kẻ $JP \parallel CD, P \in AD$. Khi đó ta có tam giác PDJ vuông tại P và

$$DP = \frac{a}{3}; PJ = a \Rightarrow DJ = \sqrt{DP^2 + PJ^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \sin \widehat{PDJ} = \frac{PJ}{DJ} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{10}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{10}}. \text{ Gọi } N \text{ là hình chiếu vuông góc của } A \text{ lên}$$

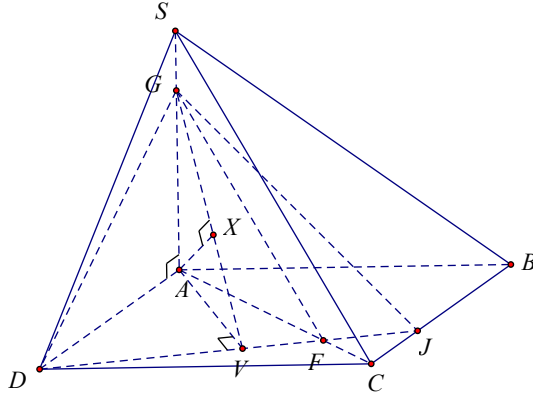
$$DJ. \text{ Khi đó ta có: } \begin{cases} AN \perp DJ \\ AN \perp SA (SA \perp (ABCD)) \end{cases}.$$

$\Rightarrow AN$ là đường vuông góc chung của hai đường SA và DJ hay $d(SA, DJ) = AN$.

Xét tam giác AND vuông tại N có: $\sin \widehat{ADN} = \frac{AN}{AD}$

$$\Rightarrow AN = AD \cdot \sin \widehat{ADN} = a \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}. \text{ Vậy } d(SA, DN) = \frac{3a}{\sqrt{10}}$$

f)



Gọi $F = DJ \cap AC$. Kẻ $GF \parallel SC$ với $G \in SA$. Khi đó:

$$\begin{cases} DJ \in (GDJ) \\ SC \parallel GF \subset (GDJ) \end{cases} \Rightarrow d(SC, DJ) = d(SC, (GDJ)) = d(C, (GDJ)).$$

$$\text{Lại có } \frac{FC}{AF} = \frac{CJ}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(C, (DGJ)) = \frac{1}{3} d(A, (DGJ)).$$

Gọi V, X lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên DJ, GV .

$$\text{Ta chứng minh được } \begin{cases} DJ \perp (GAV) \Rightarrow DJ \perp AX \\ GV \perp AX \end{cases}.$$

$$\Rightarrow AX \perp (DGJ) \Rightarrow d(A, (DGJ)) = AX.$$

$$\text{Ta có } AG = \frac{3}{4} AS = \frac{3\sqrt{3}a}{4}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } DJC \text{ có } \cos \widehat{JDC} = \frac{DC}{DJ} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

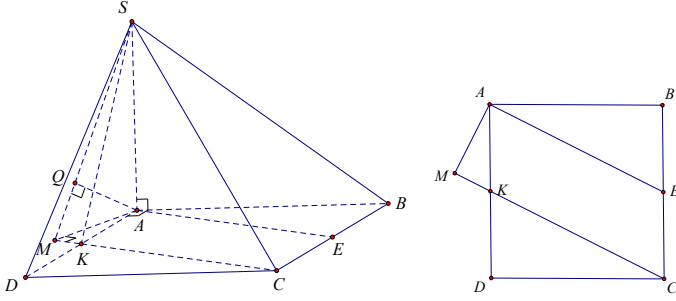
$$\text{Trong tam giác vuông } ADV \text{ có } \cos \widehat{JDC} = \sin \widehat{ADV} = \frac{AV}{AD} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow AV = \frac{3a}{\sqrt{10}}.$$

Trong tam giác vuông GAV có

$$\frac{1}{AX^2} = \frac{1}{AG^2} + \frac{1}{AV^2} = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}a}{4}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{46}{27a^2} \Rightarrow AV = \frac{3\sqrt{138}a}{46}$$

$$\text{Vậy } d(SC, DJ) = d(C, (DGJ)) = \frac{1}{3}d(A, (DGJ)) = \frac{1}{3}AV = \frac{\sqrt{138}a}{46}$$

g)



Gọi K là trung điểm AD

$$\Rightarrow \begin{cases} SC \subset (SCK) \\ AE \parallel KC \subset (SKC) \end{cases} \Rightarrow d(AE, SC) = d(AE, (SCK)) = d(A, (SCK)).$$

Gọi M, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên KC, SM .

Ta chứng minh được $KC \perp (SMA) \Rightarrow KC \perp AQ$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} AQ \perp SM \\ AQ \perp KC \end{cases} \Rightarrow AQ \perp (SMC) \Rightarrow d(A, (SKC)) = AQ$$

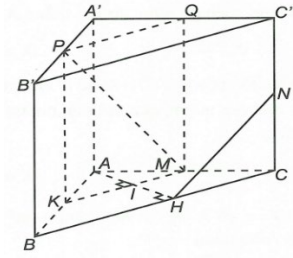
$$\triangle AKM \sim \triangle CKD \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AK}{CK} \Rightarrow AM = \frac{CD \cdot AK}{CK} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Trong tam giác vuông SAM có

$$\frac{1}{AQ^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\right)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow AQ = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, AE) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Bài 7:



Ta xét cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa MP và NH
 Xét tam giác ABC vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2 - AB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Kẻ $MK \parallel BC (K \in AB), PQ \parallel B'C' (Q \in A'C')$.

Ta có $PM \subset (MKPQ)$ và $HN \subset (BCC'B')$.

Do $MK \parallel BC$ và $MQ \parallel CC'$ nên $(MKPQ) \parallel (BCC'B')$.

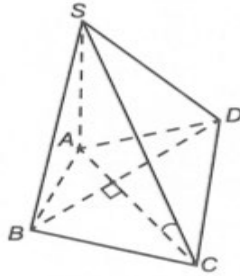
Khi đó $d(MP, NH) = d((MKPQ), (BCC'B'))$.

$$\text{Do } \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp CC' (CC' \perp (ABC), AH \subset (ABC)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC'B').$$

Suy ra $AH \perp (KMOP)$ tại $\{I\} = AH \cap KM$.

$$\text{Vậy } d(MP, NH) = d((MPKQ), (BCC'B')) = IH = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Bài 8:



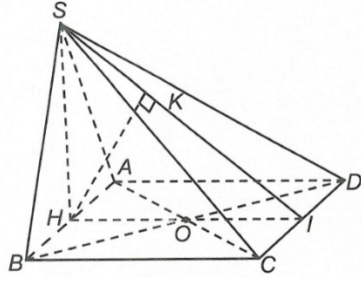
$$\text{Ta có } AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 3a^2.$$

Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$ nên

$$\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} = \alpha \Rightarrow SA = AC \cdot \tan \alpha = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{S.ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} 3a^2 \cdot \frac{2a}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

Bài 9:



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, CD , kẻ $HK \perp SI$.

Vì tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy
 $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$$\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIH) \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SCD).$$

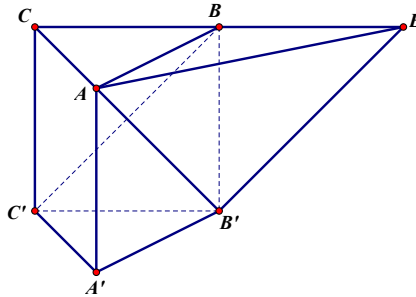
$$CD \parallel AB \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK.$$

$$\text{Suy ra } HK = \frac{3a}{2}; HI = AD = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SHI \text{ ta có } SH = \sqrt{\frac{HI^2 \cdot HK^2}{HI^2 - HK^2}} = 3a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} 3a \cdot a^2 \sqrt{3} = a^3 \sqrt{3}.$$

Bài 10:



Gọi E là điểm đối xứng của C qua điểm $B \Rightarrow AB = \frac{1}{2} CE = a$.

Khi đó tam giác ACE vuông tại $A \Rightarrow AE = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Tứ giác $BC'B'E$ là hình bình hành $\Rightarrow BC' \parallel B'E$.

Mặt khác, ta có $BC' = B'E = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B'

$$\Rightarrow AB' = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Xét tam giác $AA'B'$ vuông tại A' :

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}.$$

Bài 11: Ta có:

$$S' = 130^2; S = 160^2 \Rightarrow h = \frac{3V}{S + \sqrt{SS'} + S'} = \frac{3 \cdot 3798000}{130^2 + \sqrt{130^2 \cdot 160^2} + 160^2} = 180cm.$$

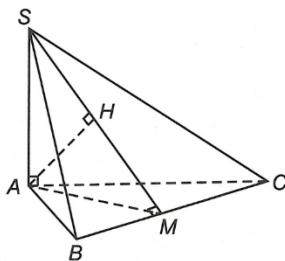
Vậy một người cao $1,75m$ có thể đứng thẳng trong lều mà không bị vướng.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.B	2.A	3.D	4.A	5.B	6.B	7.D	8.A	9.D	10.A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

Câu 1: Chọn B.



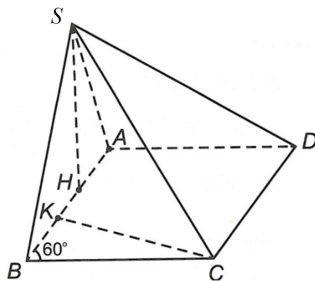
Gọi M là trung điểm BC , H là hình chiếu vuông góc của A trên SM

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM).$$

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$$

Câu 2: Chọn A.

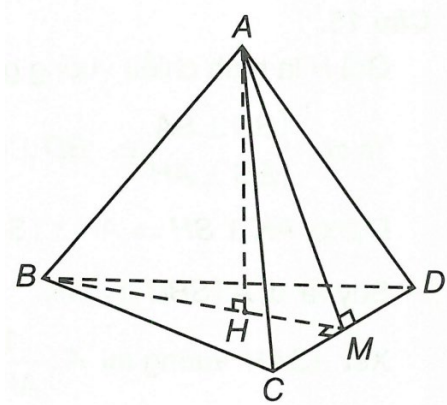


Dựng $SH \perp AB$. Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Dựng $CK \perp AB$. Vì $CK \perp SH$ nên $CK \perp (SAB)$.

Do $CD \parallel AB$ nên $d(D, (SAB)) = d(C, (SAB)) = CK = BC \sin 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 3: Chọn D.



Gọi M là trung điểm CD và H là hình chiếu vuông góc của A trên BM .

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp AH (1).$

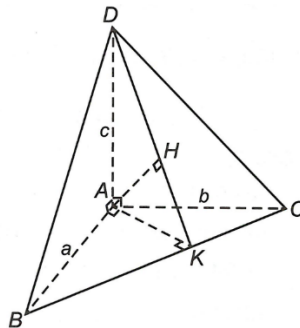
Tương tự, ta chứng minh được $BC \perp AH (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (BCD).$

Suy ra $d(A, (BCD)) = AH$ và H là trọng tâm $\triangle BCD$.

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4: Chọn A.



Kẻ $AK \perp BC (K \in BC)$ và $AH \perp DK (H \in DK).$

Do $BC \perp DA$ (do $AD \perp (ABC)$) nên $BC \perp (DAK).$

Suy ra $AH \perp BC$. Do $AH \perp DK$ nên

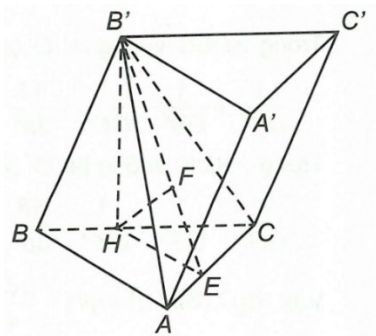
$AH \perp (BCD) \Rightarrow d(A, (BCD)) = AH.$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Xét $\triangle ADK$ vuông tại A có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Vậy $d(A, (BCD)) = AH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$.

Câu 5: Chọn B.



Ta có: $BC = 3a\sqrt{2} \Rightarrow HB = a\sqrt{2}$. Lại có $B'H = \sqrt{BB'^2 - HB^2} = a\sqrt{2}$.

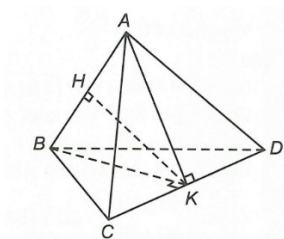
Dựng $HE \perp AC$; $HF \perp B'E$. Suy ra $HF \perp (B'AC) \Rightarrow d(H, (B'AC)) = HF$.

Ta có: $\frac{HE}{AB} = \frac{CH}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = 2a$.

Suy ra $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{B'H^2} \Rightarrow HF = \frac{HE \cdot B'H}{\sqrt{HE^2 + B'H^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác $\frac{d(B, (B'AC))}{d(H, (B'AC))} = \frac{BC}{HC} = \frac{3}{2}$. Do đó $d(B, (B'AC)) = \frac{3}{2} \cdot HF = a\sqrt{3}$.

Câu 6: Chọn B.



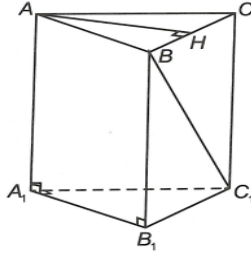
Gọi K là trung điểm CD . Suy ra $\begin{cases} CD \perp AK \\ CD \perp BK \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABK)$.

Dựng $HK \perp AB \Rightarrow HK = d(AB; CD)$.

Xét tam giác BHK vuông tại H , ta có

$$HK = \sqrt{BK^2 - BH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 7: Chọn D.



Do $BB_1 \parallel AA_1$ nên $AA_1 \parallel (BCC_1B_1)$.

Suy ra $d(AA_1, BC_1) = d(AA_1, (BCC_1B_1)) = d(A, (BCC_1B_1))$.

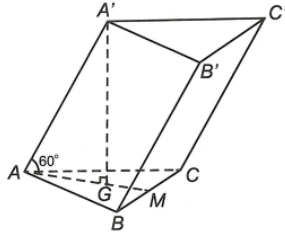
Do $(BCC_1B_1) \perp (ABC)$, dựng $AH \perp BC, (H \in BC)$.

Suy ra $AH \perp (BCC_1B_1)$.

Xét tam giác ABC vuông tại A : $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AA_1, BC_1) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8: Chọn A.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , theo giả thiết:

$$A'G \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{AA', (ABC)}) = \widehat{A'AG} = 60^\circ$$

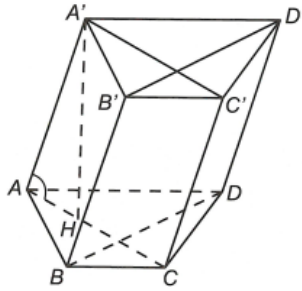
Xét tam giác $A'AG$ vuông tại G :

$$A'G = AG \cdot \tan \widehat{A'AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 60^\circ = a.$$

Do $BC \parallel (A'B'C')$ nên $d(BC, A'B') = d(BC, (A'B'C')) = A'G = a$.

Vậy $d(BC, A'B') = a$.

Câu 9: Chọn D.



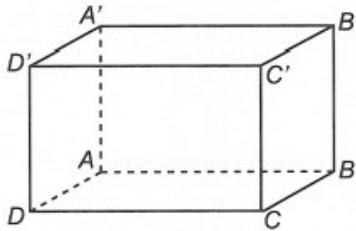
$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AC = BD = 2a$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2a^2$

$$AH = \frac{1}{3} HC \Rightarrow AH = \frac{1}{4} AC = \frac{a}{2}; \left(\widehat{AA', (ABCD)} \right) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$$

Xét tam giác $A'HA$ vuông tại H có $A'H = AH \cdot \tan \widehat{A'AH} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = 2a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a^3 \sqrt{3}.$$

Câu 10: Chọn A.



$AA' = BB' = CC' = DD' = 16 \text{ cm}$ nên $ABCD$ là hình vuông có:

$$AB = 50 - 2 \cdot 16 = 18 (\text{cm}).$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AC \cdot AD = 18 \cdot 18 \cdot 16 = 5184 (\text{cm}^3).$$

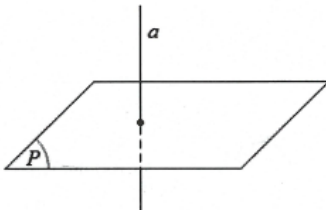
Chương 8

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

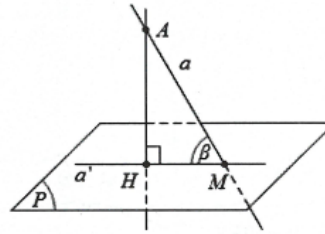
Bài 5

GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. GÓC NHỊ DIỆN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT



Hình 1.



Hình 2.

1) ĐỊNH NGHĨA:

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° (Hình 1).
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) (Hình 2).

2) PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH VÀ TÍNH GÓC:

Sử dụng định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

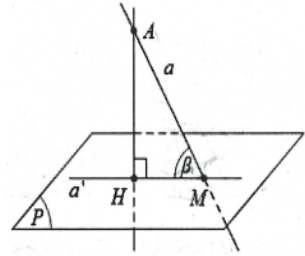
- Cách tìm hình chiếu a' của a trên mặt phẳng (P) ta có thể làm như sau:
- Tìm giao điểm $M = a \cap (P)$.
- Tìm một điểm A tùy ý trên đường thẳng a ($A \neq M$) và xác định hình chiếu vuông góc H của A trên mặt phẳng (P) .
- Khi đó, a' là đường thẳng đi qua hai điểm A và M .

Ta có: $\beta = (a, (P)) = \widehat{AMH}$.

Xét tam giác vuông AMH ta có:

$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{HM}{AM} \\ \tan \beta = \frac{AH}{MH} \\ \sin \beta = \frac{AH}{AM} = \frac{d(A, (P))}{AM} \end{cases}$$

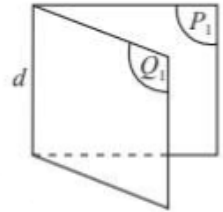
(trong đó $d(A, (P))$ là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P)).



3) NHỊ DIỆN. GÓC NHỊ DIỆN

a. Góc nhị diện:

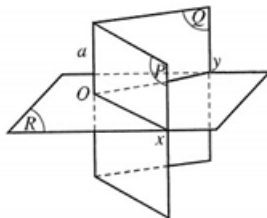
Cho hai mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$ có chung bờ là đường thẳng d . Hình tạo bởi $(P_1), (Q_1)$ và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi $(P_1), (Q_1)$, kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.



Hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$ gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện.

b. Góc phẳng nhị diện.

Cho góc nhị diện $[P, a, Q]$. Gọi O là một điểm tùy ý trên a , Ox là tia nằm trong (P) và vuông góc với d , Oy là tia nằm trong (Q) và vuông góc với d .



c. Góc phẳng nhị diện: của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý: Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh a của góc nhị diện và cắt hai mặt phẳng $(P), (Q)$ của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ox, Oy là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi $(P), (Q)$

B. CÁC DẠNG TOÁN.

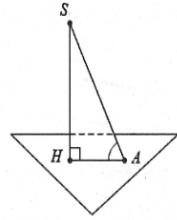
DẠNG 1:

GÓC GIỮA CẠNH BÊN VÀ MẶT ĐÁY

Phương pháp:

- + Tìm góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC)
- + Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC) .
- + Như vậy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC) .

$$(SA, (ABC)) = (SA, HA) = \widehat{SAH}.$$

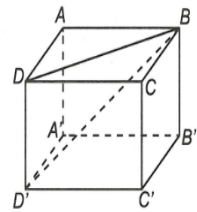


Ví dụ 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $AA' = a$. Tính góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Do $DD' \perp (ABCD)$ nên góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{D'BD}$.

$$\tan \widehat{D'BD} = \frac{DD'}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{D'BD} = 30^\circ.$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot \varphi$?

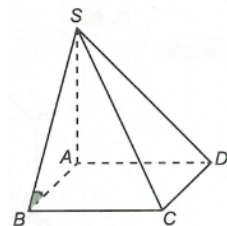
Lời giải

Ta có $SB \cap (ABCD) = \{B\}$.

Trên SB chọn điểm A . Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

Suy ra $(SB, (ABCD)) = (SB, BA) = \widehat{SBA}$.

$$\text{Vậy } \cot \varphi = \frac{AB}{SA} = \frac{2a}{a} = 2.$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .

Lời giải

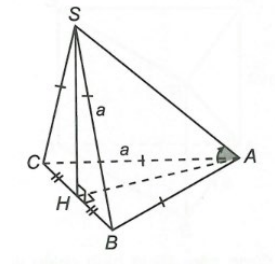
Ta có $SH \perp (ABC)$.

$$\Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH} = \alpha$$

$\triangle ABC$ và $\triangle SBC$ là hai tam giác đều cạnh a nên

$$AH = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra } \triangle SHA \text{ vuông cân tại } H$$

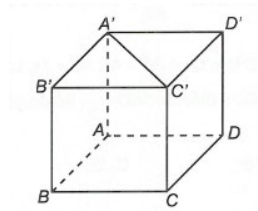
$$H \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$



Ví dụ 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

Lời giải

Để dàng thấy góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{A'C'B'} = 45^\circ$.



Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\triangle ABC$ đều cạnh a , $AA' = \sqrt{3}a$. Tính góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) .

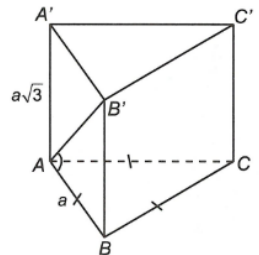
Lời giải

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC) .

Suy ra góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng $\widehat{B'AB}$.

$\triangle B'AB$ vuông tại B nên

$$\tan \widehat{B'AB} = \frac{BB'}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{B'AB} = 60^\circ.$$



Ví dụ 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc giữa đường thẳng SB và (SAC)

Lời giải

Gọi I là tâm của hình vuông của $ABCD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

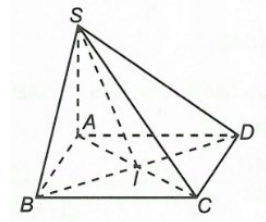
Mặt khác vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (SAC)$

do đó góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là góc $\widehat{BSI}$.

$$\text{Ta có } SB = a\sqrt{2}; BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSI} = 30^\circ.$$



Ví dụ 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a, BC = a, SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

$$\text{Kẻ } AH \perp SB (H \in SB) \quad (1).$$

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

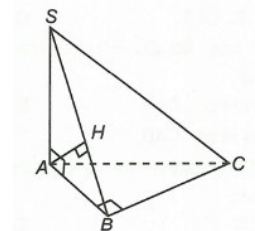
Nên góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa SA và SH bằng $\widehat{ASH}$.

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong } \triangle SAB \text{ ta có } \sin \widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{ASB} = \widehat{ASH} = 30^\circ.$$

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 30° .



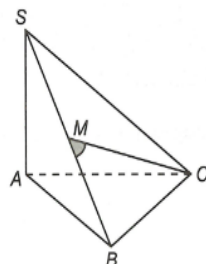
Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a\sqrt{3}, AB = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B . Gọi M là trung điểm của SB . Tính góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Do đó BM là hình chiếu của CM lên mặt phẳng (SAB) .

Suy ra $(CM, (SAB)) = \widehat{CMB}.$



$$\tan \widehat{CMB} = \frac{BC}{MB} = \frac{2AB}{SB} = \frac{2AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2.2a}{\sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (2a)^2}} = 1.$$

Suy ra $\widehat{CMB} = 45^\circ$. Vậy $(CM, (SAB)) = 45^\circ$.

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc 60° và M là trung điểm của BC .

a) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .

b) Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Do đó $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$; $(SC, (ABC)) = \widehat{SCA}$.

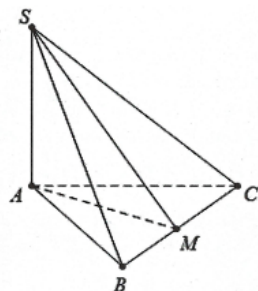
Khi đó:

$$\cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

b) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SM, (ABC)) = \widehat{SMA} = \varphi$.

$$\text{Ta có: } AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \varphi = \frac{AM}{SM} = \frac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\sqrt{133}}{19}.$$



Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a$; $AD = a$.

Tam giác SAB đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc giữa SB , SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của BC . Tính tan góc giữa SI và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH \perp AB$.

Mặt khác

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Tam giác SAB đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.

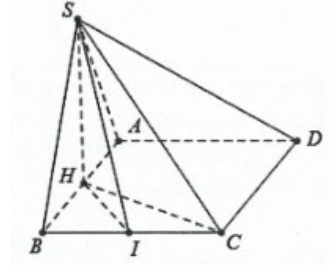
$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow (SB, (ABCD)) = \widehat{SBH} = 60^\circ$

$$(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH} \text{ và } \tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{b) Ta có: } HI = \sqrt{HB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } (SI, (ABCD)) = \widehat{SIH} \text{ và } \tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{SI} = a\sqrt{3} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$



Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a , $AD = 2a$.

Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 45° .

a) Tính cosin góc tạo bởi các cạnh SC , SD và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của CD , tính tan góc tạo bởi SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Gọi O là trung điểm của $AD \Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh $a \Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C .

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SB; (ABCD)}) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Do đó $SA = AB \tan 45^\circ = a$

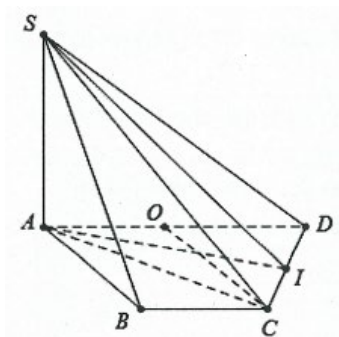
$$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos(\widehat{SC; (ABC)}) = \cos \widehat{SCA}$$

$$= \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos(\widehat{SD; (ABCD)}) = \cos \widehat{SDA} = \frac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{b) Ta có: } AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Do đó } \tan(\widehat{SI; (ABCD)}) = \tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$



DANG 2:

GÓC GIỮA CẠNH BÊN VÀ MẶT PHẪNG CHỨA ĐƯỜNG CAO

Phương pháp:

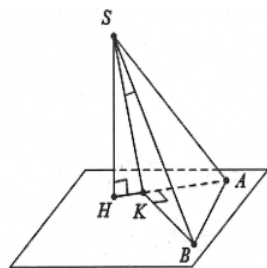
+ Tìm góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (SHA)

với $(SHA) \perp (ABH)$.

+ Đặt $BK \perp AH$, có $BK \perp SH \Rightarrow BK \perp (SHA)$

+ Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH) .

+ Vậy $(\widehat{SB; (SAH)}) = (\widehat{SB; SK}) = \widehat{BSK}$.



Ví dụ 1. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD = 4a, AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

Lời giải

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCO}$.

$$BD = 4a \Rightarrow BO = 2a;$$

$$SO = BO \cdot \tan \widehat{SBO} = 2a \cdot \frac{1}{2} = a;$$

$$AC = 2a \Rightarrow OC = a.$$

Vậy $\widehat{SCO} = 45^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là trọng tâm G của ΔABD . Biết $SG = 2a$, cosin của góc giữa SD và $(ABCD)$ là:

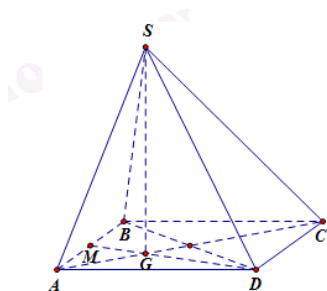
Lời giải

$$\text{Ta có } (SD, (ABCD)) = (SD, GD) = \widehat{SDG}$$

$$\text{Ta có } DG = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3}\sqrt{AM^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{SDG} = \frac{SG}{GD} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{SDG} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{41}} \Rightarrow \cos (SD, (ABCD)) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{41}}$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với đáy một góc 60° , gọi M là trung điểm của BC . Tính cosin góc tạo với SM và mặt đáy.

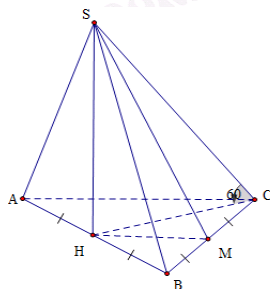
Lời giải

Gọi H là trung điểm của AB khi đó $SH \perp AB$
Mặt khác $(SAB) \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp (ABC)$

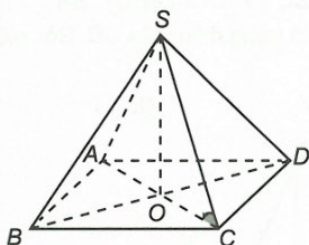
$$\text{Khi đó } CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Do } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } HM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\cos \widehat{SMH} = \frac{HM}{\sqrt{HM^2 + SH^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo bởi:



a) SC và mặt phẳng (SAB) ; SC và mặt phẳng (SAD) .

b) SD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

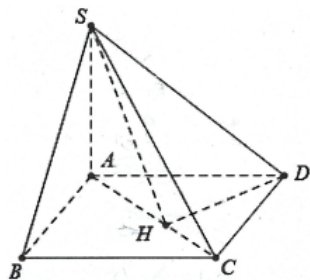
Lại có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{13} \\ SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{15} \\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a \end{cases}$$

Do $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow (SC, (SAB)) = \widehat{CSB}$.

$$\text{Mặt khác } \cos \widehat{CSB} = \frac{SB}{SC} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

b) Tương tự và $\cos \widehat{CSD} = \frac{SD}{SC} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.



Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a .

Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$, biết $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

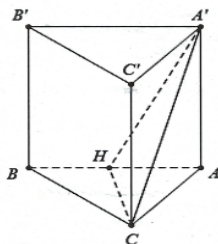
$$\text{Dựng } CH \perp AB \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABB'A') \Rightarrow (A'C, (ABB'A')) = \widehat{CA'H}$.

$$\text{Lại có: } A'H = \sqrt{AA'^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Do đó } \tan \widehat{CA'H} = \frac{CH}{A'H} = 1 \Rightarrow \widehat{CA'H} = 45^\circ.$$

$$\text{Vậy } (A'C, (ABB'A')) = \widehat{CA'H} = 45^\circ.$$



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HA}$. Biết $AB = 3, AD = 6$ và $SH = 2$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SHD) .

b) SB và mặt phẳng (SHC) .

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } AH = 1, HB = 2 \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{5} \\ SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Dựng } AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow (SA, (SHD)) = \widehat{ASE}$$

$$\text{Mặt khác } AE = \frac{AH \cdot AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{6}{\sqrt{37}}$$

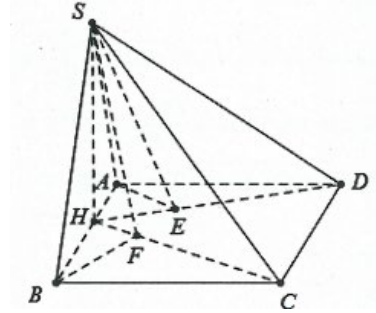
$$\text{Suy ra } \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{6}{\sqrt{185}}.$$

b) Dựng $BF \perp HC \Rightarrow BF \perp (SHC)$.

$$\text{Khi đó } (SB, (SHC)) = \widehat{BSF},$$

$$BF = \frac{BH \cdot BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Ta có: } \tan (SB, (SHC)) = \tan \widehat{BSF} = \frac{BF}{SB} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a , $BD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc 60° . Tính $\tan$ góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB) .

b) SD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

a) Ta có: $AC \perp BD$ tại O . Khi đó $OA = OC, OB = OD$.

$$\text{Xét tam giác vuông } OAB \text{ ta có: } \sin \widehat{OAB} = \frac{OB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

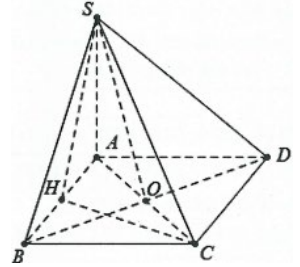
$$\Rightarrow \widehat{OAB} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều cạnh } a.$$

$$\text{Mặt khác } SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Dựng } CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow (SC, (SAB)) = \widehat{CSH}.$$

Do ΔABC đều cạnh a nên H là trung điểm của AB .



Ta có: $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{CSH} = \frac{CH}{SH}$ trong đó $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

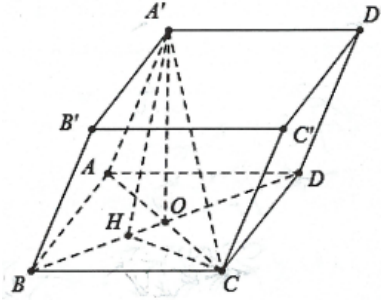
$$\text{Do đó } \tan \widehat{CSH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{13}.$$

b) Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow (SD, (SAC)) = \widehat{DSO}$ và $\tan \widehat{DSO} = \frac{OD}{SO}$.

$$\text{Trong đó } OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{DSO} = \frac{\sqrt{39}}{13}.$$

Ví dụ 8. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật $ABCD$, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng $(A'BD)$.

Lời giải



$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4a \Rightarrow OA = 2a = OC.$$

$$A'O \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{A'O; (ABCD)}) = \widehat{A'AO} = 60^\circ.$$

$$\Rightarrow A'O = OA \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$$

$$\text{Dựng } CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (A'BD)$$

$$\Rightarrow (\widehat{A'C; (A'BD)}) = \widehat{CA'H}.$$

$$\text{Ta có: } CH = \frac{BC \cdot CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = a\sqrt{3}, \quad A'C = \sqrt{OA'^2 + OC^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a.$$

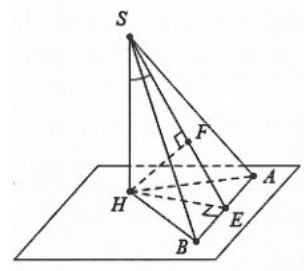
$$\text{Suy ra } \cos \widehat{CA'H} = \frac{A'H}{A'C} = \frac{\sqrt{A'C^2 - HC^2}}{A'C} = \frac{\sqrt{16a^2 - 3a^2}}{4a} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

DẠNG 3:

GÓC GIỮA ĐƯỜNG CAO VÀ MẶT BÊN

Phương pháp:

- + Tìm góc giữa đường cao SH và mặt phẳng (SAB) .
- + Dựng $HE \perp AB, HF \perp SE$.
- + Ta có: $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HF$.
- + Mặt khác $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAB) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB) .
- + Vậy $(SH, (SAB)) = (HF, SF) = \widehat{HSF}$.



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a$, $SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SBD)$ và (SCD) .

Lời giải

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Dựng $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC) .

Khi đó: $(SA, (SBC)) = \widehat{ASM} = \widehat{ASB} = \alpha$.

Do đó $\tan \alpha = \frac{AB}{SA} = \frac{1}{2}$.

Tương tự ta có: $(SA, (SCD)) = \widehat{ASD} = \beta$ và $\tan \beta = \frac{AD}{SA} = 1$.

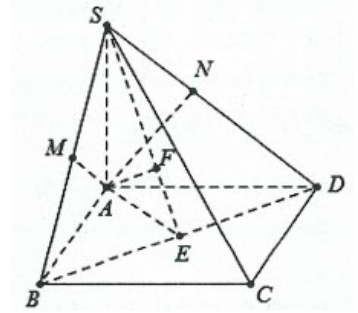
Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AF$.

Mặt khác $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SBD) \Rightarrow (SA, (SBD)) = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Khi đó $\tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA}$, trong đó

$$AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K.

Ta có: $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

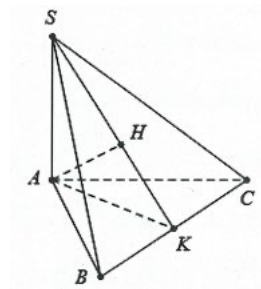
Kẻ $AH \perp SK, H \in SK$. Mà $BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow (SA, (SBC)) = \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$.

Tam giác SAK vuông tại A, có $SA = AK = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A nên $\widehat{ASK} = 45^\circ$.

Vậy $(SA, (SBC)) = 45^\circ$.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 60° . Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SCD)$ và (SBD) .

Lời giải

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Suy ra $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$.

Dựng $AM \perp SB$, có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC) .

Suy ra: $(SA, (SBC)) = \widehat{ASM} = \widehat{ASB}$.

Ta có: $\tan \widehat{ASB} = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Gọi I là trung điểm của AD $\Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh a

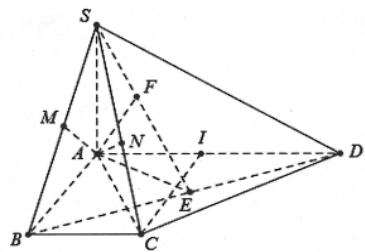
$\Rightarrow CI = \frac{AD}{2} = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C. Khi đó $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

Dựng $AN \perp SC \Rightarrow (SA, (SCD)) = \widehat{ASN} = \widehat{ASC}$.

Ta có: $\tan \widehat{ASC} = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dựng $\begin{cases} AE \perp BD \\ AF \perp SE \end{cases} \Rightarrow (SA, (SBD)) = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Mặt khác $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{\sqrt{30}}{15}$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a , $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° .

- a) Tính tan góc tạo bởi SA và (SBC) .
b) Tính góc tạo bởi SA và (SCD) .

Lời giải

a) Gọi O là trung điểm của $AD \Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh $a \Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C .

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SB, (ABCD)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}, AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}.$$

Dựng $AE \perp BC, AF \perp SE \Rightarrow (SA, (SBC)) = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Do $\widehat{ABE} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = 60^\circ$.

$$\text{Mặt khác } AE = AB \sin \widehat{ABE} = AB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \tan(\widehat{SA, (SBC)}) = \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{2}.$$

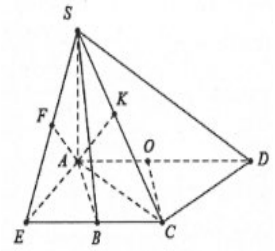
b) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Khi đó $(SA, (SCD)) = \widehat{ASK} = \widehat{ASC} = \varphi$.

$$\text{Ta có: } \tan \varphi = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ. \text{ Vậy } (SA, (SCD)) = 45^\circ.$$

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB , đường cao $B'H = \frac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa đường thẳng $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

Lời giải



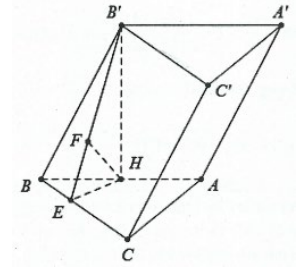
Dựng $HE \perp BC, HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$

suy ra $BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC')$

$\Rightarrow (B'H; (BCC'B')) = \widehat{HB'F} = \widehat{HB'E}$.

Ta có: $HE = HB \sin \widehat{HBE} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos \widehat{HB'E} = \frac{B'H}{B'E} = \frac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



DẠNG 4:

GÓC GIỮA CẠNH BÊN VÀ MẶT BÊN

Phương pháp:

+ Đặt $(SC, (SAB)) = \varphi (0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$.

+ Ta có công thức: $\sin \varphi = \frac{d(C, (SAB))}{SC}$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có

$AD = 2a, AB = a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SB tạo với đáy một góc 30° . Tính sin góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SBC) . b) SD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AD , ta có: $SH \perp AD$

Lại có: $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $HA = a; HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$

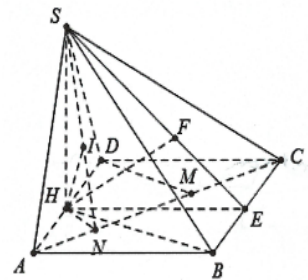
$SH \perp (ABCD) \Rightarrow (SB, (ABCD)) = \widehat{SBH} = 30^\circ$

Suy ra $SH = HB \tan 30^\circ = a$.

a) Do $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$.

Do vậy $d(A; (SBC)) = d(H; (SBC))$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp BC \\ HF \perp SE \end{cases}$ ta có: $BC \perp HF$, từ đó suy ra $HF \perp (SBC)$



$$\Rightarrow d(H; (SBC)) = HF = d(A; (SBC)). \text{ Ta có: } SA = \sqrt{SH^2 + SA^2} = a\sqrt{2} = SD.$$

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sin(SA, (SBC)) = \frac{d(A, (SBC))}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Dựng $HN \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHN)$, dựng $HI \perp SN \Rightarrow HI \perp (SAC)$

$$\text{Do } \frac{DA}{HA} = 2 = \frac{d(D; (SAC))}{d(H; (SAC))} \Rightarrow d(D; (SAC)) = 2d(H; (SAC)) = 2HI$$

$$\text{Dựng } DM \perp AC \Rightarrow DM = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Rightarrow HN = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow HI = \frac{HN \cdot SH}{\sqrt{HN^2 + SH^2}} = \frac{a}{2} \Rightarrow d(D; (SAC)) = a$$

$$\text{Ta có: } \sin(SD, (SAC)) = \frac{d(D; (SAC))}{SD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{3}$; $AD = a$, tam giác SBD là tam giác vuông cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Gọi O là trung điểm của BD , ta có: $SO \perp BC$

mặt khác $(SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SO = \frac{1}{2} BD = a.$$

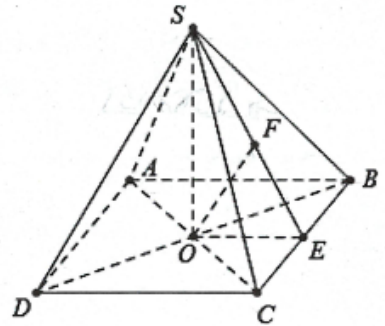
Dựng $OE \perp BC, OF \perp SE \Rightarrow OF \perp (SBC)$.

$$d(D; (SBC)) = 2d(O; (SBC)) = 2OF$$

$$\text{Ta có: } OE = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow OF = \frac{SO \cdot OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = a\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Suy ra } d(A, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{21}}{7}. \text{ Mặt khác } SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = a\sqrt{2}.$$



$$\text{Do đó } \sin(SA, (SBC)) = \frac{d(A, (SBC))}{SA} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của BC . Biết $A'H = a\sqrt{2}$. Tính cosin góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải

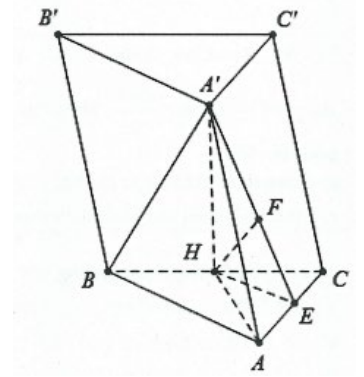
Dựng $HE \perp AC$ và $HF \perp A'E$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp HE \end{cases} \Rightarrow AC \perp HF \Rightarrow HF \perp (AA'C).$

Khi đó $d(H; (A'AC)) = HF$.

Lại có $BC = 2HC$ nên

$$d(B; (AA'C)) = 2d(H; (AA'C)).$$



Mặt khác ME là đường trung bình trong tam giác ABC nên $ME = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

$$\text{Khi đó: } HF = \frac{HE \cdot A'M}{\sqrt{HE^2 + A'M^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } d(B; (AA'C)) = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$$

$$\text{Lại có } A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\sin(A'B; (A'AC)) = \sin \varphi = \frac{d(B; (A'AC))}{BA'} = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{57}}{9}.$$

DẠNG 5:

XÁC ĐỊNH VÀ TÍNH SỐ ĐO CỦA GÓC PHẪNG NHỊ DIỆN

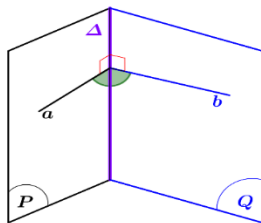
Phương pháp:

+ Ta xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) theo 3 bước:

Bước 1: Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$.

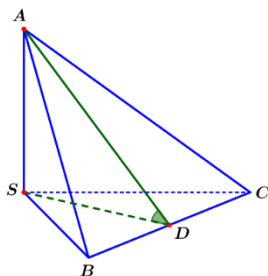
Bước 2: Tìm $a \subset (P); a \perp \Delta$ và $b \subset (Q); b \perp \Delta$.

Bước 3: Kết luận $[P, \Delta, Q]$



Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Tính $\cos \alpha$?

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC .

Suy ra $SD \perp BC$ (vì tam giác SBC cân tại S).

$$\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC.$$

$$\text{Và } SD \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SD.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SD \perp BC \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SDA} = \alpha.$$

$$\text{Xét } \triangle SAD \text{ vuông tại } S, \text{ ta có: } \cos \alpha = \cos \widehat{SDA} = \frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BE, A]$.

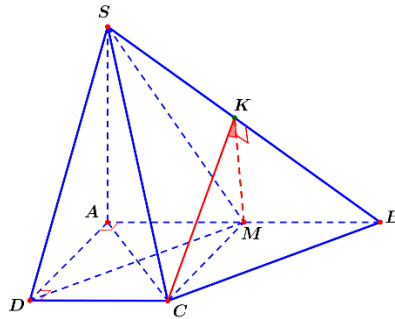
Lời giải

Xét $\Delta A'AH$ vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{A'HA} = \frac{AA'}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'HA} = \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[C, SB, A]$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB khi đó $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB).$

Trong mặt phẳng (SAB) , từ M kẻ $MK \perp SB$ tại K .

Khi đó: $\begin{cases} SB \perp MK \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CMK) \Rightarrow SB \perp CK.$

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ MK \perp SB \\ CK \perp SB \end{cases} \Rightarrow [C, SB, A] = \widehat{CKM}.$

$$\Delta BKM \sim \Delta BAS \text{ nên } \frac{KM}{SA} = \frac{BM}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow KM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Xét ΔCKM vuông tại M , ta có:

$$\tan \widehat{CKM} = \frac{CM}{MK} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CKM} = 60^\circ.$$

Ví dụ 5. $S.ABC$ có cạnh đáy $3a$, cạnh bên $2a$. Tính số đo nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC thì

$mp(SAM) \perp BC$ từ đó $\widehat{SMA}$ là góc

phẳng nhị diện [S, BC, A]

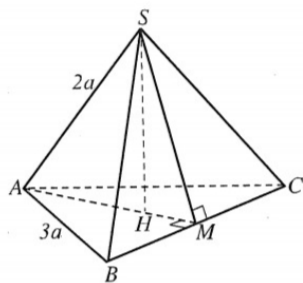
Ta có $AM = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$, từ đó $HM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = 4a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}, \text{ từ đó } SM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{SMH} = \frac{HM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Số đo nhị diện [S, BC, A] là φ được xác định bởi

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}, 0^\circ < \varphi < 180^\circ.$$



Ví dụ 6. Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P). Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P). Cho biết $MA = a$; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.

a. Tính độ dài BC;

b. Tính số đo nhị diện [M, BC, A].

Lời giải

a. Vì $MA \perp mp(P)$ nên $\widehat{MBA}$ và $\widehat{MCA}$

là góc giữa MB và MC với mp (P).

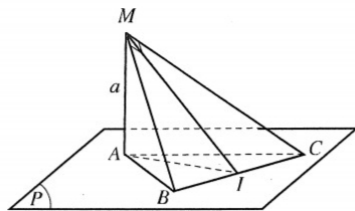
Theo giả thiết. $\widehat{MBA} = \widehat{MCA} = 30^\circ$.

Từ đó $MB = MC = 2a$ và $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Do $MB \perp MC$ nên $BC = MB\sqrt{2}$ tức là $BC = 2a\sqrt{2}$.

b. Gọi I là trung điểm của BC thì $BC \perp mp(MIA)$,

Từ đó $\widehat{MIA}$ là góc phẳng nhị diện [M, BC, A].



Đặt $\widehat{MIA} = \varphi$. Ta có $MI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$. $\sin \varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Vậy góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng 45° .

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Xác định và tính số đo của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

a) $(SC, (SAB))$. b) $(SB, (SAC))$. c) $(SA, (SBC))$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Xác định và tính số đo của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

a) $(SC, (SAB))$. b) $(SB, (SAC))$. c) $(SA, (SBC))$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $2a$ và $\widehat{DAB} = 120^\circ$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AD và tam giác SAD đều. Xác định và tính số đo của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

a) $(SC, (SAD))$. b) $(SH, (SBD))$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $SA \perp (ABC)$. Xác định góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Bài 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, đáy ABC có trọng tâm G . Xác định góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D và $AB = 2DC = 2AD$. Biết $SA \perp (ABCD)$. Xác định góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Bài 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có cạnh bằng a và tâm O , $SA = a$. Xác định và tính cosin của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D và $AB = 2CD = 2AD = 2a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB và $SD = a$. Xác định và tính tan của góc phẳng nhị diện $[S, BC, H]$.

Bài 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có cạnh bằng a và tâm O , $SA = 2a$. Xác định và tính số đo của góc phẳng nhị diện $[B, SC, D]$.

Bài 10. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính giá trị của x sao cho góc phẳng nhị diện $[C, AB, D]$ là góc nhị diện vuông.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là góc nào trong các phương án dưới đây?

- A) $\widehat{SBA}$. B) $\widehat{BSA}$. C) $\widehat{SBD}$. D) $\widehat{BSD}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

- A) 45° . B) 60° . C) 30° . D) 90° .

Câu 3: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa cạnh bên SA và mặt phẳng đáy (ABC) . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A) $\alpha = 60^\circ$. B) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D) $\alpha = 45^\circ$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = 3a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A) 45° . B) 75° . C) 30° . D) 60° .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $BD = a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Số đo của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng

- A) 45° . B) 60° . C) 90° . D) 30° .

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Giá trị lượng giác cosin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy của hình chóp bằng

- A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C) $\frac{\sqrt{14}}{4}$. D) $\frac{1}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$, $BC = AB = a$, $AD = 2a$. Gọi E là trung điểm cạnh AD , α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B) $\frac{1}{\sqrt{6}}$. C) $\sqrt{3}$. D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$. Biết đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A) 30° . B) 45° . C) 60° . D) 90° .

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$. C) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$. D) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Biết SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 2AB = 2a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $30^\circ < \alpha < 60^\circ$. B) $\alpha < 30^\circ$. C) $\alpha = 90^\circ$. D) $60^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là

A) $\widehat{SBA}$. B) $\widehat{SCA}$. C) $\widehat{ASC}$. D) $\widehat{ASB}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = \frac{3a}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

A) 60° . B) 90° . C) 30° . D) 45° .

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao hình chóp bằng $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng

A) 60° . B) 75° . C) 30° . D) 45° .

Câu 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc nhau và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[O, BC, A]$.

A) 60° . B) 30° . C) 45° . D) 90° .

Câu 15: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính cosin của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

A) $\frac{1}{2}$. B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$ bằng 30° . Tính độ dài cạnh AA'

A) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B) $\frac{a}{3}$. C) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a$, $\triangle SAD$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A) $\varphi = 60^\circ$. B) $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$. C) $\varphi = 30^\circ$. D) $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là

- A) 90° . B) 30° . C) 45° . D) 60° .

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ là

- A) 30° . B) 75° . C) 60° . D) 45° .

Câu 20: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[B, SD, C]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

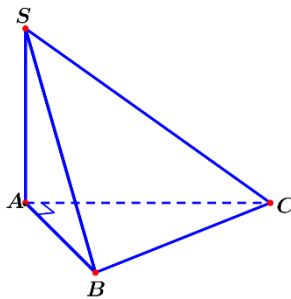
- A) $\tan \varphi = \sqrt{2}$. B) $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C) $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D) $\tan \varphi = \sqrt{6}$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:



a) $(SC, (SAB))$

Ta có: $SC \cap (SAB) = \{S\}$.

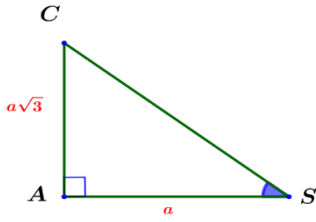
Và $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB)$ hay SA là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) .

Suy ra $(SC, (SAB)) = (SC, SA) = \widehat{CSA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{CSA} = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CSA} = 60^\circ.$$

Vậy $(SC, (SAB)) = 60^\circ$.



b) $(SB, (SAC))$

Ta có: $SB \cap (SAC) = \{S\}$.

Và $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$ hay SA là hình chiếu của SB lên (SAC) .

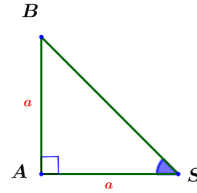
vuông góc

Suy ra $(SB, (SAC)) = (SB, SA) = \widehat{BSA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{BSA} = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{BSA} = 45^\circ.$$

Vậy $(SB, (SAC)) = 45^\circ$.



c) $(SA, (SBC))$

Ta có: $SA \cap (SBC) = \{S\}$.

Trong mặt phẳng (ABC) , từ A kẻ $AK \perp BC$ tại K .

Trong mặt phẳng (SAK) , từ A kẻ $AH \perp SK$ tại H .

Khi đó: $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SK$ nên $AH \perp (SBC)$

Hay SH là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (SBC) .

Suy ra $(SA, (SBC)) = (SA, SH) = \widehat{HSA} = \widehat{KSA}$.

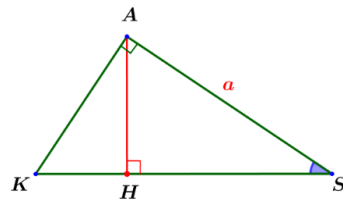
Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

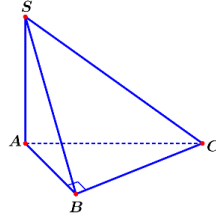
Xét tam giác SAK vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{KSA} = \frac{AK}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{KSA} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Vậy $(SA, (SBC)) = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2:



a) $(SC, (SAB))$

Ta có: $SC \cap (SAB) = \{S\}$.

Và $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ hay SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) .

Suy ra $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB}$.

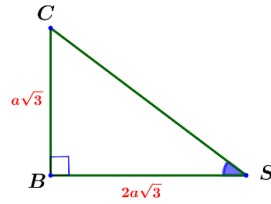
Xét tam giác ABC vuông cân tại B , ta có:

$$BC = AB = a\sqrt{3}.$$

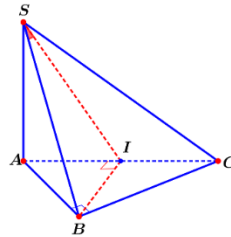
Xét tam giác SBC vuông tại B , ta có:

$$\tan \widehat{CSB} = \frac{CB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

Vậy $(SC, (SAB)) = 30^\circ$.



b) $(SB, (SAC))$



Ta có: $SB \cap (SAC) = \{S\}$.

Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow BH \perp AC$ (vì $\triangle ABC$ cân tại A).

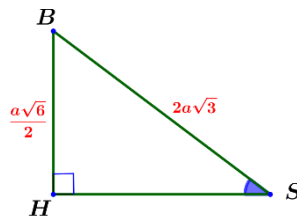
Khi đó $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC)$ hay SH là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC) .

Suy ra $(SB, (SAC)) = (SB, SH) = \widehat{BSH}$.

Xét tam giác ABC vuông cân tại B , ta có:

$$BH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

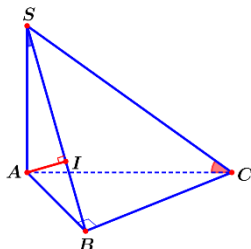
Xét tam giác SBH vuông tại H , ta có:



$$\sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{BSH} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } (SB, (SAC)) = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

c) $(SA, (SBC))$



Ta có: $SA \cap (SBC) = \{S\}$.

Trong mặt phẳng (SAB) , từ A kẻ $AI \perp SB$ tại I .

Khi đó: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AI$. Mà $AI \perp SB$ nên $AI \perp (SBC)$

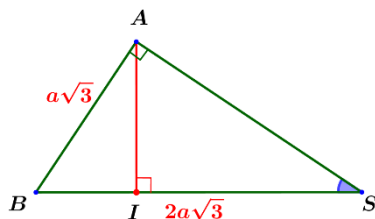
Hay SI là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (SBC) .

Suy ra $(SA, (SBC)) = (SA, SI) = \widehat{ISA} = \widehat{BSA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có:

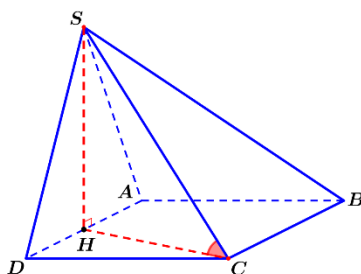
$$\sin \widehat{BSA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30^\circ$$

Vậy $(SA, (SBC)) = 30^\circ$.



Bài 3:

a) $(SC, (SAD))$



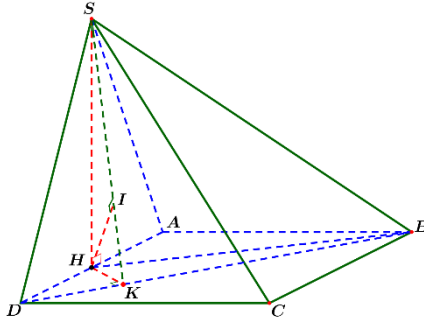
Ta có: $SC \cap (SAD) = \{S\}$.

Ta lại có: $\begin{cases} CH \perp AD \\ CH \perp SH \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAD) \Rightarrow SH$ là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt

phẳng (SAD) . Suy ra $(SC, (SAD)) = (SC, SH) = \widehat{CSH}$.

Xét tam giác SCH vuông tại H , ta có: $\tan \widehat{CSH} = \frac{CH}{SH} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{CSH} = 45^\circ$.

b) $(SH, (SBD))$



Ta có: $SA \cap (SBC) = \{S\}$.

Trong mặt phẳng (HBD) , từ H kẻ $HK \perp BD$ tại K . (K là trung điểm của cạnh DO)

Trong mặt phẳng (SHK) , từ H kẻ $HI \perp SK$ tại I .

Khi đó: $\begin{cases} BD \perp HK \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHK) \Rightarrow BD \perp HI$. Mà

$HI \perp SK$ nên $HI \perp (SBD)$.

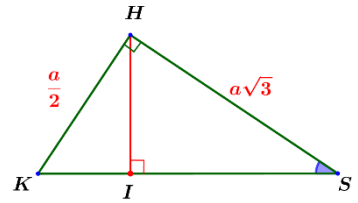
Hay SI là hình chiếu vuông góc của SH lên mặt phẳng (SBD) .

Suy ra $(SH, (SBD)) = (SH, SI) = \widehat{ISH} = \widehat{KSH}$.

Xét tam giác SHK vuông tại H , ta có:

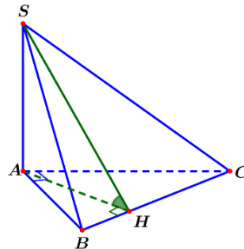
$$\tan \widehat{KSH} = \frac{HK}{SH} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \widehat{KSH} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Vậy $(SH, (SBD)) = \arctan \frac{\sqrt{3}}{6}$.



Bài 4:

Trong mặt phẳng (ABC) , từ A kẻ $AH \perp BC$ tại H .

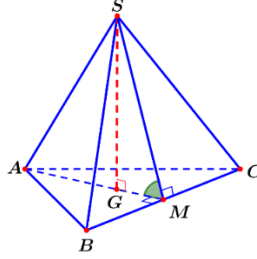


Dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Khi đó:

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AH \subset (ABC): AH \perp BC \\ SH \subset (SBC): SH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SHA}$$

Bài 5:



Gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có: } \left\{ \begin{array}{l} BC \perp GM \\ BC \perp SG \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SGM) \Rightarrow BC \perp SM.$$

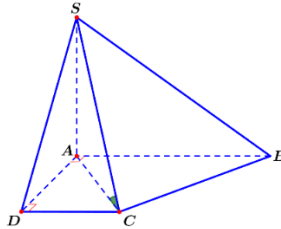
Khi đó:

$$\left\{ \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ GM \subset (ABC): GM \perp BC \\ SM \subset (SBC): SM \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SMG}.$$

Bài 6:

Nhận xét: $\triangle ABC$ vuông cân tại C .

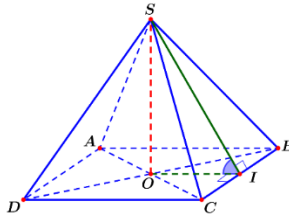
$$\text{Ta có: } \left\{ \begin{array}{l} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC.$$



Khi đó:

$$\left\{ \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AC \subset (ABC): AC \perp BC \\ SC \subset (SBC): SC \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SCA}.$$

Bài 7:



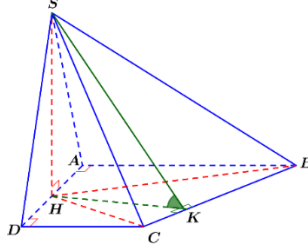
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, từ chân đường cao O kẻ $OI \perp BC$ tại I .

(I là trung điểm của BC vì tam giác OBC cân tại O). Suy ra $BC \perp (SBC) \Rightarrow BC \perp SI$.

Khi đó: $[S, BC, A] = \widehat{SIO} = \varphi$. Ta có: $OI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SOI vuông tại O , ta lại có: $\cos \varphi = \frac{OI}{SI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 8:



Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (HBC) là đường thẳng BC .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, từ H kẻ $HK \perp BC$ tại K . Suy ra: $BC \perp (SHK)$ hay $BC \perp SK$.

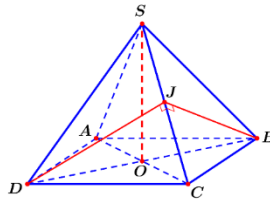
Khi đó: $[S, BC, H] = \widehat{SKH} = \varphi$. Ta có: tam giác SAD đều cạnh a và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Và } S_{\Delta HBC} = S_{ABCD} - S_{\Delta HAB} - S_{\Delta HCD} = \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Gọi I là trung điểm của AB . Ta chứng minh được tam giác IBC vuông cân tại I và $IB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó: } HK = \frac{2S_{\Delta HBC}}{BC} = \frac{2 \cdot \frac{3a^2}{4}}{a\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a. \text{ Vậy } \tan \varphi = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Bài 9:



Trong tam giác SBC , từ B kẻ $BJ \perp SC$ tại J thì ta cũng có $DJ \perp SC$ tại J .

Khi đó: $[B, SC, D] = \widehat{BJD}$.

Trong tam giác SBC , ta có $SB = SC = 2a; BC = a \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2$.

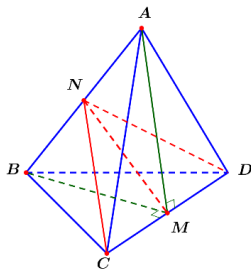
$$\text{Và } BJ = \frac{2S_{\Delta SBC}}{SC} = \frac{\sqrt{15}}{4}a = DJ.$$

Trong tam giác BJD , ta có: $BJ = DJ = \frac{\sqrt{15}}{4}a$; $BD = a\sqrt{2}$.

$$\cos \widehat{BJD} = \frac{BJ^2 + DJ^2 - BD^2}{2BJ \cdot DJ} = \frac{\frac{15a^2}{16} + \frac{15a^2}{16} - 2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \widehat{BJD} = \arccos\left(-\frac{1}{15}\right).$$

$$\text{Vậy } [B, SC, D] = \arccos\left(-\frac{1}{15}\right).$$

Bài 10:



Gọi M , N lần lượt là trung điểm của CD và AB .

Ta có: $AC = AD = BC = BD = a$ nên $\triangle ACD$ cân tại A , $\triangle BCD$ cân tại B , $\triangle CAB$ cân tại C , $\triangle DAB$ cân tại D . Suy ra $AM = BM$, $CN = DN$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (ACD) \cap (BCD) = CD \\ AM \perp CD \\ BM \perp CD \end{cases} \Rightarrow [A, CD, B] = \widehat{AMB}.$$

Mà góc phẳng nhị diện $[A, CD, B]$ là góc nhị diện vuông nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

$$\text{Tính: } BM = AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABM \text{ vuông cân tại } M, \text{ ta có: } MN = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} \quad (1).$$

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ CN \perp AB \\ DN \perp AB \end{cases} \Rightarrow [C, AB, D] = \widehat{CND}.$$

Để góc phẳng nhị diện $[C, AB, D]$ là góc nhị diện vuông thì $\widehat{CND} = 90^\circ$.

$$\text{Xét } \triangle CDN \text{ vuông cân tại } N, \text{ ta có: } MN = \frac{CD}{2} = x \quad (2).$$

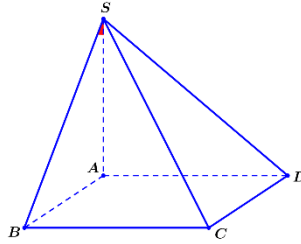
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} = x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.B	2.A	3.B	4.D	5.D	6.A	7.A	8.A	9.D	10.D
11.A	12.A	13.C	14.B	15.D	16.D	17.A	18.D	19.A	20.A

Câu 1: Chọn B.

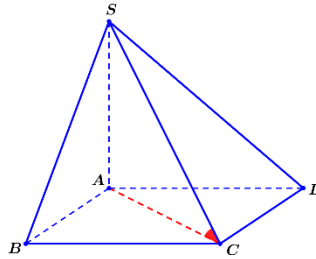


Ta có: $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$

$\Rightarrow SA$ là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (SAD) .

$$\Rightarrow (SB, (SAD)) = (SB, SA) = \widehat{BSA}.$$

Câu 2: Chọn A.



Ta có: $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$

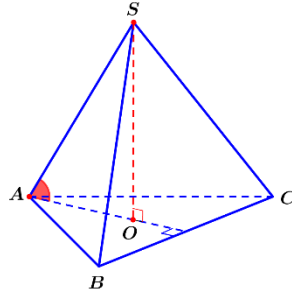
$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}.$$

Xét ΔSAC vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° .

Câu 3: Chọn B.



Gọi O là trọng tâm của tam giác (ABC) .

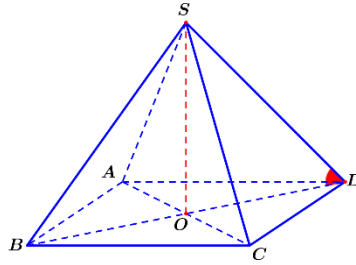
Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$.

Suy ra OA là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (ABC) .

$$\Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, OA) = \widehat{SAO} = \alpha.$$

$$\text{Xét } \triangle SAO \text{ vuông tại } O, \text{ ta có: } \cos \alpha = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 4: Chọn D.



Ta có: $SO \perp (ABCD)$

Suy ra OD là hình chiếu vuông góc của SD lên mặt phẳng $(ABCD)$

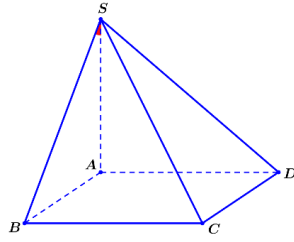
$$\Rightarrow (SD, (ABCD)) = (SD, OD) = \widehat{SDO} = \alpha.$$

Ta có $AD = DC$ và $\widehat{ADC} = 60^\circ$ nên tam giác ADC đều $\Rightarrow OD = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SOD vuông tại O , ta có:

$$\tan \alpha = \frac{SO}{OD} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Câu 5: Chọn D.



Ta có: $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$

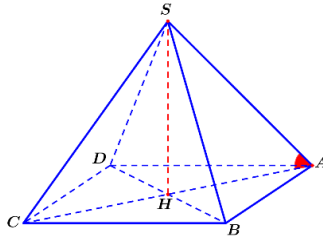
$\Rightarrow SA$ là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (SAD)

$\Rightarrow (SB, (SAD)) = (SB, SA) = \widehat{BSA}$.

Xét $\triangle BSA$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{BSA} = \frac{BA}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\widehat{BSA} = 30^\circ$ hay góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng 30° .

Câu 6: Chọn A.



Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$.

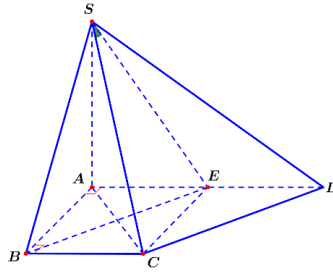
Vì $S.ABCD$ là chóp đều nên $SH \perp (ABCD)$

Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H , ta có: $\cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 7: Chọn A.



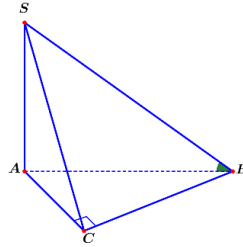
Ta có: $\begin{cases} CE \perp AD \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAD).$

Suy ra SE có hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAD) .

$$\Rightarrow (SC, (SAD)) = (SC, SE) = \widehat{CSE} = \alpha.$$

Xét $\triangle SCE$ vuông tại E , ta có: $\tan \alpha = \frac{CE}{SE} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 8: Chọn A.



Ta có: $SA \perp (ABC)$

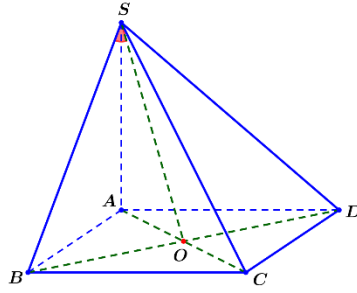
$\Rightarrow AB$ là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}.$$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Suy ra $\widehat{SBA} = 30^\circ$ hay góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 30° .

Câu 9: Chọn D.



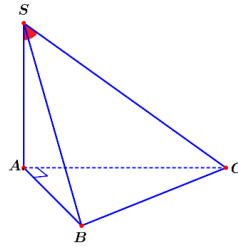
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có: $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$.

Suy ra SO có hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (SAC) .

$$\Rightarrow (SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO} = \alpha.$$

Xét $\triangle SBO$ vuông tại O , ta có: $\sin \widehat{BSO} = \frac{OB}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 10: Chọn D.



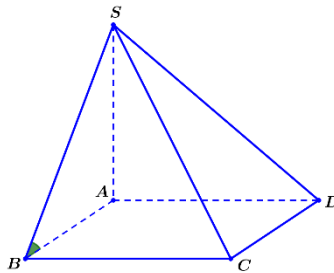
Ta có: $SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}.$$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 2 \Rightarrow \widehat{SCA} = \arctan 2$.

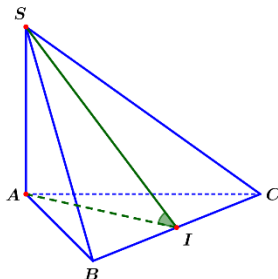
Câu 11: Chọn A.



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SB \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SBA}.$

Câu 12: Chọn A.



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$ (vì ABC là tam giác đều).

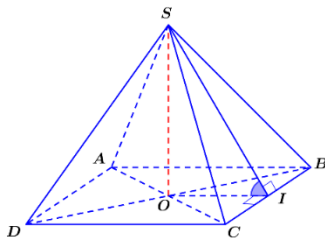
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI.$

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SIA}.$

Mà $\triangle ABC$ đều cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ.$

Câu 13: Chọn C.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của BC .

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$

Và $SC = SB$ nên tam giác SBC cân tại $S \Rightarrow SI \perp BC.$

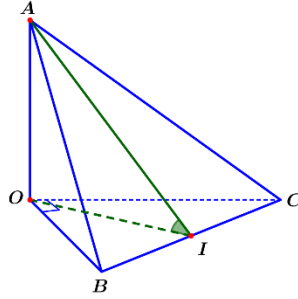
Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp SI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SIO}$

Ta có: OI là đường trung bình tam giác ABC nên $OI = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$.

Xét $\triangle SIO$ vuông tại O , ta có: $\tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SIO} = 30^\circ$.

Vậy số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng 30° .

Câu 14: Chọn B.



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI$

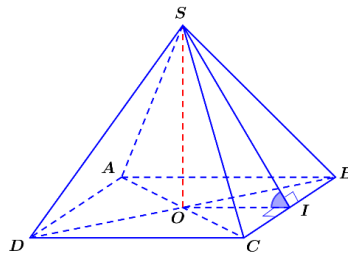
Khi đó: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow [O, BC, A] = \widehat{OIA}$.

Và $OI = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle OAI$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^\circ$.

Vậy $[O, BC, A] = 30^\circ$.

Câu 15: Chọn D.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I trung điểm của BC .

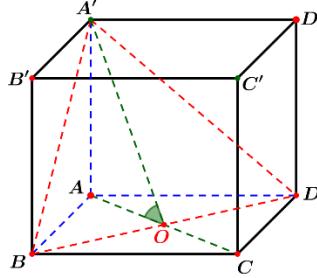
Khi đó: $SO \perp (ABCD)$ và $SI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ OI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SIO}$.

Và $\triangle SCD$ đều cạnh $a \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SOI$ vuông tại O , ta có: $\cos \widehat{SIO} = \frac{OI}{SI} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16: Chọn D.



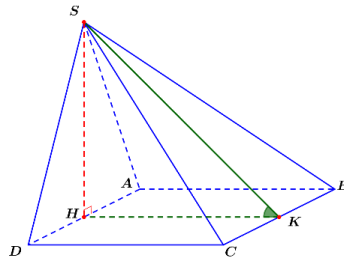
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp A'O$.

Khi đó: $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABD) = BD \\ A'O \perp BD \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow [A', BD, A] = \widehat{A'OA} = 30^\circ$.

Xét $\triangle A'AO$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{A'OA} = \frac{AA'}{AO} \Rightarrow AA' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Chọn A.



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, BC .

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $HK \perp BC$.

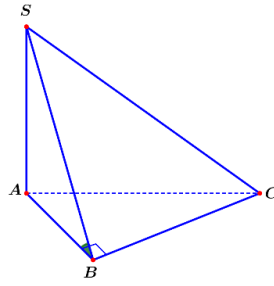
Khi đó: $\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp SK$.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ HK \perp BC \\ SK \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SKH} = \varphi$.

Xét $\triangle SHK$ vuông tại H , ta có:

$$\tan \varphi = \tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 18: Chọn D.

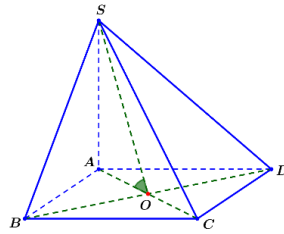


Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SBA}.$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$

Câu 19: Chọn A.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

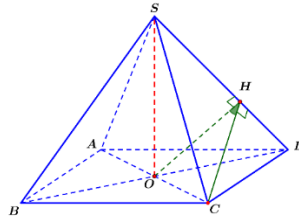
Ta có: $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp OA.$

Khi đó: $\begin{cases} (SBD) \cap (ABD) = BD \\ OA \perp BD \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow [S, BD, A] = \widehat{SOA}.$

Xét $\triangle SOA$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 30^\circ$

Vậy góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ bằng 30° .

Câu 20: Chọn A.



Ta có: $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp SD \quad (1)$

Trong mặt phẳng (SBD) , từ O kẻ $OH \perp SD$ tại H (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow SD \perp (COH) \Rightarrow SD \perp CH$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBD) \cap (SCD) = SD \\ OH \perp SD \\ CH \perp SD \end{cases} \Rightarrow [B, SD, C] = \widehat{OHC} = \varphi$

Xét $\triangle OHC$ vuông tại H , ta có:

$$\tan \varphi = \tan \widehat{OHC} = \frac{OC}{OH} = \sqrt{2}.$$

Chương VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Bài 6

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a ; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa SB và AC .

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, có SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB và SD . Chứng minh rằng $HK \perp (SAC)$.

Bài 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $AC' \perp (A'BD)$.

b) Chứng minh $AC' \perp (CB'D')$.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD . Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.

Bài 5: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, SA = a$ và $SA \perp (ABC), AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

Bài 7: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A' và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $A'A = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ D' đến mặt phẳng $(A'ACC')$.

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD .

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc

giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Bài 10: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Bài 11: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đây là tam giác ABC vuông tại A , $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với chân đường cao H kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC , góc tạo bởi AB' với (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Bài 12: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, BC, CD . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại điểm I lấy điểm S , sao cho tam giác SAB đều.

a) Chứng minh mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và tam giác SBC vuông.

b) Chứng minh đường thẳng DJ vuông góc với mặt phẳng (SIC) .

c) Xác định và tính góc giữa đường thẳng SD với mặt phẳng (SAB) .

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC theo a .

Bài 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = a\sqrt{2}, SA = a$. Gọi H là trung điểm cạnh BC .

a) Chứng minh $BC \perp (SAH)$.

b) Gọi I là chân đường cao vẽ từ A của tam giác SAH . Chứng minh: $(AIC) \perp (SBC)$.

c) Xác định và tính tan của góc giữa đường thẳng BI và mặt phẳng (ABC) .

Bài 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O . Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là trung điểm I của đoạn OB và $SB = a$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = \frac{1}{4}AD$

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$ và $(SIM) \perp (SAD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABO$. Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SAD) .

Bài 15 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biết

$$AB = 3a, AD = a, SA = 2a.$$

- a) Chứng minh $CD \perp (SAD)$.
- b) Vẽ $AM \perp BD$ tại M . Chứng minh $BD \perp (SAM)$.
- c) Tính số đo góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SAM) .
- d) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy là ?

- A)** $\widehat{SCA}$ **B)** $\widehat{SAC}$ **C)** $\widehat{ASC}$ **D)** $\widehat{SCB}$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$; SA vuông góc với mặt đáy. Chọn khẳng định đúng:

- A)** $SA \perp SB$. **B)** $SD \perp BD$.
C) $SA \perp BC$. **D)** $AC \perp BD$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$.

- A)** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C)** $\sqrt{\frac{3}{7}}$. **D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ khẳng định nào dưới đây là đúng.

- A)** $(SAD) \perp (ABCD)$. **B)** $(SAB) \perp (SCD)$.
C) $(SCD) \perp (SBC)$. **D)** $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với?

- A)** $(ABCD)$. **B)** $(CDD'C')$. **C)** (BDC') . **D)** $(A'BD)$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , SO vuông góc với đáy. Xác định góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$

- A)** $\widehat{SBA}$. **B)** $\widehat{SCO}$.
C) $\widehat{SHO}$ với H là trung điểm BC . **D)** $\widehat{SHO}$ với H thuộc BC .

Câu 7: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là?

- A)** Khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này tới mặt phẳng kia.
- B)** Khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này tới một điểm thuộc mặt phẳng kia.
- C)** Khoảng cách giữa đường thẳng này với một đường thẳng song song thuộc mặt phẳng kia.
- D)** Khoảng cách giữa đường thẳng này với một đường thẳng thuộc mặt phẳng kia.

Câu 8: Cho chóp $S.ABC$ đáy là tam giác vuông tại B và $AB = 2BC = 2a$. Biết $SA \perp (ABC)$. Tính $d(B; (SAC))$:

- A)** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **B)** a **C)** $2a$ **D)** $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khoảng cách giữa SB và CD ?

- A)** SB . **B)** AD . **C)** BD . **D)** SD .

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng?

- A)** $\frac{a\sqrt{39}}{26}$. **B)** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **C)** $\frac{a\sqrt{13}}{13}$. **D)** $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , có $BC = a$; mặt bên (SAC) vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° . Thể tích khối chóp $SABC$ là?

- A)** $\frac{a^3}{12}$. **B)** $\frac{a^3}{2}$. **C)** $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **D)** $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AB . Biết rằng $SC = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$?

- A)** $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$. **B)** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **C)** $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **D)** $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 13: Chóp tam giác đều $SA = a, AB = b$. có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , các cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp là?

- A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C = 4\sqrt{3}$. Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$?

- A) $2\sqrt{3}$. B) $4\sqrt{3}$. C) 64. D) 125.

Câu 15: Một tấm bìa hình vuông có cạnh 50cm. Người ta cắt bỏ đi ở một góc tấm bìa hình vuông cạnh 16cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Thể tích khối hộp chữ nhật là?

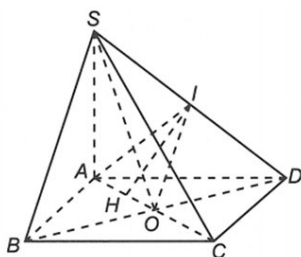
- A) 5184 cm^3 . B) 8704 cm^3 . C) 4680 cm^3 . D) 18496 cm^3 .

C. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:



Gọi I là trung điểm của SD

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\triangle SBD$. Suy ra

$$\begin{cases} OI \parallel SB \\ OI = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a \end{cases}$$

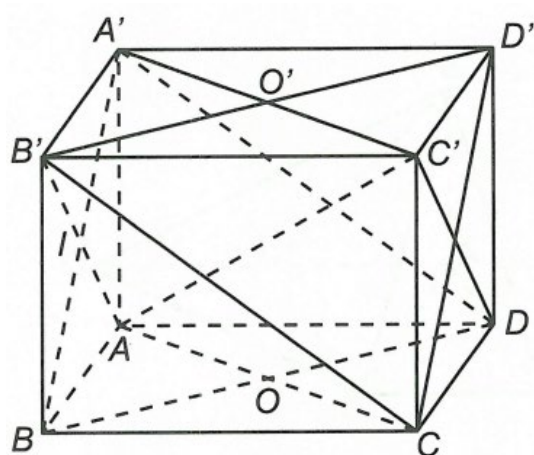
Vì $OI \parallel SB \Rightarrow (\widehat{SB, AC}) = (\widehat{OI, AC}) = \widehat{AOI}$

$$\text{Ta có } AI = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a$$

$\Rightarrow AI = OI \Rightarrow \triangle AOI$ cân tại I .

Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow IH \perp OA$ và $OH = \frac{OA}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$$\text{Xét } \triangle OHI \text{ có } \cos \widehat{HOI} = \frac{OH}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



a) Gọi O, I lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, AA'B'B$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC' (1).$

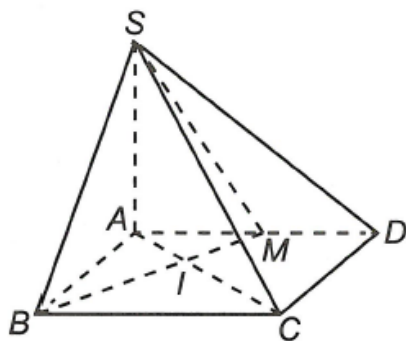
$\begin{cases} BA' \perp AB' \\ BA' \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow BA' \perp (AB'C'D) \Rightarrow BA' \perp AC' (2).$

Từ (1) và (2), ta có $AC' \perp (A'BD).$

b) Ta có $\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ A'B \parallel CD' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD \parallel (CB'D') \\ A'B \parallel (CB'D') \end{cases} \Rightarrow (A'BD) \parallel (CB'D').$

Mà $AC' \perp (A'BD)$ nên $AC' \perp (CB'D').$

Bài 4



Gọi I là giao điểm của AC và MB .

Ta có $MA = MD$ và $AD \parallel BC$ nên áp dụng định lý

Talet, suy ra $AI = \frac{1}{2}IC$.

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3a^2, AI^2 = \frac{1}{9}AC^2 = \frac{a^2}{3}.$$

$$MI^2 = \frac{1}{9}MB^2 = \frac{1}{9} \left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 + a^2 \right] = \frac{a^2}{6}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = MA^2.$$

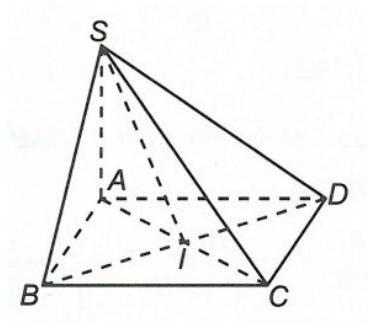
Vậy $\triangle AMI$ là tam giác vuông tại I . Suy ra $MB \perp AC$ (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $MB \perp (SAC)$.

Do $MB \subset (SMB)$ nên $(SMB) \perp (SAC)$.

Bài 5 :



Gọi I là tâm của hình vuông của $ABCD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

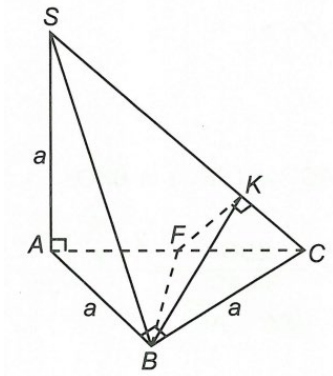
Mặt khác vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (SAC)$ do đó góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là góc $\widehat{BSI}$.

$$\text{Ta có } SB = a\sqrt{2}; BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSI} = 30^\circ.$$

Bài 6



Ta có $(SAC) \cap (SBC) = SC$.

Gọi F là trung điểm AC thì $BF \perp (SAC)$.

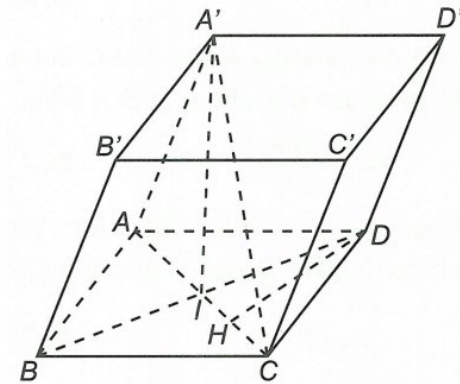
Dựng $BK \perp SC$ tại $K \Rightarrow SC \perp (BKF) \Rightarrow ((SAC), (SBC)) = (\widehat{KB, KF}) = \widehat{BKF}$.

$$\text{Dễ thấy } \triangle CFK \sim \triangle CSA \Rightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow FK = \frac{FC \cdot SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\triangle BFK \text{ vuông tại } F \text{ có } \tan \widehat{BKF} = \frac{FB}{FK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BKF} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° .

Bài 7:



Trong $(A'AC)$, kẻ $A'I \perp AC$.

Vì $(A'AC) \perp (ABCD)$ và $(A'AC) \cap (ABCD) = AC$ nên $A'I \perp (ABCD)$.

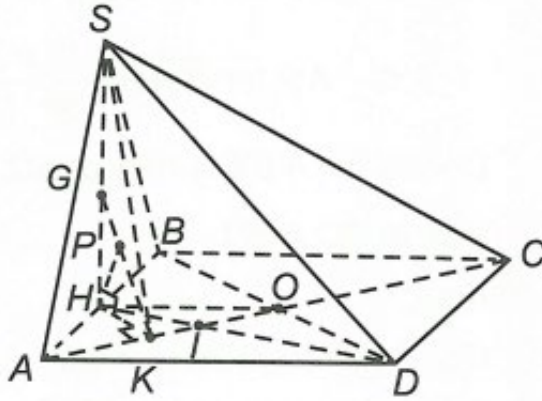
Vì $DD' \parallel AA'$ nên $DD' \parallel (A'ACC') \Rightarrow d(D', (A'AC)) = d(D, (A'AC))$

Kẻ $DH \perp AC$.

Ta có $AC = A' A\sqrt{2} = 2a \Rightarrow CD = a$.

Suy ra $d(D, (A' AC)) = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8 :



Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD, H là trung điểm AB.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Gọi I là giao điểm của HD và $AC \Rightarrow ID = 2IH$.

Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$.

Suy ra $IG \parallel SD \Rightarrow SD \parallel (AGC)$.

$\Rightarrow d(SD; AC) = d(SD; (AGC)) = d(D; (AGC)) = 2d(H; (AGC))$.

Dựng $HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (GHK)$.

Dựng $HP \perp GK \Rightarrow HP \perp (GAC)$.

Suy ra $d(H; (GAC)) = HP$.

Ta có $AH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; $HO = \frac{BC}{2} = a$; $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HG = \frac{1}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

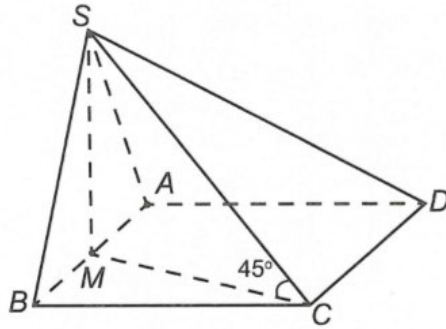
Xét tam giác GHK vuông tại H:

$$\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{17}{a^2}.$$

Suy ra $HP = \frac{\sqrt{17}a}{17}.$

Vậy $d(SD; AC) = \frac{\sqrt{17}a}{17}.$

Bài 9:



Ta có: $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2.$

Gọi M là trung điểm của AB, khi đó

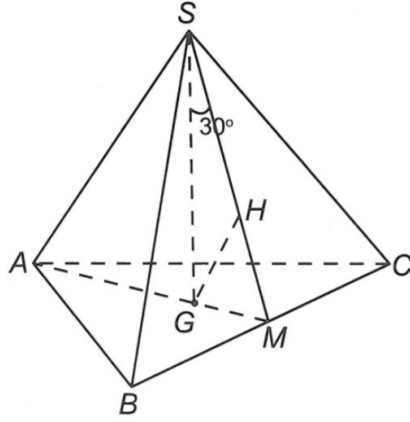
$$SM \perp AB \Rightarrow SM \perp (ABCD).$$

Do đó $\left(\widehat{SC, (ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC, MC}\right) = \widehat{SCM} = 45^\circ.$

Khi đó $SM = MC = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SM.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3\sqrt{17}}{3}$

Bài 10:



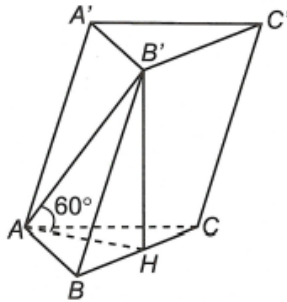
Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hạ $GH \perp SM (H \in SM) \Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow (\widehat{SG, (SBC)}) = \widehat{GSM} = 30^\circ$.

$$SG = GM \cdot \cot \widehat{GSM} = \frac{1}{3} \cdot AM \cdot \cot 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Bài 11



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $B'H \perp (ABC)$

$$\Rightarrow (\widehat{AB', (ABC)}) = \widehat{B'AH} = 60^\circ$$

Xét tam giác ABC vuông tại A có

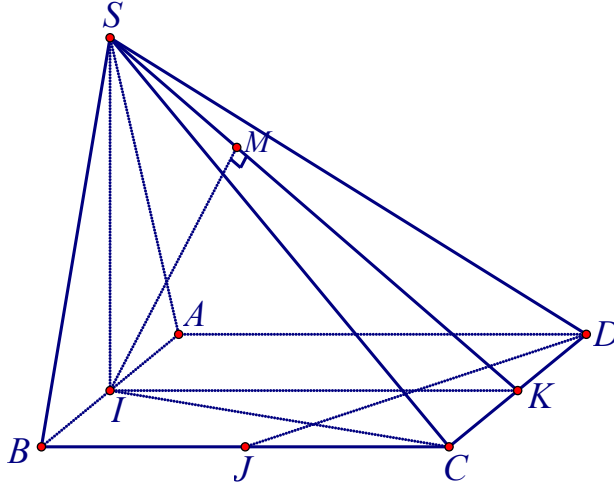
$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Xét tam giác AHB' vuông tại H có

$$B'H = AH \cdot \tan \widehat{B'AH} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot B'H = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^3$$

Bài 12:



a) $SI \perp (ABCD)$ (gt)

$$\Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SI \text{ (} SI \perp (ABCD) \text{)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC \text{ suy ra vuông tại } B$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \triangle BCI &= \triangle CDJ \Rightarrow \widehat{BCI} = \widehat{CDJ} \\ \widehat{BCI} + \widehat{DCI} &= 90^\circ \Rightarrow \widehat{CDJ} + \widehat{DCI} = 90^\circ \Rightarrow DJ \perp CI \end{aligned}$$

$$\begin{cases} DJ \perp CI \text{ (gt)} \\ DJ \perp SI \text{ (} SI \perp (ABCD) \text{)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow DJ \perp (SCI)$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp SA \text{ (} SA \perp (ABC), BC \subset (ABC) \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAH)$$

$$\text{b) Ta có: } \left. \begin{array}{l} AI \perp AH \text{ (gt)} \\ AI \perp BC \text{ (} BC \perp (SAH), AI \subset (SAH) \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow AI \perp (SBC)$$

$$\text{Mà } AI \subset (AIC) \Rightarrow (AIC) \perp (SBC)$$

$$\text{c) Tam giác ABC vuông cân tại A, có } AB = a\sqrt{2} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow AH = a$$

$$\text{Tam giác SAH có: } SA = AH = a \Rightarrow \Delta SAH \text{ vuông cân tại A}$$

$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của SH}$$

$$\text{Gọi K là trung điểm của AH} \Rightarrow IK \text{ là đường trung bình của tam giác SAH} \\ \Rightarrow IK \parallel SA$$

$$\Rightarrow IK \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow K \text{ là hình chiếu của I lên } (ABC)$$

$$\Rightarrow BK \text{ là hình chiếu của BI lên } (ABC)$$

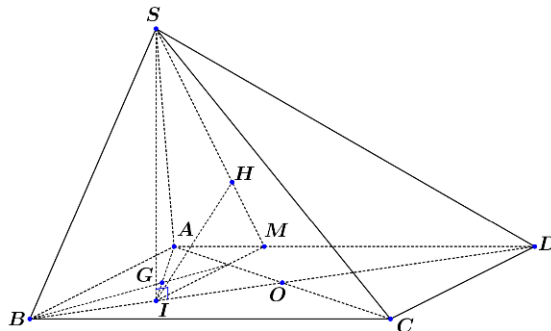
$$\Rightarrow (BI, (ABC)) = (BI, BK) = \widehat{IBK}$$

$$KH = \frac{AH}{2} = \frac{a}{2}$$

$$BH = \frac{BC}{2} = a \Rightarrow BK = \sqrt{BH^2 + KH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$IK = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \tan \widehat{IBK} = \frac{IK}{BK} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Bài 14:



a) Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SI \text{ (} SI \perp (ABCD) \text{)} \end{cases}$

$$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$$

Ta có: $\begin{cases} IM \perp AD \text{ (} IM \parallel AB, AB \perp AD \text{)} \\ SI \perp AD \text{ (} SI \perp (ABCD) \text{)} \end{cases}$

$$\Rightarrow AD \perp (SIM) \Rightarrow (SAD) \perp (SIM)$$

b) Ta có IC là hình chiếu của SC lên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, IC)}$

$$IB = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4} \cdot 2a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$IC = \sqrt{OI^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Xét $\triangle SIC$ ta có $\tan \widehat{SCI} = \frac{SI}{IC} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,25 \Rightarrow \widehat{SCI} \approx 24^\circ$.

c)

Trong $\triangle SIM$, gọi IH là đường cao.

* Ta có: $\left. \begin{array}{l} (SIM) \perp (SAD) \\ (SIM) \cap (SAD) = SM \\ IH \perp SM; IH \subset (SIM) \end{array} \right\} \Rightarrow IH \perp (SAD) \Rightarrow d[I, (SAD)] = IH$

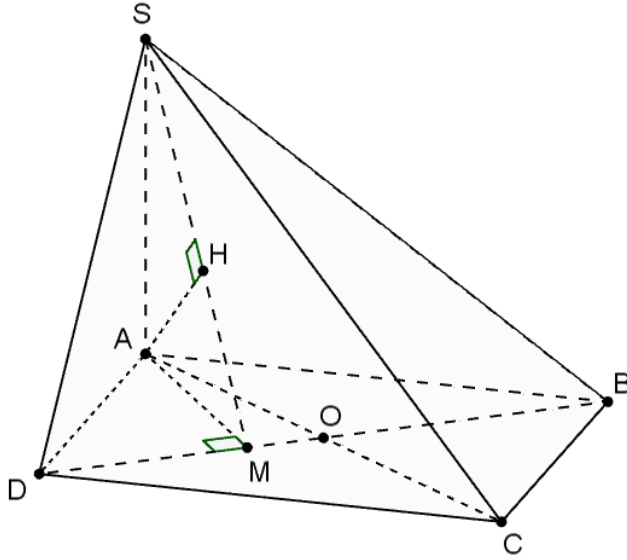
* Ta có: $\frac{d[G, (SAD)]}{d[I, (SAD)]} = \frac{GA}{IA} = \frac{2}{3} \Rightarrow d[G, (SAD)] = \frac{2}{3} \cdot d[I, (SAD)] = \frac{2}{3} IH$

* Ta có: $\frac{IM}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow IM = \frac{3}{4} \cdot 2a = \frac{3a}{2}$

* Xét $\triangle SIM$, ta có: $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IM^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{22}{9a^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{22}}{22}$

$$\Rightarrow d[G, (SAD)] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{22}}{22} = \frac{a\sqrt{22}}{11}$$

Bài 15:



$$\text{a) } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$

$$\text{b) } \begin{cases} BD \perp AM \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAM)$$

c) Hình chiếu của A lên (SAM) là A

Hình chiếu của D lên (SAM) là M (do $BD \perp (SAM)$ tại M)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của AD lên (SAM) là AM

$$\Rightarrow (AD, (SAM)) = (AD, AM) = \widehat{MAD}.$$

$$AM = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$$

$$\cos \widehat{MAD} = \frac{AM}{AD} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \widehat{MAD} \approx 18,43^\circ$$

d) $O = AC \cap BD$

$$CA \cap (SBD) = O \Rightarrow \frac{d(C, (SBD))}{d(A, (SBD))} = \frac{CO}{AO} = 1$$

$$\Rightarrow d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$$

Vẽ $AH \perp SM$ tại H .

$$\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BD \\ \text{Trong } (SBD): SM \cap BD = M \end{cases}$$

$$\Rightarrow AH \perp (SBD) \text{ tại } H \Rightarrow d(A, (SBD)) = AH.$$

$$AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{6}{7}a$$

$$\text{Vậy } d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = AH = \frac{6}{7}a$$



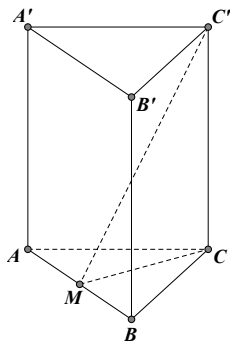
BAI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.A	2.C	3.D	4.A	5.B	6.C	7.A	8.A	9.B	10.B
11.A	12.C	13.A	14.C	15.A					

Câu 1: Chọn A. Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng đáy nên góc tạo bởi giữa SC và mặt phẳng đáy là $\alpha = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$

Câu 2: Chọn C. Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ nên chọn.

Câu 3: Chọn D.



Do $CC' \perp (ABC)$ nên suy ra MC là hình chiếu của MC' lên (ABC) . Khi đó:
 $(MC'; ABC) = (MC'; MC) = \widehat{C'MC} = \alpha.$

$$\text{Xét tam giác } MCC' \text{ vuông tại } C \text{ có: } \tan \alpha = \frac{CC'}{CM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 4: Chọn A. $\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ SA \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAD) \perp (ABCD).$

Câu 5: Chọn B. $(ACC'A')$ không vuông góc với $(CDD'C')$

Câu 6: Chọn C. góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHO}$ với H là trung điểm BC

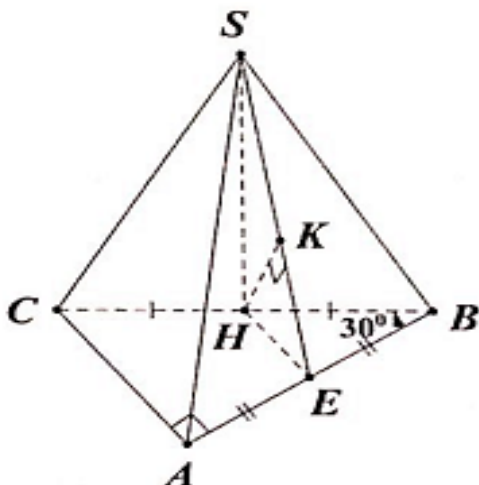
Câu 7: Chọn A. Định nghĩa.

Câu 8: Chọn A. Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

$$\Rightarrow BH = d(B; (SAC)) = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Câu 9: Chọn B. Ta có $d(SB; CD) = d(CD; (SAB)) = d(D; (SAB)) = DA$

Câu 10: Chọn B.



Gọi H là trung điểm của BC

$$\text{Vì } \begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \\ (SBC) \supset SH \perp BC \end{cases}$$

$$\text{Vì } CH \cap (SAB) = B \Rightarrow \frac{d(C, (SAB))}{d(H, (SAB))} = \frac{CB}{HB} = 2$$

$$\Rightarrow d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB))$$

Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow HE \parallel AC \Rightarrow HE \perp AB$

Trong (SHE) , kẻ $HK \perp SE, (K \in SE)$ (1)

$$\forall \begin{cases} AB \perp HE \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \xrightarrow{HK \subset (SHE)} AB \perp HK \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow HK \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HK$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ HE = \frac{AC}{2} = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{2} = \frac{a}{4} \end{cases}$$

$$\text{Xét } \triangle SHE \text{ vuông tại } H \text{ có đường cao } HK, \text{ ta có } HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{26}.$$

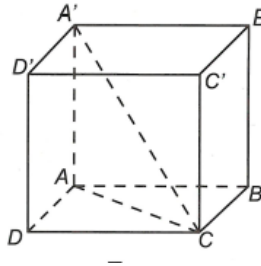
$$\text{Vậy } d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)) = 2HK = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 11: Chọn A. Thể tích khối chóp

Câu 12: Chọn C. Thể tích khối chóp

Câu 13: Chọn A. Thể tích khối chóp

Câu 14: Chọn C.



$$\text{Đặt } AB = x \Rightarrow AC = x\sqrt{2}.$$

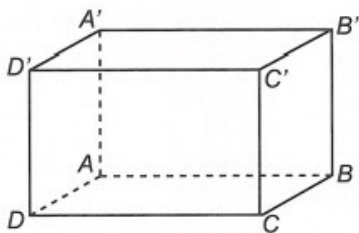
$\triangle AA'C$ vuông tại A có

$$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3};$$

$$A'C = 4\sqrt{3} \Rightarrow x\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4^3 = 64.$$

Câu 15: Chọn A.



$AA' = BB' = CC' = DD' = 16\text{cm}$ nên $ABCD$ là hình vuông có

$$AB = 50 - 2.16 = 18(\text{cm}).$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AC.AD = 18.18.16 = 5184(\text{cm}^3).$$