

Chương 1

Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số

Câu 79. Hàm số $y = x^3 - 3x - 2024$ đồng biến trên khoảng nào?

- a) $\mathbb{R}$. b) $(-\infty; -1)$. c) $(-1; 1)$. d) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng□

Câu 80. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- a) $(-\infty; 1)$. b) $(-1; 0)$. c) $(-1; 1)$. d) $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên tập $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu y' như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng□

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3			$+\infty$
			-4		-4		

- a) $(-1; 0)$. b) $(-4; -3)$. c) $(1; +\infty)$. d) $(0; 1)$.

Lời giải.

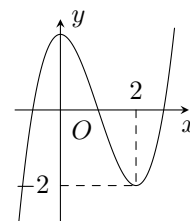
Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 82.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- a) $(-\infty; 2)$. b) $(0; 2)$. c) $(2; +\infty)$. d) $(-\infty; 0)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 83. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x + 2109m - 2020$, m là tham số thực.

- a) $f'(x) = -x^2 - 2mx$.
b) $f'(x) = -x^2 - 2mx + 2m - 3$.
c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.
d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -x^2 - 2mx + 2m - 3$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow f'(x) = -x^2 - 2mx + 2m - 3 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ (-m)^2 - (-1)(2m-3) \leq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.
\end{aligned}$$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 84. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$.

- a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

b) $y' = \frac{m-1}{(x-m)^2}, \forall x \neq m.$

c) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi $m < 1.$

d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi $0 \leq m < 1.$

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}.$

Ta có $y' = \frac{-m+1}{(x-m)^2}, \forall x \neq m.$

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \notin (-\infty; 0) \\ -m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 1.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 85. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 2$

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

b) $y' = 3x^2 + 6x$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = -2 \Rightarrow y = 6. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						
	$-\infty$	6	2	$+\infty$		

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 86. Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x}$.

a) Hàm số có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

d) Hàm số không có cực trị.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{x^2}$, $y' > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Lời giải.

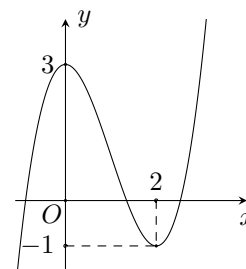
Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 88.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

- Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -1 .
- Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3 .
- $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- $x = 2$ là điểm cực đại của hàm số.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 3$.

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -1$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 89. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$, m là tham số thực.

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi $m = 2$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi $m = 1$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi $m = 5$.
- $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ nên $y'(3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 5$.

Với $m = 1$, $y' = x^2 - 2x - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng xét dấu y' như hình bên.

Từ bảng xét dấu, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Với $m = 5$, $y' = x^2 - 10x + 21$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = 7$.

Bảng xét dấu của y' như hình bên.

Từ bảng xét dấu, ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi $m = 5$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 90. Cho hàm số $y = x^4 + mx^2$, m là tham số thực.

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi $m \geq 0$.
- $y' = 4x^3 + 2x$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi $m < 0$.
- $y' = 4x^3$ khi $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 2mx = 2x(2x^2 + m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{m}{2} \end{cases}$.

- Nếu $m = 0$ thì $x = 0$ là nghiệm bội ba của phương trình $y' = 0$ và khi đó $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- Nếu $m > 0$ thì $x^2 = -\frac{m}{2} < 0$ (vô lí), khi đó $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0.
Điều kiện tương đương là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m(m-1) < 0 \\ 2m \cdot 0^2 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 0 < m < 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 94. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - (m^2 - 4)x^2 + 3$ có 1 cực trị.

a) $y' = 4x^3 - 2(m^2 - 4)x$.

b) $1 \in S$.

c) 4.

d) Số phần tử của tập S là 5.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 2(m^2 - 4)x = 2x \cdot [2x^2 - (m^2 - 4)]$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{m^2 - 4}{2} \end{cases}$.

Hàm số có 1 cực trị khi và chỉ khi $\frac{m^2 - 4}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-2; 2]$.

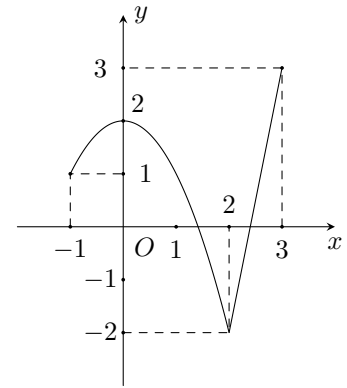
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in S = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Số phần tử của S là 5.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 95.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



- a) Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- b) Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.
- c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$.
- d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$.

Lời giải.

- a) Hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ nên tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- b) Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 tại $x = 2$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 tại $x = 2$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 96. Cho hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Hàm số tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.
- d) Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 2\sqrt{2}]$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-1; 3]$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

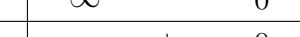
$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x+1 = 3-x \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có $y(-1) = 2$, $y(1) = 2\sqrt{2}$, $y(3) = 2$.

- a) Hàm số liên tục và xác định trên $[-1; 3]$ nên tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số là $2\sqrt{2}$.
- d) Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 2\sqrt{2}]$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 97. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất.
- b) Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 .
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 0 .

Lời giải.

- a) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất.
- b) Ta có $-2 < f(x), \forall x$ nhưng không tồn tại giá trị của x để $f(x) = -2$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất.
- c) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.
- d) Hàm số không có giá trị lớn nhất.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 98. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số là 3 .
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 1 .
- c) Giá trị nhỏ nhất trên $(1; +\infty)$ là 1 .
- d) Giá trị lớn nhất trên $(-1; 1)$ là 3 .

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - x + 1 > 0$ (luôn đúng).

Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}.$$

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y					

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số là 3 .

- b)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{1}{3}$.
- c)** Trên $(1; +\infty)$ hàm số không có giá trị nhỏ nhất.
- d)** Trên $(-1; 1)$ hàm số không có giá trị lớn nhất.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d sai ☐

Câu 99. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$. Xét tính đúng sai các khẳng định dưới đây

- a) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$.
- b) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $y = 2$.
- c) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $x = 1$.
- d) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là $x = 1$.

- a) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$.
- b) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$.
- c) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.
- d) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	-		+	-
y	$+\infty$ ↘ 1	$-\infty$ ↗ $+\infty$	1 ↘ 0	

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- b) $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- c) $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- d) $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.
- b) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.
- c) Đồ thị hàm số chỉ có hai tiệm cận đứng là $x = 0$ và $x = -2$.
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 101. Cho hàm số $y = \frac{m^2x + 1}{x - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận đứng.
- c) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.
- d) Khi $m = 0$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận.

Lời giải.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = m^2$ suy ra hàm số luôn có tiệm cận ngang.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là $x = 1$.
- c) Khi $m = 1$ ta được hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ suy ra đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = 1$ là tiệm cận ngang nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.
- d) Khi $m = 0$ ta được hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ suy ra đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = 0$ là tiệm cận ngang nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 102. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận đứng với mọi m .
- b) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang với mọi m .
- c) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x + 4$.
- d) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận xiên.

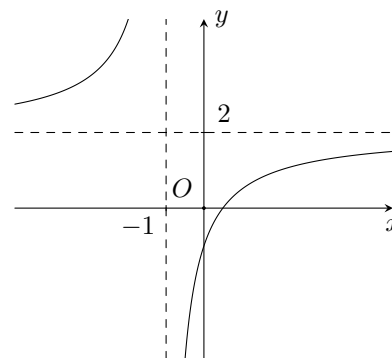
Lời giải.

- a) Khi $m = \frac{7}{2}$ hàm số trở thành $y = \frac{\frac{7}{2}x^2 + 6x - 2}{x + 2} = \frac{7}{2} \left(x - \frac{2}{7} \right)$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- b) Khi $m = 0$ hàm số trở thành $y = \frac{6x - 2}{x + 2}$ từ đó suy ra đồ thị hàm số có $y = 6$ là tiệm cận ngang.
- c) Khi $m = 1$ hàm số trở thành $y = \frac{x^2 + 6x - 2}{x + 2} = x + 4 - \frac{10}{x + 2}$ từ đó suy ra $y = x + 4$ là một tiệm cận ngang.
- d) Khi $m = 0$ hàm số trở thành $y = \frac{6x - 2}{x + 2}$ từ đó suy ra đồ thị hàm số có $y = 6$ là tiệm cận ngang, $x = -2$ là tiệm cận đứng và không có tiệm cận xiên.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai □

Câu 103.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



- a) $x = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- b) $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

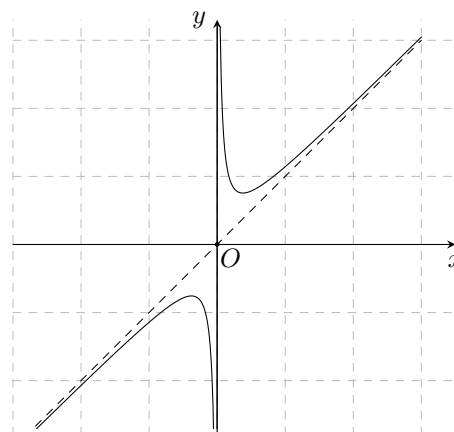
Lời giải.

- a) $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- b) $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- c) $x = -1$ là đường tiệm cận đứng và $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 104.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



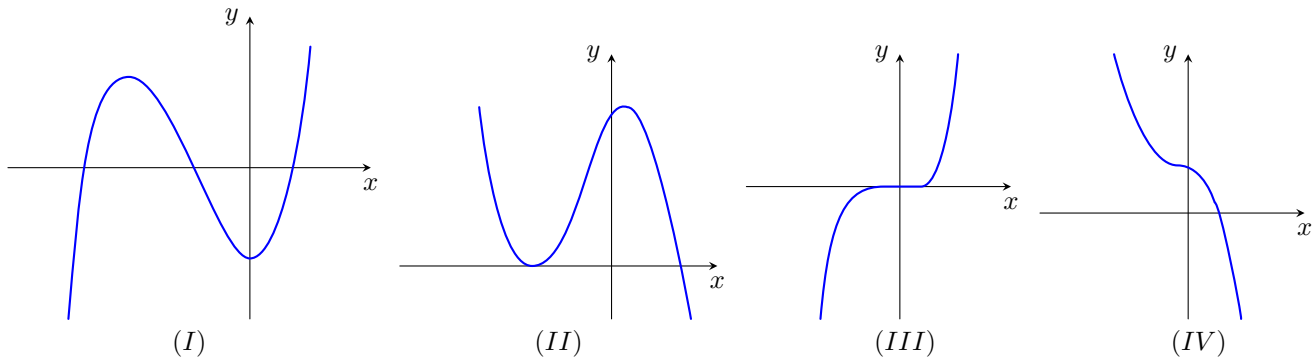
- a) $x = 0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- b) $y = -x$ là một đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- c) $y = x$ là một đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- d) Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Lời giải.

- a) $x = 0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- b) $y = x$ là một đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- c) $y = x$ là một đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- d) Đồ thị hàm số có $x = 0$ là tiệm cận đứng và $y = x$ là tiệm cận xiên nên có hai tiệm cận.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 105. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị các dạng sau. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?



- a) Đồ thị (I) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
b) Đồ thị (II) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
c) Đồ thị (III) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.
d) Đồ thị (IV) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm phân biệt.

Lời giải.

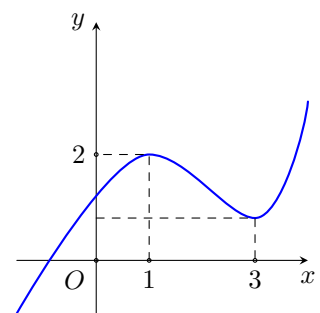
- a) Dựa vào hình dạng đồ thị (I) ta có $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
b) Dựa vào hình dạng đồ thị (I) ta có $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
c) Dựa vào hình dạng đồ thị (III) ta có $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép
d) Dựa vào hình dạng đồ thị (IV) ta có $a < 0$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 106.

Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Mỗi mệnh đề sau đúng hay sai?.

- a) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
b) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
c) Đồ thị có $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm.
d) $y' > 0, \forall x < 1$.



Lời giải.

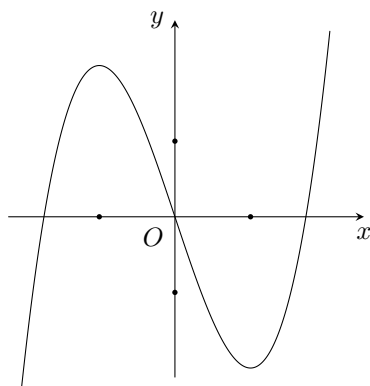
- Dựa vào đồ thị, dễ thấy $1 < x < 3$ thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải $\Rightarrow y' < 0$. Do đó loại đáp án $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' > 0, \forall x > 1$
- Dựa vào đồ thị, dễ thấy $\forall x < 1$ thì đồ thị đi lên từ trái sang phải $\Rightarrow y' > 0$.
- Hình dáng:  $\Rightarrow a > 0$.
Hai cực trị nằm cùng một bên $Oy \Rightarrow ac > 0 \Rightarrow c > 0$ (vì $a > 0$).

$$(C) \cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = d > 0.$$

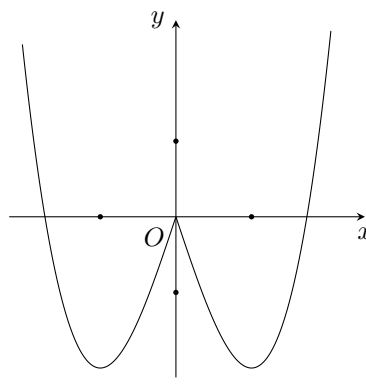
$$\text{Hoành độ điểm uốn } x = -\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0 \text{ (vì } a > 0 \text{)}.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 107. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị như hình 1.



Hình 1



Hình 2

Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Đồ thị ở hình 2 là của hàm số $y = |x|^3 - 3|x|$.
- b) Đồ thị ở hình 1 và đồ thị $y = |x^3 - 3x|$ là giống nhau.
- c) Đồ thị $y = |x^3 - 3x|$ và $y = ||x|^3 - 3|x||$ là giống nhau.
- d) Đồ thị $y = x^3 - 3x$ và $y = ||x|^3 - 3|x||$ là giống nhau.

Lời giải.

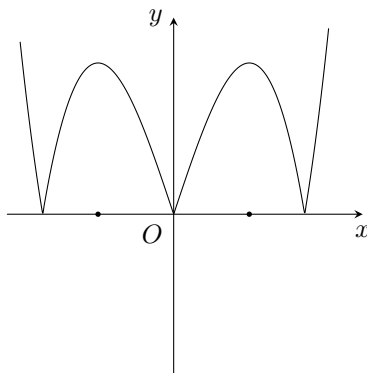
a) So với Hình 1, ta thấy Hình 2 là đồ thị của hàm số $y = g(x)$ gồm 2 phần:

- Phần 1: Phần đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ nằm phía bên phải trục tung.
- Phần 2: Đối xứng với phần 1 qua trục tung.

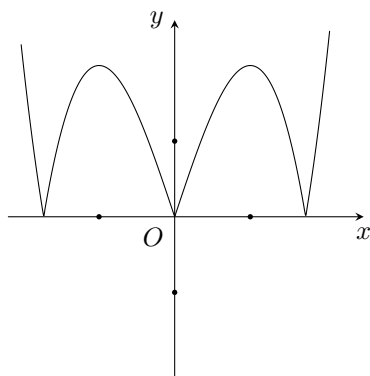
$$\text{Suy ra } g(x) = f(|x|) = |x|^3 - 3|x|.$$

b) Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua qua Ox .



c) Đồ thị hàm $y = ||x|^3 - 3|x||$

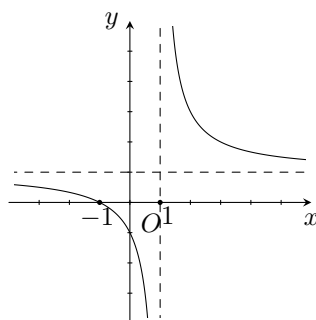


Hình 2

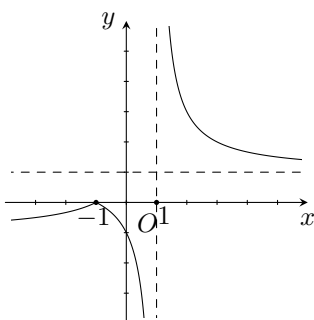
d) Đồ thị $y = x^3 - 3x$ và $y = ||x|^3 - 3|x||$ là khác nhau.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

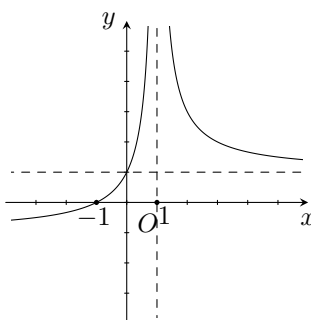
Câu 108. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị như Hình 1.



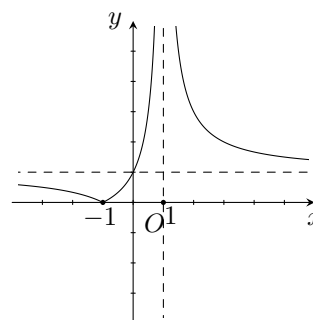
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

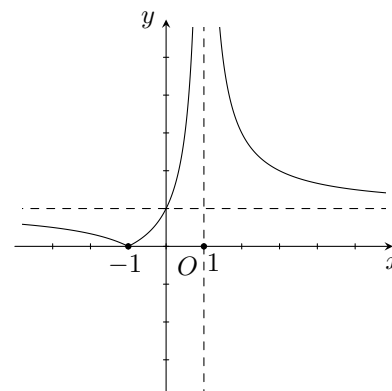
- a) Hình 4 là đồ thị của hàm số $y = \frac{|x+1|}{x-1}$.
- b) Hình 2 là đồ thị của hàm số $y = \frac{|x+1|}{x-1}$.
- c) Hình 3 là đồ thị của hàm số $y = \frac{|x+1|}{|x-1|}$.
- d) Đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ khác nhau.

Lời giải.

a)

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

- Phần 1: Giữ nguyên phần trên trục Ox .
- Phần 2: Đối xứng với phần bị bỏ của đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$ qua trục Ox .

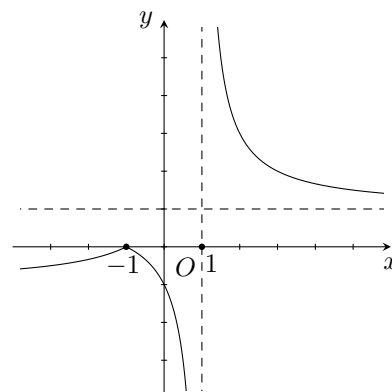


b)

$$\text{Ta có } y = \frac{|x+1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{khi } x \geq -1, x \neq 1 \\ -\frac{x+1}{x-1} & \text{khi } x < -1. \end{cases}$$

Do đó, đồ thị hàm số $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ gồm 2 phần:

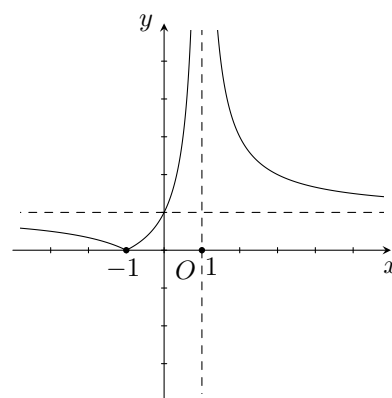
- Phần 1: Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ với $x \geq -1, x \neq 1$.
- Phần 2: Đối xứng với phần còn lại của đồ thị $y = f(x)$ với $x < -1$ qua trục Ox .



c)

$$\text{Đồ thị } y = \left| \frac{|x+1|}{x-1} \right|$$

- Phần 1: Giữ nguyên phần trên trục Ox .
- Phần 2: Đối xứng với phần bị bỏ của đồ thị $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ qua trục Ox .



d) Đồ thị của hàm số $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ và $y = \left| \frac{|x+1|}{x-1} \right|$ là giống nhau.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 109. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-3	$+\infty$	

a) Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm.

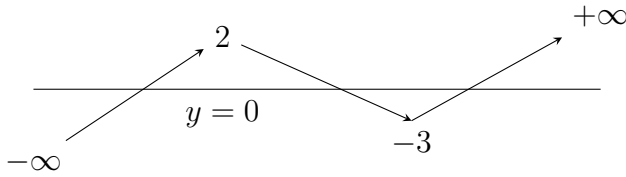
b) Phương trình $f(x) = 2$ có 1 nghiệm.

c) Phương trình $f(x) - 4 = 0$ vô nghiệm.

d) Phương trình $f(x) + 3 = 0$ có 2 nghiệm.

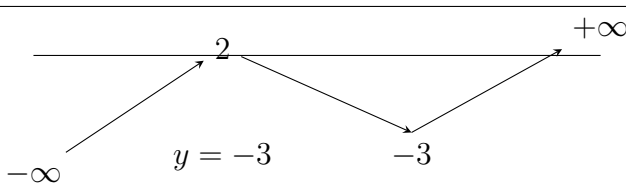
Lời giải.

a) Ta có $f(x) = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

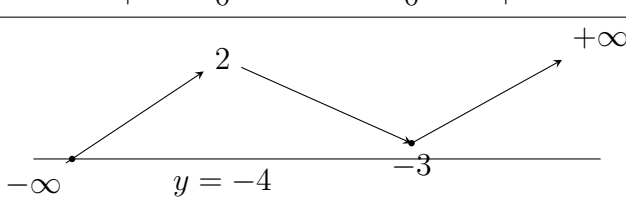
Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm.

b) Ta có $f(x) = 2$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

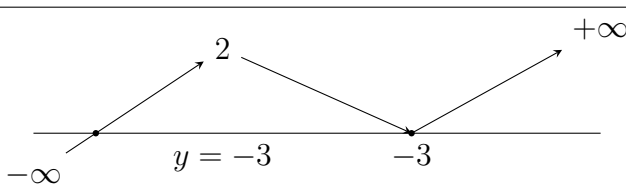
Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $f(x) = 2$ có 1 nghiệm.

c) Ta có $f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -4$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $f(x) = -4$ có 1 nghiệm.

d) Ta có $f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3$.

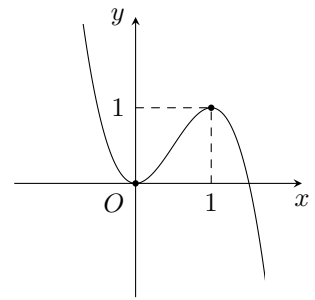
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $f(x) = -3$ có 2 nghiệm.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 110.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mỗi mệnh đề sau đây đúng hay sai?



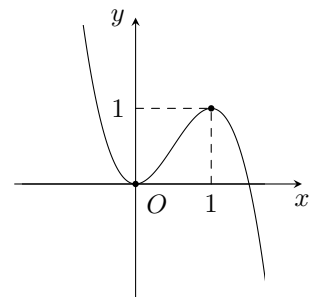
- a) Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm.
- b) Phương trình $f(x) = 1$ vô nghiệm.
- c) Phương trình $f(x) + 1 = 0$ có 2 nghiệm.
- d) Phương trình $f(x) = x$ có 3 nghiệm.

Lời giải.

a)

Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = 0$ như hình vẽ

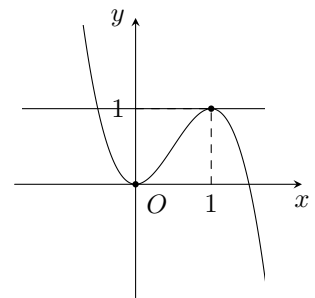
Dựa vào hình vẽ, ta có phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.



b)

Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = 1$ như hình vẽ

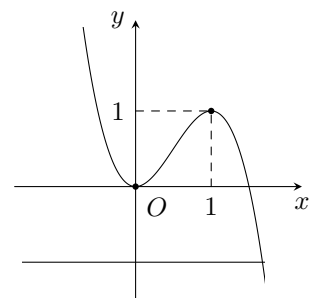
Dựa vào hình vẽ, ta có phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm phân biệt.



c)

Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = -1$ như hình vẽ

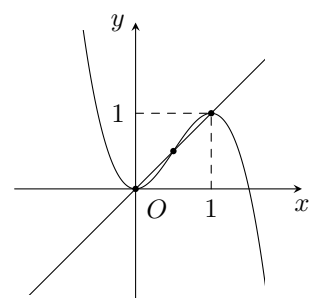
Dựa vào hình vẽ, ta có phương trình $f(x) = -1$ có 1 nghiệm phân biệt.



d)

Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = x$ như hình vẽ

Dựa vào hình vẽ, ta có phương trình $f(x) = x$ có 3 nghiệm phân biệt.



Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 111. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là $I(1; 2)$.
- b) $\overrightarrow{MN} = (2; 4)$.
- c) $MN = \sqrt{5}$.
- d) $M(1 + \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6})$ và $N(1 - \sqrt{6}; 2 - \sqrt{6})$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đường $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \frac{2x + 4}{x - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{6} \\ y = 2 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \\ y = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

Do đó $M(1 + \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6})$ và $N(1 - \sqrt{6}; 2 - \sqrt{6})$.

Vậy tọa độ trung điểm của MN là $I(1; 2)$.

Vectơ $\overrightarrow{MN} = (-2\sqrt{6}; -2\sqrt{6})$ và $MN = 4\sqrt{3}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 112. Cho đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - x + 3$. Mỗi mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Hai đồ thị đã cho không có điểm chung.
- b) Hai đồ thị cắt nhau tại điểm $(1; 3)$.
- c) Tổng tung độ của các giao điểm là 3.
- d) Số giao điểm của hai đồ thị trên là số nghiệm phân biệt của phương trình hoành độ giao điểm.

Lời giải.

Số giao điểm của $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và $y = x^2 - x + 3$ là số nghiệm phân biệt của phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và $y = x^2 - x + 3$

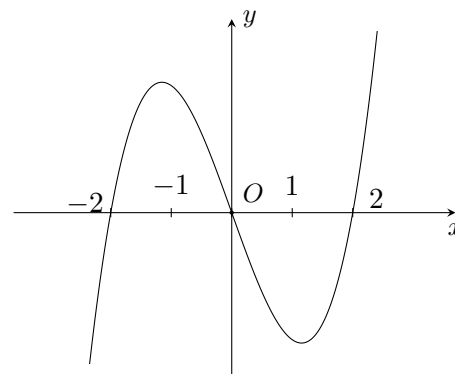
$$x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - x + 3$ cắt nhau tại điểm $(1; 3)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 113.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây.



- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên

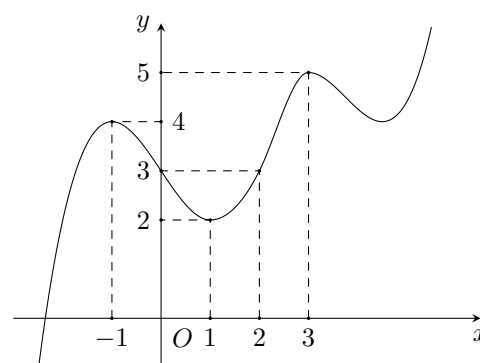
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$		$f(0)$		$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	
		$f(-2)$		$f(2)$		

- Từ bảng biến thiên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
- Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ và $x = 2$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 114.

Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây.



- Hàm số $y = f(x)$ có cả điểm cực đại và điểm cực tiểu.
- Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.
- Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực đại.
- Hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm và $f'(x)$ đổi dấu qua nghiệm đó nên hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 115. Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 2x^2$. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây.

a) k là số nguyên tố.b) k là số nguyên âm.c) k là số chính phương.d) k là số nguyên lẻ.**Lời giải.**

Ta có $y' = 3x^2 - 4x$. Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $k = y'(1) = -1$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng□

Câu 116. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Biết rằng trên (C) có 2 điểm phân biệt mà các tiếp tuyến của (C) tại các điểm đó song song với đường thẳng $y = x$. Gọi k tổng hoành độ của 2 điểm đó. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây.

a) k là số nguyên tố.b) k là số nguyên âm.c) k là số chính phương.d) k là số nguyên lẻ.**Lời giải.**

Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Ta có } y' = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Đường thẳng $y = x$ có hệ số góc $k = 1$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x$ nên

$$y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{3} \\ x_0 = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vì đường thẳng $y = x$ và (C) có hai giao điểm nên $y = x$ không phải là tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

Vậy tổng hoành độ của hai tiếp điểm là $-1 + \sqrt{3} + (-1) - \sqrt{3} = -2$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai□

Câu 117. Gọi m là tham số thỏa mãn đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$ đi qua điểm $N(-2; 0)$. Gọi k tổng hoành độ của 2 điểm đó. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây.

a) m là số hữu tỉ.b) m là số vô tỉ.c) m là số nguyên.d) m là số dương.**Lời giải.**

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$ đi qua điểm $N(-2; 0)$ nên ta có $16 - 8m + 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{8}{3}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 118. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Hãy cho biết tính đúng sai khi khẳng định mỗi điểm dưới đây thuộc đồ thị của hàm số đã cho.

a) $M(0; 1)$.b) $N(2; -5)$.c) $P(0; -1)$.d) $Q(1; 3)$.**Lời giải.**

Thay $x = 0$ vào $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ta được $y = -1$ nên điểm $(0; -1)$ thuộc đồ thị hàm số.

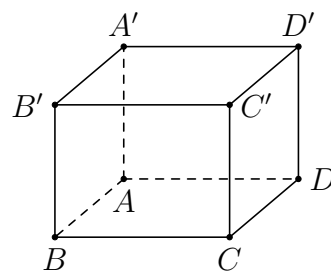
Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai□

Chương 2

Tọa độ của véc-tơ trong không gian

Câu 119.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- a) $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. b) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
c) $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}$. d) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải.

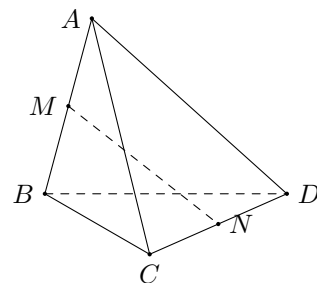
- a) Do $AA'D'D$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$
b) Do $AA'B'B$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$
c) Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}$
d) Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 120.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AB và CD .

Khẳng định nào sau đây đúng?



- a) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{MN}$.
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.
c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$.
d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

- a) Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{NM}$.
Vì vậy $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

- b) Ta có

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{ND}$$

$$\begin{aligned}
&= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \\
&= \overrightarrow{0} + 2\overrightarrow{MN} \quad (\text{do } M, N \text{ lần lượt là trung điểm của } AB, CD). \\
&= 2\overrightarrow{MN}.
\end{aligned}$$

c) Ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

d) Do N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 121. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° . Khẳng định nào sau đây đúng?

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$. b) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$. c) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$. d) $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

Lời giải.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = -15$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{19}$.

c) $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{7}$.

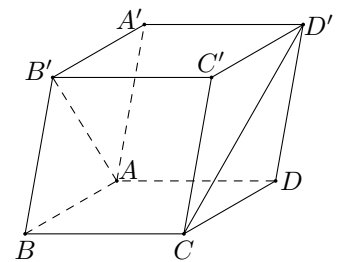
d) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 10^2 + 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{79}$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 122.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$. b) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$.
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$. d) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.



Lời giải.

a) Do các mặt của hình hộp là hình thoi nên $CD' \perp C'D$.

Do tứ giác $ADC'B'$ là hình bình hành nên $AB' \parallel C'D$. Từ đó suy ra $AB' \perp CD'$. Vì vậy $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = AA' \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

d) Ta có $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Tọa độ điểm A là $(-2; 4; 2)$.
- b) Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox là $A'(0; 4; 0)$.
- c) Trung điểm của OA là $M(-1; 2; 1)$.
- d) Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) là $H(-2; 0; 2)$.

Lời giải.

- Ta có $A(-2; 4; 2)$.
- Hình chiếu vuông góc của A lên Ox là $(-2; 0; 0)$.
- Trung điểm của OA là điểm $M(-1; 2; 1)$.
- Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0; 4; 2)$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 4)$, $C(0; -4; 0)$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Tọa độ trung điểm của AB là $(-1; 1; 1)$.
- b) Tam giác ABC có trọng tâm $G\left(0; -\frac{2}{3}; 2\right)$.
- c) Trung điểm của AC là $E\left(\frac{1}{2}; -2; 1\right)$.
- d) Nếu D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ thì $D(2; -6; -2)$.

Lời giải.

a) Gọi M là trung điểm AB , ta có
$$\begin{cases} x_M = \frac{1-1}{2} = 0 \\ y_M = \frac{0+2}{2} = 1, \text{ vậy } M(0; 1; 3). \\ z_M = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có
$$\begin{cases} x_G = \frac{1-1+0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{0+2-4}{3} = -\frac{2}{3}, \text{ vậy } G\left(0; -\frac{2}{3}; 2\right). \\ z_G = \frac{2+4+0}{3} = 2 \end{cases}$$

c) Gọi E là trung điểm AC , ta có
$$\begin{cases} x_E = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ y_E = \frac{0-4}{2} = -2, \text{ vậy } E\left(\frac{1}{2}; -2; 1\right). \\ z_E = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$

d) Gọi E là trung điểm AC , ta có
$$\begin{cases} x_E = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ y_E = \frac{0-4}{2} = -2, \text{ vậy } E\left(\frac{1}{2}; -2; 1\right). \\ z_E = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

a) $\vec{a} = (-2; 3; 2).$

b) $\vec{a} - 2\vec{i} = (0; 3; 2).$

c) $4\vec{a} = (-8; 10; 8).$

d) $\vec{a} - \vec{i} + 2\vec{j} = (-3; 5; 2).$

- Ta có $\vec{a} = (-2; 3; 2)$.

- $\vec{a} - 2\vec{i} = (-4; 3; 2).$

- $4\vec{a} = (-8; 12; 8)$.

- $\vec{a} - \vec{i} + 2\vec{j} = (-3; 5; 2).$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng ☐

a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; 2).$

b) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{OG} = (1; 1; 2)$.

c) Nếu M là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{OM} = (0; 1; -1)$.

d) Nếu D là đỉnh thứ tư của hình bình hành thì $(5; 1; 2)$.

- Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; 2)$.

- Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $G(1; 1; 2)$ nên $\overrightarrow{OG} = (1; 1; 2)$.

- Vì M là trung điểm của AB nên $M(0; 1; 1)$, vậy $\overrightarrow{OM} = (0; 1; -1)$.

- Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$, ta có $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_D - 1; y_D - 1; z_D) = (4; 0; 2) \Leftrightarrow D(5; 1; 2).$$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng ☐

Câu 127. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; 3)$, $\vec{c} = (0; 1; -3)$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $\vec{a} \cdot \vec{i} = 2$. b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. c) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 7$. d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 1$.

Lời giải.

- Ta có $\vec{a} \cdot \vec{i} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2$.
- Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 1$.
- Ta có $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -7$.
- Có $\vec{a} + \vec{b} = (3; 3; 2)$.
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = -3$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai□

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -27$. b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$.
c) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{9}{2\sqrt{35}}$. d) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5}{2\sqrt{21}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 5; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 4; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -1; 1)$.

- Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 + 20 + 2 = 27$.
- Ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 5 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -15$.
- Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{27}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}$.
- Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{15}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{18}} = \frac{5}{2\sqrt{21}}$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng□

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Véc-tơ $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$. b) $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_1b_3 - a_3b_1; a_1b_2 - a_2b_1)$.
c) $\vec{n} = (a_1b_2 - a_2b_1; a_3b_1 - a_1b_3; a_2b_3 - a_3b_2)$. d) $\vec{n} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$.

Lời giải.

- $\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.
- $\vec{n} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 130. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 1; 5)$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) $[\vec{a}, \vec{b}] = (7; 7; -7)$.
- b) $[\vec{a}, \vec{b}] = (-7; 7; -7)$.
- c) (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-1; 1; -1)$.
- d) (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Lời giải.

- Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (2 \cdot 5 - 3 \cdot 1; 3 \cdot 4 - 1 \cdot 5; 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4) = (7; 7; -7)$.
- (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \frac{1}{7} [\vec{a}, \vec{b}] = (1; 1; -1)$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Chương 3

Các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm

Câu 131. Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau

111,6	134,9	130,3	134,2	140,9	109,3	154,4	156,3	116,1	96,7
105,2	80,8	80,8	110	109	139	145	161	126	114

- Xét tính đúng sai của các khẳng định sau
- a) Khoảng biến thiên của bảng số liệu là $R = 80,2$.
 - b) Cỡ mẫu $n = 161$.
 - c) Cỡ mẫu $n = 20$.
 - d) Khoảng biến thiên của bảng số liệu là $R = 2,4$.

Lời giải.

- a) Khoảng biến thiên của bảng số liệu là $R = 161 - 80,8 = 80,2$.
- b) Cỡ mẫu $n = 20$.
- c) Cỡ mẫu $n = 20$.
- d) Khoảng biến thiên của bảng số liệu là $R = 161 - 80,8 = 80,2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai□

Câu 132. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Xét tính đúng sai về khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

- a) Khoảng biến thiên của giá cổ phiếu A là $R = 11 - 8 = 3$.
- b) Khoảng biến thiên của giá cổ phiếu B là $R = 21 - 16 = 5$.
- c) Khoảng biến thiên của cổ phiếu A và B bằng nhau và bằng $R = 130 - 120 = 10$.
- d) Khoảng biến thiên của giá cổ phiếu là $R = 21 - 8 = 13$.

Lời giải.

- a) Khoảng biến thiên của cổ phiếu A là $R = 130 - 120 = 10$
- b) Khoảng biến thiên của cổ phiếu B là $R = 130 - 120 = 10$
- c) Khoảng biến thiên của cổ phiếu A và B bằng nhau và bằng $R = 130 - 120 = 10$
- d) Khoảng biến thiên của cổ phiếu $R = 130 - 120 = 10$

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai □

Câu 133. Cho mẫu số liệu ghép nhóm cho trong bảng sau

Thời gian (phút)	[9, 5; 12, 5)	[12, 5; 15, 5)	[15, 5; 18, 5)	[18, 5; 21, 5)	[21, 5; 24, 5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Cỡ mẫu $n = 56$.
- b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[12, 5; 15, 5)$.
- c) Tứ phân vị thứ ba $Q_3 = 20$.
- d) Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = 4,75$.

Lời giải.

Cỡ mẫu là $n = 56$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_{14} + x_{15}}{2}$.

Do x_{14}, x_{15} đều thuộc nhóm $[12, 5; 15, 5)$ nên nhóm này chứa Q_1 . Do đó ta có

$$Q_1 = 12,5 + \frac{\frac{56}{4} - 3}{12} \cdot 3 = 15,25.$$

Với tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\frac{x_{42} + x_{43}}{2}$.

Do x_{42}, x_{43} đều thuộc nhóm $[18, 5; 21, 5)$ nên nhóm này chứa Q_3 . Do đó ta có

$$Q_3 = 18,5 + \frac{\frac{3 \cdot 56}{4} - 30}{24} \cdot 3 = 20.$$

- a) Cỡ mẫu $n = 56$.
- b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[12, 5; 15, 5)$.
- c) Tứ phân vị thứ ba $Q_3 = 20$.

d) Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 4,75$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 134. Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau

Tốc độ (km/h)	[42; 46)	[46; 50)	[50; 54)	[54; 58)	[58; 62)
Số xe	3	7	4	3	3

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Nhóm chứa trung vị là nhóm [46; 50).
- b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm [46; 50).
- c) Khoảng biến thiên $R = \frac{52}{7}$.
- d) Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = \frac{52}{7}$.

Lời giải.

- Ta có khoảng biến thiên $R = 62 - 42 = 20$.
- Ta có nhóm chứa trung vị là nhóm [46; 50) từ đó ta có
$$Q_2 = 46 + \frac{\frac{20}{2} - 3}{7}(50 - 46) = 50.$$
- Ta có nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm [46; 50) từ đó ta có
$$Q_1 = 46 + \frac{\frac{20}{4} - 3}{7}(50 - 46) = \frac{330}{7}.$$
- Ta có nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm [54; 58) từ đó ta có
$$Q_3 = 54 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - 14}{7}(58 - 54) = \frac{382}{7}.$$

Từ đó suy ra khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = \frac{52}{7}$.

- a) Nhóm chứa trung vị là nhóm [46; 50).
- b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm [46; 50).
- c) Khoảng biến thiên $R = 62 - 42 = 20$.
- d) Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = \frac{52}{7}$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 135. Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B . Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau

Đường kính (cm)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	18	14

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Đường kính trung bình của cây xoan đào trồng ở địa điểm A là 33,72 .
- b) Phương sai của mẫu số liệu cây xoan đào trồng ở địa điểm A là 7,31.
- c) Phương sai của mẫu số liệu cây xoan đào trồng ở địa điểm B là 7,31.
- d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm A đồng đều hơn ở địa điểm B ..

Lời giải.

- Ta có bảng sau

Đường kính (cm)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Đường kính đại diện	31	33	35	37	39
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	18	14

- Cỡ mẫu $n = 100$.

Đường kính trung bình của cây xoan đào trồng ở địa điểm A

$$\bar{x}_A = \frac{25 \cdot 31 + 38 \cdot 33 + 20 \cdot 35 + 10 \cdot 37 + 7 \cdot 39}{100} = 33,72.$$

Đường kính trung bình của cây xoan đào trồng ở địa điểm B

$$\bar{x}_B = \frac{22 \cdot 31 + 27 \cdot 33 + 19 \cdot 35 + 18 \cdot 37 + 14 \cdot 39}{100} = 34,5.$$

- Phương sai của mẫu số liệu cây xoan đào trồng ở địa điểm A

$$S_A^2 = \frac{1}{100} (25 \cdot 31^2 + 38 \cdot 33^2 + 20 \cdot 35^2 + 10 \cdot 37^2 + 7 \cdot 39^2) - 33,72^2 = 5,4016.$$

Suy ra độ lệch chuẩn của mẫu số liệu cây xoan đào trồng ở địa điểm A là $S_A = \sqrt{5,4016}$.

- Phương sai của mẫu số liệu cây xoan đào trồng ở địa điểm B

$$S_B^2 = \frac{1}{100} (22 \cdot 31^2 + 27 \cdot 33^2 + 19 \cdot 35^2 + 18 \cdot 37^2 + 14 \cdot 39^2) - 34,5^2 = 7,31.$$

Suy ra độ lệch chuẩn của mẫu số liệu cây xoan đào trồng ở địa điểm B là $S_B = \sqrt{7,31}$.

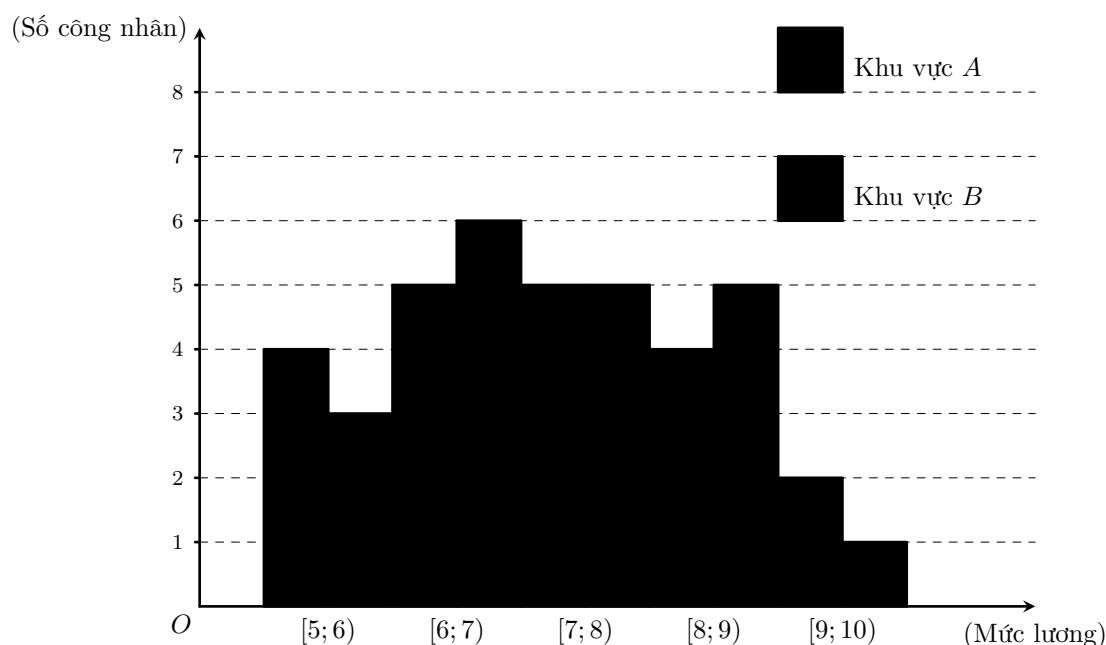
Ta có $S_B > S_A$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm A đồng đều hơn ở địa điểm B .

- a) Đường kính trung bình của cây xoan đào trồng ở địa điểm A là 33,72.
- b) Phương sai của mẫu số liệu cây xoan đào trồng ở địa điểm A là 5,4016.
- c) Phương sai của mẫu số liệu cây xoan đào trồng ở địa điểm B là 7,31.
- d) Ta có $S_B > S_A$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm A đồng đều hơn ở địa điểm B .

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 136. Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực A và B .

Mức lương khởi điểm của công nhân ở hai khu vực A và B



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Khoảng biến thiên mức lương là $R = 5$.
- b) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở khu vực A là 1,2875.
- c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở khu vực B là 1,5875.
- d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì mức lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A .

Lời giải.

- Ta có bảng sau

Mức lương	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Mức lương đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Khu vực A	4	5	5	4	2
Khu vực B	3	6	5	5	1

-
- Xét mẫu số liệu của khu vực A

Cỡ mẫu là $n_A = 4 + 5 + 5 + 4 + 2 = 20$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_A = \frac{4 \cdot 5,5 + 5 \cdot 6,5 + 5 \cdot 7,5 + 4 \cdot 8,5 + 2 \cdot 9,5}{20} = 7,25.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_A^2 = \frac{1}{20} (4 \cdot 5,5^2 + 5 \cdot 6,5^2 + 5 \cdot 7,5^2 + 4 \cdot 8,5^2 + 2 \cdot 9,5^2) - 7,25^2 = 1,5875.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_A = \sqrt{1,5875}$.

- Xét mẫu số liệu của khu vực B

Cỡ mẫu là $n_B = 3 + 6 + 5 + 5 + 1 = 20$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_B = \frac{3 \cdot 5,5 + 6 \cdot 6,5 + 5 \cdot 7,5 + 5 \cdot 8,5 + 1 \cdot 9,5}{20} = 7,25.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_B^2 = \frac{1}{20} (3 \cdot 5,5^2 + 6 \cdot 6,5^2 + 5 \cdot 7,5^2 + 5 \cdot 8,5^2 + 1 \cdot 9,5^2) - 7,25^2 = 1,2875.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_B = \sqrt{1,2875}$.

Do $S_A > S_B$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì mức lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A.

- a) Khoảng biến thiên mức lương là $R = 10 - 5 = 5$.
- b) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở khu vực A là 1,5875.
- c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở khu vực B là 1,2875.
- d) Do $S_A > S_B$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì mức lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Chương 4

Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

Câu 137. Xét các khẳng định sau

- a) Cho $\int_a^3 (2x + 3)dx = 14$. Tổng các giá trị của a là -3 .
- b) Tích phân $\int_0^2 (x + 4) dx$ bằng -10 .
- c) Cho $\int_1^2 \frac{2}{x^2 + 2x} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $2a + 3b$ bằng 1 .
- d) Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $S = a - 2b = 14$.

Lời giải.

- a) Ta có $\int_a^3 (2x + 3)dx = (x^2 + 3x)|_a^3 \Leftrightarrow 14 = 18 - (a^2 + 3a) \Leftrightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4. \end{cases}$
 Suy ra tổng các giá trị của a là $1 + (-4) = -3$.

- b) Ta có $\int_0^2 (x + 4) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_0^2 = 10$.

- c) Ta có $\int_1^2 \frac{2}{x^2 + 2x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln \left|\frac{x}{x+2}\right|\Big|_1^2 = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} = -\ln 2 + \ln 3$.
 $\Rightarrow a = -1$ và $b = 1 \Rightarrow 2a + 3b = 1$.

- d) Ta có $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = \int_3^5 \left(x + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x+1|\right)\Big|_3^5 = 8 + \ln \frac{3}{2}$.
 Vậy $a = 8$, $b = 3$ và $S = a - 2b = 2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai $\square$

Câu 138. Xét các khẳng định sau

- a) Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = a - \ln b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của $a + b$ bằng 4.
- b) Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng $\ln \frac{5}{3}$.
- c) Cho biết $\int_2^4 f(x) dx = 3$. Giá trị của $\int_2^4 [2f(x) + x - 1] dx$ là 16.
- d) Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và $\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}$.
 Giá trị của biểu thức $P = a + b + c$ là $-\frac{4}{3}$.

Lời giải.

a) Ta có $I = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = (x - \ln|1+x|) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2$.

Vậy $a = 1; b = 2$ nên $a + b = 3$.

b) Ta có $\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| \Big|_0^2 = \ln \frac{5}{3}$.

c) Ta có $\int_2^4 [2f(x) + x - 1] dx = 2 \int_2^4 f(x) dx + \int_2^4 (x - 1) dx = 2 \cdot 3 + 4 = 10$.

d) Ta có $\int f(x) dx = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d$.

Có $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d\right) \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \quad (1)$.

Có $\int_0^2 f(x) dx = -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d\right) \Big|_0^2 \Rightarrow \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \quad (2)$.

Có $\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d\right) \Big|_0^3 \Rightarrow 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \quad (3)$.

Từ (1), (2), (3) ta có hệ
$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $(a; b; c) = \left(1; 3; -\frac{16}{3}\right)$.

Vậy $P = a + b + c = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 139. Xét các khẳng định sau

a) Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x) dx$ bằng -2 .

b) Tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin^2 x} dx$ bằng 2 .

c) Cho $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\cos 2x + 2f(x)] dx = 5$, khi đó $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 2$.

d) Hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$.

Lời giải.

a) Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x) dx = \left(-\frac{\cos 2x}{2} - \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin^2 x} dx = (-2 \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

c) Ta có $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\cos 2x + 2f(x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + 2I = \frac{1}{2}(1+1) + 2I = 1 + 2I$.

Theo đề ta có $1 + 2I = 5 \Leftrightarrow I = 2$.

d) Ta có $\int f'(x) dx = f(x) \Rightarrow f(x) = \int (2\cos^2 x + 3) dx = \int (\cos 2x + 4) dx = \frac{\sin 2x}{2} + 4x + C$.
 Vì $f(0) = 4$ nên $C = 4$ khi đó $f(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 4x + 4$.

Nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin 2x}{2} + 4x + 4 \right) dx = \left(-\frac{\cos 2x}{4} + 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 140. Xét các khẳng định sau

a) Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng 1 .

b) Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x + f(x)] dx$ bằng 6 .

c) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ là 0 .

d) Với mọi $a > 0$ ta có $\int_{-a}^a \cos x \, dx = 2 \int_0^a \cos x \, dx$.

Lời giải.

a) Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$.

b) Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x + f(x)] \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx = 1 + 5 = 6$

c) Ta có $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) \, dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}$.

d) Ta có $\int_0^a \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^a = \sin a - \sin 0 = \sin a$.

Lại có $\int_{-a}^a \cos x \, dx = \sin x \Big|_{-a}^a = \sin a - \sin(-a) = 2 \sin a = 2 \int_0^a \cos x \, dx$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 141. Xét các khẳng định sau

a) Nếu $\int_0^1 (ae^x + b) \, dx = e + 2$ thì giá trị của biểu thức $a + b$ bằng 4.

b) Cho $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(1) = e^2$ và $\int_1^{\ln 3} f'(x) \, dx = 9 - e^2$. Giá trị $f(\ln 3) = 9$.

c) Cho hàm số $f(x)$ thỏa $\int_0^1 f(x) \, dx = 7$. Khi đó $\int_0^1 [3e^x - f(x)] \, dx = -3e - 10$.

d) Tích phân $I = \int_0^{\ln 2} (e^{4x} + 1) \, dx$ bằng $\frac{15}{2} + \ln 2$.

Lời giải.

a) Ta có $\int_0^1 (ae^x + b) \, dx = (ae^x + bx) \Big|_0^1 = ae + b - a \quad (1)$.

Theo giả thiết, ta có $\int_0^1 (ae^x + b) \, dx = e + 2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy $a + b = 4$.

b) Ta có $\int_1^{\ln 3} f'(x) \, dx = 9 - e^2 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^{\ln 3} = 9 - e^2 \Leftrightarrow f(\ln 3) - f(1) = 9 - e^2 \Leftrightarrow f(\ln 3) = 9$.

c) Ta có

$$I = \int_0^1 [3e^x - f(x)] dx = 3 \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 f(x) dx = 3(e - 1) - 7 = 3e - 10.$$

d) Ta có $I = \left(\frac{1}{4}e^{4x} + x \right) \Big|_0^{\ln 2} = \left(\frac{1}{4}e^{4\ln 2} + \ln 2 \right) - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} + \ln 2.$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 142. Xét các khẳng định sau

a) Nếu $\int_{-2}^0 (4 - e^{-\frac{x}{2}}) dx = a + 2b$ thì giá trị của $a + 2b$ là 8.

b) Hàm số $y = f(x)$ liên tục thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 5$. Khi đó giá trị của tích phân $K =$

$$\int_0^2 (e^{2+\ln f(x)} + 3) dx \text{ là } 5e^2 + 6.$$

c) Hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 2020$ và $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$. Giá trị của a là -2020 .

d) Tích phân $\int_1^2 e^{2x} dx$ bằng $2(e^4 - e^2)$.

Lời giải.

a) Ta có $\int_{-2}^0 (4 - e^{-\frac{x}{2}}) dx = 4x \Big|_{-2}^0 + 2e^{-\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 = 8 + 2(1 - e) = 10 - 2e$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 8.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} K &= \int_0^2 (e^{2+\ln f(x)} + 3) dx = \int_0^2 (e^2 \cdot e^{\ln f(x)} + 3) dx \\ &= \int_0^2 (e^2 f(x) + 3) dx = e^2 \int_0^2 f(x) dx + 3 \int_0^2 dx \\ &= 5e^2 + 6. \end{aligned}$$

c) $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \int_0^1 [e^x f(x)]' dx = (e^x f(x)) \Big|_0^1 = e^1 f(1) - e^0 f(0) = 2020e - 2020.$
Suy ra $a = 2020, b = -2020$.

d) Ta có $\int_1^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e^2)$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 143. Xét các khẳng định sau

a) Đặt $u = x^2 - 1$, tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1} dx = \int_0^3 \sqrt{u} du$.

b) Cho $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$. Tích phân $J = \int_0^2 f(2x) dx = 64$.

c) Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx$. Khi đó $0 < I < \frac{1}{3}$.

d) Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2018$, $f(2) = 2019$. Giá trị $S = f(3) - f(-1)$ bằng 4.

Lời giải.

a) Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 0 \\ x = 2 \Rightarrow u = 3 \end{cases} \Rightarrow I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1} dx = \int_0^3 \sqrt{u} du$.

b) Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2 dx$.

Ta có $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Suy ra

$$J = \int_0^2 f(2x) dx = \int_0^4 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = 16.$$

c) Ta có $I = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x d(\cos x) = - \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3} (\cos^3 \frac{\pi}{3} - \cos^3 0) = \frac{7}{24}$.

d) Ta có

$$f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1, & \text{với } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2, & \text{với } x < 1. \end{cases}$$

• Với $f(0) = 2018 \Rightarrow C_2 = 2018$.

• Với $f(2) = 2019 \Rightarrow C_1 = 2019$.

Vậy $S = f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2019 - (\ln 2 + 2018) = 1$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 144. Xét các khẳng định sau

a) Nếu đặt $u = x^3 + 1$ thì $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx$ bằng $\frac{1}{3} \int_1^2 u^{-2} du$.

b) Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1)x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng 1.

c) Đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ ta được $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx = 3 \int_0^1 t^3 dt$.

d) Biết rằng $\int_1^{e^6} \frac{f(\ln \sqrt{x})}{x} dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) \sin 2x dx = 2$. Giá trị của $\int_1^3 (f(x) + 2) dx$ bằng

5.

Lời giải.

a) Đặt $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{3} du = x^2 dx$. Khi đó

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{3} \int_1^2 u^{-2} du.$$

b) Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$. Suy ra

$$2 = \int_1^2 f(x^2 + 1)x dx = \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt \Rightarrow \int_2^5 f(t) dt = 4.$$

Vậy $I = \int_2^5 f(x) dx = \int_2^5 f(t) dt = 4$.

c) Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x = 1 - t^3 \Rightarrow dx = -3t^2 dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -3 \int_1^0 t^3 dt = 3 \int_0^1 t^3 dt.$$

d) Đặt $\ln \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = 2dt$, với $x = 1 \Rightarrow t = 0$, với $x = e^6 \Rightarrow t = 3$. Ta có

$$6 = \int_1^{e^6} \frac{f(\ln \sqrt{x})}{x} dx = 2 \int_0^3 f(t) dt \Rightarrow \int_0^3 f(t) dt = 3.$$

Đặt $\cos^2 x = u \Rightarrow \sin 2x dx = -du$, với $x = 0 \Rightarrow u = 1$, với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$. Ta có

$$2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) \sin 2x dx = - \int_1^0 f(u) du = \int_0^1 f(u) du.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\int_1^3 [f(x) + 2] \, dx &= \int_1^3 f(x) \, dx + 2 \int_1^3 1 \, dx \\ &= \int_0^3 f(x) \, dx - \int_0^1 f(x) \, dx + 2x \Big|_1^3 \\ &= 3 - 2 + 2(3 - 1) = 5.\end{aligned}$$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 145. Xét các khẳng định sau

- a) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức $S = S = \int_a^b |f(x)| dx$.
- b) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ bằng $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.
- c) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ và trục hoành là $S = \frac{27}{4}$.
- d) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = -2x^3 + x^2 + x + 5$ và $y = x^2 - x + 5$ bằng $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

a) Công thức tính diện tích S là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

b) Ta có $\frac{\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = \frac{\ln x}{x^2} > 0$ với $x \in (1; e)$ nên $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

c) Ta có $x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

$$\text{Diện tích } S = \int_0^3 |x^3 - 3x^2| dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx = \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{4}.$$

d) Phương trình hoành độ giao điểm $-2x^3 + x^2 + x + 5 = x^2 - x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 |(-2x^3 + x^2 + x + 5) - (x^2 - x + 5)| dx \\ &= \int_{-1}^1 |-2x^3 + 2x| dx \\ &= \int_{-1}^0 |-2x^3 + 2x| dx + \int_0^1 |-2x^3 + 2x| dx \\ &= \left| \int_{-1}^0 (-2x^3 + 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (-2x^3 + 2x) dx \right| \\ &= \left| \left(-\frac{x^4}{2} + x^2 \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(-\frac{x^4}{2} + x^2 \right) \Big|_0^1 \right| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai□

Câu 146. nào dưới đây?

a) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = -1; x = 1 \text{ được tính bởi công thức } S = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ là $\frac{e^6}{2} - \frac{1}{2}$.

c) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 + x$ và đồ thị của hàm số $y = 2x + 2$ bằng $\frac{9}{2}$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ là $2 \ln 2 - 1$ (đvdt).

Lời giải.

a) Diện tích S được tính bởi công thức $S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$.

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ là

$$S = \int_0^3 |e^{2x}| dx = \int_0^3 e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \Big|_0^3 = \frac{e^6}{2} - \frac{1}{2}.$$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$x^2 + x = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Diện tích cần tính là

$$S = \int_{-1}^2 |(x^2 + x) - (2x + 2)| dx = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx.$$

Bảng xét dấu của $x^2 - x - 2$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
x^2-x-2		+	0	-	0	+

$$\text{Vậy } S = - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

d) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy diện tích hình phẳng S là

$$S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \int_0^1 \left| 1 - \frac{2}{x+1} \right| dx = \left| x \right|_0^1 - 2 \ln(x+1) \Big|_0^1 = |1 - 2 \ln 2| = 2 \ln 2 - 1 \text{ (đvdt)}.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng $\square$

Câu 147.

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6 m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6 m nhận O làm tâm đối xứng, kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m². Đặt hệ trục Oxy với O là tâm hình tròn và mỗi đơn vị trên trục tọa độ dài 1m.

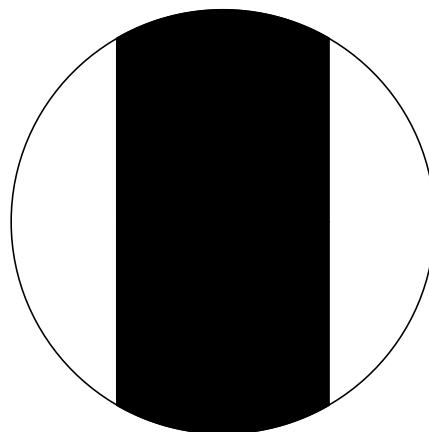
a) Phương trình đường tròn của mảnh vườn là $x^2 + y^2 = 36$.

b) Diện tích phần trồng cây $S = 2 \int_{-6}^6 \sqrt{36 - x^2} dx$.

c) Đặt $x = 6 \sin t$, $S = 12\pi + 18\sqrt{3}$.

d) Số tiền cần để trồng cây là 4821322 đồng.

Lời giải.



Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ.

Phương trình đường tròn

$$x^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

Diện tích phần trồng cây $S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} dx$.

Đặt $x = 6 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 6 \cos t dt$.

Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

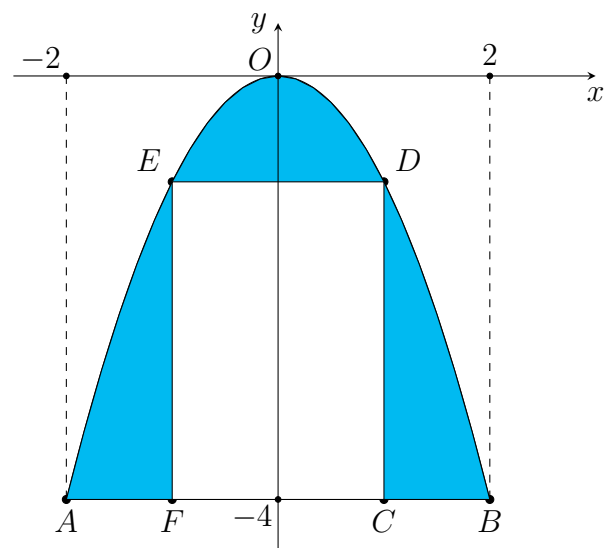
$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{36 - 36 \sin^2 t} \cdot 6 \cos t dt \\ &= 72 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt \\ &= 36 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 36 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 12\pi + 18\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Số tiền cần để trồng cây là $70000 \cdot S \approx 4821322$ đồng.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 148.

Một chiếc cổng có hình dạng là một parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4m, $AB = 4$ m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ (với $C, F \in AB$; $D, E \in (P)$), phần còn lại (*phần tô đậm*) dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là 1 000 000 đồng/m². Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình bên.



a) Phương trình của chiếc cổng parabol là $y = x^2$.

b) Diện tích cổng parabol là $\frac{32}{3}$.

c) Gọi $D \in (P)$ với $x_D = t$ và $0 < t < 2$. Diện tích của hình chữ nhật $CDEF$ là $S = -2t^3 + 8t$.

d) số tiền dùng để trang trí nhỏ nhất là 4 000 000 đồng.

Lời giải.

Khi đó phương trình của parabol (P) là $y = -x^2$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = -4$ bằng

$$S_1 = \int_{-2}^2 |-x^2 + 4| dx = \frac{32}{3}.$$

Gọi $D(t, -t^2) \in (P)$ với $0 < t < 2$. Diện tích của hình chữ nhật $CDEF$ là

$$S_2 = 2t \cdot (-t^2 + 4) = -2t^3 + 8t.$$

Diện tích phần trang trí

$$S = S_1 - S_2 = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}.$$

Để số tiền dùng để trang trí nhỏ nhất thì diện tích phần trang trí nhỏ nhất.

Xét hàm $f(t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}$ trên $(0; 2)$. Ta có

$$f'(t) = 6t^2 - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên (hình bên). Suy ra

$$\min_{(0;2)} f(t) = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{96 - 32\sqrt{3}}{9} \approx 4,5083.$$

Vậy số tiền dùng để trang trí nhỏ nhất gần bằng

$$4,508 \cdot 1\,000\,000 = 4\,508\,000 \text{ đồng}.$$

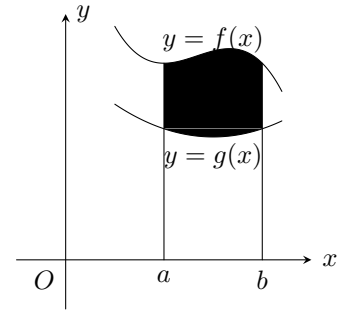
t	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{32}{3}$	f_{CT}	$\frac{32}{3}$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 149.

Xét các khẳng định sau.

- a) Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x}$, trục hoành, và các đường thẳng $x = 1, x = 4$ quanh Ox là 12.
- b) Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành, và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ quanh Ox là $\pi(\pi + 1)$.
- c) Hình phẳng trong hình bên (phần gạch sọc) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$.
- d) Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành, và các đường thẳng $x = 0, x = 1$ quanh Ox là $\sqrt{\pi}$.



Lời giải.

a) Thể tích cần tìm là $V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = -\frac{16\pi}{x} \Big|_1^4 = 12\pi$.

b) Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

c) Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, các đường thẳng $x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox là $V_1 = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x)$, trục hoành, các đường thẳng $x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox là $V_2 = \pi \int_a^b g^2(x) dx$.

Thể tích của vật thể tròn xoay cần tính là $V = V_1 - V_2 = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$.

d) Ta có $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 150. Xét các khẳng định sau.

- a) Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành là $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt).

- b) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{\pi}{4}$.
- c) Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành là $\frac{31\pi}{3}$.
- d) Hình phẳng $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathcal{D}$ quanh trục hoành là $\frac{6\pi}{5}$.

Lời giải.

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y = 3x - x^2$ và Ox là: $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

$$\text{Vậy } V = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \frac{81\pi}{10}.$$

b) Ta có $V_{(H)} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\pi \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$.

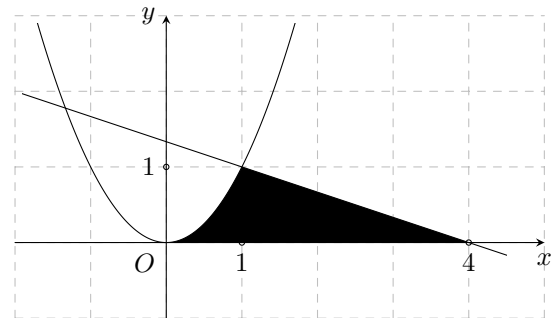
- c) Xét phương trình $\sqrt{4x - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4. \end{cases}$

$$\text{Do đó } V = \pi \int_0^4 (4x - x^2) dx = \pi \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32\pi}{3}.$$

d)

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right)^2 dx \\ &= \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 - \pi \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right)^3 \Big|_1^4 = \frac{6\pi}{5}. \end{aligned}$$



Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d sai □

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$ cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$. Thiết diện của vật thể đó cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x thỏa mãn $-1 \leq x \leq 1$ là một tam giác vuông cân với cạnh huyền bằng $\sqrt{1 - x^4}$.

- a) Thiết diện là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là $\frac{\sqrt{1 - x^4}}{\sqrt{2}}$.

- b) Diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{1 - x^4}{2}$.

- c) Công thức tính thể tích vật thể theo diện tích mặt cắt $S(x)$ là $V = \pi \int_a^b S(x) dx$.

- d) Thể tích của vật thể đã cho là $\frac{2}{5}$.

Lời giải.

Thiết diện là tam giác vuông cân có cạnh huyền $\sqrt{1-x^4}$ nên có cạnh góc vuông là $\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}}$.

Diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1-x^4}{4}$.

Khi đó, thể tích của vật thể là

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1-x^4}{4} dx = \frac{1}{4} \left(x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$ cho vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$

a) Diện tích thiết diện là $S(x) = x\sqrt{9-x^2}$.

b) Thể tích vật thể là $V = 9$.

c) Chia vật thể trên thành hai phần có thể tích $V_1 < V_2$ bởi mặt phẳng $x = 1$ thì $\frac{V_1}{V_2} \approx 0,19$.

d) Mặt phẳng $x = a$ chia thể tích trên thành hai phần bằng nhau. Giá trị của a gần bằng 1,82.

Lời giải.

Theo đề bài, diện tích $S(x) = 2x\sqrt{9-x^2}$.

Suy ra thể tích vật thể là

$$V = \int_0^3 S(x) dx = 2 \int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx$$

Đặt $t = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow t^2 = 9-x^2 \Rightarrow t dt = -x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 3$, $x = 3 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra

$$V = 2 \int_3^0 t^2 dt = \frac{2t^3}{3} \Big|_3^0 = 18.$$

Ta lại có $V_1 = 2 \int_0^1 x\sqrt{9-x^2} dx \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \approx 0,19$.

Mặt phẳng $x = a$ chia thể tích trên thành hai phần bằng nhau, mỗi phần có thể tích bằng $V' = 9$.

Do đó $V' = 2 \int_0^a x\sqrt{9-x^2} dx = 9 \Rightarrow a \approx 1,82$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng□

Chương 5

Một số yếu tố xác suất

Câu 153. Một lô hàng có 80 chính phẩm và 20 phế phẩm. Trong quá trình vận chuyển về kho thì bị mất 1 sản phẩm. Về đến kho, người ta chọn ngẫu nhiên một sản phẩm để kiểm tra chất lượng.

- Xác suất để sản phẩm bị mất là chính phẩm là 0,8.
- Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm nếu biết rằng sản phẩm bị mất là chính phẩm là 0,2.
- Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm nếu biết rằng sản phẩm bị mất là phế phẩm là 0,2.
- Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm là 0,2.

Lời giải.

Gọi

- A_1 là biến cố sản phẩm bị mất là chính phẩm.
- A_2 là biến cố sản phẩm bị mất là phế phẩm.
- B là biến cố sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm.

$$\text{a) } P(A_1) = \frac{C_{80}^1}{C_{100}^1} = 0,8.$$

$$\text{b) } P(B|A_1) = \frac{C_{20}^1}{C_{99}^1} = \frac{20}{99}.$$

$$\text{c) } P(B|A_2) = \frac{C_{19}^1}{C_{99}^1} = \frac{19}{99}.$$

$$\text{d) Ta có } P(A_2) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = 0,8 \cdot \frac{20}{99} + 0,2 \cdot \frac{19}{99} = 0,2.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 154. Người ta đánh giá tính hiệu quả của một quy trình sàng lọc bằng cách tính xác suất xảy ra âm tính giả hoặc dương tính giả. Xét các kí hiệu sau đây

- T^+ : Kết quả xét nghiệm dương tính (và cho thấy người đó mắc bệnh này).
- T^- : Kết quả xét nghiệm âm tính (và cho thấy người đó không mắc bệnh này).
- D^c : Người đó thực sự không có bệnh.
- D : Người thực sự mắc bệnh.

Người ta thấy rằng độ nhạy của phép kiểm tra có xác suất có điều kiện như sau

$$P(T^+|D) = 0,98 \quad \text{và} \quad P(T^-|D^c) = 0,99.$$

Biết rằng tỉ lệ nhiễm bệnh của cộng đồng là 2 trên 1 triệu người, hãy cho biết mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

- Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm dương tính biết rằng người đó thực sự không có bệnh là 0,02.
- Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm âm tính biết rằng người đó thực sự mắc bệnh là 0,02.
- Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm âm tính là 0,98999806.
- Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm dương tính là 0,02000192.

Lời giải.

Từ dữ kiện đề bài, ta có

$$P(D) = 0,000002 \quad \text{suy ra} \quad P(D^c) = 0,999998.$$

- $P(T^+|D^c) = 1 - P(T^-|D^c) = 1 - 0,99 = 0,01.$
- $P(T^-|D) = 1 - P(T^+|D) = 1 - 0,98 = 0,02.$
- $P(T^-) = P(D)P(T^-|D) + P(D^c)P(T^-|D^c) = 0,000002 \cdot 0,02 + 0,999998 \cdot 0,99 = 0,98999806.$
- $P(T^+) = P(D)P(T^+|D) + P(D^c)P(T^+|D^c) = 0,000002 \cdot 0,98 + 0,999998 \cdot 0,01 = 0,01000192.$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 155. Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5%. Bà N đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả âm tính. Biết rằng, nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,94 xét nghiệm dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,97 xét nghiệm là âm tính. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là 0,995.
- Xác suất để bà N có xét nghiệm là âm tính nếu bà N bị bệnh Y là 0,03.
- Xác suất để bà N có xét nghiệm âm tính là 0,9.
- Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là 99,97%.

Lời giải.

Gọi A là biến cố bà N bị bệnh hiểm nghèo y và B là biến cố xét nghiệm cho kết quả dương tính.

- a) Theo đề bài ta có $P(A) = 0,005$. Vì vậy trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,005 = 0,995.$$

- b) Theo đề bài ta có $P(B|A) = 0,94$. Vì vậy xác suất để bà N có xét nghiệm là âm tính nếu bà N bị bệnh Y là

$$P(\bar{B}|A) = 1 - 0,94 = 0,06.$$

- c) Theo đề bài ta có $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,97$. Xác suất để bà N có xét nghiệm âm tính là

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) + P(A) \cdot P(\bar{B}|A) = 0,995 \cdot 0,97 + 0,005 \cdot 0,06 = 0,96545.$$

- d) Theo công thức Bayes, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N nếu kết quả xét nghiệm âm tính là

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B})} = \frac{0,995 \cdot 0,97}{0,96545} = 0,9997.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 156. Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỷ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp trong những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá là 70% và 15%. Giả sử ta gặp một cư dân của xã, xét tính đúng sai của các khẳng định sau?

- Nếu ta gặp một cư dân của xã không gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó không hút thuốc lá là 80%.
- Nếu ta gặp một cư dân của xã không gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là 20%.
- Xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp là 26%.
- Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là 54%.

Lời giải.

Giả sử ta gặp một cư dân của xã, gọi A là biến cố “người đó có hút thuốc lá” và B là biến cố “Người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp”.

Theo đề bài ta có $P(A) = 0,2$; $P(\bar{A}) = 0,8$; $P(B|A) = 0,7$ và $P(B|\bar{A}) = 0,15$.

- Nếu ta gặp một cư dân của xã không gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó không hút thuốc lá là $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - 0,15 = 0,85$.
- Nếu ta gặp một cư dân của xã không gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là $P(\bar{B}|A) = 1 - 0,7 = 0,3$.
- Ta có $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0,14 + 0,12 = 0,26$.

d) Theo công thức Bayes ta có

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,14}{0,26} = 0,54.$$

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng□

Chương 5

Phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu trong không gian Oxyz

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 3 = 0$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $\vec{n}_1 = (1; -3; 2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- b) $\vec{n}_2 = (-4; 12; -8)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- c) $\vec{n}_3 = (-2; 6; -4)$ không phải là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- d) $\vec{n}_4 = (1; -2; 3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -3; 2)$, nên (P) có hai véc-tơ pháp tuyến khác là $\vec{n}_2 = (-4; 12; -8)$ và $\vec{n}_3 = (-2; 6; -4)$. Véc-tơ $\vec{n}_4 = (1; -2; 3)$ không phải là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 158. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(2; -3; 1)$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Mặt phẳng (P) có một cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-2; 2; -1)$ và $\vec{u}_2 = (3; -5; 0)$.
- b) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-5; -3; 4)$.
- c) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5; 3; 4)$.
- d) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (10; 6; -8)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(2; -3; 1)$ nên (P) nhận $\vec{AB} = (-2; 2; -1)$ và $\vec{BC} = (3; -5; 0)$ làm cặp véc-tơ chỉ phương.

Do đó, ta có thể chọn véc-tơ $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{BC}] = (-5; -3; 4)$ làm một véc-tơ pháp tuyến của (P) . Vậy véc-tơ $(10; 6; -8)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 159. Trong không gian $Oxyz$, các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -3; 2)$ là $x - 3y + 2z = 0$.
- b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; 3)$, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; -2)$ là $x - 2z - 5 = 0$.
- c) Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.
- d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 2; -1)$ và nhận véc-tơ $\vec{j}$ làm véc-tơ pháp tuyến là $z + 1 = 0$.

Lời giải.

- a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -3; 2)$ là

$$(x - 0) - 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 2z = 0.$$

- b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; 3)$, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; -2)$ là

$$(x - 1) - 2(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2z + 5 = 0.$$

- c) Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.

- d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 2; -1)$ và nhận véc-tơ $\vec{j}$ làm véc-tơ pháp tuyến là $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 160. Trong không gian $Oxyz$, các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và đi qua $A(1; 2; 1)$ là $-x + 2y = 0$.
- b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; -4)$ là $4x + 2y - z - 4 = 0$.
- c) Cho $A(2; -4; -6)$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng OA là $x - 2y - 3z - 14 = 0$.
- d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2; -1; 2)$, $B(1; 3; 2)$ và $C(-1; 2; 1)$ là $-4x - y + 9z + 2 = 0$.

Lời giải.

- a) Mặt phẳng (P) chứa Ox và đi qua $A(1; 2; 1)$ nên nhận $\vec{n} = [\vec{i}, \overrightarrow{OA}] = (0; -1; 2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-x + 2y = 0$.

- b) Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y - z - 4 = 0$.

- c) Gọi M là trung điểm AB , ta có $M(1; -2; -3)$ và $\overrightarrow{AB} = (2; -4; -6)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là $2(x - 1) - 4(y + 2) - 6(z + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3z - 14 = 0$.

- d) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 4; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-2; -1; -1)$. Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C nên nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; -1; 9)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $-4(x - 1) - (y - 3) + 9(z - 2) = 0 \Leftrightarrow -4x - y + 9z - 11 = 0$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, các khẳng định sau đây là đúng hay sai?

- a) Hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z + 1 = 0$ và $(Q): 4x - 6y + 2z + 3 = 0$ song song với nhau.
- b) Hai mặt phẳng $(P): z - 3 = 0$ và $(Q): 3x + 2y - 1 = 0$ vuông góc với nhau.
- c) Hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$ và $(Q): 4x + 2y - 4z + 5 = 0$ song song với nhau.
- d) Hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 3 = 0$ và $(Q): -3x + 6y - 3z - 9 = 0$ trùng nhau.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.
- b) Ta có $\vec{n}_{(P)} = (0; 0; 1)$, $\vec{n}_{(Q)} = (3; 2; 0)$.
Có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$ nên $\vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(Q)} \Leftrightarrow (P) \perp (Q)$.
- c) Ta có $\frac{2}{4} \neq -\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-4}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) không song song với nhau.
- d) Ta có $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{1}{-3} = \frac{3}{-9}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 162. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): -4x + by + cz + 5 = 0$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow b = 2, c = -6$.
- b) Tồn tại giá trị của b và c để $(P) \equiv (Q)$.
- c) Với $b = 1$ và $c = 2$ thì (P) cắt (Q) .
- d) Với $b = 1$ và $c = 3$ thì $(P) \perp (Q)$.

Lời giải.

- a) Ta có $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{b} = \frac{3}{c} \neq \frac{1}{5} \Leftrightarrow b = 2, c = -6$.
- b) Ta có $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{5}$. Phương trình này vô nghiệm vì $\frac{2}{-4} \neq \frac{1}{5}$ nên không tồn tại giá trị của b và c để hai mặt phẳng trùng nhau.
- c) Với $b = 1$ và $c = 2$ ta có $\frac{2}{-4} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{2}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.
- d) Với $b = 1$ và $c = 3$, ta có $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 3)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (-4; 1; 3)$. Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = -8 - 1 + 9 = 0$.
Do đó $(P) \perp (Q)$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có các véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Gọi α là góc giữa (P_1) và (P_2) . Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) $\alpha = (\vec{n}_1; \vec{n}_2)$.
- b) $\alpha + (\vec{n}_1; \vec{n}_2) = 180^\circ$.
- c) $\cos \alpha = \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)$.
- d) $\cos \alpha = |\cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)|$.

Lời giải.

Theo định nghĩa, góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Như vậy nếu gọi α là góc giữa (P_1) và (P_2) thì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Trong khi đó: $0^\circ \leq (\vec{n}_1; \vec{n}_2) \leq 180^\circ$.

$$\text{Như vậy } \begin{cases} \alpha = (\vec{n}_1; \vec{n}_2) & \text{nếu } (\vec{n}_1; \vec{n}_2) \leq 90^\circ \\ \alpha = 180^\circ - (\vec{n}_1; \vec{n}_2) & \text{nếu } (\vec{n}_1; \vec{n}_2) > 90^\circ. \end{cases}$$

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 164. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có các véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Gọi α là góc giữa (P_1) và (P_2) . Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

b) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

c) $\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

d) $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa, góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Như vậy nếu gọi α là góc giữa (P_1) và (P_2) thì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Trong khi đó: $0^\circ \leq (\vec{n}_1; \vec{n}_2) \leq 180^\circ$.

$$\text{Như vậy } \begin{cases} \alpha = (\vec{n}_1; \vec{n}_2) & \text{nếu } (\vec{n}_1; \vec{n}_2) \leq 90^\circ \\ \alpha = 180^\circ - (\vec{n}_1; \vec{n}_2) & \text{nếu } (\vec{n}_1; \vec{n}_2) > 90^\circ. \end{cases}$$

Vì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ nên $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 165. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi a là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 12 = 0$. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau

a) $a = OM$ với M là hình chiếu vuông góc của O trên (α) .

b) $a = \frac{4}{3}$.

c) $a = 4$.

d) $a = OM$ với M là điểm bất kỳ trên (α) .

Lời giải.

• Ta có $d(O, (P)) = \frac{|0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 4$.

• $a = d(O, (\alpha)) = OM$ với M là hình chiếu vuông góc của O trên (α) .

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x - y + z = 0$ và $2x - y + z - 7 = 0$. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a)** $d((P), (Q)) = d(A, (Q))$ với $A \in (P)$. **b)** $d((P), (Q)) = 7\sqrt{6}$.
c) $d((P), (Q)) = 6\sqrt{7}$. **d)** $d((P), (Q)) = \frac{7}{\sqrt{6}}$.

Lời giải.

Chọn $A(0; 0; 0) \in (P)$. Vì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (Q) .

$$\text{Có: } d(A; (Q)) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng $\square$

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 3 = 0$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $\vec{n}_1 = (1; -3; 2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- b) $\vec{n}_2 = (-4; 12; -8)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- c) $\vec{n}_3 = (-2; 6; -4)$ không phải là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- d) $\vec{n}_4 = (1; -2; 3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -3; 2)$, nên (P) có hai véc-tơ pháp tuyến khác là $\vec{n}_2 = (-4; 12; -8)$ và $\vec{n}_3 = (-2; 6; -4)$. Véc-tơ $\vec{n}_4 = (1; -2; 3)$ không phải là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(2; -3; 1)$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Mặt phẳng (P) có một cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-2; 2; -1)$ và $\vec{u}_2 = (3; -5; 0)$.
- b) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-5; -3; 4)$.
- c) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5; 3; 4)$.
- d) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (10; 6; -8)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(2; -3; 1)$ nên (P) nhận $\vec{AB} = (-2; 2; -1)$ và $\vec{BC} = (3; -5; 0)$ làm cặp véc-tơ chỉ phương.

Do đó, ta có thể chọn véc-tơ $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{BC}] = (-5; -3; 4)$ làm một véc-tơ pháp tuyến của (P) . Vậy véc-tơ $(10; 6; -8)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$, các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -3; 2)$ là $x - 3y + 2z = 0$.
- b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; 3)$, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; -2)$ là $x - 2z - 5 = 0$.
- c) Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.
- d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 2; -1)$ và nhận véc-tơ $\vec{j}$ làm véc-tơ pháp tuyến là $z + 1 = 0$.

Lời giải.

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -3; 2)$ là

$$(x - 0) - 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 2z = 0.$$

b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; 3)$, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; -2)$ là

$$(x - 1) - 2(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2z + 5 = 0.$$

- c) Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.
- d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 2; -1)$ và nhận véc-tơ $\vec{j}$ làm véc-tơ pháp tuyến là $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và đi qua $A(1; 2; 1)$ là $-x + 2y = 0$.
- b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; -4)$ là $4x + 2y - z - 4 = 0$.
- c) Cho $A(2; -4; -6)$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng OA là $x - 2y - 3z - 14 = 0$.
- d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2; -1; 2)$, $B(1; 3; 2)$ và $C(-1; 2; 1)$ là $-4x - y + 9z + 2 = 0$.

Lời giải.

- a) Mặt phẳng (P) chứa Ox và đi qua $A(1; 2; 1)$ nên nhận $\vec{n} = [\vec{i}, \vec{OA}] = (0; -1; 2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-x + 2y = 0$.

- b) Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y - z - 4 = 0$.

- c) Gọi M là trung điểm AB , ta có $M(1; -2; -3)$ và $\vec{AB} = (2; -4; -6)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là $2(x - 1) - 4(y + 2) - 6(z + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3z - 14 = 0$.

- d) Ta có $\vec{AB} = (-1; 4; 0)$, $\vec{BC} = (-2; -1; -1)$. Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C nên nhận $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-4; -1; 9)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $-4(x - 1) - (y - 3) + 9(z - 2) = 0 \Leftrightarrow -4x - y + 9z - 11 = 0$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 171. Trong không gian $Oxzy$, các khẳng định sau đây là đúng hay sai?

- a) Hai mặt phẳng (P): $2x - 3y + z + 1 = 0$ và (Q): $4x - 6y + 2z + 3 = 0$ song song với nhau.
- b) Hai mặt phẳng (P): $z - 3 = 0$ và (Q): $3x + 2y - 1 = 0$ vuông góc với nhau.
- c) Hai mặt phẳng (P): $2x - y + 2z + 1 = 0$ và (Q): $4x + 2y - 4z + 5 = 0$ song song với nhau.
- d) Hai mặt phẳng (P): $x - 2y + z + 3 = 0$ và (Q): $-3x + 6y - 3z - 9 = 0$ trùng nhau.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

- b) Ta có $\vec{n}_{(P)} = (0; 0; 1)$, $\vec{n}_{(Q)} = (3; 2; 0)$.

Có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$ nên $\vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(Q)} \Leftrightarrow (P) \perp (Q)$.

- c) Ta có $\frac{2}{4} \neq -\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-4}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) không song song với nhau.

- d) Ta có $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{1}{-3} = \frac{3}{-9}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 172. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): -4x + by + cz + 5 = 0$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow b = 2, c = -6$. b) Tồn tại giá trị của b và c để $(P) \equiv (Q)$.
c) Với $b = 1$ và $c = 2$ thì (P) cắt (Q) . d) Với $b = 1$ và $c = 3$ thì $(P) \perp (Q)$.

Lời giải.

- a) Ta có $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{b} = \frac{3}{c} \neq \frac{1}{5} \Leftrightarrow b = 2, c = -6$.
b) Ta có $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{5}$. Phương trình này vô nghiệm vì $\frac{2}{-4} \neq \frac{1}{5}$ nên không tồn tại giá trị của b và c để hai mặt phẳng trùng nhau.
c) Với $b = 1$ và $c = 2$ ta có $\frac{2}{-4} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{2}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.
d) Với $b = 1$ và $c = 3$, ta có $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 3)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (-4; 1; 3)$. Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = -8 - 1 + 9 = 0$. Do đó $(P) \perp (Q)$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 173. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d ?

- a) $\vec{u}_3 = (4; 6; -2)$. b) $\vec{u}_2 = (1; 2; -1)$. c) $\vec{u}_1 = (2; 3; -1)$. d) $\vec{u}_4 = (-1; -2; 1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2; 3; -1)$. Do vậy $\vec{u}_3 = (4; 6; -2) = 2 \cdot \vec{u}_1$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của d .

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 174. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d ?

- a) $\vec{u}_1 = (-2; 4; -5)$. b) $\vec{u}_2 = (2; 4; 5)$. c) $\vec{u}_3 = (1; 3; 6)$. d) $\vec{u}_4 = (2; -4; -5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_4 = (2; -4; -5)$.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$, biết đường thẳng d đi qua hai điểm $A(2; 3; -1); B(1; 2; 4)$. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$. b) $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$. c) $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$. d) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B nên có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA} = (1; 1; -5)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } (d): \begin{cases} \text{đi qua } B(1; 2; 4) \\ \text{VTCP } \overrightarrow{BA} = (1; 1; -5) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 - 5t. \end{cases} \\ \text{b) } (d): \begin{cases} \text{đi qua } A(2; 3; -1) \\ \text{VTCP } \overrightarrow{BA} = (1; 1; -5) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t. \end{cases} \end{aligned}$$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$, biết đường thẳng d đi qua $M(1; 2; -3)$ và nhận $\vec{u} = (2; -1; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}. & \quad \text{b) } d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}. \\ \text{c) } d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}. & \quad \text{d) } d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}. \end{aligned}$$

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và nhận $\vec{u} = (2; -1; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}.$$

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-2}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} \text{a) Đường thẳng } d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1} &\text{ vuông góc với } d. \\ \text{b) Đường thẳng } d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4} &\text{ cắt } d \text{ tại một điểm.} \\ \text{c) Đường thẳng } d_3: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1} &\text{ song song với } d. \\ \text{d) Đường thẳng } d_4: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1} &\text{ chéo với } d. \end{aligned}$$

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; -2)$.

- a) Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -1; 1)$. Vì $\vec{u} \cdot \vec{u}_1 = 0$ nên $d_1 \perp d$.
- b) Đường thẳng d_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-2; 2; 4)$. Vì $\vec{u}_2$ cùng phương với $\vec{u}$ nên d_2 hoặc song song với d , hoặc trùng với d .
- c) Đường thẳng d_3 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_3 = (-1; -1; 1)$. Vì $\vec{u}_3$ không cùng phương với $\vec{u}$ nên d_3 không thể song song với d .

d) Đường thẳng d_4 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_4 = (1; -1; -1)$.

Vì $\vec{u}_4$ không cùng phương với $\vec{u}$ nên d_4 hoặc cắt d , hoặc chéo với d .

Để kiểm tra d_4 chéo d hay cắt d , ta có thể làm như sau:

Lấy $M(4; 0; -3) \in d$ và $N(-1; 1; 0) \in d_4$. Ta đi kiểm tra các véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{u}_4$, $\overrightarrow{MN}$ có đồng phẳng hay không. Nếu chúng đồng phẳng thì d cắt d_4 , nếu chúng không đồng phẳng thì d chéo với d_4 .

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-5; 1; 3)$ và $\overrightarrow{MN} \cdot [\vec{u}; \vec{u}_4] = 4$. Nghĩa là $\vec{u}$, $\vec{u}_4$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng, suy ra d_4 chéo d .

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 178. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) d_1, d_2 cắt nhau. b) d_1, d_2 chéo nhau. c) $d_1 \equiv d_2$. d) $d_1 \parallel d_2$.

Lời giải.

Ta có d_1, d_2 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (1; -1; -1)$, $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$.

Vì $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương nên d_1 hoặc cắt d_2 , hoặc chéo d_2 .

Và $A(1; 0; 1) \in d_1$, $B(0; -1; 1) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 0)$.

Khi đó $\begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; -1; 3) \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \neq 0 \end{cases}$. Vậy d_1 chéo d_2 .

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 179. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - z - 5 = 0$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$ vuông góc với (P) .
b) Đường thẳng $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3}$ cắt (P) tại một điểm.
c) Trục Ox không song song với (P) .
d) Đường thẳng $d_3: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$ nằm trên (P) .

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; -1)$.

- a) Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -2; -1)$. Vì $\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{n}$ nên d_1 vuông góc với (P) .
b) Đường thẳng d_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; 2; -3)$. Vì $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$ nên d_2 song song với (P) hoặc d_2 nằm trên (P) .
c) Trục Ox có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$. Vì $\vec{i} \cdot \vec{n} = 1$ nên $\vec{i}$ không vuông góc với $\vec{n}$, suy ra Ox không song song với (P) .

d) Đường thẳng d_3 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_3 = (1; 2; 1)$. Vì $\vec{u}_3 \cdot \vec{n} = -4$ nên d_3 không nằm trên (P) .

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 180. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3 = 0$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 \end{cases}$ nằm trên (P) .
- b) Đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ cắt (P) tại một điểm.
- c) Trục Oz song song với (P) .
- d) Trục Oy cắt (P) .

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; 0)$.

- a) Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2; -1; 0)$. Vì $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0$ nên d_1 hoặc song song với (P) , hoặc nằm trên (P) . Lấy điểm $M(0; 1; 5) \in d_1$, ta thấy $M \notin (P)$, do đó d_1 song song với (P) .
- b) Đường thẳng d_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; 1; -1)$. Vì $\vec{u}_2$ không cùng phương với $\vec{n}$ và $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 3$ nên d_2 cắt (P) tại một điểm.
- c) Trục Oz có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Vì $\vec{k} \cdot \vec{n} = 0$ nên $\vec{k} \perp \vec{n}$, hơn nữa điểm $O(0; 0; 0) \notin (P)$. Do đó Oz song song với (P) .
- d) Trục Oy có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Vì $\vec{j}$ không cùng phương với $\vec{n}$ và $\vec{j} \cdot \vec{n} = 2$ nên Oy cắt (P) tại một điểm.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 181. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $B(2; -1; 8)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi H là hình chiếu của B lên d . Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) BH vuông góc với d .
- b) Điểm H có tọa độ là $H(-2; 1; 3)$.
- c) Điểm H có tọa độ là $H(5; -3; 4)$.
- d) Điểm $B'(8; -7; 0)$ là điểm đối xứng với B qua d .

Lời giải.

Phương trình tham số của d là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) + t + 2(2t - 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai ☐

Câu 182. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{và điểm } M(1; 1; 1). \text{ Gọi } H \text{ là}$$

d) Tọa độ điểm $M'(-1; -1; 3)$.

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -(-t-1) + 2(2t-1) + (t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng ☐

$$\text{d) } \sin \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

- $d \perp d' \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai□

Câu 184. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

- a) Góc giữa (P) và (d) là một góc nhọn. b) $(d) \perp (P)$.
 c) $(d) \parallel (P)$. d) $(d; (P)) = 30^\circ$.

Lời giải.

- Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1; -1; 2)$ nên suy ra $(-1; 1; -2)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến.

- $\vec{n}_{(P)} = (1; -1; 2)$ và $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$.

$$\text{Vậy } \sin(d; (P)) = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{u}_d|} = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (d; (P)) = 30^\circ.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 185. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
- b) Tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = a^2 + b^2 + c^2 - d$.
- c) Tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$.
- d) Tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Lời giải.

- $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
- Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 186. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R . Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt cầu là $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
- b) Phương trình mặt cầu là $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R$.
- c) Phương trình mặt cầu là $(S): (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = R^2$.
- d) Phương trình mặt cầu là $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R có thể viết dưới hai dạng

- $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
- $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 187. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 16$. Mỗi kết quả sau đây đúng hay sai?

- a) (S) có tâm $I(-2; -3; 4)$.
- b) (S) có tâm $I(2; 3; -4)$.
- c) (S) có $R = 4$.
- d) (S) có $R = 16$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 16$ có tọa độ là $(2; 3; -4)$ và bán kính $R = 4$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai□

Câu 188. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 10z + 2 = 0$. Mỗi kết quả sau đây đúng hay sai?

- a) (S) có tâm $I(2; 1; 5)$.
- b) (S) có tâm $I(-2; -1; -5)$.
- c) (S) có $R = \sqrt{28}$.
- d) (S) có $R = \sqrt{32}$.

Lời giải.

Ta có $a = 2, b = 1, c = 5, d = 2$, suy ra $a^2 + b^2 + c^2 - d = 28 > 0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm $I(2; 1; 5)$ và bán kính $R = \sqrt{28}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai□

Câu 189. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(-5; -2; 3)$ bán kính $R = 4$.

Xác định tính đúng, sai của mỗi mệnh đề sau

a) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y - 6z + 22 = 0.$ **b)** $(S): (x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 16.$

c) $(S): (x + 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4.$ **d)** $(S): (x + 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16.$

Lời giải.

Mặt cầu (S) tâm $I(-5; -2; 3)$ bán kính $R = 4$ có phương trình là $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$ hoặc $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y - 6z + 22 = 0$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 190. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; -5)$ và đi qua điểm $M(3; 1; 2)$. Mỗi kết quả sau đây đúng hay sai?

a) $(S): (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = 74.$ **b)** $(S): (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = \sqrt{74}.$

c) $R = 74.$ **d)** $R = \sqrt{74}.$

Lời giải.

Ta có $IM = \sqrt{(3 + 1)^2 + (1 - 4)^2 + (2 + 5)^2} = \sqrt{74}.$

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; -5)$, bán kính $R = IM = \sqrt{74}$ là

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = 74.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□