

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 23 tháng 12 năm 2021

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I (4 điểm)

Chứng minh rằng với mọi $m \neq 2$ hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \right|$ có đúng 4 điểm cực trị.

Câu II (5 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x} = \sqrt{2x+2} + \sqrt{2x-1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 + 4\sqrt{x-1} = y^2 - 3y + 4\sqrt{y} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.

Câu III (2 điểm)

Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có 8 chữ số. Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 9 và chứa nhiều nhất một chữ số 9.

Câu IV (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3; u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}; n = 1, 2, 3, \dots$

1) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.

2) Tính tổng $S = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{100} - 1}$.

Câu V (4 điểm)

Trong mặt phẳng (P) , cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và tia Oz thỏa mãn $\widehat{xOz} = 30^\circ; \widehat{zOy} = 60^\circ$. Trên tia Oz lấy điểm I sao cho $OI = 2a$. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với (P) , lấy điểm S sao cho $OS = a$. Mặt phẳng (Q) thay đổi đi qua SI và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B (A khác O và B khác O).

1) Tính góc giữa (P) và (Q) khi I là trung điểm AB .

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.OAB$.

Câu VI (2 điểm)

Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{abc}$.

----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của cán bộ coi thi số 1:

Chữ ký của cán bộ coi thi số 2:

Câu 1. [HSG-HÀ NỘI 2021-2022] Chứng minh rằng với mọi $m \neq 2$ hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \right|$ có đúng 4 cực trị.

Lời giải

Cách 1. Đặt $g(x) = \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow y = |g(x)| \Rightarrow y' = \frac{g(x) \cdot g'(x)}{|g(x)|}$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ là số nghiệm của phương trình: $g(x) \cdot g'(x) = 0$.

Xét $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$.

Ta thấy $ac = -1 < 0, \forall m \Rightarrow g(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm bội lẻ (1).

Xét $g'(x) = 0$.

$$\Leftrightarrow (2x + m)(x^2 + 2x + 3) - (2x + 2)(x^2 + mx - 1) = 0 \Leftrightarrow (2 - m)x^2 + 8x + 3m + 2 = 0$$

Do $\begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta' = 16 - (2 - m)(3m + 2) = 3m^2 - 4m + 12 = 3\left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{32}{3} > 0 \end{cases}$

nên $g'(x) = 0$ cũng có 2 nghiệm bội lẻ (2).

Từ (1) và (2) ta có hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \right|$ có đúng 4 điểm cực trị (ĐPCM)

Cách 2. Đặt $g(x) = \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow y = |g(x)| \Rightarrow y' = \frac{g(x) \cdot g'(x)}{|g(x)|}$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ là số nghiệm của phương trình: $g(x) \cdot g'(x) = 0$

Xét $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$.

Ta thấy $ac = -1 < 0, \forall m \Rightarrow g(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm bội lẻ (1).

Nhận xét: $g'(x)$ cũng bậc 2, nếu $g'(x)$ không đổi dấu thì $g(x) = 0$ chỉ có tối đa 1 nghiệm. (loại)

Do đó: $g'(x)$ phải đổi dấu, tức là $g'(x)$ phải có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số luôn có đúng 4 cực trị.

Câu 2. [HSG-HÀ NỘI 2021-2022] a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x} = \sqrt{2x+2} + \sqrt{2x-1}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x \geq 0 \\ 2x+2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

♦ Ta có $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x} = \sqrt{2x+2} + \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{3x})^2 = (\sqrt{2x+2} + \sqrt{2x-1})^2$
 $\Leftrightarrow 4x+1+2\sqrt{3x(x+1)} = 4x+1+2\sqrt{(2x+2)(2x-1)} \Leftrightarrow \sqrt{3x(x+1)} = \sqrt{(2x+2)(2x-1)}$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 4x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 2. [HSG-HÀ NỘI 2021-2022] b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 + 4\sqrt{x-1} = y^2 - 3y + 4\sqrt{y} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$.

♦ Ta có $x^2 - 5x + 4 + 4\sqrt{x-1} = y^2 - 3y + 4\sqrt{y} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 3 - 3x + 4\sqrt{x-1} = y^2 - 3y + 4\sqrt{y}$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3(x-1) + 4\sqrt{x-1} = y^2 - 3y + 4\sqrt{y} \text{ (*)}.$

♦ Xét hàm số $f(t) = t^4 - 3t^2 + 4t$ với $t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = 4t^3 - 6t + 4$; $f''(t) = 12t^2 - 6$.

Khi đó $f''(t) = 0 \Leftrightarrow 12t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{2} > 0$.

Suy ra $f'(t) = 4t^3 - 6t + 4 > 0, \forall t \geq 0$.

Vậy hàm số $f(t) = t^4 - 3t^2 + 4t$ đồng biến với mọi $t \geq 0$.

♦ Ta có (*) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x-1}) = f(\sqrt{y}) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x-1$.

Thay $y = x-1$ vào phương trình $x^2 + y^2 = 25$ ta được

$$x^2 + (x-1)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 3 \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Kết luận: Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 3)$.

Câu 3. [HSG-HÀ NỘI 2021-2022] Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có 8 chữ số. Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 9 và chứa nhiều nhất một chữ số 9.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 9 \cdot 10^7$.

Gọi biến cố: A : "chọn được số chia hết cho 9 và chứa nhiều nhất một chữ số 9".

Gọi số cần lập có dạng: $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} (a_i \neq 0)$.

TH1: $a_i \neq 9, i = \overline{1, 8}$.

Chọn a_1 có 8 cách chọn.

Chọn $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$ có 9^6 cách.

Chọn a_8 , có 1 cách chọn.

Vậy có: $8 \cdot 9^6$ số.

TH2: $a_1 = 9$ và các chữ số còn lại khác 9.

Chọn a_1 có 1 cách.

Chọn $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$ có 9^6 cách.

Chọn a_8 , có 1 cách chọn.

Vậy có: 9^6 số.

TH3: Chữ số 9 không ở vị trí a_1 .

Chọn a_1 , có 8 cách.

Chọn vị trí cho chữ số 9, có 7 cách chọn. Giả sử $a_2 = 9$.

Chọn $\overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$, có 9^5 cách.

Chọn a_8 , có 1 cách chọn.

Vậy có: $8 \cdot 7 \cdot 9^5$ số.

$$n(A) = 8 \cdot 9^6 + 9^6 + 56 \cdot 9^5.$$

$$* \text{ Xác suất của biến cố } A \text{ là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{898857}{10^7}.$$

Câu 4. [HSG-HÀ NỘI 2021-2022] Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$; $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$; $n = 1, 2, 3, \dots$

1) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.

2) Tính tổng $S = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{100} - 1}$

Lời giải

1) Ta có $u_1 = 3 > 0$.

Giả sử $u_n > 1$, ta có $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 3} > 0$.

Theo nguyên lý quy nạp thì $u_n > 1$ với mọi số nguyên dương n .

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 3} < 0$.

Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy giảm.

2) Ta có $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 3}$ và $u_{n+1} + 1 = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1 = \frac{4(u_n + 1)}{u_n + 3}$

Suy ra $\frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 1} = 2 \frac{u_n + 1}{u_n - 1} = \dots = 2^n \frac{u_1 + 1}{u_1 - 1} = 2^{n+1}$

Vì vậy: $\frac{1}{u_{n+1} - 1} = 2^n - \frac{1}{2}$

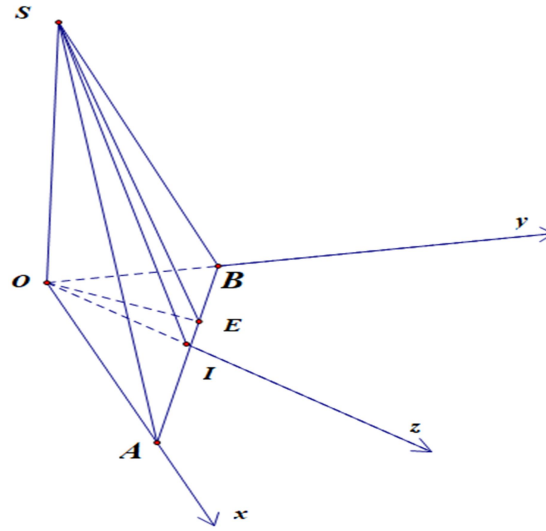
Ta có:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{100} - 1} \\
&= \left(2^0 - \frac{1}{2}\right) + \left(2^1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(2^{99} - \frac{1}{2}\right) \\
&= 2^{100} - 1 - 50 = 2^{100} - 51.
\end{aligned}$$

Câu 5. [HSG-HÀ NỘI 2021-2022] Trong mặt phẳng (P) cho góc $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và tia Oz thỏa mãn $\widehat{xOz} = 30^\circ$; $\widehat{zOy} = 60^\circ$. Trên tia Oz lấy điểm I sao cho $OI = 2a$. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với (P) lấy điểm S sao cho $OS = a$. Mặt phẳng (Q) thay đổi đi qua SI và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B (A khác O và B khác O).

- 1) Tính góc giữa (P) và (Q) khi I là trung điểm của AB .
- 2) Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.OAB$.

Lời giải



Đặt $OA = x, OB = y$ ($x, y > 0$).

- 1) Khi I là trung điểm của AB suy ra $AB = 2AI = 2BI = 2OI = 4a$ nên $\widehat{OAI} = 30^\circ$, $\widehat{OBI} = 60^\circ$. Khi đó $x = 2a\sqrt{3}, y = 2a$ nên nếu gọi E là chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB ta có góc giữa $(P), (Q)$ bằng góc $\widehat{SEO}$.

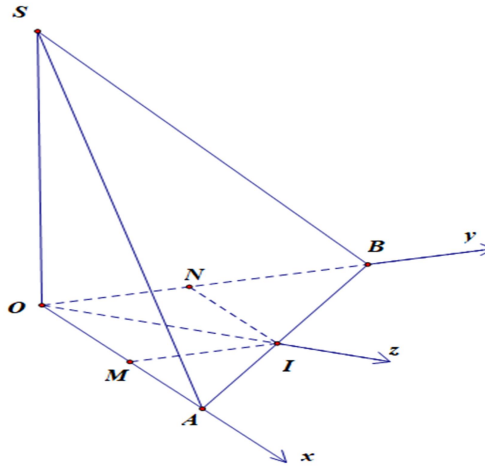
Lại có $OE = \frac{OA \cdot OB}{AB} = a\sqrt{3}$ suy ra $\tan \widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SEO} = 30^\circ$.

- 2) M, N lần lượt là hình chiếu của I lên Ox, Oy suy ra $OM = a\sqrt{3}, ON = a$ và do đó

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{a\sqrt{3}}{x} \overrightarrow{OA} + \frac{a}{y} \overrightarrow{OB}. \text{ Vì } A, I, B \text{ thẳng hàng nên ta có}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{x} + \frac{a}{y} = 1 \geq 2a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{xy}} \Leftrightarrow xy \geq 4\sqrt{3}a^2 \text{ và dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x = 2a\sqrt{3} \\ y = 2a \end{cases}$$

Suy ra $V_{S.OAB} = \frac{1}{6}axy \geq \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. Vậy thể tích khối chóp $S.OAB$ nhỏ nhất $V_{\min} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.



Câu 6. [HSG-HÀ NỘI 2021-2022] Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{abc}$.

Lời giải

Cách 1.

Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \max\{a, b, c\}$, khi đó $1 \leq c < \sqrt{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{abc} \geq \frac{2}{ab} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{abc} \\ &= \frac{2}{ab} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c^2} \geq \frac{4}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c^2} \\ &= \frac{4}{3 - c^2} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(c) = \frac{4}{3 - c^2} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c^2}$ với $c \in [1; \sqrt{3})$, có:

$$f'(c) = \frac{6(c^2 - 1)(c^2 - 2c + 3)}{c^3(3 - c^2)^2} \geq 0, \forall c \in [1; \sqrt{3}).$$

Do đó hàm số $f(c)$ đồng biến trên $[1; \sqrt{3})$, suy ra $f(c) \geq f(1) = 1$.

Từ đó ta có $\min P = 1$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 2.

Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \max\{a, b, c\}$, khi đó $c^2 < 3$.

Ta có:

$$\begin{aligned} P - 1 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{abc} - 1 \geq \frac{2}{ab} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{abc} - 1 \\ &= \frac{2}{ab} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c^2} - 1 \geq \frac{4}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c^2} - 1 \\ &= \frac{4}{3 - c^2} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c^2} - 1 = \frac{4(c - 1)}{c(3 - c^2)} + \frac{1 - c^2}{c^2} \\ &= (c - 1) \left[\frac{4}{c(3 - c^2)} - \frac{c + 1}{c^2} \right] = \frac{c - 1}{c^2(3 - c^2)} (c^3 + c^2 + c - 3) \end{aligned}$$

$$= \frac{(c-1)^2(c^2+c+3)}{c^2(3-c^2)} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy $\min P = 1$.

HẾT