

SỞ GD&ĐT HẢI PHÒNG
TRƯỜNG THPT LÊ QUÝ ĐÔN



ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LẦN 1

NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn: TOÁN - Lớp: 12

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho $A = \{0; 2; \dots; 98\}$ là tập hợp gồm các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 100. Số tập con có hai phần tử của A là

- A. C_{49}^2 . B. C_{50}^2 . C. A_{49}^2 . D. C_{98}^2 .

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$. Tìm u_7 .

- A. 15. B. 128. C. 13. D. 64.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị. B. Hàm số chỉ có đúng hai điểm cực trị.
C. Hàm số không có cực trị. D. Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Câu 4: Hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là:

- A. $(-2; 2)$ B. $[-2; 2]$ C. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ D. $\mathbb{R}$

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$ B. $\min_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$ C. $\min_{[2;4]} y = -6$ D. $\min_{[2;4]} y = 6$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng:

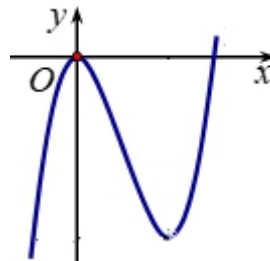
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		-	0	+
y	1	$-\infty$	$+\infty$	-1

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 7: Cho khối lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 5, đáy là hình vuông có cạnh bằng 4. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 100. B. 80. C. 20. D. 64.

Câu 8: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ sau



- A. $y = -x^3 + 3x^2$. B. $y = x^4 - 3x^2$. C. $y = x^3 - 3x^2$. D. $y = -x^4 + 3x^2$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$, $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của AB có tọa độ là

- A. $(1; 3; 2)$. B. $(4; -2; 10)$. C. $(2; -1; 5)$. D. $(2; 6; 4)$.

Câu 10: Thể tích V của khối trụ có bán kính và chiều cao đều bằng $5a$ là

- A. $75\pi a^3$. B. $125\pi a^3$. C. $25\pi a^3$. D. $50\pi a^3$.

Câu 11: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx \quad (c \in \mathbb{R})$. B. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
C. $\int [f(x)]' dx = f(x)$. D. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Câu 12: Cho $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$. B. $\log_a (b+c) = \log_a b + \log_a c$.
C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$. D. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Câu 13: Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là:

- A. $S_{xq} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. B. $S_{xq} = \pi r h$. C. $S_{xq} = \pi r l$. D. $S_{xq} = 2 \pi r l$.

Câu 14: Có bao nhiêu loại khối đa diện đều?

- A. 5. B. 2. C. 3. D. vô số.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							
			2		-2		
	$-\infty$						$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AB = 3a$, $BC = 2a$. Góc giữa BC' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đó.

- A. $2a^3 \sqrt{15}$. B. $\frac{2a^3 \sqrt{15}}{3}$. C. $a^3 \sqrt{15}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{15}}{3}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 5$ có đồ thị là (C) . Số tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $2x + y - 9 = 0$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 18: Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 8%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi suất kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút tiền ra để mua một căn hộ chung cư trị giá 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng để có đủ tiền mua căn hộ chung cư (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu?

- A. 396 triệu đồng. B. 397 triệu đồng. C. 395 triệu đồng. D. 394 triệu đồng.

Câu 19: Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = \frac{2}{3}$

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

- A. $F(x) = 4 - \frac{2}{3} \sqrt{1-3x}$. B. $F(x) = x - \frac{2}{3} \sqrt{1-3x} - 3$.
C. $F(x) = x - \frac{2}{3} \sqrt{1-3x} + 1$. D. $F(x) = x - \frac{2}{3} \sqrt{1-3x} + 3$.

Câu 20: Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối nón đó.

- A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{4}$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{2}$. D. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{6}$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

- A. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$. B. $m = 3$.
C. $m = 1$. D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$.

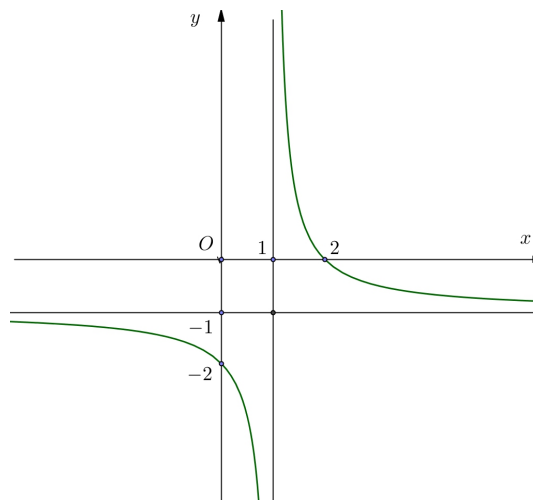
Câu 22: Cho $F(x) = \int \frac{1}{x(x+3)} dx$. Kết quả nào sau đây đúng?

- A. $F(x) = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C$. B. $F(x) = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.
C. $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$. D. $F(x) = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

Câu 23: Hàm số $y = \cos 2x + 2 \sin x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ có giá trị bằng

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. -3 .

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a + 2b + 3c$ bằng

- A. 2. B. 0. C. 6. D. -8.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$	

Phương trình $2f(x) + 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

- A. 4. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 27: Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 1, BC = 2, AA' = 2$ bằng:

- A. 27π . B. $\frac{9\pi}{2}$. C. 36π . D. 9π .

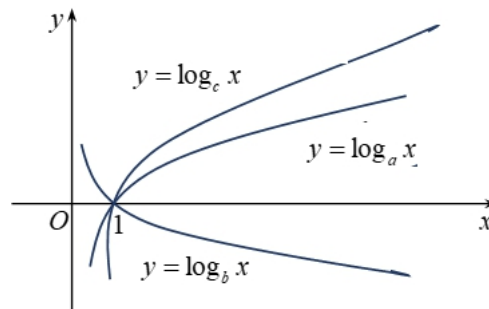
Câu 28: Phương trình $\log_2^2(x+1) - 6\log_2 \sqrt{x+1} + 2 = 0$ có tổng các nghiệm là

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 18.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x - 5$. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $[a; b]$. Khi đó $2a - b$ bằng:

- A. 5. B. -1. C. 6. D. -3.

Câu 30: Cho a, b, c là các số thực dương và khác 1. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$. Khẳng định này sau đây là đúng?



- A. $c < a < b$. B. $b < c < a$. C. $b < a < c$. D. $a < b < c$.

Câu 31: Số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$ là

- A. 8. B. 10. C. 7. D. 9.

Câu 32: Khối bát diện đều có bao nhiêu mặt đối xứng?

- A. 4. B. 6. C. 9. D. 8.

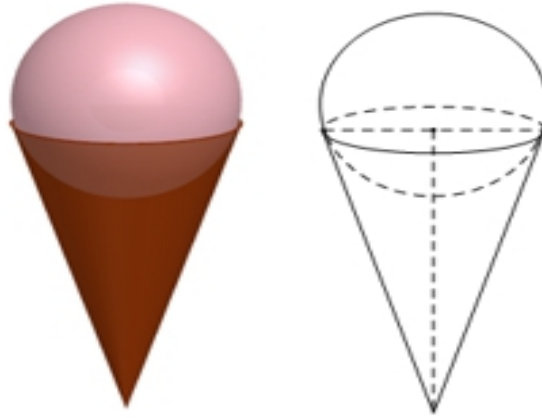
Câu 33: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(5;-1;2), C(3;2;-4)$. Tìm toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

- A. $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. B. $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. C. $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. D. $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 34: Ông A dự định sử dụng hết $6,7m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. $1,57m^3$. B. $1,11m^3$. C. $1,23m^3$. D. $2,48m^3$.

Câu 35: Một cây kem ốc quế gồm hai phần, phần em có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón, giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau, biết rằng nếu kem tan chảy hết sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích kem sau khi tan chảy bằng 75% thể tích kem đóng băng ban đầu, gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế. Tính tỉ số $\frac{h}{r}$.



- A. $\frac{h}{r} = 3$. B. $\frac{h}{r} = 2$. C. $\frac{h}{r} = \frac{4}{3}$. D. $\frac{h}{r} = \frac{16}{3}$.

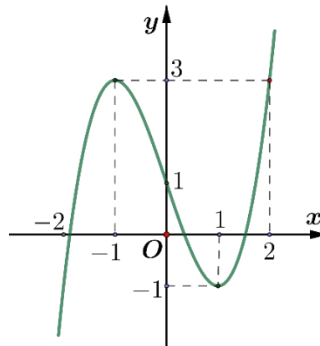
Câu 36: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O . Tích tất cả các giá trị của tập S bằng

- A. -1 . B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1 .

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a ; $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $SB = a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) . Tính $\sin \varphi$.

- A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin \varphi = \frac{1}{4}$. C. $\sin \varphi = \frac{1}{2}$. D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



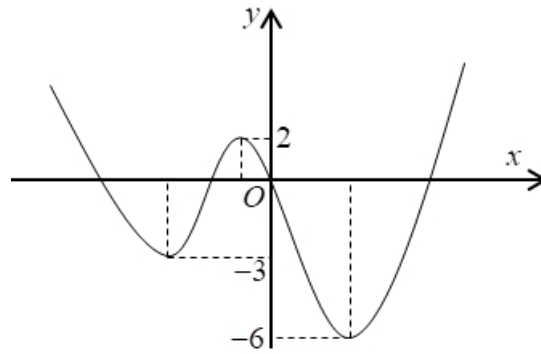
Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ là

- A. $(-1; f(\sqrt{2}))$. B. $(-1; 3]$. C. $[-1; 3]$. D. $[-1; f(\sqrt{2})]$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AMN) .

- A. $a\sqrt{5}$. B. $2a$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x - 2020) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phân tử của tập S bằng

- A. 9. B. 7. C. 12. D. 18.

Câu 41: Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

- A. $S = 3$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = -1$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp là:

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{11}}{4}$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

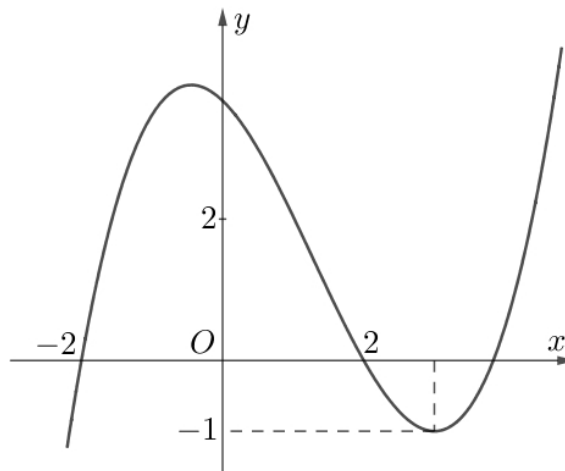
Câu 43: Cho phương trình $\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}}^2 x - (2m + 1)\log_3 x + 4m - 2 = 0$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, cosin góc hợp bởi SD và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Gọi E ; F lần lượt là hình chiếu của A lên SB ; SD . Mặt phẳng (AEF) chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích phần khối chóp không chứa đỉnh S :

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{9}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

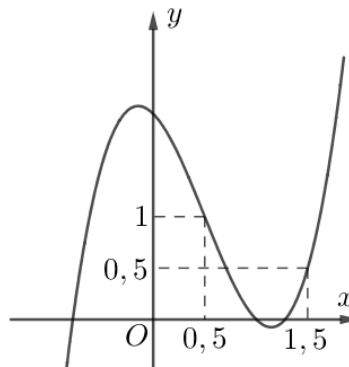
Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ là

- A. 7. B. 4. C. 3. D. 8.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2\ln x$.

- A. 3. B. 6. C. 4. D. 5.

Câu 47: Cho x, y là những số thực dương không đổi. Xét hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y$ và các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì tích $x.y$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 48: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Trên tia đối của tia $B'A'$ lấy điểm M sao cho $B'M = \frac{1}{2}B'A'$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của $A'C', BB'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có chứa đỉnh A' có thể tích V_1 và khối đa diện chứa đỉnh C' có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{95}{144}$. B. $\frac{97}{59}$. C. $\frac{49}{144}$. D. $\frac{49}{95}$.

Câu 49: Có 18 bạn thi Toán và KHTN bằng Tiếng Anh được khen thưởng gồm 9 nam và 9 nữ, tất cả các học sinh nam có chiều cao khác nhau, học sinh nữ có chiều cao khác nhau. Thầy Chinh xếp ngẫu nhiên các bạn thành một hàng ngang để chụp ảnh kỉ niệm sao cho tính từ trái sang phải các học sinh nam có chiều cao giảm dần và các học sinh nữ có chiều cao tăng dần. Xác suất để các bạn nam và các bạn nữ đứng xen kẽ theo cách trên là

- A. $\frac{1}{24310}$. B. $\frac{1}{48620}$. C. $\frac{1}{2002}$. D. $\frac{14}{2002}$.

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2021 để phương trình $\log_2(m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ có nghiệm thực?

- A. 2018. B. 2019. C. 2021. D. 2020.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.A	4.A	5.D	6.C	7.B	8.C	9.C	10.B
11.A	12.B	13.C	14.A	15.D	16.A	17.D	18.B	19.D	20.B
21.B	22.C	23.C	24.B	25.A	26.C	27.B	28.A	29.D	30.B
31.D	32.C	33.C	34.A	35	36.A	37.D	38.B	39.D	40.C
41.B	42.A	43.C	44.C	45.D	46.A	47.B	48.D	49.A	50.D

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho $A = \{0; 2; \dots; 98\}$ là tập hợp gồm các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 100. Số tập con có hai phần tử của A là

A. C_{49}^2 .

B. C_{50}^2 .

C. A_{49}^2 .

D. C_{98}^2 .

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của A là: $\frac{98-0}{2} + 1 = 50$.

Số tập con có hai phần tử của A là C_{50}^2 .

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$. Tìm u_7 .

A. 15.

B. 128.

C. 13.

D. 64.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 1 \cdot 2^6 = 64$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có ba điểm cực trị.

B. Hàm số chỉ có đúng hai điểm cực trị.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số đã cho là hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) với $ab < 0$ nên đây là trường hợp hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 4: Hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là:

A. $(-2; 2)$

B. $[-2; 2]$

C. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

D. $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ có số mũ $\alpha = \frac{1}{3}$ không nguyên.

Do đó hàm số xác định $\Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

A. $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$

B. $\min_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$

C. $\min_{[2;4]} y = -6$

D. $\min_{[2;4]} y = 6$

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Suy ra hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ liên tục trên $[2; 4]$.

Ta có: $y = x + \frac{9}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{9}{x^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vì $3 \in [2; 4]$. Ta có: $y(2) = \frac{13}{2}$; $y(3) = 6$; $y(4) = \frac{25}{4}$

Do đó: $\min_{[2;4]} y = y(3) = 6$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

A. 4

B. 2

C. 3

D. 1

Lời giải

Chọn C

Từ BBT ta có:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{ĐTHS có tiệm cận ngang } y = 1, y = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow \text{ĐTHS có tiệm cận đứng } x = 1.$$

Câu 7: Cho khối lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 5, đáy là hình vuông có cạnh bằng 4. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 100.

B. 80.

C. 20.

D. 64.

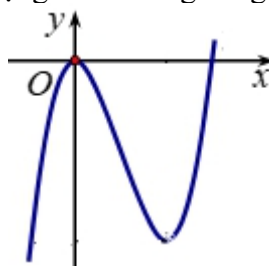
Lời giải

Chọn B

$$\text{Diện tích đáy } B = 4^2 = 16.$$

$$\text{Thể tích của khối lăng trụ đã cho là } V = Bh = 16.5 = 80.$$

Câu 8: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ sau



A. $y = -x^3 + 3x^2$.

B. $y = x^4 - 3x^2$.

C. $y = x^3 - 3x^2$.

D. $y = -x^4 + 3x^2$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta suy ra hàm số cần tìm là hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên ta chọn C.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$, $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của AB có tọa độ là

A. $(1; 3; 2)$.

B. $(4; -2; 10)$.

C. $(2; -1; 5)$.

D. $(2; 6; 4)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1. \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$$

Vậy $I(2; -1; 5)$.

Câu 10: Thể tích V của khối trụ có bán kính và chiều cao đều bằng $5a$ là

- A. $75\pi a^3$. B. $125\pi a^3$. C. $25\pi a^3$. D. $50\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối trụ là $V = \pi(5a)^2 \cdot 5a = 125\pi a^3$.

Câu 11: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx \quad (c \in \mathbb{R})$. B. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
C. $\int [f(x)]' dx = f(x)$. D. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx \quad (c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ nên chọn A.

Câu 12: Cho $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$. B. $\log_a (b+c) = \log_a b + \log_a c$.
C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$. D. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 13: Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là:

- A. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $S_{xq} = \pi r h$. C. $S_{xq} = \pi r l$. D. $S_{xq} = 2\pi r l$.

Lời giải

Chọn C

Câu 14: Có bao nhiêu loại khối đa diện đều?

- A. 5. B. 2. C. 3. D. vô số.

Lời giải

Chọn A

Có 5 loại khối đa diện đều: $\{3; 3\}$ - Tứ diện đều; $\{4; 3\}$ - Khối lập phương; $\{3; 4\}$ - Khối bát diện đều; $\{5; 3\}$ - Khối 12 mặt đều và $\{3; 5\}$ - Khối 20 mặt đều.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y							

$+\infty$

$-\infty \nearrow 2 \searrow -2 \nearrow$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 2)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-2; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AB = 3a$, $BC = 2a$. Góc giữa BC' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đó.

A. $2a^3\sqrt{15}$.

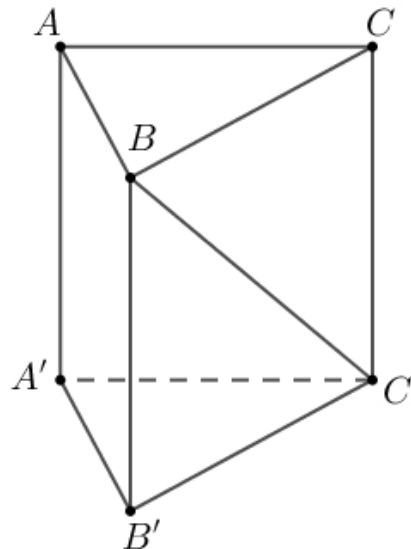
B. $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

C. $a^3\sqrt{15}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABC vuông tại C nên diện tích

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 - BC^2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9a^2 - 4a^2} \cdot 2a = \sqrt{5}a^2.$$

Góc giữa BC' và (ABC) là góc $\widehat{C'BC} = 60^\circ$.

Tam giác $CC'B$ vuông tại C nên

$$\tan \widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow CC' = BC \cdot \tan \widehat{C'BC} = 2a \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}.$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ } V = S_{ABC} \cdot CC' = \sqrt{5}a^2 \cdot 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{15}a^3.$$

Câu 17: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 5$ có đồ thị là (C) . Số tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $2x + y - 9 = 0$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đạo hàm } y' = 3x^2 - 12x + 7.$$

$$\text{Viết lại phương trình đường thẳng } \Delta: y = -2x + 9.$$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng khi hệ số góc tiếp tuyến

$$3x^2 - 12x + 7 = -2 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x_0 = 1, y_0 = 7, \text{ phương trình tiếp tuyến } y = -2(x - 1) + 7 \Leftrightarrow y = -2x + 9 \text{ (trùng với } \Delta).$$

$$\text{Với } x_0 = 3, y_0 = -1, \text{ phương trình tiếp tuyến } y = -2(x - 3) - 1 \Leftrightarrow y = -2x + 5 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy có 1 tiếp tuyến song song với đường thẳng đã cho.

- Câu 18:** Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 8%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi suất kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút tiền ra để mua một căn hộ chung cư trị giá 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng để có đủ tiền mua căn hộ chung cư (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu?
A. 396 triệu đồng. **B.** 397 triệu đồng. **C.** 395 triệu đồng. **D.** 394 triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là số tiền gửi ban đầu.

Theo công thức lãi suất kép, số tiền người đó nhận được sau 3 năm là $T = A(1+r)^3$.

Theo đề bài, ta cần có $T \geq 500 \Leftrightarrow A(1+r)^3 \geq 500 \Leftrightarrow A \geq \frac{500}{(1+8\%)^3} \approx 397$ triệu đồng.

Vậy người đó phải gửi ít nhất 397 triệu đồng.

- Câu 19:** Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = \frac{2}{3}$

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x}$. **B.** $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} - 3$.

C. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 1$.

D. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1 \right) dx = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + C$.

Theo giả thiết, ta có $F(-1) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 3$.

Vậy $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$.

- Câu 20:** Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối nón đó.

A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$.

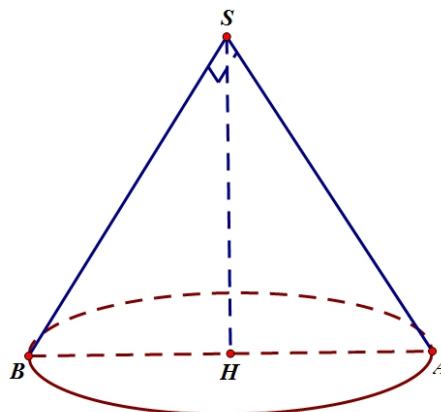
B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{4}$.

C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{2}$.

D. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Theo bài ra ta có $AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lại có ΔSAB vuông cân tại S nên $SH = \frac{AB}{2} = AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}SH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{\pi\sqrt{6}}{4} a^3$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

A. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$.

B. $m = 3$.

C. $m = 1$.

D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + (3m^2 + 1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ nên $y'(-2) = 0$.

Ta có $4 - 4(m^2 - m + 2) + 3m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$.

$y'' = 2x + 2(m^2 - m + 2)$.

$y''(-2) = 2m^2 - 2m$.

$y''(-2) > 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ thì $m = 3$ thỏa mãn.

Câu 22: Cho $F(x) = \int \frac{1}{x(x+3)} dx$. Kết quả nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C$.

B. $F(x) = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

D. $F(x) = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x(x+3)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

Câu 23: Hàm số $y = \cos 2x + 2 \sin x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ lần lượt là

$y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ có giá trị bằng

A. $-\frac{9}{4}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. -3 .

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $y' = -2 \sin 2x + 2 \cos x = -4 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x = 2 \cos x (-2 \sin x + 1)$.

$$\text{Giải } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

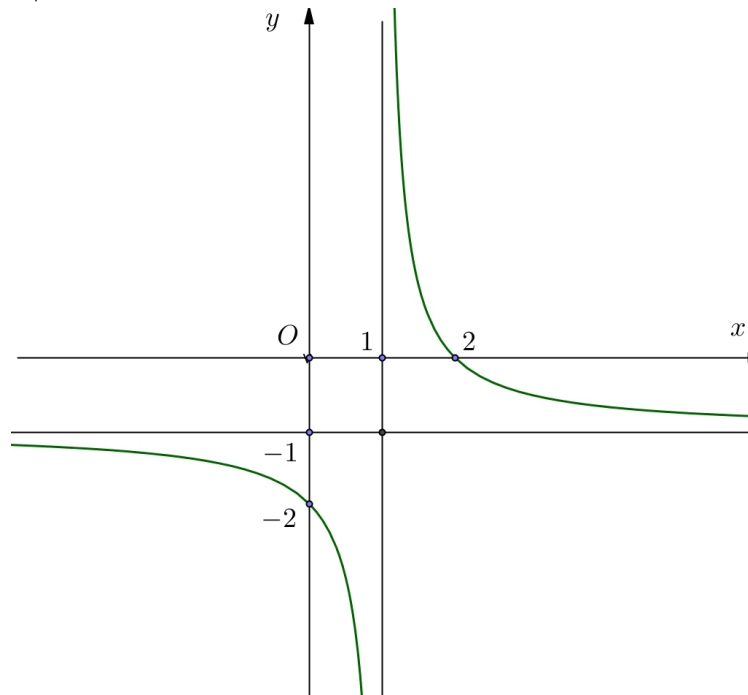
Xét trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $y' = 0$ có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}$.

Ta có $y(0) = 1; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

Suy ra $y_1 = \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{3}{2}, y_2 = \min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 1$.

Vậy $y_1 \cdot y_2 = \frac{3}{2}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a + 2b + 3c$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. 6.

D. -8.

Lời giải

Chọn B.

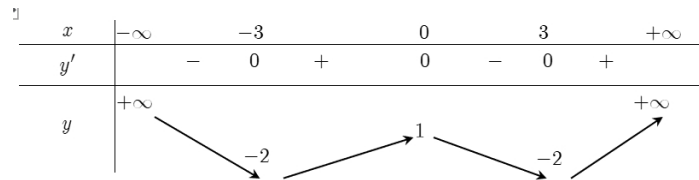
Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x = -c$ suy ra $-c = 1 \Leftrightarrow c = -1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y = a$ suy ra $a = -1$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $\left|0; \frac{b}{c}\right|$ nên $\frac{b}{c} = -2$ mà $c = -1$ suy ra $b = 2$.

Vậy, $a + 2b + 3c = 0$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Phương trình $2f(x) + 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 4.

B. 3.

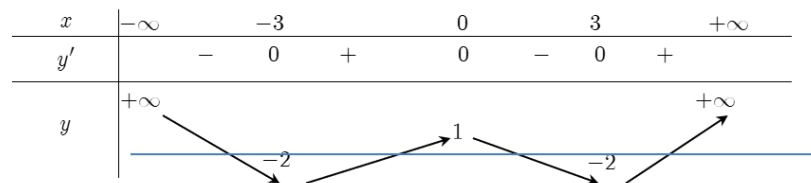
C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$. Ứng với bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 4 điểm nên $2f(x) + 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.



Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{3}$.

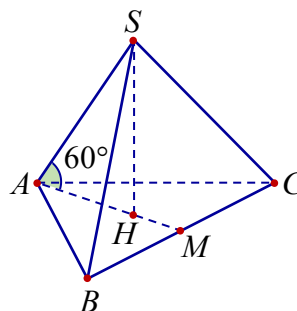
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) , khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC}$.

Xét tam giác SHA vuông tại A có:
$$\begin{cases} AH = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ SH = \tan \widehat{SAH} \cdot AH = \tan 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = a \end{cases}$$

Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 27: Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 1, BC = 2, AA' = 2$ bằng:

A. 27π .

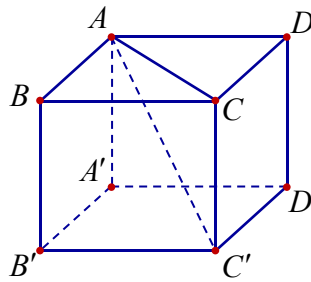
B. $\frac{9\pi}{2}$.

C. 36π .

D. 9π .

Lời giải

Chọn B.



Gọi R là bán kính khối cầu ngoại tiếp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

$$R = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{27}{8} = \frac{9}{2}\pi.$$

Câu 28: Phương trình $\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0$ có tổng các nghiệm là

A. 4.

B. 3.

C. 6.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > -1$. Ta có:

$$\begin{aligned} \log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2^2(x+1) - 3\log_2(x+1) + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+1) = 1 \\ \log_2(x+1) = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

So với điều kiện thấy thỏa mãn.

Vậy tổng các nghiệm là: $1 + 3 = 4$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x - 5$. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $[a; b]$. Khi đó $2a - b$ bằng:

A. 5.

B. -1.

C. 6.

D. -3.

Lời giải

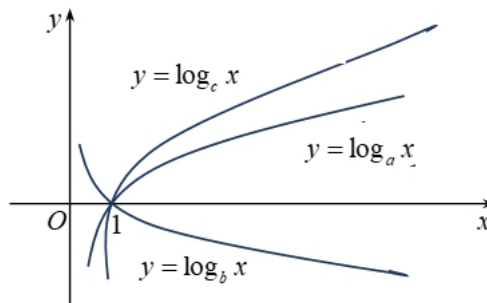
Chọn A

Ta có: $f'(x) = -x^2 + 2mx + 3m + 2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1$.

Suy ra: $a = -2, b = -1 \Rightarrow 2a - b = 2(-2) - (-1) = -3$.

Câu 30: Cho a, b, c là các số thực dương và khác 1. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$. Khẳng định này sau đây là đúng?



A. $c < a < b$.

B. $b < c < a$.

C. $b < a < c$.

D. $a < b < c$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta thấy với $x_0 > 1$ thì:

$$\log_c x_0 > \log_a x_0 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x_0} c} > \frac{1}{\log_{x_0} a} > 0 \Leftrightarrow \log_{x_0} a > \log_{x_0} c > 0 \Leftrightarrow a > c > 1.$$

Mặt khác: $\log_b x_0 < 0 \Leftrightarrow \log_{x_0} b < 0 \Leftrightarrow b < 1$.

Từ đây suy ra: $b < c < a$.

- Câu 31:** Số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$ là
A. 8. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta biến đổi bất phương trình

$$3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x - 2 \cdot 4^x - 12^{\frac{x}{2}} < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3^x}{4^x} - 2 - \frac{12^{\frac{x}{2}}}{4^x} < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x - 2 - \left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)^x < 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x - 2 < 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $3t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < t < 1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0 < t < 1$. Suy ra $0 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Do đó nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình là tập $\{1; 2; 3; \dots; 8; 9\}$.

Vậy số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình là 9.

- Câu 32:** Khối bát diện đều có bao nhiêu mặt đối xứng?

- A.** 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 8.

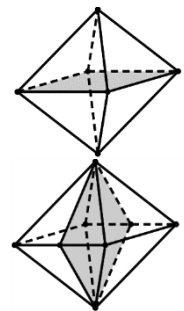
Lời giải

Chọn C

Khối bát diện đều có 9 mặt phẳng đối xứng bao gồm:

Loại 1. Mặt phẳng đối xứng đi qua 4 đỉnh đồng phẳng của khối bát diện đều (có 3 mặt).

Loại 2. Mặt phẳng đối xứng đi qua 2 đỉnh đối diện và trung điểm 2 cạnh đối diện không chứa 2 đỉnh đó (có 6 mặt).



- Câu 33:** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(5;-1;2), C(3;2;-4)$. Tìm toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

- A.** $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. **B.** $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. **C.** $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. **D.** $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(a; b; c)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (1-a; 1-b; 1-c)$, $\overrightarrow{MB} = (5-a; -1-b; 2-c)$, $\overrightarrow{MC} = (3-a; 2-b; -4-c)$.

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a+2(5-a)-(3-a)=0 \\ 1-b+2(-1-b)-(2-b)=0 \\ 1-c+2(2-c)-(-4-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right).$$

Câu 34: Ông A dự định sử dụng hết $6,7m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. $1,57m^3$.

B. $1,11m^3$.

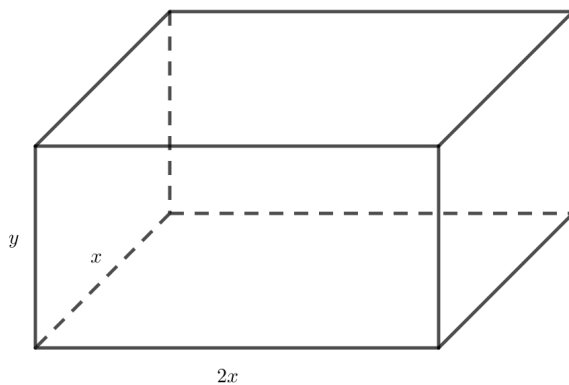
C. $1,23m^3$.

D. $2,48m^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều rộng, chiều dài và chiều cao của bể cá lần lượt là : $x; 2x; y (x, y > 0)$



Tổng diện tích tất cả các mặt của bể cá (trừ nắp trên) là:

$$S = 2x^2 + 6xy \Rightarrow 2x^2 + 6xy = 6,7 \Rightarrow y = \frac{6,7 - 2x^2}{6x}.$$

Thể tích cái bể là: $V = x \cdot 2x \cdot y = \frac{1}{3}(6,7 - 2x^2)x$.

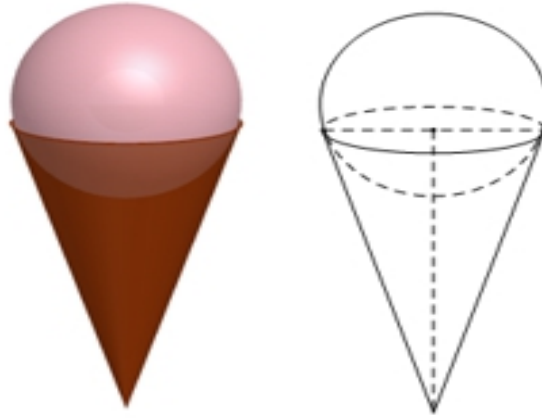
Xét hàm số $f(x) = 6,7x - 2x^3$ với $x > 0$, ta có: $f'(x) = 6,7 - 6x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{6,7}{6}}$.

BBT

x	0	$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{13,4}{3} \cdot \sqrt{\frac{6,7}{6}}$	

Vậy thể tích bể cá lớn nhất là $V = \frac{13,4}{9} \cdot \sqrt{\frac{6,7}{6}} \approx 1,57m^3$.

Câu 35: Một cây kem ốc quế gồm hai phần, phần em có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón, giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau, biết rằng nếu kem tan chảy hết sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích kem sau khi tan chảy bằng 75% thể tích kem đóng băng ban đầu, gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế. Tính tỉ số $\frac{h}{r}$.



A. $\frac{h}{r} = 3$.

B. $\frac{h}{r} = 2$.

C. $\frac{h}{r} = \frac{4}{3}$.

D. $\frac{h}{r} = \frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối cầu (phần kèm) khi chưa tan chảy bằng $V_C = \frac{4}{3}\pi r^2$.

Thể tích khối nón bằng $V_N = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Theo đề bài ra ta có $V_N = 75\% V_C \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow \frac{h}{r} = 3$.

Câu 36: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O . Tích tất cả các giá trị của tập S bằng

A. -1 .

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + m^2 - 1 = 0$ (1)

Để hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nên $\Delta' = m^2 > 0$ suy ra $m \neq 0$.

Dễ thấy (1) có hai nghiệm $x_1 = 1 - m$ và $x_2 = 1 + m$ nên $A(1 - m; -2 - 2m^3)$ và $B(1 + m; -2 + 2m^3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Tam giác OAB vuông ở $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (1 - m)(1 + m) + (-2 - 2m^3)(-2 + 2m^3) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - m^2 + 4(1 - m^6) = 0 \Leftrightarrow (1 - m^2)(4m^4 + 4m + 5) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Do đó tích các giá trị thỏa mãn của m bằng -1 .

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a ; $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $SB = a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) . Tính $\sin \varphi$.

A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

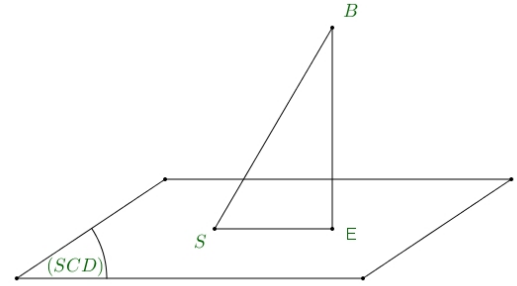
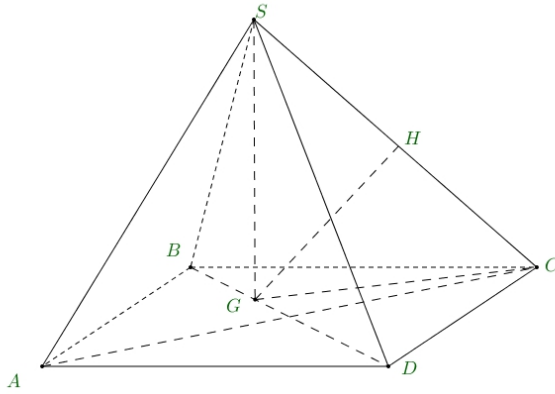
B. $\sin \varphi = \frac{1}{4}$.

C. $\sin \varphi = \frac{1}{2}$.

D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $\begin{cases} AB = AC = a \\ \widehat{ABC} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều cạnh } a.$

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp (ABCD).$

Gọi E là hình chiếu của B trên (SCD) nên SE là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SCD)

$\Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt phẳng (SCD) là góc giữa hai đường thẳng SB, SE và bằng $\widehat{BSE}$
 $\Rightarrow \widehat{BSE} = \varphi.$

Ta có $BE = d(B, (SCD)).$

$$BG \cap (SCD) = D \Rightarrow \frac{d(B, (SCD))}{d(G, (SCD))} = \frac{BG}{GC} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, CD) = \frac{3}{2} d(G, (SCD))$$

Kẻ $GH \perp SC$ tại H (1).

Ta có: $\begin{cases} CD \perp CG \\ CD \perp SG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCG) \Rightarrow CD \perp HG$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $GH \perp (SCD) \Rightarrow d(G, (SCD)) = GH.$

$$CG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

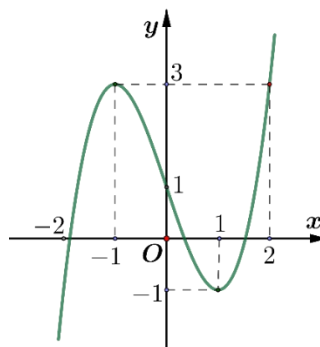
Xét tam giác SBG vuông tại G có $SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

Xét tam giác SCG vuông tại G ta có

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GC^2} = \frac{9}{6a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow HG = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow BE = \frac{3}{2} HG = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác SEB vuông tại E ta có $\sin \varphi = \frac{BE}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2})=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ là

- A. $(-1; f(\sqrt{2}))$. B. $(-1; 3]$. C. $[-1; 3]$. D. $[-1; f(\sqrt{2})]$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}; t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ ta có bảng biến thiên của hàm số $t = \sqrt{4-x^2}$.

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{3}$
t'	$+$	0	$-$
t	$\sqrt{2}$	2	1

Với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}] \Rightarrow t \in (1; 2]$

Từ đồ thị ta có: $t \in (1; 2] \Rightarrow f(t) \in (-1; 3]$

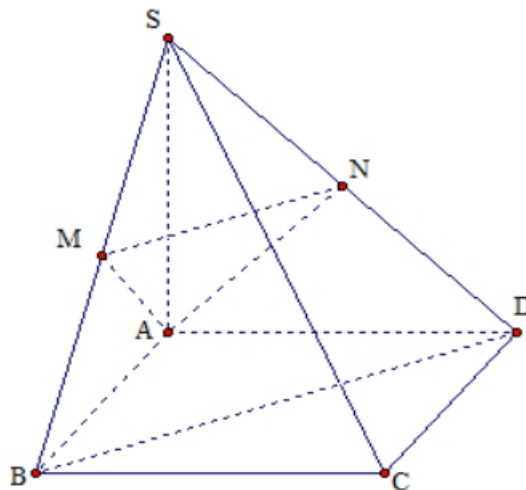
Vậy để phương trình $f(\sqrt{4-x^2})=m$ có nghiệm thì $m \in (-1; 3]$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AMN) .

- A. $a\sqrt{5}$. B. $2a$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } V_{S.ABD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} AS \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{6} 2a \cdot a \cdot 2a = \frac{2}{3} a^3.$$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{4} V_{S.ABD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{1}{6} a^3.$$

$$\text{Mặt khác: } AM = \frac{1}{2} SB = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AS^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

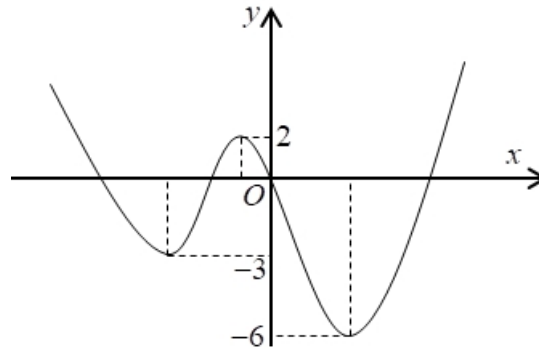
$$AN = \frac{1}{2} SD = \frac{1}{2} \sqrt{AD^2 + AS^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 4a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$MN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra: $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{4}$.

$$\text{Vây } d(S; (AMN)) = \frac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta MN}} = \frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x - 2020) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng

A. 9.

B. 7.

C. 12.

D. 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y = |f(x - 2020) + m|$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x-2020)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x-2020)+m$ với trục hoành là 2.

Tương đương với phương trình $f(x-2020)=-m$ (*) có hai nghiệm đơn phân biệt.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta tịnh tiến sang phải 2020 đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x - 2020)$.

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm đơn phân biệt khi

$$\begin{cases} -m \geq 2 \\ -6 < -m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ 3 \leq m < 6 \end{cases} \Rightarrow S = \{3; 4; 5\}.$$

Vậy tổng giá trị các phần tử của S là: $3+4+5=12$.

Câu 41: Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

A. $S = 3$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = -1$.

Lời giải

Chon B.

Ta có: $\ln\left(\frac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5\cdot 3^x-30x-10=0$

$$\Leftrightarrow \ln(5^x + 3^x) + 5(5^x + 3^x) = \ln(6x + 2) + 5(6x + 2).$$

Khi đó phương trình có dạng $f(5^x + 3^x) = f(6x + 2)$, với $f(t) = \ln t + 5t, t \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} + 5 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên từ phương trình

$$f(5^x + 3^x) = f(6x + 2) \Rightarrow 5^x + 3^x = 6x + 2 \Rightarrow g(x) = 5^x + 3^x - 6x - 2 = 0.$$

$$\Rightarrow g'(x) = 5^x \ln 5 + 3^x \ln 3 - 6 \Rightarrow g''(x) = 5^x (\ln 5)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0, \forall x$$

Do $g''(x) > 0, \forall x \Rightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có nhiều nhất là một nghiệm, từ đó phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm. Ta thấy $x_1 = 0; x_2 = 1$ là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 0; x_2 = 1 \Rightarrow S = x_1 + x_2 = 1$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp là:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{11}}{4}$.

C. $\frac{2a}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

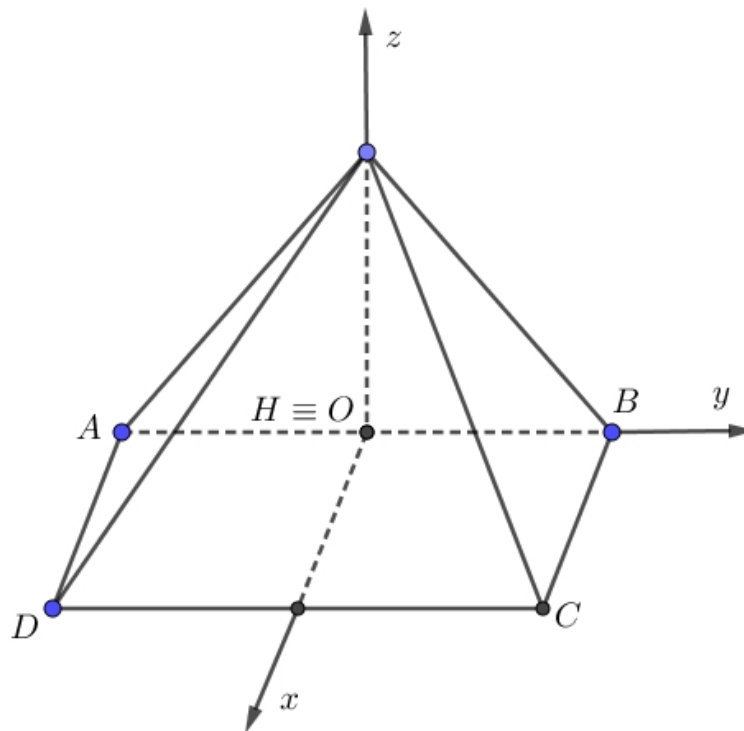
Chọn A.

Để thuận lợi trong việc tính toán ta có thể giả sử cạnh hình vuông đáy $a = 1$.

Gọi H là trung điểm AB . Ta có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với

$$\text{đáy} \Rightarrow SH \perp (ABCD), SH = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



$$\Rightarrow S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right).$$

Gọi phương trình mặt cầu có dạng $(T): x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d' = 0$.

$$\text{Do các điểm } S, A, B, C \in (T) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} - \sqrt{3}c' + d' = 0 \\ \frac{1}{4} + b' + d' = 0 \\ \frac{1}{4} - b' + d' = 0 \\ \frac{5}{4} - 2a' - b' + d' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{1}{2} \\ b' = 0 \\ c' = \frac{\sqrt{3}}{6} \\ d' = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 - d'} = \frac{\sqrt{21}}{6}. \text{ Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp là } R = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Cách khác: ta có thể áp dụng công thức giải nhanh $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$.

Trong đó là R_1 bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD \Rightarrow R_1 = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và R_2 là bán

kính đường tròn ngoại tiếp mặt bên $SAB \Rightarrow R_2 = \frac{2}{3}SH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\Rightarrow R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Câu 43: Cho phương trình $\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}}^2 x - (2m+1)\log_3 x + 4m - 2 = 0$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$?

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

ĐKXĐ: $x > 0$.

Ta có: $\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}}^2 x - (2m+1)\log_3 x + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - (2m+1)\log_3 x + 4m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2m-1 \\ \log_3 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{2m-1} \\ x = 9 \end{cases}$$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 3^{2m-1} \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 2m-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, cosin góc hợp bởi SD và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Gọi E ; F lần lượt là hình chiếu của A lên

SB ; SD . Mặt phẳng (AEF) chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích phần khối chóp không chứa đỉnh S :

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{9}$.

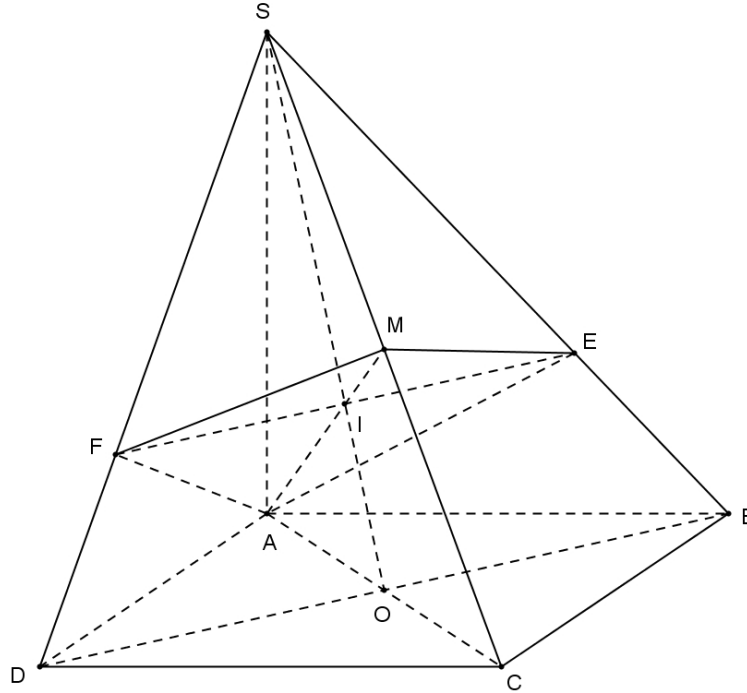
B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

C. $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Dễ thấy } \triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AE = AF \Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SD} \Rightarrow EF \parallel BD$$

Do $SA \perp (ABCD)$ nên AD là hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(ABCD)$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{SD; (ABCD)}) = \cos \widehat{SDA} = \frac{AD}{SD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SD = AD\sqrt{3} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2} = AC \Rightarrow \text{Tam giác } SAC \text{ vuông cân tại } A$$

Trong $(ABCD)$: gọi $O = AC \cap BD$

Trong (SBD) : gọi $I = SO \cap EF$

Trong (SAC) : gọi $M = SC \cap AI$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$$

$$\text{Mà } AE \perp SB \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC \quad (1)$$

$$\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AF$$

$$\text{Mà } AF \perp SD \Rightarrow AF \perp (SCD) \Rightarrow AF \perp SC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp (AEF) \Rightarrow SC \perp AM \Rightarrow M$ là trung điểm $SC \Rightarrow I$ là trọng tâm tam

$$\text{giác } SAC \Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow SE = SF = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

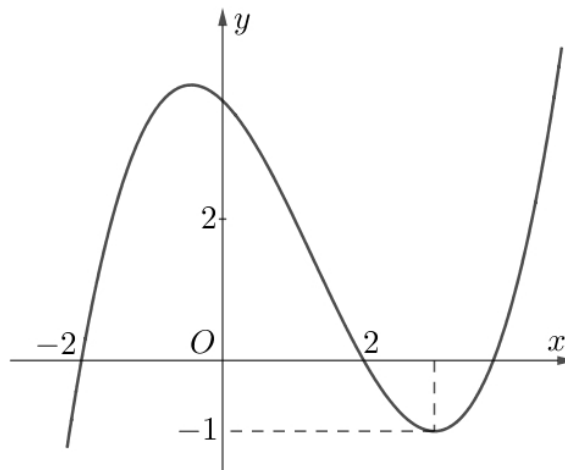
$$\text{Ta có: } \frac{V_{SAEM}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{SAEM} = \frac{1}{3}V_{SABC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{SAMF}}{V_{SACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{SAMF} = \frac{1}{3}V_{SACD} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{S.AEMF} = V_{SAEM} + V_{SAMF} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V = V_{S.ABCD} - V_{S.AEMF} = \frac{2}{3}V_{S.ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}SA S_{ABCD} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{9}.$$

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ là

A. 7.

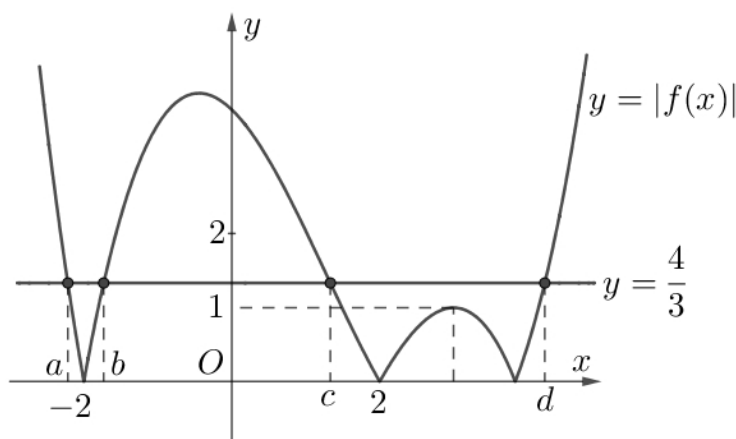
B. 4.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào đồ thị trên, ta có: $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = a \in (-\infty; -2) & (1) \\ x^3 - 3x = b \in (-2; 0) & (2) \\ x^3 - 3x = c \in (0; 2) & (3) \\ x^3 - 3x = d \in (2; +\infty) & (4) \end{cases}$

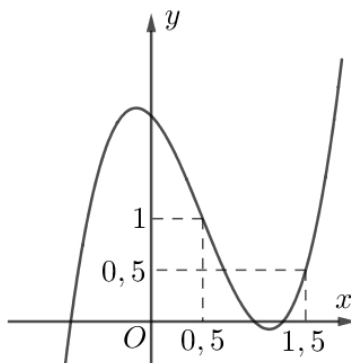
Xét hàm số $y = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					
	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên trên, mỗi phương trình (2), (3) có 3 nghiệm phân biệt và (1), (4) có 1 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ là 8.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2\ln x$.

A. 3.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

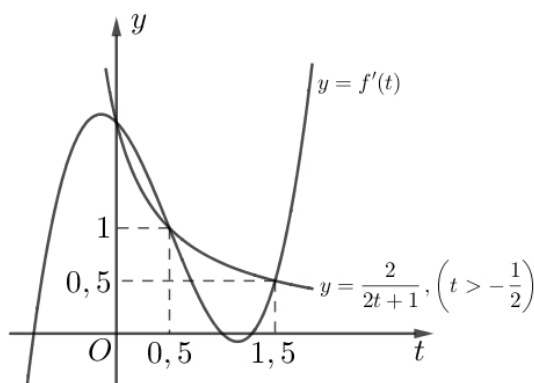
Chọn A

Hàm số $g(x) = f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2\ln x$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 2x \cdot f'\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{x}.$$

Với $x \in (0; +\infty)$, ta xét $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{x^2}$ (*)

Đặt $t = x^2 - \frac{1}{2}$, (với $x > 0 \Rightarrow t > -\frac{1}{2}$, khi đó (*) trở thành: $f'(t) \geq \frac{2}{2t+1}$



Dựa vào đồ thị trên, ta có: $f'(t) \geq \frac{2}{2t+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 0,5 \\ t > 1,5 \end{cases}$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq x^2 - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 \\ x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-	0	+

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 47: Cho x, y là những số thực dương không đổi. Xét hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y$ và các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì tích $x.y$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

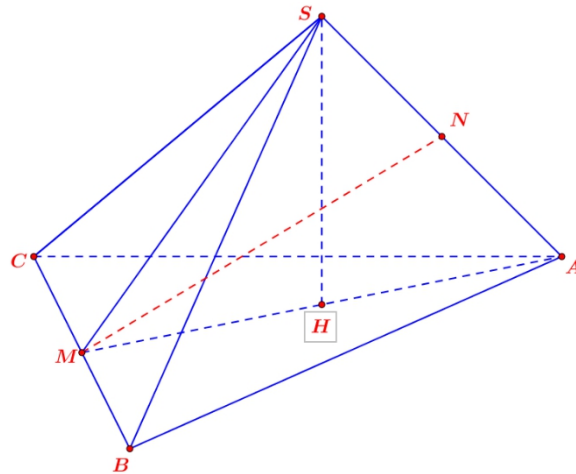
B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



♦ Ta có: do $AB = AC = SB = SC$ nên các tam giác $\triangle SBC$ và $\triangle ABC$ cân tại S, A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, SA thì $\begin{cases} BC \perp SM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$. Từ đây ta hạ $SH \perp AM, H \in AM$

Mà $SH \perp BC (BC \perp (ASM))$ nên $SH \perp (ABC)$

Suy ra $AM = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$ nên $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \frac{y}{2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$

Mặt khác vì $SM = AM$ nên $\triangle SAM$ cân tại $M \Rightarrow MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$

Mà ta có: $MN \cdot SA = SH \cdot AM \Rightarrow SH = \frac{MN \cdot SA}{AM} = \sqrt{\frac{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}{1 - \frac{y^2}{4}}} = x \sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2}{4 - y^2}}$

Suy ra, ta có được

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot x \sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2}{4 - y^2}} \cdot \frac{y}{2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} = \frac{xy}{12} \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{\sqrt{x^2 y^2 (4 - x^2 - y^2)}}{12}$$

$$\leq \frac{1}{12} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$$

Vậy $V_{S.ABC \max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$ khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = 4 - 2x^2 \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow xy = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$

Câu 48: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Trên tia đối của tia $B'A'$ lấy điểm M sao cho $B'M = \frac{1}{2} B'A'$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của $A'C', BB'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có chứa đỉnh A' có thể tích V_1 và khối đa diện chứa đỉnh C' có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{95}{144}$.

B. $\frac{97}{59}$.

C. $\frac{49}{144}$.

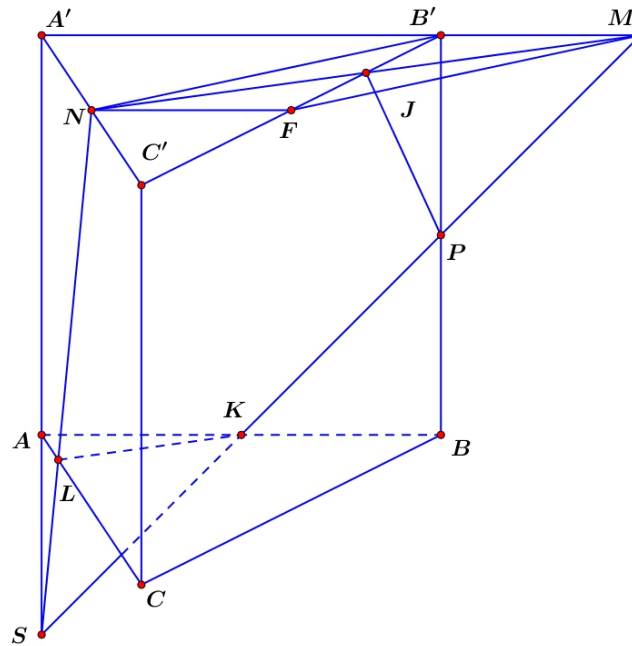
D. $\frac{49}{95}$.

Lời giải

Chọn D

♦ Ta gọi: $K = MP \cap AB, S = MP \cap AA', L = NS \cap AC$;

Khi đó thiết diện cần tìm chính là ngũ giác $NJPKL$ chia hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành 2



phần như hình vẽ. Cho J là trung điểm BF mà ta có: $\begin{cases} NF \parallel B'M \\ NF = B'M \end{cases} \Rightarrow B'J = JF$

Tương tự ta lại có thêm được: $MJ = JN$ nên từ đó suy ra $B'NFM$ là hình bình hành

Mặt khác: $\begin{cases} AK = KB \\ SA \parallel BP \end{cases} \Rightarrow SA = BP = B'P \Rightarrow \frac{MP}{MS} = \frac{B'P}{A'S} = \frac{1}{3}$

Ta có: $\frac{V_{M.PJB'}}{V_{M.SNA'}} = \frac{MP}{MS} \cdot \frac{MJ}{MN} \cdot \frac{MB'}{MA'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{M.PJB'} = \frac{1}{18} V_{M.SNA'}$

Mặt khác: ta có $\frac{SL}{SN} = \frac{SA}{SA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.ALK}}{V_{S.A'NM}} = \frac{SK}{SM} \cdot \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SL}{SN} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{S.ALK} = \frac{1}{27} V_{S.A'NM}$

Khi đó: $V_1 = V_{S.MNA'} - V_{M.PJB'} - V_{S.ALK} = \left(1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{27}\right) V_{M.SNA'} = \frac{49}{54} V_{M.SNA'}$

Ta lại có:

$V_{S.A'NM} = \frac{49}{54} V_{M.SNA'} = \frac{49}{54} \cdot \frac{3}{8} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{49}{144} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1 = \frac{95}{144} V_{ABC.A'B'C'}$

Vậy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{49}{95}$

Câu 49: Có 18 bạn thi Toán và KHTN bằng Tiếng Anh được khen thưởng gồm 9 nam và 9 nữ, tất cả các học sinh nam có chiều cao khác nhau, học sinh nữ có chiều cao khác nhau. Thầy Chinh xếp ngẫu nhiên các bạn thành một hàng ngang để chụp ảnh kỉ niệm sao cho tính từ trái sang phải các học sinh nam có chiều cao giảm dần và các học sinh nữ có chiều cao tăng dần. Xác suất để các bạn nam và các bạn nữ đứng xen kẽ theo cách trên là

A. $\frac{1}{24310}$

B. $\frac{1}{48620}$

C. $\frac{1}{2002}$

D. $\frac{14}{2002}$

Lời giải

Chọn A

Cần tất cả 18 vị trí cho 18 học sinh.

Bước 1: Chọn vị trí cho 9 học sinh, có C_{18}^9 cách chọn. Sau đó ta xếp 9 học sinh nam vào 9 vị trí đã chọn sao cho chiều cao giảm dần từ trái sang phải, chỉ có 1 cách xếp như vậy.

Bước 2: Xếp 9 nữ vào 9 vị trí còn lại sao cho chiều cao tăng dần từ trái sang phải, chỉ có một cách xếp như vậy.

$$\text{Vậy } |\Omega| = C_{18}^9 = 48620.$$

Gọi A là biến cố: “Thầy giáo xếp các bạn nam và các bạn nữ đứng xen kẽ nhau”.

Theo cách xếp trên giả sử thầy giáo xếp các bạn nam trước (tính từ trái sang phải các học sinh nam có chiều cao giảm dần) có 1 cách xếp.

Để xếp các bạn nữ xen kẽ theo cách trên (các học sinh nữ có chiều cao tăng dần) vào các vị trí có 2 cách.

Theo quy tắc nhân có 2 cách để xếp các bạn học sinh thỏa mãn đề bài.

$$\text{Do đó } |\Omega_A| = 2.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{2}{48620} = \frac{1}{24310}.$$

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2021 để phương trình $\log_2(m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ có nghiệm thực?

A. 2018.

B. 2019.

C. 2021.

D. 2020.

Lời giải

Chọn D

♦ Ta có phương trình: $\log_2(m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ (1)

Đặt: $t = \sqrt{2^x + m}$ ($t \geq 0$) thì phương trình (1) trở thành

$$\Leftrightarrow \log_2(m + t) = 2x \Leftrightarrow m + t = 4^x \Leftrightarrow t = 4^x - m$$

$$\text{Mà } t = \sqrt{2^x + m} \text{ nên suy ra } 4^x - m = \sqrt{2^x + m} \Leftrightarrow 4^x = \sqrt{2^x + m} + m$$

$$\Rightarrow 4^x + 2^x = \sqrt{2^x + m} + 2^x + m$$

Từ đây ta xét hàm đặc trưng $y = f(t) = t^2 + t$, $\forall t \geq 0$ có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0$

$$\Rightarrow f(t) \nearrow \text{trên } [0; +\infty) \Rightarrow f(2^x) = f(\sqrt{2^x + m}) \Leftrightarrow 2^x = \sqrt{2^x + m} \Leftrightarrow m = 4^x - 2^x$$

Xét hàm $y = g(x) = 4^x - 2^x$ có $g'(x) = 4^x \cdot 2 \ln(2) - 2^x \ln(2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

$$\text{Từ đó để phương trình trên có 2 nghiệm thực thì } m > g(-1) \Rightarrow m > \frac{-1}{4}$$

Mà m nguyên dương và nhỏ hơn 2021 nên suy ra $m \in [1; 2020]$

Vậy có tất cả 2020 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài