

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình sau trên tập số thực $2(x^2 + 1)\sqrt{x-1} + 8 = (5 + 4\sqrt{x-1})x$.

b) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực
$$\begin{cases} 2019^{y^2-x^2} = \frac{x^2 + 2020}{y^2 + 2020} \\ y^2 + 2x\sqrt{3x-1} = 9y - 3 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC có $\sin A + \sin C = 2\sin B$ và $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5 (2,0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{3u_n - 2}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tính $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_1-1} + \frac{1}{u_2-1} + \dots + \frac{1}{u_n-1}}{n^2}$.

Câu 6 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC , M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AH và BH . Trên cạnh CD lấy điểm K sao cho tứ giác $MNCK$ là hình bình hành. Biết $M\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $K(9; 2)$, điểm B thuộc $d_1: 2x - y + 2 = 0$, điểm C thuộc $d_2: x - y - 5 = 0$ và hoành độ đỉnh C lớn hơn 4. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi I là điểm thuộc miền trong của tứ diện $ABCD$, các đường thẳng AI, BI, CI, DI lần lượt cắt các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$ tại các điểm M, N, P, Q thỏa mãn $\frac{AI}{MI} = \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{PI} = \frac{DI}{QI}$. Biết $V_{IBCD} = \frac{a}{b}V$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ tối giản.

Tính $S = a + b$.

Câu 8 (4,0 điểm). Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $8ab - 2 = 3(a^4 + b^4)$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{ab}{1+3a^2b^2}$.

Hết

Họ và tên thí sinh Số báo danh
Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD&ĐT GIA LAI
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12
NĂM HỌC 2019 - 2020
MÔN: TOÁN -THPT
Thời gian: 180 phút



ĐỀ BÀI

Câu 1: (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Câu 2: (4.0 điểm)

a) Giải phương trình sau trên tập số thực $2(x^2 + 1)\sqrt{x-1} + 8 = (5 + 4\sqrt{x-1})x$

b) Giải hệ phương trình trên tập số thực
$$\begin{cases} 2019^{y^2-x^2} = \frac{x^2+2020}{y^2+2020} & (1) \\ y^2 + 2x\sqrt{3x-1} = 9y-3 & (2) \end{cases}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$

Câu 4: (2,0 điểm) Cho tam giác ABC có $\sin A + \sin C = 2\sin B$ và $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5: (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{3u_n - 2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Tính $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_1-1} + \frac{1}{u_1-2} + \dots + \frac{1}{u_n-1}}{n^2}$ là một CSN.

Câu 6: (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC , M và N lần lượt là trung điểm của BH và AH . Trên cạnh CD lấy điểm K sao cho tứ giác $MNCK$ là hình bình hành. Biết $M\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $K(9;2)$, điểm B thuộc đường thẳng $d_1: 2x - y + 2 = 0$ và điểm C thuộc $d_2: x - y - 5 = 0$ và hoành độ đỉnh C lớn hơn 4. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 7: (2,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi I là điểm thuộc miền trong của tứ diện $ABCD$, các đường thẳng AI , BI , CI , DI lần lượt cắt các mặt phẳng

$(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$ tại các điểm M, N, P, Q thỏa mãn

$\frac{AI}{MI} = \frac{MI}{NI} = \frac{CI}{PI} = \frac{DI}{QI}$. Biết $V_{IBCD} = \frac{a}{b}V$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + b$.

Câu 8: (4,0 điểm) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $8ab - 2 = 3(a^4 + b^4)$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{ab}{1+3a^2b^2}$.

-----HẾT-----

SỞ GD&ĐT GIA LAI
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12
NĂM HỌC 2019 - 2020
MÔN: TOÁN - THPT
Thời gian: 180 phút



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ $x^3 - 3mx^2 + 3 = x \Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 - x + 3 = 0$, (1)

Do phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng suy ra

$$2x_2 = x_1 + x_3, (2).$$

Mặt khác theo định lý Vi-ét cho phương trình bậc ba ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1 \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$$

Thay (2) vào phương trình đầu tiên ta được $x_2 = m$, mà x_2 là nghiệm của phương

$$\text{trình (1) ta được } -2m^3 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ 2m^2 + 2m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Thử lại với } m = 1 \text{ ta được phương trình hoành độ } x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases} \text{ dễ thấy}$$

ba nghiệm này lập thành cấp số cộng với công sai $d = 2$.

Câu 2: (4.0 điểm)

a) Giải phương trình sau trên tập số thực $2(x^2 + 1)\sqrt{x-1} + 8 = (5 + 4\sqrt{x-1})x$

Lời giải

Cách 1

Điều kiện $x \geq 1$

$$\text{PT} \Leftrightarrow (2x^2 + 2)\sqrt{x-1} + 8 = 5x + 4x\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\sqrt{x-1} - 5(x-1) + 3 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x-1}$ ($t \geq 0$), phương trình trở thành

$$2t^5 - 5t^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t^3 + 4t^2 + 6t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ vì } 2t^3 + 4t^2 + 6t + 3 > 0, \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Cách 2

Điều kiện $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \text{PT} &\Leftrightarrow (2x^2 + 2)\sqrt{x-1} + 8 = 5x + 4x\sqrt{x-1} \\
 &\Leftrightarrow (2x^2 - 4x + 2)\sqrt{x-1} - 5x + 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(2\sqrt{x-1} - x) + x^3 - 2x^2 + x - 5x + 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(2\sqrt{x-1} - x) + x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) \cdot \frac{4x - 4 - x^2}{2\sqrt{x-1} + x} + (x-2)^2(x+2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{(x^2 - 2x + 1)(x-2)^2}{2\sqrt{x-1} + x} + (x-2)^2(x+2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)^2 \left(\frac{-x^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x-1} + x} + x + 2 \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot \frac{-x^2 + 2x - 1 + 2(x+2)\sqrt{x-1} + x^2 + 2x}{2\sqrt{x-1} + x} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot \frac{2(x+2)\sqrt{x-1} + 4x - 1}{2\sqrt{x-1} + x} = 0 \\
 &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ vì } \frac{2(x+2)\sqrt{x-1} + 4x - 1}{2\sqrt{x-1} + x} > 0, \forall x > 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \text{ (TM)}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

b) Giải hệ phương trình trên tập số thực

$$\begin{cases} 2019^{y^2 - x^2} = \frac{x^2 + 2020}{y^2 + 2020} & (1) \\ y^2 + 2x\sqrt{3x-1} = 9y - 3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 9y-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ y \geq \frac{1}{3} \end{cases}$.

Từ (1) ta có $\frac{2019^{y^2}}{2019^{x^2}} = \frac{x^2 + 2020}{y^2 + 2020} \Leftrightarrow 2019^{x^2} (x^2 + 2020) = 2019^{y^2} (y^2 + 2020)$. (*)

Nếu $x > y \Rightarrow VT(*) > VP(*)$. Ngược lại nếu $x < y \Rightarrow VT(*) < VP(*)$.

Mặt khác với $x = y \Rightarrow VT(*) = VP(*)$. Vậy $x = y$.

Thay $x = y$ vào phương trình (2), ta có

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2x\sqrt{3x-1} &= 9x - 3 \Leftrightarrow (x + \sqrt{3x-1})^2 = (2\sqrt{3x-1})^2 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{3x-1})(x + 3\sqrt{3x-1}) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3x-1} = 0 \left(x \geq \frac{1}{3} \right) \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.
 \end{aligned}$$

Kết luận: Hệ phương trình có hai nghiệm $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 3: (2,0 điểm)

Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$

Lời giải

Ta có $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 14n$, với $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)}{2} = 14n$$

$$\Leftrightarrow 2(n-1)(n-2) + n-1 = 28, \text{ vì } n \geq 3.$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 5n - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \text{ (tm)} \\ n = -\frac{5}{2} \text{ (l)} \end{cases}$$

Với $n = 5$ suy ra $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{15} = \frac{1}{16}(x^2 + 4x + 4)^2 (x+2)^{15}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{16}(x+2)^{19} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{19} C_{19}^k x^{19-k} 2^k.$$

$$\Rightarrow \text{số hạng tổng quát } T_{k+1} = \frac{1}{16} C_{19}^k 2^k x^{19-k}.$$

Cho $19-k=10 \Rightarrow k=9$ ta được số hạng chứa x^{10} là $T_{10} = \frac{1}{16} C_{19}^9 2^9 x^{10} = C_{19}^9 2^5 x^{10}$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} là $C_{19}^9 2^5 = 2956096$.

Câu 4: (2,0 điểm) Cho tam giác ABC có $\sin A + \sin C = 2 \sin B$ và $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải

Vì $A+B+C=\pi \Rightarrow \sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}; \cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

$$\text{Ta có } \sin A + \sin C = 2 \sin B \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \quad (1)$$

$$\text{Và } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A+C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3 \cos \frac{B}{2} = 2\sqrt{3} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} + \cos \frac{A-C}{2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $\sqrt{3} \cos \frac{B}{2} = 3 \sin \frac{B}{2} \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$.

Thay $B = \frac{\pi}{3}$ vào (1) suy ra $\cos \frac{A-C}{2} = 1 \Leftrightarrow A-C = k4\pi \Rightarrow A=C$.

Vậy tam giác ABC có $A=C, B=\frac{\pi}{3}$ suy ra tam giác ABC đều.

Câu 5: (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{3u_n - 2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Tính $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_1 - 2} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}}{n^2}$ là một CSN.

Lời giải

$$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 3}{3u_n - 2} - 1 = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1) + 1}$$

Đặt $v_n = u_n - 1 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{v_n}{3v_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{v_n} + 3$. Vậy $(\frac{1}{v_n})$ là 1 CSC $d = 3, \frac{1}{v_1} = 1$

$$\frac{1}{v_n} = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

$$\text{Nên } \frac{1}{u_n - 1} = 3n - 2$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_1 - 2} + \dots + \frac{1}{u_n - 1} = 3 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 2 - 2 + \dots + 3n - 2$$

$$= 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) - 2n$$

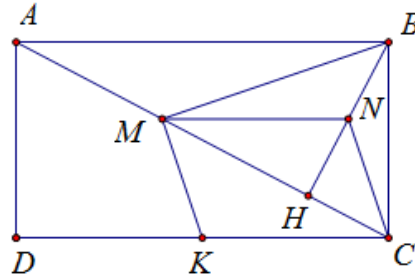
$$= 3 \cdot \frac{n(1+n)}{2} - 2n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

$$\text{Do đó } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_1 - 2} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

Câu 6: (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC , M và N lần lượt là trung điểm của BH và AH . Trên cạnh CD lấy điểm K sao cho tứ giác $MNCK$ là hình bình hành. Biết

$M\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right), K(9;2)$, điểm B thuộc đường thẳng $d_1: 2x - y + 2 = 0$ và điểm C thuộc $d_2: x - y - 5 = 0$ và hoành độ đỉnh C lớn hơn 4. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Lời giải



$B(b; 2b+2); C(c; c-5), (c > 4)$. Ta có $MN \parallel CK$ nên $MN \perp BC$, mà $BH \perp AC$ nên N là trực tâm tam giác MBC . Vậy $CN \perp BM \Rightarrow MK \perp BM$.

$$+) \overrightarrow{MK} = \left(\frac{36}{5}; \frac{8}{5}\right); \overrightarrow{MB} = \left(b - \frac{9}{5}; 2b + \frac{8}{5}\right).$$

$$MK \perp BM \Rightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \frac{36}{5} \left(b - \frac{9}{5}\right) + \frac{8}{5} \left(2b + \frac{8}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow B(1; 4).$$

$$+) \overrightarrow{KC} = (c-9; c-7); \overrightarrow{BC} = (c-1; c-9).$$

$$CK \perp CB \Rightarrow \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (c-9)(c-1) + (c-7)(c-9) = 0 \Leftrightarrow (c-9)(2c-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \text{ (Nhận)} \\ c = 4 \text{ (Loại)} \end{cases}. \text{ Vậy } C(9; 4).$$

K là trung điểm CD nên ta được $D(9; 0)$.

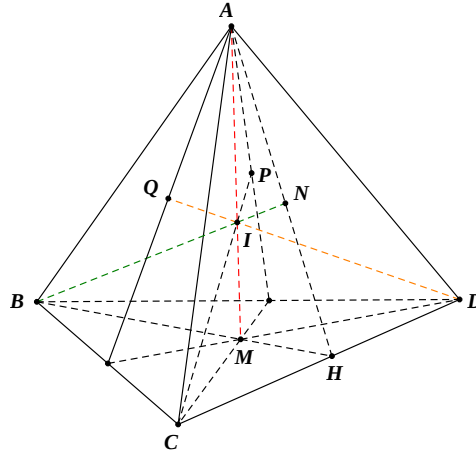
$$+) \text{ Giả sử } A(x; y), \text{ ta có } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-4=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}. \text{ Vậy } A(1; 0).$$

Kết luận: $A(1; 0), B(1; 4), C(9; 4), D(9; 0)$.

Câu 7: (2 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi I là điểm thuộc miền trong của tứ diện $ABCD$, các đường thẳng AI, BI, CI, DI lần lượt cắt các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$ tại các điểm M, N, P, Q thỏa mãn $\frac{AI}{MI} = \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{PI} = \frac{DI}{QI}$.

Biết $V_{IBCD} = \frac{a}{b}V$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + b$.

Lời giải



- Đặt $V_{IBCD} = V_1$, $V_{IACD} = V_2$, $V_{IABD} = V_3$, $V_{IABC} = V_4$, ta có: $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$
- Ta có: $\frac{AI}{MI} + 1 = \frac{AM}{IM} = \frac{d(A, (BCD))}{d(I, (BCD))} = \frac{V_{ABCD}}{V_{IBCD}} = \frac{V}{V_1} \Rightarrow \frac{AI}{MI} = \frac{V}{V_1} - 1$.
- Tương tự: $\frac{BI}{NI} = \frac{V}{V_2} - 1$; $\frac{CI}{PI} = \frac{V}{V_3} - 1$; $\frac{DI}{QI} = \frac{V}{V_4} - 1$.
- Theo giả thiết: $\frac{AI}{MI} = \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{PI} = \frac{DI}{QI} \Rightarrow \frac{V}{V_1} = \frac{V}{V_2} = \frac{V}{V_3} = \frac{V}{V_4} \Rightarrow V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \frac{1}{4}V$.

$$\text{Hay } V_{IBCD} = \frac{1}{4}V \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = a + b = 5.$$

Câu 8: (4,0 điểm) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $8ab - 2 = 3(a^4 + b^4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{ab}{1+3a^2b^2}$.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết suy ra } 8ab - 2 = 3(a^4 + b^4) \underset{AM-GM}{\geq} 6(ab)^2 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } ab = t, t > 0. \text{ Từ (1) suy ra } -3t^2 + 4t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \quad (2).$$

$$\text{Với } a, b > 0, ab \leq 1 \text{ ta chứng minh được } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \quad (3).$$

$$\text{Thật vậy (3) } \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(ab-1) \leq 0 \text{ (đúng).}$$

$$\text{Khi đó, } P \leq \frac{2}{1+t} + \frac{t}{1+3t^2} \leq \frac{t+2}{t+1} = f(t) \text{ với } t \in \left[\frac{1}{3}; 1 \right].$$

$$\text{Do } f'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} < 0, t \in \left[\frac{1}{3}; 1 \right] \text{ nên } \max_{\left[\frac{1}{3}; 1 \right]} f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{4}. \text{ Suy ra, } P \leq \frac{7}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{7}{4}$ đạt được khi $a = b = \frac{\sqrt{3}}{3}$.