CHƯƠNG IX. ĐẠO HÀM

BÀI 31. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

THUẬT NGỮ

- Đạo hàm tại một điểm
- Đạo hàm trên một khoảng
- Hệ số góc của tiếp tuyến
- Vận tốc tức thời
- Tốc độ biến đổi tức thời

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

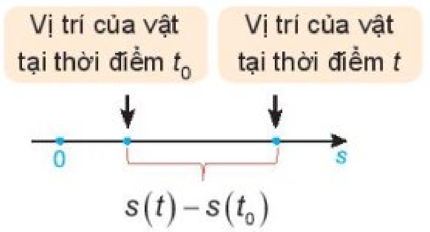
- Nhận biết một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm.
- Nhận biết định nghĩa đạo hàm. Tính đạo hàm của một số hàm đơn giản bằng định nghĩa.
- Nhận biết ý nghĩa hình học của đạo hàm. Thiết lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị.
- Vận dụng định nghĩa đạo hàm vào giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Nếu một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao 461,3 m xuống mặt đất. Có tính được vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất hay không? (Bỏ qua sức cản không khí).

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

a) Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng

HĐ1. Một vật di chuyển trên một đường thẳng (H.9.2). Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian t, s = s(t) (được gọi là phương trình của chuyển động).



Hình 9.2

a) Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t.

b) Giới hạn $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ cho ta biết điều gì?

Lời giải

a) Vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t là: $v_{av}=\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

b) Giới hạn $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ cho ta biết $v=\lim\limits_{t-t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

b) Cường độ tức thời

HĐ2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t, có dạng $Q=Q(t)$.

a) Tính cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian từ t_0 đến t.

b) Giới hạn $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$ cho ta biết điều gì?

Lời giải

a) Cường độ trung bình $I=\dfrac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$

b) Giới hạn này cho biết cường độ dòng điện tại thời điểm t_0.

Nhận xét. Nhiều bài toán trong Vật lí, Hóa học, Sinh học,... đưa đến việc tìm giới hạn dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ở đó $y=f(x)$ là một hàm số đã cho.

Giới hạn trên dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) và điểm $x_0\in(a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Chú ý. Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x)-f(x_0)$.

2. Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b), x\neq x_0$.

3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)=x^2+2x$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

Ta có: $f(x)-f(1)=x^2+2x-3=x^2-1+2x-2=(x-1)(x+3)$.

Với $x\neq 1, \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3$.

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+3)=4$.

Vậy $f'(1)=4$.

Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau:

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+2x\right)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)=4.$$

Chú ý. Đặt $h=x-x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0=1$ có thể tính như sau:

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left[(1+h)^2+2(1+h)\right]-\left(1^2+2\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(h^2+4h+3\right)-3}{h}=\lim_{h\to0}(h+4)=4.$$

Chú ý $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Luyện tập 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=-x^2+2x+1$ tại điểm $x_0=-1$.

Lời giải

Ta có $y=-x^2+2x+1\Rightarrow y'=(-2x+2)$

Để tính đạo hàm tại điểm $x_0=-1$, ta thay $x=-1$ vào y': $y'(-1)=(-2(-1)+2)=4$

Vậy đạo hàm của hàm số $y=-x^2+2x+1$ tại điểm $x_0=-1$ bằng 4 .

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

HĐ3. Tính đạo hàm $f'(x_0)$ tại điểm x_0 bất kì trong các trường hợp sau:

a) $f(x)=c$ (c là hằng số); b) $f(x)=x$.

Lời giải

a) Với hàm số $f(x)=c$, với c là hằng số bất kỳ, ta có $f'(x)=0$ vì đạo hàm của một hằng số bất kỳ luôn bằng 0 . Do đó, $f'(x_0)=0$ với mọi x_0.

b) Với hàm số $f(x)=x$, ta có $f'(x)=1$ với mọi x. Do đó, $f'(x_0)=1$ với mọi x_0.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y'=f'(x)$.

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y=cx^2$, với c là hằng số.

Lời giải

Với x_0 bất kì, ta có: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{cx^2-cx_0^2}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}c(x+x_0)=c(x_0+x_0)=2cx_0$.

Vậy hàm số $y=cx^2$ (với c là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y'=2cx$

Chú ý. Nếu phương trình chuyển động của vật là $s=f(t)$ thì $v(t)=f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

Ví dụ 3. Giải bài toán trong tình huống mở đầu (bỏ qua sức cản của không khí và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Phương trình chuyển động rơi tự do của quả bóng là $s=f(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc rơi tự do, lấy $g=9,8\ m/s^2$).

Do vậy, vận tốc của qảu bóng tại thời điểm t là $v(t)=f'(t)=gt=9,8t$.

Mặt khác, vì chiều cao của tòa tháp là $461,3$ m nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1, với $f(t_1)=461,3$. Từ đó, ta có: $4,9t_1^2=461,3\Leftrightarrow t_1=\sqrt{\dfrac{461,3}{4,9}}$ (giây).

Vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là $v(t_1)=9,8t_1=9,8.\sqrt{\dfrac{461,3}{4,9}}\approx 95,1\ (m/s)$.

Luyện tập 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) $y=x^2+1$; b) $y=kx+c$ (với k, c là hằng số).

Lời giải

a) $y=x^2+1\Rightarrow y'=2x+0=2x$

b) $y=kx+c\Rightarrow y'=k+0=k$

IV. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

HĐ4. Nhận biết tiếp tuyến của đồ thị

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $P(x_0;f(x_0))\in(C)$.

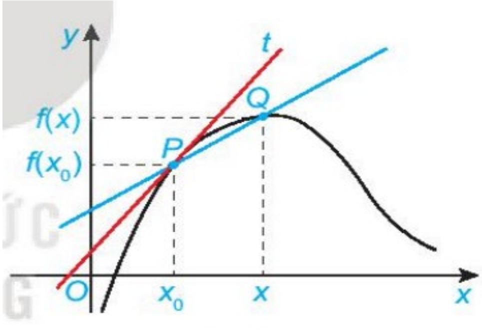
Xét điểm $Q(x;f(x))$ thay đổi trên (C) với $x\neq x_0$.

a) Đường thẳng đi qua hai điểm P, Q được gọi là một cát tuyến của đồ thị (C) (H9.3). Tìm hệ số góc k_{PQ} của cát tuyến PQ.

b) Khi $x\to x_0$ thì vị trí của điểm $Q(x;f(x))$ trên đồ thị (C) thay đổi như thế nào?

c) Nếu điểm Q di chuyển trên (C) tới điểm P mà k_{PQ} có giới hạn hữu hạn k thì có nhận xét gì về vị trí giới hạn của cát tuyến QP?

Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm
$(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$, với $x_1 \neq x_2$, là
$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Hình 9.3

Lời giải

a) Hệ số góc của đường thẳng PQ

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

b) Khi $x \to x_0$ thì vị trí của điểm $Q(x; f(x))$ trên đồ thị (C) sẽ tiến gần đến điểm $P(x_0, f(x_0))$ và khi $x = x_0$ hai điểm này sẽ trùng nhau.

c) Nếu điểm Q di chuyển trên (C) tới điểm P mà KPQ có giới hạn hữu hạn k thì cát tuyến PQ cũng sẽ tiến đến gần vị trí của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $P(x_0, f(x_0))$. Nói cách khác, khi điểm $Q(x, f(x))$ tiến đến điểm $P(x_0, f(x_0))$, thì cát tuyến PQ cũng sẽ tiến đến vị trí của tiếp tuyến tại điểm $P(x_0, f(x_0))$. Vì vậy, giới hạn của cát tuyến QP sẽ là đường thẳng tiếp tuyến tại điểm $P(x_0, f(x_0))$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua p với hệ số góc $k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét. Hệ số góc tiếp tuyến của đò thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x)$
.

Ví dụ 4. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Lời giải

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên $y'(-1) = 2.(-1) = -2$.

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $k = -2$.

Luyện tập 3. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $x = x_0 = \dfrac{1}{2}$

$y' = 2x \qquad y'(x_0) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

b) Phương trình tiếp tuyến

HĐ5. Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị parabol (P).

a)Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x_0=1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến đó.

Lời giải

a) $y'(x_0)=y'(1)=2.1=2$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị parabol $y=x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là 2.

b) $y_0=(1)^2=1$

Do đó, điểm tiếp xúc có tọa độ là $(1,1)$.

Vì hệ số góc của tiếp tuyến là $m=2$.

$y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường parabol $y=x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là $y=2x-1$.

Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta rút ra được kết luận sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0;y_0)$ là $y-y_0=f'(x)(x-x_0)$, trong đó $y_0=f(x_0)$.

Ví dụ 5. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): y=3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$.

Lời giải

Từ Ví dụ 2, ta có $y'=6x$. Do đó, hệ số góc của tiếp tuyến là $k=f'(1)=6$.

Ngoài ra, ta có $f(1)=3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y-3=6(x-1)$ hay $y=6x-3$.

Luyện tập 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P):-2x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$.

Lời giải

$y'=-4x$.

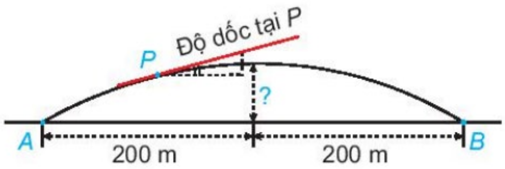
Đạo hàm của (P) tại $x_0=-1: y'(x_0)=-4(-1)=4$

Với $m=y'(x_0)=4, x_0=-1, y_0=-2$, ta có: $y+2=4(x+1)$ hay $y=4x+2$.

Đây chính là phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm $(-1,-2)$.

Vận dụng: Người ta xây một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400 m (H.9.4). Độ dốc của mặt cầu không vượt quá $10°$ (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang như Hình 9.5). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hình 9.4. Cầu vượt thép tại nút giao Nguyễn Văn Cừ quận Long Biên, Hà Nội



Hình 9.5

Hướng dẫn. Chọn hệ trục tọa độ sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt cầu cây cầu có hình dạng parabol dạng $y=-ax^2$ (với a là hằng số dương). Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là $k=y'=-2ax,-200\le x\le 200$.

Do đó, $|k|=2a|x|\le 400a$. Vì độ dốc của mặt cầu không quá 10° nên ta có: $400a\le \tan 10^\circ$. Từ đó tính được chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường.

Lời giải

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đầu mút của cây cầu.

Ta có $OB=OA=200\,\text{m}$.

Theo đề bài, độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10°, do đó độ lệch h giữa đỉnh của cầu và mặt phẳng AB không vượt quá: $h=OB\cdot\tan\left(10^\circ\right)\approx 34,64m$.

Do đó, độ cao giới hạn của cây cầu là $h+200\approx 234.6$ (m).

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Phương pháp

Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x)-f\left(x_0\right)$.

2. Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b),x\ne x_0$.

3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y=2x^2+x+1$ tại $x_0=2$.

Lời giải

$$f(x)-f(x_0)=f(x)-f(2)=2x^2+x+1-11=2x^2+x-10$$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{2x^2+x-10}{x-2}=\frac{2(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)}{x-2}=2x+5$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(2x+5)=9$.

Vậy $f'(2)=9$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y=\sqrt{x^2+3}$ tại $x;\forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải

Ta có:

Với x_0 bất kì

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x_0{}^2+3}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)\left[\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x_0{}^2+3}\right]}=\frac{2x_0}{2\sqrt{x_0{}^2+3}}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0{}^2+3}}$$

Vậy $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

Lời giải

Ta có : $f(0)=0$, do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

Lời giải

Điều kiện cần:

$f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+b=2$

Điều kiện đủ:

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+2)=3$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax-a}{x-1}=a$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f'(1^+)=f'(1^-)\Leftrightarrow a=3\Rightarrow b=-1$.

Dạng 2. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

1. Phương pháp

❶. *Vận tốc tức thời* tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s=s(t)$ là

$$v(t_0)=s'(t_0).$$

❷. *Cường độ tức thời* tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q=Q(t)$ là

$$I(t_0)=Q'(t_0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là:

$s=f(t)=t^2+4t+6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0.

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t=5$.

Lời giải

a) Ta có: $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{t^2+4t+6-\left(t_0^2+4t_0+6\right)}{t-t_0}==\lim\limits_{t\to t_0}(t+t_0+4)=2t_0+4$.

Vậy $f'(t_0)=2t_0+4$.

b) Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t=5$ là $v_{tt}=f'(5)=2.5+4=14$ (m/s).

Ví dụ 2: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q=6t+5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t=10$.

Lời giải

Vì $Q'(t)=6\Rightarrow$ Cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t=10$ là $I_{tt}=Q'(10)=6$

Dạng 3. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0)=k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=x^2+5$ có $f'(x)=2x$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0=-1$.

Hướng dẫn giải

$x_0=-1\Rightarrow f(x_0)=(-1)^2+5=6$

$f'(-1)=-2$.

Phương trình tiếp tuyến: $y=-2(x+1)+6$.

Ví dụ 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1)=1; f'(x)=4x^3$, do đó $f'(-1)=-4$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-4(x+1)+1=-4x-3$.

Ví dụ 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3$ tại điểm mà tiếp điểm có tung độ bằng -1

Hướng dẫn giải

Ta có: Khi $y=-1$ thì $x^3=-1$, do đó $x=-1$.

$f(-1)=-1; f'(x)=3x^2$, do đó $f'(-1)=3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3(x+1)-1=3x+2$.

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4$ có hệ số góc bằng 4.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x)=4x^3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4 nên $4x^3=4$, do đó $x=1$; $f(1)=1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=4(x-1)+1=4x-3$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 9.1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm các hàm số sau:

a) $y=x^2-x$ tại $x_0=1$; b) $y=-x^3$ tại $x_0=1$.

Lời giải

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\, f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1-h-1+1}{h}.\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+1)\\
&= 1+1=2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\, f'(-1) &= lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{-(h-1)^3+1^3}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{-(h^3-3h^2+3h-1)+1}{h}
\end{aligned}
$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h^3+3h^2-3h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(-h^2+3h-3\right)$$
$$=3$$

Bài 9.2. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = kx^2 + c$ (với $k,\ c$ là các hằng số); b) $y = x^3$.

Lời giải

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)^2+c-\left(kx^2+c\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{kx^2+2kxh+kh^2+c-kx^2-c}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2kxh+kh^2}{h} = \lim_{h\to 0}\left(2kx+kh\right) = 2kx$$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2$$

Bài 9.3. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 4x$, biết:

a) Tiếp tuyến có hoành độ $x_0 = 1$; b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$.

Lời giải

a) Đạo hàm của hàm số tại điểm x_0

$f'(x) = -2x + 4$ đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = 1$.

$f'(1) = -2(1) + 4 = 2$

Phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm $x_0 = 1$ là:

$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x-\left(x_0\right)\right) \Rightarrow y - f(1) = 2(x-1)$.

Thay $f(1) = 3$, ta được phương trình tiếp tuyến: $y - 3 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x + 1$

b) Tại điểm $y_0 = 0$ ta có $x = 2$

Đường tiếp tuyến tại điểm $(2,0)$ có độ dốc bằng $y' = -2.2 + 4 = -4$.

Sử dụng công thức tương tự, ta có: $y - 0 = -4(x-2) \Rightarrow y = -4x + 8$

Bài 9.4. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6\ m/s$ thì độ cao h của nó (tính bằng m) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

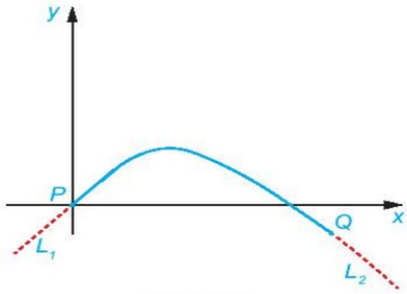
Tại thời điểm mà vật đạt độ cao bằng 0 , ta có: $0=19,6t-4,9t^2 \Leftrightarrow 0=t(19,6-4,9t) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$

Khi $t=4$ (thời điểm vật chạm đất), ta có: $19,6-9,8(4)=-19,6$.

Vậy vận tốc của vật khi nó chạm đất là 19,6 m/s.

Bài 9.5. Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải có những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y=ax^2+bx+c$, trong đó x tính bằng mét.

Hình 9.6a



Hình 9.6b

a. Tìm c

b. Tính $y'(0)$ và tìm b.

c. Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là $40\ m$. Tìm a.

d. Tìm độ chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q.

Lời giải

a) Ta có $y'=2ax+b$

Ta lại có phương trình của tiếp tuyến là: $y-y_p=y'\left(x_p\right)\left(x-x_p\right)$

Thay các giá trị này vào phương trình tiếp tuyến, ta có: $0=2ap+b$

Vậy $b=-2ap$.

Thay $x=0$ vào phương trình đường cong ta có $y=a(0)^2+c(0)+c=c \Rightarrow c=yp$

b) $y'=2ax+b=c$ khi $x=0 \Rightarrow y'(0)=b$

c) Ta có $y'(P)=2aP+b=0,5,\ \ y'(P)=2aP+b=0,75$

Trừ hai phương trình, ta có: $2a(Q-P)=-1,25 \Leftrightarrow Q-P=20 \Rightarrow a=\dfrac{-1,25}{40}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0. Đạo hàm của f tại x_0 là:

A. $f(x_0)$.

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

Ta có Cho f là hàm số liên tục tại x_0.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đặt $h=x-x_0 \Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$ $\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đặt $h=\Delta x=x-x_0 \Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{4}$. **B.** $f'(0)=\dfrac{1}{16}$. **C.** $f'(0)=\dfrac{1}{32}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\dfrac{1}{16}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=1$. **C.** $f'(0)=\dfrac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1)=\dfrac{3}{2}$. **B.** $f'(1)=1$. **C.** $f'(1)=0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Xét $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-3)}{x-2}=2$.

Ta thấy: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$. Do đó, hàm số không tiên tục tại điểm $x=1$.

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x=1$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không liên tục tại $x=0$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x=2$.
C. Hàm số liên tục tại $x=2$. **D.** Hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Xét các giới hạn $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-1\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2\right)=0\end{cases}$.

Do $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x=0$.

Do đó, hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 8: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\leq 2\\ -\dfrac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=2$.

A. $b=3$. **B.** $b=6$. **C.** $b=1$. **D.** $b=-6$.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có đạo hàm tại $x=2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=2$, tức là

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}\left(-\frac{x^2}{2}+bx-6\right) = \lim_{x\to 2^-} x^2 \Leftrightarrow -2+2b-6=4 \Leftrightarrow b=6.$$

Thử lại với $b=6$, ta có

- $$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-\frac{x^2}{2}+bx-10}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-\frac{x^2}{2}+6x-10}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(10-x)}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{10-x}{2} = 4;$$

- $$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x=2$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx^2+2x+2 & \text{khi } x>0 \\ nx+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $m,\ n$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. Không tồn tại m, n. **B.** $m=2, \forall n$.

C. $n=2, \forall m$. **D.** $m=n=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{mx^2+2x+2-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{mx^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(mx+2)=2. \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{nx+2-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{nx}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} n = n\end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow n=2.$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1 \\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $a,\ b$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=1, b=-\frac{1}{2}$. **B.** $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$. **C.** $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$. **D.** $a=1, b=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

- Hàm số có đạo hàm tại $x=1$, do đó hàm số liên tục tại $x=1$.

$\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$. (1)

- Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}a=a \\ \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x+1)}{2}=1 \end{cases}$.

Hàm số có đạo hàm tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow a=1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 11: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2$ giây.

A. 2m/s. **B.** 3m/s. **C.** 4m/s. **D.** 5m/s.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $s'(t)=2t$.

Vận tốc của chất điểm $v(t)=s'(t)=2t\Rightarrow v(2)=2.2=4\text{m/s}$.

Câu 12: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t)=196t-4,9t^2$ trong đó $t>0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A. 1690m. **B.** 1069m. **C.** 1906m. **D.** 1960m.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $s'(t)=196-9,8t$.

Vận tốc của viên đạn $v(t)=s'(t)=196-9,8t\Rightarrow v(t)=0\Leftrightarrow 196-9,8t=0\Leftrightarrow t=20$.

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h=s(20)=196.20-4,9.20^2=1960\text{m}$.

Câu 13: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t)=t^3-3t^2+9t+2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì bận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t=1\text{s}$. **B.** $t=2\text{s}$. **C.** $t=3\text{s}$. **D.** $t=6\text{s}$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $s'(t)=3t^2-6t+9$.

Vận tốc của chất điểm $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+9=3(t-1)^2+6\geq 6$.

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow t=1$.

Câu 14: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t)=8t+3t^2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là $11\,mét/giây$

A. 6m/s^2. **B.** 11m/s^2. **C.** 14m/s^2. **D.** 20m/s^2.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $v'(t)=8+6t$.

Ta có $v(t)=11 \Leftrightarrow 8t+3t^2=11 \Leftrightarrow t=1\ (t>0)$.

Gia tốc của chất điểm $a(t)=v'(t)=8+6t \Rightarrow a(1)=v'(1)=8+6.1=14\text{m/s}^2$.

Câu 15: Một vật rơi tự do theo phương trình $s=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g=9,8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ $t\ (t=5\text{s})$ đến $t+\Delta t$ với $\Delta t=0,001\text{s}$.

A. $v_{\text{tb}}=49\text{m/s}$. **B.** $v_{\text{tb}}=49,49\text{m/s}$. **C.** $v_{\text{tb}}=49,0049\text{m/s}$. **D.** $v_{\text{tb}}=49,245\text{m/s}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v_{\text{tb}}=\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\dfrac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t=49,0049\text{m/s}$.

Câu 16: Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y=x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vậy $k=y'\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Câu 17: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm $(-1;-1)$.

A. $y=-3x-4$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x+2$.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $k=y'(-1)=3$.

Ta có $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-1 \\ k=3 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y+1=3(x+1) \Leftrightarrow y=3x+2$.

Câu 18: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $x+y+2=0$. **B.** $y=x+2$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $k=y'(-1)=-1$.

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=-1$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = -1 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y+1=-1(x+1) \Leftrightarrow y=-x-2$.

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $y=8$. **B.** $y=-12x+16$. **C.** $y=12x-24$. **D.** $y=12x-16$.

Lời giải

Chọn D

Với $y_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$.

Ta tính được $k = y'(2) = 12$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 8 \\ k = 12 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y-8=12(x-2) \Leftrightarrow y=12x-16$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

A. $y=2x$. **B.** $y=2$. **C.** $y=0$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $x_0 = 0; y_0 = 2; y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y'(0) = 0$

Ta có : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ k = 0 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=2$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y=-2$.

A. $y=-9x+7;\ y=-2$. **B.** $y=-2$. **C.** $y=9x+7;\ y=-2$. **D.** $y=9x+7;\ y=2$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm : $y = x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Với $x=-1 \to \begin{cases} y=-2 \\ k=y'(-1)=9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7$.

Với $x=2 \to \begin{cases} y=-2 \\ k=y'(-2)=0 \end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-2$.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$.

A. $y=9x+7;\ y=9x-25$. **B.** $y=9x-25$.

C. $y=9x-7;\ y=9x+25$. **D.** $y=9x+25$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$ nên có $k=9\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=-1\rightarrow\begin{cases}y_0=-2\\k=9\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7\left(loaïi\right)$ (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0=3\rightarrow\begin{cases}y_0=2\\k=9\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x-25$.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{45}x$.

A. $y=45x-173$; $y=45x+83$. **B.** $y=45x-173$.

C. $y=45x+173$; $y=45x-83$. **D.** $y=45x-83$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0$. Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{45}x$ nên có $k.\left(-\dfrac{1}{45}\right)=-1\Leftrightarrow k=45\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=45\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=5\\x_0=-3\end{array}\right.$.

Với $x_0=5\rightarrow\begin{cases}y_0=52\\k=45\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x-173$.

Với $x_0=-3\rightarrow\begin{cases}y_0=-52\\k=45\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x+83$.

Câu 24: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\dfrac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$.

A. $x+4y-1=0$; $x+4y+1=0$. **B.** $x+4y-4=0$; $x+4y+4=0$.

C. $y=-\dfrac{1}{4}x-4$; $y=-\dfrac{1}{4}x+4$. **D.** $y=-\dfrac{1}{4}x$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k=y'\left(x_0\right)=-\dfrac{1}{x_0^2}$.

Theo giả thiết ta có $k=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x_0^2}=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow x_0=\pm2$.

• Với $x_0=2\to y_0=\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y-4=0$.

• Với $x_0=-2\to y_0=-\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{4}(x+2)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y+4=0$.

Câu 25: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta:4x-3y=0$ bằng $\frac{3}{5}$.

A. $y=2;\ y=1$. **B.** $y=-2;\ y=1$. **C.** $y=-2;\ y=-1$. **D.** $y=2;\ y=-2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$.

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y+y_0=k(x-x_0)$.

Suy ra tiếp tuyến d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d=(-k;1)$.

Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta=(4;-3)$.

Theo đề bài ta có: $\cos(d,\Delta)=\frac{|-4k-3|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{16+9}}=\frac{3}{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=-\frac{24}{7}\end{array}\right.$.

Với $k=-\frac{24}{7}\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=-\frac{24}{7}$: vô nghiệm.

Với $k=0\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$.

• $x_0=0\Rightarrow y_0=2\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-2=0\Leftrightarrow y=2$.

• $x_0=2\Rightarrow y_0=-2\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y+2=0\Leftrightarrow y=-2$.

BÀI 32. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

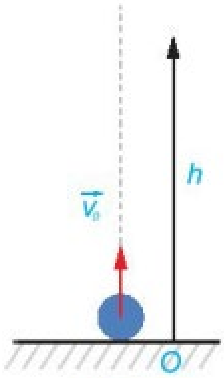
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

THUẬT NGỮ	KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
• Đạo hàm của tổng, hiệu • Đạo hàm của tích, thương • Đạo hàm của hàm số hợp • Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	• Tính đạo hàm của một số hàm sơ cấp cơ bản. • Sử dụng các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số và đạo hàm của hàm số hợp. • Vận dụng các quy tắc đạo hàm để giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên tự mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20\ \mathrm{m/s}$. Trong vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi ném được cho bởi công thức sau:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.



Hình 9.7

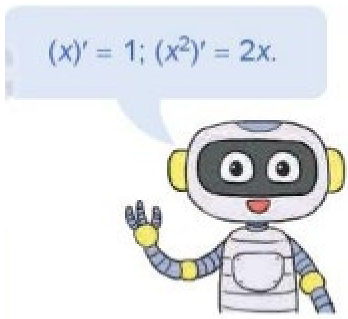
1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

HĐ1. Nhận biết đạo hàm của hàm số $y = x^n$

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$ tại điểm x bất kì.

b) Dự đoán công thức đạo hàm của hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.



Lời giải

a) $y' = 3x^2$

b) $y' = nx^{n-1}$

> Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

b) Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

HĐ2. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x > 0$.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x > 0$ là:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại các điểm $x = 4$ và $x = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Với mọi $x \in (0;+\infty)$, ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Do đó $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ và $y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$.

2. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

HĐ3. Nhận biết quy tắc đạo hàm của tổng

a) Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + x^2$ tại điểm x bất kì.

b) So sánh: $\left(x^3 + x^2\right)'$ và $\left(x^3\right)' + \left(x^2\right)'$.

Lời giải

a) Theo định nghĩa, đạo hàm của hàm số $y = x^3 + x^2$ tại điểm x bất kì.

$y' = 3x^2 + 2x$

b) $\left(x^3 + x^2\right)' = \left(x^3\right)' + \left(x^2\right)'$

Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó

$(u+v)' = u' + v'$; $\quad (u-v)' = u' - v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v = v(x) \neq 0)$.

Chú ý

- Quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- Với k là một hằng số, ta có: $(ku)' = ku'$.
- Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}\ (v = v(x) \neq 0)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1$; b) $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' - \left(x^2\right)' + 2(x)' + 1' = \frac{1}{3}.3x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 2$

b) Với mọi $x \neq 1$, ta có: $y' = \dfrac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$

Ví dụ 3. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Lời giải

Phương trình chuyển động của vật là $v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

Vận tốc của vật tại thời điểm t được cho bởi công thức $v(t) = h' = v_0 - gt$.

Vật đạt được độ cao cực đại tại thời điểm $t_1 = \frac{v_0}{g}$, tại đó vận tốc bằng $v(t_1) = v_0 - gt = 0$.

Vật chạm đất tại thời điểm t_2 mà $h(t_2) = 0$ nên ta có:

$$v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 0 \text{ (loại) và } t_2 = \frac{2v_0}{g}.$$

Khi chạm đất, bận tốc của vật là $v(t_2) = v_0 - gt_2 = -v_0 = -20(m/s)$.

Dấu âm của $v(t_2)$ thể hiện độ cao của vật giảm với vận tốc $20(m/s)$ (tức là chiều chuyển động của vật ngược với chiều dương đã chọn).

Luyện tập 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; b) $y = (\sqrt{x}+1)(x^2+2)$.

Lời giải

a) $y' = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \dfrac{(\sqrt{x})'(x+1)-\sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}(1)}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)-2x\sqrt{x}}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$

b) $y' = \left((\sqrt{x}+1)(x^2+2)\right)' = (\sqrt{x}+1)'(x^2+2)+(\sqrt{x}+1)(x^2+2)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+2)+(\sqrt{x}+1)(2x)$

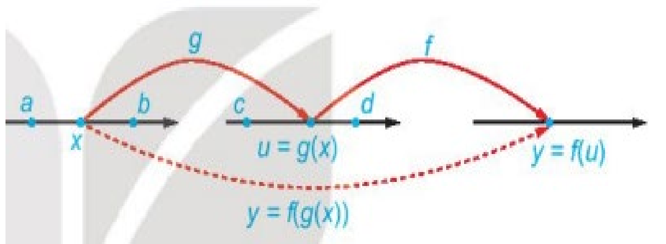
$= \dfrac{x+4\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} + 2x(\sqrt{x}+1) = \dfrac{5x+8\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} + 2x$

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP

a) Khái niệm hàm số hợp

Diện tích của một chiếc đĩa kim loại hình tròn bán kính được cho bởi $S = \pi r^2$. Bán kính r thay đổi theo nhiện độ t của chiếc đĩa, tức là $r = r(t)$. Khi đó, diện tích của chiếc đĩa phụ thuộc nhiệt độ $S = S(t) = \pi(r(t))^2$. Ta nói $S(t)$ là hàm số hợp của hàm số $S = \pi r^2$ với $r = r(t)$

Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a;b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c;d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c;d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Hình 9.8

Ví dụ 4. Biểu diễn hàm số $y = (2x+1)^{10}$ dưới dạng hàm số hợp.

Lời giải

Hàm số $y = (2x+1)^{10}$ là hàm số hợp của hàm số $y = u^{10}$ với $u = 2x+1$.

b) Đạo hàm của hàm số hợp

HĐ4. Nhận biết quy tắc đạo hàm của hàm số hợp

Cho các hàm số $y = u^2$ và $u = x^2 + 1$.

a) Viết công thức của hàm số hợp $y = (u(x))^2$ theo biến x.

b) Tính và so sánh: $y'(x)$ và $y'(u).u'(x)$

Lời giải

a) Ta có $y = u^2$ và $u = x^2 + 1$, suy ra $y = (x^2+1)^2$.

b) Ta có $y = (u(x))^2$, suy ra theo quy tắc chuỗi ta có: $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 2u(x).2x = 4x(x^2+1)$

Và $y'(u) = 2u, u'(x) = 2x,$ suy ra $y'(u).u'(x) = 2u.2x = 4x(x^2+1)$.

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là $y'_x = y'_u.u'_x$.

Ví dụ 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$.

Lời giải

Đặt $u = x^2 + 1$ thì $y = \sqrt{u}$ và $y'_u = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}, u'_x = 2x$.

Theo công thức đạo hàm của hàm số hợp, ta có: $y'(u).u'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Vậy đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau: $y' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Luyện tập 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$; b) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2+2\right)$.

Lời giải

a) $y'(x)=\frac{d}{dx}(2x-3)^{10}=10(2x-3)^9.\frac{d}{dx}(2x-3)=10(2x-3)^9.2=20(2x-3)^9$

b) $y'(x)=\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}=\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

a) Đạo hàm của hàm số $y=\sin x$

HĐ 5. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y=\sin x$

a) Với $h\neq 0$, biến đổi hiệu $\sin\left(x+h\right)-\sin x$ thành tích.

b) Sử dụng đẳng thức giới hạn $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ và kết quả của câu a, tính đạo hàm của hàm số $y=\sin x$ tại điểm x bằng định nghĩa.

Lời giải

a) $\sin(x+h)-\sin(x)=2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)=2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)$

b) Áp dụng định nghĩa, ta có: $y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$

Chia tử và mẫu cho $2\sin\left(\frac{h}{2}\right)$, ta có:

$$y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Áp dụng kết quả của đẳng thức giới hạn, ta có: $y'(x)=\cos(x).1=\cos(x)$

* Hàm số $y=\sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(\sin x\right)'=\cos x$.

* Đối với hàm số hợp $y=\sin u$, với $u=u\left(x\right)$, ta có: $\left(\sin u\right)'=u'.\cos u$.

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$.

Lời giải

Ta có: $y'=\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)'.\cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$

Luyện tập 3. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$.

Lời giải

$$y' = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = f'(g(x)).g'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right).(-3) = -3\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$

b) Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

HĐ 6. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Bằng cách viết $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Lời giải

$y' = \cos x = -\sin x$

* Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

* Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\cos u)' = -u'.\sin u$.

Ví dụ 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

Ta có: $y' = -\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)'.\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -4\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$

Luyện tập 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

Lời giải

$$y' = \left[2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right] = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right).\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right).(-2) = 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

c) Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

HĐ 7. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

a) Bằng cách viết $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$.

b) Sử dụng đẳng thức $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ với $(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$, tính đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Lời giải

a) $(\tan x)' = \frac{\cos x.\sin' x - \sin x.\cos' x}{\cos^2 x}) = \frac{\cos x.\cos x - \sin x.-\sin x}{\cos^2 x}) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

b) $(\cot x)' = \frac{\sin x.(-\cos x) - \cos x.\sin x}{\sin^2 x}) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

* Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

* Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

* Đối với các hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$, với $u = u(x)$, ta có:

$\left(\tan u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \left(\tan u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ (giả thiết $\tan u$ và $\cot u$ có nghĩa).

Ví dụ 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Luyện tập 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\tan^2 x + 3\cot\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

Lời giải

$y' = \left(2\tan^2 x + 3\cot\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right)' = 4\sin x + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - 2\pi\right)$

Vận dụng 1. Một vật chuyển động có phương trình $s(t) = 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)(m)$, với t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc của vật khi $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

$v(t) = s'(t) = -8\pi\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$

Suy ra: $v(5) = -8\pi\sin\left(2\pi.5 - \frac{\pi}{8}\right) \approx 9,62(m/s)$

5. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

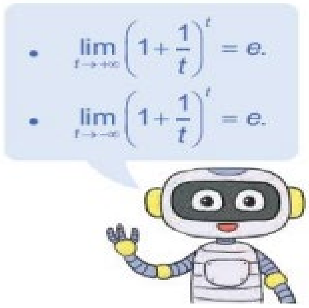
a) Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

HĐ 8. Giới hạn cơ bản của hàm số mũ và hàm số lôgarit

a) Sử dụng phép đổi biến $t=\frac{1}{x}$, tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

b) Với $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, tính $\ln y$ và tìm giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\ln y$.

c) Đặt $t=e^x-1$. Tính x theo t và tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.



Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

b) $\ln y=\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{l(1+x)}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+t)-1}}{\ln(1+t)}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+t)-1}}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{t}{1+t}=0$

Nhận xét. Ta có các giới hạn sau:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

b) Đạo hàm của hàm số mũ

HĐ9. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số mũ

a) Sử dụng giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ và đẳng thức $e^{x+h}-e^x=e^x\left(e^h-1\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y=e^x$ tại x bằng định nghĩa.

b) Sử dụng đẳng thức $a^x=e^{x.\ln a}\ (0<a\neq 1)$, hãy tính đạo hàm của hàm số $y=a^x$.

Lời giải

a) $y'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^e-x^e}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{e\ln(x+h)}-e^{e\ln x}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{e\ln x}e^{e\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}-e^{e\ln x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{e\ln x}\left(e^{e\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}-1\right)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{e\ln x}\left(e^{e\left(\frac{h}{x}+O\left(h^2\right)\right)}-1\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{e\ln x}\left(e^{\frac{e^h}{x}}-1\right)}{h}$

$=e^{e\ln x}\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{\frac{e^h}{x}}-1}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}=x^e\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{h/x}-1}{h/x}\cdot\frac{1}{x}$

$= x^e \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^e}{x}$

b) $y'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{(x+h)\ln a}-e^{x\ln a}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}\left(e^{h\ln a}-1\right)}{h} = a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h\ln a}-1}{h}$

$= a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h\ln a}-1}{h\ln a}.\ln a = a^x.\ln a$

- Hàm số $y=e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(e^x\right)'=e^x$.

Đối với hàm số hợp $y=e^u$, với $u=u(x)$, ta có: $\left(e^u\right)'=u'.e^u$.

- Hàm số $y=a^x\left(0<a\neq 1\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(a^x\right)'=a^x.\ln a$.

Đối với hàm số hợp $y=a^u$, với $u=u(x)$, ta có: $\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$.

Ví dụ 9. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{x^2-x}$

Lời giải

Ta có: $y'=2^{x^2-x}.\left(x^2-x\right)'.\ln 2=2^{x^2-x}.(2x-1).\ln 2$.

Luyện tập 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=e^{x^2-x}$; b) $y=3^{\sin x}$.

Lời giải

a) $y'=(f(g(x)))'=f'(g(x)).g'(x)=e^{g(x)}.(2x-1) = e^{x^2-x}.(2x-1)$

b) $y'=\dfrac{d}{dx}\left(3^{\sin x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(e^{\ln 3.\sin x}\right)=\dfrac{d}{dx}(\ln 3.\sin x).e^{\ln 3.\sin x}=\ln 3.\cos x.3^{\sin x}$

c) Đạo hàm của hàm số lôgarit

HĐ10. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số lôgarit.

a) Sử dụng giới hạn $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ và đẳng thức $\ln(x+h)-\ln x=\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y=\ln x$ tại điểm $x>0$ bằng định nghĩa.

b) Sử dụng đẳng thức $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}\left(0<a\neq 1\right)$, hãy tính đạo hàm của hàm số $y=\log_a x$.

Lời giải

a) $y=\ln x$

Sử dụng đẳng thức $\ln(1+t)=t+o(t)$ khi $t\to 0$, ta có:

$$y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h}$$

Áp dụng giới hạn $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$, ta có: $y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}$

$y'=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}\cdot\dfrac{1}{x}\ \left(t=\dfrac{h}{x}\right)$

$y'=\dfrac{1}{x}$

b) $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

$y'=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right);\quad y'=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{d}{dx}(\ln x)$

Sử dụng kết quả đã tính ở câu a), ta có: $y'=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{x}$ và $y'=\dfrac{1}{x\cdot\ln ax}$

- Hàm số $y=\ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

Đối với hàm số hợp $y=\ln u$, với $u=u(x)$, ta có: $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

- Hàm số $y=\log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x.\ln a}$.

Đối với hàm số hợp $y=\log_a u$, với $u=u(x)$, ta có: $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$.

Chú ý. Với $x<0$, ta có: $\ln|x|=\ln(-x)$ và $[\ln(-x)]'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{1}{x}$. Từ đó ta có: $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x},\forall x\neq 0$

.

Ví dụ 10. Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln(x^2+1)$.

Lời giải

Vì $x^2+1>0$ với mọi x nên hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có: $y'=\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Luyện tập 7. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x-1)$.

Lời giải

$y'=(\log_2(2x-1))'=\dfrac{2}{(2x-1)\ln 2}$

Vận dụng 2. Ta đã biết, độ pH của một dung dịch được xác định bởi $\mathrm{pH}=-\log\left[\mathrm{H}^+\right]$, ở đó $\left[\mathrm{H}^+\right]$ là nồng độ (mol/l) của ion hydrogen. Tính tốc độ thay đổi của pH đối với nồng độ $\left[\mathrm{H}^+\right]$.

Lời giải

Với $pH=-\log\left[H^+\right]$, ta có: $\dfrac{dpH}{d\left[H^+\right]}=\dfrac{d}{d\left[H^+\right]}\left(-\log\left[H^+\right]\right)$.

Sử dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$\frac{dpH}{d\left[H^{+}\right]}=\frac{d}{d\left[H^{+}\right]}\left(-1.\log\left[H^{+}\right]\right)$$

$$\frac{dpH}{d\left[H^{+}\right]}=-1\cdot\frac{d}{d\left[H^{+}\right]}\left(\log\left[H^{+}\right]\right).$$

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm số logarit tổng quát, ta có:

$$\frac{dpH}{d\left[H^{+}\right]}=-1\cdot\frac{1}{\left[H^{+}\right]\ln 10}$$

Vậy tốc độ thay đổi của pH đối với nồng độ $\left[H^{+}\right]$ là: $\frac{dpH}{d\left[H^{+}\right]}=-\frac{1}{\left[H^{+}\right]\ln 10}$

BẢNG ĐẠO HÀM

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sin x\right)' = \cos x$ $\left(\cos x\right)' = -\sin x$ $\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(e^x\right)' = e^x$ $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$ $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x.\ln a}$
$\left(u^n\right)' = n.u^{n-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sin u\right)' = u'.\cos u$ $\left(\cos u\right)' = -u'.\sin u$ $\left(\tan u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $\left(\cot u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$\left(e^u\right)' = e^u.u'$ $\left(a^u\right)' = a^u u'.\ln a$ $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$ $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u.\ln a}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Đạo hàm của hàm đa thức

1. Phương pháp

Chủ yếu ta dùng các công thức sau

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$

$\left(c\right)' = 0;\quad \left(x\right)' = 1.$

$\left(u+v\right)' = u'+v'$

$\left(u-v\right)' = u'-v'$

$\left(uv\right)' = u'v+v'u$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 5$. Tìm x để $y' = 0$

Lời giải

$y = 2x^3 - 3x^2 - 5$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x\left(x-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$. Giải bất phương trình $y' \le 0$.

Lời giải

$y = 3x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow y' = 9x^2 + 2x$

$y' \le 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 2x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \le x \le 0.$

Ví dụ 3: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2+4x;\ g\left(x\right)=9x-\frac{3}{2}x^2$. Tìm x để $f'\left(x\right)=g'\left(x\right)$

Lời giải

$f'\left(x\right)=x+4; g'\left(x\right)=9-3x.$

Do đó $f'\left(x\right)=g'\left(x\right)\Leftrightarrow 4x=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f\left(x\right)=mx-\frac{1}{3}x^3$. Tìm m để $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $f'\left(x\right)<2$

Lời giải

Ta có: $f'\left(x\right)=m-x^2$. Giá trị $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $f'\left(x\right)<2$ khi và chỉ khi: $m-1<2\Leftrightarrow m<3$.

Dạng 2. Đạo hàm của hàm phân thức

1. Phương pháp

Ta thường sử dụng các công thức sau:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ \left(v\neq 0\right)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2},\left(u\neq 0\right).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: $y=\frac{x\left(1-3x\right)}{x+1}$

Lời giải

$$y=\frac{x\left(1-3x\right)}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{\left(1-6x\right)\left(x+1\right)-1\left(x-3x^2\right)}{\left(x+1\right)^2}=\frac{-3x^2-6x+1}{\left(x+1\right)^2}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{2x+3}{2x-1}$

Lời giải

Dùng công thức nhanh: $y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$.

Do đó, với $y=\frac{2x+3}{2x-1}$ thì $y'=-\frac{8}{\left(2x-1\right)^2}$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{x^2+1}$

Lời giải

$$y'=\frac{-\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$?

Lời giải

$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2-1+2}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$

Do đó $y'=\frac{-2\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{x^2+x-1}$

Lời giải

$y'=\frac{-\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2}=\frac{-2x-1}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

Lời giải

$y=\frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}=\frac{x^2+x-1+4}{x^2+x-1}=1+\frac{4}{x^2+x-1}$.

Do đó: $y'=\frac{-4\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2}=\frac{-4(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

Dạng 3. Đạo hàm của hàm chứa căn

1. Phương pháp

Ta thường dùng các công thức sau

Hàm số $y=\sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ngoài ra, đối với hàm hợp $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=4x-\sqrt{x}$. Tìm x để $y'=0$?

Lời giải

$y=4x-\sqrt{x}\Rightarrow y'=4-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'=0\Leftrightarrow 4-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow x=\frac{1}{64}$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=x^3-\sqrt{x}+1$

Lời giải

$y'=3x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3\sqrt{2}x^2+18x-7$. Tìm x để $f'(x)\le 0$

Lời giải

$f'(x)=x^2-6\sqrt{2}x+18=\left(x-3\sqrt{2}\right)^2$.

$f'(x)\le 0\Leftrightarrow\left(x-3\sqrt{2}\right)^2\le 0\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{1+x}$. Tính $f(3)+(x-3).f'(3)$?

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Rightarrow f'(3)=\frac{1}{4}$.

Lại có: $f(3)=2$. Vậy $f(3)+(x-3).f'(3)=2+(x-3).\frac{1}{4}=\frac{x+5}{4}$.

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số: $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$?

Lời giải

Ta có: $y'=\frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{-x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$.

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số: $y=x\sqrt{x^2+1}$?

Lời giải

Ta có: $y'=\sqrt{x^2+1}+x.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số: $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$?

Lời giải

Ta có: $y'=\frac{1}{1-x}\left(\sqrt{1-x}+\frac{1+x}{2\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{1-x}.\frac{2-2x+1+x}{2\sqrt{1-x}}=\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

Dạng 4. Tính Đạo Hàm của các hàm số lượng giác

1. Phương pháp

- Áp dụng quy tắc tính đạo hàm.
- Áp dụng các đạo hàm lượng giác cơ bản.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan 7x$

Hướng dẫn giải

$y'=\frac{(7x)'}{\cos^2 7x}=\frac{7}{\cos^2 7x}$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cos x}$

Hướng dẫn giải

$y'=\frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cos 2x}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}}=\frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin x}$

Hướng dẫn giải

$$y=\sqrt{\sin x}\Rightarrow y'=\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin 3x}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}}=\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 5x$

Hướng dẫn giải

$$y'=2\tan 5x.\frac{(5x)'}{\cos^2 5x}=\frac{10\sin 5x}{\cos^3 5x}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\Rightarrow y'=\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)'.\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right).$$

Ví dụ 8: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 2x\Rightarrow y'=-2\sin 2x.$$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=2\sin 2x+\cos 2x$

Hướng dẫn giải

$$y'=2(\sin 2x)'+(\cos 2x)'=4\cos 2x-2\sin 2x.$$

Ví dụ 10: Cho $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta có $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$. Do đó $f'(x)=-2\sin 2x$.

Vậy $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{MODE}}4$

Nhập vào màn hình $\frac{d}{dx}\left(\left(\cos(X)\right)^2+\left(\sin(X)\right)^2\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả

Ví dụ 11: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos^3 4x$

Hướng dẫn giải

$y=\cos^3 4x \Rightarrow y'=3\cos^2 4x.\left(\cos 4x\right)'=3\cos^2 4x.\left(-4\sin 4x\right)=-12\cos^2 4x.\sin 4x.$

Ví dụ 12: Với $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$ thì $\dfrac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\Rightarrow y'=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

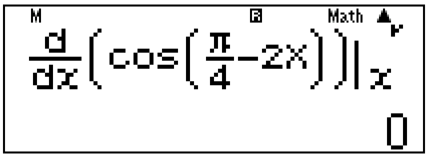
$y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0;\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=0.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{MODE}}4$

Nhập vào màn hình $\dfrac{\frac{d}{dx}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-2X\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{8}}}{\frac{d}{dx}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-2X\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=2\cos\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2$

Ví dụ142: Cho hàm số $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\cos 2x \Rightarrow f'(x)=-2\sin 2x$. Do đó : $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{\tan x+\cot x}$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\frac{(\tan x+\cot x)'}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x+\cot x}} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

Dạng 5: Giải phương trình lượng giác $f'(x)=0$

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x)$
- ✓ Để giải phương trình $f'(x)=0,$ ta áp dụng cách giải các phương trình lượng giác cơ bản và một số phương trình lượng giác thường gặp.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$. Giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn giải

$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right) \Rightarrow y'=\frac{-1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}-k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$.Giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn giải

$y=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right) \Rightarrow y'=-2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}+2x=k\pi$

$\Leftrightarrow 2x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\cot^2\frac{x}{4}$, Giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn giải

$y=\cot^2\frac{x}{4} \Rightarrow y'=2\cot\frac{x}{4}.\left(-\frac{1}{4}\right).\frac{1}{\sin^2\frac{x}{4}}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{4}}{\sin^3\frac{x}{4}}$

$y'=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{4}=0 \Leftrightarrow x=2\pi+k4\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $f'(x)=0,$ biết $f(x)=\cos x-\sin x+x.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = -\sin x - \cos x + 1$.

Vậy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right..$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$. Tìm tập nghiệm của $f'(x) = 0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$

$f'(x) = \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 3x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}.$$

Dạng 6. Tính đạo hàm

1. Phương pháp:

$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x.\ln a$

$(e^u)' = u'e^u \quad (a^u)' = u'a^u.\ln a$

Với mọi $0 < a \neq 1$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a} \quad (\ln u)' = \frac{1}{u}.u'$

Ngoài ra ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra và thử đáp án

2. Các ví dụ rèn luyện lĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x-2)$.

Lời giải

Ta có $y'=\frac{(2x-2)'}{(2x-2)\ln 3}=\frac{1}{(x-1)\ln 3}$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{x+1}{2^x}$

Lời giải

$$y'=\frac{2^x-(x+1)2^x\ln 2}{4^x}=\frac{1-(x+1)\ln 2}{2^x}$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}\ln(x+2)$

Lời giải

$$y'=\frac{-3}{(x-1)^2}\ln(x+2)+\frac{x+2}{x-1}.\frac{1}{x+2}=\frac{-3\ln(x+2)}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=x^2e^{-x}$. Giải bất phương trình $f'(x)\ge 0$

Lời giải

$$f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}\ge 0\Leftrightarrow 2x-x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le 2$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 9.6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+2x+1$; b) $y=x^2-4\sqrt{x}+3$.

Lời giải

a) $y'=\frac{d}{dx}(x^3)-\frac{d}{dx}(3x^2)+\frac{d}{dx}(2x)+\frac{d}{dx}(1)$

$y'=3x^2-6x+2$

b) $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$

$\frac{d}{dx}(cf(x))=cf'(x)$

$y'=\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(4\sqrt{x})+\frac{d}{dx}(3)$

$y'=2x-2\sqrt{x}$

Bài 9.7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\frac{2x-1}{x+2}$; b) $y=\frac{2x}{x^2+1}$.

Lời giải

a) $y'=\frac{(2)(x+2)-(2x-1)(1)}{(x+2)^2}$

$y'=\frac{5}{(x+2)^2}$

b) $y' = \dfrac{(2)\left(x^2+1\right)-(2x)(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}$

$y' = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

Bài 9.8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x\sin^2 x$; b) $y = \cos^2 x + \sin 2x$;

c) $y = \sin 3x - 3\sin x$; d) $y = \tan x + \cot x$.

Lời giải

a) $y' = x\sin 2x + \sin^2 x$ hay $y' = \sin^2 x + x\sin 2x$

b) $y' = -2\sin 2x + 2\cos x$ hay $y' = 2(\cos x - \sin 2x)$

c) $y = \sin 3x - 3\sin x \Rightarrow y' = 3\cos 3x - 3\cos x$

d) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$y' = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

Bài 9.9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2^{3x-x^2}$; b) $y = \log_3(4x+1)$.

Lời giải

a) $y' = 2^{3x-x^2}.\ln 2.(3-2x)$

b) $y' = \dfrac{4}{\ln 3}\cdot\dfrac{1}{4x+1}\cdot 4 = \dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$

Bài 9.10. Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2\left(3x = \dfrac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $\left|f'(x)\right| \le 6$ với mọi x.

Lời giải

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[2\sin^2\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 4\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot 3$

$= 6\sin\left(6x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 6\cos(6x)$

Vì $-1 \le \cos(6x) \le 1$ với mọi x, nên ta có $\left|f'(x)\right| = |6\cos(6x)| \le 6$ với mọi x. Vậy ta đã chứng minh được điều phải chứng minh.

Bài 9.11. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây; b) Khi vật chạm đất.

Lời giải

a) Để tính vận tốc của vật tại thời điểm t, ta cần tính đạo hàm của hàm số $h(t)$ tại thời điểm đó:

$$v(t)=h'(t)=\frac{d}{dt}\left(100-4.9t^2\right)=-9.8t$$

Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t=5$ giây là: $v(5)=-9.8.5=49(\mathrm{m/s})$.

b) Vật chạm đất khi $h(t)=0$, tức là:

$$100-4.9t^2=0\Rightarrow t=\sqrt{\frac{100}{4,9}}$$

$$v_f=\sqrt{2gh_0}=\sqrt{2.9,8.100}=\sqrt{1960}=44,3\,\mathrm{m/s}$$

Bài 9.12. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t)=12+0,5\sin(4\pi t)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Lời giải

Đạo hàm của hàm $s(t)$ theo thời gian t :

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=2\pi\cos(4\pi t)4$$

Ta thấy rằng hàm $v(t)$ là một hàm cosin với biên độ bằng 2π, do đó giá trị lớn nhất của hàm này là 2π. Vậy vận tốc cực đại của hạt là $2\pi\mathrm{cm/s}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x)=0$ là:

A. $\left\{-2\sqrt{2}\right\}$. **B.** $\left\{2;\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\left\{-4\sqrt{2}\right\}$. **D.** $\left\{2\sqrt{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4\sqrt{2}x+8=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$, có đạo hàm là y'. Để $y'\le 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. $\left[-\frac{2}{9};0\right]$. **B.** $\left[-\frac{9}{2};0\right]$.

C. $\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right]\cup[0;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{2}{9}\right]\cup[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=9x^2+2x$.

Do đó, $y' \le 0 \Leftrightarrow y' = 9x^2 + 2x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \le x \le 0 x \in \left[-\frac{2}{9};0\right]$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 4$. **B.** $f'(-1) = 14$. **C.** $f'(-1) = 15$. **D.** $f'(-1) = 24$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2$.

Suy ra $f'(-1) = -4(-1)^3 + 12(-1)^2 - 6(-1) + 2 = 24$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 - mx - 4$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để $y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \left(-1;-\frac{1}{4}\right)$. **B.** $m \in \left[-1;-\frac{1}{4}\right]$.

C. $m \in (-\infty;-1] \cup \left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m \in \left[-1;\frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2(2m+1)x - m$.

Khi đó, $y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x - m \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \le 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le -\frac{1}{4}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1 + \sqrt{2}$; $m = -1 - \sqrt{2}$. **B.** $m = -1 - \sqrt{2}$.

C. $m = 1 - \sqrt{2}$; $m = 1 + \sqrt{2}$. **D.** $m = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -mx^2 + 2(m-1)x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2(m-1)}{m}\right)^2 - 2 = 6$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}$.

So với điều kiện thì $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a > 0)$ có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a > 0$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Câu 7: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a < 0)$ có đạo hàm $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a < 0$ và $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$

Câu 8: Tính đạo hàm của của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$.

A. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$. **B.** $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.

C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. **D.** $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 2(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2) = 2(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Câu 9: Cho hàm số $y = (2x^2 + 1)^3$, có đạo hàm là y'. Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

A. Không có giá trị nào của x.

B. $(-\infty; 0]$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3(2x^2 + 1)'(2x^2 + 1)^2 = 3.4x(2x^2 + 1)^2 = 12x(2x^2 + 1)^2$.

Do đó, $y' \geq 0 \Leftrightarrow 12x\left(2x^2+1\right)^2 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(1-x^3\right)^5$.

A. $y'=5x^2\left(1-x^3\right)^4$.

B. $y'=-15x^2\left(1-x^3\right)^4$.

C. $y'=-3x^2\left(1-x^3\right)^4$.

D. $y'=-5x^2\left(1-x^3\right)^4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=5\left(1-x^3\right)'\left(1-x^3\right)^4=5\left(-3x^2\right)\left(1-x^3\right)^4=-15x^2\left(1-x^3\right)^4$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^3-2x^2\right)^{2016}$.

A. $y'=2016\left(x^3-2x^2\right)^{2015}$.

B. $y'=2016\left(x^3-2x^2\right)^{2015}\left(3x^2-4x\right)$.

C. $y'=2016\left(x^3-2x^2\right)\left(3x^2-4x\right)$.

D. $y'=2016\left(x^3-2x^2\right)\left(3x^2-2x\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=2016\left(x^3-2x^2\right)'\left(x^3-2x^2\right)^{2015}=2016\left(3x^2-4x\right)\left(x^3-2x^2\right)^{2015}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2-2\right)\left(2x-1\right)$.

A. $y'=4x$. **B.** $y'=3x^2-6x+2$. **C.** $y'=2x^2-2x+4$. **D.** $y'=6x^2-2x-4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\left(x^2-2\right)'\left(2x-1\right)+\left(x^2-2\right)\left(2x-1\right)'=2x\left(2x-1\right)+2\left(x^2-2\right)=6x^2-2x-4$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-2018\right)$ tại điểm $x=0$.

A. $f'\left(0\right)=0$. **B.** $f'\left(0\right)=-2018!$. **C.** $f'\left(0\right)=2018!$. **D.** $f'\left(0\right)=2018$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f\left(x\right)=f_0\left(x\right)f_1\left(x\right)f_2\left(x\right)...f_n\left(x\right)$ $\left(n\geq 1; n\in\mathbb{Z}\right)$.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$f'\left(x\right)=f_0'\left(x\right)f_1\left(x\right)...f_n\left(x\right)+f_0\left(x\right)f_1'\left(x\right)...f_n\left(x\right)+...+f_0\left(x\right)f_1\left(x\right)...f_n'\left(x\right)$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f\left(x\right)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-2018\right)$ và thay $x=0$ với chú ý $f_0\left(0\right)=0$ ta được:

$f'\left(0\right)=\left(-1\right).\left(-2\right)...\left(-2018\right)+0.\left(-2\right)....\left(-2018\right)+0.\left(-1\right)...\left(-2017\right)=2018!$.

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x(x+1)(x+2)...(x+2018)$ tại điểm $x=-1004$.

A. $f'(-1004)=0$. **B.** $f'(-1004)=1004!$.

C. $f'(-1004)=-1004!$. **D.** $f'(-1004)=(1004!)^2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=f_0(x)f_1(x)f_2(x)...f_n(x)$ $(n\geq 1; n\in\mathbb{Z})$.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x)=f_0'(x)f_1(x)...f_n(x)+f_0(x)f_1'(x)...f_n(x)+...+f_0(x)f_1(x)...f_n'(x).$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x)=x(x+1)(x+2)...(x+2018)$ và thay $x=-1004$ với chú ý $f_{1004}(-1004)=0$ ta được

$$f'(-1004)=\left[(-1004).(-1004+1)...(-1004+1003)\right].\left[(-1004+1005)...(-1004+2018)\right]$$
$$=(-1).1.(-2).2.....(-1004).1004=(1004!)^2.$$

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=1$. **B.** $f'(-1)=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $f'(-1)=-2$. **D.** $f'(-1)=0$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(-1)=-\dfrac{1}{2}$

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$.

A. $y'=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$. **C.** $y'=\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x-\dfrac{3}{x+2}\Rightarrow y'=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}$.

A. $y'=\dfrac{-9x^2-4x+1}{(x+1)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$. **C.** $y'=1-6x^2$. **D.** $y'=\dfrac{1-6x^2}{(x+1)^2}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}=\dfrac{x-3x^2}{x+1}$

$\Rightarrow y'=\dfrac{(x-3x^2)'(x+1)-(x-3x^2)(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{(1-6x)(x+1)-(x-3x^2)}{(x+1)^2}=\dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x)>0$.

A. $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $x\in\varnothing$. **C.** $x\in(1;+\infty)$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(1-3x+x^2)'(x-1)-(1-3x+x^2)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(-3+2x)(x-1)-(1-3x+x^2)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$.

Bất phương trình $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+2>0\\x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x)=0$ có tập nghiệm S là:

A. $S=\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\dfrac{2}{3};0\right\}$. **C.** $S=\left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\dfrac{3}{2};0\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{(x^3)'(x-1)-x^3(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^3-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Câu 20: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-2x^2+x-7}{x^2+3}$.

A. $y'=\dfrac{-3x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-x^2+x+3}{(x^2+3)^2}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

C. $y'=\dfrac{-x^2+2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{-7x^2-13x-10}{\left(x^2+3\right)^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{\left(-2x^2+x-7\right)'\left(x^2+3\right)-\left(x^2+3\right)'\left(-2x^2+x-7\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$

$y'=\dfrac{\left(-4x+1\right)(x^2+3)-2x.\left(-2x^2+x-7\right)}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

Câu 21: Cho hàm số $y=-2\sqrt{x}+3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y'>0$ là:

A. $S=\left(-\infty;+\infty\right)$. **B.** $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{9}\right)$. **C.** $S=\left(\dfrac{1}{9};+\infty\right)$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=-2\sqrt{x}+3x\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{\sqrt{x}}+3$.

Do đó $y'>0\Leftrightarrow\dfrac{-1}{\sqrt{x}}+3>0\Leftrightarrow 3>\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{9}$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x-1}$ tại điểm $x=1$.

A. $f'\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $f'\left(1\right)=1$. **C.** $f'\left(1\right)=0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Tại $x=1$ thì $f'\left(x\right)$ không xác định.

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{1-2x^2}$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. **B.** $y'=\dfrac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **C.** $y'=\dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **D.** $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{\left(1-2x^2\right)'}{2\sqrt{1-2x^2}}=\dfrac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}=\dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-4x^3}$.

A. $y'=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **C.** $y'=\dfrac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **D.** $y'=\dfrac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{2x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x)\ge f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Khi đó, $f'(x)\ge f(x)\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\ge\sqrt{x^2-2x}$

$\Leftrightarrow x-1\ge x^2-2x\Leftrightarrow x^2-3x+1\le0\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt5}{2}\le x\le\dfrac{3+\sqrt5}{2}$

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{1;2\}\Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên.

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{x}$.

A. $f'(x)=\dfrac12\sqrt{x}$. **B.** $f'(x)=\dfrac32\sqrt{x}$. **C.** $f'(x)=\dfrac12\dfrac{\sqrt{x}}{x}$. **D.** $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x'.\sqrt{x}+x.\left(\sqrt{x}\right)'=\sqrt{x}+x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=\dfrac32\sqrt{x}$.

Câu 27: Tính đạo hàm của hàm số $y=x\sqrt{x^2-2x}$.

A. $y'=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$. **C.** $y'=\dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$. **D.** $y'=\dfrac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\sqrt{x^2-2x}+x.\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x^2-2x+x^2-x}{\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Câu 28: Tính đạo hàm của hàm số $y=(2x-1)\sqrt{x^2+x}$.

A. $y'=2\sqrt{x^2+x}-\dfrac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **B.** $y'=2\sqrt{x^2+x}+\dfrac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y'=2\sqrt{x^2+x}+\dfrac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **D.** $y'=2\sqrt{x^2+x}+\dfrac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=(2x-1)'.\sqrt{x^2+x}+(2x-1).\left(\sqrt{x^2+x}\right)'$

$=2.\sqrt{x^2+x}+\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}=2\sqrt{x^2+x}+\dfrac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Câu 29: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y'=\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y'=\dfrac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y'=-\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\dfrac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\dfrac{-\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$

$=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$.

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **C.** $y'=\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **D.** $y'=\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{(x-1)'.\sqrt{x^2+1}-(x-1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$=\frac{x^2+1-x^2+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y'=\frac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

B. $y'=\frac{1}{2}.\frac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y'=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

D. $y'=\frac{1}{2}.\frac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}}.\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)'=\frac{1}{2}.\frac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

Câu 32: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

A. $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.

B. $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$.

C. $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

D. $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.

Câu 33: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

A. $y'=-\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}$.

B. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}$.

C. $y'=\frac{1}{4\sqrt{x+1}}+\frac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

D. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{x+1}}+\frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$$

Câu 34: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$ tại điểm $x=0$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=\dfrac{1}{2}$. **C.** Không tồn tại. **D.** $f'(0)=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(3x^2+2x+1\right)'.2\sqrt{3x^3+2x^2+1}-\left(3x^2+2x+1\right).\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)'}{\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)^2}$

$$=\frac{(6x+2)2\sqrt{3x^3+2x^2+1}-\left(3x^2+2x+1\right)\dfrac{9x^2+4x}{\sqrt{3x^3+2x^2+1}}}{\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)^2}=\frac{9x^4+6x^3-9x^2+8x+4}{4\left(3x^3+2x^2+1\right)\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$$

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Câu 35: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{a^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y'=\dfrac{a^3x}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}$. **B.** $y'=\dfrac{a^3x}{a^2-x^2}$.

C. $y'=\dfrac{a^3x}{2\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}$. **D.** $y'=\dfrac{a^3\left(3a^2-2x\right)}{2\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-a^3\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'}{a^2-x^2}=\dfrac{-a^3(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}.\left(a^2-x^2\right)}=\dfrac{a^3x}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}$.

Câu 36: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

A. $y'=3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$. **B.** $y'=-3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

C. $y'=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$. **D.** $y'=-3sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)'.\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3.\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

A. $y' = x\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

B. $y' = \frac{1}{2}x^2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

C. $y' = \frac{1}{2}x\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

D. $y' = \frac{1}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -\frac{1}{2}.\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)'.\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = -\frac{1}{2}.(-2x).\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = x.\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

A. $y' = \cos\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

B. $y' = (2x - 3).\sin\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

C. $y' = (2x - 3).\cos\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

D. $y' = -(2x - 3).\cos\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \left(x^2 - 3x + 2\right)'.\cos\left(x^2 - 3x + 2\right) = (2x - 3).\cos\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

Câu 39: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2\tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x\tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x\tan x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \left(x^2\right)'\tan x + (\tan x)'.x^2 + \left(\sqrt{x}\right)' = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos x^2$.

A. $y' = -2\sin x^2$.

B. $y' = -4x\cos x^2$.

C. $y' = -2x\sin x^2$.

D. $y' = -4x\sin x^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -2.\left(x^2\right)'.\sin x^2 = -2.2x.\sin x^2 = -4x\sin x^2$.

Câu 41: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan\frac{x+1}{2}$.

A. $y'=\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$. **B.** $y'=\frac{1}{\cos^2\frac{x+1}{2}}$. **C.** $y'=-\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$. **D.** $y'=-\frac{1}{\cos^2\frac{x+1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\left(\tan\frac{x+1}{2}\right)'=\frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)'}{\cos^2\frac{x+1}{2}}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$.

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\sqrt{2+x^2}$.

A. $y'=\frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$. **B.** $y'=-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

C. $y'=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$. **D.** $y'=\frac{x+1}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left(\sqrt{2+x^2}\right)'\cos\sqrt{2+x^2}=\frac{\left(2+x^2\right)'}{2\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\sqrt{2x+1}$.

A. $y'=-\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **B.** $y'=\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **C.** $y'=-\sin\sqrt{2x+1}$. **D.** $y'=-\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-\left(\sqrt{2x+1}\right)'\sin\sqrt{2x+1}=\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}\sin\sqrt{2x+1}=-\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

Câu 44: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cot\sqrt{x^2+1}$.

A. $y'=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y'=-\frac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y'=\frac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin(\sin x)$.

A. $y'=\cos(\sin x)$. **B.** $y'=\cos(\cos x)$.

C. $y'=\cos x.\cos(\sin x)$. **D.** $y'=\cos x.\cos(\cos x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\left[\sin(\sin x)\right]'=(\sin x)'.\cos(\sin x)=\cos x.\cos(\sin x)$.

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos(\tan x)$.

A. $y'=\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **B.** $y'=-\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y'=\sin(\tan x)$. **D.** $y'=\sin(\tan x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=-(\tan x)'\sin(\tan x)=-\dfrac{1}{\cos^2 x}.\sin(\tan x)$.

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $y=2\sin^2 x-\cos 2x+x$.

A. $y'=4\sin x+\sin 2x+1$. **B.** $y'=4\sin 2x+1$.

C. $y'=4\cos x+2\sin 2x+1$. **D.** $y'=4\sin x-2\sin 2x+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=2.2(\sin x)'.\sin x+(2x)'\sin 2x+1=4\cos x\sin x+2\sin 2x+1$

$=2\sin 2x+2\sin 2x+1=4\sin 2x+1$

Câu 48: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{4}$.

A. $y'=-2\sin(\pi-4x)+\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $y'=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\dfrac{\pi}{2}$.

C. $y'=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\dfrac{\pi}{2}x$. **D.** $y'=-2\sin(\pi-4x)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1-\cos(\pi-4x)}{2}+\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{4}$

$=-\dfrac{1}{2}\cos(\pi-4x)+\dfrac{\pi}{2}x+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Suy ra $y'=\left(-\frac{1}{2}\cos(\pi-4x)+\frac{\pi}{2}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)'$

$=\frac{1}{2}(\pi-4x)'\sin(\pi-4x)+\frac{\pi}{2}=-2\sin(\pi-4x)+\frac{\pi}{2}$.

Câu 49: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos^3(2x-1)$.

A. $y'=-3\sin(4x-2)\cos(2x-1)$.
B. $y'=3\cos^2(2x-1)\sin(2x-1)$.
C. $y'=-3\cos^2(2x-1)\sin(2x-1)$.
D. $y'=6\cos^2(2x-1)\sin(2x-1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\left[\cos^3(2x-1)\right]'=3\cos^2(2x-1)\left[\cos(2x-1)\right]'$

$=-6\sin(2x-1)\cos^2(2x-1)$

$=-3\left[2\sin(2x-1)\cos(2x-1)\right]\cos(2x-1)=-3\sin(4x-2)\cos(2x-1)$.

Câu 50: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin^3(1-x)$.

A. $y'=\cos^3(1-x)$.
B. $y'=-\cos^3(1-x)$.
C. $y'=-3\sin^2(1-x).\cos(1-x)$.
D. $y'=3\sin^2(1-x).\cos(1-x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[\sin^3(1-x)\right]'=3.\left[\sin(1-x)\right]'.\sin^2(1-x)=-3.\cos(1-x).\sin^2(1-x)$.

Câu 51: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan^3 x+\cot 2x$.

A. $y'=3\tan^2 x.\cot x+2\tan 2x$.
B. $y'=-\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sin^2 2x}$.
C. $y'=3\tan^2 x-\frac{1}{\sin^2 2x}$.
D. $y'=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\left(\tan^3 x+\cot 2x\right)'=3\tan^2 x(\tan x)'-\frac{2}{\sin^2 2x}=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}$

Câu 52: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

A. $y'=\frac{-\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$.
B. $y'=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$.
C. $y'=\frac{2-2\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$.
D. $y'=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

Suy ra $y'=-\dfrac{1}{\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{1}{\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}.$

Câu 53: Tính đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y'=\dfrac{4x}{\sin^2(1-2x)}$. **B.** $y'=\dfrac{-4}{\sin(1-2x)}$. **C.** $y'=\dfrac{-4x}{\sin^2(1-2x)}$. **D.** $y'=\dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-\dfrac{-2\left(\tan(1-2x)\right)'}{\tan^2(1-2x)}=\dfrac{-4.\dfrac{1}{\cos^2(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)}=\dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$

Câu 54: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\cos 2x}{3x+1}$.

A. $y'=\dfrac{-2(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-2(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{3x+1}$.

C. $y'=\dfrac{-(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{2(3x+1)\sin 2x+3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{(\cos 2x)'(3x+1)-(3x+1)'.cos2x}{(3x+1)^2}=\dfrac{-2(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{(3x+1)^2}.$

Câu 55: Cho $f(x)=2x^2-x+2$ và $g(x)=f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

A. $g'(x)=2\cos 2x-\sin x.$ **B.** $g'(x)=2\sin 2x+\cos x.$

C. $g'(x)=2\sin 2x-\cos x.$ **D.** $g'(x)=2\cos 2x+\sin x.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)=f(\sin x)=2\sin^2 x-\sin x+2$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$\Rightarrow g'(x)=\left(2\sin^2 x-\sin x+2\right)'=2.2\sin x.\cos x-\cos x=2\sin 2x-\cos x.$

Câu 56: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=5\sin x-3\cos x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3.$ **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3.$ **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-5.$ **D.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=(5\sin x-3\cos x)'=5(\sin x)'-3(\cos x)'=5\cos x+3\sin x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5\cos\frac{\pi}{2}+3\sin\frac{\pi}{2}=3$

Câu 57: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=2\sin\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)$ tại điểm $x=-\frac{\pi}{5}$.

A. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=4.$ **B.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-4.$ **C.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=2.$ **D.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\left[2\sin\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)\right]'=2\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)'\cos\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)=-4\cos\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)$.

Suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-4\cos\left(\frac{3\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)=-4\cos\pi=4$.

Câu 58: Hàm số $f(x)=x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=2x+\sin\frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{f'(1)}{g'(1)}$.

A. $P=\frac{4}{3}.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=-2.$ **D.** $P=-\frac{4}{3}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4x^3$ và $g'(x)=\left(2x+\sin\frac{\pi x}{2}\right)'=2+\frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi x}{2}$.

Suy ra $P=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{4}{2+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}=2.$

Câu 59: Hàm số $f(x)=4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=4x+\sin\frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{f'(2)}{g'(2)}$.

A. $P=1.$ **B.** $P=\frac{16}{16+\pi}.$ **C.** $P=\frac{16}{17}.$ **D.** $P=\frac{1}{16}.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=4$ và $g'(x)=4+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}$.

Suy ra $P=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{4}{4+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi.2}{4}}=1$

Câu 60: Hàm số $f\left(x\right)=a\sin x+b\cos x+1$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)$. Để $f'\left(0\right)=\frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\frac{\sqrt{2}}{2};b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $a=\frac{1}{2};b=-\frac{1}{2}$. **D.** $a=b=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'\left(x\right)=a\cos x-b\sin x$. Khi đó $\begin{cases}f'\left(0\right)=\frac{1}{2}\\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cos 0-b\sin 0=\frac{1}{2}\\ a\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Câu 61: Cho hàm số $y=f\left(x\right)-\cos^2 x$ với $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $y'\left(x\right)=1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. $f\left(x\right)=x+\frac{1}{2}\cos 2x.$ **B.** $f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}\cos 2x.$

C. $f\left(x\right)=x-\sin 2x.$ **D.** $f\left(x\right)=x+\ \sin 2x.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'\left(x\right)=f'\left(x\right)+2\sin x\cos x=f'\left(x\right)+\sin 2x$.

Suy ra $y'\left(x\right)=1\Leftrightarrow f'\left(x\right)+\sin 2x=1\Leftrightarrow f'\left(x\right)=1-\sin 2x.$

Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có

$f'\left(x\right)=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)'=x'+\frac{1}{2}\left(\cos 2x\right)'=1-\sin 2x$ (thỏa mãn)

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 62: Cho hàm số $y=\cos^2 x+\sin x$. Phương trình $y'=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$y'=-2\cos x\sin x+\cos x=\cos x(1-2\sin x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.;(k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

Câu 63: Cho hàm số $y=(m+1)\sin x+m\cos x-(m+2)x+1$. Tìm giá trị của *m* để $y'=0$ có nghiệm?

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 3\end{array}\right.$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $-1\le m\le 3$. **D.** $m\le -2$.

Lời giải

Chọn A

$y'=(m+1)\cos x-m\sin x-(m+2)$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow(m+1)\cos x-m\sin x=(m+2)$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$

$$\Leftrightarrow(m+1)^2+m^2\ge(m+2)^2\Leftrightarrow m^2-2m-3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 3\end{array}\right.$$

Câu 64: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)=0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 3 điểm. **D.** 4 điểm.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x)=\frac{-\sin x.\sqrt{\cos 2x}-\cos x\dfrac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x}=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)=-\cos x+\sin x-\cos 2x$. Phương trình $f'(x)=1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. **B.** $\sin x-1=0$.

C. $(\sin x-1)(\cos x-1)=0$. **D.** $\cos x=0$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$

Đặt $t = \sin x + \cos x \quad \left(|t| \le \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \quad (1) \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x) = 2\dfrac{\cos^3 x}{3} + \sin^3 x - 2\cos x - 3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = 2\sin^3 x - 3\cos^3 x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 67: Hàm số $y = 8^{x^2+x+1}(6x+3)\ln 2$ là đạo hàm của hàm số nào sau đây?

A. $y = 8^{x^2+x+1}$ **B.** $y = 2^{x^2+x+1}$ **C.** $y = 2^{3x^2+3x+1}$ **D.** $y = 8^{3x^2+3x+1}$

Lời giải

Chọn A

Câu 68: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{9^x}$

A. $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$. **B.** $y' = \dfrac{1 - (x+1)\ln 3}{3^{2x}}$.

C. $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 9}{3^x}$. **D.** $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 3}{3^x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x+1)'.9^x - (9^x)'.(x+1)}{9^{2x}} = \frac{9^x - 9^x(x+1)\ln 9}{9^{2x}} = \frac{1 - 2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$$

Câu 69: Cho hàm số $y = \log_3(2x+1)$, ta có:

A. $y' = \dfrac{1}{2x+1}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 3}$. **C.** $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$. **D.** $y' = \dfrac{2}{2x+1}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn C

Câu 70: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$ là:

A. $y'=-\dfrac{\ln 2}{x\ln^2 x}$. **B.** $y'=\dfrac{\ln 2}{x\ln^2 x}$. **C.** $y'=-\dfrac{x\ln 2}{\log_2^2 x}$. **D.** $y'=\dfrac{x\ln 2}{\log_2^2 x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y'=-\dfrac{(\log_2 x)'}{\ln^2 x}=-\dfrac{\ln 2}{x\ln^2 x}$$

Câu 71: Kết quả tính đạo hàm nào sau đây **sai**?

A. $(3^x)'=3^x\ln 3$ **B.** $(10^x)'=10^x\ln 10$ **C.** $(\log_3 x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$ **D.** $(e^{2x})'=e^{2x}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(e^{2x})'=2e^{2x}$, suy ra **D** sai.

Câu 72: Đạo hàm của hàm số $y=(2x+1)\ln(1-x)$ là.

A. $2\ln(1-x)-\dfrac{2x+1}{1-x}$. **B.** $2x\ln(x-1)$.

C. $\dfrac{2x+1}{1-x}+2x$. **D.** $2\ln(1-x)+\dfrac{2x+1}{1-x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y'=(2x+1)'.\ln(1-x)+(2x+1).(\ln(1-x))'=2.\ln(1-x)+(2x+1).\dfrac{-1}{(1-x)}$$

$$=2\ln(1-x)-\dfrac{2x+1}{1-x}$$

Câu 73: Đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(\dfrac{x-1}{\ln x}\right)$ là:

A. $\dfrac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2}$. **B.** $\dfrac{x\ln x+1-x}{(x-1)\ln x\ln 2}$. **C.** $\dfrac{x\ln x+1-x}{(x-1)\ln 2}$. **D.** $\dfrac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2.\ln x}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\dfrac{\left(\dfrac{x-1}{\ln x}\right)'}{\dfrac{x-1}{\ln x}\ln 2}=\dfrac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2.\ln x}$.

Câu 74: Cho hàm số $f(x)=2^{x^2+a}$ và $f'(1)=2ln2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2<a<0$ **B.** $0<a<1$ **C.** $a>1$ **D.** $a<-2$

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $f'(x)=2x.2^{x^2+a}\ln 2 \Rightarrow f'(1)=2\ln 2.2^{a+1}=2\ln 2 \Rightarrow 2^{a+1}=1 \Rightarrow a=-1$

Câu 75: Cho hàm số $y=\ln\frac{1}{x}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $e^y+y'=0$ **B.** $e^y-y'=0$ **C.** $e^y.y'=0$ **D.** $e^y.y'=\frac{1}{x^2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{x}\right)'=x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}$, $e^y=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x} \Rightarrow y'+e^y=0$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

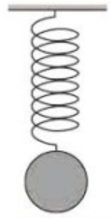
BÀI 33. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau:

$$x(t) = 4\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right),$$

ở đó x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 9.9

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM CẤP HAI

HĐ1. Nhận biết đạo hàm cấp hai của một hàm số

a) Gọi $g(x)$ là đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Tính $g(x)$.

b) Tính đạo hàm của hàm số $y = g(x)$

Lời giải

a) Với hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, ta có:

$y' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ đạo hàm cấp hai của y :

$y'' = \left[2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]' = -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) Giả sử $g(x)$ là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

Ta có: $g(x) = f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Để tính đạo hàm của hàm số $y = g(x)$, ta tính đạo hàm của $g(x)$ theo công thức:

$g'(x) = -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a;b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^2 + e^{2x-1}$. Từ đó tính $y''(0)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 2x + (2x-1)'.e^{2x-1} = 2x + 2.e^{2x-1}$;

$y'' = 2 + 2(2x-1)'.e^{2x-1} = 2 + 4.e^{2x-1}$.

Vậy đạo hàm cấp hai của hàm số đã cho là $y'' = 2 + 4e^{2x-1}$.

Khi đó ta có: $y''(0) = 2 + 4e^{-1}$.

Luyện tập 1. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) $y = x.\, e^{2x}$ b) $y = \ln\ (2x+3)$.

Lời giải

a) $y' = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x+1)e^{2x}$

$y = xe^{2x}$ là $y'' = 2(2x+2)e^{2x}$

b) $y' = \dfrac{2}{2x+3}; y'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{2x+3}\right) = \dfrac{-4}{(2x+3)^2}$

2.Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Xét một chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$. Cho số gia Δt tại t và $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$. Tỉ số $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ gọi là gia tốc trung bình trong khoảng thời gian Δt. Giới hạn của gia tốc trung bình (nếu có) khi Δt dần tới 0 được gọi là gia tốc tức thời của chuyền động tại thời điểm t, kí hiệu là $a(t)$.

Như vậy $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$

HĐ2. Nhận biết ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét một chuyển động có phương trình $s = 4\cos 2\pi t$.

a) Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

b) Tính gia tốc tức thời tại thời điểm t.

Lời giải

a) Để tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t, ta tính đạo hàm cấp nhất của $s(t)$ theo t:

$v(t) = \dfrac{ds}{dt} = -8\pi\sin(2\pi t)$ b) Để tính gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t, ta tính đạo hàm cấp hai của $s(t)$ theo t :

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt} = -16\pi^2\cos(2\pi t)$$

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$

Ví dụ 2. Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là

$$v(t) = x'(t) = -\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)'.4\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -8\pi\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t là

$$a(t) = v'(t) = -8\pi\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)'.\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Tại thời điểm $t = 5$, gia tốc của vật là

$a(5)=-16\pi^2\cos\left(10\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-16\pi^2\cos\frac{\pi}{3}\approx-79\left(\mathrm{cm}/\mathrm{s}^2\right)$.

Vận dụng. Một vật chuyển động thẳng có phương trình $s=2t^2+\frac{1}{2}t^4$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t=4$ giây.

Lời giải

Đạo hàm cấp một của $s(t)$ theo t : $v(t)=4t^3+2t$

Đạo hàm cấp hai của $s(t)$ theo t : $a(t)=12t^2+2$

Vậy, gia tốc của vật tại thời điểm $t=4$ giây là: $a(4)=12(4)^2+2=194\left(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số $y=f(x)$

1. Phương pháp

- ✓ **Tính đạo hàm cấp 1:** $f'(x)$
- ✓ **Tính đạo hàm cấp 2:** $f''(x)=[f'(x)]'$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$

Hướng dẫn giải

$f(x)=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$ thì $f'(x)=4x^4-6x-1$, do đó: $f''(x)=16x^3-6.$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\cos 2x$

Hướng dẫn giải

$y=\cos 2x$ thì $y'=-2\sin 2x$. Do đó $y''=-4\cos 2x$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Giải $f''(x)\ge 0$

Hướng dẫn giải

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$ thì $f'(x)=x^2+x-12; f''(x)=2x+1.$

Do đó $f''(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{x+1}$. Tính y''?

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y''=\frac{2}{(x+1)^3}.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+4}$. Tính $M=2(y')^2+(1-y).y''$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\frac{7}{(x+4)^2}\Rightarrow y''=-\frac{14}{(x+4)^3}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lại có $1-y=1-\frac{x-3}{x+4}=\frac{7}{x+4}$

Vậy: $M=2(y')^2+(1-y).y''=2.\frac{49}{(x+4)^4}+\frac{7}{x+4}.\left(-\frac{14}{(x+4)^3}\right)=0.$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$. Tính $y'^2-2y.y''$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=x+1\Rightarrow y''=1$.

Vậy: $y'^2-2y.y''=(x+1)^2-2\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right).1=x^2+2x+1-x^2-2x-2=-1.$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=x\sin x$. Tính $xy-2(y'-\sin x)+xy''$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\sin x+\cos x\Rightarrow y''=\cos x+(\cos x-x\sin x)=2\cos x-x\sin x$.

Vậy:

$xy-2(y'-\sin x)+xy''=x^2\sin x-2(\sin x+x\cos x-\sin x)+2x\cos x-x^2\sin x=0.$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=A\sin(\omega x+\varphi)$. Tính $M=y''+\omega^2.y$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=A\omega\cos(\omega x+\varphi)\Rightarrow y'=-A\omega^2\sin(\omega x+\varphi)$

$\Rightarrow y''+\omega^2y=-A\omega^2\sin(\omega x+\varphi)+A\omega^2\sin(\omega x+\varphi)=0.$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\sin 2x-\cos 2x$. Giải phương trình $y''=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=2\cos 2x+2\sin 2x\Rightarrow y''=-4\sin 2x+4\cos 2x$.

Phương trình $y''=0\Leftrightarrow -4\sin 2x+4\cos 2x=0\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y=(m-4)\frac{x^2}{2}+\cos x$.

Tìm m sao cho $y''\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=(m-4)x-\sin x\Rightarrow y''=m-4-\cos x$

$y''\le 0\Leftrightarrow m-4-\cos x\le 0\Leftrightarrow \cos x\ge m-4\,(*)$

Vì $\cos x\ge -1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow -1\ge m-4\Leftrightarrow m\le 3$.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=\frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y''>0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow y''=\frac{2}{(1-x)^3}$.

Vậy $y''>0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(1-x)^3}>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$.

Ví dụ 12 : Hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+3x+2}{x-1}$ có $f''(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-1)^3}$. Tính $S=a-b+c-2d$.

Lời giải

Ta có : $f(x)=\dfrac{x^3+3x+2}{x-1}=x^2+x+4+\dfrac{6}{x-1}$.

$\Rightarrow f'(x)=2x+1-\dfrac{6}{(x-1)^2}$.

$\Rightarrow f''(x)=2+\dfrac{12}{(x-1)^3}=\dfrac{2(x-1)^3+12}{(x-1)^3}=\dfrac{2x^3-6x^2+6x+10}{(x-1)^3}$.

$\Rightarrow a=2,\ b=-6,\ c=6,\ d=10$.

Do đó $S=a-b+c-2d=-6$.

Dạng 2: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai

1. Phương pháp

Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s=f(t)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : $s=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động khi $t=3$.

Lời giải

- Gia tốc chuyển động tại $t=3s$ là $s''(3)$
- Ta có: $s'(t)=3t^2-6t+5$
- $s''(t)=6t-6 \Rightarrow s''(3)=12m/s^2$.

Câu 2: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S=-t^3+3t^2+9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải

- Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:
  $v=S'=-3t^2+6t+9$
- Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a=S''=-6t+6$
- Gia tốc triệt tiêu khi $S''=0 \Leftrightarrow t=1$.

- Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(1)=12\,\mathrm{m/s}$.

Câu 3: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t$ có đồ thị là Parabol, do đó $v(t)_{\max} \Leftrightarrow t=\dfrac{-12}{-6}=2.$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 9.13. Cho hàm số $f(x)=x^2e^x$. Tính $f''(0)$.

Lời giải

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=\left(x^2+2x\right)e^x$

Tính giá trị của $f'(x)$ tại điểm $x=0$: $f'(0)=\left(0^x+2.0\right)e^0=0.1=0$

Bài 9.14. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\ln(x+1)$; b) $y=\tan 2x$.

Lời giải

a) $y'=\dfrac{1}{x+1}$

$y''=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

b) $y'=2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}(2x)$

$y''=8\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\tan(2x)=8\left(1+\tan^2(2x)\right)\tan(2x)$

Bài 9.15. Cho hàm số $P(x)=ax^2+bx+3$ $(a,b$ là hằng số). Tìm a,b biết $P(1)=0$ và $P''(1)=-2$.

Lời giải

Ta có $P'(1)=0$

$P'(1)=2a(1)+b=0\Rightarrow 2a=-b$

Vì $P''(1)=-2$

$P''(1)=2a(-1)=-2\Rightarrow a=1$

Vậy $a=1$ và $b=-2a=-2$

$\Rightarrow P(x)=x^2-2x+3$

Bài 9.16. Cho hàm số $f(x)=2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $\left|f''(x)\right|\le 4$ với mọi x.

Lời giải

$f(x)=2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right]^2$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$=2\left(\frac{1}{2}\sin^2(x)+\frac{1}{2}\cos^2(x)+\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)\right)$

$f'(x)=2(\cos(x)-\sin(x)+\sqrt{2}\cos(x))$

$f''(x)=2(-\sin(x)-\cos(x)+\sqrt{2}(-\sin(x)+\cos(x)))=-4\cos(x)$

Do đó, với mọi giá trị của x, ta có: $f''(x)=4|\cos(x)|\leq 4$

Bài 9.17. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t)=10+0,5\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t=5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Đạo hàm của $s(t)$ theo t : $\frac{ds}{dt}=0,5.2\pi.\cos\left(2pit+\frac{\pi}{5}\right)=\pi\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{5}\right)$

Đạo hàm cấp hai của $s(t)$ theo t : $\frac{d^2s}{dt^2}=-\pi^2\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{5}\right)$

Tại $t=5$ giây: $\frac{d^2s}{dt^2}=-\pi^2\sin\left(2\pi 5+\frac{\pi}{5}\right)\approx -24.5\,\text{cm}/\text{s}^2$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)=2x^5-\frac{4}{x}+1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $40x^3-\frac{4}{x^3}$. **B.** $40x^3+\frac{4}{x^3}$. **C.** $40x^3-\frac{8}{x^3}$. **D.** $40x^3+\frac{8}{x^3}$.

Lời giải

CHỌN C

$f(x)=2x^5-\frac{4}{x}+1$ thì $f'(x)=10x^4+\frac{4}{x^2}$, do đó $f''(x)=40x^3-\frac{8}{x^3}$.

Câu 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\sin 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin 2x$. **B.** $-4\sin x$. **C.** $-4\sin 2x$. **D.** $-2\sin 2x$.

Lời giải

CHỌN C

$y=\sin 2x$ thì $y'=2\cos 2x$. Do đó $y''=-4\sin 2x$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\cos^2 x$. Tính y''?

A. $y''=-2\cos 2x$. **B.** $y''=-4\cos 2x$. **C.** $y''=2\cos 2x$. **D.** $y''=4\cos 2x$.

Lời giải

CHỌN A

Ta có: $y'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x\Rightarrow y''=-2\cos 2x$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Tính $M=y^3.y''+1$.

A. -2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Lời giải

CHỌN B

Ta có: $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow y''=\dfrac{1}{\left(2x-x^2\right)}.\left[-1.\sqrt{2x-x^2}-\dfrac{\left(1-x\right)^2}{\sqrt{2x-x^2}}\right]$

$=\dfrac{-1}{\left(2x-x^2\right)\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow y^3.y''=-1\Rightarrow y^3.y''+1=0$.

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^4$. Tính $f''\left(2\right)$.

A. 27. **B.** 81. **C.** 96. **D.** 108.

Lời giải

CHỌN D

Ta có: $f'\left(x\right)=4\left(x+1\right)^3\Rightarrow f''\left(x\right)=12\left(x+1\right)^2$. Vậy $f''\left(2\right)=108$.

Câu 6: Cho hàm số $y=\sin^3 x$. Tính $M=y''+9y$.

A. $\sin x$. **B.** $6\sin x$. **C.** $6\cos x$. **D.** $-6\sin x$.

Lời giải

CHỌN B

Ta có: $y'=3\sin^2 x\cos x\Rightarrow y''=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$.

Vậy:

$M=y''+9y=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x+9\sin^3 x=6\sin x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=6\sin x$.

Câu 7: Cho hàm số $y=3x^5-5x^4+3x-2$. Giải bất phương trình $y''<0$.

A. $x\in\left(-\infty;1\right)\setminus\left\{0\right\}$. **B.** $x\in\left(1;+\infty\right)$. **C.** $x\in\left(-1;1\right)$. **D.** $x\in\left(-2;2\right)$.

Lời giải

CHỌN A

Ta có: $y'=15x^4-20x^3+3\Rightarrow y''=60x^3-60x^2$.

$y''<0\Leftrightarrow 60x^3-60x^2<0\Leftrightarrow 60x^2\left(x-1\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\x\neq 0\end{cases}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left(x+1\right)^3}$. Giải bất phương trình $y''<0$.

A. $x<-1$. **B.** $x>-1$. **C.** $x\neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

CHỌN A

Ta có: $y'=\dfrac{-3}{\left(x+1\right)^4}\Rightarrow y''=\dfrac{12}{\left(x+1\right)^5}$.

Vậy $y''<0\Leftrightarrow\dfrac{12}{\left(x+1\right)^5}<0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{-2x^2+3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2 của f là:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. $y''=2+\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **B.** $y''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$. **C.** $y''=\dfrac{-2}{(1-x)^3}$. **D.** $y''=\dfrac{2}{(1-x)^4}$.

Lời giải

CHỌN B

$$y=2x-1+\frac{1}{1-x}\Rightarrow y'=2+\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow y''=\frac{2(1-x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Câu 10: Cho hàm số: $y=(2-m)x^4+2x^3+2mx^2+2m-1$.
Tìm m để phương trình $y''=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$.

C. $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$.

Lời giải

CHỌN D

Ta có: $y'=4(2-m)x^3+6x^2+4mx\Rightarrow y''=12(2-m)x^2+12x+4m$.

Phương trình $y''=0$ có hai nghiệm phân biệt hay phương trình: $3(2-m)x^2+3x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\neq 0\\ 4m^2-8m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 2\\ \left[\begin{array}{l}m<\frac{1}{2}\\ m>\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Câu 11: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S=t^3-3t^2$
(t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).
Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. Vận tốc của chuyển động khi $t=3s$ là $v=12m/s$.
B. Vận tốc của chuyển động khi $t=3s$ là $v=24m/s$.
C. Gia tốc của chuyển động khi $t=4s$ là $a=18m/s^2$.
D. Gia tốc của chuyển động khi $t=4s$ là $a=9m/s^2$.

Lời giải

CHỌN C

□ $S=t^3-3t^2\Rightarrow v(t)=S'=3t^2-6t$

$\Rightarrow v(3)=3.3^2-18=9(m/s)$.

□ $S=t^3-3t^2\Rightarrow a=S''=6t-6$

$a_{(t=4s)}=6.4-6=18(m/s^2)$.

Câu 12: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ là:

A. $24\left(m/s^2\right)$. **B.** $17\left(m/s^2\right)$. **C.** $14\left(m/s^2\right)$. **D.** $12\left(m/s^2\right)$.

Lời giải

CHỌN D

Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ bằng $S''(3)$.

$S'(t)=3t^2-6t+5;\ S''(t)=6t-6$ nên $S''(3)=18-6=12\left(m/s^2\right)$.

Câu 13: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$S=t^3-3t^2-9t+2$ (t: tính bằng giây, s tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t=0$ hoặc $t=3$.

B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=1$ là $a=12m/s^2$.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=3$ là $a=12m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t=0$.

Lời giải

CHỌN C

□ $S=t^3-3t^2-9t+2$

$\Rightarrow v(t)=S3t^2-6t-9$

$v(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-6t-9=0\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$

□ $S=t^3-3t^2-9t+2$

$\Rightarrow a=S''=6t-6$

$\Rightarrow a_{(t=3s)}=6.3-6=12\left(m/s^2\right)$.

Câu 14: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S=t^3-2t^2+4t+1$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=2$ là:

A. $12\left(m/s^2\right)$. **B.** $8\left(m/s^2\right)$. **C.** $7\left(m/s^2\right)$. **D.** $6\left(m/s^2\right)$.

Lời giải

CHỌN B

Gia tốc của chuyển động khi $t=2$ bằng $S''(2)$.

$S'(t)=3t^2-4t+4;\ S''(t)=6t-4$ nên $S''(2)=12-4=8\left(m/s^2\right)$.

Câu 15: Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức $S(t)=4-2t+4t^2+2t^3$, trong đó $t>0$ và t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t=5(s)$.

A. $a=68$. **B.** $a=115$. **C.** $a=100$. **D.** $a=225$.

Lời giải

Chọn A

Theo ứng dụng đạo hàm của hàm số có:

$v(t)=S'(t)=-2+8t+6t^2$ và $a(t)=v'(t)=8+12t\Rightarrow a(5)=68\left(m/s^2\right)$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 16: Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1\ (\text{m})$, t là thời gian tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là

A. $48\ \text{m/s}^2$. **B.** $28\ \text{m/s}^2$. **C.** $18\ \text{m/s}^2$. **D.** $54\ \text{m/s}^2$.

Lời giải

Chọn A

$S = f(t) = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$

$\Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 6t + 2$

$\Rightarrow a(t) = f''(t) = 12t^2 - 18t - 6$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $a(3) = 12.3^2 - 18.3 - 6 =$ $48\ \text{m/s}^2$.

Câu 17: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

A. 6. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của chất điểm có phương trình là: $v = s' = -3t^2 + 2t + 1$.

Vận tốc của chất điểm đạt GTLN khi $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{3}$.

Gia tốc của chất điểm có phương trình là: $s'' = -6t + 2$.

Tại thời điểm vận tốc đạt GTLN thì gia tốc bằng $s''\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$.

Câu 18: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm gia tốc bằng không là

A. $-2,5m/s$. **B.** $4m/s$. **C.** $2,5m/s$. **D.** $8,5m/s$.

Lời giải

Chọn C

Ta có, gia tốc tức thời của chuyển động bằng: $a(t) = s''(t) = 12\text{t} - 6$. Thời điểm gia tốc bằng không là: $a(t) = s''(t) = 12\text{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0,5$. Vậy khi đó vận tốc tức thời của chuyển động bằng $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 6t + 4 \Rightarrow v(0,5) = \dfrac{5}{2}$. vậy chọn C

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 9.18. Quy tắc tính đạo hàm nào sau đây là đúng?

A. $(u+v)'=u'-v'$. **B.** $(uv)'=u'v+uv'$. **C.** $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{1}{v^2}$. **D.** $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v+uv'}{v^2}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9.19. Cho hàm số $f(x)=x^2+\sin^3 x$. Khi đó $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. π. **B.** 2π. **C.** $\pi+3$. **D.** $\pi-3$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9.20. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$ là

A. $[1;3]$. **B.** $[-1;3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-3;-1]$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9.21. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{4+3u(x)}$ với $u(1)=7, u'(1)=10$. Khi đó $f'(1)$ bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

$$f'(u)\Big|_{x=1}=\frac{3}{2\sqrt{4+3u(1)}}=\frac{3}{2\sqrt{25}}=\frac{3}{10}.$$

Với $u'(1)=10$.

Câu 9.22. Cho hàm số $f(x)=x^2e^{-2x}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ là

A. $\{0;1\}$. **B.** $\{0;-1\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x)=x^2e^{-x}\Rightarrow f'(x)=\left(x^2\right)'e+x^2\left(e^{-2x}\right)'=2xe^{-2x}-2x^2e^{-2e}=2xe^{-2x}(1-x)$$

Giải phương trình $2xe^{-2x}(1-x)=0$.

Phương trình này có hai nghiệm là $x=0,\ x=1$.

Câu 9.23. Chuyển động của một vật có phương trình $s(t)=\sin\left(0,8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$, ở đó s tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. $4,5\,\text{cm}/\text{s}^2$. **B.** $5,5\,\text{cm}/\text{s}^2$. **C.** $6,3\,\text{cm}/\text{s}^2$. **D.** $7,1\,\text{cm}/\text{s}^2$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9.24. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4x-1$ có đồ thị là (C). Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) là

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

B. TỰ LUẬN

Bài 9.25. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^5$; b) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$; c) $y=e^x\sin^2 x$; d) $y=\log\left(x+\sqrt{x}\right)$.

Lời giải

a) $y'(x)=5\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^4.\dfrac{(x+2).2-(2x-1).1}{(x+2)^2}=\dfrac{10(2x-1)(x+2)^3}{(x+2)^4}=\dfrac{20x-50}{(x+2)^4}$.

b) $y'(x)=\dfrac{2\left(x^2+1\right)-2x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

c) $y'(x)=e^x.2\sin x.\text{cosx}+e^x.2\sin^2 x.2\text{cosx}=2e^x\sin x(\text{cos x}+\sin x\cos\text{x})=2e^x\sin x\ \text{cox}^2x$.

d) $y'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}.\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}+2\right)}$

Bài 9.26. Xét hàm số luỹ thừa $y=x^\alpha$ với α là số thực:

a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

b) Bằng cách viết $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$, tính đạo hàm của hàm số đã cho.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số $y=x^\alpha$ là tập các số thực dương nếu α là số thực chẵn, hoặc tập các số thực nếu α là số thực lẻ.

b) $y'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(e^{\alpha\ln x}\right)=e^{\alpha\ln x}\dfrac{d}{dx}(\ln x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

Bài 9.27. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}$. Đặt $g(x)=f(1)+4\left(x^2-1\right)f'(1)$. Tính $g(2)$.

Lời giải

$f(x)=\sqrt{3x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{3}{4}$.

$f''(x)=-\dfrac{9}{4(3x+1)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f''(2)=-\dfrac{3}{4\sqrt{7}}$.

Bài 9.28. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Tính $f''(1)$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)^2} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

$f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{2}{(x-1)^2}\right) = \dfrac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow f''(1) = 0$

Bài 9.29. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(1)=2$ và $f'(x)=x^2 f(x)$ với mọi x. Tính $f''(1)$.

Lời giải

$f'''(x) = \left[x^2 f(x)\right]' = 2xf(x) + x2f'(x) = 2xf(x) + x^2.x^2 f(x) = \left(2x+x^4\right)f(x)$

$\Rightarrow f(1) = \left(2.1+1^4\right)f(1) = 3.2 = 6$

Bài 9.30. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x,\ y'(1) = 9$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số là $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y - y(1) = y'(1)(x-1)$

Thay vào đó các giá trị đã biết: $y - y(1) = 9(x-1)$, $y = 9x - 6$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là: $y = 9x - 6$.

Bài 9.31. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{a}{x}$ (a là hằng số dương) là một đường hypebol. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại một điểm bất kì của đường hypebol đó tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích không đổi.

Lời giải

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a}{a^2}$

Phương trình của đường tiếp tuyến tại điểm (x_0, y_0) là: $y - y_0 = -\dfrac{a}{x^2}(x - x_0)$.

Đường tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm $(x_0, 0)$ và cắt trục tung tại điểm $\left(0, y_0 + \dfrac{a}{x_0}\right)$.

Diện tích tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và trục hoành là: $S_1 = \dfrac{1}{2}(x_0 - 0).(0 - y_0) = \dfrac{1}{2}x_0 y_0$

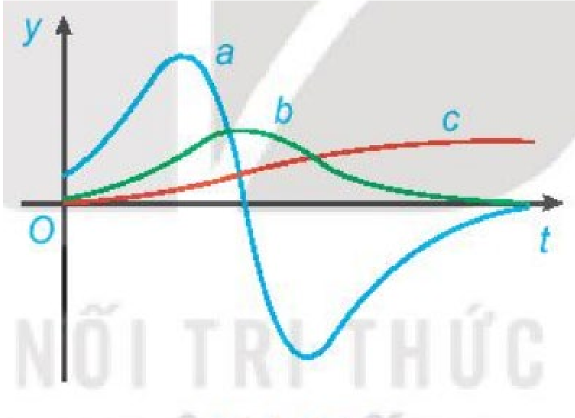
Diện tích tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và trục tung là:

$S_2 = \dfrac{1}{2}\left(y_0 + \dfrac{a}{x_0} - y_0\right)(0 - x_0) = \dfrac{1}{2}a$

$S = S_1 + S_2 = \dfrac{1}{2}(x_0 y_0 + a) = \dfrac{1}{2}(2a) = a$

Vì vậy, ta đã chứng minh được rằng diện tích của tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và các trục toạ độ là không đổi và bằng a, với a là hằng số dương của đường hyperbol.

Bài 9.32. Hình 9.10 biểu diễn đồ thị của ba hàm số. Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của một chiếc ô tô, hàm số thứ hai biểu thị vận tốc và hàm số thứ ba biểu thị gia tốc của ô tô đó. Hãy xác định đồ thị của mỗi hàm số này và giải thích.



Hình 9.10

Lời giải

- Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của chiếc ô tô, nó biểu thị khoảng cách mà chiếc ô tô đã di chuyển từ điểm xuất phát. Đồ thị của hàm số này là một đường cong mượt mà (nếu không có phần bị gián đoạn) và có độ dốc dương (nếu chiếc ô tô di chuyển theo phương dương) hoặc âm (nếu chiếc ô tô di chuyển theo phương âm).
- Hàm số thứ hai là hàm vận tốc của chiếc ô tô, nó biểu thị tốc độ của chiếc ô tô tại mỗi thời điểm. Đồ thị của hàm số này cũng là một đường cong mượt mà (nếu không có phần bị gián đoạn) và có độ dốc dương (nếu chiếc ô tô tăng tốc) hoặc âm (nếu chiếc ô tô giảm tốc).
- Hàm số thứ ba là hàm gia tốc của chiếc ô tô, nó biểu thị tốc độ thay đổi của chiếc ô tô tại mỗi thời điểm. Đồ thị của hàm số này có thể là một đường cong mượt mà hoặc bị gián đoạn (nếu chiếc ô tô tăng tốc/giảm tốc đột ngột). Nếu đồ thị của hàm số này là một đường thẳng thì nghĩa là gia tốc của chiếc ô tô là hằng số và chiếc ô tô đang di chuyển với chuyển động đều (chuyển động đều là chuyển động mà vận tốc của vật không đổi).

Bài 9.33. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.

b) Tại những thời điểm nào vật đứng yên?

c) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

d) Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.

e) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

Lời giải

$a) s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

$\Rightarrow v = s' = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

Tại t =2 giây => $v = 3.(2)^2 - 12.2 + 9 = -3 (m/s)$

Tại t=4 giây => $v = 3.(4)^2 - 12.4 + 9 = 9 (m/s)$

b) Vật đứng yên khi v=0

$v = 3t^2 - 12t + 9 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1s \\ t = 3s \end{array}\right.$

Vậy tại thời điểm t=1s, t=3s thì vật đứng yên.

c) $a = v' = 6t - 12$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là:

$a = 6.4 - 12 = 12(m/s^2)$

d) Tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là:

$s = 5^3 - 6.5^2 + 9.5 = 20(m)$

e) Do t=1s và t=3s thì v=0m/s

$t = 2 => v = -3m/s$

$t = 4s => v = 9m/s$

$t = 5 => v = 24m/s$

Trong 5 giây đầu tiên, khi vật tăng tốc sau giây thứ 2, khi nào vật giảm tốc sau giây thứ 1

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các phát biểu sau phát biểu nào là đúng?

A. Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó còn nếu hàm số liên tục tại điểm x_0 thì nó chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0. Đạo hàm của f tại x_0 là:

A. $f\left(x\right)$

B. $\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x\right)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x\right)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x\right)}{h}.$$

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'\left(x_0\right)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.

B. $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$.

C. $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$.

D. $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x+x_0\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}, f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x\right)}{h}$

và $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$ là những khẳng định đúng.

Khẳng định **sai** là $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{4}$. **B.** $f'(0)=\dfrac{1}{16}$. **C.** $f'(0)=\dfrac{1}{32}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4x}$ (không tồn tại giới hạn)

Do đó không tồn tại $f'(0)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1)=\dfrac{3}{2}$. **B.** $f'(1)=1$. **C.** $f'(1)=0$. **D.** không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^3-4x+3)}{(x-1)(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2+x+3)}{(x-1)(x-2)}\to \text{Không tồn tại.}$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2\text{-}1 & \text{khi } x\geq 0\\ \text{-}x^2 & \text{khi } x<0\end{cases}$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không liên tục tại $x=0$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x=2$.

C. Hàm số liên tục tại $x=2$. **D.** Hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=-1$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ do đó hàm số không liên tục tại điểm $x=0$ nên hàm số không đạo hàm tại $x=0$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx^2+2x+2 & \text{khi } x>0 \\ nx+1 & \text{khi } \le 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. Không tồn tại m, n. **B.** $m=2,\forall n$. **C.** $n=2,\forall m$. **D.** $m=n=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(mx^2+2x+2\right)=2$

Do đó hàm số không liên tục tại điểm $x=0$ nên hàm số không thể có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1 \\ ax+b & \text{khi} >1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a,b sao cho $f(x)$ có
đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=1,\ b=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=\dfrac{1}{2},\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$

Hàm số liên tục tại điểm $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Leftrightarrow a+b=\dfrac{1}{2}$

Mặt khác $f'(x)\begin{cases} x & \text{khi } x<1 \\ ax & \text{khi } x>1 \end{cases}\Rightarrow f'(1^-)=1, f'(1^+)=a$

Suy ra hàm số có đạo hàm tại điểm $x=1\Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{1}{2} \\ a=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 9: Cho $f(x)=x^{2018}-1009x^2+2019x$. Giá trị của $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}$ bằng

A. 1009. **B.** 1008. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$

Mặt khác $f'(x)=2018x^{2017}-2018x+2019$ suy ra $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)=2019$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)....(x-2019)}$. Giá trị của $f'(0)$ là

A. $-\dfrac{1}{2019!}$. **B.** $\dfrac{1}{2019!}$. **C.** $-2019!$. **D.** $2019!$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{(x-1)(x-2)....(x-2019)}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x-1)(x-2)...(x-2019)}=\dfrac{1}{-2019!}$.

Câu 11: Cho $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)...(x+n)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=n$. **C.** $f'(0)=n!$. **D.** $f'(0)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)...(x+n)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)(x+2)...(x+n)$

$=1.2...n=n!$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=|x-2|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $f(2)=0$. **B.** $f(x)$ nhận giá trị không âm.

C. $f(x)$ liên tục tại $x=2$. **D.** $f(x)$ có đạo hàm tại $x=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=|x-2|=\begin{cases}x-2 & \text{khi } x\ge 2\\ -x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 \text{ khi } x>2\\ -1 \text{ khi } x<2\end{cases}$

Do $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0$ nên hàm số liên tục tại điểm $x=2$.

Mặt khác $f'(2^+)\ne f'(2^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=2$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6)=2$ Tính giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}$.

A. 2. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)=2$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0=2$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$.

A. 0. **B.** $f'(2)$. **C.** $2f'(2)-f(2)$. **D.** $f(2)-2f'(2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x\left[f(x)-f(2)\right]+2f(x)-xf(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x\left[f(x)-f(2)\right]}{x-2}+\lim_{x\to 2}\frac{f(x)(2-x)}{x-2}=2f'(2)+\lim_{x\to 2}\left[-f(x)\right]=2f'(2)-2f(2).$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x)=0$ là

A. $\left\{-2\sqrt{2}\right\}$ **B.** $\left\{2;\sqrt{2}\right\}$ **C.** $\left\{-4\sqrt{2}\right\}$ **D.** $\left\{2\sqrt{2}\right\}$

Lời giải

Chọn D

$f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4\sqrt{2}x+8=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$, có đạo hàm là y'. Để $y'\le 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. $\left[-\frac{2}{9};0\right]$ **B.** $\left[-\frac{9}{2};0\right]$

C. $\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right]\cup\left[0;+\infty\right)$ **D.** $\left(-\infty;-\frac{2}{9}\right]\cup\left[0;+\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

$y'=9x^2+2x$; $y'\le 0\Leftrightarrow 9x^2+2x\le 0\Leftrightarrow -\frac{2}{9}\le x\le 0$. Vậy $S=\left[-\frac{2}{9};0\right]$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=-x^4+4x^3-3x^2+2x+1$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=4$ **B.** $f'(-1)=14$ **C.** $f'(-1)=15$ **D.** $f'(-1)=24$

Lời giải

Chọn D

$f'(x)=-4x^3+12x^2-6x+2 \Rightarrow f'(-1)=24.$

Câu 18: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2-mx-4$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để $y'\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right)$ **B.** $m\in\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$

C. $m\in(-\infty;-1]\cup\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ **D.** $m\in\left[-1;\frac{1}{4}\right]$

Lời giải

Chọn B

$y'=x^2-2.(2m+1)x-m$

Khi đó $y'\ge 0;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'=(2m+1)^2+m\le 0\Leftrightarrow 4m^2+5m+1\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le -\frac{1}{4}$

Vậy $m\in\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ là giá trị thỏa mãn bài toán.

Câu 19: Biết hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$ có đạo hàm là $f'(x)>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2-3ac>0$ **B.** $b^2-3ac\ge 0$ **C.** $b^2-3ac<0$ **D.** $b^2-3ac\le 0$

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=3ax^2+2bx+c>0;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac<0\end{cases}.$

Câu 20: Hàm số $y=\sqrt{x^3+x}$ có đạo hàm bằng

A. $\frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$ **B.** $\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}$ **C.** $\frac{3x^2+x}{2\sqrt{x^3+x}}$ **D.** $\frac{x^3+x}{2\sqrt{x^3+x}}$

Lời giải

Chọn A

$y'=\frac{(x^3+x)'}{2\sqrt{x^3+x}}=\frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}.$

Câu 21: Tính đạo hàm của hàm số $y=(7x-5)^4$

A. $y'=4(7x-5)^3$ **B.** $y'=-28(7x-5)^3$ **C.** $y'=-28(5-7x)^3$ **D.** $y'=28(5-7x)^3$

Lời giải

Chọn C

$y'=4.(7x-5)'.(7x-5)^3=28(7x-5)^3$.

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y=(1-x^3)^5$

A. $y'=5x^2(1-x^3)^4$ **B.** $y'=-15x^2(1-x^3)^4$

C. $y'=-3x^2(1-x^3)^4$ **D.** $y'=-5x^2(1-x^3)^4$

Lời giải

Chọn B

$y'=5.(1-x^3)'.(1-x^3)^4=-15x^2(1-x^3)^4$.

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y=(x^3-2x^2)^{2016}$

A. $y'=2016(x^3-2x^2)^{2015}$ **B.** $y'=2016(x^3-2x^2)^{2015}(3x^2-4x)$

C. $y'=2016(x^3-2x^2)^{2015}(3x^2-4x)$ **D.** $y'=2016(x^3-2x^2)(3x^2-2x)$

Lời giải

Chọn B

$y'=2016.(x^3-2x^2)'.(x^3-2x^2)^{2015}=2016.(3x^2-4x).(x^3-2x^2)^{2015}$.

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-2018)$ tại điểm $x=0$

A. $f'(0)=0$ **B.** $f'(0)=-2018!$ **C.** $f'(0)=2018!$ **D.** $f'(0)=2018$

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2018)+x(x-2)...(x-2018)+...+x(x-1)...(x-2017)$

Suy ra $f'(0)=(0-1).(0-2)....(0-2018)=1.2.3....2018=2018!$.

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x(x+1)(x+2)...(x+2018)$ tại điểm $x=-1004$

A. $f'(-1004)=0$ **B.** $f'(-1004)=1004!$

C. $f'(-1004)=-1004!$ **D.** $f'(-1004)=(1004!)^2$

Lời giải

Chọn D

$f'(x)=(x+1)(x+2)...(x+2018)+x(x+2)...(x+2018)+...+x(x+1)...(x+2017)$

Suy ra $f'(-1004)=x.(x+1).(x+2)...(x+1003).(x+1005)...(x+2018)\big|_{x=-1004}$

$$=(-1004).(-1003).(-1002)...(-1).(-2)...1003.1004=(1004!)^2.$$

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$

A. $y'=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}$ **B.** $y'=\dfrac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$ **C.** $y'=\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$ **D.** $y'=\dfrac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$

Lời giải

Chọn A

$$y'=\frac{(2x+2).(x+2)-(x^2+2x-3)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+6x+4-x^2-2x+3}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}.$$

Câu 27: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{3x^2+4}$ là

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+4}}$ **B.** $y'=\dfrac{x}{\sqrt{3x^2+4}}$ **C.** $y'=\dfrac{6x}{\sqrt{3x^2+4}}$ **D.** $y'=\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$

Lời giải

Chọn D

$$y'=\frac{(3x^2+4)'}{2\sqrt{3x^2+4}}=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}.$$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y=(2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là

A. $y'=\dfrac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$ **B.** $y'=\dfrac{8x^2+4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ **C.** $y'=\dfrac{4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ **D.** $y'=\dfrac{6x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$

Lời giải

Chọn D

$$y'=(2x-1)'.\sqrt{x^2+x}+(2x-1).\frac{(x^2+x)'}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$=2\sqrt{x^2+x}+\frac{(2x-1).(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}=\frac{2x^2+2x+4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}=\frac{6x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

Câu 29: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^3$ bằng

A. $y'=3\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^2$ **B.** $y'=6\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^2$

C. $y'=6\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^2$ **D.** $y'=6\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^2$

Lời giải

Chọn C

$$y'=3\left(x^2-\frac{2}{x}\right)'\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^2=3\left(2x+\frac{2}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^2.$$

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$

A. $y'=\frac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$ **B.** $y'=\frac{1}{2}.\frac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

C. $y'=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$ **D.** $y'=\frac{1}{2}.\frac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

Lời giải

Chọn D

$$y'=\frac{\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)'}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}}=\frac{\frac{5}{(x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}}=\frac{1}{2}.\frac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

Câu 31: Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'\sqrt{x^2+1}=y$ **B.** $2y'\sqrt{x^2+1}=y$ **C.** $y'\sqrt{x^2+1}=2y$ **D.** $2y\sqrt{x^2+1}=y'$

Lời giải

Chọn B

$$y'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2y}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{2y}=\frac{y^2}{2y\sqrt{x^2+1}}=\frac{y}{2\sqrt{x^2+1}}$$

Do đó $2y'\sqrt{x^2+1}=y$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x)=0$ có tập nghiệm S là

A. $S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$ **B.** $S=\left\{-\frac{2}{3};0\right\}$ **C.** $S=\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$ **D.** $S=\left\{-\frac{3}{2};0\right\}$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

Câu 33: Cho hàm số $y=-2\sqrt{x}+3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y'>0$ là

A. $S=(-\infty;+\infty)$ **B.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{9}\right)$ **C.** $S=\left(\frac{1}{9};+\infty\right)$ **D.** $S=\varnothing$

Lời giải

Chọn C

$$y'=-2.\frac{1}{2\sqrt{x}}+3=\frac{-1}{\sqrt{x}}+3=\frac{-1+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}>0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}>1\Leftrightarrow x>\frac{1}{9}.$$

Câu 34: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{-5x^2+14x-9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'\left(x\right)<0$ là

A. $\left(\frac{7}{5};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{7}{5}\right)$ **C.** $\left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$ **D.** $\left(1;\frac{7}{5}\right)$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $-5x^2+14x-9>0\Leftrightarrow 1<x<\frac{9}{5}$

Khi đó $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow -5x+7<0\Leftrightarrow x>\frac{7}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$.

Câu 35: Cho hàm số $f\left(x\right)=x+x^2+x^3+...+x^{2018}$. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}$

A. $2017.2^{2018}+1$ **B.** $2019.2^{2017}+1$ **C.** $2017.2^{2018}-1$ **D.** $2018.2^{2017}+1$

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x\to 2}\frac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=f'\left(2\right)$$

Mặt khác $f\left(x\right)=x+x^2+x^3+...+x^{2018}=x.\frac{1-x^{2018}}{1-x}=\frac{x-x^{2019}}{1-x}$

Do đó $f'\left(x\right)=\frac{\left(1-2019x^{2018}\right)\left(1-x\right)+\left(x-x^{2019}\right)}{\left(1-x\right)^2}\Rightarrow f'\left(2\right)=\frac{2019.2^{2018}-1+2-2^{2019}}{1}$

$=2017.2^{2018}+1$.

Câu 36: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số thỏa mãn $f\left(1\right)=f'\left(1\right)=1$. Giả sử $g\left(x\right)=x^2f\left(x\right)$. Tính $g'\left(1\right)$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

$$g'\left(x\right)=2x.f\left(x\right)+x^2.f'\left(x\right)$$

Suy ra $g'\left(1\right)=2f\left(1\right)+f'\left(1\right)=3$.

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.

A. $y'=3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.
B. $y'=-3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.
C. $y'=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.
D. $y'=-3\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$y'=\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)'.\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=-3.\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right).$$

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$.

A. $y'=x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$.
B. $y'=\frac{1}{2}x^2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.
C. $y'=\frac{1}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$.
D. $y'=\frac{1}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$y'=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)'.\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)=-\frac{1}{2}.(-2x).\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)=x.\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right).$$

Câu 39: Tính đạo hàm của hàm số $y=x^2\tan x+\sqrt{x}$.

A. $y'=2x\tan x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
B. $y'=2x\tan x+\frac{1}{\sqrt{x}}$.
C. $y'=2x\tan x+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
D. $y'=2x\tan x+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$y'=\left(x^2\right)'\tan x+\left(\tan x\right)'.x^2+\left(\sqrt{x}\right)'=2x\tan x+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y=2\cos x^2$.

A. $y'=-2\sin x^2$.
B. $y'=-4x\cos x^2$.
C. $y'=-2x\sin x^2$.
D. $y'=-4x\sin x^2$.

Lời giải

Chọn D

$$y'=-2.\left(x^2\right)'.\sin x^2=-2.2x.\sin x^2=-4x.\sin x^2.$$

Câu 41: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan\frac{x+1}{2}$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. **C.** $y'=-\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. **D.** $y'=-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

$$y'=\left(\tan\frac{x+1}{2}\right)'=\frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)'}{\cos^2\frac{x+1}{2}}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}.$$

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\sqrt{2+x^2}$.

A. $y'=\dfrac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$. **B.** $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

C. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$. **D.** $y'=\dfrac{x+1}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y'=\left(\sqrt{2+x^2}\right)'\cos\sqrt{2+x^2}=\frac{\left(2+x^2\right)'}{2\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}.$$

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\sqrt{2x+1}$.

A. $y'=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **C.** $y'=-\sin\sqrt{2x+1}$. **D.** $y'=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$

.

Lời giải

Chọn A

$$y'=-\left(\sqrt{2x+1}\right)'\sin\sqrt{2x+1}=\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}\sin\sqrt{2x+1}=-\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

Câu 44: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cot\sqrt{x^2+1}$.

A. $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y'=-\dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn A

$$y'=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

A. $y'=-\dfrac{\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$.
B. $y'=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$.
C. $y'=\dfrac{2-2\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$.
D. $y'=-\dfrac{2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Suy ra $y'=-\dfrac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{1}{\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y'=\dfrac{4}{\sin^2(1-2x)}$. **B.** $y'=-\dfrac{4}{\sin(1-2x)}$. **C.** $y'=-\dfrac{4x}{\sin^2(1-2x)}$. **D.** $y'=-\dfrac{4}{\sin^2(1-2x)}$.

Lời giải

Chọn A

$y'=-\dfrac{-2(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)}=\dfrac{-4.\dfrac{1}{\cos^2 x(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)}=\dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=5\sin x-3\cos x$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-5$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5$.

Lời giải

Chọn A

$f'(x)=(5\sin x-3\cos x)'=5(\sin x)'-3(\cos x)'=5\cos x+3\sin x$

Suy ra $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5\cos\dfrac{\pi}{2}+3\sin\dfrac{\pi}{2}=3$.

Câu 48: Hàm số nào dưới đây thỏa mãn hệ thức $y'+2y^2+2=0$?

A. $y=\sin 2x$. **B.** $y=\tan 2x$. **C.** $y=\cos 2x$. **D.** $y=\cot 2x$.

Lời giải

Chọn D

Với $y=tan\,2x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{cos^2 2x}.2$

Do đó $y'+2y^2+2=\dfrac{2}{cos^2 2x}+2\,tan^2 2x+2=\dfrac{4}{cos^2 2x}$

Với $y=cot\,2x \Rightarrow y'=\dfrac{-1}{sin^2 2x}.2$ suy ra $y'+2y^2+2=\dfrac{-2}{sin^2 2x}+2\,cot^2 2x+2=0$.

Câu 49: Cho $f(x)=\sin^3 ax$, $a>0$. Tính $f'(\pi)$.

A. $f'(\pi)=2\sin^2(a\pi)\cos(a\pi)$. **B.** $f'(\pi)=0$.

C. $f'(\pi)=3a\sin^2(a\pi)$. **D.** $f'(\pi)=3a\sin^2(a\pi)\cos(a\pi)$.

Lời giải

Chọn D

$f'(x)=3\,sin^2(ax)(sin\,ax)'=3\,sin^2(ax)(a\,cos\,ax)$

Câu 50: Cho hàm số $y=\sin^2 x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y'+y''=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **B.** $4y-y''=2$.

C. $4y+y''=2$. **D.** $2y'+y'.\tan x=0$.

Lời giải

Chọn C

$y'=2\,sinx.cosx=2\,sin\,2x, y''=2\,cos\,2x=2\left(1-2\,sin^2x\right)=2-4\,sin^2x$

Do đó $4y+y''=4\,sin^2x+2-4\,sin^2x=2$.

Câu 51: Xét hàm số $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ khi $x\neq 0$ và $f(x)=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ là một hàm số lẻ. **B.** $f(x)$ là một hàm tuần hoàn chu kì 2π.

C. $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$ bằng 0. **D.** $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

$y(-x)=\dfrac{1-cos(-x)}{(-x)^2}=\dfrac{1-cosx}{x^2}$ khi $x\neq 0$ và $f(0)=0$. Do đó, $f(x)$ là một hàm số chẵn, $f(x)$ không là hàm số tuần hoàn

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Mặt khác $\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ nên hàm số không liên tục tại điểm $x=0$ do đó $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(4x+1)$ là

A. $y'=\frac{\ln 3}{4x+1}$. **B.** $y'=\frac{4}{(4x+1)\ln 3}$. **C.** $y'=\frac{1}{(4x+1)\ln 3}$. **D.** $y'=\frac{4\ln 3}{4x+1}$.

Lời giải

Chọn B

$y'=\frac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3}=\frac{4}{(4x+1)\ln 3}$.

Câu 53: Đạo hàm của hàm số $y=2017^x$ là

A. $y'=x.2017^{x-1}$. **B.** $y'=2017^x$ **C.** $y'=\frac{2017^x}{\ln 2017}$. **D.** $y'=2017^x.\ln 2017$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=2017^x.\ln 2017$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)=(x+1)e^x$. Tính $f'(0)$

A. $2e$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=(x+1)e^x \Rightarrow f'(x)=(x+2)e^x \Rightarrow f'(0)=2$.

Câu 55: Tính đạo hàm của hàm số $y=3^x+\log x$.

A. $y'=3^x\ln 3+\frac{1}{x\ln 10}$. **B.** $y'=\log_3 x+\frac{1}{x\ln 3}$.

C. $y'=\log_3 x+\ln 3$. **D.** $y'=\frac{1-\ln x}{\ln 3}$.

Lời giải

Chọn A

$y=3^x+\log x$.

$y'=3^x\ln 3+\frac{1}{x\ln 10}$.

Câu 56: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{4-\log_2^2 x}$.

A. $D=[-2;2]$. **B.** $D=(0;16]$. **C.** $D=(0;4]$. **D.** $D=\left[\frac{1}{4};4\right]$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2^2 x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -2\le \log_2 x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{4}\le x\le 4 \end{cases}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)=\ln\left(x^4+1\right)$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng.

A. 2. **B.** $\frac{\ln 2}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}\Rightarrow f'(1)=2$.

Câu 58: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2-2x+2\right)3^x$.

A. $y'=(2x-2)3^x+\left(x^2-2x+2\right)3^x\ln 3$. **B.** $y'=(2x-2)3^x\ln 3$.

C. $y'=x^2.3^x$. **D.** $y'=(2x-2)3^x$.

Lời giải

Chọn A

$y'=(2x-2)3^x+\left(x^2-2x+2\right)3^x\ln 3$.

Câu 59: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{2^x}$ là.

A. $y'=2^{-x}\ln 2$. **B.** $y'=-\frac{1}{2^x}$. **C.** $y'=-\frac{\ln 2}{2^x}$. **D.** $y'=-\frac{1}{\left(2^x\right)^2}$.

Lời giải

Chọn C

$y=\frac{1}{2^x}=2^{-x}\Rightarrow y'=-2^{-x}.\ln 2=-\frac{\ln 2}{2^x}$.

Câu 60: Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{\sqrt{1-x}}$.

A. $y'=\frac{2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$. **B.** $y'=\frac{\ln 2}{2\sqrt{1-x}}2^{\sqrt{1-x}}$. **C.** $y'=\frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}}2^{\sqrt{1-x}}$. **D.** $y''=\frac{-2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$.

Lời giải

Chọn C

$y'=\left(\sqrt{1-x}\right)'.2^{\sqrt{1-x}}.\ln 2=\frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}}2^{\sqrt{1-x}}$.

Câu 61: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\tan x}$.

A. $y' = \dfrac{\tan x.2^{\tan x - 1}}{\ln 2}$. **B.** $y' = \tan x.2^{\tan x - 1}\ln 2$.

C. $y' = \dfrac{2^{\tan x}\ln 2}{\sin^2 x}$. **D.** $y' = \dfrac{2^{\tan x}\ln 2}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 2^{\tan x}\ln 2(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}2^{\tan x}\ln 2$.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x) = \ln(2.e^x + m)$ có $f'(-\ln 2) = \dfrac{3}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (1;3)$. **B.** $m \in (-5;-2)$. **C.** $m \in (1;+\infty)$. **D.** $m \in (-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2.e^x + m > 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2e^x}{2e^x + m}$.

Theo đề bài ta có $f'(-\ln 2) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2e^{-\ln 2}}{2e^{-\ln 2} + m} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+m} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $m \in (-\infty;3)$.

Câu 63: Cho hàm số $y = \ln(e^x + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

A. $m = e.$ **B.** $m = -e.$ **C.** $m = \dfrac{1}{e}.$ **D.** $m = \pm\sqrt{e}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \dfrac{e^x}{e^x + m^2} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{e}{e + m^2}$.

Khi đó $y'(1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e}{e+m^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2e = e + m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{e}$.

Câu 64: Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi các giá trị của tham số m là:

A. $m < 2$. **B.** $m < -2$ hoặc $m > 2$.

C. $m = 2$. **D.** $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 65: Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất $6,5\%$ một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x\in\mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng.

A. 145 triệu đồng **B.** 154 triệu đồng **C.** 150 triệu đồng **D.** 140 triệu đồng

Lời giải

Chọn A

Theo công thức lãi kép, số tiền lãi ông Tú nhận được sau 3 năm là: $y=x\left(1+\dfrac{6,5}{100}\right)^3-x$

$=\left[(1,065)^3-1\right]x$.

Ta có: $\left[(1,065)^3-1\right]x=30\Leftrightarrow x=\dfrac{30}{(1,065)^3-1}\approx 144,27$ triệu.

Vậy ông Tú cần gửi ít nhất 145 triệu để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng.

Câu 66: Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

A. $m<\dfrac{1}{4}$. **B.** $m>0$. **C.** $m\ge\dfrac{1}{4}$. **D.** $m>\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $4^x-2^x+m>0$.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $4^x-2^x+m>0$ $(*)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=2^x$ với $t>0$, khi đó bất phương trình $(*)$ trở thành: $t^2-t+m>0$ $\forall t>0$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-t$, $\forall t>0$ ta có $f'(t)=2t-1$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm được $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

Để bất phương trình $t^2-t+m>0$, $\forall t>0$ thì $-m<-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$.

Cách khác:

➢ Trường hợp 1: $\Delta=1-4m<0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$ thì $t^2-t+m>0$ $\forall t\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán)

➢ Trường hợp 2: $\Delta=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$ thì phương trình $t^2-t+\dfrac{1}{4}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$ (không thỏa mãn yêu cầu bài toán).

➢ Trường hợp 3: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$. Ta thấy $-\frac{b}{a} = 1 > 0$ nên phương trình $t^2 - t + m = 0$ không thể có hai nghiệm âm. Tức là $t^2 - t + m$ không thể luôn dương với mọi $t > 0$.

Vậy $m > \frac{1}{4}$.

B. TỰ LUẬN

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Giải bất phương trình $f'(x) \ge f(x)$

Lời giải

$$f'(x) \ge f(x) \Leftrightarrow \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} > \sqrt{x^2-2x} \text{ (với } x^2 - 2x > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \\ x - 1 > x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \\ 0 > x^2 - x + 1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các hàm số $g(x) = f(x) - f(2x)$ và $h(x) = f(x) - f(4x)$. Biết rằng $g'(1) = 18$ và $g'(2) = 1000$. Tính $h'(1)$

Lời giải

$g'(x) = f'(x) - 2f'(2x)$ và $h'(x) = f'(x) - 4f'(4x)$

Do $g'(1) = 18$ và $g'(2) = 1000$ nên $\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 18 \\ f'(2) - 2f'(4) = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 18 \\ 2f'(2) - 4f'(4) = 2000 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được $f'(1) - 4f'(4) = 2018 \Rightarrow h'(1) = 2018$.

Câu 69: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = f'(1) + f'(2) + ... + f'(2018)$

Lời giải

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Suy ra $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

Khi đó $P = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2018}} - \frac{1}{\sqrt{2019}}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2019}}\right) = \frac{1 - \sqrt{2019}}{2\sqrt{2019}}$

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$.

Viết $f(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + c$. Tính abc

Lời giải

Ta có $\begin{cases} f'(1)=a+b=0 \\ f(-1)=\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{-1}+c=2 \\ f(1)=\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{1}+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow abc=-\dfrac{5}{2}$.

Câu 71: Cho $y=\sqrt{x^2-2x+3}$, $y'=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2-2x+3}}$. Khi đó giá trị $a.b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$y'=\frac{\left(x^2-2x+3\right)'}{2\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

Do đó $a=1,b=-1\Rightarrow ab=-1$.

Câu 72: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{4}+\cos x-\sqrt{3}\left(\sin x+\dfrac{\cos 4x}{4}\right)$. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Lời giải

$$f'(x)=\frac{cos\,4x.4}{4}-sinx-\sqrt{3}\left(cosx+\frac{-sin\,4x.4}{4}\right)$$

$$=cos\,4x-sinx-\sqrt{3}\,cosx+\sqrt{3}\,sin\,4x$$

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{3}\,sin\,4x+cos\,4x=sinx+\sqrt{3}\,cosx\Leftrightarrow 2\,sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\,sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+\dfrac{\pi}{6}=x+\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 4x+\dfrac{\pi}{6}=\pi-\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+l.2\pi \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{l.2\pi}{5} \end{array}\right.$$

Kết hợp $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\left\{\dfrac{\pi}{18};\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Câu 73: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Lời giải

Điều kiện: $x^2-2mx+4>0\quad (*)$

Để $(*)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\Delta'=m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 74: Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Để người đó lãnh được số tiền 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi).

Lời giải

Ta có công thức tính $A=a(1+r)^n$ với A là số tiền gởi sau n tháng, a là số tiền gởi ban đầu, r là lãi suất.

$250.10^6=100.10^6(1+0,07)^n \Leftrightarrow 1,07^n=2,5 \Leftrightarrow n=\log_{1,07}2,5=13,542$.

Câu 75: Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, $\overrightarrow{AB}$ là một vecto chỉ phương của đường thẳng $y=0$. Các điểm A, B, C lần lượt nằm trên đồ thị hàm số $y=\log_a x$; $y=2\log_a x$; $y=3\log_a x$. Tìm a.

Lời giải

Do diện tích hình vuông là 36 $\Rightarrow$ cạnh bằng 6

Gọi $A(m;\log_a m)\in y=\log_a x \Rightarrow B(m-6;\log_a m)$ và $C(m-6;6+\log_a m)$

Vì $B(m-6;\log_a m)\in y=2\log_a x \Rightarrow \log_a m=2\log_a(m-6)$ *(1)*

Vì $C(m-6;6+\log_a m)\in y=3\log_a x \Rightarrow 6+\log_a m=3\log_a(m-6)$ *(2)*

Giải $(1)\Rightarrow m=9$ Thay vào $(2) \Rightarrow a=\sqrt[6]{3}$

Câu 76: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+2}$. Tính $f(0)+f\left(\dfrac{1}{10}\right)+...+f\left(\dfrac{19}{10}\right)$

Lời giải

Với $a+b=2$, ta có $f(a)+f(b)=\dfrac{2^a}{2^a+2}+\dfrac{2^b}{2^b+2}$

$=\dfrac{2^a.2^b+2.2^a+2^a.2^b+2.2^b}{(2^a+2)(2^b+2)}=\dfrac{2^{a+b}+2.2^a+2^{a+b}+2.2^b}{2^{a+b}+2.2^a+2.2^b+4}=\dfrac{4+2.2^a+4+2.2^b}{4+2.2^a+2.2^b+4}=1$.

Do đó với $a+b=2$ thì $f(a)+f(b)=1$.

Áp dụng ta được $f(0)+f\left(\dfrac{1}{10}\right)+...+f\left(\dfrac{19}{10}\right)$

$=f(0)+\left[f\left(\dfrac{1}{10}\right)+f\left(\dfrac{19}{10}\right)\right]+\left[f\left(\dfrac{2}{10}\right)+f\left(\dfrac{18}{10}\right)\right]+...+\left[f\left(\dfrac{9}{10}\right)+f\left(\dfrac{11}{10}\right)\right]+f(1)$

$=\dfrac{1}{3}+9.1+\dfrac{2}{4}=\dfrac{59}{6}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133