

Ths. Lê Văn Đoàn

Chuyên luyện thi tuyển sinh vào 10, tốt nghiệp THPT, Đại học, ĐGNL...

Facebook: <https://www.facebook.com/levan.doan.902> – Zalo: 0933.755.607

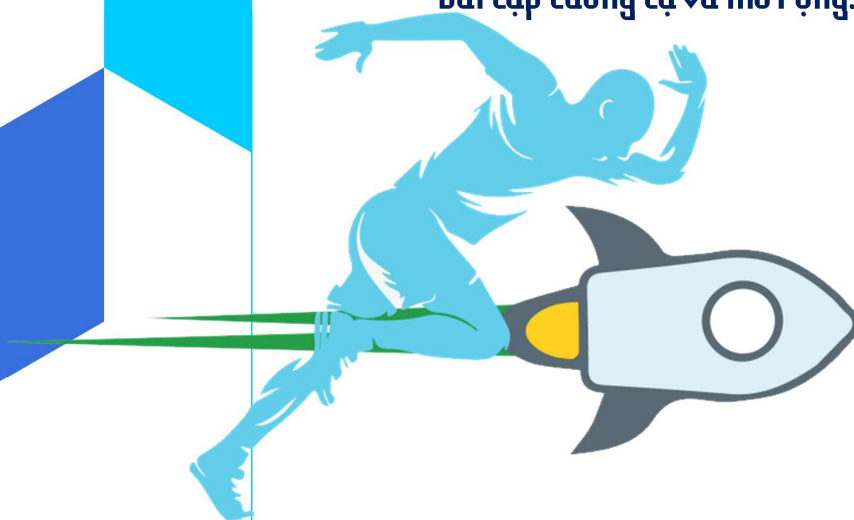
2021

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO

MÔN

TOÁN

- ☛ Giải chi tiết đề tham khảo.
- ☛ Kiến thức cần nắm vững.
- ☛ Bài tập tương tự và mở rộng.



Cuốn sách này của

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021



Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh từ một nhóm có 5 học sinh ?

A. $5!$.

B. A_5^3 .

C. C_5^3 .

D. 5^3 .

Lời giải tham khảo

Số cách chọn 3 học sinh từ một nhóm gồm 5 học sinh là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử có C_5^3 cách.

Chọn đáp án C.

Hoán vị - Tổ hợp - Chỉnh hợp

- ① Sắp xếp vị trí n phần tử $\Rightarrow$ Sử dụng hoán vị $P_n = n!$. (casio : n SHIFT x^{-1}).
- ② Chọn k trong n tùy ý $\Rightarrow$ Sử dụng tổ hợp $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. (casio : n SHIFT $\div$ k).
- ③ Chọn k trong n và sắp xếp $\Rightarrow$ Sử dụng chỉnh hợp $C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$. (n SHIFT $\times$ k).

Bài tập tương tự và mở rộng

1.1. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

A. A_{30}^3 .

B. 3^{30} .

C. 10.

D. C_{30}^3 .

1.2. Cho 8 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 8 điểm trên ?

A. 336.

B. 56.

C. 168.

D. 84.

1.3. Có n ($n > 0$) phần tử lấy ra k ($0 < k < n$) phần tử đem đi sắp xếp theo một thứ tự nào đó, mà khi thay đổi thứ tự ta được cách sắp xếp mới. Khi đó số cách sắp xếp là

A. C_n^k .

B. A_k^n .

C. A_n^k .

D. P_n .

1.4. Một tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó.

A. A_{10}^2 .

B. C_{10}^2 .

C. A_{10}^8 .

D. 10^2 .

1.5. Cho A là tập hợp gồm 20 điểm phân biệt. Số đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là

A. 170.

B. 160.

C. 190.

D. 360.

1.6. Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là

A. P_6 .

B. C_6^2 .

C. A_6^2 .

D. 36.

- 1.7.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc ?
 A. 5^5 . B. $5!$.
 C. $4!$. D. 5.
- 1.8.** Từ tập $X = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau ?
 A. 60. B. 125.
 C. 10. D. 6.
- 1.9.** Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ ?
 A. C_{38}^2 . B. A_{38}^2 .
 C. $C_{20}^2 C_{18}^1$. D. $C_{20}^1 C_{18}^1$.
- 1.10.** Một tổ có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh đi lao động trong đó có 2 học sinh nam ?
 A. $C_9^2 \cdot C_6^3$. B. $C_6^2 + C_9^3$.
 C. $A_6^2 \cdot A_9^3$. D. $C_6^2 \cdot C_9^3$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$. Giá trị của u_3 bằng

- A. 6. B. 9. C. 4. D. 5.

Lời giải tham khảo

Ta có: $d = u_2 - u_1 = 3 - 1 = 2$. Suy ra $u_3 = u_1 + 2d = 1 + 2 \cdot 2 = 5$. Chọn đáp án D.

Cấp số cộng	Cấp số nhân
① $u_{k+1} - u_k = d$: công sai.	① $\frac{u_{k+1}}{u_k} = q$: công bội.
② a, b, c là cấp số cộng $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$.	② a, b, c là cấp số nhân $\Leftrightarrow b^2 = ac$.
③ $u_n = u_1 + (n-1)d$.	③ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
④ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$.	④ $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Bài tập tương tự và mở rộng

- 2.1.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$, $u_6 = 27$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng
 A. 7. B. 5.
 C. 8. D. 6.
- 2.2.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Tìm số hạng u_{10} .
 A. $u_{10} = -2 \cdot 3^9$. B. $u_{10} = 25$.
 C. $u_{10} = 28$. D. $u_{10} = -29$.
- 2.3.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99} .
 A. 401. B. 403.
 C. 402. D. 404.

- 2.4.** Biết bốn số 5, x , 15, y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng
- A. 50. B. 70.
C. 30. D. 80.
- 2.5.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60$. Tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng
- A. 600. B. 60.
C. 250. D. 500.
- 2.6.** Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Giá trị của n bằng
- A. 9. B. 11.
C. 12. D. 10.
- 2.7.** Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 1$ và $u_4 = 64$. Công bội của cấp số nhân bằng
- A. 21. B. ± 4 .
C. 4. D. $2\sqrt{2}$.
- 2.8.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_2 bằng
- A. -6. B. 6.
C. 1. D. -18.
- 2.9.** Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) có $u_4 - u_2 = 54$ và $u_5 - u_3 = 108$.
- A. $u_1 = 3$ và $q = 2$. B. $u_1 = 9$ và $q = 2$.
C. $u_1 = 9$ và $q = -2$. D. $u_1 = 3$ và $q = -2$.
- 2.10.** Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$. Giá trị của n bằng
- A. 7. B. 6.
C. 8. D. 9.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	-1	1	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng sau đây ?

- A. $(-2; 2)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Từ bảng biến thiên, suy ra $y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -2)$, $x \in (0; 2)$. Chọn đáp án B.

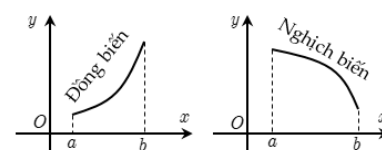
Đơn điệu (đồng biến và nghịch biến)

Định lí (thừa nhận): Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0$, $\forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) < 0$, $\forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0$, $\forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .



Bài tập tương tự và mở rộng

3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(0;1)$.
 B. $(-\infty;0)$.
 C. $(1;+\infty)$.
 D. $(-1;0)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-2	3	-2	$+\infty$

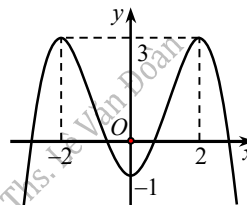
3.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(-2;+\infty)$.
 B. $(-2;3)$.
 C. $(3;+\infty)$.
 D. $(-\infty;-2)$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		1	4		$-\infty$

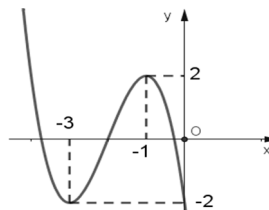
3.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A. $(-1;3)$.
 B. $(-\infty;-2)$.
 C. $(-\infty;3)$.
 D. $(-2;2)$.



3.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(-\infty;-3)$.
 B. $(-3;-1)$.
 C. $(-2;2)$.
 D. $(-2;-1)$.



3.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

3.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

3.7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

3.8. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

3.9. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

3.10. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Điểm cực trị đại của hàm số đã cho là

A. $x = -3$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = -2$.

Lời giải tham khảo

Từ bảng biến thiên, thấy y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x = -2$ nên $x = -2$ là điểm cực đại.

Chọn đáp án D.

Cực trị

• **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

• **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **âm sang dương** khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **dương sang âm** khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm x_0 .

- **Định lý 3:** Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Cần nhớ: Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$ (hay y_{CB} hoặc y_{CT}). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

Bài tập tương tự và mở rộng

- 4.1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$			

Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
 B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

- 4.2.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		0		$+\infty$
		-3		-3	

Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

- A. Hàm số có đúng hai điểm cực trị.
 B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 và 1.
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

- 4.3.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

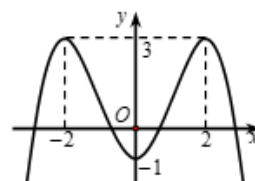
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+
y	$-\infty$	2	-3	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** ?

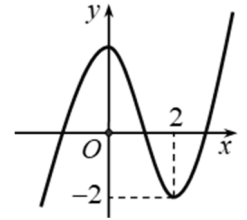
- A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.
 B. Hàm số có đúng một cực trị.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

- 4.4.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị cực đại của hàm số là

- A. $x = \pm 2$.
 B. $y_{CB} = -1$.
 C. $y_{CB} = 3$.
 D. $M(2; 3)$.



4.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
 D. Hàm số có ba điểm cực trị.

4.6. Gọi x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Giá trị $x_1 + 2x_2$ bằng

- A. 2. **B.** 1.
 C. -1 . D. 0.

4.7. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có tọa độ là

- A. $(-1; 1)$. **B.** $(2; 0)$.
 C. $(1; 1)$. **D.** $(0; 2)$.

4.8. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi

- A. $m > 0$. **B.** $m = 0$.
 C. $m < 0$. D. $m \neq 0$.

4.9. Cho hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$. Biết rằng đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1; 4)$ là điểm cực tiểu. Tổng $2a + b$ bằng

- A. -1 . **B.** 0.
C. 1. D. 2.

4.10. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

- A.** $m = \frac{3}{2}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$.
 C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải tham khảo

Từ bảng xét dấu, ta có $f'(x)$ đổi dấu 4 lần $\Rightarrow$ có 4 điểm cực trị. Chọn đáp án A.

Bài tập tương tự và mở rộng

5.1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. **B.** 0.
C. 2. D. 1.

5.2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Tìm giá trị cực đại y_{CB} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

- A. $y_{CB} = 3, y_{CT} = -2$.
 B. $y_{CB} = 2, y_{CT} = 0$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

C. $y_{CB} = -2, y_{CT} = 2.$

D. $y_{CB} = 3, y_{CT} = 0.$

5.3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

5.4. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = -2(x-1)^2(x+1)$. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng về hàm số $f(x)$.

A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.

C. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

D. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

5.5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (e^x - 1)(x^2 - x - 2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

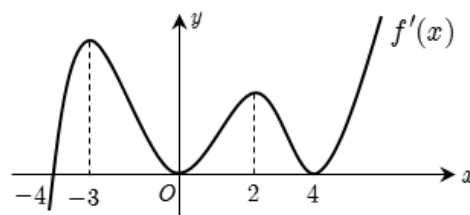
5.6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K , hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.



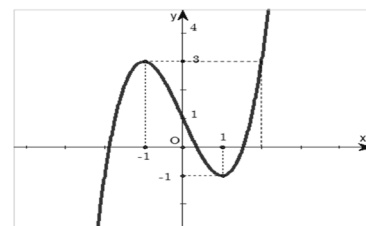
5.7. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x) - 3x + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



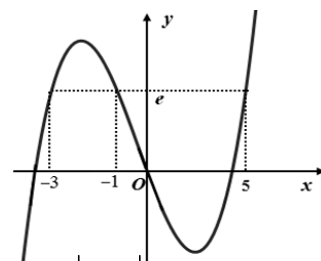
5.8. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x) - ex + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



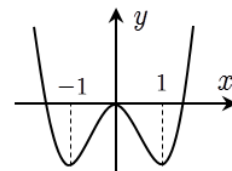
5.9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



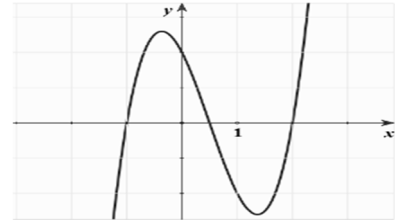
5.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-1}$ là đường thẳng

A. $x = 1$.B. $x = -1$.C. $x = 2$.D. $x = -2$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{x-1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+4}{x-1} = +\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng. **Chọn đáp án A.**

Đường tiệm cận

① Tìm đường tiệm cận ngang $\xrightarrow{\text{Tính}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \text{một số cụ thể } \alpha \Rightarrow y = \alpha$ là tiệm cận ngang.

② Tìm đường tiệm cận đứng $\xrightarrow{\text{Tính}} \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} y = \pm\infty \Rightarrow x = x_0$ là tiệm cận đứng.

• Đối với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$ Tiệm cận đứng cho mẫu $cx+d=0$ và tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

Bài tập tương tự và mở rộng

6.1. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$?

A. $y = 2$.B. $y = 4$.C. $y = \frac{1}{2}$.D. $y = -2$.

6.2. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

A. $y = 5$.B. $x = 0$.C. $x = 1$.D. $y = 0$.

6.3. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) .

A. $I(-2;2)$.B. $I(2;2)$.C. $I(2;-2)$.D. $I(-2;-2)$.

6.4. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ bằng

A. $\sqrt{5}$.

B. 5.

C. $\sqrt{3}$.D. $\sqrt{2}$.

6.5. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$?

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

6.6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ là đường thẳng

- A. $x = -2$. B. $y = -2$.
C. $x = -1, x = -2$. D. $x = -1$.

6.7. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x}}{x - 1}$ là

- A. 1. B. 2.
C. 0. D. 3.

6.8. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2 - 2x - 8}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 1. B. 0.
C. 3. D. 2.

6.9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận ?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-		- 0 +		
$f(x)$	3		$+\infty$	-2	5

- A. 3. B. 1.
C. 2. D. 4.

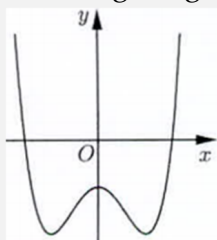
6.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		+	-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	-2	$+\infty$

- A. 3. B. 4.
C. 2. D. 1.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên ?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.



Lời giải tham khảo

Đồ thị có dáng chữ W $\Rightarrow$ đồ thị bậc bốn trùng phương và $a > 0$. Chọn đáp án B.

① Nhận dạng đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$).

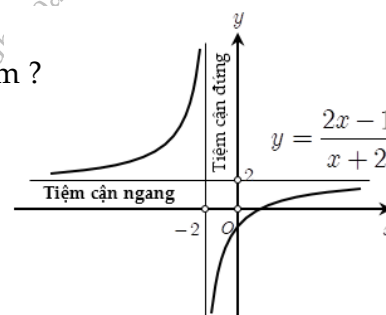
- Hình dáng: (nhận dạng được dấu của a): $N : a > 0$. $H : a < 0$.
- Nhận dạng dấu của c :
 - Nếu 2 cực trị nằm hai bên trục $Oy \Leftrightarrow ac < 0$. Còn nếu có 1 cực trị $\in Oy \Rightarrow c = 0$.
 - Nếu 2 cực trị nằm cùng bên so $Oy \Rightarrow ac > 0$.
- Nhận dạng dấu của hệ số d : Đồ thị $(C) \cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = d$ xem dương hay âm.
- Điểm đặc biệt trên đồ thị.

② Nhận dạng đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$).

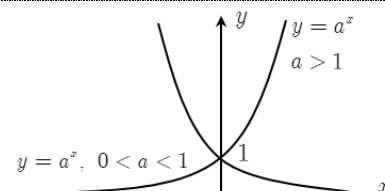
- Hình dáng: (nhận dạng được dấu của a và b):
 - $M : \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.
 - $W : \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
 - $U : \begin{cases} ab \geq 0 \\ a > 0 \end{cases}$.
 - $\cap : \begin{cases} ab \geq 0 \\ a < 0 \end{cases}$.
- Tương giao (nhận dạng được dấu của c) Cắt $Oy : x = 0 \Rightarrow y = c$ xem dương hay âm?

③ Nhận dạng đồ thị hàm số nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

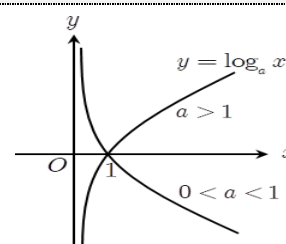
- Tiệm cận:
 - Tiệm cận đứng $cx + d = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c}$ xem dương hay âm?
 - Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ dương hay âm?
- Đơn điệu: $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$. Xem đồ thị (C) từ trái sang phải:
 - Nếu đi lên $\Rightarrow$ HS đồng biến $\Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$.
 - Nếu đi xuống $\Rightarrow$ HS nghịch biến $\Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - bc < 0$.
- Tương giao với hai trục tọa độ:
 - Cắt trục $Ox : y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ xem dương hay âm?
 - Cắt trục $Oy : x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$ xem dương hay âm?
- Điểm đặc biệt trên đồ thị.

**④ Nhận dạng đồ thị hàm số mũ $y = a^x$.**

- Đồ thị nằm trên trục Ox .
- Từ trái sang phải nếu đồ thị (C) :
 - Đi lên $\Rightarrow$ Đồng biến $\Rightarrow a > 1$.
 - Đi xuống $\Rightarrow$ Nghịch biến $\Rightarrow 0 < a < 1$.

**⑤ Nhận dạng đồ thị hàm số lôgarit $y = \log_a x$.**

- Đồ thị hàm số nằm bên trái Oy .
- Từ trái sang phải nếu đồ thị (C)
 - Đi lên $\Rightarrow$ ĐB $\Rightarrow a > 1$.
 - Đi xuống $\Rightarrow 0 < a < 1$.



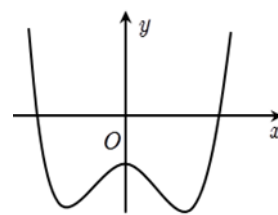
Bài tập tương tự và mở rộng**7.1.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = -x^3 + x^2 - 1.$

B. $y = x^4 - x^2 - 1.$

C. $y = x^3 - x^2 - 1.$

D. $y = -x^4 + x^2 - 1.$

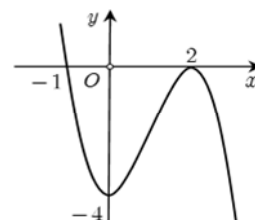
**7.2.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = -x^3 - 4.$

B. $y = x^3 - 3x^2 - 4.$

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 4.$

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2.$

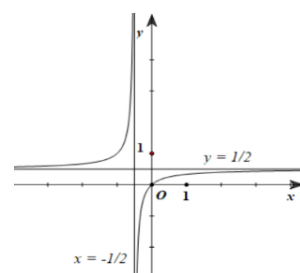
**7.3.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = \frac{x+1}{2x+1}.$

B. $y = \frac{x}{2x+1}.$

C. $y = \frac{x-1}{2x+1}.$

D. $y = \frac{x+3}{2x+1}.$

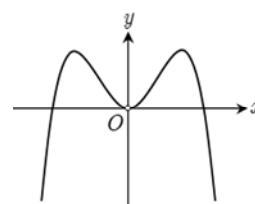
**7.4.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = x^4 - 2x^2.$

B. $y = x^4 + 2x^2.$

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1.$

D. $y = -x^4 + 2x^2.$

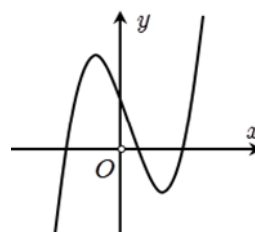
**7.5.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = -x^2 + x - 1.$

B. $y = -x^3 + 3x + 1.$

C. $y = x^4 - x^2 + 1.$

D. $y = x^3 - 3x + 1.$

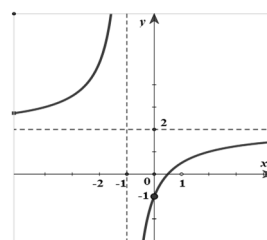
**7.6.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}.$

B. $y = \frac{2x+1}{x-1}.$

C. $y = \frac{2x+1}{x+1}.$

D. $y = \frac{1-2x}{x-1}.$

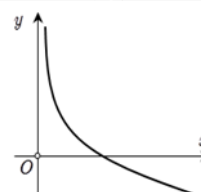
**7.7.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = 2^x.$

B. $y = \log_2 x.$

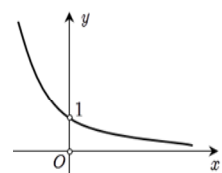
C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$

D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x.$

**7.8.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x.$

B. $y = \log_2 x.$

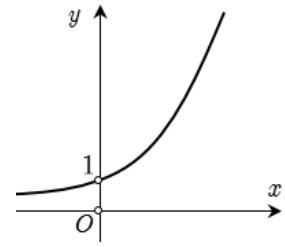


C. $y = \frac{1}{2^x}$. D. $y = 2^x$.

7.9. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

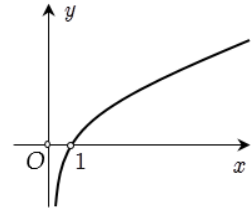
C. $y = \log_3 x$. D. $y = 2^x$.



7.10. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = e^x$. B. $y = \log_{\sqrt{e}} x$.

C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. D. $y = \frac{1}{e^x}$.



Câu 8. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\begin{cases} y = x^3 - 3x + 2 \\ Oy : x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2$. Chọn đáp án C.

Tương giao của hai đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) .

- Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là số điểm chung của hai đồ thị (C_1) và (C_2) .
- Phương trình $f(x) = g(x)$ được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Bài tập tương tự và mở rộng

8.1. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm ?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

8.2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và $y = -x^2 + 4$ là

A. 0.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

8.3. Biết đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại một điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

A. $y_0 = 4$.

B. $y_0 = 0$.

C. $y_0 = 2$.

D. $y_0 = -1$.

8.4. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

A. $A(4; 3)$, $B(0; -1)$.

B. $C(-1; 3)$.

C. $D(3; -1)$.

D. $I(-1; 0)$, $J(3; 4)$.

8.5. Tìm tập hợp m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 1 - x$ tại 2 điểm phân biệt ?

- A. $(-\infty; 2]$.
 B. $(-\infty; 2)$.
 C. $(-\infty; -2)$.
 D. $(2; +\infty)$.

8.6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 2x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$.

- A. $-\frac{3}{2} < m \neq -1$.
 B. $m \geq -\frac{3}{2}$.
 C. $-\frac{3}{2} \leq m \neq -1$.
 D. $m > -\frac{3}{2}$.

8.7. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^3 + (m-1)x + 5$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 ?

- A. $m = \frac{1}{2}$.
 B. $m = -\frac{1}{2}$.
 C. $m = \frac{15}{2}$.
 D. $m = -\frac{15}{2}$.

8.8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = 2m - 3$ tại ba điểm phân biệt ?

- A. $0 < m < 4$.
 B. $0 < m \leq 2$.
 C. $-3 < m < 1$.
 D. $0 < m < 2$.

8.9. Tìm tập hợp m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2m^2 + 2m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $(-2; -2) \cup (-1; 1)$.
 B. $(1; +\infty)$.
 C. $(-2; 0)$.
 D. $(-1; 0) \cup (1; 2)$.

8.10. Tìm tập hợp m để đường thẳng $y = mx + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có 3 điểm chung.

- A. $m > -3$.
 B. $m > 3$.
 C. $m < -3$.
 D. $m < 3$.

8.11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hai hàm số $y = x^3 - 2x^2 - mx + 2$ và $y = x^2 - m$ có một điểm chung duy nhất.

- A. $m = -3$.
 B. $m < -3$.
 C. $m \leq 3$.
 D. $m \leq -3$.

8.12. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - m^2 - 1$ với trục hoành (với m là tham số).

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

8.13. Tìm tập hợp m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 2$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt.

- A. $(2; +\infty)$.
B. $(-\infty; 1)$.
C. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
D. $(0; +\infty)$.

8.14. Tìm các giá trị của m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ tại bốn điểm phân biệt.

- A. $\begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}$.
B. $-1 \leq m \leq 0$.
C. $\begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < 0 \end{cases}$.
D. $\begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

8.15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(2m + 1)x^2 + 4m^2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6$.

- A. $m = \frac{1}{4}$.
B. $m > -\frac{1}{2}$.
C. $m > -\frac{1}{4}$.
D. $m \geq -\frac{1}{4}$.

Câu 9. Với a là số thực tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_3 a$.
B. $2 \log_3 a$.
C. $(\log_3 a)^2$.
D. $2 + \log_3 a$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\log_3(9a) = \log_3 9 + \log_3 a = 2 + \log_3 a$. Chọn đáp án D.

Công thức mũ & lôgarit

Cho a và b là các số thực dương x và y là những số thực tùy ý.

$$\textcircled{1} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ số } a}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b} \right)^x$$

2 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	7 $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$
3 $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	8 $[u(x)]^0 = 1, \forall u(x) \neq 0$
4 $a^{x \cdot y} = (a^x)^y = (a^y)^x$	9 $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$.

1 $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$	6 $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
2 $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$	7 $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
3 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	8 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \Rightarrow \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$
4 $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$	9 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow b = a^{\log_a b}$
5 $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	10 $\log_e b = \ln b$ và $\log_{10} b = \log b$

Bài tập tương tự và mở rộng

9.1. Cho b là số thực dương khác 1. Giá trị của $\log_b (b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}})$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

9.2. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a (a \cdot \sqrt[3]{a^2})$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{5}{2}$.

9.3. Cho a là số thực dương khác 4. Giá trị của $\log_{\frac{a}{4}} \left(\frac{a^3}{64} \right)$ bằng

A. 3.

B. $\frac{1}{3}$.

C. -3.

D. $-\frac{1}{3}$.

9.4. Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Giá trị của $\log_a (x^2 y^3)$ bằng

A. 3.

B. 10.

C. -14.

D. 65.

9.5. Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, giá trị của $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ bằng

A. 18.

B. 24.

C. 12.

D. 6.

9.6. Cho a là số thực dương thỏa mãn $a \neq 10$, mệnh đề nào dưới đây **sai** ?

- A. $\log(10.a) = 1 + \log a$.
 B. $-\log\left(\frac{10}{a}\right) = \log a - 1$.
 C. $\log(10^a) = a$.
 D. $\log(a^{10}) = a$.

9.7. Với các số thực x, y dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. $\log_2(x+y) = \log_2 x + \log_2 y$.
 B. $\log_2(xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y$.
 C. $\log_2\left(\frac{x^2}{y}\right) = 2\log_2 x - \log_2 y$.
 D. $\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$.

9.8. Cho a là một số thực dương. Khi đó $a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ bằng

- A. $a^{\frac{1}{15}}$.
 B. $a^{\frac{2}{5}}$.
 C. $a^{-\frac{1}{15}}$.
 D. $a^{\frac{19}{15}}$.

9.9. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2^x = 3$ và $3^y = 4$. Giá trị biểu thức $8^x + 9^y$ bằng

- A. 43.
 B. 17.
 C. 24.
 D. $\log_2^3 3 + \log_3^2 4$.

9.10. Cho hai số thực dương a và b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta được

- A. $A = \sqrt[6]{ab}$.
 B. $A = \sqrt[3]{ab}$.
 C. $A = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$.
 D. $A = \frac{1}{\sqrt[6]{ab}}$.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $y' = 2^x \ln 2$.
 B. $y' = 2^x$.
 C. $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$.
 D. $y' = x \cdot 2^{x-1}$.

Lời giải tham khảo

Theo công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ thì $y = 2^x$ có đạo hàm $y' = 2^x \ln 2$. **Chọn đáp án A.**

Đạo hàm của hàm số mũ và lôgarit

- $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.
 • $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
 • $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

Bài tập tương tự và mở rộng

10.1. Hàm số $y = 2^{2x^2+x}$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.
 B. $y' = (4x+1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.
 C. $y' = (2x^2+x) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.
 D. $y' = (4x+1) \cdot \ln(2x^2+x)$.

10.2. Hàm số $y = e^{1-2x}$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2e^{1-2x}$.
 B. $y' = e^{1-2x}$.

C. $y' = -2e^{1-2x}$.

D. $y' = -2e^{1-2x}$.

10.3. Hàm số $y = 2^{2x+3}$ có đạo hàm là

A. $2^{2x+2} \ln 4$.

B. $4^{x+2} \ln 4$.

C. $2^{2x+2} \ln 16$.

D. $2^{2x+3} \ln 2$.

10.4. Hàm số $y = 8^{x^2+1}$ có đạo hàm là

A. $2x.8^{x^2}$.

B. $2x.8^{x^2} \ln 4$.

C. $(x^2 + 1).8^{x^2}$.

D. $6x.8^{x^2+1} \ln 2$.

10.5. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x + 1)$ là

A. $\frac{2}{(2x + 1) \ln x}$.

B. $\frac{2}{(2x + 1) \ln 2}$.

C. $\frac{2 \ln 2}{x + 1}$.

D. $\frac{2}{(x + 1) \ln 2}$.

10.6. Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm là

A. $\frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$.

B. $\frac{1}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

C. $\frac{(2x - 2) \ln 2}{x^2 - 2x}$.

D. $\frac{2x - 2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

10.7. Đạo hàm của hàm số $y = \log(x^2 - x)$ là

A. $\frac{1}{(x^2 - x) \ln 10}$.

B. $\frac{2x - 1}{x^2 - x}$.

C. $\frac{2x - 1}{(x^2 - x) \log e}$.

D. $\frac{2x - 1}{x^2 - x} \cdot \log e$.

10.8. Cho hàm số $y = x^\pi$. Giá trị của $y''(1)$ bằng

A. $\ln^2 \pi$.

B. $\pi \ln \pi$.

C. 0.

D. $\pi(\pi - 1)$.

10.9. Hãy tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\frac{7}{6} \cdot \sqrt[6]{x}$.

B. $\sqrt[9]{x}$.

C. $\frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$.

D. $\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$.

10.10. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2^2(2x + 1)$ là

A. $\frac{2 \log_2(2x + 1)}{(2x + 1) \ln 2}$.

B. $\frac{4 \log_2(2x + 1)}{(2x + 1) \ln 2}$.

C. $\frac{4 \log_2(2x + 1)}{2x + 1}$.

D. $\frac{2}{(2x + 1) \ln 2}$.

Câu 11. Với a là hai số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

- A. a^6 . B. $a^{\frac{3}{2}}$. C. $a^{\frac{2}{3}}$. D. $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải tham khảo

Theo công thức $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, ta có $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$. Chọn đáp án B.

Bài tập tương tự và mở rộng

11.1. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = x^{\frac{1}{8}}$. B. $P = x^{\frac{2}{9}}$.
C. $P = \sqrt{x}$. D. $P = x^2$.

11.2. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$

- A. $Q = b^2$. B. $Q = b^{\frac{5}{9}}$.
C. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. D. $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

11.3. Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x^{\frac{1}{2}}$. B. $P = x^{\frac{13}{24}}$.
C. $P = x^{\frac{1}{4}}$. D. $P = x^{\frac{2}{3}}$.

11.4. Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$.

- A. $P = 1$. B. $P = 7 - 4\sqrt{3}$.
C. $P = 7 + 4\sqrt{3}$. D. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$.

11.5. Giá trị của biểu thức $(1 + \sqrt{3})^{2016} (3 - \sqrt{3})^{2016}$ bằng

- A. 12^{1008} . B. 4^{1008} .
C. $(1 + \sqrt{3})^{1008}$. D. $(3 - \sqrt{3})^{1008}$.

11.6. Với a và b là hai số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{\sqrt{a}}(a\sqrt{b})$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_a b$. B. $2 + \frac{1}{2} \log_a b$.
C. $2 + \log_a b$. D. $1 + 2 \log_a b$.

11.7. Với $a, b > 0$ và $a \neq 1$, thì $\log_{\sqrt[3]{a}}(a^2 \sqrt{b})$ bằng

- A. $\frac{1}{6} \log_a b$. B. $\frac{3}{2} \log_a b$.
C. $6 + \frac{3}{2} \log_a b$. D. $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \log_a b$.

11.8. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = 10$. Giá trị của $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b$ bằng

- A. 0. B. 1.

C. 10.

D. -1.

11.9. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{ab^3} = 27$. Giá trị của $\log_3 a + 6\log_3 b$ bằng

A. 3.

B. 6.

C. 9.

D. 1.

11.10. Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{9^b}{3^a} \right) = \log_{\frac{1}{27}} \sqrt[3]{3}$. Mệnh đề nào **đúng** ?

A. $a - 2b = \frac{1}{18}$.

B. $a + 2b = \frac{1}{18}$.

C. $2b - a = \frac{1}{18}$.

D. $2a - b = \frac{1}{18}$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $5^{2x-4} = 25$ là

A. $x = 3$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $5^{2x-4} = 25 \Leftrightarrow 2x - 4 = \log_5 25 = 2 \Leftrightarrow x = 3$. Chọn đáp án A.

Phương trình mũ cơ bản (với điều kiện xác định)

• $a^x = b > 0 \Leftrightarrow x = \log_a b$.

• $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Bài tập tương tự và mở rộng

12.1. Nghiệm phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

A. $x = 5$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 4$.

12.2. Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

A. $x = \frac{3}{2}$.

B. $x = \frac{5}{2}$.

C. $x = 1$.

D. $x = 3$.

12.3. Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} = 1$ là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

12.4. Phương trình $2^{2x^2+5x+4} = 4$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $-\frac{5}{2}$.

12.5. Tích số của tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

12.6. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-x\ln 2+1} = 4$ bằng

A. $1 + 2\log_3 2$.

B. $1 - 2\log_3 2$.

C. $1 - 2\ln 2$.

D. $1 + 2\ln 2$.

12.7. Nghiệm của phương trình $3^x \cdot 5^{x-1} = 7$ là

A. $x = \log_{15} 35$.

B. $x = \log_{21} 5$.

C. $x = \log_{21} 35$.

D. $x = \log_{15} 21$.

12.8. Nghiệm của phương trình $3^{x+5} - 3^x = 121$ là

A. $x = \log_2 3$.

B. $x = -\log_3 2$.

C. $x = \log_3 2$.

D. $x = -\log_2 3$.

12.9. Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $9^{x-1} = 3^{x^2-2}$. Giá trị $2^{x_1} + 3^{x_2}$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 11.

D. 28.

12.10. Tích các nghiệm của phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3 - 2\sqrt{2})^{x^3-2}$ bằng

A. 0.

B. -2.

C. -1.

D. 1.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\log_2(3x) = 3$ là

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $x = \frac{8}{3}$.

D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải tham khảo

$$\log_2(3x) = 3 \Leftrightarrow 3x = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}. \text{ Chọn đáp án C.}$$

Phương trình mũ & lôgarit cơ bản (với điều kiện xác định)

$$\bullet \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b. \quad \bullet \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Bài tập tương tự và mở rộng**13.1.** Nghiệm của phương trình $\log_2(x - 5) = 4$ là

A. $x = 3$.

B. $x = 13$.

C. $x = 21$.

D. $x = 11$.

13.2. Phương trình $\log_3(x^2 - 10x + 9) = 2$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} x = 10 \\ x = 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -2 \\ x = 9 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 10 \\ x = 9 \end{cases}$.

13.3. Nghiệm của phương trình $\ln(4 - x) = 100$ là

A. $x = e^{100} - 4$.

B. $x = 4 - 10^{100}$.

C. $x = 4 - e^{100}$.

D. $x = 10^{100} - 4$.

13.4. Nghiệm của phương trình $\log(x - 1) = 2$ là

A. $x = 101$.

B. $x = e^2 + 1$.

C. $x = e^2 - 1$.

D. $x = \pi^2 + 1$.

13.5. Nghiệm của phương trình $\log 10^{100x} = 250$ thuộc khoảng

A. $(0; 2)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; 0)$.

13.6. Nghiệm của phương trình $\log_3(\log_2 x) = 1$ là

A. $x = 8$.

B. $x = 6$.

C. $x = 9$.

D. $x = 2$.

13.7. Nghiệm của phương trình $\log_2(3^{3x-1} - 1) = 3$ là

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3$.

D. $x = 8$.

13.8. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x + 1) - \log_3(x - 1) = 1$ là

A. $x = 4$.

B. $x = 3$.

C. $x = -2$.

D. $x = 1$.

13.9. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$

A. $S = \{-3; 3\}$.

B. $S = \{4\}$.

C. $S = \{3\}$.

D. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

13.10. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x - 3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$ là

A. $\{5\}$.

B. $\{4; 5\}$.

C. $\{4\}$.

D. $\{2; 4\}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

A. $\int f(x)dx = 3x^2 - x + C$.

B. $\int f(x)dx = x^3 - x + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$.

D. $\int f(x)dx = x^3 - C$.

Lời giải tham khảo

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản thì $\int f(x)dx = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C$. Chọn đáp án B.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

① $\int 0dx = C$.

$\longrightarrow \int kdx = kx + C$.

② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

$\longrightarrow \int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C$.

③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

$\longrightarrow \int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C$.

④ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$.

$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax + b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax + b} + C$.

⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

$\longrightarrow \int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$.

⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(ax + b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)} = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C.$
⑨ $\int e^x dx = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\ln a} + C.$

♦ **Nhận xét.** Khi thay x bằng $(ax + b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Một số công thức cần nhớ

- Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$.
- $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$
- $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$
- $\int \frac{1}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{2}{a} \sqrt{ax + b} + C.$
- $\int \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax + b)^3} + C.$

Bài tập tương tự và mở rộng

14.1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C.$

B. $3x^2 + 1 + C.$

C. $x^3 + x + C.$

D. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$

14.2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2$ là

A. $x^7 + \ln |x| - \frac{1}{x} - 2x.$

B. $x^7 + \ln |x| + \frac{1}{x} - 2x + C.$

C. $x^7 + \ln x + \frac{1}{x} - 2x + C.$

D. $x^7 + \ln |x| - \frac{1}{x} - 2x + C.$

14.3. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$ là

A. $5^x + C.$

B. $5^x \ln 5 + C.$

C. $\frac{5^x}{\ln 5} + C.$

D. $\frac{5^{x+1}}{x+1} + C.$

14.4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{5x}$ là

A. $e^{5x} \ln 5 + C.$

B. $\frac{1}{5} e^{5x} + C.$

C. $5e^{5x} + C.$

D. $e^{5x} + C.$

14.5. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ là

A. $2\ln\left(2x - \frac{3}{2}\right) + C.$

B. $\frac{1}{2}\ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C.$

C. $\frac{1}{2}\ln\left(2x - \frac{3}{2}\right) + C.$

D. $\frac{1}{4}\ln|4x - 3| + C.$

14.6. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ thỏa mãn $F(1) = 4$ là

A. $x^3 - x^2 + 5x - 3.$

B. $x^3 + x^2 + 5x - 3.$

C. $x^3 + x^2 - 5x + 3.$

D. $x^3 + x^2 + 5x + 3.$

14.7. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)^8$ là

A. $\frac{(2x-1)^9}{9} + C.$

B. $\frac{(1-2x)^9}{18} + C.$

C. $\frac{(2x-1)^9}{18} + C.$

D. $\frac{(1-2x)^9}{9} + C.$

14.8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x$ là

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C.$

B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C.$

C. $84^x + C.$

D. $84^x \cdot \ln 84 + C.$

14.9. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$ là

A. $\frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$

B. $\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$

C. $-\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+3} + C.$

14.10. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ là

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\sqrt{2x+1} + C.$

C. $2\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sin 2x + C.$

D. $\int f(x)dx = -2\sin 2x + C.$

Lời giải tham khảo

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản: $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$. **Chọn A.**

Bài tập tương tự và mở rộng

15.1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ là

A. $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + C.$

B. $\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + C.$

C. $\cos 2x + \sin 3x + C.$

D. $-\cos 2x - \sin 3x + C.$

15.2. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos 2x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ là

A. $\frac{1}{2}\sin 2x + 2\pi.$

B. $x + \sin 2x + \frac{3\pi}{2}.$

C. $\sin x + 2\pi.$

D. $2x + 2\pi.$

15.3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cos x$ là

A. $\frac{1}{4}\cos 2x + C.$

B. $-\frac{1}{4}\cos 2x + C.$

C. $\sin 2x + C.$

D. $-\sin x \cos x + C.$

15.4. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 4\cos^2 x - 5$ thỏa $F(\pi) = 0$. Hàm số $F(x)$ là

A. $-3x + \sin 2x + 3\pi.$

B. $\frac{4}{3}\cos^3 x - 5x + \frac{4}{3} + 5\pi.$

C. $-3x - \sin 2x + 3\pi.$

D. $\frac{4}{3}\sin^3 x - 5x + 5\pi.$

15.5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x \sin 2x$ là

A. $\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{14} + C.$

B. $\frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 7x}{14} + C.$

C. $\frac{\cos 3x}{6} + \frac{\cos 7x}{14} + C.$

D. $\frac{\sin 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{14} + C.$

15.6. Họ nguyên hàm hàm số $f(x) = \sin 5x \cos x$ là

A. $-\frac{1}{5}\cos 5x + C.$

B. $\frac{1}{5}\cos 5x + C.$

C. $-\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$

D. $\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{12}\cos 6x + C.$

15.7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là

A. $\tan x + C.$

B. $\tan x - x + C.$

C. $x - \tan x + C.$

D. $\tan x + x + C.$

15.8. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x + \tan x + C.$

B. $-\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1.$

C. $\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$

D. $-\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$

15.9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Khi đó hàm số $f(x)$ là

A. $\frac{x^2}{2} - \cos x + 2.$

B. $\frac{x^2}{2} - \cos x - 2.$

C. $\frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}.$

D. $\frac{x^2}{2} + \cos x.$

15.10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 + \cos 2x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $f(0) = \pi$.

B. $f(x) = 2x + \frac{\sin 2x}{2} + \pi$.

C. $f(x) = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + \pi$.

D. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Câu 16. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 5$ và $\int_2^3 f(x)dx = -2$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 3.

B. 7.

C. -10.

D. -7.

Lời giải tham khảo

Ta có $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 5 - 2 = 3$. Chọn đáp án A.

Tính chất của nguyên hàm và tích phân

- $F'(x) = f(x)$, $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.
- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx = \dots$
- $\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b$, $\int_a^b f''(x)dx = f'(x)\Big|_a^b \dots$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Bài tập tương tự và mở rộng

16.1. Cho $\int_1^3 f(x)dx = 2016$ và $\int_4^3 f(x)dx = 2017$, khi đó $\int_1^4 f(x)dx$ bằng

A. 4023.

B. 1.

C. -1.

D. 0.

16.2. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^2 [4f(x) - 3]dx$ bằng

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

16.3. Nếu $\int_0^9 f(x)dx = 37$ và $\int_9^0 g(x)dx = 16$ thì $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

A. 26.

B. 58.

C. 143.

D. 122.

16.4. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = -2$ thì $\int_0^2 [2x + f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

A. 18.

B. 5.

C. 11.

D. 3.

- 16.5.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2;3]$, đồng thời $f(2) = 2$ và $f(3) = 5$. Khi đó giá trị của tích phân $\int_2^3 f'(x)dx$ bằng
- A. -3 . B. 7 .
C. 10 . D. 3 .
- 16.6.** Cho hàm $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$, $f(-1) = 3$ và $\int_{-1}^3 f'(x)dx = 10$. Giá trị của $f(3)$ bằng
- A. -13 . B. -7 .
C. 13 . D. 7 .
- 16.7.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 6$. Khi đó $\int_0^3 f(x)dx$ bằng
- A. 8 . B. 12 .
C. 36 . D. 4 .
- 16.8.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{5}{2}$.
C. 1 . D. 2 .
- 16.9.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, nếu $\int_a^d f(t)dt = 5$ và $\int_b^d f(u)du = 2$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng
- A. 3 . B. 7 .
C. 5 . D. 10 .
- 16.10.** Nếu $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$ và $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6$ thì $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$ bằng
- A. 8 . B. 9 .
C. 6 . D. 7 .

Câu 17. Tích phân $\int_1^2 x^3 dx$ bằng

A. $\frac{15}{3}$.

B. $\frac{17}{4}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. $\frac{15}{4}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\int_1^2 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_1^2 = \frac{2^4 - 1^4}{4} = \frac{15}{4}$. Chọn đáp án D.

Bài tập tương tự và mở rộng

- 17.1.** Với m là tham số thực, ta có $\int_1^2 (2mx + 1)dx = 4$. Khi đó m thuộc tập hợp nào sau đây ?
- A. $(-3; -1)$. B. $[-1; 0)$.

C. $[0; 2)$.D. $[2; 6)$.

17.2. Tích phân $\int_1^2 e^{3x-1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$.B. $\frac{1}{3}e^5 - e^2$.C. $e^5 - e^2$.D. $e^5 + e^2$.

17.3. Tích phân $\int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

A. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$.B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$.C. $2^{2018} - 1$.D. 2^{2018} .

17.4. Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2 \ln \frac{7}{5}$.B. $\frac{1}{2} \ln 35$.C. $\ln \frac{7}{5}$.D. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

17.5. Giả sử $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó giá trị của $a - b$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$.B. $-\frac{1}{6}$.C. $-\frac{3}{10}$.D. $\frac{1}{5}$.

17.6. Biết $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \frac{\sqrt{a}}{3} - \frac{b}{c}$ với $a > 0$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $a + b^2 + c^3$ bằng

A. 32.

B. 45.

C. 96.

D. 134.

17.7. Nếu $\int_{-4}^{-2} \frac{3}{\sqrt{1-3x}} dx = a\sqrt{13} + b\sqrt{7}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $2a^2 - b^3$ bằng

A. 13.

B. 29.

C. -5.

D. -13.

17.8. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 2$ và $f'(x) = (e^{-x} + 1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $1 + \frac{1}{2} \ln 2$.B. $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$.C. $e - \frac{1}{2}$.D. $e + \frac{1}{2}$.

17.9. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 1$ và $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $1 + \frac{1}{2} \ln 2$.

B. $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{1}{2} \ln 3$.

D. $\frac{1}{2}$.

17.10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Khi đó $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. $6 + \ln 4$.

B. $4 + \ln 4$.

C. $6 + \ln 2$.

D. $2 + 2 \ln 2$.

Câu 18. Số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là

A. $\bar{z} = 3 - 2i$.

B. $\bar{z} = 2 + 3i$.

C. $\bar{z} = -3 + 2i$.

D. $\bar{z} = -3 - 2i$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$ nên $\bar{z} = 3-2i$. Chọn đáp án A.

Kiến thức cơ bản của số phức

- Số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Gọi a là phần thực và b là phần ảo của số phức z .
- Ta gọi $\bar{z} = a - bi$ là số phức liên hợp của z .
- Điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$.
- Môđun của số phức $z = a + bi$ là $|z| = \left| \overrightarrow{OM} \right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.
- Số phức là thuần ảo $\Rightarrow$ phần thực bằng 0 và số thực $\Rightarrow$ phần ảo bằng 0.

Bài tập tương tự và mở rộng

18.1. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

A. $\bar{z} = -2 + i$.

B. $\bar{z} = -2 - i$.

C. $\bar{z} = 2 - i$.

D. $\bar{z} = 2 + i$.

18.2. Tìm số phức liên hợp của $z = i(3i + 1)$.

A. $3 - i$.

B. $-3 + i$.

C. $3 + i$.

D. $-3 - i$.

18.3. Số phức liên hợp của $z = (1 - i)(3 + 2i)$ là

A. $1 + i$.

B. $5 + i$.

C. $5 - i$.

D. $1 - i$.

18.4. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{3+2i} = 1 - i$. Tìm số phức liên hợp $\bar{z}$.

A. $-5 - i$.

B. $1 - 5i$.

C. $5 + i$.

D. $-1 + 5i$.

18.5. Cho số phức z thỏa $\frac{(i-1)z+2}{1-2i} = 2 + 3i$. Đặt $\bar{z} = a + bi$, khi đó $a + b$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. -6.

D. 6.

18.6. Cho số phức z thỏa $(1+i)z = 14 - 2i$. Biết $\bar{z} = a + bi$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. -4.

B. 14.

C. 4.

D. -14.

18.7. Cho số phức $z = 2 + i$. Tìm $|z|$.A. $|z| = 3$.B. $|z| = 5$.C. $|z| = 2$.D. $|z| = \sqrt{5}$.**18.8.** Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$.A. $|z| = \sqrt{34}$.B. $|z| = 34$.C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.**18.9.** Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm môđun của số phức $w = (1+i)z - \bar{z}$.A. $|w| = 3$.B. $|w| = 5$.C. $|w| = -4$.D. $|w| = \sqrt{7}$.**18.10.** Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa điều kiện $3x + yi = 2y + 1 + (2-x)i$.

A. (1;1).

B. (1;1), (0;-1).

C. (1;0), (-1;-1).

D. (-1;-1).

Câu 19. Cho hai số phức $z = 3 + i$ và $w = 2 + 3i$. Số phức $z - w$ bằngA. $1 + 4i$.B. $1 - 2i$.C. $5 + 4i$.D. $5 - 2i$.**Lời giải tham khảo**Ta có $z - w = (3 + i) - (2 + 3i) = 1 - 2i$. Chọn đáp án B.**Bài tập tương tự và mở rộng****19.1.** Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. -2.

19.2. Cho các số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 2 + i$. Hỏi số phức $u = z \cdot \bar{w}$ có đặc điểm nào?

A. Phần thực là 4 và phần ảo là 3.

B. Phần thực là 0 và phần ảo là 3.

C. Phần thực là 0 và phần ảo là $3i$.D. Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.**19.3.** Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Phần ảo của số phức $z = z_1 - z_2$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. 3.

D. -3.

19.4. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tính số phức $z = z_1 + z_2$.A. $z = 7 - 4i$.B. $z = 2 + 5i$.C. $z = -2 + 5i$.D. $z = 3 - 10i$.**19.5.** Cho hai số phức $z = 1 + 3i$, $w = 2 - i$. Tìm phần ảo của số phức $u = \bar{z} \cdot w$.

A. -7.

B. $5i$.

- C. 5. D. $-7i$.
- 19.6.** Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực của số phức z^2 .
A. 9. B. 12.
C. 5. D. 13.
- 19.7.** Cho số phức $z = 1 - 2i$. Phần thực của số phức $w = z^3 - \frac{2}{z} + z\bar{z}$ là
A. $-\frac{33}{5}$. B. $-\frac{31}{5}$.
C. $-\frac{32}{5}$. D. $\frac{32}{5}$.
- 19.8.** Cho số phức z thỏa $(1 + i)\bar{z} - 1 - 3i = 0$. Tìm phần ảo của số phức $w = 1 - iz + z$.
A. Phần ảo là 1. B. Phần ảo là -3 .
C. Phần ảo là -2 . D. Phần ảo là -1 .
- 19.9.** Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z = (1 + i)^{10}$.
A. $a = 0, b = 32$. B. $a = 0, b = 32i$.
C. $a = 0, b = -32$. D. $a = 32, b = 0$.
- 19.10.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Giá trị của $a + b$ bằng
A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$.
C. -1 . D. 1.

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $3 - 2i$ có tọa độ là

- A. $(2; 3)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; 2)$. D. $(3; -2)$.

Lời giải tham khảo

Điểm biểu diễn của $z = a + bi$ có tọa độ là $(a; b)$ nên $3 - 2i$ biểu diễn bởi $(3; -2)$. Chọn đáp án D.

Bài tập tương tự và mở rộng

- 20.1.** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 2i$?
A. $P(-3; 2)$. B. $Q(2; -3)$.
C. $N(3; -2)$. D. $M(-2; 3)$.
- 20.2.** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1; 2)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Phần thực của z bằng
A. 1. B. 2.
C. -2 . D. -1 .
- 20.3.** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3; 1)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng
A. 1. B. -3 .
C. -1 . D. 3.
- 20.4.** Cho hai số phức $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là
A. $(5; -1)$. B. $(-1; 5)$.
C. $(5; 0)$. D. $(0; 5)$.

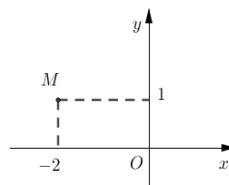
- 20.5.** Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 + i$. Trên mặt phẳng Oxy , điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là
- A. (2;5). B. (3;5).
C. (5;2). D. (5;3).

- 20.6.** Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là
- A. (4;-1). B. (-1;4).
C. (4;1). D. (1;4).

- 20.7.** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây ?
- A. $P(-3;4)$. B. $Q(5;4)$.
C. $N(4;-3)$. D. $M(5;4)$.

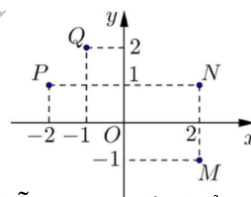
- 20.8.** Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

- A. $z = -2 + i$.
B. $z = 1 - 2i$.
C. $z = 2 + i$.
D. $z = 1 + 2i$.



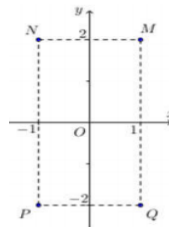
- 20.9.** Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

- A. N .
B. P .
C. M .
D. Q .



- 20.10.** Cho số phức z thỏa $(1 + i)z = 3 - i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm sau ?

- A. Điểm P .
B. Điểm Q .
C. Điểm M .
D. Điểm N .



Câu 21. Một khối chóp có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 6. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. 10.

B. 30.

C. 90.

D. 15.

Lời giải tham khảo

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S.h$ với S là diện tích đáy, h là chiều cao nên $V = \frac{6 \times 6}{3} = 12$.

Chọn đáp án A.

① **Thể tích khối chóp** $V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot \text{chiều cao}$. **Đặc biệt:** $V_{\text{Tứ diện đều}} = \frac{(\text{cạnh})^3 \times \sqrt{2}}{12}$.

Xác định diện tích đáy

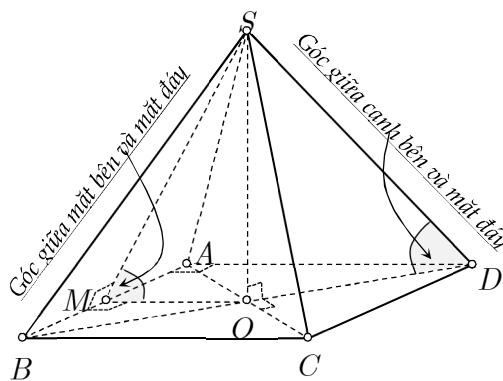
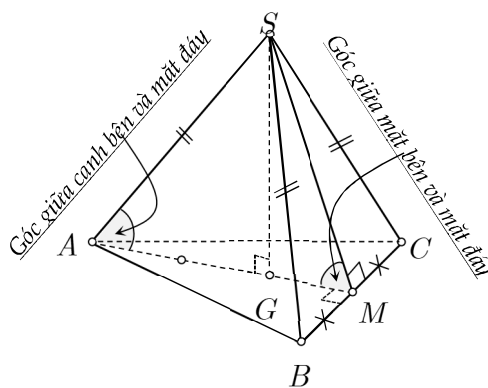
- $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, với $p = \frac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi.
- $S_{\text{tam giác vuông}} = \frac{1}{2} \times (\text{tích hai cạnh góc vuông})$.
- $S_{\text{tam giác vuông cân}} = \frac{(\text{cạnh huyền})^2}{4}$.
- $S_{\text{Hình chữ nhật}} = \text{dài} \times \text{rộng}$.
- $S_{\text{tam giác đều}} = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4}$.
- $S_{\text{Hình thang}} = \frac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}) \times \text{chiều cao}}{2}$.
- $S_{\text{Hình vuông}} = (\text{cạnh})^2$.

Xác định chiều cao

- Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy:** Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy.
- Hình chóp có 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy:** Chiều cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau:** Chân đường cao của hình chóp là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Khối chóp đều

- Đáy là đa giác đều và mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
- Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau, góc giữa các mặt bên và mặt đáy bằng nhau.



Bài tập tương tự và mở rộng

21.1. Cho tứ diện $O.ABC$ có các cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = 2\text{cm}$, $OB = 3\text{cm}$, $OC = 6\text{cm}$. Thể tích của khối tứ diện $O.ABC$ bằng

A. 6cm^3 .

B. 36cm^3 .

C. 12cm^3 .

D. 18cm^3 .

21.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $a^3\sqrt{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

21.3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{3a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

21.4. Cho $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{3a^3}{2}$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

21.5. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và hai mặt bên (SAB) , (SAC) cùng vuông góc với đáy. Biết $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

21.6. Thể tích của khối tứ diện đều có cạnh là 3 bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

21.7. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

C. $\frac{\sqrt{14}a^3}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

21.8. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{35}a^3}{24}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

21.9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác SAB vuông cân tại S . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

21.10. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $3a$. Tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Thể tích hình chóp đã cho bằng

A. $9a^3\sqrt{3}$.

B. $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $9a^3$.

D. $\frac{9a^3}{2}$.

Câu 22. Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7 bằng

A. 14.

B. 42.

C. 126.

D. 12.

Lời giải tham khảo

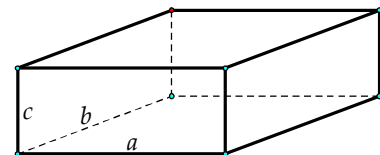
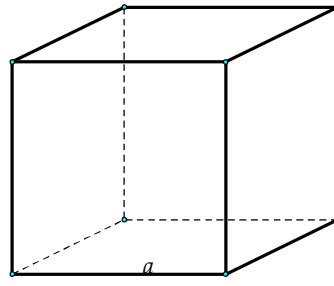
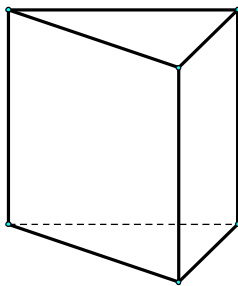
Thể tích cần tìm là $V = 2 \times 3 \times 7 = 42$.

Chọn đáp án B.

Thể tích khối lăng trụ, hộp chữ nhật và lập phương

Thể tích của khối lăng trụ $V = B.h$ với B là diện tích đáy và h là chiều cao. Đặc biệt:

- + Thể tích khối hộp chữ nhật $V = abc$ với a là chiều dài, b là chiều rộng và c là chiều cao.
- + Thể tích khối lập phương $V = a^3$ với a là cạnh.



Bài tập tương tự và mở rộng

22.1. Thể tích khối lập phương có cạnh $3a$ là

A. $2a^3$.

B. $27a^3$.

C. $8a^3$.

D. $3a^3$.

22.2. Diện tích toàn phần của một khối lập phương là 150 cm^2 . Thể tích của khối lập phương bằng

A. 125 cm^3 .

B. 100 cm^3 .

C. 25 cm^3 .

D. 75 cm^3 .

22.3. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

A. $V = AB.BC.AA'$.

B. $V = \frac{1}{3} AB.BC.AA'$.

C. $V = AB.AC.AA'$.

D. $V = AB.AC.AD$.

22.4. Tính thể tích của khối chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $AB = a$, $AD = 2a$, $AC' = a\sqrt{14}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{3}$.

B. $2a^3$.

C. $6a^3$.

D. $a^3\sqrt{5}$.

22.5. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

22.6. Thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh là a bằng

A. $3a^3$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

22.7. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{2}$.

B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. a^3 .

22.8. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. a^3 .

B. $\frac{a^3}{4}$.

C. $3a^3$.

D. $\frac{3a^3}{4}$.

22.9. Tính thể tích của một khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AC' = 5a$ và đáy là tam giác đều cạnh $4a$.

A. $12a^3$.

B. $\frac{20a^3}{3}$.

C. $20a^3\sqrt{3}$.

D. $12a^3\sqrt{3}$.

22.10. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích 1. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 23. Công thức tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h là

- A. $V = \pi r h$. B. $V = \pi r^2 h$. C. $V = \frac{1}{3} \pi r h$. D. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Lời giải tham khảo

Theo công thức SGK thì $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Chọn đáp án D.

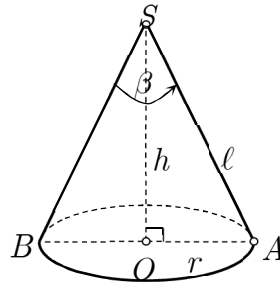
Xác định các yếu tố cơ bản của khối nón

Các yếu tố cơ bản cần nắm vững của khối nón

① $S_{\text{xq nón}} = \pi r \ell$.

② $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi r \ell + \pi r^2$.

③ $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.



- ℓ : đường sinh.
- h : chiều cao.
- r : bán kính đáy.
- β : góc ở đỉnh.

Mối liên hệ: $\ell^2 = h^2 + r^2$.

Bài tập tương tự và mở rộng

- 23.1.** Cho khối nón có chiều cao $h = 3$ và bán kính đáy $r = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng
A. 16π . B. 48π .
C. 36π . D. 4π .
- 23.2.** Thể tích khối nón có bán kính đáy là 3 cm và độ dài đường sinh là 5 cm bằng
A. $12\pi \text{ cm}^3$. B. $15\pi \text{ cm}^3$.
C. $36\pi \text{ cm}^3$. D. $45\pi \text{ cm}^3$.
- 23.3.** Cho khối nón có đường sinh là 5 và diện tích đáy là 9π . Thể tích của khối nón đã cho bằng
A. 12π . B. 24π .
C. 36π . D. 45π .
- 23.4.** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng
A. 8π . B. 16π .
C. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. D. $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.
- 23.5.** Cho hình nón bán kính đáy bằng a và thể tích khối nón bằng $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi a^3$. Diện tích toàn phần của hình nón đó bằng
A. $3\pi a^2$. B. $4\pi a^2$.
C. $2\pi a^2$. D. πa^2 .
- 23.6.** Cho hình nón có bán kính bằng 5 và góc ở đỉnh bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng
A. 50π . B. 100π .
C. $\frac{50\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{100\pi\sqrt{3}}{3}$.

23.7. Trong không gian, cho tam giác OAB vuông tại O có $OA = 3$, $OB = 4$. Diện tích toàn phần của hình nón tạo thành khi quay tam giác OAB quanh OA bằng

- A. 36π . B. 20π .
C. 26π . D. 52π .

23.8. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Thể tích của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$.
C. $\sqrt{3}\pi a^3$. D. πa^3 .

23.9. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón bằng

- A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{3}$.
C. $\frac{\pi a^3}{12}$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$.

23.10. Cắt một khối nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối nón bằng

- A. $\pi\sqrt{3}a^3$. B. πa^3 .
C. $2\pi\sqrt{3}a^3$. D. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 24. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 4\text{cm}$ và độ dài đường sinh $\ell = 3\text{cm}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đó bằng

- A. $12\pi\text{cm}^2$. B. $48\pi\text{cm}^2$. C. $24\pi\text{cm}^2$. D. $36\pi\text{cm}^2$.

Lời giải tham khảo

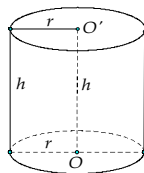
Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi r\ell = 2\pi \times 4 \times 3 = 24\pi\text{cm}^2$. Chọn đáp án C.

Mặt trụ

① $S_{\text{xq}} = 2\pi rh$.

② $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

③ $V_{\text{trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi r^2 h$.



- $\ell = h$: chiều cao = đường sinh.
- r : bán kính đáy.

Bài tập tương tự và mở rộng

24.1. Cho khối trụ có độ dài đường sinh bằng a và bán kính đáy bằng R . Thể tích khối trụ đã cho bằng

- A. πaR^2 . B. $2\pi aR^2$.
C. $\frac{1}{3}\pi aR^2$. D. aR^2 .

24.2. Một hình trụ có chiều cao bằng 6cm và diện tích đáy bằng 4cm^2 . Thể tích của khối trụ bằng

- A. 8cm^3 . B. 12cm^3 .
C. 24cm^3 . D. 72cm^3 .

- 24.3.** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3cm, độ dài đường cao bằng 4cm. Diện tích xung quanh của hình trụ này bằng
- A. $24\pi \text{ cm}^2$. B. $22\pi \text{ cm}^2$.
C. $26\pi \text{ cm}^2$. D. $20\pi \text{ cm}^2$.
- 24.4.** Diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$ bằng
- A. $2\pi a^2(\sqrt{3} - 1)$. B. $\pi a^2\sqrt{3}$.
C. $\pi a^2(\sqrt{3} + 1)$. D. $2\pi a^2(\sqrt{3} + 1)$.
- 24.5.** Cho hình trụ (T) có chiều cao là 5 và diện tích xung quanh là 30π . Thể tích khối trụ (T) bằng
- A. 30π . B. 75π .
C. 15π . D. 45π .
- 24.6.** Cho khối trụ có chu vi đáy bằng $4\pi a$ và độ dài đường cao bằng a . Thể tích của khối trụ bằng
- A. πa^2 . B. $\frac{4}{3}\pi a^3$.
C. $4\pi a^3$. D. $16\pi a^3$.
- 24.7.** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng
- A. $2\sqrt{2}a$. B. $3a$.
C. $\frac{2a}{3}$. D. $\frac{3a}{2}$.
- 24.8.** Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Một hình nón có đáy trùng với một đáy của hình trụ và đỉnh trùng với tâm của đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Độ dài đường sinh của hình nón bằng
- A. $a\sqrt{5}$. B. $2a$.
C. a . D. $3a$.
- 24.9.** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $2a$. Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ và cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Thể tích khối trụ đã cho bằng
- A. $18\pi a^3$. B. $4\pi a^3$.
C. $8\pi a^3$. D. $16\pi a^3$.
- 24.10.** Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của hình trụ với $AB = 4a$ và $AC = 5a$. Thể tích khối trụ đã cho bằng
- A. $16\pi a^3$. B. $12\pi a^3$.
C. $4\pi a^3$. D. $8\pi a^3$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4;2;2)$. B. $(2;1;1)$. C. $(2;0;-2)$. D. $(1;0;-1)$.

Lời giải tham khảo

Trung điểm I của AB có tọa độ là $x_I = \frac{3+1}{2} = 2$, $y_I = \frac{1+1}{2} = 1$, $z_I = \frac{2+0}{2} = 1$.

Chọn đáp án B.

Hệ trục tọa độ Oxyz và bài toán liên quan

Định nghĩa: $M(a;b;c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k} = (a;b;c)$.

Cần nhớ: $\begin{cases} M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0, & M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0, & M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0 \\ M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0, & M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0, & M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0 \end{cases}$.

Tính chất: cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.

① $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

② Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

③ Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

Bài tập tương tự và mở rộng

- 25.1.** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(1;2;3)$ và $N(3;4;7)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{MN}$ là
 A. $(4;6;10)$. B. $(2;3;5)$.
 C. $(2;2;4)$. D. $(-2;-2;-4)$.
- 25.2.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;1)$. Độ dài đoạn AB bằng
 A. 2. B. $\sqrt{6}$.
 C. $\sqrt{2}$. D. 6.
- 25.3.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1;-2;3)$ và $\vec{v} = (-1;2;-3)$. Môđun của $\vec{u} - 2\vec{v}$ bằng
 A. $\sqrt{26}$. B. $\sqrt{126}$.
 C. $\sqrt{85}$. D. $\sqrt{185}$.
- 25.4.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
 A. $I(-2;2;1)$. B. $I(1;0;4)$.
 C. $I(2;0;8)$. D. $I(2;-2;-1)$.
- 25.5.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4)$ và $B(2;4;-1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .
 A. $G(6;3;3)$. B. $G(2;1;1)$.
 C. $G(2;1;1)$. D. $G(1;2;1)$.
- 25.6.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm
 A. $M(3;0;0)$. B. $N(0;-1;1)$.
 C. $P(0;-1;0)$. D. $Q(0;0;1)$.
- 25.7.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Điểm A' đối xứng với A qua trục Oy là
 A. $A'(2;3;5)$. B. $A'(2;-3;-5)$.
 C. $A'(-2;-3;5)$. D. $A'(-2;-3;-5)$.
- 25.8.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Nếu A , B , M thẳng hàng thì tổng $x + y$ bằng

A. 11.

B. -11.

C. -3.

D. 3.

25.9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9;-5;7)$.B. $M(9;5;7)$.C. $M(-9;5;-7)$.D. $M(9;-5;-5)$.

25.10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;2;3)$, $N(2;-3;1)$, $P(3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm Q sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

A. $Q(2;-6;4)$.B. $Q(4;-4;0)$.C. $Q(2;6;4)$.D. $Q(-4;-4;0)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

A. 9.

B. 3.

C. 81.

D. 6.

Lời giải tham khảo

Phương trình mặt cầu là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên $R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$. **Chọn đáp án B.**

Xác định các yếu tố cơ bản của mặt cầu

Để viết phương trình mặt cầu (S) , ta cần tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R . Khi đó:

- $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. (Tìm tâm lấy ngược dấu và R lấy căn)

Ví dụ: $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5 \Rightarrow$ Tâm $I(1;-2;0)$ và $R = \sqrt{5}$.

- $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} > 0$ (hệ số x, y, z chia -2).

Ví dụ: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0 \Rightarrow I(2;-3;1)$ và $R = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2 + 11} = 5$.

26.1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) ?

A. $I(-1;2;1)$ và $R = 3$.B. $I(1;-2;-1)$ và $R = 3$.C. $I(-1;2;1)$ và $R = 9$.D. $I(1;-2;-1)$ và $R = 9$.

26.2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) ?

A. $I(0;-2;2)$, $R = 64$.B. $I(0;2;-2)$, $R = 4$.C. $I(0;-2;2)$, $R = 2\sqrt{2}$.D. $I(0;2;-2)$, $R = 2\sqrt{2}$.

26.3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) ?

A. $I(1;-2;3)$, $R = 2$.B. $I(-1;2;-3)$, $R = 2$.C. $I(-1;2;-3)$, $R = 4$.D. $I(1;-2;3)$, $R = 4$.

26.4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 16 = 0$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) ?

A. $I(-2;-1;2)$, $R = 5$.B. $I(-2;-1;2)$, $R = 5$.C. $I(2;1;-2)$, $R = 5$.D. $I(4;2;-4)$, $R = 13$.

- 26.5.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - m = 0$ có bán kính $R = 5$. Tìm tham số thực m ?
- A. $m = -16$. B. $m = 16$.
C. $m = 4$. D. $m = -4$.
- 26.6.** Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.
- A. $m \leq 6$. B. $m > 6$.
C. $m < 6$. D. $m \geq 6$.
- 26.7.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $A(0; 4; -1)$?
- A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
- 26.8.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 4; 1)$. Phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB là
- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$. B. $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$.
C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 12$. D. $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 12$.
- 26.9.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và điểm $M(1; 1; 1)$. Tìm khẳng định **đúng** ?
- A. Điểm M nằm bên ngoài (S) . B. Điểm M nằm bên trong (S) .
C. Điểm M thuộc mặt cầu (S) . D. Đường kính mặt cầu bằng 5.
- 26.10.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$ và điểm $M(2; 2; 4)$. Tìm khẳng định **đúng** ?
- A. Điểm M nằm bên ngoài (S) . B. Điểm M nằm bên trong (S) .
C. Điểm M thuộc mặt cầu (S) . D. Đường kính mặt cầu bằng 6.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua điểm $M(1; -2; 1)$?

- A. $(P_1): x + y + z = 0$. B. $(P_2): x + y + z - 1 = 0$.
C. $(P_3): x - 2y + z = 0$. D. $(P_4): x + 2y + z - 1 = 0$.

Lời giải tham khảo

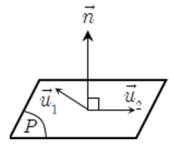
Thay tọa độ của điểm $M(1; -2; 1)$ trực tiếp vào các phương trình để kiểm tra. **Chọn đáp án A.**

Xác định các yếu tố cơ bản của mặt phẳng

- Véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) là véc tơ có giá vuông góc với (P) . Nếu $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của (P) thì $k\vec{n}$ cũng là một véc tơ pháp tuyến của (P) .
- Nếu mặt phẳng (P) có cặp véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.
- Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$.
- Nếu $M(x_M; y_M; z_M) \in (P): ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow ax_M + by_M + cz_M + d = 0$.

- Để viết phương trình mặt phẳng (P) , ta cần xác định 1 điểm đi qua và 1 VTPT:

$$(P) : \begin{cases} \text{Qua } M(x_{\circ}; y_{\circ}; z_{\circ}) \\ \text{VTPT } \vec{n}_{(P)} = (a; b; c) \end{cases} \Rightarrow \boxed{(P) : a(x - x_{\circ}) + b(y - y_{\circ}) + c(z - z_{\circ}) = 0}.$$



Bài tập tương tự và mở rộng

- 27.1.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3x - z + 2 = 0$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n}_4 = (1; 0; -1)$.
 B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$.
 C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$.
 D. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

27.2. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là

A. $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$.
 B. $\vec{n}_2 = (1; 1; 0)$.
 C. $\vec{n}_3 = (0; 0; 1)$.
 D. $\vec{n}_4 = (1; 0; 0)$.

27.3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$ và $C(-10; 5; 3)$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ?

A. $\vec{n}_1 = (1; 8; 2)$.
 B. $\vec{n}_2 = (1; 2; 0)$.
 C. $\vec{n}_3 = (1; 2; 2)$.
 D. $\vec{n}_4 = (1; -2; 2)$.

27.4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + z = 5$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

A. $Q(2; -1; 5)$.
 B. $P(0; 0; -5)$.
 C. $N(-5; 0; 0)$.
 D. $M(1; 1; 6)$.

27.5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(m; 1; 6)$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) khi giá trị của tham số m bằng

A. $m = 1$.
 B. $m = -1$.
 C. $m = 3$.
 D. $m = 2$.

27.6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2017)$ và mặt phẳng $(P) : mx - 2y + mz + 2016 = 0$. Tìm tham số m để điểm A thuộc mặt phẳng (P) ?

A. $m = -1007$.
 B. $m = 1$.
 C. $m = -1$.
 D. $m = 1009$.

27.7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z + 4 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(1; 2; 1)$ đến (P) bằng

A. 3.
 B. 4.
 C. 1.
 D. $\frac{1}{3}$.

27.8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : 2x - y + z = 0$ và $(Q) : 2x - y + z - 7 = 0$. Khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng

A. 7.
 B. $7\sqrt{6}$.
 C. $6\sqrt{7}$.
 D. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

27.9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 8x - 4y - 8z - 11 = 0$ và $(Q) : \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) bằng

- A. 45° . B. 90° .
C. 30° . D. 60° .

27.10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt $(P) : 5x + 11y + 2z - 4 = 0$.

Góc giữa d và (P) bằng

- A. 90° . B. 30° .
C. 60° . D. 45° .

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và điểm $M(1; -2; 1)$?

- A. $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$. B. $\vec{u}_2 = (1; 2; 1)$. C. $\vec{u}_3 = (0; 1; 0)$. D. $\vec{u}_4 = (1; -2; 1)$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\overrightarrow{OM} = (1; -2; 1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng OM . Chọn đáp án D.

Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng

- Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d là vectơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d . Nếu d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ thì $k \cdot \vec{u}$ cũng là một vectơ chỉ phương của d .
- Nếu có hai vectơ $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng vuông góc với d thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.
- Để viết phương trình đường thẳng d , ta cần tìm điểm đi qua và một vectơ chỉ phương.

Nếu đường thẳng $d : \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP : } \vec{u} = (a_1; a_2; a_3) \end{cases}$ thì ta có hai dạng phương trình đường thẳng:

Phương trình đường thẳng d dạng tham số

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Phương trình đường thẳng d dạng chính tắc

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, (a_1 a_2 a_3 \neq 0).$$

- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \in d : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_0 + a_1 t \\ y_M = y_0 + a_2 t \\ z_M = z_0 + a_3 t \end{cases} : \text{luôn đúng (các giá trị } t \text{ giống nhau)}.$

$$\text{Điểm } M(x_M; y_M; z_M) \in d : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \Leftrightarrow \frac{x_M - x_0}{a_1} = \frac{y_M - y_0}{a_2} = \frac{z_M - z_0}{a_3} : \text{đúng.}$$

Bài tập tương tự và mở rộng

28.1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc d ?

- A. $Q(1; 0; 2)$. B. $N(1; -2; 0)$.
C. $P(1; -1; 3)$. D. $M(-1; 2; 0)$.

28.2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ đi qua điểm nào dưới đây ?

- A. $M(-1;2;3)$. B. $N(3;2;1)$.
 C. $P(1;2;3)$. D. $Q(0;0;0)$.

28.3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2;m;n)$. Giá trị $m+n$ bằng

- A. -1 . B. 7 .
 C. 3 . D. 1 .

28.4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Biết $A(m;m+2;1) \in d$. Tìm

khẳng **đúng** trong các khẳng định sau ?

- A. $m \in (-\infty; -4)$. B. $m \in [-4; 2)$.
 C. $m \in (6; +\infty)$. D. $m \in [2; 6]$.

28.5. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ là

- A. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. B. $\vec{u} = (2; 1; 0)$.
 C. $\vec{u} = (-1; 2; 0)$. D. $\vec{u} = (2; 1; 1)$.

28.6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -4)$ và $B(4; -1; -2)$. Vectơ nào dưới đây là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

- A. $\vec{u} = (6; 2; -3)$. B. $\vec{u} = (3; 1; -3)$.
 C. $\vec{u} = (1; -2; 1)$. D. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

28.7. Trong không gian $Oxyz$, cho một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ là

- A. $\vec{u} = (1; 0; -2)$. B. $\vec{u} = (1; 2; 0)$.
 C. $\vec{u} = (-1; 2; 0)$. D. $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

28.8. Trong không gian $Oxyz$, gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M(2; 5; 4)$ lên trục Ox và mặt phẳng (Oyz) . Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 .

- A. $\vec{u}_3 = (2; 0; 4)$. B. $\vec{u}_2 = (-2; 5; 4)$.
 C. $\vec{u}_4 = (0; -3; 4)$. D. $\vec{u}_1 = (-2; 0; 4)$.

28.9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P) : x + y - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q) : x - 2y + z - 3 = 0$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (1; 1; 0)$. B. $\vec{u} = (1; -2; 1)$.
 C. $\vec{u} = (1; 1; -3)$. D. $\vec{u} = (1; -1; -3)$.

28.10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P) : 4x - z + 3 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- A. $\vec{u} = (4; 1; 3)$. B. $\vec{u} = (4; 0; -1)$.
 C. $\vec{u} = (4; 1; -1)$. D. $\vec{u} = (4; -1; 3)$.

Câu 29. Chọn ngẫu nhiên một số trong 15 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được số chẵn bằng

A. $\frac{7}{8}$.

B. $\frac{8}{15}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải tham khảo

Trong 15 số nguyên dương đầu tiên $1, 2, 3, \dots, 15$, đếm được có 7 số chẵn nên xác suất cần tìm là $\frac{7}{15}$.

Chọn đáp án C.

Bài tập tương tự và mở rộng

29.1. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\frac{13}{27}$.

B. $\frac{14}{27}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{365}{729}$.

29.2. Gọi S là tập các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo từ tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn?

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{1}{2}$.

29.3. Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, rồi cộng các số trên các bi lại với nhau. Xác suất để kết quả thu được là 1 số lẻ bằng

A. $\frac{31}{32}$.

B. $\frac{11}{32}$.

C. $\frac{16}{33}$.

D. $\frac{21}{32}$.

29.4. Cho 14 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 14. Chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 tấm thẻ này chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{30}{91}$.

B. $\frac{61}{91}$.

C. $\frac{31}{91}$.

D. $\frac{12}{17}$.

29.5. Gọi S là tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập S . Tích xác suất để tích hai số được chọn là số chẵn?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{3}{4}$.

29.6. Gọi A là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp A , xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4 bằng

A. $\frac{2484}{8555}$.

B. $\frac{5}{17}$.

C. $\frac{2518}{8555}$.

D. $\frac{4}{17}$.

29.7. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

A. $\frac{61}{81}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{41}{81}$.

D. $\frac{16}{81}$.

29.8. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau và luôn có mặt chữ số 5 được lập từ các chữ số thuộc tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , xác suất để số được chọn chia hết cho 5 bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{2}{9}$.

C. $\frac{9}{26}$.

D. $\frac{11}{26}$.

29.9. Cho tập $S = \{1; 2; 3; 4; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng bằng

A. $\frac{7}{38}$.

B. $\frac{3}{38}$.

C. $\frac{5}{38}$.

D. $\frac{1}{114}$.

29.10. Có 11 cái ghế (mỗi ghế chỉ ngồi được một người) được sắp xếp trên một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh ngồi vào, mỗi học sinh ngồi đúng một ghế. Xác suất sao cho không có hai ghế trống nào kề nhau bằng

A. $\frac{4}{85}$.

B. $\frac{1}{22}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{11}$.

Câu 30. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

B. $y = x^2 + 2x$.

C. $y = x^3 - x^2 + x$.

D. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Lời giải tham khảo

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ trước hết phải có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, loại câu A, xét các câu khác. Chỉ có $(x^3 - x^2 + x)' = 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = x^3 - x^2 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C.

Bài tập tương tự và mở rộng

30.1. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x^2$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

C. $y = -x^3 + 3x + 1$.

D. $y = x^3 + 2018$.

30.2. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = 3x^3 + 3x - 2.$

B. $y = 2x^3 - 5x + 1.$

C. $y = x^4 + 3x^2.$

D. $y = \frac{x-2}{x+1}.$

30.3. Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = x^3 + 2x^2 + 1.$

B. $y = 7x - 2\sin 3x.$

C. $y = \frac{4x+1}{x+2}.$

D. $y = \tan x.$

30.4. Hàm số nào sau đây thỏa mãn với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$?

A. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1.$

B. $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}.$

C. $f(x) = x^3 + x^2 + 1.$

D. $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1.$

30.5. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của chúng ?

A. $y = \ln x.$

B. $y = e^{-x}.$

C. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$

D. $y = \log_{\frac{1}{5}} x.$

30.6. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x.$

B. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}.$

C. $y = \log_{0,5} x.$

D. $y = \log_5 x.$

30.7. Điều kiện của a để hàm số $f(x) = (1 + \ln a)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $e^{-1} < a < 1.$

B. $a > 1.$

C. $a > 0.$

D. $a > e.$

30.8. Hỏi với giá trị nào của a thì hàm số $y = (3 - a)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $2 < a < 3.$

B. $0 < a < 1.$

C. $a > 2.$

D. $a < 0.$

30.9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào ?

A. $\begin{cases} a = b = 0, & c > 0 \\ a > 0, & b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = 0, & c > 0 \\ a < 0, & b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0, & c > 0 \\ a > 0, & b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0, & b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

30.10. Hàm số $y = \frac{mx-1-m^2}{x+1}$ với m là tham số. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng** ?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}.$

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

- Câu 31.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$. Tổng $M + m$ bằng
- A. 11. B. 14. C. 5. D. 13.

Lời giải tham khảo

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$.

Trên đoạn $[0; 2]$, xét các giá trị $f(0) = 3, f(1) = 2, f(2) = 11$.

Do đó $M = 11, m = 2$ và $M + m = 13$. **Chọn đáp án D.**

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Bài toán 1. Tìm GTLN & GTNN trên đoạn $[a; b]$.

- Tính y' , cho $y' = 0$ tìm nghiệm $x_i \in [a; b]$.
- Tính $y(a), y(b), y(x_i) \Rightarrow \max_{[a; b]} y, \min_{[a; b]} y$.

Bài toán 2. Tìm GTLN, GTNN trên khoảng $(a; b)$.

- Tính y' , cho $y' = 0$ tìm nghiệm x_i .
- Lập bảng biến thiên $\Rightarrow \max_{(a; b)} y, \min_{(a; b)} y$.

Định lý. Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b] \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a; b]} y = f(a) \\ \max_{[a; b]} y = f(b) \end{cases}$ và nghịch biến $[a; b] \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a; b]} y = f(b) \\ \max_{[a; b]} y = f(a) \end{cases}$.

BĐT Côsi: Với $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ có $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$. Dấu " $=$ " $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Bài tập tương tự và mở rộng

- 31.1.** Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$ lần lượt là M và m . Tổng $M + m$ bằng
- A. $-\frac{28}{3}$. B. $-\frac{17}{3}$.
C. -5 . D. 5 .
- 31.2.** Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+3}{1-x}$ trên đoạn $[-1; 0]$ lần lượt là M và m . Tổng $M + m$ bằng
- A. -2 . B. 4 .
C. 3 . D. 1 .
- 31.3.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 5x}$ bằng
- A. 0 . B. $\frac{5}{2}$.
C. $\sqrt{6}$. D. 2 .
- 31.4.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$ bằng
- A. $\max y = \frac{58}{27}$. B. $\max y = \frac{1}{3}$.
C. $\max y = 2$. D. $\max y = -2$.
- 31.5.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{-2\cos x + 2}{\cos x - 2}$ bằng

A. $\max y = 0, \min y = -\frac{4}{3}$.

B. $\max y = \frac{4}{3}; \min y = 0$.

C. $\max y = 1; \min y = 0$.

D. $\max y = 0; \min y = -1$.

31.6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min_{(0; +\infty)} y = 1$.

B. $\min_{(0; +\infty)} y = 2$.

C. $\min_{(0; +\infty)} y = 3$.

D. $\min_{(0; +\infty)} y = 4$.

31.7. Trên khoảng $(0; 1)$ hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

31.8. Cho hàm số $y = x^3 + 3m^2x + 6$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ bằng 42.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m = -2$.

31.9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 4]$ bằng

A. $f(0)$.

B. $f(2)$.

C. $f(3)$.

D. $f(4)$.

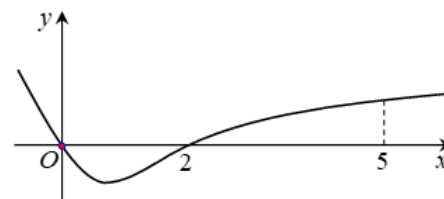
31.10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là

A. $f(0), f(5)$.

B. $f(2), f(0)$.

C. $f(1), f(3)$.

D. $f(5), f(2)$.



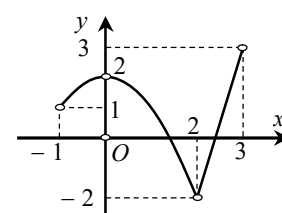
31.11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 4.

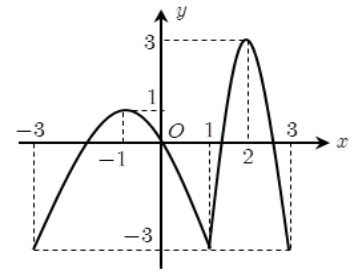
D. 5.



31.12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1; 0]$.

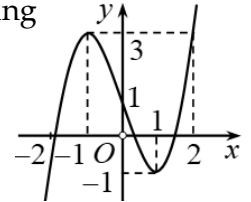
Khi đó $M - m$ bằng

- A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. 6.



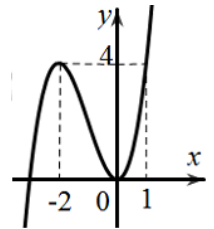
31.13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(\sin x))$ trên đoạn $[0; \pi]$. Giá trị $M - m$ bằng

- A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. 2.



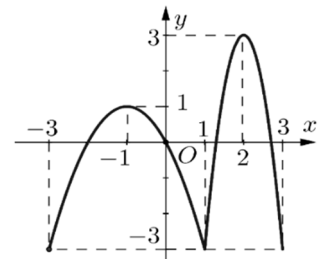
31.14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ là

- A. $[0; 4]$.
B. $[-1; 0]$.
C. $[0; 1]$.
D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.



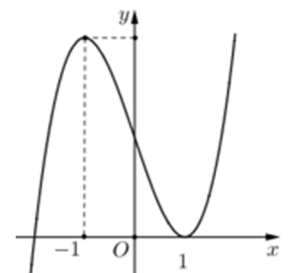
31.15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(2f(x) - 1) = m$ có nghiệm trên đoạn $[-1; 0]$?

- A. $-3 \leq m \leq 1$.
B. $-3 \leq m \leq 3$.
C. $0 \leq m \leq 1$.
D. $-3 \leq m \leq 0$.



31.16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hình dạng như hình bên dưới. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a^2 + cd + a - c + 2020$ bằng

- A. 2019.
B. 2020.
C. 2021.
D. 2022.



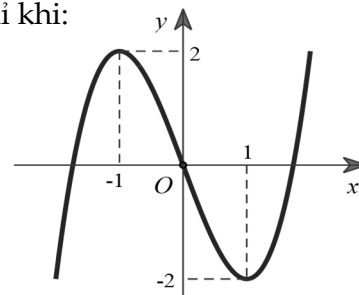
31.17. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab^3 + 3ab^2c - 3c$ bằng

- A. 3.
B. -3.
C. 11.
D. -11.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	-2	$+\infty$	-2

31.18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) - x^2 + 3 < m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi:

- A. $m \geq f(0) + 3$.
 B. $m > f(1) + 3$.
 C. $m \geq f(1) + 3$.
 D. $m > f(0) + 3$.



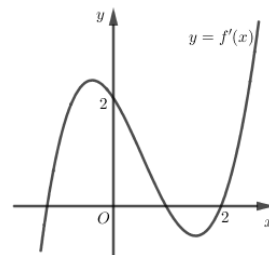
31.19. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $3m + 3x^2 < 3f(x) + x^3$ nghiệm đúng $\forall x \in (0; 3)$?

- A. $m < f(0)$.
 B. $m \leq f(0)$.
 C. $m \leq f(3)$.
 D. $m \leq f(1) - 1$.

x	-1	1	3
$f'(x)$	1	3	2

31.20. Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) có nghiệm trên $(0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(0)$.
 B. $m > f(2) - 4$.
 C. $m \geq f(0)$.
 D. $m \geq f(2) - 4$.



Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{4-x^2} \geq 27$ là

- A. $[-1; 1]$. B. $(-\infty; 1]$. C. $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$. D. $[1; +\infty)$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $3^{4-x^2} \geq 27 \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq \log_3 27 = 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Chọn đáp án A.

Bất phương trình mũ và lôgarit

- ① Đặt điều kiện.
 ② Cơ số $a \in (0; 1) \Rightarrow$ bất phương trình đổi chiều. Nếu $a > 1 \Rightarrow$ bất phương trình không đổi chiều.
 ③ Giao tập nghiệm với điều kiện và chọn đáp án.

Bất phương trình mũ và lôgarit giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ

- Dạng cơ bản:
 - $\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} + \gamma > 0 \xrightarrow{PP} t = a^{f(x)} > 0$.
 - $\alpha \cdot (\log_a x)^2 + \beta \cdot (\log_a x) + \gamma > 0 \xrightarrow{PP} t = \log_a x$.
- $a^{f(x)} + a^{-f(x)} > b \Leftrightarrow a^{f(x)} + \frac{1}{a^{f(x)}} > b \xrightarrow{PP} \text{đặt } t = a^{f(x)} > 0$.
- $\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot (ab)^{f(x)} + \lambda \cdot b^{2f(x)} > 0 \xrightarrow{PP} \text{chia } b^{2f(x)} \longrightarrow \text{đặt } t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$.
- $a^{f(x)} + b^{f(x)} > c$ với $a \cdot b = 1 \xrightarrow{PP} \text{đặt } t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.

Bài tập tương tự và mở rộng**32.1.** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13} < 27$ là

- A. $(4; +\infty)$. B. $(-4; 4)$.
 C. $(-\infty; 4)$. D. $(0; 4)$.

32.2. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23} < 9$ là

- A. $(-5; 5)$. B. $(-\infty; 5)$.
 C. $(5; +\infty)$. D. $(0; 5)$.

32.3. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

- A. $[0; 1)$. B. $(-\infty; 1)$.
 C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

32.4. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 2^{x-4}$ là

- A. $S = (-2; +\infty)$. B. $S = (2; +\infty)$.
C. $S = (-2; 2)$. D. $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

32.5. Hỏi bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?

- A. 2. B. 4.
 C. 6. D. 3.

32.6. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

- A. $[-2; 4]$. B. $[-4; 2]$.
 C. $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$. D. $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

32.7. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36 - x^2) \geq 3$ là

- A. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3]$.
C. $[-3; 3]$. D. $(0; 3]$.

32.8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31 - x^2) \geq 3$ là

- A. $(-\infty; 2]$. B. $[-2; 2]$.
 C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $(0; 2]$.

32.9. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) < 1$.

- A. $S = (0; 1)$. B. $S = \left(\frac{1}{8}; 1\right)$.
 C. $S = (1; 8)$. D. $S = (1; 3)$.

32.10. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}}[\log_3(x-2)] > 0$ là khoảng $(a; b)$. Giá trị $b - a$ bằng

- A. 2. B. 4.
 C. 3. D. 5.

32.11. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$ là

A. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

B. $[0; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(0; 1)$.

32.12. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ là

A. $[-1; 0)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(0; 1]$.

D. $[-1; 1]$.

32.13. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x + 9 \cdot 3^{-x} < 10$ là

A. 7.

B. 1.

C. 5.

D. Vô số.

32.14. Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2 \cdot 6^x + 4^x > 0$ là

A. $(0; +\infty)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D. $[0; +\infty)$.

32.15. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(17 - 12\sqrt{2})^x \geq (3 + \sqrt{8})^{x^2}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

32.16. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 4 \geq 0$ là

A. $(-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$.

B. $[2; 16]$.

C. $(0; 2] \cup [16; +\infty)$.

D. $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

32.17. Tập nghiệm của bất phương trình $\log^2 x - 2019 \log x + 2018 \leq 0$ là

A. $[10; 10^{2018}]$.

B. $[10; 10^{2018})$.

C. $[1; 2018]$.

D. $(10; 10^{2018})$.

32.18. Cho hàm số $f(x) = x \cdot e^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

A. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

B. $(0; 1)$.

C. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

32.19. Tập nghiệm của của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0$ là

A. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

32.20. Bất phương trình $4^{x+\sqrt{x-1}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x-1}+1} + 16 \geq 0$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 12.

D. 17.

Câu 33. Nếu $\int_1^3 [2f(x) + 1]dx = 5$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. $\frac{3}{4}$.D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải tham khảo

Áp dụng tính chất tích phân $5 = \int_1^3 [2f(x) + 1]dx = 2 \int_1^3 f(x)dx + 2 \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{3}{2}$. **Chọn đáp án D.**

Bài tập tương tự và mở rộng

33.1. Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

33.2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 [f(x) + 3x^2]dx = 10$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. 18.

D. -18.

33.3. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$ và

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6$. Khi đó $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 7.

B. 6.

C. 8.

D. 9.

33.4. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)]dx$ bằng

A. 20.

B. 22.

C. 26.

D. 28.

33.5. Nếu $\int_0^1 [xf'(x) - 2x]dx = f(1)$ thì $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. -1.

D. 1.

33.6. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int f(x)dx = x^2 + x + C$ và

$\int g(x)dx = x^4 + x^3 + C$. Khi đó $\int_0^1 [f(x)g(x)]dx$ bằng

A. $\frac{51}{10}$.B. $\frac{71}{105}$.

C. 4.

D. $\frac{77}{60}$.

33.7. Nếu $\int_1^2 xf(x^2 + 1)dx = 2$ thì $\int_2^5 f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. -1.

33.8. Nếu $\int_1^2 f(3x - 1)dx = 20$ thì $\int_2^5 f(x)dx$ bằng

A. 20.

B. 40.

C. 10.

D. 60.

33.9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int f(-2x)dx = x^2 + 3x + C$. Khi đó

$\int_0^3 f(x)\sqrt{x+1}dx$ bằng

A. $\frac{94}{15}$.B. $\frac{442}{15}$.C. $-\frac{22}{15}$.D. $\frac{326}{15}$.

33.10. Biết hàm số $F(x) = \sqrt{2x-1} + x + 2021$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và tích phân

$\int_1^2 f(2x+1)dx = \frac{a}{b} - \frac{\sqrt{5}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a^2b - b$ bằng

A. 8.

B. -8.

C. 48.

D. -48.

33.11. Nếu $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ thì $\int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx$ bằng

A. $1 + \ln 4$.B. $4 - \ln 2$.C. $\frac{1}{2} + \ln 4$.D. $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

33.12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$y = \frac{x}{x+f^2(x)}$. Biết $\int_3^4 g(x)dx = 1$ và $4g(4) - 3g(3) = 4$. Khi đó $\int_3^4 \frac{x^2}{x+f^2(x)}dx$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

33.13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $\int_0^1 x^2 f''(x)dx = 12$ và $2f(1) - f'(1) = -2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

33.14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2ax & \text{khi } x \leq 0 \\ 3x^2 + 2bx & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ (với a, b là các tham số thực) thỏa $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2$. Giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = [f(-1)]^2 + [f(1)]^2$ bằng

A. 5.

B. $\frac{25}{4}$.

C. 2.

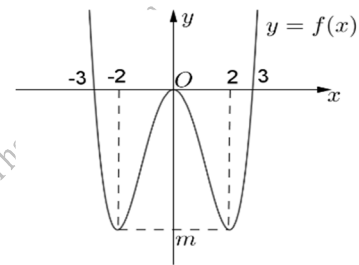
D. $\frac{25}{2}$.

33.15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ (a, b là các tham số thực). Khi đó

$\int_{-1}^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.B. $\frac{19}{3}$.C. $\frac{26}{3}$.D. $\frac{25}{3}$.

33.16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $\int_{-3}^3 |f'(x)|dx = 2$. Giá trị của m bằng

A. $-\frac{3}{4}$.B. -5 .C. -3 .D. $-\frac{1}{2}$.

33.17. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x) = x^2 - 3x + 2 \int_0^1 f(x)f'(x)dx$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.B. $-\frac{10}{3}$.C. $\frac{26}{15}$.D. $-\frac{26}{15}$.

33.18. Cho $f(x)$ là hàm số lẻ thỏa mãn $\int_{-2}^0 f(x)dx = 2$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. -2 .

C. 1.

D. -1 .

33.19. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.D. $\frac{1}{4}$.

33.20. Xét tích phân $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+2^x}dx = 4$, với $f(x)$ là hàm số chẵn trên $[-1;1]$, khi đó $\int_{-1}^1 f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. 16.

C. 4.

D. 8.

Câu 34. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Môđun của số phức $(1 + i)z$ bằng

A. 50.

B. 10.

C. $\sqrt{10}$.D. $5\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Dùng tính chất môđun của tích: $|(1 + i)z| = |1 + i| \cdot |3 + 4i| = \sqrt{2} \cdot 5 = 5\sqrt{2}$. Chọn đáp án D.

Bài tập tương tự và mở rộng

34.1. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Môđun của số phức $(z_1 + 2)z_2$ bằng

A. 15.

B. $5\sqrt{5}$.C. $\sqrt{65}$.D. $\sqrt{137}$.

34.2. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = 4 + 3i$. Môđun của số phức $\frac{2z_1}{3z_2}$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. 2.

34.3. Cho số phức $z = -3 - 4i$. Tính môđun của số phức $w = iz + \frac{25}{z}$.

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. 5.

D. $\sqrt{5}$.

34.4. Tìm môđun của số phức $w = (1 + z)\bar{z}$, biết z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$.

A. 2.

B. $\sqrt{10}$.C. $\sqrt{8}$.D. $\sqrt{2}$.

34.5. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Tính môđun của số phức $z = (z_1 + 2)z_2$.

A. 15.

B. $5\sqrt{5}$.C. $\sqrt{65}$.D. $\sqrt{137}$.

34.6. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm môđun của số phức $w = (1 + i)z - \bar{z}$.

A. 3.

B. 5.

C. -4.

D. $\sqrt{7}$.

34.7. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $\sqrt{13}$.B. $\sqrt{5}$.

C. 1.

D. 5.

34.8. Cho hai số phức $z = 1 + 3i$ và $w = 1 + i$. Môđun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$.B. $2\sqrt{2}$.

C. 20.

D. 8.

34.9. Tìm môđun của số phức $z = 1 + i^2 + i^4 + \dots + i^{2n} + \dots + i^{2016}$, $n \in \mathbb{N}$.

A. $|z| = 2$.B. $|z| = 1$.C. $|z| = 1008$.D. $|z| = 2006$.

34.10. Cho số phức z thỏa $(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i$. Tìm môđun của số phức $w = 1 + 2z + z^2$.

A. $|w| = 4$.

B. $|w| = 2\sqrt{7}$.

C. $|w| = 10$.

D. $|w| = 100$.

34.11. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1-i)z + 4\bar{z} = 7-7i$. Tìm môđun của số phức z .

A. $|z| = \sqrt{3}$.

B. $|z| = 5$.

C. $|z| = \sqrt{5}$.

D. $|z| = 3$.

34.12. Cho z số phức thỏa mãn $z + (1-2i)\bar{z} = 2-4i$. Tìm môđun của số phức z .

A. $|z| = 3$.

B. $|z| = \sqrt{5}$.

C. $|z| = 5$.

D. $|z| = \sqrt{3}$.

34.13. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $3z + (2-i)\frac{|z|^2}{\bar{z}} = 7-17i$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức z là

A. $M(2; -3)$.

B. $N(-2; 3)$.

C. $P(2; 3)$.

D. $Q(-2; -3)$.

34.14. Cho số phức z thỏa mãn $5z(2-i) + 17 + 19i = 9\frac{|z|^2}{\bar{z}}$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$ là

A. $Q(4; 3)$.

B. $N(3; -4)$.

C. $M(-4; 3)$.

D. $P(-3; 4)$.

34.15. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $2z.\bar{z} - (5+7i)|z|^2 = (17+i)\bar{z}$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức z khác gốc tọa độ là

A. $N(-1; 2)$.

B. $P(2; -1)$.

C. $Q(-2; 1)$.

D. $M(1; -2)$.

34.16. Cho số phức z thỏa mãn $(3-i)\bar{z} + 24 + 12i = (5+i)\frac{|z|^2}{z}$. Tỉ số giữa phần thực và phần ảo là

A. -3

B. 3 .

C. $\frac{2}{7}$.

D. $-\frac{5}{3}$.

34.17. Cho số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}(6-8i) + (5-i)|z|^2 = -(23+73i)z$. Tỉ số giữa phần thực và phần ảo bằng

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{2}{7}$.

C. 2 .

D. 3 .

34.18. Cho các số phức z thỏa $(z-2+i)(\bar{z}-2-i) = 16$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1-i)\bar{z} + 2i$ là một đường tròn. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

A. $r = \sqrt{2}$

B. $r = 5$.

C. $r = 4\sqrt{2}$.

D. $r = 3$.

34.19. Cho các số phức z thỏa $(z - i)(\bar{z} + i) = 9$. Biết trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w = (3 + 4i)z + 2 + i$ cùng thuộc một đường tròn cố định có bán kính là

A. $r = 5$.

B. $r = 14$.

C. $r = 23$.

D. $r = 15$.

34.20. Cho các số phức z thỏa $z\bar{z} + z(3 - i) + \bar{z}(3 + i) + 9 = 0$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = 2i\bar{z} - 5i$ là một đường tròn. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. 7.

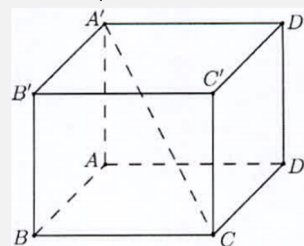
Câu 35. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .



Lời giải tham khảo

Góc cần tìm là $\widehat{A'CA} = \alpha$.

Vì đáy hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ và $\tan \alpha = \frac{AA'}{AC} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. **Chọn đáp án B.**

Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cần nhớ: “Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc tạo bởi nó và hình chiếu của nó lên mặt phẳng”.

B.1. Tìm giao điểm $AB \cap (P) = A$ (1)

B.2. Tìm hình chiếu H của B lên mặt phẳng (P) .

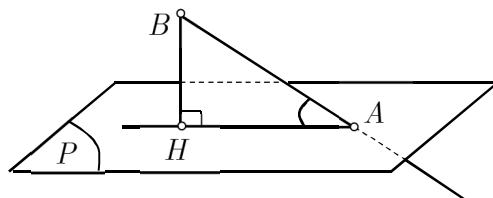
Đặt câu hỏi: “Đường nào qua B và vuông góc với (P) ?

Trả lời: $BH \perp (P)$ tại H (2) (nếu chưa có thì dựng)

Từ (1), (2), suy ra AH là hình chiếu của AB lên mặt phẳng (P) .

Do đó góc giữa đường thẳng AB và (P) là góc giữa AB và AH , chính là góc $\widehat{BAH}$.

B.3. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tìm góc (thường sử dụng $\tan$).



Bài tập tương tự và mở rộng

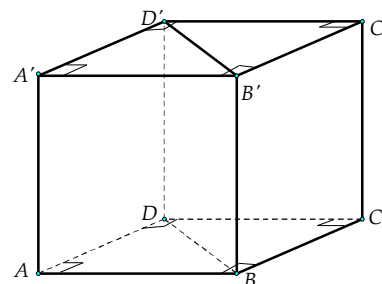
35.1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

A. 60° .

B. 90° .

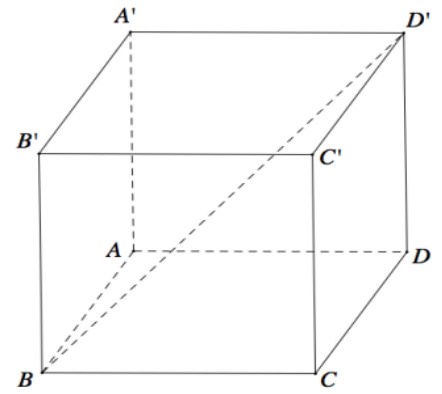
C. 45° .

D. 30° .



35.2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Tang góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

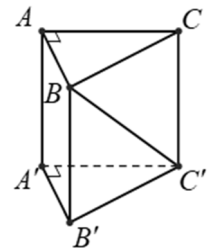


35.3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AD = 2a$. Gọi góc giữa đường chéo $A'C$ và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là α . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
 B. $\sqrt{5}$.
 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 D. $\sqrt{3}$.

35.4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
 C. $\sqrt{2}$.
 D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



35.5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

- A. 30° .
 B. 90° .
 C. 60° .
 D. 45° .

35.6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O' là trung điểm của của $A'C'$. Tính $\tan \alpha$ với α là góc tạo bởi BO' và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\sqrt{3}$.
 B. $\sqrt{2}$.
 C. 1.
 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

35.7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$, α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$.
 B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

35.8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{6}$ và $AA' = 2a\sqrt{2}$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng $B'D$ và mặt phẳng $(B'D'C)$.

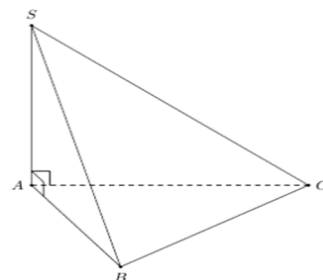
- A. $\sqrt{\frac{35}{38}}$.
 B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$.
 C. $\sqrt{\frac{1}{6}}$.
 D. $\sqrt{\frac{3}{11}}$.

35.9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Khi đó $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.
 D. $\frac{1}{2}$.

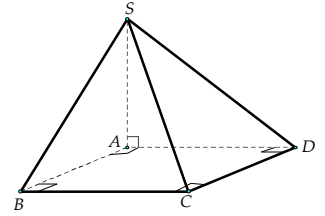
35.10. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 30° .
 B. 45° .
 C. 60° .
 D. 90° .



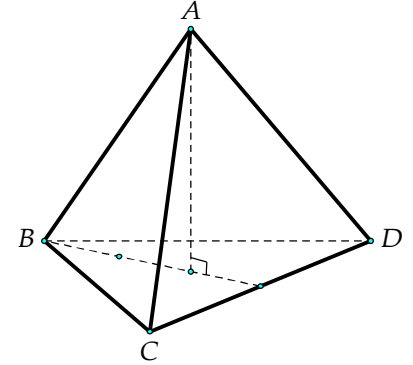
35.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (minh họa như hình bên dưới). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

- A. 90° .
 B. 60° .
 C. 45° .
D. 30° .



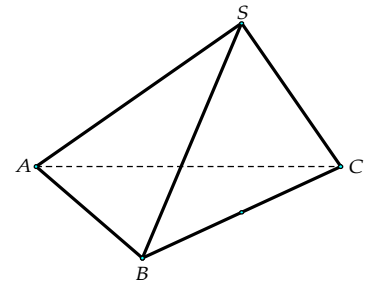
35.12. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a (minh họa như hình bên). Cosin góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 C. 1.
 D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



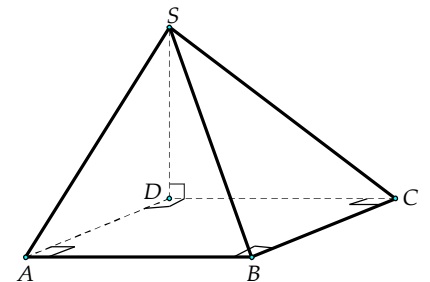
35.13. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt ABC và SBC là các tam giác đều và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 45° .**
 B. 75° .
 C. 60° .
 D. 30° .



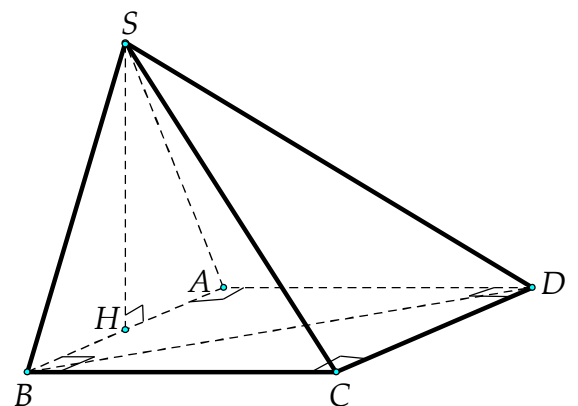
35.14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng

- A. 45° .
 B. $\arcsin \frac{1}{4}$.
C. 30° .
 D. 60° .



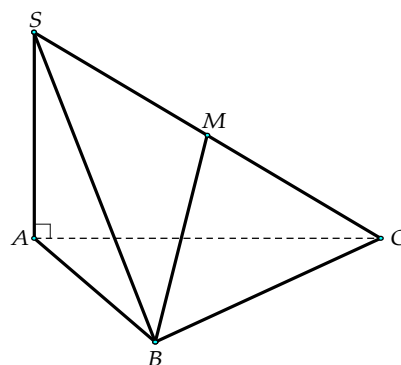
35.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với $(ABCD)$ (minh họa như hình bên). Gọi α là góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD) . Giá trị của $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.**
 B. $\frac{1}{2}$.
 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.



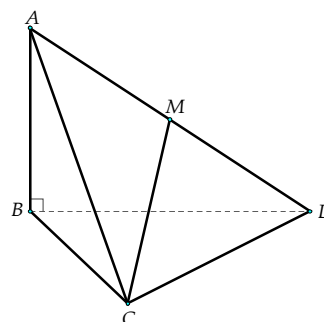
- 35.16.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC (minh họa như hình bên). Gọi α là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC) . Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{7}}{14}$.
 B. 1.
 C. $\frac{\sqrt{5}}{7}$.
 D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.



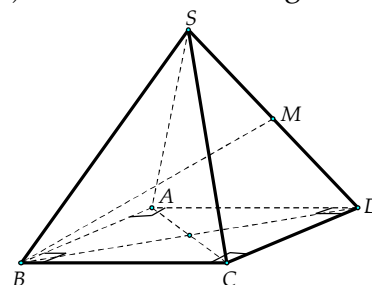
- 35.17.** Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a , AB vuông góc với (BCD) , $AB = 2a$ và M là trung điểm đoạn AD (minh họa như hình bên). Gọi φ là góc giữa đường thẳng CM với mặt phẳng (BCD) . Khi đó giá trị của $\tan \varphi$ bằng

- A. 1.
 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
 C. 2.
 D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



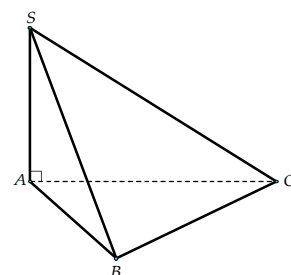
- 35.18.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SD (minh họa như hình bên). Gọi α là góc giữa đường thẳng BM và $(ABCD)$. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 B. 2.
 C. 0,5.
 D. $\frac{1}{3}$.



- 35.19.** Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết $SA = AB = BC$ (xem hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

- A. 30° .
 B. 45° .
 C. 60° .
 D. 90° .



- 35.20.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M , N là trung điểm SA , BC . Gọi α là góc giữa MN với (ABC) . Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = 1$.
 B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
 C. $\cos \alpha = 0,5$.
 D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 36. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 2 và độ dài cạnh bên bằng 3 (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\sqrt{7}$.

B. 1.

C. 7.

D. $\sqrt{11}$.

Lời giải tham khảo

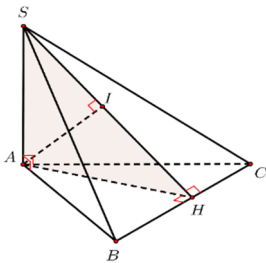
Gọi O là tâm của đáy thì $d[S, (ABCD)] = SO$.

Ta có $OA = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ và $SA = 3$ nên $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{3^2 - 2} = \sqrt{7}$. Chọn đáp án B.

Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên

Bài toán 1. Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tính khoảng cách từ điểm chân A đến mặt (SBC) .



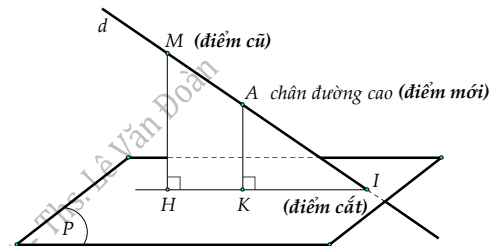
- **B1.** Tìm giao tuyến của mặt bên và mặt đáy. $(SBC) \cap (ABC) = BC$.

- **B2.** Dựng hình $\begin{cases} AH \perp BC \\ AI \perp SH \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC)$

Suy ra $d(A, (SBC)) = AI$.

Tỉ số khoảng cách (từ điểm đến mặt)

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ điểm M (không phải là chân đường cao) đến mặt phẳng (P) .



Có d qua M và $d \cap (P) = I$. Dựng $MH \perp (P)$.

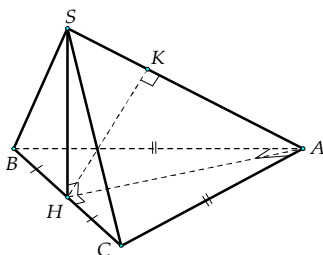
Suy ra: $d(M, (P)) = MH$ (khó tìm).

Do đó $d(M, (P)) = \frac{IM}{IA} \cdot d(A, (P))$ (bài toán 1)

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau và vuông góc nhau là độ dài đoạn vuông chung

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , mặt bên (SBC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

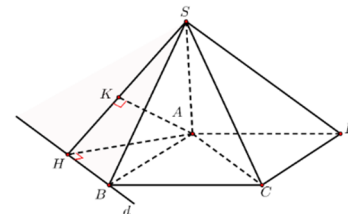


Dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SHA)$.

$\Rightarrow BC \perp SA$. Từ chân H , dựng $HK \perp SA$ và có $HK \perp BC$. Suy ra: $d(SA, BC) = HK$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau và không vuông góc nhau

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách giữa cạnh bên SB và cạnh thuộc mặt phẳng đáy AC .



- **B1.** Tìm giao điểm: $SB \cap (ABCD) = B$.

- **B2.** Qua B , dựng $d \parallel AC$ và $\begin{cases} AH \perp d \\ AK \perp SH \end{cases}$

$$d(AC, SB) = d(AC, (SHB)) = d(A, (SHB))$$

- **B3.** Sử dụng bài toán 1 $\Rightarrow d(A, (SHB)) = AK$.

Bài tập tương tự và mở rộng

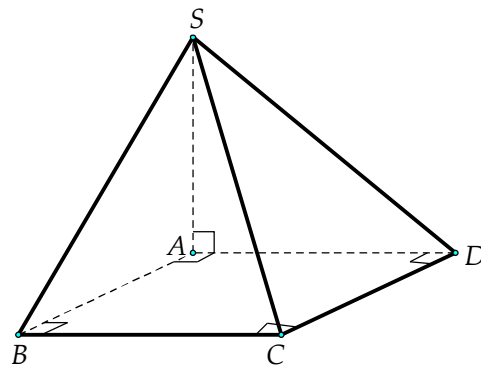
36.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Biết SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.



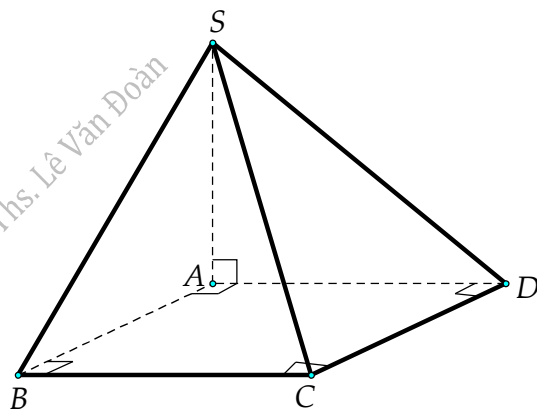
36.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.



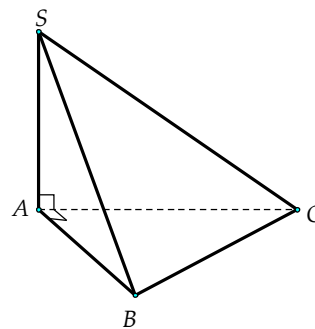
36.3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở A , biết $SA \perp (ABC)$ và $AB = 2a$, $AC = 3a$, $SA = 4a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{12a\sqrt{61}}{61}$.

B. $2a$.

C. $\frac{a\sqrt{43}}{12}$.

D. $\frac{6a\sqrt{29}}{29}$.



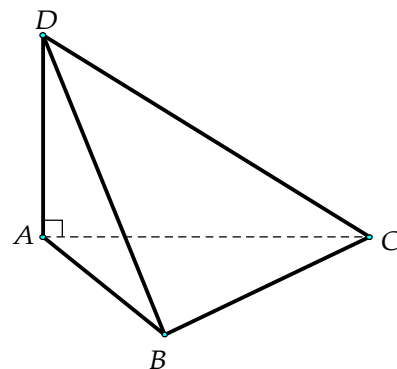
36.4. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AC = AD = 4$, $AB = 3$, $BC = 5$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{12}{\sqrt{34}}$.

B. $\frac{60}{\sqrt{769}}$.

C. $\frac{\sqrt{769}}{60}$.

D. $\frac{\sqrt{34}}{12}$.



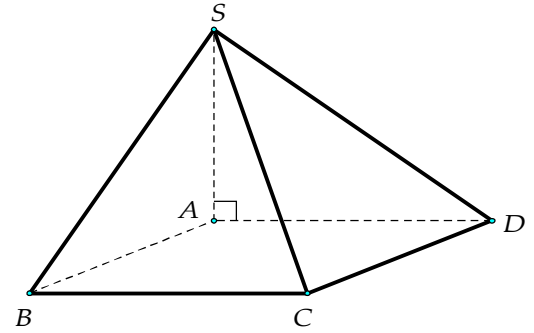
36.5. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

B. $2a$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. a .



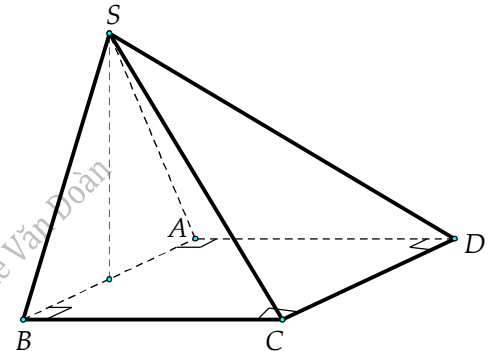
36.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. 1.

B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.



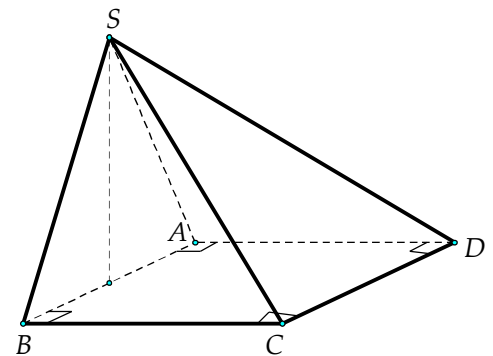
36.7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAB đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}a}{9}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.



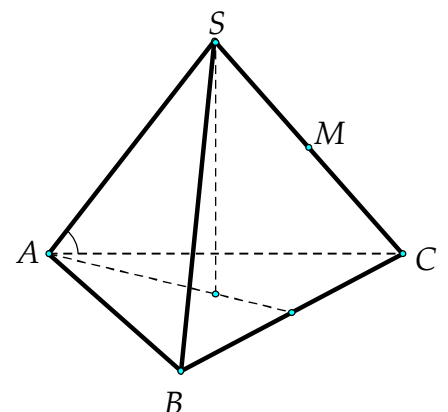
36.8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2a$ và $AB = 3a$. Gọi M là trung điểm SC (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{3\sqrt{21}}{14}a$.

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a$.

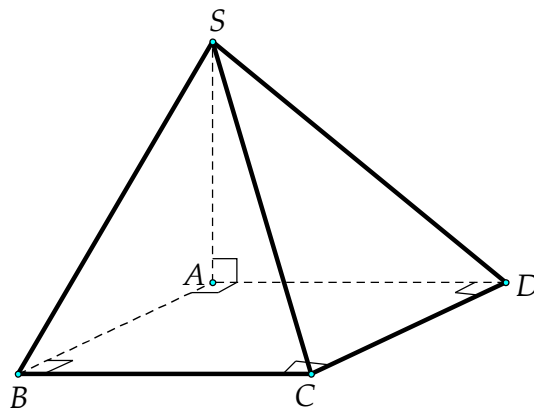
C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a$.

D. $\frac{3\sqrt{21}}{7}a$.



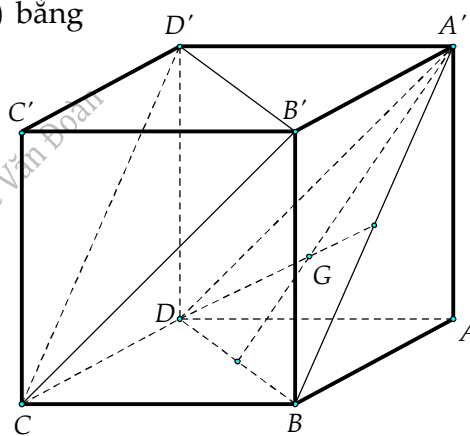
- 36.9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.
 B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.
 C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.
 D. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.



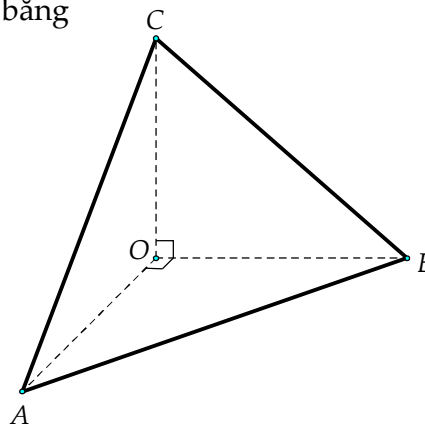
- 36.10.** Cho hình phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác $A'BD$ đến mặt phẳng $(CB'D')$ bằng

- A. $\frac{2a}{81}$.
 B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
 C. $\frac{2a\sqrt{3}}{9}$.
 D. $\frac{a\sqrt{6}}{18}$.



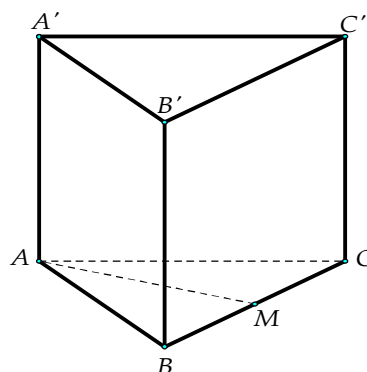
- 36.11.** Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
 B. $\frac{1}{2}a$.
 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.
 D. $\frac{3}{2}a$.



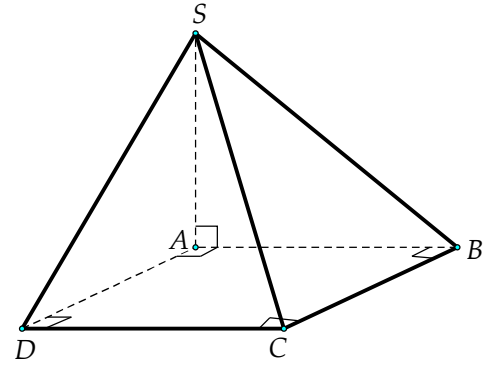
- 36.12.** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của cạnh BC (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là

- A. $a\sqrt{2}$.
 B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 C. $\frac{1}{2}a$.
 D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.



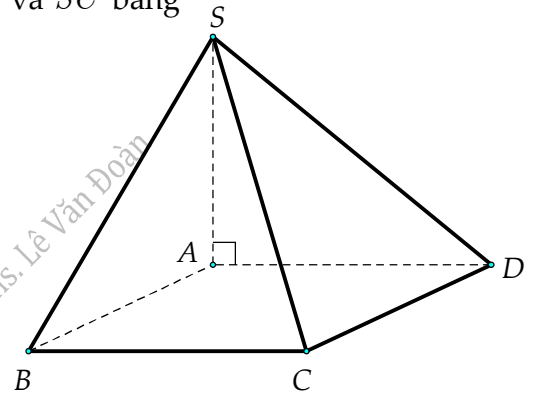
36.13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$) (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.
 B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
 C. $\frac{a}{2}$.
 D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.



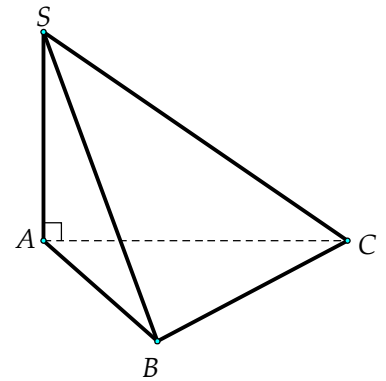
36.14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và SA vuông góc với đáy (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $a\sqrt{2}$.
 B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
 D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.



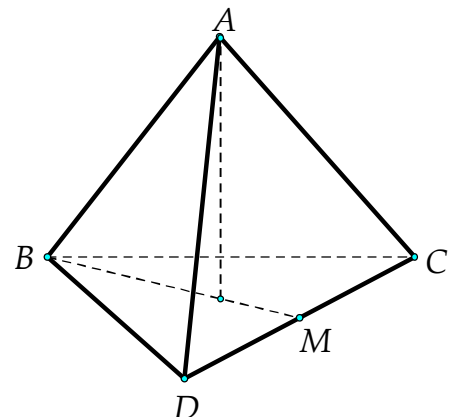
36.15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

- A. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.
 B. $\frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.
 C. $\frac{5a}{2}$.
 D. $5a\sqrt{3}$.



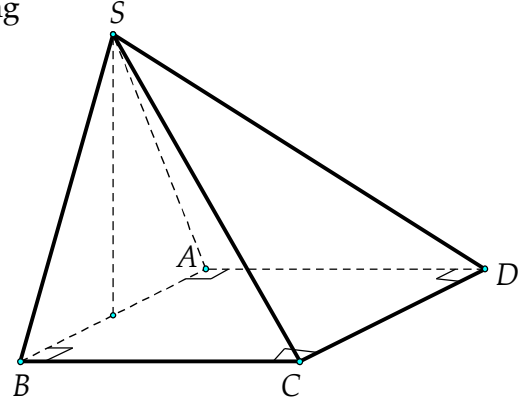
36.16. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM bằng

- A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.
 B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
 C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
 D. $\frac{5a}{2}$.



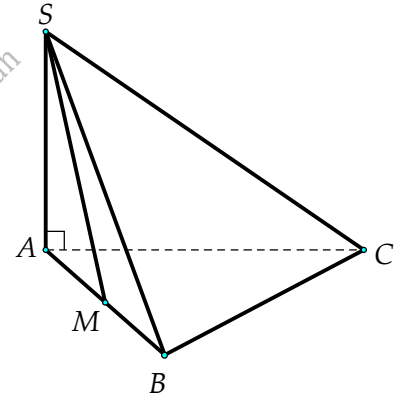
36.17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.
B. $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$.
 C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.
 D. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.



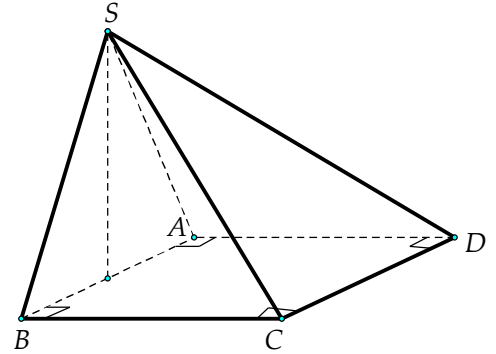
36.18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

- A. $\frac{a}{2}$.
B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
 C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
 D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



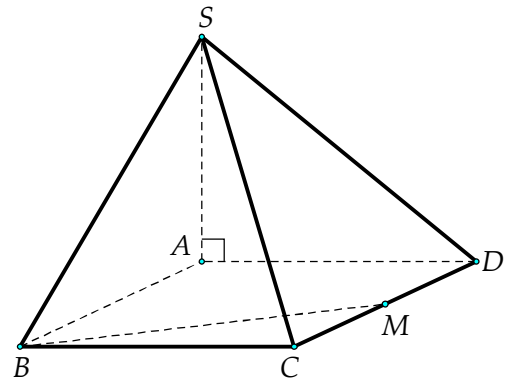
36.19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và hai điểm M, N lần lượt là trung điểm AB, AD . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và NC bằng

- A. $\frac{3a}{4}$.
 B. a .
 C. $\frac{\sqrt{5}a}{10}$.
D. $\frac{3\sqrt{5}a}{10}$.



36.20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ). Gọi M là trung điểm của CD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BM bằng

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.
B. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$.
 C. $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$.
 D. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.



Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm là gốc tọa độ O và đi qua điểm $M(0;0;2)$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

C. $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$.

D. $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2$.

Lời giải tham khảo

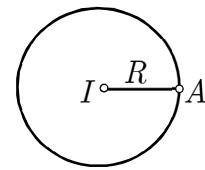
Bán kính của mặt cầu là $MO = 2$, và do có tâm ở $O(0;0;0)$ nên có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. **Chọn đáp án C.**

Viết phương trình mặt cầu

① **Dạng 1. Cơ bản** $(S) : \begin{cases} \text{Tâm } I(a;b;c) \\ \text{BK} : R \end{cases} \Rightarrow (S) : \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}$.

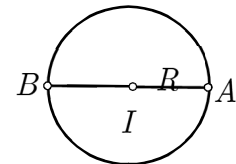
② **Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và đi qua điểm A .**

Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{BK} : R = IA \end{cases}$



③ **Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB , với A, B cho trước.**

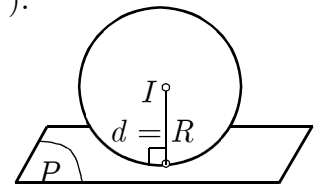
Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \text{Tâm } I \text{ là trung điểm của } AB \\ \text{BK} : R = \frac{1}{2}AB \end{cases}$



④ **Dạng 4. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (P) .**

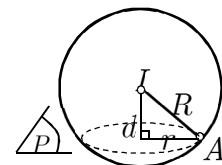
Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{BK} : R = d = d[I;(P)] \end{cases}$

➤ **Cần nhớ:** $(Oxy) : z = 0$, $(Oyz) : y = 0$, $(Oxz) : x = 0$.



⑤ **Dạng 5. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r .**

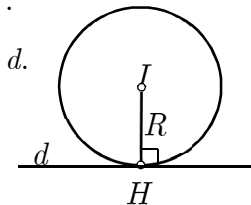
Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{BK} : R = \sqrt{d^2(I;(P)) + r^2} \end{cases}$



➤ **Cần nhớ:** Chu vi đường tròn $C = 2\pi r$ và diện tích $S_{\text{đt}} = \pi r^2$.

⑥ **Dạng 6. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với đường d .**

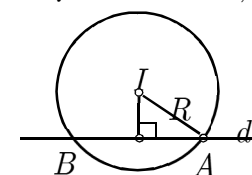
Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{BK} : R = d(I;d) \end{cases}$



Nếu $I(a;b;c) \Rightarrow d(I;Ox) = \sqrt{b^2 + c^2}$, $d(I;Oy) = \sqrt{a^2 + c^2}$, $d(I;Oz) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

⑦ **Dạng 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B .**

Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{BK} : R = \sqrt{d^2(I;(P)) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$



Bài tập tương tự và mở rộng

- 37.1.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là
- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4.$
 B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1.$
 C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4.$
 D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$
- 37.2.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và đi qua điểm $A(5;-1;4)$ là
- A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{24}.$
 B. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \sqrt{24}.$
 C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 24.$
 D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 24.$
- 37.3.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là
- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29.$
 B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5.$
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25.$
 D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5.$
- 37.4.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?
- A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}.$
 B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$
 C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17.$
 D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$
- 37.5.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$. Mặt cầu (S) đường kính AB có phương trình là
- A. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3.$
 B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3.$
 C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$
 D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9.$
- 37.6.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Hỏi phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với trục tung Oy .
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{10}.$
 B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10.$
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10.$
 D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$

- 37.7.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) là
- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$.
- B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$.
- C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.
- D.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.
- 37.8.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (P) là
- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.
- B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.
- C.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.
- D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 36$.
- 37.9.** Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 6 = 0$ cắt trục Oy tại A và (P) cắt đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+2}{1}$ tại B . Phương trình mặt cầu có tâm A và bán kính AB là
- A. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$.
- B. $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 3$.
- C.** $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 3$.
- D. $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 3$.
- 37.10.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(0;4;4)$. Phương trình mặt cầu có tâm A và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC là
- A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$.
- B. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.
- C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$.
- D.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$.
- 37.11.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Phương trình mặt cầu tâm D và đi qua điểm A là
- A. $(x-4)^2 + (y-8)^2 + (z-5)^2 = 64$.
- B.** $(x+4)^2 + (y-8)^2 + (z+3)^2 = 65$.
- C. $(x-4)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 = 64$.
- D. $(x+4)^2 + (y+8)^2 + (z+5)^2 = 65$.
- 37.12.** Gọi I là hình chiếu của $M(3;-1;-2)$ lên mặt phẳng (Oxy) . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM .
- A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$.
- B.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$.
- C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 2$.

D. $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

37.13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 4 = 0$. Mặt cầu (S) tâm I cắt (P) theo một đường tròn bán kính $r = 4$. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$.

37.14. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;4)$ biết mặt cầu (S) cắt mặt phẳng tọa độ (Oxz) theo một hình tròn giao tuyến có diện tích bằng 16π .

A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$.

B. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 5$.

C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16$.

D. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 9$.

37.15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$ có tâm I và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 7 = 0$. Thể tích của khối nón đỉnh I và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) bằng

A. 12π .

B. 48π .

C. 36π .

D. 24π .

37.16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;4)$ và biết (S) cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn giao tuyến có diện tích bằng 16π . Diện tích xung quanh của khối nón có đỉnh là I và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) bằng

A. 12π .

B. 20π .

C. 24π .

D. 36π .

37.17. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm thuộc trục Oz là

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 11$.

C. $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 11 = 0$.

37.18. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$ và có tâm I nằm trên đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$.

B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5$.

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

37.19. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(5;6;8)$, cắt trục Ox tại A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I có phương trình là

A. $(x-5)^2 + (y-6)^2 + (z-8)^2 = 200$.

B. $(x-5)^2 + (y-6)^2 + (z-8)^2 = 20$.

C. $(x-5)^2 + (y-6)^2 + (z-8)^2 = 100$.

D. $(x-5)^2 + (y-6)^2 + (z-8)^2 = 10$.

37.20. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(2;4;8)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

B. $(1;2;3)$.

C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

D. $(3;6;12)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(2;-1;1)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng, nó đi qua điểm $A(1;2;-1)$ nên có phương

trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Chọn đáp án A.

Viết phương trình đường thẳng

- Để viết phương trình đường thẳng, ta cần tìm một điểm đi qua và một vectơ chỉ phương.

$$d : \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP: } \vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}). \\ d : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, (a_1 a_2 a_3 \neq 0). \end{cases}$$

- Một số dạng viết phương trình mặt phẳng thường gặp (tham khảo):

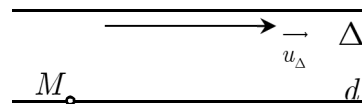
Dạng 1. Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua A và B .

Phương pháp. Đường thẳng $d : \begin{cases} \text{Qua } A \text{ (hay } B) \\ \text{VTCP: } \vec{u}_d = \overrightarrow{AB} \end{cases}$.



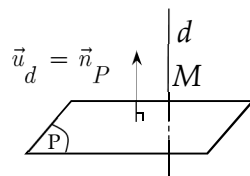
Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ .

Phương pháp. Ta có $d : \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta \end{cases}$



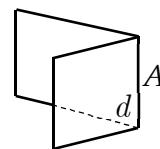
Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + d = 0$.

Phương pháp. Ta có $d : \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = \vec{n}_{(P)} = (a; b; c) \end{cases}$



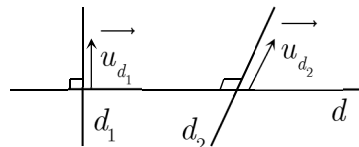
Dạng 4. Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) cho trước.

Phương pháp. Ta có $d : \begin{cases} \text{Qua } A = (P) \cap (Q) \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] \end{cases}$



Dạng 5. Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước.

Phương pháp. Ta có $d : \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$



Dạng 6. Viết phương trình đường thẳng d qua M và song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Phương pháp. Ta có $d : \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] \end{cases}$

Dạng 7. Viết phương trình đường thẳng d qua M , vuông góc d' và song song mặt (P) .

Phương pháp. Ta có $d : \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = [\vec{u}_{d'}, \vec{n}_P] \end{cases}$

Dạng 8. Phương trình đường thẳng d nằm trong mặt (P) , song song mặt (Q) và qua M .

Phương pháp. Ta có $d : \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] \end{cases}$

Bài tập tương tự và mở rộng

38.1. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1; 2; -3), B(3; -6; 1)$ là

A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}$

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+6}{-4} = \frac{z-1}{-2}$

D. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{2}$

38.2. Trong không gian $Oxyz$, phương trình trung tuyến AM của tam giác ABC với $A(3; 1; 2), B(-3; 2; 5), C(1; 6; -3)$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 8 - 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4 - 1t \end{cases}$

C.
$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

38.3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$ và $C(0;-2;1)$. Phương trình trung tuyến AM của tam giác ABC là

A.
$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-4}$$

B.
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+2}{1}$$

C.
$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{2}$$

D.
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$$

38.4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1;3;4)$ và song song với trục hoành là

A.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ y = 4 - t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ y = 4 + t \end{cases}$$

38.5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;0;1)$, $C(-1;1;2)$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và song song với BC là

A.
$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

B.
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

C.
$$\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

D.
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

38.6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và song song với đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}$ có dạng

A.
$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$$

B.
$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

C.
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$$

D.
$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$$

38.7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua $A(1;2;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oyz) là

A.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

38.8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(2;1;-4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 3z - 8 = 0$ có phương trình là

A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{3}$.

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{-3}$.

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

38.9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(2;-3;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 3y + 5 = 0$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 3t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 3t \\ z = 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2 + 1t \\ y = 3 - 3t \\ z = -4 \end{cases}$

38.10. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;-5)$, đồng thời vuông góc với hai vectơ $\vec{a} = (1;0;1)$ và $\vec{b} = (4;1;-1)$.

A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{1}$.

B. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-5}{1}$.

C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{-5}$.

38.11. Cho $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình đường thẳng đi qua M , đồng thời vuông góc với d_1 và d_2 là

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

38.12. Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(2;-1;5)$, đồng thời song song với mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$ và vuông góc với đường $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{3}$.

A. $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{4}$.

B. $\frac{x+2}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{4}$.

C. $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+5}{-4}$.

D. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{5}$.

38.13. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua $M(1;-1;2)$, song song đồng thời với hai mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x + 2y - 3z + 3 = 0$ có phương trình

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{3}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

38.14. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(-3;5;7)$, $C(-1;-4;-1)$. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G của tam giác ABC .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+3}{5}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{5}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{5}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{5}$.

38.15. Trong không gian $Oxyz$, viết đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$ và vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3}$. Biết Δ đi qua điểm $M(0;1;3)$.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{1}$.

38.16. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d qua $A(1;2;3)$, đồng thời d cắt và vuông góc với trục hoành Ox là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -3 + 3t \end{cases}$.

38.17. Trong không gian $Oxyz$, cho đường $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt $(P): 2x + y - 2z = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) , cắt d và vuông góc với d có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

38.18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Tìm phương trình chính tắc của đường thẳng OH .

A. $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$.

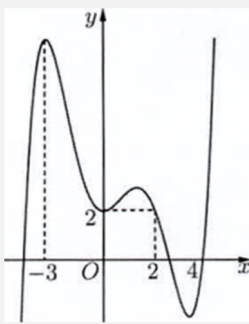
B. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$.

C. $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

D. $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng

- A. $f(0)$.
 B. $f(-3) + 6$.
 C. $f(2) - 4$.
 D. $f(4) - 8$.



Lời giải tham khảo

Đặt $t = 2x \xrightarrow{x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]} t \in [-3; 4]$.

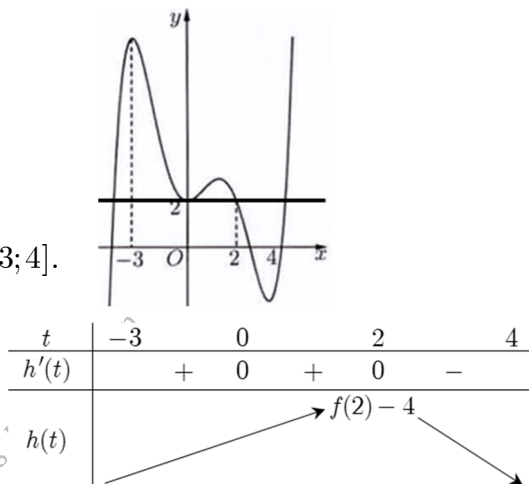
Hàm số trở thành $h(t) = f(t) - 2t, \forall t \in [-3; 4]$.

Ta có: $h'(t) = f'(t) - 2, h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}, \forall t \in [-3; 4]$.

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$$\max h(t) = h(2) = f(2) - 4.$$

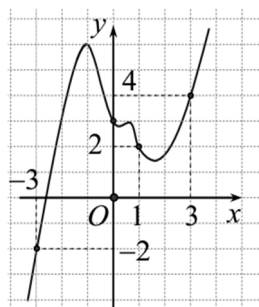
Chọn đáp án C.



Bài tập tương tự và mở rộng

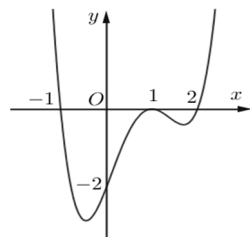
39.1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình vẽ dưới đây. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
 B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
 C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.
 D. $\nexists \max_{[-3;3]} g(x)$.



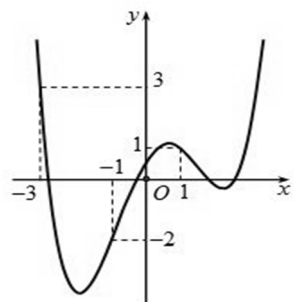
39.2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình vẽ dưới đây. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ bằng

- A. $f(2) + \frac{2}{3}$.
 B. $f(-1) + \frac{2}{3}$.
 C. $\frac{2}{3}$.
 D. $f(1) - \frac{2}{3}$.



39.3. Cho đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} + 20$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$ bằng

- A. $g(-1)$.
 B. $g(1)$.
 C. $g(-3)$.
 D. $g(-3) + g(1)$.



39.4. Cho hàm số $y = f(x)$. Có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

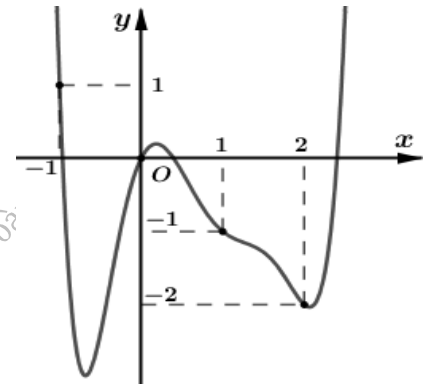
x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	O	$+$	O	$-$	O	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2-2x} + m$ đúng $\forall x \in (0;2)$ khi

- A. $m > f(0) - 1$.
 B. $m > f(1) - \frac{1}{e}$.
 C. $m \geq f(0) - 1$.
 D. $m \geq f(1) - \frac{1}{e}$.

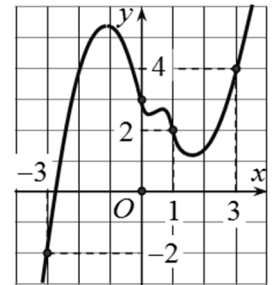
39.5. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm các giá trị của m để $m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$ nghiệm đúng $\forall x \in (-3; +\infty)$.

- A. $m \geq 2f(0) - 1$.
 B. $m \leq 2f(0) - 1$.
 C. $m \leq 2f(-1)$.
 D. $m \geq 2f(-1)$.



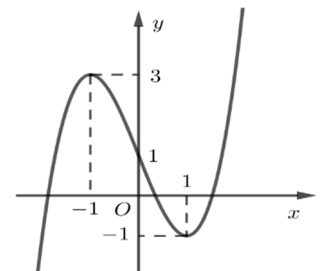
39.6. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm m để bất phương trình $m \geq 2[f(x+1) - 2x] - x^2 - 4$ nghiệm đúng $\forall x \in [-4;2]$.

- A. $m \geq 2f(0) - 1$.
 B. $m \geq 2f(-3) - 4$.
 C. $m \geq 2f(3) - 16$.
 D. $m \geq 2f(1) - 4$.



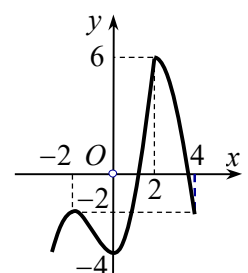
39.7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. -9 .
 B. -10 .
 C. -6 .
 D. -5 .



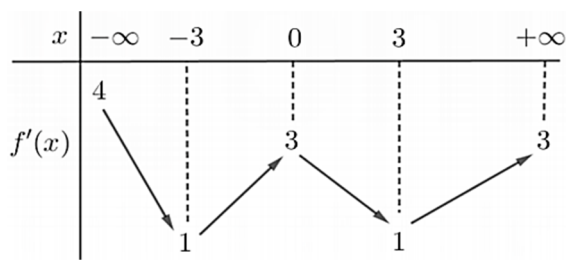
39.8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

- A. 8.
 B. 9.
 C. 10.
 D. 11.



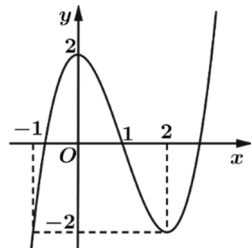
39.9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi

- A. $m \geq f(-2) - 3$.
 B. $m > f(2) - 3e^3$.
 C. $m \geq f(2) - 3e^3$.
 D. $m > f(-2) - 3$.



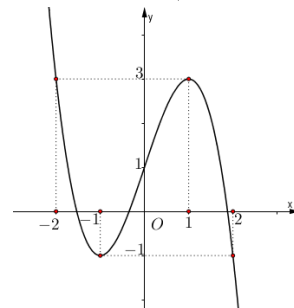
39.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = |f(2 \sin x) - 4 \sin x|$ có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; \pi)$ bằng

- A. 7.
 B. 5.
 C. 6.
 D. 4.



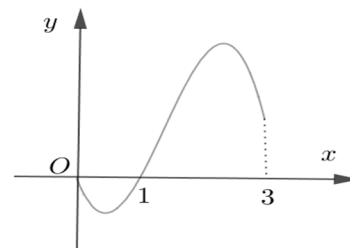
39.11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Hàm số $y = |f(\cos x) + \cos x - 6|$ có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. 3.
 B. 0.
 C. 1.
 D. 2.



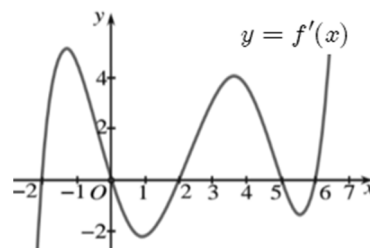
39.12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ lần lượt là

- A. $f(1), f(0)$.
 B. $f(2), f(0)$.
 C. $f(1), f(3)$.
 D. $f(0), f(3)$.



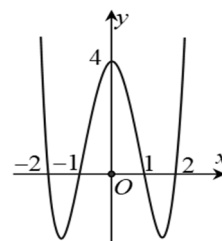
39.13. Cho $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới. Đặt $M = \max_{[-2; 6]} f(x)$, $m = \min_{[-2; 6]} f(x)$. Giá trị của biểu thức $P = M + m$ bằng

- A. $f(0) + f(2)$.
 B. $f(5) + f(-2)$.
 C. $f(5) + f(6)$.
 D. $f(0) + f(-2)$.



39.14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-2; 1]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. $f(1) + f(0)$.
 B. $f(1) + f(-2)$.
 C. $f(-2) + f(-1)$.
 D. $f(-1) + f(0)$.



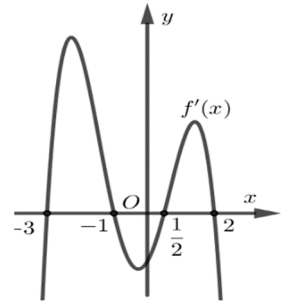
39.15. Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + n$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $M = \max_{[-3;2]} f(|x|)$, $m = \min_{[-3;2]} f(|x|)$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$.

B. $f(0,5) + f(0)$.

C. $f(-3) + f(2)$.

D. $f(-3) + f(0)$.



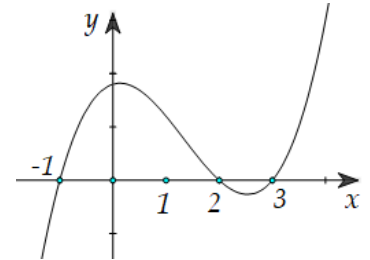
39.16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của M và m lần lượt là

A. $M = f(-1)$, $m = f(3)$.

B. $M = |f(3)|$, $m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|$, $m = |f(2)|$.

D. $M = |f(-1)|$, $m = |f(3)|$.



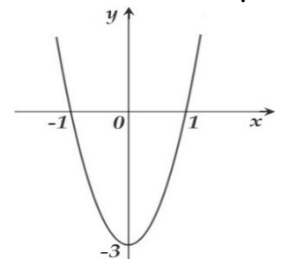
39.17. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[0;3]$ bằng

A. 20.

B. 60.

C. 22.

D. 3.



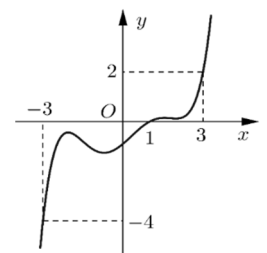
39.18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. $g(0)$.

B. $g(1)$.

C. $g(-3)$.

D. $g(3)$.



39.19. Cho hàm số $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ (a, b các tham số) đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$. Khi $a - b$ đạt giá trị lớn nhất thì $b^4 + ab^3 + b^3 + 1$ bằng

A. 9.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

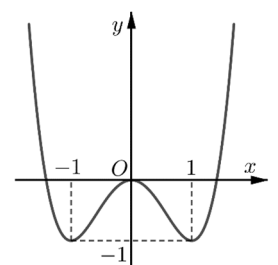
39.20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = [f(x) + m]^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 9 là

A. -3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.



Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $(2^{x+1} - \sqrt{2})(2^x - y) < 0$?

A. 1024.

B. 2047.

C. 1022.

D. 1023.

Lời giải tham khảo

Ta có: $(2^{x+1} - \sqrt{2})(2^x - y) < 0$ với $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}^+$.

TH1. Nếu $\begin{cases} 2^{x+1} - \sqrt{2} < 0 \\ 2^x - y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < \frac{1}{2} \\ x > \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > \log_2 y \end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán, một y có không quá 10 số nguyên x , mà $x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -10 < \log_2 y \leq -1$

$\Leftrightarrow 2^{-10} < y \leq 2^{-1}$. Mà y nguyên dương $\Rightarrow$ Không tồn tại y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Nếu $\begin{cases} 2^{x+1} - \sqrt{2} > 0 \\ 2^x - y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > \frac{1}{2} \\ x < \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < \log_2 y \end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán, một y có không quá 10 số nguyên x , mà $x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \log_2 y \leq 10$

$\Leftrightarrow 0 < y \leq 2^{10} = 1024 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}^+} y \in \{1; 2; 3; \dots; 1023; 1024\}$ có 1024 giá trị.

Chọn đáp án A.

Bài tập tương tự và mở rộng

40.1. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của y sao cho mỗi giá trị của y có ít nhất 1 số nguyên x , nhưng không quá 6 số nguyên ?

A. 2048.

B. 2016.

C. 1012.

D. 2023.

40.2. Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $(2^{x+2} - \sqrt{2})(2^x - m) < 0$ có không quá 6 nghiệm nguyên là

A. 29.

B. 33.

C. 32.

D. 31.

40.3. Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $2 \log_2^2 x - (m+1) \log_2 x + m - 1 < 0$ chứa không quá 10 số nguyên dương là

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

- 40.4.** Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $3^{2x+2} - 3^x \cdot (3^{m+2} + 1) + 3^m < 0$ có không quá 30 nghiệm nguyên là
- A. 28.
B. 29.
 C. 30.
 D. 31.
- 40.5.** Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\ln(x^2 + 2x + m) > 2\ln(2x - 1)$ chứa đúng 2 số nguyên là
- A. 4.
 B. 8.
 C. 3.
D. 9.
- 40.6.** Gọi S là tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $mx^2 + \log_2(mx^2) > 2^{\log_2^2 x} + \log_2^2 x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập hợp S có đúng 8 phần tử?
- A. 5.**
 B. 6.
 C. 10.
 D. 11.
- 40.7.** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của $y \in [-2021; 2021]$ sao cho ứng với mỗi y thì có đúng 2 giá trị của x thỏa mãn $4x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{e^{x+y}} \geq e^{x+y} + 3x^2$?
- A. 2020.
 B. 4040.
 C. 2022.
D. 2021.
- 40.8.** Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(\sqrt{x} + \sqrt{x - 4^y}) \cdot \log_2(\sqrt{x} - \sqrt{x - 4^y}) = y^2 + y$. Có bao nhiêu số nguyên không âm y sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn đẳng thức trên?
- A. 0.
B. 1.
 C. 7.
 D. Vô số.
- 40.9.** Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x^2 + y) + \frac{1}{\log_2(x + y)} = y + 1$. Có bao nhiêu số nguyên $y \in [-3; 1]$ để tồn tại số thực $x \in [1; +\infty)$ thỏa mãn đẳng thức trên?
- A. 1.
B. 2.
 C. 3.
 D. 0.

40.10. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3(x + 2y) = \log_2(x^2 + y^2)$?

- A. 3.
- B. 2.**
- C. 1.
- D. Vô số.

40.11. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2)$?

- A. 3.
- B. 2.
- C. 1.
- D. Vô số.**

40.12. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_2(m - x) + 2m = 2^x + 3x - 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$?

- A. 6.
- B. 5.
- C. 4.**
- D. 3.

40.13. Có bao nhiêu giá trị nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $1 \leq a \leq 2020$ và $2 \cdot 3^b - \log_3(a + 3^{b-1}) = 3a - b$?

- A. 7.**
- B. 2020.
- C. 2021.
- D. 6.

40.14. Có tất cả bao nhiêu bộ số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn đồng thời $e^{2x+y+z-3} \leq 2x + y + z - 2$ và $z^2 - yz + x = 0$?

- A. 5.
- B. 2.**
- C. 4.
- D. 7.

40.15. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x + 4y - 4) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 33.
- B. 24.**
- C. 15.
- D. 5.

- 40.16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$ và $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$?
- A. 3.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 6.
- 40.17.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m để $x^{3\log_3 x} + (m - 3).y^{2\log_3 y} + (18 - 2m).x^{\log_3 x} - 32 = 0$ có 6 cặp số thực dương $(x; y)$ sao cho $xy = 1$?
- A. 6.
- B. 7.
- C. 8.
- D. 10.
- 40.18.** Có bao nhiêu cặp số thực (x, y) thỏa mãn $\frac{\log_2 x}{\log_2(xy) + 1} = \frac{\log_2 y}{\log_2(xy) - 1} = \log_2 x + \log_2 y$?
- A. 4.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.
- 40.19.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để tồn tại cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $x.y = m$ và $\log_4(x + y + 12). \log_{x+y} 2 = 1$?
- A. $(-\infty; 4]$.
- B. $\{4\}$.
- C. $[0; 4]$.
- D. $[4; +\infty)$.
- 40.20.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $3^{x+m} = 4^{x^2+m^2}$ có nghiệm ?
- A. 0.
- B. 3.
- C. 2.
- D. Vô số.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1) \cos x dx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. B. $\frac{23}{6}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = 2\sin x + 1 \Rightarrow dt = 2\cos x dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1) \cos x dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$

$= \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \frac{1}{2} \int_2^3 (x^2 - 1) dx = \frac{23}{6}$. Chọn đáp án B.

Bài tập tương tự và mở rộng

41.1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + ce$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

A. 9.

B. 11.

C. 12.

D. 14.

41.2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Khi đó $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx$ bằng

A. 32.

B. 31.

C. $\frac{32}{3}$.

D. $\frac{71}{6}$.

41.3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2ax & \text{khi } x \leq 0 \\ 3x^2 + 2bx & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ (với a, b là các tham số thực) thỏa $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$. Giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = [f(-1)]^2 + [f(1)]^2$ bằng

A. 5.

B. 2.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{25}{2}$.

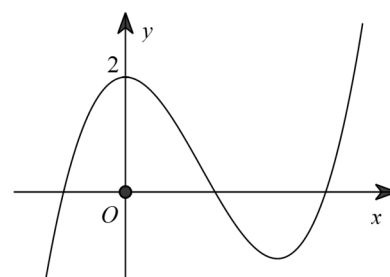
41.4. Cho $y = f(x)$ là hàm bậc ba như hình vẽ. Nếu $\int_1^4 x f''(x-1) dx = 7$ và $\int_1^2 2x f'(x^2-1) dx = -3$ thì phương trình tiếp tuyến của hàm số trên tại điểm có hoành độ bằng 3 là

A. $y = x - 4$.

B. $y = 2x - 7$.

C. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

D. $y = 3x - 10$.



41.5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a & \text{khi } x \geq 0 \\ 2 + bx & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ (với a, b là các tham số thực).

Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ thì $m + 2n$ bằng

A. 19.

B. 20.

C. $\frac{59}{2}$.

D. $\frac{13}{3}$.

41.6. Biết hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} & \text{khi } x \geq 0 \\ (2x+1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Biết $F(4) + F(-1) = 8$. Khi đó $F(-2) + 2F(12)$ bằng

A. $\frac{121}{8}$.

B. $\frac{281}{16}$.

C. 27.

D. 20.

41.7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$. Khi đó

$\int_{1/8}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

41.8. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa $\int_{-3}^3 f(\sqrt{x^2 + 16} - x) dx = \int_2^8 f(x) dx = 8$. Khi đó $\int_2^8 \frac{f(x)}{x^2} dx$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

41.9. Nếu $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương thì ab bằng

A. 20.

B. -10.

C. 15.

D. 10.

41.10. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos 2x + 3 \cos x + 2} dx = a \ln 3 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $a^3 + 2ab - 3b^2$ bằng

A. 26.

B. -6.

C. 3.

D. -4.

41.11. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x) = x^2 - 3x + 2 \int_0^1 f(x)f'(x)dx$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

- A. $\frac{10}{3}$. B. $-\frac{10}{3}$.
C. $\frac{26}{15}$. D. $-\frac{26}{15}$.

41.12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$. Biết rằng $f(2) = 4$, $f(-2) = 0$ và $xf'(x) = f(x) + x^3$ với mọi $x \neq 0$. Giá trị của $f(2) + f(-1)$ bằng

- A. 8. B. $\frac{9}{2}$.
C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{15}{2}$.

41.13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^*$ thỏa mãn $f''(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 0$ và $f(2) = 0$. Giá trị của $f(-2)$ bằng

- A. $1 - 2\ln 2$. B. $2 + \ln 2$.
C. $3 + \ln 2$. D. $\ln 2$.

41.14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1)$. Biết

$\int_1^{17} f(x)dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

- A. $\frac{29}{2}$. B. 5.
C. 7. D. 37.

41.15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $xf(x^3) + f(x^2 - 1) = e^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$\int_{-1}^0 f(x)dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $3e$.
C. $3(1 - e)$. D. $3(e - 1)$.

41.16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(e^x + 1) + f(x) + f'(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và

$f(0) = 2f(\ln 2) - 1$. Khi đó $\int_2^3 f(x)dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2} \ln 2 - 1$. B. $2 \ln 2$.
C. $-\frac{2}{3}$. D. $2 \ln 2 - 2$.

- 41.17.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + x + 2) = x^2 + x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-8}^4 x^2 f'(x) dx$ thuộc khoảng nào dưới đây ?
- A. $(-20; -10)$. B. $(20; 25)$.
C. $(10; 20)$. D. $(-25; -20)$.

- 41.18.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) + f(1) = -1$ và $f''(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+1}+1}, \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $-\frac{3509}{3402}$. B. $-\frac{3295}{6804}$.
C. $-\frac{3295}{3402}$. D. $-\frac{3509}{6804}$.

- 41.19.** Biết rằng $\int f(2x) dx = \ln x + 2x + C, \forall x \in (0; +\infty)$. Họ các nguyên hàm của $(2x+1)f'(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là
- A. $-\frac{2}{x} - 4 \ln x + C$. B. $\frac{2}{x} - 4 \ln x + C$.
C. $\frac{1}{x} - 2 \ln x + C$. D. $\frac{4}{x} - 2 \ln x + C$.

- 41.20.** Biết $F(x) = x^2 - e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(-x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(x)e^{-x} dx$ bằng
- A. $2e^{-x}(x-1) + x + C$. B. $2e^{-x}(x+1) + x + C$.
C. $\frac{2x+1}{e^x} + x + C$. D. $\frac{2x-1}{e^x} + x + C$.

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và $(z+2i)(\bar{z}-2)$ là số thuần ảo ?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 4.

Lời giải tham khảo

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Ta có: $(z+2i)(\bar{z}-2) = z\bar{z} - 2z + 2i\bar{z} - 4i = x^2 + y^2 - 2x - 2yi + 2i(x-yi) - 4i$

$= x^2 + y^2 - 2x - 2yi + 2xi + 2y = (x^2 + y^2 - 2x + 2y) + (2x - 2y)i$ là số thuần ảo

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ có dạng là đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; -1)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

Ta lại có: $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$ là đường tròn (C_2) có tâm là $O(0; 0)$, bán kính $R_2 = \sqrt{2}$.

Vẽ hai đường tròn (C_1) và (C_2) lên cùng hệ trục.

$\Rightarrow$ có hai điểm chung nên tồn tại 2 số phức.

Chọn đáp án C.

☛ **Lưu ý.** Ta có thể giải hệ phương trình sẽ tìm được hai cặp $(x; y)$, tức có 2 số phức thỏa bài toán.

Bài tập tương tự và mở rộng

42.1. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 1 + 8i$ và $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo. Khi đó $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\sqrt{65}$.

B. 65.

C. $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

D. $\frac{65}{2}$.

42.2. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo ?

A. 0.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

42.3. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z - 1)(\bar{z} + i)$ là số thực ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

42.4. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z + 1 - 2i}{\bar{z} + 3 + 4i} \right| = 1$ và số phức $\frac{z - 2i}{\bar{z} + i}$ là số thuần ảo ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

42.5. Biết rằng có hai số phức thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ và $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số thực. Tổng các phần ảo của hai số phức đó bằng

A. 9.

B. 7.

C. 5.

D. 3.

42.6. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z\bar{z} - z| = 2$ và $|z| = 2$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

- 42.7.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Khi đó $a + b$ bằng
- A. -1 .
B. -5 .
C. 3 .
D. 7 .
- 42.8.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $\frac{2 - iz}{2 + i} - \frac{z + 2i}{1 - 2i} = 2\bar{z}$ và $|z| > 1$. Tính $a^2 + b^2 - ab$.
- A. -5 .
B. -1 .
C. 5 .
D. 1 .
- 42.9.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tính $T = (z - 2)^2 + (4 - z)^2$.
- A. 2 .
B. 4 .
C. 0 .
D. 1 .
- 42.10.** Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}[(3 + 4i)|z| - 4 + 3i] - 5\sqrt{2} = 0$. Môđun của số phức z bằng
- A. 2 .
B. $\sqrt{2}$.
C. $2\sqrt{2}$.
D. 1 .
- 42.11.** Cho số phức z thỏa $\frac{1 - i}{z} + i = \frac{(2 - 3i)\bar{z}}{|z|^2} + 2$. Khi đó môđun của z thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
B. $(2; +\infty)$.
C. $(0; 1)$.
D. $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.
- 42.12.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và iz_2 . Biết rằng $\widehat{MON} = 45^\circ$ với O là gốc tọa độ. Khi đó $|z_1^2 + 4z_2^2|$ bằng
- A. $4\sqrt{2}$.
B. 4 .
C. 6 .
D. $4\sqrt{5}$.

- 42.13.** Cho các số phức z thỏa $(z - 2 + i)(\bar{z} - 2 - i) = 16$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 - i)\bar{z} + 2i$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng
- A. $\sqrt{2}$.
 B. 5.
 C. $4\sqrt{2}$.
 D. 3.
- 42.14.** Cho các số phức z thỏa $z\bar{z} - z(4 - 5i) - \bar{z}(4 + 5i) + 16 = 0$. Trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{z + 3i}{2 - i} + 4 + i$ cùng thuộc một đường tròn cố định có tọa độ tâm là
- A. $I(4; 5)$.
 B. $I(1; 3)$.
 C. $I(-4 - 5)$.
 D. $I(8; -3)$.
- 42.15.** Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $2z\bar{z} - (5 + 7i)|z|^2 = (17 + i)\bar{z}$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức z khác gốc tọa độ là
- A. $N(-1; 2)$.
 B. $P(2; -1)$.
 C. $Q(-2; 1)$.
 D. $M(1; -2)$.
- 42.16.** Cho số phức z thỏa mãn $z\bar{z}(6 - 8i) + (5 - i)|z|^2 = -(23 + 73i)z$. Tỉ số giữa phần thực và phần ảo là
- A. $\frac{2}{5}$.
 B. $\frac{2}{7}$.
 C. 2.
 D. 3.
- 42.17.** Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 4)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng
- A. $\frac{4}{3}$.
 B. $\frac{32}{3}$.
 C. $\frac{8}{3}$.
 D. 1.
- 42.18.** Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa $|z - 1| = |z - i|$ và $|z + 2m| = m + 1$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 1.
 B. 2.

C. 3.

D. 4.

42.19. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z| = m$ và $|z - 4m + 3mi| = m^2$?

A. 0.

B. 1.

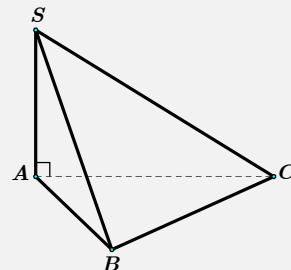
C. 2.

D. 3.

42.20. Cho phương trình $z^2 - 2z + c = 0$ (với c là số thực và $c > 1$) có hai nghiệm phức z_1 và z_2 . Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn cho z_1 và z_2 trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Biết $|z_1^2 - z_2^2| = 4\sqrt{6}$. Chu vi tam giác OMN (với O là gốc tọa độ) bằng

A. $2(\sqrt{5} + \sqrt{6})$.B. $2(\sqrt{6} + \sqrt{7})$.C. $2(3 + \sqrt{6})$.D. $2(2 + \sqrt{6})$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là 45° (tham khảo hình bên dưới). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{8}$.B. $\frac{3a^3}{8}$.C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.D. $\frac{a^3}{4}$.

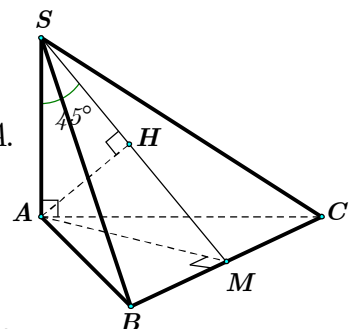
Lời giải tham khảo

Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A lên SM .

$\Rightarrow (\widehat{SA, (SBC)}) = \widehat{ASH} = \widehat{ASM} = 45^\circ \Rightarrow \triangle SAM$ vuông cân tại A .

Suy ra: $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$. Chọn đáp án A.



Bài tập tương tự và mở rộng

43.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Biết góc giữa SD và (SAC) là 30° , thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $9a^3$.B. $6a^3$.

C. $\frac{9a^3}{2}$.

D. $3a^3$.

43.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Mặt bên (SAB) nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, gọi H là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng SH và mặt phẳng (SCD) bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ACD$ bằng

A. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $2a^3\sqrt{3}$.

C. $2a^3$.

D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

43.3. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $8\sqrt{3}$.

B. $16\sqrt{3}$.

C. $64\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{3}$.

43.4. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. a^3 .

B. $a^3\sqrt{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

43.5. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $SA \perp (ABC)$, góc giữa (SBC) và (ABC) là 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a^3}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{7}a^3}{14}$.

C. $\frac{3\sqrt{21}a^3}{14}$.

D. $\frac{\sqrt{7}a^3}{7}$.

43.6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh AA' hợp với $B'C$ một góc 60° và khoảng cách giữa chúng bằng a , $B'C = 2a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$.
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.
 C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.
 D. $\frac{a^3}{4}$.

43.7. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC) , góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° , $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{15}$.
 B. $2\sqrt{3}a^3$.
 C. $2\sqrt{2}a^3$.
D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{15}$.

43.8. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HC = 2HA$. Mặt bên $(ABB'A')$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{a^3}{6}$.
 B. $\frac{a^3}{3}$.
 C. $\frac{3a^3}{5}$.
D. $\frac{3a^3}{2}$.

43.9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Thể tích của khối đa diện $AB'CA'C'$ bằng

- A.** $a^3\sqrt{3}$
 B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$
 C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

43.10. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. a^3 .

B. $3a^3$.

C. $\frac{4}{3}a^3$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

43.11. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là vuông; mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{3}a^3$.

B. a^3 .

C. $\frac{2}{3}a^3$.

D. $\frac{3a^3}{2}$.

43.12. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $a/6$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

B. $0,5a^3$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

43.13. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

43.14. Cho tứ diện $OABC$ biết OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau, biết $OA = 3$, $OB = 4$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6. Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. 3.

B. $\frac{\sqrt{41}}{12}$.

C. $\frac{144}{\sqrt{41}}$.

D. $\frac{12}{\sqrt{41}}$.

43.15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

43.16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = 2a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$, góc giữa đường thẳng AB và (SBC) bằng 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

43.17. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB \perp BC$, $BC \perp SC$, $SC \perp SA$, $BC = a$, $SC = \sqrt{15}a$ và góc giữa AB , SC bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{5a^3}{2}$.

B. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{2}$.

C. $\frac{5}{6}a^3$.

D. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$.

43.18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, $AB = a$, góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3 .

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

43.19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Biết rằng khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{18}$, thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{20}$.

B. a^3 .

C. $a^3\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{20}$.

43.20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $4a$. Biết SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và $SA = 6a\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, SC . Gọi điểm K sao cho AK là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Thể tích khối tứ diện $KMNP$ bằng

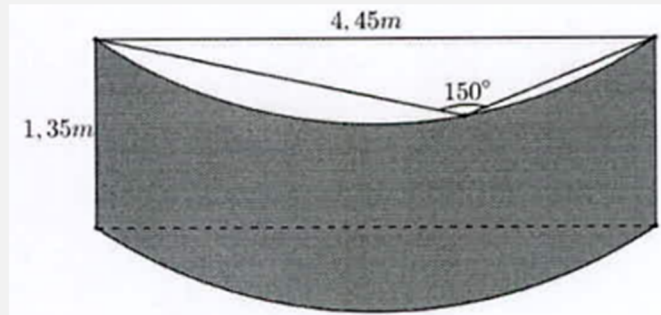
A. $\frac{13a^3}{2}$.

B. $8a^3$.

C. $7a^3$.

D. $6a^3$.

Câu 44. Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng tấm kính cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình bên. Biết giá tiền của 1m^2 kính như trên là 1.500.000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu ?



- A. 23.591.000 đồng. B. 36.173.000 đồng. C. 9.437.000 đồng. D. 4.718.000 đồng.

Lời giải tham khảo

Bán kính của đường tròn đáy là $R = \frac{4,45}{2 \sin 150^\circ} = 4,45\text{m}$.

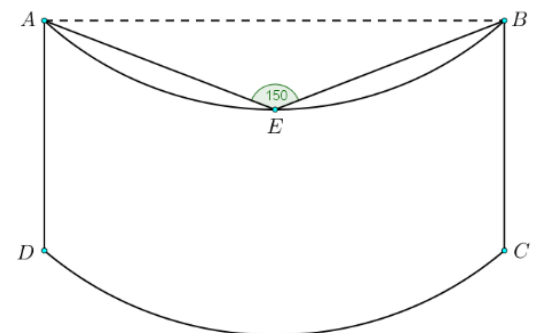
Do đó, mép trên của tấm kính bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao 1,35m và bán kính đáy $R = 4,45\text{m}$.

Số tiền mà ông Bình mua tấm kính trên là

$$T = \frac{1}{6} \cdot 2\pi R h = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 4,45 \cdot 1,35 \cdot 1500000 \approx 9.437.000 \text{ đồng. Chọn đáp án C.}$$

Bài tập tương tự và mở rộng

44.1. Ông An làm lan can ban công của ngôi nhà bằng một miếng kính cường lực. Miếng kính này là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình bên. Biết $AB = 4\text{m}$, $\widehat{AEB} = 150^\circ$ (E là điểm chính giữa cung AB) và $DA = 1,4\text{m}$. Giá tiền của 1m^2 kính này là 2.000.000 đồng. Số tiền (làm tròn) mà ông An phải trả bằng



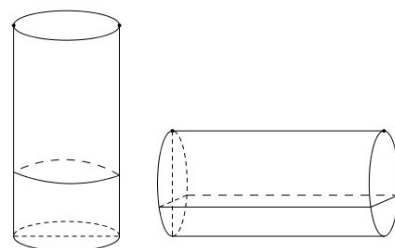
- A. 11.820.000 đồng.
C. 10.840.000 đồng.
B. 10.250.000 đồng.
D. 11.730.000 đồng.

44.2. Một thùng hình trụ có chiều cao $h = 3\text{m}$, bán kính đường tròn đáy $R = 1\text{m}$ chứa một lượng nước. Biết rằng nếu đặt thùng nằm ngang ta được chiều cao mực nước trong thùng là $d = 0,5\text{m}$. Hỏi thể tích lượng nước có trong thùng gần nhất với kết quả nào sau đây ?

- A. $1,75\text{m}^3$.
B. $1,8\text{m}^3$.
C. $1,85\text{m}^3$.
D. $1,9\text{m}^3$.

- 44.3.** Một ống thủy tinh hình trụ có chiều cao 14,2cm và bán kính đáy 1,45cm đang chứa dung dịch H_2SO_4 . Khi đặt ống thủy tinh nằm ngang thì diện tích bề mặt dung dịch trên thành ống chiếm 41,67% diện tích xung quanh ống. Thể tích dung dịch H_2SO_4 trong ống bằng

- A. $32,47cm^3$.
 B. $33,86cm^3$.
 C. $31,62cm^3$.
 D. $30,12cm^3$.

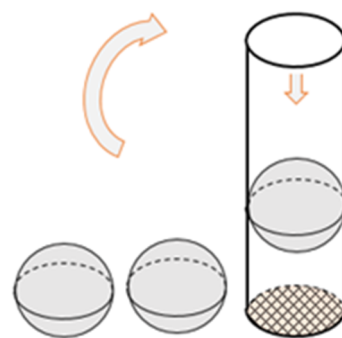


- 44.4.** Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Thể tích của mỗi cái phễu đó bằng

- A. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ lít.
 B. $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.
 C. $8\sqrt{2}\pi$ lít.
 D. $160\sqrt{2}\pi$ lít.

- 44.5.** Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Khẳng định nào đúng ?

- A. $S_1 = \frac{6}{5}S_2$.
 B. $S_1 = S_2$.
 C. $S_1 = \frac{3}{2}S_2$.
 D. $\frac{S_1}{S_2} = 2$.



- 44.6.** Một ly nước hình trụ có chiều cao 20cm và bán kính đáy bằng 4cm. Bạn An đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly 17cm thì dừng lại. Sau đó bạn An lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính 2cm thả vào ly nước. Bạn An cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước tràn ra khỏi ly ?

- A. 5.
 B. 4.
 C. 6.
 D. 7.

44.7. Một ly nước rộng hình trụ có chiều cao 20cm và bán kính đáy 4cm. An bỏ vào ly 5 viên đá hình cầu có bán kính 2cm sau đó đổ trà sữa vào cho đến khi đầy ly. Tính lượng trà sữa mà An đã dùng để đổ đầy ly?

A. $\frac{200\pi}{3}$.

B. $\frac{800}{3}\pi$.

C. 800π .

D. 150π .

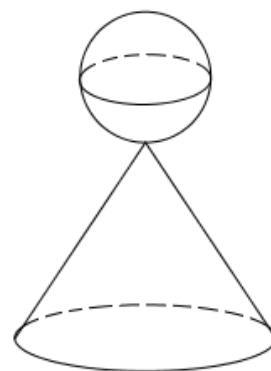
44.8. Một khối pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r , ℓ thỏa mãn $r = \frac{1}{2}\ell$ và $\ell = \frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (tham khảo hình vẽ bên dưới). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là 91cm^2 . Tính diện tích của khối cầu (H_1).

A. $\frac{104}{5}\text{cm}^2$.

B. 16cm^2 .

C. 64cm^2 .

D. $\frac{26}{5}\text{cm}^2$.



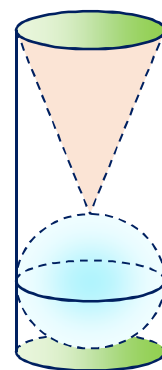
44.9. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).

A. $\frac{5}{9}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{4}{9}$.



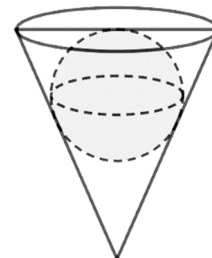
44.10. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng một nửa chiều cao của bình nước và đo được thể tích tràn ra là $\frac{32\pi}{3}(\text{dm}^3)$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và toàn bộ khối cầu chìm trong nước, trong đó mặt nước là tiết diện của khối cầu (hình vẽ bên). Thể tích nước còn lại trong bình bằng

A. $\frac{16\pi}{3}(\text{dm}^3)$.

B. $\frac{32\pi}{3}(\text{dm}^3)$.

C. $\frac{40\pi}{3}(\text{dm}^3)$.

D. $\frac{64\pi}{3}(\text{dm}^3)$.



44.11. Một cái ly nước dạng hình nón, đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu không thấm nước, có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là V . Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước như hình vẽ. Thể tích nước còn lại trong ly bằng

A. $\frac{V}{2}$.

B. $\frac{1}{\pi}V$.

C. $\frac{1}{3}V$.

D. $\frac{1}{6}V$.



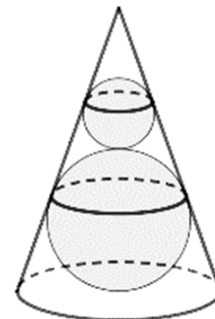
44.12. Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón (tham khảo hình vẽ). Bán kính đáy của hình nón đã cho bằng

A. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

B. $2\sqrt{2}a$.

C. $3a$.

D. $2a\sqrt{3}$.



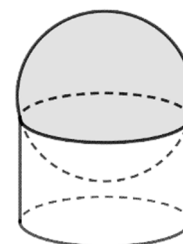
44.13. Một quả cầu có thể tích $\frac{256}{3}\pi (\text{cm}^3)$ được đặt vào một chiếc cốc có dạng hình trụ với đường kính đáy là 6cm như hình vẽ. Phần nhô ra khỏi chiếc cốc của quả cầu bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 2,00cm.

B. 4,00cm.

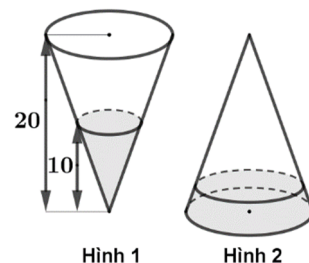
C. 4,65cm.

D. 6,65cm.



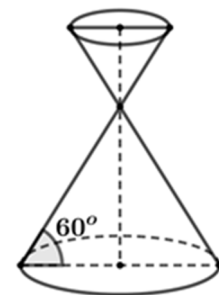
44.14. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20cm (hình 1). Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là 10cm. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên (hình 2). Khi đó chiều cao cột nước trong phễu bằng giá trị nào sau đây ?

- A. 0,87cm.
B. 1,07cm.
C. 5cm.
D. 10cm.



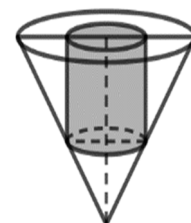
44.15. Cho một đồng hồ cát gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° như hình bên dưới. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\text{cm}^3$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần dưới là bao nhiêu ?

- A. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.
B. $\frac{1}{8}$.
C. $\frac{1}{27}$.
D. $\frac{1}{64}$.



44.16. Một bình đựng nước dạng hình nón không nắp đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}\text{dm}^3$. Biết một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ). Tính bán kính đáy R của bình nước.

- A. $R = 2\text{ dm}$.
B. $R = 3\text{ dm}$.
C. $R = 4\text{ dm}$.
D. $R = 5\text{ dm}$.



44.17. Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

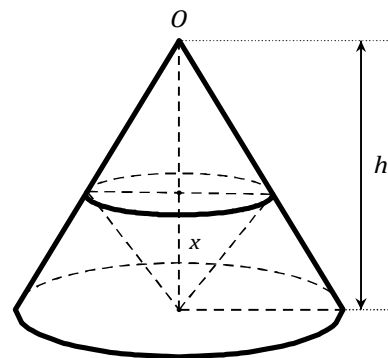
- A. $1,23\text{m}^3$.
B. $1,11\text{m}^3$.
C. $1,57\text{m}^3$.
D. $2,48\text{m}^3$.

44.18. Một bác thợ gò hàn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thể tích $665,5\text{dm}^3$. Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh x (dm), chiều cao h (dm). Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình. Tìm x để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất ?

- A. $x = 10,5\text{ dm}$.
B. $x = 12\text{ dm}$.
C. $x = 11\text{ dm}$.
D. $x = 9\text{ dm}$.

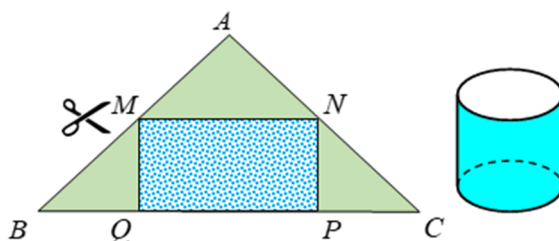
44.19. Cho hình nón đỉnh O , chiều cao là h . Một khối nón khác có đỉnh là tâm I của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Để thể tích của khối nón đỉnh I lớn nhất thì chiều cao của khối nón này bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{h}{2}$.
 B. $\frac{h}{3}$.
 C. $\frac{2h}{3}$.
 D. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.



44.20. Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền BC bằng a . Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ. Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?

- A. $\frac{a^2}{2}$.
 B. $\frac{a^2}{4}$.
 C. $\frac{a^2}{12}$.
 D. $\frac{a^2}{8}$.



Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và phương trình hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.
 B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.
 C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.
 D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M = d \cap d_1$, $N = d \cap d_2$.

Khi đó $M(1+2t; t; -1-2t)$, $N(2+s; 2s; -1-s)$.

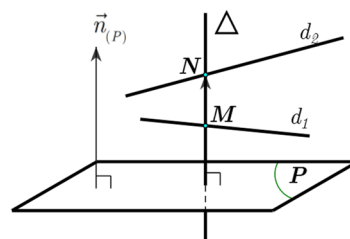
$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (s-2t+1; 2s-t; -s+2t).$$

Từ hình vẽ có $\overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$

$$\text{Suy ra: } \frac{s-2t+1}{2} = \frac{2s-t}{2} = \frac{-s+2t}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} s-2t+1 = 2s-t \\ -2s+t = -2s+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1; 0; -1) \\ N(3; 2; -2) \end{cases}$$

Đường thẳng Δ cần tìm đi qua $N(3; 2; -2)$ và một có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$

$$\text{là } \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}. \text{ Chọn đáp án A.}$$



Bài tập tương tự và mở rộng

45.1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3x + 3y + 5z + 1 = 0$ và phương trình hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{3}$, $d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{3}$. Đường thẳng vuông góc với (P) đồng thời cắt d_1 và d_2 tại A và B , độ dài AB bằng

A. $2\sqrt{43}$.

B. $\sqrt{43}$.

C. $2\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{13}$.

45.2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

45.3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1;3)$, vuông góc với đường thẳng $d_1 : \frac{x}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{-1}$ và cắt đường thẳng $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$.

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-2}$.

C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2}$.

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$.

45.4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(1;-1;4)$, đồng thời d song song với mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z - 15 = 0$ và d cắt đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{-7}$.

B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-7}$.

45.5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d nằm trong $(P): x + y + z - 3 = 0$, đồng thời d cắt $d_1: \frac{x-6}{2} = \frac{y+10}{-7} = \frac{z-5}{3}$ và vuông góc với $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{9}$.

A. $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x-4}{62} = \frac{y+3}{-22} = \frac{z-2}{-25}$.

C. $\frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{1}$.

D. $\frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{1}$.

45.6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2)$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN .

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

45.7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và $(P): x + 3y + 2z - 5 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ qua $A(2; -1; 1)$ và cắt d tại M , cắt (P) tại N để A là trung điểm MN là

A. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$.

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{7}$.

45.8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$, mặt phẳng $(\alpha): x - y + z - 4 = 0$ và $G\left(\frac{4}{3}; 0; 1\right)$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (α) lần lượt tại M, N sao cho tam giác OMN nhận G làm trọng tâm là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$

C. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$

45.9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 \end{cases}$, mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$ và

điểm $G\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{2}{3}\right)$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (α) lần lượt tại M, N sao cho tam giác OMN nhận G làm trọng tâm là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

45.10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$, mặt phẳng $(\alpha): x - y + z - 5 = 0$ và

hai điểm $C(-1; 0; 3)$, $D(-2; -1; 2)$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (α) lần lượt tại A, B sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

D. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{1}$

45.11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$ và

$\Delta_2: \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$. Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(0; -2; -5)$.

B. $N(1; -1; -4)$.

C. $P(2;0;1)$.

D. $Q(3;1;-4)$.

45.12. Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với Δ_1 và Δ_2 bằng

A. $\frac{16\pi}{17}$.

B. $\frac{4\pi\sqrt{17}}{17}$.

C. $\frac{16\pi\sqrt{17}}{17}$.

D. $\frac{4\pi}{17}$.

45.13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng

$$d : \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1} \text{ lần lượt tại } A \text{ và } B. \text{ Phương trình mặt cầu đường kính } AB \text{ là}$$

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.

B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.

45.14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$, $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt

phẳng $(P) : 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 là

A. $2x - y + 2z + 22 = 0$.

B. $2x - y + 2z + 13 = 0$.

C. $2x - y + 2z - 13 = 0$.

D. $2x + y + 2z - 22 = 0$.

45.15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua $A(2;0;0)$, cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

45.16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(0;1;2)$ và phương trình đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{2}$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm của tam giác ABC , biết Δ nằm trong (ABC) và vuông góc với đường thẳng d .

A. $\Delta : \frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-11}$.

B. $\Delta : \frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-11}$.

C. $\Delta : \frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-11}$.

D. $\Delta : \frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-11}$.

45.17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 4 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1}$. Mặt phẳng (α) song song với (P) và cắt d_1, d_2 theo thứ tự tại M, N sao cho $MN = \sqrt{3}$. Điểm nào sau đây thuộc (α) ?

A. $A(1;2;3)$.

B. $B(0;1;-3)$.

C. $C(0;-1;3)$.

D. $D(0;1;3)$.

45.18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$, $d_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là

A. $\vec{u}_3 = (2;0;-1)$.

B. $\vec{u}_2 = (2;1;-1)$.

C. $\vec{u}_1 = (2;1;1)$.

D. $\vec{u}_4 = (1;2;-2)$.

45.19. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến d_1 kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong d_2 của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng BC có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (2;1;-1)$.

B. $\vec{u} = (1;1;0)$.

C. $\vec{u} = (1;-1;0)$.

D. $\vec{u} = (1;2;1)$.

45.20. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2;1;-3)$, phương trình đường thẳng $BC: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$, đỉnh D thuộc mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 15 = 0$. Đường thẳng AC cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm có cao độ bằng

A. 5.

B. -23.

C. -17.

D. -3.

Câu 46. Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	$-\frac{61}{3}$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải tham khảo

Ta có: $f''(x) = a(x+1)(x+3) \Rightarrow f'(x) = \int f''(x)dx = f'(x) = a\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) + b$.

$$\text{Do } \begin{cases} f'(-3) = -1 \\ f'(-1) = -\frac{61}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{29}{2} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{29}{2}\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) - 1.$$

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) - 3x$ có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2}$ (1)

Dựa vào bảng biến thiên đề bài, ta có:

- Nếu $x \in (-\infty; 0)$ thì $f'(x) < 0 \Rightarrow f'(x^3) < 0$ mà $\frac{1}{x^2} > 0$ nên (1) vô nghiệm trên $(-\infty; 0)$.
- Nếu $x \in (0; +\infty)$ thì $f'(x) > -1 \Rightarrow f'(x^3) > -1$ đồng biến nên $f'(x^3)$ đồng biến, mà hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ nghịch biến nên phương trình (1) không quá 1 nghiệm.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f'(x^3) - \frac{1}{x^2} \right] = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f'(x^3) - \frac{1}{x^2} \right] = +\infty$ nên có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	$h(x_0)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn đáp án A.**

Bài tập tương tự và mở rộng

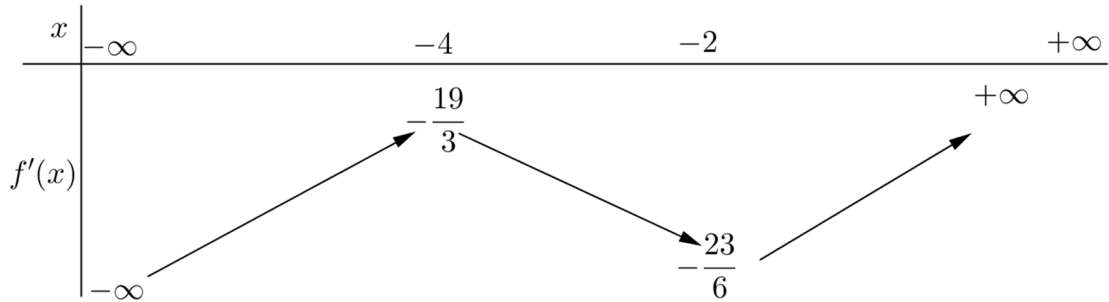
46.1. Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn và có $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{6}$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = \left| \frac{2}{3} f(x^3) - 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

46.2. Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn và có $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên sau:

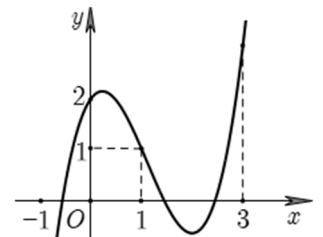


Hàm số $g(x) = \left| \frac{1}{3} f(x^3) - 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

46.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên đoạn $[-3; 4]$, hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

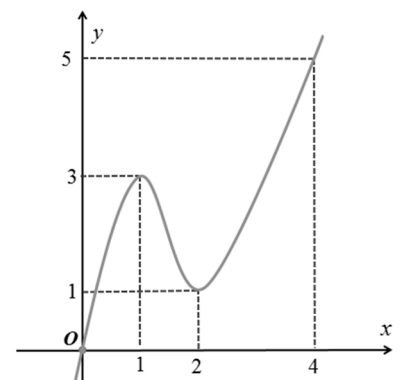
- A. 1.
- B. 2.
- C. 0.
- D. 3.



46.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$, $f(4) > 4$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

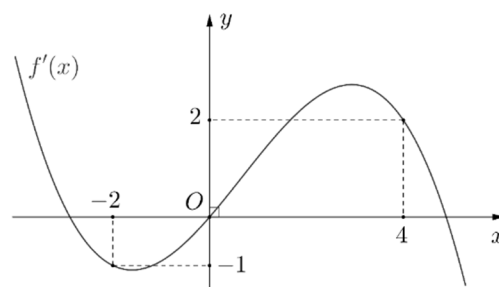
- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 5.



46.5. Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(-2) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

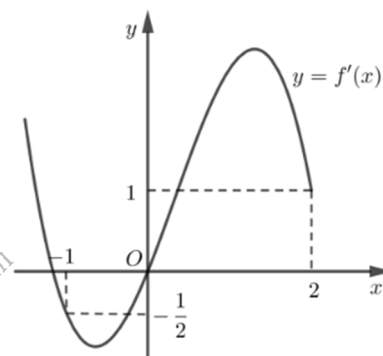
Hàm số $y = |4f(x) - x^2 + 4|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. 2.



46.6. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 3.
B. 4.
C. 2.
D. 5.



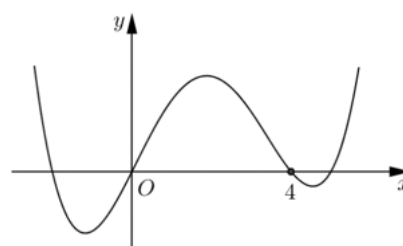
46.7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

- A. 9.
B. 3.
C. 7.
D. 5.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

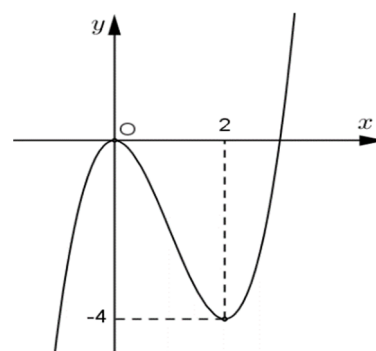
46.8. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là

- A. 3.
B. 7.
C. 4.
D. 5.



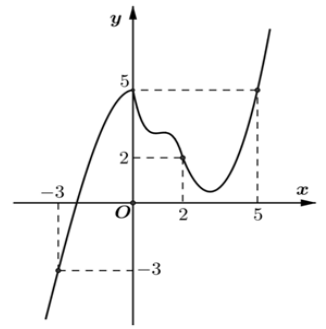
46.9. Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(f(x)) + 2021$ là

- A. 1.
B. 3.
C. 2.
D. 4.



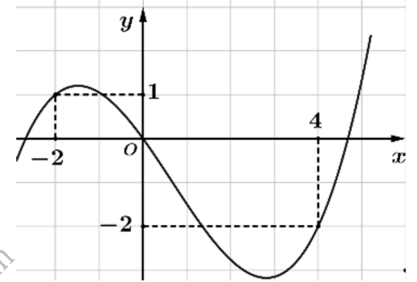
46.10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(5) = 12$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(1 - 2x) - 2x^2 + 2x|$ là

- A. 3.
B. 5.
 C. 7.
 D. 6.



46.11. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có $f(0) = \frac{3}{2}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |4f(x+1) + x^2 + 2x|$ là

- A. 3.
B. 5.
 C. 4.
 D. 6.



46.12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 + 2x$ và $f(0) = 1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x^2 - 2x - 3)$ là

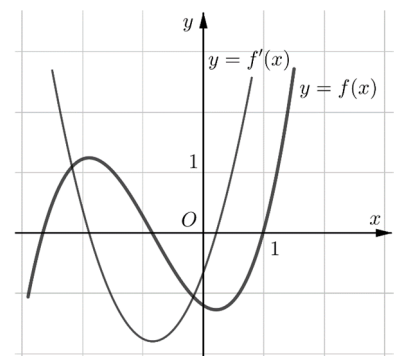
- A. 0.
 B. 1.
C. 2.
 D. 3.

46.13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$ và $f(2) = 4$. Hàm số $g(x) = [f(1 - 2x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3.**
 B. 4.
 C. 5.
 D. 6.

46.14. Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Đồ thị các hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ lần lượt là các đường cong trong hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = g'(x)$ không tiếp xúc với trục hoành. Số điểm cực trị của $g(x)$ là

- A. 4.
 B. 5.
 C. 7.
D. 8.



46.15. Hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $y = f(x^2 - 2mx + m^2 + 1)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

A. 5.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

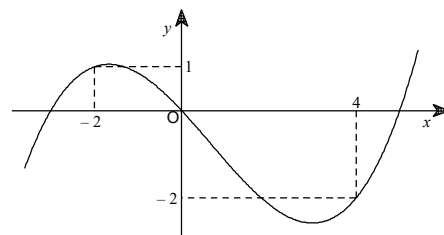
46.16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = 4f(x - m) + x^2 - 2mx$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

A. 2.

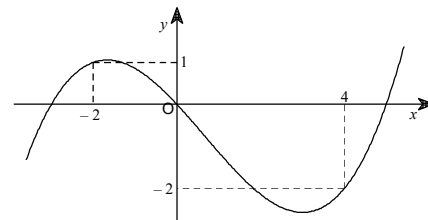
B. 3.

C. 0.

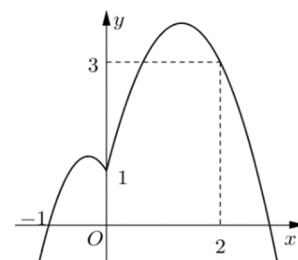
D. 1.



46.17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(0; 4)$.B. $(-2; 0)$.C. $(4; +\infty)$.D. $(-\infty; -2)$.

46.18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1) = 0$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = |2f(x - 1) - x^2|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(3; +\infty)$.B. $(-1; 2)$.C. $(0; +\infty)$.D. $(0; 3)$.

46.19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(3x^2 - 15x)f'(x) + (10 - 5x)f(x) = 0, \forall x \neq 0$, $f(1) = -4$ và $[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 > 0$. Tổng giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ bằng

A. $3\sqrt[3]{4}$.B. $-2\sqrt[3]{4}$.C. $-3\sqrt[3]{4}$.D. $3\sqrt[4]{2}$.

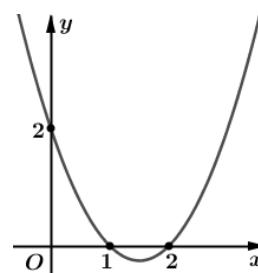
46.20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $y = 15f(2x^2 - x^4) - 10x^6 + 30x^2 - 20$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.



Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$?

A. 8.

B. 9.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x > 2$. Đặt $m = \log a > 0$. Phương trình trở thành $(x^m + 2)^m = x - 2$.

Đặt $y = x^m + 2$ và $y > 2$ thì ta có hệ phương trình $\begin{cases} y^m = x - 2 \\ x^m = y - 2 \end{cases}$

$$\longrightarrow x^m - y^m = x - y \Leftrightarrow x^m + x = y^m + y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \xrightarrow{f(t)=t^m+t \nearrow (0;+\infty)} x = y$$

$$\Leftrightarrow x^m = x - 2 \Leftrightarrow m \log x = \log(x - 2) \Leftrightarrow m = \frac{\log(x - 2)}{\log x} < 1 \Rightarrow \log a < 1 \Rightarrow a < 10.$$

$$\xrightarrow{a \geq 2, a \in \mathbb{Z}} a \in \{2; 3; 4; \dots; 9\} : \text{có 8 thỏa mãn bài toán. Chọn đáp án A.}$$

Bài tập tương tự và mở rộng

47.1 Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa $2a(x^{\log_2 a} + 1)^{\log_2 a} = x - 2$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

47.2 Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa $(a^{\ln x} + 3)^{\ln x} = x - 3$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

47.3 Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của số thực y nhỏ hơn 10 sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$\sqrt{y + \sqrt{y + e^x}} = e^x ?$$

A. 9.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

47.4 Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa $\ln[y + 3 \sin x + \ln(y + 4 \sin x)] = \sin x$?

A. 6.

B. 10.

C. 5.

D. 9.

47.5 Có tất cả bao nhiêu số nguyên y sao cho có đúng 2 số thực $x \in (0;10)$ thỏa mãn:

$$8^x + 3x.4^x + (3x^2 + 1).2^x = (y^3 - 1)x^3 + (y - 1)x ?$$

A. 101.

B. 100.

C. 102.

D. 103.

47.6 Gọi $a > 1$ là số thực sao cho tồn tại duy nhất số thực x thỏa $a^x = \log_a x$. Mệnh đề nào **đúng** ?

A. $a \in (1,2; 1,3)$.

B. $a \in (1,3; 1,4)$.

C. $a \in (1,4; 1,5)$.

D. $a \in (1,5; 1,6)$.

47.7 Phương trình $2^{x+\sqrt[3]{m-3x}} + x(x-3)^2.2^x = (8-m).2^x + 4$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a;b)$. Khi đó giá trị $b^2 - a^2$ bằng

A. 48.

B. 36.

C. 64.

D. 72.

47.8 Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a.10^{3x} + b.10^{2x}$ đúng với mọi các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. $\frac{31}{2}$.

B. $\frac{29}{2}$.

C. $-\frac{31}{2}$.

D. $-\frac{25}{2}$.

47.9 Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2(4x+16) + x - 3y - 8^y = -2$. Gọi $(x_o; y_o)$ là cặp $(x; y)$ khi biểu thức $P = x^2 + 3x + 1 + 8^y$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x_o^3 + 3y_o$ bằng

A. 9.

B. 7.

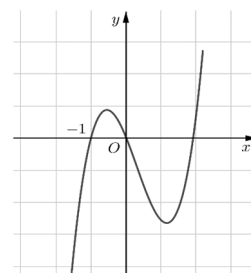
C. -7.

D. -9.

- 47.10** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$ và $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$?
- A. 3.
B. 4.
C. 5.
D. 6.
- 47.11** Cho phương trình $\log_2(2x^2 - 4x + 4) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ và $0 < x < 100$ thỏa mãn phương trình đã cho ?
- A. 4.
B. 3.
C. 1.
D. 2.
- 47.12** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $0 < x \leq 2020$ và $(x + 1) \cdot 3^x = y \cdot 27^y$?
- A. 2020.
B. 673.
C. 672.
D. 2019.
- 47.13** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0 \leq x \leq 2020$, $1 \leq y \leq 2020$ và $4^{x+1} + \log_2(y + 3) = 16 \cdot 2^y + \log_2(2x + 1)$?
- A. 2019.
B. 2020.
C. 1010.
D. 1011.
- 47.14** Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực (x, y, z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện $2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128$ và $(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2$?
- A. 3.
B. 4.
C. 1.
D. 2.

47.15 Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(xf(x)) = -1$ là

- A. 3.
B. 6.
 C. 7.
 D. 8.



47.16 Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $\log_{2020}(x^2 - 3x)^2 = \log_{\sqrt{2021}}(x + m)$ có đúng hai nghiệm phân biệt ?

- A. 4035.
 B. 2023.
C. 2022.
 D. 4036.

47.17 Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để phương trình $\log_{2021}(x^2 + 3x)^2 = \log_{\sqrt{2021}}(x - m)$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

- A. -203.
B. -206.
 C. 3.
 D. 6.

47.18 Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $y \in (-10; 10)$ để tồn tại 2 số thực x thỏa mãn:

$$\log_3(x^2 - 2x + 4) = \log_5(x^2 - 2x + y)$$

- A. 4.
B. 3.
 C. 6.
 D. 9.

47.19 Có bao nhiêu giá trị của $y \in (0; 2020)$ để tồn tại số thực x thỏa mãn $4^x + 4 = 2^{x+2} \cdot \cos(x + y)$?

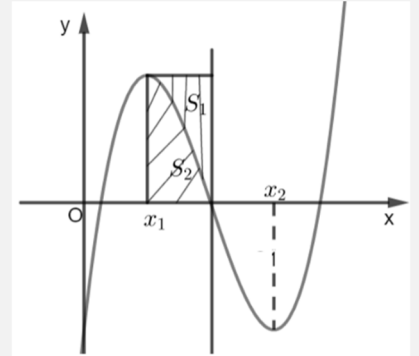
- A. 324.
 B. 322.
 C. 320.
D. 321.

47.20 Với giá trị nào của y thì tồn tại đúng 1 số thực x thỏa mãn $9^x + 9 = 3^x y \cos(\pi x)$?

- A. $y = 3$.
B. $y = -6$.
 C. $y = -3$.
 D. $y = 6$.

Câu 48. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$.
 B. $\frac{5}{8}$.
 C. $\frac{3}{8}$.
 D. $\frac{3}{5}$.



Lời giải tham khảo

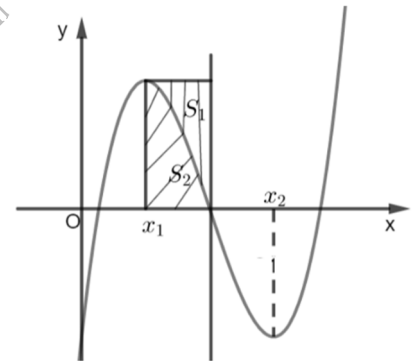
Tính tiến điểm uốn về gốc tọa độ, ta được hình vẽ bên.

Khi đó, do $f(x)$ là hàm bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng nên $x_1 = -1, x_2 = 1$

Chọn $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x$.

Do đó $S_2 = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx = \frac{5}{4}$. Mà $S_1 + S_2 = 2$

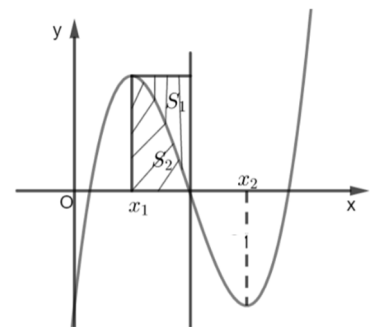
Suy ra: $S_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$. Chọn đáp án D.



Bài tập tương tự và mở rộng

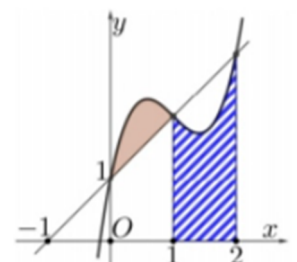
48.1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

- A. $5/3$.
 B. $\frac{3}{5}$.
 C. 1.
 D. $3/4$.



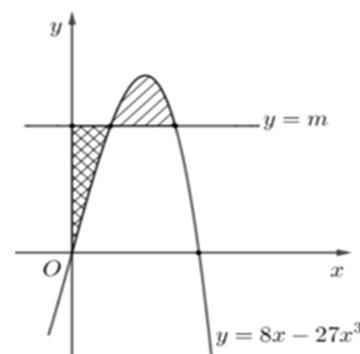
48.2. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Nếu diện tích phần tô bằng $\frac{1}{2}$ thì diện tích phần gạch bằng

- A. $\frac{5}{2}$.
 B. 2.
 C. 1.
 D. $\frac{3}{2}$.



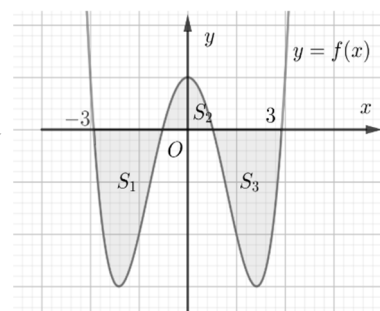
48.3. Cho đường cong $(C): y = 8x - 27x^3$ và đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy và chia thành 2 miền phẳng (gạch sọc và kẻ caro) có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $0 < m < \frac{1}{2}$.
 B. $\frac{1}{2} < m < 1$.
 C. $1 < m < \frac{3}{2}$.
 D. $\frac{3}{2} < m < 2$.



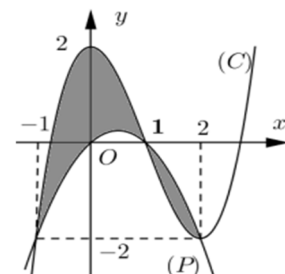
48.4. Cho $y = f(x)$ xác định trên $[-3; 3]$ có đồ thị như hình vẽ. Biết S_1, S_2, S_3 có diện tích lần lượt là 3, 1 và 3. Khi đó $\int_{-1}^1 (1-x)f'(3x)dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$.
 B. 7.
 C. $-\frac{5}{9}$.
 D. -4.



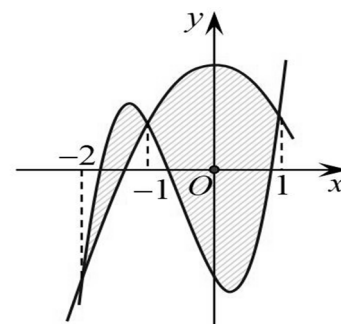
48.5. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng

- A. $\frac{37}{12}$.
 B. $\frac{7}{12}$.
 C. $\frac{11}{12}$.
 D. $\frac{5}{12}$.



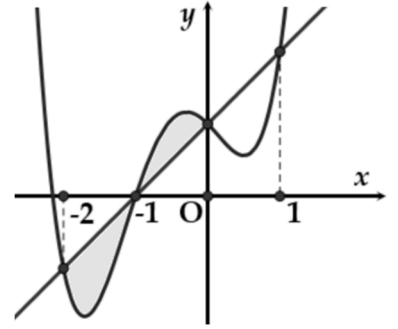
48.6. Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{37}{6}$.
 B. $\frac{13}{2}$.
 C. $\frac{9}{2}$.
 D. $\frac{37}{12}$.



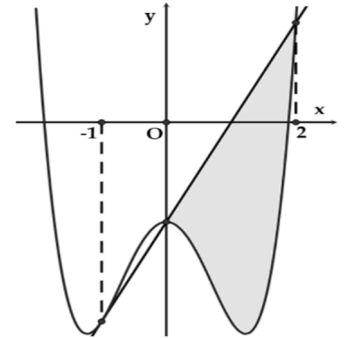
48.7. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a \neq 0$) có đồ thị (C) và đường $d: y = mx + n$ cắt đồ thị (C) tại các điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1 ; 0 ; 1 . Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và đường thẳng $x = -2$, $x = 0$ có diện tích bằng 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng d , trục tung và đường $x = 1$ bằng

- A. $\frac{11}{30}$.
B. $\frac{19}{30}$.
 C. $\frac{49}{30}$.
 D. $\frac{19}{15}$.



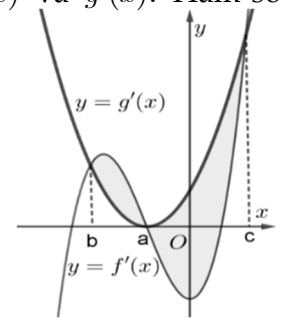
48.8. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có đồ thị (C) và tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$, cắt (C) tại hai giao điểm còn lại có hoành độ bằng $x = 0$, $x = 2$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ có diện tích bằng $28/5$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng d và $x = 0$, $x = -1$.

- A. $\frac{27}{5}$.
 B. $\frac{29}{5}$.
C. $\frac{1}{5}$.
 D. $\frac{5}{12}$.



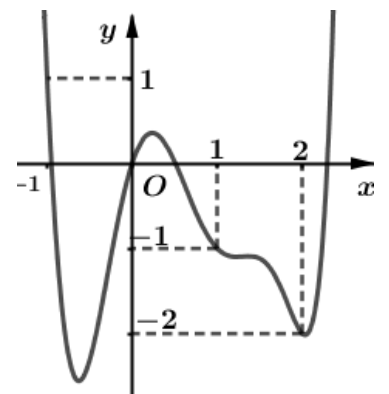
48.9. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số là $y = f'(x)$, $y = g'(x)$. Gọi a , b , c là các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và $g'(x)$. Hàm số $y = |f(x) - g(x) - m|$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi

- A. $f(a) - g(a) \leq x < f(b) - g(b)$.
 B. $f(c) - g(c) < m < f(b) - g(b)$.
C. $f(b) - g(b) < m < f(a) - g(a)$.
 D. $f(c) - g(c) \leq m < f(b) - g(b)$.



48.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thật của tham số m để bất phương trình $f(1 - 2x) < 2x^2 - 2x + m$ có nghiệm trên $(-0,5; 1)$?

- A. $m > \frac{1}{2}f(2) - \frac{2}{3}$.
B. $m > \frac{1}{2}f(2) - \frac{3}{2}$.
 C. $m > \frac{f(-1)}{2} - \frac{2}{3}$.
 D. $m > f(0) - \frac{21}{4}$.



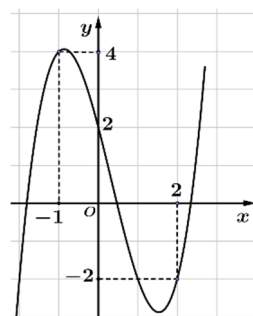
48.11. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có $f(-1) = -7$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| f(x-1) + x^2 - 4x + 6 \right|$

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 6.



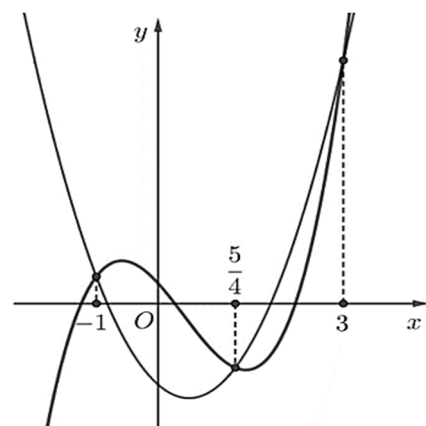
48.12. Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$. Đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$, $y = g'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tổng các nghiệm của phương trình $f(x) + q = g(x) + e$ bằng

A. $\frac{13}{3}$.

B. $-\frac{13}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $-\frac{4}{3}$.



48.13. Cho đường cong $(C): f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng $d: y = g(x)$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và d bằng 108. Giao điểm thứ hai của d và (C) có hoành độ $m > 0$, khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $(0; 2)$.

B. $(2; 4)$.

C. $(4; 6)$.

D. $(6; +\infty)$.

48.14. Cho đường cong $(C): y = x^3$. Xét điểm A có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A tạo với (C) một hình phẳng có diện tích bằng 27. Hoành độ của điểm A thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

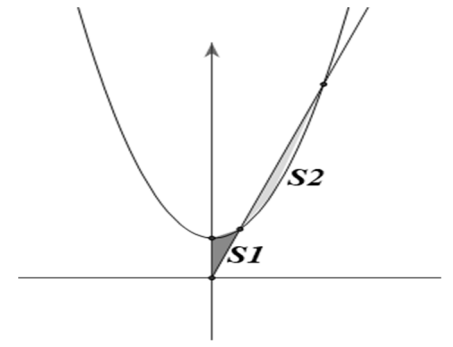
B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

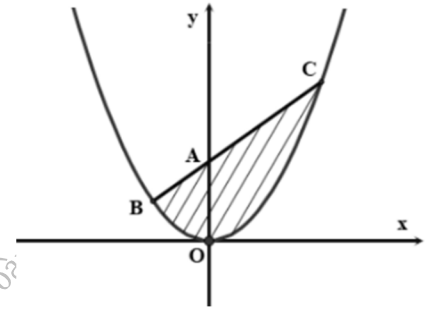
48.15. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 + k$ ($k > 0$) và đường thẳng $d: y = 2x$ như hình vẽ. Nếu $S_1 = S_2$ thì k bằng

- A. $\frac{2}{5}$.
- B. $\frac{7}{9}$.
- C. $\frac{3}{2}$.
- D. $\frac{3}{4}$.



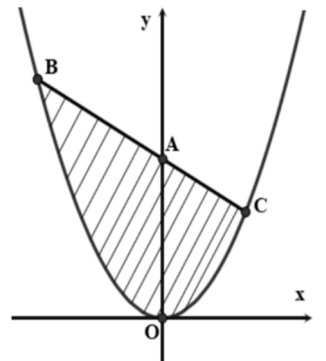
48.16. Cho parabol $(P): y = x^2$, điểm $A(0;1)$. Một đường thẳng đi qua A cắt (P) tại hai điểm B, C sao cho $AC = 2AB$ như hình vẽ bên. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay phần gạch chéo quanh trục hoành gần với giá trị nào nhất sau đây ?

- A. 13,3.
- B. 8.
- C. 7,3.
- D. 11.



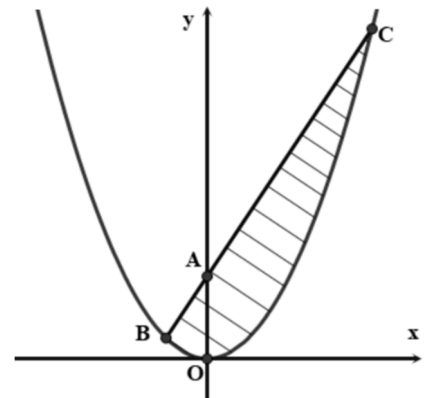
48.17. Cho parabol $(P): y = x^2$, điểm $A(0;2)$. Một đường thẳng đi qua A cắt (P) tại hai điểm B, C sao cho $3AC = 2AB$ như hình vẽ bên. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay phần gạch chéo quanh trục hoành gần với giá trị nào nhất sau đây ?

- A. 34.
- B. 11.
- C. 7.
- D. 21.



48.18. Cho parabol $(P): y = x^2$, điểm $A(0;1)$. Một đường thẳng d đi qua A cắt (P) tại hai điểm $B(b;b^2), C(c;c^2)$ sao cho $AC = 4AB$ như hình vẽ bên. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\{(P); d; x = b; x = 0\}$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\{(P); d; x = b; x = 0\}$. Tỉ số diện tích S_1 / S_2 bằng

- A. $\frac{181}{2944}$.
- B. $\frac{17}{608}$.
- C. $\frac{13}{112}$.
- D. $\frac{2763}{2944}$.



48.19. Cho parabol $y = x^2$ có đồ thị như hình vẽ, diện tích $S_2 = 2S_1$. Gọi V_1, V_2 là thể tích hình phẳng

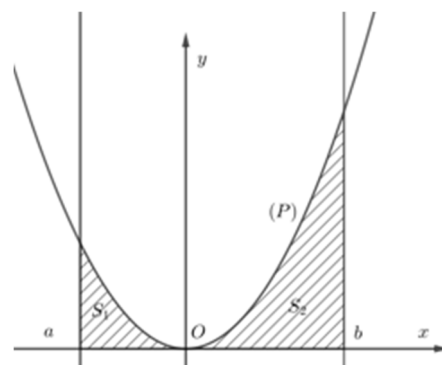
S_1, S_2 quay quanh trục hoành. Tính $\frac{V_2}{V_1}$.

A. $2\sqrt[4]{3}$.

B. $3\sqrt[4]{2}$.

C. 2.

D. 4.



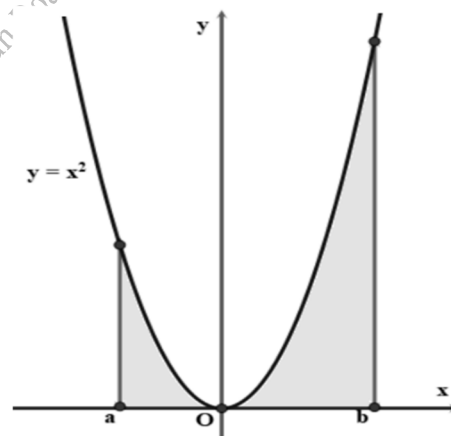
48.20. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Kí hiệu (H_1) là hình phẳng được giới hạn bởi (C) , $x = a$, $(a < 0)$ và trục hoành; (H_2) là hình phẳng được giới hạn bởi (C) , $x = b$, $(b > 0)$ và trục hoành lần lượt có diện tích S_1, S_2 . Đồng thời V_1, V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $(H_1), (H_2)$ xung quanh trục hoành. Biết rằng $243V_1 = 32V_2$. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{8}{27}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{16}{81}$.



Câu 49. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng

A. $5 - \sqrt{19}$. B. $5 + \sqrt{19}$. C. $-5 + 2\sqrt{19}$. D. $5 + 2\sqrt{19}$.

Lời giải tham khảo

Cách giải 1. Phương pháp hình học.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_1 , B là điểm biểu diễn số phức z_2 và C là điểm biểu diễn số phức $w = 3z_1 + z_2$, điểm $M(0;5)$.

Ta có: $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow OC^2 = (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 = 9OA^2 + OB^2 + 6\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
 $= 9OA^2 + OB^2 + 6.OA.OB.\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 9OA^2 + OB^2 + 6 \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} = 19$
 $\Rightarrow |w| = \sqrt{19}$. Mà $MC \leq OM + OC$ nên $|3z_1 + z_2 - 5i|_{\max} \Leftrightarrow MC_{\max} \Leftrightarrow O, M, C$ thẳng hàng

Suy ra $|3z_1 + z_2 - 5i|_{\max} = OM + R = 5 + \sqrt{19}$. **Chọn đáp án B.**

Cách giải 2. Phương pháp đại số.

Đặt $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$. Suy ra: $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 4, (a - c)^2 + (b - d)^2 = 3$.

Do đó $a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 = 3 \Rightarrow ac + bd = 1$.

Ta có: $3z_1 + z_2 = 3(a + c) + (3b + d)i$ nên

$|3z_1 + z_2| = (3a + c)^2 + (3b + d)^2 = 9(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 6(ac + bd) = 19$.

Áp dụng bất đẳng thức $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, ta có $|3z_1 + z_2 - 5i| \leq |3z_1 + z_2| + |-5i| = \sqrt{19} + 5$.

Chọn đáp án B.

Bài tập tương tự và mở rộng

Dạng 1. ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG THẲNG

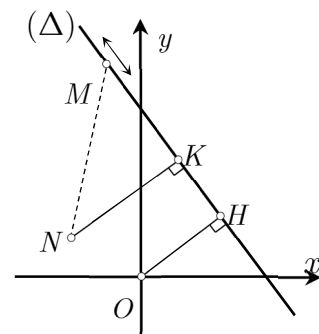
Cho đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ và điểm $M \in (\Delta)$. Điểm $N \notin (\Delta)$ sao cho NM nhỏ nhất $\Leftrightarrow K$ là hình chiếu của N lên (Δ) , nghĩa là $NM_{\min} = NK = d_{[N, (\Delta)]} \Leftrightarrow M \equiv K$.

• $|z|_{\min} = OH = d_{[O, (\Delta)]} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Khi đó $M \equiv H$ và tọa độ $H = (\Delta) \cap (OH)$.

• $|z - (x_0 + y_0 i)|_{\min} = NK = d_{[N, (\Delta)]} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Khi đó $M \equiv K$ và tọa độ $K = (\Delta) \cap (MK)$.



49.1 Xét các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của $3x - 2y$ bằng

A. 2.

- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.

49.2 Xét các số phức z thỏa mãn $z(\bar{z} - 2 + i) + 4i - 1$ là một số thực. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

- A. $\frac{8}{5}$.
- B. $\frac{16}{5}$.**
- C. $\frac{9}{6}$.
- D. $\frac{7}{5}$.

49.3 Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|iz + 1|$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$.
- B. 2.
- C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.**
- D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

49.4 Xét các số phức z thỏa $|z + 1 - i| = |z - 1 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|(3 + 4i)z - 5 + 10i|$ bằng

- A. $\frac{7\sqrt{3}}{26}$.
- B. $\frac{15}{2}$.
- C. $\frac{17}{2}$.
- D. $\frac{5\sqrt{13}}{26}$.**

49.5 Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|(1 + 2i)z + 11 + 2i|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
- C. $\frac{2}{5}$.
- D. $\frac{5}{2}$.**

Dạng 2. ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Cho tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$ là một đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R . Gọi N là điểm biểu diễn số phức z' .

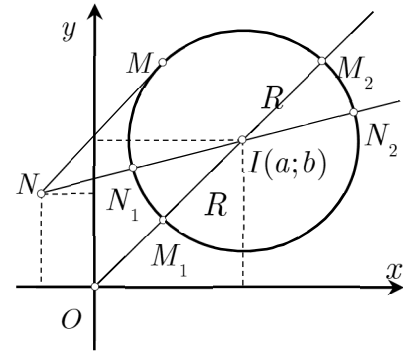
Phương pháp 1. Hình học

$$\bullet \begin{cases} |z|_{\min} = OM_{\min} = OM_1 = |OI - R| \text{ khi } M \equiv M_1 \\ |z|_{\max} = OM_{\max} = OM_2 = |OI + R| \text{ khi } M \equiv M_2 \end{cases}$$

Khi đó $(OI) \cap (C) = \{M_1; M_2\}$.

$$\bullet \begin{cases} |z - z'|_{\min} = MN_{\min} = NN_1 = |NI - R| \text{ khi } M \equiv N_1 \\ |z - z'|_{\max} = MN_{\max} = NN_2 = |NI + R| \text{ khi } M \equiv N_2 \end{cases}$$

Khi đó $(NI) \cap (C) = \{N_1; N_2\}$.



➤ **Lưu ý.** Nếu đề bài yêu cầu tìm tổng phần thực, phần ảo tương ứng với $|z|_{\min}$, $|z|_{\max}$ thì từ nhận xét I là trung điểm của M_1M_2 suy ra: **tổng phần thực** $2a$, **tổng phần ảo** $2b$.

Phương pháp 2. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Giả sử tập hợp điểm là đường tròn $(C) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ và viết lại:

$$(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax + 2by - c$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = 2ax + 2by - c = 2a(x - a) + 2b(y - b) + 2a^2 + 2b^2 - c$$

nhằm lợi dụng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ trong bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (điểm rơi):

$$- \sqrt{(4a^2 + 4b^2) \underbrace{[(x - a)^2 + (y - b)^2]}_{R^2}} \leq 2a.(x - a) + 2b.(y - b) \leq \sqrt{(4a^2 + 4b^2) \underbrace{[(x - a)^2 + (y - b)^2]}_{R^2}}$$

$$\text{Suy ra: } 2a^2 + 2b^2 - c - 2R\sqrt{a^2 + b^2} \leq |z|^2 \leq 2a^2 + 2b^2 - c + 2R\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c - 2R\sqrt{a^2 + b^2}} \leq |z| \leq \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c + 2R\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Phương pháp 3. Lượng giác

Giả sử tập hợp điểm là đường tròn $(C) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x - a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{R}\right)^2 = 1$, gọi ta đến

$$\text{công thức } \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \text{ nên đặt } \begin{cases} \frac{x - a}{R} = \sin t \\ \frac{y - b}{R} = \cos t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = a + R \sin t \\ y = b + R \cos t \end{cases}}.$$

$$\text{Do đó: } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = (a + R \sin t)^2 + (b + R \cos t)^2$$

$$\Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 + R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 2aR \sin t + 2bR \cos t$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 + R^2 + 2R\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(t + \alpha) \text{ và luôn có } -1 \leq \sin(t + \alpha) \leq 1 \text{ nên suy ra:}$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2 - 2R\sqrt{a^2 + b^2}} \leq |z| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 2R\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Phương pháp 4. Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối $\|z_1| - |z_2|\| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

49.6 Cho các số phức thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng

A. $4\sqrt{2} - 2$.

B. $2 + \sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2} + 1$.

D. $3\sqrt{2} + 1$.

49.7 Xét các số phức z thỏa $|z - 2 - 4i| = 2$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của z_1, z_2 bằng

A. -8 .

B. 4 .

C. 8 .

D. -4 .

49.8 Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 4 .

B. 10 .

C. 2 .

D. 24 .

49.9 Xét các số phức z, w thỏa mãn $w = iz$ và $|(1+i)z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|z - w|$ bằng

A. 3 .

B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{3}$.

49.10 Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = |z^2 + 2iz|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng

A. 1 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

49.11 Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng

A. $0,5$.

B. 1 .

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2 .

Dạng 3. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG TRÒN

- 49.12** Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4| = 1$ và $|iz_2 - 2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 2z_2|$ bằng
- A. $2\sqrt{5} - 2$.
 B. $4 - \sqrt{2}$.
 C. $4\sqrt{2} - 3$.
 D. $4\sqrt{2} + 3$.
- 49.13** Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |2iz_1 + 3z_2|$ bằng
- A. $\sqrt{313} + 16$.
 B. $\sqrt{313}$.
 C. $\sqrt{313} + 8$.
 D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.
- 49.14** Xét các số phức z, w thỏa $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ và $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$ và $w = w_0$. Giá trị của $|3z_0 - w_0|$ bằng
- A. $2\sqrt{2}$.
 B. $6\sqrt{2}$.
 C. $4\sqrt{2}$.
 D. 1.
- 49.15** Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z - 5 + 3i| = 3$ và $|iw + 4 + 2i| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|3iz + 2w|$ bằng
- A. $\sqrt{554} + 5$.
 B. $\sqrt{578} + 13$.
 C. $\sqrt{578} + 5$.
 D. $\sqrt{554} + 13$.
- 49.16** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - 3i| = 2$ và $|\bar{z}_2 - 1 - 2i| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng
- A. $3 + \sqrt{34}$.
 B. $3 + \sqrt{10}$.
 C. 3.
 D. 6.

Dạng 4. ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

- 49.17** Biết rằng số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn đồng thời $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của $|z|$ bằng
- A. $\sqrt{33}$.
- B. 50.
- C. $\sqrt{10}$.
- D. $5\sqrt{2}$.
- 49.18** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = \sqrt{13}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - 3i|^2$. Tổng $m + M$ bằng
- A. 10.
- B. 25.
- C. 34.
- D. 40.
- 49.19** Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|(1 + i)z + 2 - i| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |x + y + 3|$ bằng
- A. 4.
- B. $4\sqrt{2}$.
- C. $4 + 2\sqrt{2}$.
- D. 8.
- 49.20** Xét các số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$ và các số phức z_2 thỏa $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng
- A. $\sqrt{5}$.
- B. $2\sqrt{5}$.
- C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
- D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Dạng 5. MỘT SỐ LOẠI KHÁC (ĐOẠN THẲNG VÀ TIA, PARABOL, ELIP,...)

- 49.21** Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $T = |z - 1 + i|$. Giá trị của $m + M$ bằng
- A. $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.
- B. $5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$.
- C. $\sqrt{13} + \sqrt{73}$.
- D. $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.
- 49.22** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 8 - 3i| = \sqrt{53}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 1 + 2i|$ bằng
- A. $\sqrt{53}$.
- B. 53.
- C. $\frac{\sqrt{185}}{2}$.
- D. $\sqrt{106}$.
- 49.23** Xét các số phức z thỏa $|z + 2 - 3i| + |z - 6 - i| = 2\sqrt{17}$. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = ||z + 1 - 2i| - |z - 2 + i||$. Giá trị $m + M$ bằng
- A. $3\sqrt{2}$.
- B. $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$.
- C. $8\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$.
- D. $\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{3}$.
- 49.24** Xét các số phức z thỏa mãn $|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |(1 + i)z + 2i|$ bằng
- A. $\frac{9}{\sqrt{17}}$.
- B. $3\sqrt{2}$.
- C. $4\sqrt{2}$.
- D. $\sqrt{26}$.
- 49.25** Xét các số phức z đồng thời thỏa mãn $|z - 4 + 3i| - |\bar{z} + 4 + 3i| = 10$ và $|z - 3 - 4i|$ nhỏ nhất. Môđun của số phức z bằng
- A. 5.

B. $5\sqrt{2}$.

C. $6\sqrt{2}$.

D. 10.

49.26 Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\sqrt{10} + 1$.

B. $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$.

C. $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$.

D. $3\sqrt{5} - 1$.

49.27 Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$. Tính

$$P = -a + 4b \text{ khi } \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

A. $P = 4$.

B. $P = 5$.

C. $P = 6$.

D. $P = 7$.

49.28 Xét số phức $z = a + bi$ thỏa $2|z - 3i| = |z - \bar{z} + 2i|$. Tính $8a + 7b$ khi biểu thức $P = \left| z + \frac{6}{7}i \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $8a + 7b = 8$.

B. $8a + 7b = 5$.

C. $8a + 7b = 6$.

D. $8a + 7b = 7$.

49.29 Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của $T = |z + 1| + 2|z - 1|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$.

B. $2\sqrt{10}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{5}$.

49.30 Xét các số phức z thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

A. 10 và 4.

B. 5 và 4.

C. 4 và 3.

D. 5 và 3.

- Câu 50.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $b + c + d$ bằng
- A. -21. B. -12. C. -18. D. -15.

Lời giải tham khảo

Ta có $AB = 6$.

Gọi h, r là chiều cao và bán kính đáy hình nón (N) .

R là bán kính mặt cầu (S) đường kính AB .

Gọi I là trung điểm AB và H là tâm đường tròn đáy của (N) .

Để thể tích hình nón (N) lớn nhất thì $h \geq R$.

Ta có: $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h - R)^2$

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{1}{3}h\pi[R^2 - (h - R)^2] = \frac{\pi}{6}h(4R - 2h) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{\pi}{6} \cdot \frac{(4R)^3}{27}$.

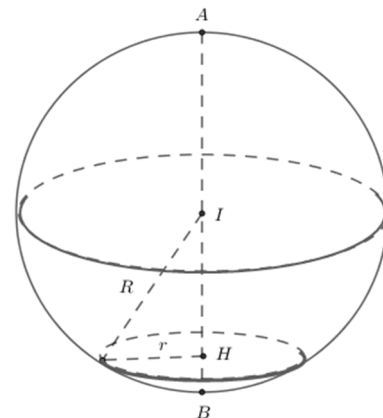
Dấu "=" xảy ra khi $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}R \Rightarrow AH = 4, BH = 2$.

Gọi $H(x; y; z)$, khi đó: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow H = \left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) đi qua H và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến là $2\left(x - \frac{14}{3}\right) + 2\left(y - \frac{11}{3}\right) + 1\left(z - \frac{13}{3}\right) = 0$

$$\Rightarrow 2x + 2y + z - 21 = 0 \Rightarrow b + c + d = -18.$$

Chọn đáp án D.



Bài tập tương tự và mở rộng

- 50.1** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(P): ax + by - z + c = 0$, khi đó $a - b + c$ bằng

A. -4.

B. 8.

C. 0.

D. 2.

- 50.2** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 48$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S) , đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{128\pi}{3}$.

B. 39π .

C. $\frac{88\pi}{3}$.

C. $\frac{215\pi}{3}$.

50.3 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$. Xét điểm M di động trên đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$, từ M kẻ ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến (S) với A, B, C là các tiếp điểm. Khi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính nhỏ nhất bằng thì phương trình mặt phẳng qua 3 điểm A, B, C là $(ABC) : ax + by - z + d = 0$. Khi đó $2a - b + 2d$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. -3.

50.4 Trong không gian $Oxyz$ Cho $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ và $(P) : 2x + 2y + z + 16 = 0$. Mặt cầu (S) cắt d tại A, B sao cho $AB = 8$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 3$. Bán kính của mặt cầu (S) nhỏ nhất có thể là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. -3.

50.5 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases}$. Biết khi a

thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A. $5\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{3}$.

C. $7\sqrt{3}$.

D. $3\sqrt{5}$.

- 50.6** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(2;3;4)$. Một mặt cầu (S) bán kính R luôn tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ và đoạn thẳng AB luôn nằm trong (S) (mọi điểm thuộc đoạn thẳng AB đều nằm trong (S)). Giá trị nguyên lớn nhất của R đạt được là
- A. 4.
B. 6.
 C. 5.
 D. 3.
- 50.7** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Cho ba mặt phẳng $(P): x + y + z + 5 = 0$, $(Q): x + y + z + 1 = 0$ và $(R): x + y + z + 2 = 0$. Ứng với mỗi cặp A, B lần lượt thuộc hai mặt phẳng $(P), (Q)$ thì mặt cầu đường kính AB luôn cắt mặt phẳng (R) theo một đường tròn. Tìm bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó.
- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
 B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
 C. $\frac{1}{2}$.
D. 1.
- 50.8** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;0;0)$ và ba mặt phẳng $(P_1): 2x + y + 2z - 5 = 0$, $(P_2): 2x + y + 2z + 13 = 0$, $(P_3): 2x - 2y - z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua A đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Khi khối cầu (S) cắt mặt phẳng (P_3) theo thiết diện là hình tròn có diện tích lớn nhất thì $a + b - 2c$ bằng
- A. 3.
B. 0.
 C. -3.
 D. 2.
- 50.9** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là
- A. $x - 2y + 2z + 5 = 0$.**
 B. $x - y + 2z + 3 = 0$.
 C. $2x - 2y + 4z + 3 = 0$.
 D. $2x - y + 2z = 0$.
- 50.10** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(-3;2;4)$, $C(0;2;3)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua C và không cắt đoạn thẳng AB . Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ A, B đến (P) . Phương trình mặt cầu (S) có tâm O , tiếp xúc với (P) , ứng với $d_1 + d_2$ lớn nhất là
- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.**

B. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{32}{3}$.

50.11 Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt (P) chứa đường thẳng $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và (P) cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất là

A. $x + y - 3z + 5 = 0$.

B. $2x + 5y + 7z + 10 = 0$.

C. $2x + y + 5z + 3 = 0$.

D. $x + y - 5z + 3 = 0$.

50.12 Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ bằng

A. -1 .

B. 3 .

C. 6 .

D. 2 .

50.13 Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;-1)$, nằm trong mặt phẳng $(P) : 2x - y - z = 0$ và cách điểm $B(0;2;1)$ một khoảng lớn nhất là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

50.14 Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O , vuông góc với đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ và cách điểm $M(2;1;1)$ khoảng lớn nhất là

A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$.

C. $\frac{x}{1} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{4}.$

50.15 Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O , nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y + z = 0$ và cách điểm $M(1;2;1)$ một khoảng nhỏ nhất là

A. $\frac{x}{4} = \frac{y}{13} = \frac{z}{5}.$

B. $\frac{x}{4} = \frac{y}{13} = \frac{z}{-5}.$

C. $\frac{x}{4} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{5}.$

D. $\frac{x}{4} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-5}.$

50.16 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và phương trình mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất là

A. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}.$

B. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}.$

C. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}.$

D. $\frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}.$

50.17 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z = 0$ và $M(1;1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất?

A. $2x + y + 3z = 0.$

B. $x - 3y + 2z = 0.$

C. $x - y = 0.$

D. $2x - y + z = 0.$

50.18 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$, mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (P) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}.$

B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}.$

C. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

D. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{8}$.

50.19 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(0;1;2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm E nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

50.20 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;3;2\sqrt{6})$. Đường thẳng (Δ) qua A tạo với trục Oz một góc 30° , (Δ) cắt mặt phẳng Oxy tại điểm B . Khi OB nhỏ nhất, đường thẳng (Δ) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{\sqrt{6}}$.

B. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-\sqrt{6}}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{\sqrt{6}}$.

50.21 Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$. Hai mặt phẳng (P) , (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại A và B . Đường thẳng AB đi qua điểm có tọa độ là

A. $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

B. $\left(1; 1; -\frac{4}{3}\right)$.

C. $\left(1; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

50.22 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$. Qua d dựng các tiếp diện tới (S) , tiếp xúc với (S) tại A, B . Đường thẳng AB đi qua điểm nào sau đây ?

A. $\left(\frac{23}{2}; \frac{1}{2}; 6\right)$.

B. $(8; 1; 4)$.

C. $(6; -9; 6)$.

D. $\left(\frac{17}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

50.23 Trong không gian $Oxyz$, hãy viết phương trình của mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và tạo với đường $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ góc lớn nhất.

A. $x - 4y + z - 7 = 0$.

B. $x + 4y + z - 7 = 0$.

C. $x - 3y + z - 4 = 0$.

D. $x + 3y + z - 4 = 0$.

50.24 Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O , vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x + y - z - 1 = 0$, đồng thời tạo với trục Oy góc lớn nhất.

A. $2x - 5y - z = 0$.

B. $2x - 2y + z = 0$.

C. $3x - 2y + 4z = 0$.

D. $3x - 2y + z = 0$.

50.25 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Phương trình đường thẳng nằm trong (P) , cắt d và tạo với d một góc nhỏ nhất là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}.$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}.$

50.26 Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-1;2)$, song song với $(P): 2x - y - z + 3 = 0$ và tạo với đường thẳng $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc nhỏ nhất là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}.$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-7}.$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}.$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{5}.$

50.27 Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2;1;-2)$, song song với (P) , đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (m;n;1)$. Khi đó $m^2 - n^2$ bằng

A. $-5.$

B. $4.$

C. $3.$

D. $-4.$

50.28 Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $x + 9y - 9z - 27 = 0.$

B. $x + 9y + 9z - 9 = 0.$

C. $x + 9y + 9z - 27 = 0.$

D. $x + 9y + 9z = 0.$

50.29 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt ba tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C (khác O) sao cho $(OA + OB + OC)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(12;0;0).$

B. $(0;0;12).$

C. $(6;0;0).$

D. $(0;6;0).$

50.30 Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + 16c^2 = 49$. Khi khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất thì $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. $\frac{49}{4}$.

B. 11.

C. $\frac{51}{5}$.

D. $\frac{49}{5}$.

50.31 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;1)$, $N(-1;0;-1)$, đồng thời cắt Ox , Oy theo thứ tự tại A , B (khác O) sao cho $AM = \sqrt{3}BN$. Khi đó (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; m; n)$ thì tổng $m + n$ bằng

A. 2.

B. -1.

C. 1.

D. 0.

50.32 Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-2;3)$, $B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 2 = 0$. Tìm hoành độ của C thuộc (P) sao cho tam giác ABC cân tại C và có chu vi nhỏ nhất?

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{3}$.

50.33 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3;4;1)$, $B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)$, $(a > 2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 4.

D. 0.

50.34 Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$, $d_2: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt

phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$. Lập phương trình đường thẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1 , d_2 lần lượt tại A , B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất?

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}.$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}.$

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-3}.$

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}.$

50.35 Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$; $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với $(Q) : x + y - 2z + 3 = 0$ và cắt d_1, d_2 theo đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất?

A. $x + y - 2z + 10 = 0.$

B. $x + y - 2z = 0.$

C. $x + y - 2z + 1 = 0.$

D. $x + y - 2z - 7 = 0.$

50.36 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1; -2; \frac{5}{2}\right)$ và $B\left(4; 2; \frac{5}{2}\right)$. Tìm hoành độ điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $\widehat{ABM} = 45^\circ$ và tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất?

A. $\frac{5}{2}.$

B. 1.

C. $\frac{3}{2}.$

D. 2.

50.37 Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q) : 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (Q)$ thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tổng $a + b + 5c$ bằng

A. 11.

B. 9.

C. 15.

D. 14.

50.38 Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5; 8; -11)$, $B(3; 5; -4)$, $C(2; 1; -6)$ và mặt cầu $(S) : (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $\left| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của tổng $x_M + y_M$ bằng

A. 4.

B. 0.

C. -2 .D. 2 .

50.39 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(13;3;-2)$, $B(1;0;1)$ và phương trình hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): (x-5)^2 + y^2 + z^2 = 10$. Gọi M nằm trên đường tròn giao tuyến của (S_1) , (S_2) thỏa mãn $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức bằng

A. $186 - 36\sqrt{2}$.B. 36 .C. $18 - 6\sqrt{2}$.D. 16 .

50.40 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(0;-2;3)$, $B(2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. $\frac{41}{4}$.B. $\frac{9}{4}$.C. $\frac{7}{4}$.D. 3 .

Phát triển đề tham khảo thi THPT năm 2021 - Ths. Lê Văn Đoàn