

LƯ SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11



CHƯƠNG IV

GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

0355334679 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 11.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

NỘI DUNG

1. Tóm tắt lý thuyết cần nắm ở mỗi bài học
2. Bài tập có hướng dẫn giải và bài tập tự luyện
3. Phần bài tập trắc nghiệm đủ dạng và có đáp án.
4. Một số đề ôn kiểm tra

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để lần sau cuốn bài tập hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gọi về số 0355.334.679 – 0916 620 899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

MỤC LỤC

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ 01 - 19

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ 20 – 40

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC 41 – 56

ÔN TẬP CHƯƠNG IV..... 57 – 79

MỘT SỐ ĐỀ ÔN KIỂM TRA 80 – 88

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$
- Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0

2. Giới hạn vô cực

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ khi và chỉ khi u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$
- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$
- Nhận xét: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = -\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$

Lưu ý: Thay cho viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$, ta viết $\lim u_n = a$, $\lim u_n = \pm\infty$

3. Các giới hạn đặc biệt

- a) $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$; $\lim n^k = +\infty$, với k nguyên dương.
- b) $\lim q^n = 0$, nếu $|q| < 1$; $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$
- c) $\lim c = c$; $\lim \frac{c}{n^k} = 0$, $\lim (c u_n) = c \lim u_n$, với c là hằng số, $k \in \mathbb{N}^*$
- d) $\lim \frac{n}{q^n} = 0$ nếu $q > 1$

4. Định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý 1. Nếu $\lim u_n = L$ và $\lim v_n = M$, thì:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = L + M$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = L - M$
- $\lim u_n \cdot v_n = \lim u_n \cdot \lim v_n = L \cdot M$
- $\lim(c \cdot u_n) = c \cdot L$ (với c là hằng số)
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)

Định lý 2. Giả sử $\lim u_n = L$

- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$
- $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$
- Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$

5. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

- a) Quy tắc 1. Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc 2. Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

c) Quy tắc 3. Nếu $\lim u_n = L \neq 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ được cho trong bảng:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

Chú ý. Nếu $\lim u_n = L > 0, \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

6. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn

- Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$
- Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}; |q| < 1 \text{ hay } S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots + u_1 q^{n-1} + \dots = \frac{u_1}{1-q}; |q| < 1$$

7. Định lí kẹp về giới hạn của dãy số

Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$ và số thực L . Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì dãy số (v_n) có giới hạn và $\lim v_n = L$.

8. Lưu ý

- Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn
- Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn
- Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim u_{n+1} = a$

$$\text{d) Số } e: e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

9. Phương pháp tìm giới hạn của dãy số

- Vận dụng nội dung định nghĩa
- Tìm giới hạn của một dãy số ta thường đưa về các giới hạn dạng đặc biệt và áp dụng các định lí về giới hạn hoặc các định lí về giới hạn vô cực:
 - + Nếu biểu thức có dạng phân thức mà mẫu và tử đều chứa các lũy thừa của n , thì chia tử và mẫu cho n^k , với k là số mũ cao nhất.
 - + Nếu biểu thức có chứa n dưới dấu căn, thì có thể nhân tử số và mẫu số với cùng một biểu thức liên hợp.

10. Phương pháp tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

- Nhận dạng xem dãy số đã cho có phải là một cấp số nhân lùi vô hạn không. Sau đó áp dụng công thức tính tổng đã biết.

- Cách tìm cấp số nhân lùi vô hạn khi biết một số điều kiện: Dùng công thức tính tổng để tìm công bội và số hạng đầu
- Cách viết một số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số hữu tỉ: Khai triển số đã cho dưới dạng tổng của một số nhân lùi vô hạn và tính tổng này.

B. BÀI TẬP

Bài 1.1. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n| \leq \frac{n+1}{n^2}$ với mọi n . Chứng minh rằng $\lim u_n = 0$.

HD\Giải

Đặt $v_n = \frac{n+1}{n^2}$. Ta có $\lim v_n = \lim \frac{n+1}{n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = 0$. Do đó, $|v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, theo giả thiết ta có $|u_n| \leq v_n \leq |v_n|$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim u_n = 0$.

Bài 1.2. Bằng định nghĩa tính giới hạn $\lim \frac{3^n + 1 - \sin \frac{\pi}{n}}{3^n}$

HD\Giải

Ta có $\lim \frac{3^n + 1 - \sin \frac{\pi}{n}}{3^n} = \lim \left(1 + \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{3^n} \right)$

Mặt khác, ta lại có $\left| \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n} = \left| \frac{1}{3^n} \right|$ và $\lim \frac{1}{3^n} = \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$ nên $\left| \frac{1}{3^n} \right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Từ đó suy ra $\left| \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{3^n} \right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nghĩa là $\lim \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{3^n} = 0$. Vậy $\lim \frac{3^n + 1 - \sin \frac{\pi}{n}}{3^n} = \lim \left(1 + \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{3^n} \right) = 1$

Bài 1.3. Cho biết dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n > n^2$ với mọi n . Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty$

HD\Giải

Vì $\lim n^2 = +\infty$ (giới hạn đặt biệt), nên n^2 có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Mặt khác, theo giả thiết $u_n > n^2$ với mọi n , nên u_n cũng có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Vậy $\lim u_n = +\infty$

Bài 1.4. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$ với mọi n . Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$

HD&Giải

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$ nên $\left| \frac{1}{n^3} \right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Mặt

khác, ta có $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3} = \left| \frac{1}{n^3} \right|$ với mọi n

Từ đó suy ra $|u_n - 1|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩ là $\lim(u_n - 1) = 0$. Do đó $\lim u_n = 1$

Bài 1.5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

a) Tìm số n sao cho $|u_n - 2| < \frac{1}{100}$

b) Chứng minh rằng với mọi $n > 2007$ thì các số hạng của dãy số (u_n) đều nằm trong khoảng $(1,998; 2,001)$

HD&Giải

a) Ta có $|u_n - 2| = \left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{-3}{n+2} \right| = \frac{3}{n+2}$. Khi đó $|u_n - 2| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 298$

b) Khi $n > 2007 \Leftrightarrow n+2 > 2009 \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \frac{3}{2009}$

$\Leftrightarrow |u_n - 2| < \frac{3}{2009} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2009} < u_n < 2 + \frac{3}{2009} \Leftrightarrow 1,998 < u_n < 2,001$

Bài 1.6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{3n+2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-n-1}{3+2n^2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}$

HD&Giải

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(6 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{2}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = 2$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-n-1}{3+2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 2} = 2$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - 4} = -\frac{1}{2}$

Bài 1.7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5 \cdot 4^n}{4^n + 2^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{\cos n}{3^n} \right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{2^n} \right)$

HD&Giải

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5 \cdot 4^n}{4^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n + 5 \right]}{4^n \left[1 + \left(\frac{2}{4} \right)^n \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^n + 5}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n} = 5$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{1}{3}$

$$c) \lim \left(\frac{n+1}{n} + \frac{\cos n}{3^n} \right) = \lim \frac{n+1}{n} + \lim \frac{\cos n}{3^n} = 1$$

$$d) \lim \left(3 + \frac{(-1)^n}{2^n} \right) = \lim 3 + \lim \left(-\frac{1}{2} \right)^n = 3$$

Bài 1.8. Tính các giới hạn

$$a) \lim \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$$

$$b) \lim \frac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1}$$

$$c) \lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$$

$$d) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1}$$

HD & Giải

$$a) \lim \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2} = \lim \frac{n\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+n}{1-2n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n}\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-2} = 0$$

$$b) \lim \frac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1} = \lim \frac{4n^3-8n^2-3n+9}{n^3+1} = \lim \frac{4-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = 4$$

$$c) \lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2} = \lim \frac{3n\sqrt{1-\frac{1}{9n}+\frac{1}{9n^2}}}{4n-2} = \frac{3}{4}$$

$$d) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1} = \lim \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

Bài 1.9. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} \right)$$

$$b) \lim \left(\sqrt{n^2-n} - n \right)$$

$$c) \lim \left(\sqrt{n^4+n^2+1} - n^2 \right)$$

$$d) \lim n \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+2} \right)$$

HD & Giải

$$a) \lim \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} \right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} \right) \left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1} \right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}}$$

$$= \lim \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}} = \lim \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim \left(\sqrt{n^2-n} - n \right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2-n} - n \right) \left(\sqrt{n^2-n} + n \right)}{\sqrt{n^2-n} + n} = \lim \frac{-n}{n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1 \right)} = -\frac{1}{2}$$

$$c) \lim \left(\sqrt{n^4+n^2+1} - n^2 \right) = \lim \frac{n^4+n^2+1-n^4}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2} = \lim \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 d) \lim n(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+2}) &= \lim \frac{n(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+2})(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+2})}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+2}} \\
 &= \lim \frac{-3n}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)} = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Bài 1.10. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim (\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1})$

b) $\lim \frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$

d) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-n}}$

HD & Giải

a) $+\infty$

b) 0

c) $\frac{1}{3}$

d) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-n}} = \lim \frac{\sqrt{n^2+2n+n}}{n^2+2n-n^2} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2} = 1$

Bài 1.11. Tính các giới hạn sau

a) $\lim (\sqrt{n^2+3n-n+2})$

b) $\lim (\sqrt[3]{n^3-2n^2-n})$

c) $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$

d) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1-2n+1}}{\sqrt{n^2+2n-n}}$

HD & Giải

a) $\lim (\sqrt{n^2+3n-n+2}) = \lim \left(\frac{(\sqrt{n^2+3n-n})(\sqrt{n^2+3n+n})}{\sqrt{n^2+3n+n}} + 2 \right)$

$$= \lim \left(\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} + 2 \right) = \lim \left(\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} + 2 \right) = \frac{7}{2}$$

b) $\lim (\sqrt[3]{n^3-2n^2-n}) = \lim \frac{(\sqrt[3]{n^3-2n^2-n})(\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2+n^3\sqrt[3]{n^3-2n^2+n^2}})}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2+n^3\sqrt[3]{n^3-2n^2+n^2}}}$

$$= \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6-4n^5+4n^2}+n^3\sqrt[3]{n^3-2n^2+n^2}} = \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1} = -\frac{2}{3}$$

c) $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}) = \lim \frac{\sqrt{n}(n-1-n)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = -\lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 d) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}-n} &= \lim \frac{(\sqrt{4n^2+1}-(2n-1))(\sqrt{4n^2+1}+(2n-1))(\sqrt{n^2+2n}+n)}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)(\sqrt{4n^2+1}-(2n-1))} \\
 &= \lim \frac{4n(\sqrt{n^2+2n}+n)}{2n(\sqrt{4n^2+1}+(2n-1))} = \lim \frac{2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \frac{4}{4} = 1
 \end{aligned}$$

Bài 1.12. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \sqrt{3n^4-10n+12}$

b) $\lim (2.3^n - 5.4^n)$

c) $\lim (\sqrt{n^2-n}+n)$

d) $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2}$

HD & Giải

a) $+\infty$;

b) $-\infty$

c) $\lim (\sqrt{n^2-n}+n) = \lim n \left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1 \right) = +\infty$

d) $\sqrt{2.3^n - n + 2} = (\sqrt{3})^n \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + \frac{2}{3^n}}$ với mọi n . Vì $\lim \frac{n}{3^n} = 0$; $\lim \frac{2}{3^n} = 0$ nên

$\lim \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + \frac{2}{3^n}} = \sqrt{2} > 0$. Ngoài ra $\lim (\sqrt{3})^n = +\infty$

Do đó $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2} = +\infty$

Bài 1.13. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(n^2 - \frac{2}{n+1} \right)$

b) $\lim (-n^2 + n\sqrt{n} + 1)$

c) $\lim \frac{n\sqrt{1+2+3+\dots+n}}{n^2+n+1}$

d) $\lim \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \dots + \frac{n-1}{n^2+1} \right)$

HD & Giải

a) $\lim \left(n^2 - \frac{2}{n+1} \right) = \lim \frac{n^3 + n^2 - 2}{n+1} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = +\infty$

b) $\lim (-n^2 + n\sqrt{n} + 1) = \lim (-n^2) \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$

c) $\lim \frac{n\sqrt{1+2+3+\dots+n}}{n^2+n+1} = \lim \frac{n\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2+n+1} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\lim \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \dots + \frac{n-1}{n^2+1} \right) = \lim \frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{n^2+1} = \lim \frac{n(n-1)}{2n^2+2} = \frac{1}{2}$

Bài 1.14. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim (3.2^n - 5^{n+1} + 10)$

b) $\lim \frac{2^{n+1} - 3.5^n + 3}{3.2^n + 7.4^n}$

c) $\lim \frac{2^{n+1} - 3^n + 11}{3^{n+2} + 2^{n+3} - 4}$

d) $\lim \frac{13 \cdot 3^n - 5n}{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n}$

e) $\lim \sqrt{\frac{3^n + 2^{n+1}}{5 + 3^{n+1}}}$

f) $\lim \sqrt{3 \cdot 4^n - n + 2}$

HD & Giải

a) $\lim (3 \cdot 2^n - 5^{n+1} + 10) = \lim 5^n \left(3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 5 + 10 \cdot \frac{1}{5^n} \right)$

Ta có $\lim 5^n = +\infty$, $\lim \left(3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 5 + 10 \cdot \frac{1}{5^n} \right) = -5 < 0$. Do vậy $\lim (3 \cdot 2^n - 5^{n+1} + 10) = -\infty$

b) $\lim \frac{2^{n+1} - 3 \cdot 5^n + 3}{3 \cdot 2^n + 7 \cdot 4^n} = \lim \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 3 + \frac{3}{5^n}}{3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 7 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n}$

Ta có $\lim \left(2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 3 + \frac{3}{5^n} \right) = -3 < 0$; $\lim \left[3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 7 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n \right] = 0$ và $3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 7 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n > 0, \forall n$

Vậy $\lim \frac{2^{n+1} - 3 \cdot 5^n + 3}{3 \cdot 2^n + 7 \cdot 4^n} = -\infty$

c) Chia tử và mẫu cho 3^n , ta được $\lim \frac{2^{n+1} - 3^n + 11}{3^{n+2} + 2^{n+3} - 4} = -\frac{1}{9}$

d) Chia tử và mẫu cho 4^n , và lưu ý $\lim \frac{n}{q^n} = 0$ nếu $|q| < 1$. Vậy $\lim \frac{13 \cdot 3^n - 5n}{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n} = \frac{0}{5} = 0$

e) Xét $u_n = \frac{3^n + 2^{n+1}}{5 + 3^{n+1}}$, chia tử và mẫu cho 3^n , khi đó $\lim \frac{3^n + 2^{n+1}}{5 + 3^{n+1}} = \frac{1}{3}$

Vậy $\lim \sqrt{\frac{3^n + 2^{n+1}}{5 + 3^{n+1}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\lim \sqrt{3 \cdot 4^n - n + 2} = \lim 2^n \left(\sqrt{3 - \frac{n}{4^n} + \frac{2}{4^n}} \right)$

Ta có $\lim 2^n = +\infty$, $\lim \sqrt{3 - \frac{n}{4^n} + \frac{2}{4^n}} = \sqrt{3} > 0$. Do vậy $\lim \sqrt{3 \cdot 4^n - n + 2} = +\infty$

Bài 1.15. Tính các giới hạn

a) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

b) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$

c) $\lim \frac{2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + (n+1)n^2}{n^4}$

d) $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \right)$

HD & Giải

a) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

b) Ta có $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right]$

Nên $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \frac{2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + (n+1)n^2}{n^4} &= \lim \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^4} \\ &= \lim \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^4} = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{4} + \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \forall \frac{1}{\sqrt{n^3+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Do đó } 0 < \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Mà } \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ nên suy ra } \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \right) = 0$$

Bài 1.16. Tìm các giới hạn của dãy số (u_n) sau, biết

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\text{b) } u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{c) } u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\text{d) } u_n = \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1}$$

HD & Giải

$$\text{a) Ta có } \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Do đó: } \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}. \text{ Mà } \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

$$\text{b) Ta có } u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Mà } \lim \sqrt{n} = +\infty. \text{ Vậy } \lim u_n = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = +\infty$$

$$\text{c) Ta có } \frac{1}{n+\sqrt{n}} + \frac{1}{n+\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Do đó } \frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}. \text{ Mà } \lim \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1 = \lim \frac{n}{n+1}$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \lim \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right) = 1$$

$$\text{d) Ta có } \left| \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1} \right| \leq \frac{5}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Mà } \lim \frac{5}{n+1} = 0.$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \lim \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1} = 0$$

Bài 1.17. Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots$

HD & Giải

Dãy số vô hạn $2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \dots$ là một cấp số nhân với công bội $q = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vì $|q| = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên dãy số này là một cấp số nhân lùi vô hạn.

$$\text{Do đó } S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

Bài 1.18. Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$

HD\&Giải

Dãy số $-1, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10^2}, \dots, \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}, \dots$ là một cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{10}$

Vì $|q| = \left| -\frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1$ nên dãy số này là một cấp số nhân lùi vô hạn.

$$\text{Do đó } S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots = \frac{-1}{1 - \left(-\frac{1}{10} \right)} = -\frac{10}{11}$$

Bài 1.19. Tìm tổng cấp số nhân $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

HD\&Giải

Dãy số $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

$$\text{Do đó } S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Bài 1.20. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,777\dots$ dưới dạng một phân số.

HD\&Giải

$$\text{Ta có } 0,777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \dots$$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{7}{10}, q = \frac{1}{10}$

$$\text{Do đó } 0,777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \dots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$$

Bài 1.21. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,313131\dots$ dưới dạng một phân số.

HD\&Giải

$$0,313131\dots = \frac{31}{100} + \frac{31}{100} \cdot \frac{1}{100} + \frac{31}{100} \cdot \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \dots = \frac{31}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{31}{99}$$

Bài 1.22. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 1,020\,202\dots$ (chu kì là 02), $b = 2,131313\dots$ (chu kì 13) và $c = 2,131131131\dots$ (chu kì 131). Hãy viết a, b, c dưới dạng một phân số.

HD\&Giải

$$\text{Ta có } a = 1,020202... = 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{100^2} + ... + \frac{2}{100^n} + ... = 1 + \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}$$

(vì $\frac{2}{100}, \frac{2}{100^2}, ... \frac{2}{100^n}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn, công bội $q = \frac{1}{100}$)

$$\text{Ta có } b = 2,131313... = 2 + \frac{13}{100} + \frac{13}{100^2} + ... + \frac{13}{100^n} + ... = 2 + \frac{\frac{13}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{13}{99} = \frac{211}{99}$$

$$\text{Ta có } c = 2,131131131... = 2 + \frac{131}{1000} + \frac{131}{1000^2} + ... + \frac{131}{1000^n} + ... = 2 + \frac{\frac{131}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = 2 + \frac{131}{999} = \frac{2129}{999}$$

Bài 1.23.

a) Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$.

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

b) Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 3 và công bội $q = \frac{2}{3}$

HD & Giải

a) Gọi u_1 và q là số hạng đầu và công bội của cấp số đó. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = \frac{5}{3} & (1) \\ \frac{u_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{39}{25} & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta được $\frac{5}{3}(1-q^3) = \frac{39}{25} \Leftrightarrow q = \frac{2}{5}$ thay vào (1), ta được $u_1 = 1$

$$\text{b) } u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Bài 1.24. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\frac{3}{4}$ và số hạng đầu là một số dương.

HD & Giải

Gọi u_1 là số hạng đầu, q là công bội và S là tổng của cấp số nhân đã cho.

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = 12 & (1) \\ \begin{cases} u_1(1-q) = \frac{3}{4} & (2) \\ u_1 > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Khi đó $S = \frac{u_1}{1-q}$. Theo giả thiết, ta có

$$\text{Nhân (1) với (2), ta có } \begin{cases} u_1^2 = 9 \\ u_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = 3 \Rightarrow q = \frac{3}{4}. \text{ Vậy } u_1 = 3; q = \frac{3}{4}$$

Bài 1.25. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng số hạng thứ hai là $\frac{12}{5}$ và

tổng cấp số nhân này là 15.

HD & Giải

Gọi u_1 và q là số hạng đầu và công bội của cấp số đó. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} u_1 q = \frac{12}{5} \\ \frac{u_1}{1-q} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{5} \\ u_1 = 12 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} q = \frac{4}{5} \\ u_1 = 3 \end{cases}$$

Bài 1.26.

a) Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 10, tổng năm số hạng đầu tiên của nó là $\frac{155}{16}$.

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

b) Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$

HD & Giải

a) Gọi u_1 và q là số hạng đầu và công bội của cấp số đó. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = 10 & (1) \\ \frac{u_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{155}{16} & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta được $10(1-q^5) = \frac{155}{16} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$ thay vào (1), ta được $u_1 = 5$

b) Vì $9, 3, 1, \dots, \frac{1}{3^{n-3}}, \dots$ là cấp số nhân lùi vô hạn, có $q = \frac{1}{3}$ và $u_1 = 9$ nên :

$$S = 9 + 3 + 1 + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots = \frac{9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2}$$

Bài 1.27. Giải phương trình $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$, trong đó $|x| < 1$.

HD & Giải

Vì $|x| < 1$, nên với $u_1 = 1, q = x$. Ta có $S = \frac{u_1}{1-q} = x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x}$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{x} + S \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x(1-x)} = \frac{7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bài 1.28. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}; n \geq 1 \end{cases}$. Biết (u_n) có giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$, hãy tìm giới hạn đó.

HD & Giải

Đặt $\lim u_n = a$. Ta có $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} \Rightarrow a = \sqrt{2 + a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$

Vì $u_n > 0$ nên $\lim u_n = a \geq 0$. Vậy $\lim u_n = 2$.

Bài 1.29.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}; n \geq 1 \end{cases}$$

Dãy số (u_n) có giới hạn hay không khi $n \rightarrow +\infty$? Nếu có, hãy tìm giới hạn đó.

HD&Giải

Ta có $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{4}; u_4 = \frac{4}{5}$. Từ đó ta dự đoán $u_n = \frac{n}{n+1}$ (1)

Chúng minh dự đoán trên bằng quy nạp:

- $n = 1$, ta có $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ (đúng)

- Giả sử đẳng thức (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), nghĩa là $u_k = \frac{k}{k+1}$. Khi đó ta có

$$u_{k+1} = \frac{1}{2-u_k} = \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}, \text{ nghĩa là đẳng thức (1) cũng đúng với } n = k+1.$$

- Vậy $u_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó ta có $\lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

Bài 1.30.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}; n \geq 1 \end{cases}$$

Chúng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Tìm giới hạn đó.

HD&Giải

Ta có $u_1 = 2; u_2 = \frac{3}{2}; u_3 = \frac{5}{4}; u_4 = \frac{9}{8}; u_5 = \frac{17}{16}$. Từ đó dự đoán $u_n = \frac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chúng minh dự đoán trên bằng quy nạp (tự chứng minh)

$$\text{Từ đó, } \lim u_n = \lim \frac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}} = \lim \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right] = \lim \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = 1$$

Bài 1.31.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}; n \geq 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $u_n > 0$ với mọi n

b) Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

HD&Giải

a) Chứng minh bằng quy nạp: $u_n > 0$ với mọi n . (1)

- Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 > 0$

- Giả sử (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), nghĩa là $u_k > 0$, ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$. Ta

$$\text{có } u_{k+1} = \frac{2u_k + 3}{u_k + 2}. \text{ Vì } u_k > 0 \text{ nên } u_{k+1} = \frac{2u_k + 3}{u_k + 2} > 0$$

Vậy: $u_n > 0$ với mọi n .

$$\text{Đặt } \lim u_n = a. \text{ Ta có } u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \Rightarrow a = \frac{2a + 3}{a + 2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

Vì $u_n > 0$ với mọi n , nên $\lim u_n = a \geq 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = \sqrt{3}$

Bài 1.32. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3} - 6 \end{cases}$. Gọi (v_n) là một dãy số xác định bởi $v_n = u_n + 18$

a) Chứng minh rằng (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn

b) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (v_n) và tìm $\lim u_n$

HD & Giải

a) Ta có $v_{n+1} = u_{n+1} + 18 = \frac{2}{3}u_n - 6 + 18 = \frac{2}{3}u_n + 12$

Thay $u_n = v_n - 18$ vào đẳng thức trên, ta được:

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - 18) + 12 = \frac{2}{3}v_n.$$

Điều này chứng tỏ, dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{2}{3}$

b) Gọi S là tổng CSN lùi vô hạn (v_n) . Khi đó $S = \frac{v_1}{1-q} = \frac{13}{1-\frac{2}{3}} = 39$

Vì $\lim v_n = 0$ nên $\lim u_n = -18$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.33. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(2 + \frac{(-1)^n}{n+2} \right)$ b) $\lim \left(\frac{\sin 3n}{4n} - 1 \right)$ c) $\lim \left(\frac{n-1}{n} \right)$ d) $\lim \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$

Bài 1.34. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n = \frac{n^2 - 3n + 5}{2n^2 - 1}$ b) $u_n = \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}$ c) $u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n^2}$ d) $u_n = \frac{4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n}$

Bài 1.35. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{n^4 - 40n^3 + 15n - 7}{n^4 + n + 100}$ b) $\lim \frac{2n^3 + 35n^2 - 10n + 3}{5n^5 - n^3 + 2n}$ c) $\lim \frac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1}$ d) $\lim \frac{3 \cdot 2^n - 8 \cdot 7^n}{4 \cdot 3^n + 5 \cdot 7^n}$

e) $\lim \frac{2^{n+1}(3 \cdot 2^n - 3^{n-2})}{3^n(2^{n-1} + 4)}$ f) $\lim \frac{2^n(3^{n-1} - 5 \cdot 2^n)}{3^{n-1}(2^n + 4)}$

Bài 1.36. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{(-3)^n + 2 \cdot 5^n}{1 - 5^n}$ b) $\lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 + n + 1}$ c) $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} \right)$

d) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$ e) $\lim \frac{8^{2n+3} - 3^{3n+2}}{4^{3n+4} + 5^{2n+3}}$ f) $\lim \frac{2^{6n+3} - 3^{3n+5}}{4^{3n+4} + 7^{2n+3}}$

Bài 1.37. Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng một phân số

a) 0,444... b) 0,212121... c) 0,32111111...
d) 0,51111... e) 0,393939... f) 0,27323232...

Bài 1.38.

a) Tìm tổng cấp số nhân $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$

b) Tính tổng $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

A. $\begin{cases} q = \frac{5}{2} \\ u_1 = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} q = \frac{2}{5} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} q = \frac{5}{2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} q = \frac{2}{5} \\ u_1 = 2 \end{cases}$

Câu 2. Tìm tổng $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \dots$

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

Câu 3. Tìm $N = \lim \sqrt{3n^4 - 10n + 12}$.

A. $N = -\infty$

B. $N = 0$

C. $N = +\infty$

D. $N = \sqrt{3}$

Câu 4. Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$

A. $S = -\frac{10}{11}$

B. $S = \frac{10}{11}$

C. $S = \frac{1}{11}$

D. $S = -\frac{11}{10}$

Câu 5. Tìm $P = \lim \sqrt{\frac{3^n + 2^{n+1}}{5 + 3^{n+1}}}$.

A. $P = \cot \frac{2\pi}{3}$

B. $P = \tan \frac{\pi}{6}$

C. $P = \sin \frac{\pi}{3}$

D. $P = \cos \frac{\pi}{4}$

Câu 6. Biết tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

A. $u_1 = 1, q = \frac{2}{5}$

B. $u_1 = 1, q = \frac{5}{2}$

C. $u_1 = 2, q = \frac{2}{5}$

D. $u_1 = 1, q = 2$

Câu 7. Tìm $H = \lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

A. $H = \frac{1}{3}$

B. $H = -\frac{1}{2}$

C. $H = 3$

D. $H = 1$

Câu 8. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 10, tổng năm số hạng đầu tiên của nó là $\frac{155}{16}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

A. $\begin{cases} q = \frac{1}{5} \\ u_1 = 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = 5 \end{cases}$

Câu 9. Tìm $J = \lim n(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 2})$.

A. $J = 1$

B. $J = -\frac{1}{2}$

C. $J = +\infty$

D. $J = -\frac{3}{2}$

Câu 10. Giải phương trình $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$, trong đó $|x| < 1$.

A. $x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

B. $x \in \left\{\frac{2}{3}\right\}$

C. $x \in \left\{\frac{1}{3}\right\}$

D. $x \in \{1; 2\}$

Câu 11. Tính tổng S của cấp số nhân $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

- A. $S = 1$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = \frac{1}{2^{n+1}}$. D. $S = 2^n$.

Câu 12. Tìm $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$.

- A. $Q = 0$. B. $Q = +\infty$. C. $Q = 1$. D. $Q = n$.

Câu 13. Tìm $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1 - \sin \frac{\pi}{n}}{3^n}$.

- A. $I = \frac{1}{3}$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 1$. D. $I = 0$.

Câu 14. Tìm $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$.

- A. $J = -\infty$. B. $J = 1$. C. $J = \sqrt{2}$. D. $J = +\infty$.

Câu 15. Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots$

- A. $S = 2\sqrt{2}$. B. $S = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$. C. $S = \sqrt{2} + 1$. D. $S = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$.

Câu 16. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$

- A. $S = \frac{35}{3}$. B. $S = \frac{7}{2}$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = \frac{27}{2}$.

Câu 17. Cho (u_n) và (v_n) là hai dãy số có giới hạn. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{\lim u_n}$. B. $\lim \sqrt{v_n} = \sqrt{\lim v_n}$.
C. $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim u_n}$. D. $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

Câu 18. Tính tổng $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$

- A. $S = 9$. B. $S = 10$. C. $S = 11$. D. $S = \frac{9}{10}$.

Câu 19. Tìm $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} + n)$.

- A. $L = 2$. B. $L = 0$. C. $L = +\infty$. D. $L = 1$.

Câu 20. Tìm $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{\cos n}{3^n} \right)$.

- A. $J = \frac{1}{2}$. B. $J = 1$. C. $J = 0$. D. $J = 2$.

Câu 21. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^n + 11}{3^{n+2} + 2^{n+3} - 4} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P = ab + a$.

- A. $P = -12$. B. $P = -10$. C. $P = 9$. D. $P = 7$.

Câu 22. Tìm $F = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n+1})$.

- A. $F = 0$. B. $F = +\infty$. C. $F = -\infty$. D. $F = 1$.

Câu 23. Tìm $M = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot 3^n - 5 \cdot 4^n)$.

A. $M = \frac{4}{3}$.

B. $M = -\infty$.

C. $M = 5$.

D. $M = +\infty$.

Câu 24. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(2345)$ được viết dưới dạng một phân số tối giản là $\frac{a}{b}$. Tính $S = a - b$.

A. $S = 12345$.

B. $S = 54321$.

C. $S = 2345$.

D. $S = 5432$.

Câu 25. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $7,(23456)$ được viết dưới dạng một phân số tối giản là $\frac{a}{b}$. Tính $S = a - b$.

A. $S = 654321$.

B. $S = 123450$.

C. $S = 123456$.

D. $S = 623450$.

Câu 26. Tìm $L = \lim \sqrt{3 \cdot 4^n - n + 2}$.

A. $L = +\infty$.

B. $L = 2$.

C. $L = \sqrt{3}$.

D. $L = 0$.

Câu 27. Tìm $E = \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n \right)$.

A. $E = -2$.

B. $E = -1$.

C. $E = -\frac{2}{3}$.

D. $E = -\frac{1}{3}$.

Câu 28. Tìm $L = \lim \frac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{1 - 2n^2}$.

A. $L = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $L = 0$.

C. $L = -1$.

D. $L = 1$.

Câu 29. Tính tổng S cấp số nhân $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$

A. $S = \frac{3}{4}$.

B. $S = \frac{2}{3}$.

C. $S = \frac{3}{2}$.

D. $S = \frac{3}{8}$.

Câu 30. Tìm $H = \lim \left(\sqrt{n^2 - n} - n \right)$.

A. $H = \sqrt{2}$.

B. $H = -\infty$.

C. $H = -\frac{1}{2}$.

D. $H = 0$.

Câu 31. Tìm $L = \lim \left(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \right)$.

A. $L = \frac{11}{5}$.

B. $L = \frac{1}{2}$.

C. $L = 5$.

D. $L = +\infty$.

Câu 32. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 3 và công bội $q = \frac{2}{3}$

A. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

B. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

C. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.

D. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Câu 33. Biết $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}}{3n + 2} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a^2 - b^2$.

A. $S = 4$.

B. $S = -2$.

C. $S = 10$.

D. $S = -8$.

Câu 34. Tìm $I = \lim \left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 \right)$.

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = 0$.

Câu 35. Tìm $I = \lim \left(3 \cdot 2^n - 5^{n+1} + 10 \right)$.

A. $I = +\infty$.

B. $I = -5$.

C. $I = -2$.

D. $I = -\infty$.

Câu 36. Tìm $M = \lim \left(3 + \frac{(-1)^n}{2^n} \right)$

A. $M = 3$.

B. $M = 0$.

C. $M = 1$.

D. $M = 4$.

Câu 37. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\frac{3}{4}$ và số hạng đầu là một số dương.

A. $u_1 = 3; q = 3$.

B. $u_1 = 3; q = \frac{3}{4}$.

C. $u_1 = 3; q = \frac{1}{4}$.

D. $u_1 = 1; q = \frac{3}{4}$.

Câu 38. Tìm $H = \lim \frac{2^{n+1} - 3 \cdot 5^n + 3}{3 \cdot 2^n + 7 \cdot 4^n}$.

A. $H = -\infty$.

B. $H = -3$.

C. $H = \frac{2}{5}$.

D. $H = +\infty$.

Câu 39. Tìm $K = \lim \frac{3^n + 5 \cdot 4^n}{4^n + 2^n}$.

A. $K = \frac{5}{2}$.

B. $K = 1$.

C. $K = 5$.

D. $K = \frac{3}{4}$.

Câu 40. Tìm $F = \lim \sqrt{n} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$.

A. $F = 1$.

B. $F = -\frac{3}{2}$.

C. $F = 0$.

D. $F = -\frac{1}{2}$.

Câu 41. Tìm $N = \lim \frac{1}{\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n+1}}$.

A. $N = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

B. $N = 1$.

C. $N = 0$.

D. $N = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

Câu 42. Tìm $K = \lim \frac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1}$.

A. $K = 1$.

B. $K = -2$.

C. $K = 4$.

D. $K = 2$.

Câu 43. Biết $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $2b - a = -1$.

B. $a + b = 5$.

C. $a - 2b = -1$.

D. $ab + 4 = 10$.

Câu 44. Tìm $P = \lim \frac{\sqrt{4n^2+1} - 2n + 1}{\sqrt{n^2+2n} - n}$.

A. $P = \frac{3}{2}$.

B. $P = -1$.

C. $P = 0$.

D. $P = 1$.

Câu 45. Tìm $G = \lim \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1}$.

A. $G = 1$.

B. $G = 7$.

C. $G = 0$.

D. $G = \frac{1}{2}$.

Câu 46. Tên của một học sinh được mã hóa bởi số 1530. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A , H , N và O với

$$A = \lim \frac{3n-1}{n+2} \quad H = \lim \left(\sqrt{n^2+2n} - n \right) \quad N = \lim \frac{\sqrt{n}-2}{3n+7} \quad O = \lim \frac{3^n-5 \cdot 4^n}{1-4^n}$$

Hãy cho biết tên của học sinh này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các chữ kí hiệu tương ứng.

A. HANO.

B. HOAN.

C. NHOA.

D. NHAO.

Câu 47. Biết $\lim \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n + 2 \right) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + b - ab$.

A. $S = 9$.

B. $S = -14$.

C. $S = -5$.

D. $S = 23$.

Câu 48. Tìm $M = \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$.

A. $M = 1$.

B. $M = \frac{1}{2}$.

C. $M = 0$.

D. $M = -2$.

Câu 49. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$ với mọi n . Tìm $\lim u_n$?

A. $\lim u_n = -1$.

B. $\lim u_n = 0$.

C. $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

D. $\lim u_n = 1$.

Câu 50. Biết $\lim \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1} \right) = a, a \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a^2 + a + 1$.

A. $S = \frac{3}{2}$.

B. $S = 1$.

C. $S = \frac{7}{4}$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 51. Biết $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b - a = 1$.

B. $a + b = 9$.

C. $2a + b = 12$.

D. $ab + 2 = 10$.

Câu 52. Tìm $Q = \lim \frac{13 \cdot 3^n - 5n}{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n}$.

A. $Q = -\infty$.

B. $Q = 0$.

C. $Q = \frac{3}{4}$.

D. $Q = \frac{1}{2}$.

GV. Lư Sĩ Pháp

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	C	A	B	A	A	D	D	A	A	B	C	D	D	D	A	B	C	B	B	B	B	C	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	C	B	B	C	D	D	D	C	D	A	B	A	C	D	C	C	A	D	C	B	C	A	D	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
A	B																							

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Giới hạn hữu hạn

- Cho khoảng K , $x_0 \in K$ và hàm số $f(x)$ xác định trên K (hoặc $K \setminus \{x_0\}$). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.

2. Giới hạn vô cực

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty$.
- Cho khoảng K , $x_0 \in K$ và hàm số $f(x)$ xác định trên K (hoặc $K \setminus \{x_0\}$). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x)] = -\infty$

3. Định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý 1.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot L; (k \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$)
- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Các tính chất trên vẫn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$

Định lý 2. (Định lý giới hạn một bên)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

4. Các giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x} = 0$ (c là hằng số).
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$, nếu k là số lẻ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$, nếu k là số chẵn
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan x = -\frac{\pi}{2}$

5. Quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ hoặc $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \right)$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x)$ được tính:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
$L < 0$		+	$-\infty$
		−	$+\infty$

4. Khử các dạng vô định

Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp định lí về giới hạn, ta phải biến đổi biểu thức xác định hàm số về dạng áp dụng được các định lí này.

Dạng 1. Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (hay dạng $\frac{0}{0}$)

- Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể ta biến đổi như sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)A(x)}{(x - x_0)B(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} \text{ và tính } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$$

- Nếu $f(x)$ hay $g(x)$ có chứa biến dưới dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp, trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

Dạng 2. Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ (hay dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

- Ta chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x (hay phân tích tử và mẫu thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước).
- Nếu $f(x)$ hay $g(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thức, thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (k là số mũ bậc cao nhất của x trong dấu căn), trước khi chia tử và mẫu cho lũy thừa của x .

Dạng 3. Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hay dạng $\infty - \infty$) hoặc

Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x)$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ (hay dạng $0 \cdot \infty$)

- Nhân chia với biểu thức liên hợp(nếu có biểu thức chứa biến dưới dấu căn thức) hoặc quy đồng mẫu để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức)

B. BÀI TẬP

Bài 2.1. Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 1}{3x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5x^2}{x^2 + 3}$

HD & Giải

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq -2$ và $x_n \rightarrow -2$ khi $n \rightarrow +\infty$ (hay $\lim x_n = -2$)

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim \frac{(x_n + 2)(x_n - 2)}{x_n + 2} = \lim (x_n - 2) = -4$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq 1$ và $x_n \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow +\infty$ (hay $\lim x_n = 1$)

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n^2 + x_n - 3}{x_n - 1} = \lim \frac{2(x_n - 1)\left(x_n + \frac{3}{2}\right)}{x_n - 1} = \lim 2\left(x_n + \frac{3}{2}\right) = 5$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 1}{3x - 2}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x + 1}{3x - 2}$

Hàm số xác định trên $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ và $x = 4 \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ và $x_n \rightarrow 4$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n + 1}{3x_n - 2} = \frac{4 + 1}{3 \cdot 4 - 2} = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 1}{3x - 2} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5x^2}{x^2 + 3}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{2 - 5x^2}{x^2 + 3}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì và $x_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{2 - 5x_n^2}{x_n^2 + 3} = \lim \frac{\frac{2}{x_n^2} - 5}{1 + \frac{3}{x_n^2}} = -5$. Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5x^2}{x^2 + 3} = -5$

Bài 2.2. Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{3-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x-4}{x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos \frac{1}{x} \right)$

HD & Giải

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{3-x}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x+3}{3-x}$

Hàm số xác định trên $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ và $x = 5 \in (3; +\infty)$ Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \in (3; +\infty)$ và $x_n \rightarrow 5$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n+3}{3-x_n} = \frac{5+3}{3-5} = -4$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{3-x} = -4$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì và $x_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^3+1}{x_n^2+1} = \lim \frac{x_n + \frac{1}{x_n^3}}{1 + \frac{1}{x_n^2}} = +\infty$. Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x-4}{x+1}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x+1}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq -1$ và $x_n \rightarrow -1$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2-3x_n-4}{x_n+1} = \lim \frac{(x_n+1)(x_n-4)}{x_n+1} = \lim (x_n-4) = -5$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = -5$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$

Hàm số xác định trên $(-\infty; 5)$ và $x = 1 \in (-\infty; 5)$ Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \in (-\infty; 5)$ và $x_n \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{\sqrt{5-x_n}} = \frac{1}{\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos \frac{1}{x} \right)$. Xét hàm số $f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}$.

Với mọi dãy (x_n) mà $x_n \neq 0$ với mọi n và $\lim x_n = 0$

Ta có $f(x_n) = x_n \cdot \cos \frac{1}{x_n}$. Vì $|f(x_n)| = \left| x_n \cos \frac{1}{x_n} \right| \leq |x_n|$ và $\lim |x_n| = 0$

Nên $\lim f(x_n) = 0$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos \frac{1}{x} \right) = 0$

Bài 2.3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}$

HD&Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (2\sqrt{x})} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2} = -3$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x} = \frac{4}{-1} = -4$$

Bài 2.4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2 + 5} - 1)$

HD&Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{9 - 1}{-3 + 1} = -4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2-x)(2+x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (2-x) = 4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x+3} - 3)(\sqrt{x+3} + 3)}{(x-6)(\sqrt{x+3} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x+3} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 3} = \frac{1}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2 + 5} - 1) = \sqrt{4 + 5} - 1 = 2$$

Bài 2.5. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x+7} - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 15}{(x+2)^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2}$

HD&Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x+7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7} + 3)}{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7} + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[-(\sqrt{x+7} + 3) \right] = -6$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} = \frac{9 - 6 - 3}{3 - 1} = 0$$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 15}{(x+2)^2}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^3 + 15) = -1 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2 = 0$.

Nên $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 15}{(x+2)^2} = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x-1)[(1+x)^2 + (1+x) + 1]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[(1+x)^2 + (1+x) + 1]}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^2 + (1+x) + 1] = 3$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5 - 9}{(x+2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = -\frac{2}{3}$

Bài 2.6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)}$ b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

HD & Giải

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)} = \frac{1-1^3}{(2 \cdot 1 - 1)(1^4 - 3)} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(9x - x^2)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{x(9 - x)(\sqrt{x} + 3)} = -\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{x(\sqrt{x} + 3)} = -\frac{1}{54}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2^4 + 3 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2^2 - 1}} = \sqrt{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Với mọi $x \neq 0$, ta có $x \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (x - 1)$.

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$

Bài 2.7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 3}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{\frac{2x(x+1)}{x^2 - 6}}$
d) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 8|$ e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-x^3} - 3x}{2x^2 + x - 3}$ f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2 - 3}}{2x + 3}$

HD & Giải

a) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| = |3 - 4| = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{\frac{2x(x+1)}{x^2 - 6}} = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 8| = 5$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-x^3} - 3x}{2x^2 + x - 3} = 3$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2 - 3}}{2x + 3} = 3$

Bài 2.8. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1}$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x)$$

HD & Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = -2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{2x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x - 4x^2}{(\sqrt{4x^2 - x} - 2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{|x| \sqrt{4 - \frac{1}{x}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x \sqrt{4 - \frac{1}{x}} - 2x} = \frac{1}{4}$$

Bài 2.9. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{5 - 2x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x}{3x - 1}$$

HD & Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{6}{x}}{\frac{4}{x} - 1} = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}} = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 3$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{5 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}{5 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}{5 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}{\frac{5}{x} - 2} = -1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x}{3x - 1} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1}{3 - \frac{1}{x}} = -\frac{2}{3}$$

Bài 2.10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ 1-x & ; x < 0 \end{cases}$

Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$.

Phương pháp: Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ ta thường làm như sau

- Chọn hai dãy số khác nhau (x_n) và (y_n) thỏa mãn: x_n và y_n thuộc tập xác định của hàm số $y = f(x)$ và khác x_0 ; $x_n \rightarrow x_0$; $y_n \rightarrow x_0$
- Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$ hoặc chứng minh một trong các giới hạn này không tồn tại.

Lưu ý: Trường hợp $x \rightarrow x_0^+$; $x \rightarrow x_0^-$ hay $x \rightarrow \pm\infty$ chứng minh tương tự.

HD\&Giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Lấy dãy số (x_n) với $x_n = \frac{1}{n}$. Ta có $x_n \rightarrow 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (1)

Lấy dãy số (y_n) với $y_n = -\frac{1}{n}$. Ta có $y_n \rightarrow 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

Bài 2.11.

a) Cho hai dãy số có dạng tổng quát là $u_n = \frac{1}{n^3}$ và $v_n = \frac{2}{4n+1}$. Tính $\lim u_n$ và $\lim v_n$.

b) Dùng kết quả câu a), chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

HD\&Giải

a) $\lim u_n = \lim \frac{1}{n^3} = 0$, $\lim v_n = \lim \frac{2}{4n+1} = \lim \frac{\frac{2}{n}}{4 + \frac{1}{n}} = 0$ (1)

b) Hàm số $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có u_n, v_n đều thuộc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, với mọi n và

$$\lim f(u_n) = \lim \sin \frac{\pi}{\frac{1}{n^3}} = \lim \sin n^3 \pi = 0,$$

$$\lim f(v_n) = \lim \sin \frac{\pi}{\frac{2}{4n+1}} = \lim \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = \lim \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Vì $\lim u_n = \lim v_n = 0$, nhưng $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ nên hàm số $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

Bài 2.12. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin x$ không có giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$

HD\&Giải

Xét hai dãy số (x_n) với $x_n = 2n\pi$ và (y_n) với $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi (n \in \mathbb{N}^*)$

Ta có $\lim x_n = \lim 2n\pi = +\infty$, $\lim y_n = \lim \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim n \left(\frac{\pi}{2n} + 2\pi\right) = +\infty$

$$\lim \sin x_n = \lim \sin 2n\pi = \lim 0 = 0, \quad \lim \sin y_n = \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim 1 = 1$$

Vì $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$ nhưng $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$ nên hàm số $f(x) = \sin x$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

Bài 2.13. Chứng minh rằng hàm số $y = \cos \frac{1}{x}$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

HD & Giải

Chọn hai dãy số có số hạng tổng quát là $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ và $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$

Làm tương tự như bài 2.12.

Bài 2.14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1; & x \geq 0 \\ 2x; & x < 0 \end{cases}$ và các dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ và (v_n) với $v_n = -\frac{1}{n}$. Tính $\lim u_n; \lim v_n; \lim f(u_n); \lim f(v_n)$

HD & Giải

Ta có $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0, \lim v_n = \lim \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$

Do $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} > 0$ và $v_n = -\frac{1}{n} < 0$. Nên $f(u_n) = \sqrt{\frac{1}{n}} + 1$ và $f(v_n) = -\frac{2}{n}$

Từ đó $\lim f(u_n) = \lim \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + 1\right) = 1; \lim f(v_n) = \lim \left(-\frac{2}{n}\right) = 0$

Vì $\lim u_n = \lim v_n = 0$ nhưng $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ nên hàm số $y = f(x)$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

Bài 2.15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x + 2; & x \geq 1 \\ x^2 - 3; & x < 1 \end{cases}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

HD & Giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3) = -2; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x + 2) = 7$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ không tồn tại

Bài 2.16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3; & x \leq 2 \\ 4x - 3; & x > 2 \end{cases}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

HD & Giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 3) = 3; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x - 3) = 5$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ không tồn tại

Bài 2.17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2}; & -3 \leq x < 3 \\ 1; & x = 3 \\ \sqrt{x^2 - 9}; & x > 3 \end{cases}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (nếu có)

HD & Giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 9} = 0$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

Bài 2.18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}; & x > 1 \\ mx+2; & x \leq 1 \end{cases}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$? Tìm giới hạn này.

HD & Giải

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)}{(x^2 + x + 1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + 2) = m + 2$$

$f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Bài 2.19. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-7}{x-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-7}{x-1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 5x^2 + 7)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$

HD & Giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$, $x-1 < 0$ với mọi x và $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-3) = -1 < 0$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1} = +\infty$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$, $x-1 > 0$ với mọi x và $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-3) = -1 < 0$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1} = -\infty$

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$, $x-1 < 0$ với mọi x và $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-7) = -5 < 0$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-7}{x-1} = +\infty$

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$, $x-1 > 0$ với mọi x và $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-7) = -5 < 0$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-7}{x-1} = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 5x^2 + 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} \right)$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} \right) = 2 > 0$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 5x^2 + 7) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4}} = +\infty$

Bài 2.20. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

HD & Giải

a) Với mọi $x > 0$, ta có $\frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{-1} = -2$

b) Với mọi $x < 2$, ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2)\sqrt{2-x} = 0$

- c) Với mọi $x > -1$, ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{x^2 \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2} = 0$
- d) Với mọi $-3 < x < 3$, ta có $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(3-x)(4-x)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Bài 2.21. Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + 1 - x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x}$

HD & Giải

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x - x}{x^2 (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x}} = +\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} (2 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2 + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{(3-x)(9+3x+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}} = 0$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 4}{x-2}} = +\infty$

Bài 2.22. Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 1}{x^2 - x + 2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{2x - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^4 + 1}{x^2 + 4x + 3}$
- d) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{8+2x-2}}{\sqrt{x+2}}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} \sqrt{\frac{x+4}{4-x}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 + x^2} \right)$

HD & Giải

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 1}{x^2 - x + 2}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = -\frac{1}{2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^4 + 1}{x^2 + 4x + 3}$. Với mọi $x < -3$, ta có $\frac{x^4 + 1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{x^4 + 1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+3}$
 Vì $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^4 + 1}{x+1} = -41 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{1}{x+3} = -\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^4 + 1}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{8+2x-2}}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{8+2x-4}{\sqrt{x+2} (\sqrt{8+2x+2})}$
 $= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2(x+2)}{\sqrt{x+2} (\sqrt{8+2x+2})} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{8+2x+2}} = 0$
- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} \sqrt{\frac{x+4}{4-x}}$. Vì $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x+4}{4-x}} = \sqrt{3} > 0$. Nên $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} \sqrt{\frac{x+4}{4-x}} = +\infty$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 + x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{4 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + |x| \sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}} = -\frac{1}{2}$$

Bài 2.23. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{4 - \sqrt{x^2 + 16}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 5x - 1}{1 - x^2 + x^4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - x + 1}}{1 - 2x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$

HD & Giải

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{4 - \sqrt{x^2 + 16}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(4 + \sqrt{x^2 + 16})}{-x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + \sqrt{x^2 + 16}}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = -4$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 5x - 1}{1 - x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + 1} = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - x + 1}}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x} - 2} = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 + 1 - x^2)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - (x + 2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x - 1}{x^2 - 4} = -\infty$

Bài 2.24. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 3x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + x^2 + \dots + x^n - \frac{n}{1 - x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{2 - 3x}$

HD & Giải

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} = 4$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{3x - 2})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} = \frac{1}{16}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = -\infty$ (Vì khi $x \rightarrow 2^+$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$ và $x-2 > 0$ còn $x^2 - 3x + 1 \rightarrow -1$)

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + x^2 + \dots + x^n - \frac{n}{1-x} \right)$. Khi $x \rightarrow 1^-$ thì $|x| < 1$ nên theo tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, ta

có: $x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x}{1-x}$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{n}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-n}{1-x} = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 2$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{2 - 3x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}}{\frac{2}{x} - 3} = \frac{1}{3}$

Bài 2.25. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 10}{x^3 + 6}$

b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 11x + 30}{25 - x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 40}{2x^5 + 7x^4 + 21}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 4x^2 + 3}}{2x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) \sqrt{\frac{x+1}{2x^3 + x^2}}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + 1} - x\sqrt{5})$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$

HD & Giải

a) 2;

b) $\frac{1}{10}$;

c) 1;

d) 0

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 4x^2 + 3}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} \sqrt{2x^4 + 4x^2 + 3}}{2 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2x^2 + 4 + \frac{3}{x^2}}}{2 + \frac{1}{x}} = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) \sqrt{\frac{x+1}{2x^3 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(2x+1)^2(x+1)}{x^2(2x+1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(2x+1)(x+1)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(2 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + 1} - x\sqrt{5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 1} + x\sqrt{5}} = 0$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}{1 + \frac{1}{x}} = 2$

Bài 2.26. Tìm giới hạn các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{3 - \sqrt{x+7}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{\sqrt{x+3} - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1} \right)$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4} + 2}{x-5}$$

HD & Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{3-\sqrt{x+7}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{(3-\sqrt{x+7})(3+\sqrt{x+7})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{2-x} = -\lim_{x \rightarrow 2} (3+\sqrt{x+7}) = -6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+7}-3)(\sqrt{2x+7}+3)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{2x+7}+3)(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{2x+7}+3)} = 2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1})}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1}) = 6$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{x+1} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1(\sqrt{x}+1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{x+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1(\sqrt{x}+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{x+1} + \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x}+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1} \right) = \sqrt{2} \quad (\text{vì } x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x-1 > 0)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1-x}-1)(\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1})}{x(\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(\sqrt{1-x}+1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1})} = -\frac{1}{6}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-2) - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((3x-2) - \sqrt{4x^2 - x - 2})(3x-2 + \sqrt{4x^2 - x - 2})}{(x^2 - 3x + 2)((3x-2) + \sqrt{4x^2 - x - 2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 11x + 6}{(x^2 - 3x + 2)((3x - 2) + \sqrt{4x^2 - x - 2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(5x + 6)}{(x - 1)(x - 2)((3x - 2) + \sqrt{4x^2 - x - 2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x + 6}{(x - 2)((3x - 2) + \sqrt{4x^2 - x - 2})} = \frac{1}{2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x - 1)^2(x + 2)}}{(x - 1)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|\sqrt{(x + 2)}}{(x - 1)(x - 4)} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)\sqrt{(x + 2)}}{(x - 1)(x - 4)} = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x - 1)(x + 2)} - \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1 - (x - 2)}{(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)}{(x + 2)(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{9}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 4} - \sqrt{x + 4} + 2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x - 4} - 1) - (\sqrt{x + 4} - 3)}{x - 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x - 5} \left[\frac{(\sqrt{x - 4} - 1)(\sqrt{x - 4} + 1)}{\sqrt{x - 4} + 1} - \frac{(\sqrt{x + 4} - 3)(\sqrt{x + 4} + 3)}{\sqrt{x + 4} + 3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x - 5} \left[\frac{x - 5}{\sqrt{x - 4} + 1} - \frac{x - 5}{\sqrt{x + 4} + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \left[\frac{1}{\sqrt{x - 4} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x + 4} + 3} \right] = \frac{1}{3}$$

Bài 2.27. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 4} + 3x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x - 3} + 2x - 5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4x + 5}{x^4 - x + 3}$$

HD & Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8x + 8}{(x - 2)^2(x - 1)(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)^2}{(x - 2)^2(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 4} + 3x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x - 3} + 2x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}} + 3x + 1}{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} + 2x - 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}} + 3 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} + 2 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}} + 3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} + 2 - \frac{5}{x}} = \frac{4}{3}$$

Lưu ý: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-4}+3x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}+2x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}-3-\frac{1}{x}\right)}{-\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}-2+\frac{5}{x}\right)} = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3})$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3})(\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt{x^2-7x+3})}{\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt{x^2-7x+3}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(5-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{5}{2}$

Lưu ý:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-\frac{4}{x}}{-\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = -\frac{5}{2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-3x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2-3x-1} = \frac{1}{3}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x^2+4x+5}{x^4-x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{x\left(1-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)} = 0$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.28. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{(x-3)^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4x^4-3}{2x^2+3x-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3})$

Bài 2.29. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right)$$

Bài 2.30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x < 1 \\ mx + 2 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$?

Bài 2.31. Cho hàm số $f(x) = \frac{5 - x}{|x - 5|}$. Tìm các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ (nếu có).

Bài 2.32. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2|x| - 1 & \text{nếu } x \leq -2 \\ \sqrt{2x^2 + 1} & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$. Tìm các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (nếu có).

Bài 2.33. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{(x^2 + 1)(1 - 2x)}{x^2 + x + 1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 11} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 9x - 22}{(x - 11)(x^2 - 3x + 16)}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x} - \sqrt{x^2 - x} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3}{x + 4} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{1 - x}}{x^4 + x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x - 18}{\sqrt{3x - 2} - 2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1 - \sqrt{2x^2 + 9x - 1}}{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10 - x} - 2}{x - 2}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $b - a = 2$.

B. $a + b = 7$.

C. $a \cdot b = 10$.

D. $a - b = 3$.

Câu 2. Tính $G = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$.

A. $G = 0$.

B. $G = -1$.

C. $G = 9$.

D. $G = \frac{9}{2}$.

Câu 3. Tính $P = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

A. $P = -3$.

B. $P = 1$.

C. $P = 0$.

D. $P = -1$.

Câu 4. Tính $M = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = 2$.

C. $M = +\infty$.

D. $M = 0$.

Câu 5. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

A. $S = \frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = \frac{3}{2}$.

D. $S = \frac{5}{2}$.

Câu 6. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a + \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3} \right) = 3$. Tìm a .

- A. $a = 3$. B. $a = -\frac{1}{2}$. C. $a = \frac{5}{2}$. D. $a = \frac{1}{2}$.

Câu 7. Tính $H = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 15}{(x+2)^2}$.

- A. $H = -\infty$. B. $H = +\infty$. C. $H = -1$. D. $H = \frac{1}{16}$.

Câu 8. Tính $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4x + 5}{x^4 - x + 3}$.

- A. $I = -1$. B. $I = 0$. C. $I = 1$. D. $I = 3$.

Câu 9. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 5x - 1}{1 - x^2 + x^4} = a$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - x + 1}}{1 - 2x} = b$. Tính $P = a.b + 1$.

- A. $P = \frac{1}{4}$. B. $P = -2$. C. $P = 2$. D. $P = 1$.

Câu 10. Tên của một người được mã hóa là 6320. Biết rằng mỗi chữ số là giá trị của một trong các biểu thức sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-9}{x^2-1}; H = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - \sqrt{x^2 + 3x}}{x-5} \right); N = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x} - \sqrt{x^2 - 3} \right);$$

$$O = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}; T = \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sqrt{5x+6}}{x-5} \right).$$

Vậy tên của người đó là?

- A. THAN B. HOAN. C. THOA. D. TOAN.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}; & x > 1 \\ mx+2; & x \leq 1 \end{cases}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$? Tìm giới hạn này.

- A. $m = 1; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. B. $m = 2; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.
C. $m = 2; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. D. $m = 1; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Câu 12. Biết $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4} + 2}{x-5} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $u_{10} = a.b^{b-a}$.

- A. $u_{10} = 3$. B. $u_{10} = 18$. C. $u_{10} = 9$. D. $u_{10} = 27$.

Câu 13. Tính $K = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2}$.

- A. $K = +\infty$. B. $K = \frac{2}{3}$. C. $K = 0$. D. $K = -\frac{2}{3}$.

Câu 14. Tính $N = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

- A. $N = +\infty$. B. $N = 6$. C. $N = 9$. D. $N = 0$.

Câu 15. Biết $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + 1 - x} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Biết a, b, x theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm x .

- A. $x = 1$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Câu 16. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$.

A. $L = -\infty$.

B. $L = 2$.

C. $L = 0$.

D. $L = \frac{1}{32}$.

Câu 17. Tính $Q = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$.

A. $Q = 1$.

B. $Q = -\frac{2}{12}$.

C. $Q = \frac{30}{36}$.

D. $Q = 6$.

Câu 18. Biết $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = a$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a = b$.

B. $a > b$.

C. $a + b \geq 4$.

D. $ab = 1$.

Câu 19. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2+1} - x\sqrt{5}) = a$. Tính $\cos a$.

A. $\cos a = \frac{1}{2}$.

B. $\cos a = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\cos a = 1$.

D. $\cos a = 0$.

Câu 20. Tính $E = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$.

A. $E = 2$.

B. $E = \frac{1}{2}$.

C. $E = \frac{3}{4}$.

D. $E = \frac{4}{3}$.

Câu 21. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $2a - b = 3$.

B. $a - 2b = 4$.

C. $2a + b = 12$.

D. $a + 2b = 10$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x+2; & x \geq 1 \\ x^2-3; & x < 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

A. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$.

B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$.

C. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ không tồn tại.

D. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Câu 23. Tính $P = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+2x+1}$.

A. $P = \frac{1}{3}$.

B. $P = \frac{1}{6}$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{1}{4}$.

Câu 24. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} \right)$.

A. $L = 2$.

B. $L = -\frac{1}{2}$.

C. $L = 0$.

D. $L = -2$.

Câu 25. Tính $Q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$.

A. $Q = 0$.

B. $Q = +\infty$.

C. $Q = -\infty$.

D. $Q = -1$.

Câu 26. Biết $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+10}{x^3+6} = a$ và $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+11x+30}{25-x^2} = b$. Tính $S = a + b$.

A. $S = \frac{21}{10}$.

B. $S = \frac{1}{10}$.

C. $S = 2$.

D. $S = \frac{1}{5}$.

Câu 27. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2} = a$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 40}{2x^5 + 7x^4 + 21} = b$. Tính $S = a - b$.

A. $S = \frac{10}{3}$.

B. $S = 1$.

C. $S = 0$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 28. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1} = c$. Tính $H = \frac{c^2}{2} + 1$

A. $H = 3$.

B. $H = -2$.

C. $H = -1$.

D. $H = 4$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1; & x \geq 0 \\ 2x; & x < 0 \end{cases}$ và dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$. Tính $\lim f(u_n)$

A. $\lim f(u_n) = -1$.

B. $\lim f(u_n) = 0$.

C. $\lim f(u_n) = 2$.

D. $\lim f(u_n) = 1$.

Câu 30. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = a$. Tính $P = C_{10}^a + a$

A. $P = 2$.

B. $P = 47$.

C. $P = 45$.

D. $P = 100$.

Câu 31. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1} \right) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $u_{10} = a + 9b$.

A. $u_{10} = 162$.

B. $u_{10} = 27$.

C. $u_{10} = 20$.

D. $u_{10} = 83$.

Câu 32. Tính $F = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x + 7} - 3}$.

A. $F = -6$.

B. $F = -1$.

C. $F = 0$.

D. $F = -\frac{1}{6}$.

Câu 33. Tên của một người được mã hóa là 4359. Biết rằng mỗi chữ số là giá trị của một trong các biểu thức sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 10x} - \sqrt{x^2 - 3}); \quad H = \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt[3]{x^3 - 7} + x); \quad N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 3 \cdot 12^{n+2}}{12^n + 10^n};$$

$$O = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 9}{x^2 - 1}; \quad T = \lim_{x \rightarrow 1} (7 - 3x).$$

Vậy tên của người đó là?

A. THAN.

B. THOA.

C. HOAN.

D. TOAN.

Câu 34. Tính $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{4 - \sqrt{x^2 + 16}}$.

A. $H = -\frac{1}{4}$.

B. $H = 2$.

C. $H = 0$.

D. $H = -4$.

Câu 35. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 4} + 3x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x - 3} + 2x - 5} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b - a = 1$.

B. $a + ab = 12$.

C. $a + b = 7$.

D. $ab - b = 10$.

Câu 36. Tính $J = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2}$.

A. $J = 2$.

B. $J = +\infty$.

C. $J = 0$.

D. $J = -\infty$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3; & x \leq 2 \\ 4x - 3; & x > 2 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

A. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

B. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

C. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ không tồn tại.

D. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

Câu 38. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x + m) = \frac{3}{4}$. Tìm m .

A. $m = 1$.

B. $m = \frac{3}{4}$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Câu 39. Tính $K = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) \sqrt{\frac{x+1}{2x^3 + x^2}}$.

A. $K = \sqrt{2}$.

B. $K = \sqrt{3}$.

C. $K = 2$.

D. $K = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40. Tính $J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$.

A. $J = \frac{1}{3}$.

B. $J = 3$.

C. $J = 0$.

D. $J = -3$.

Câu 41. Biết $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}} = a$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x} = b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a + b = 10$.

B. $ab = 1$.

C. $a < b$.

D. $a - b = 0$.

Câu 42. Tính $E = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}}$.

A. $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $E = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $E = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

D. $E = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 43. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$, và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = \frac{10(1-b^a)}{1-b}$.

A. $S = 7$.

B. $S = 10$.

C. $S = -10$.

D. $S = 5$.

Câu 44. Tính $F = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

A. $F = 0$.

B. $F = 2$.

C. $F = -\infty$.

D. $F = -2$.

Câu 45. Biết $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4} = \tan \alpha$, với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $S = \sin \alpha + \cos \alpha$.

A. $S = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $S = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P = a.b$.

A. $P = 3$.

B. $P = 2$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = 1$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
A	A	B	A	D	C	A	B	C	C	D	C	D	B	B	A	B	A	C	D	D	C	A
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
D	B	A	B	A	D	B	D	A	D	D	C	B	C	C	A	B	C	C	B	D	A	B

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Hàm số liên tục

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó
- $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
- $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
- Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng được biểu thị bởi một “đường liền” trên khoảng đó.

2. Các định lý

Định lý 1

- Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$
- Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Định lý 2.

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $f(x) + g(x), f(x) - g(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại điểm x_0 .
- Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 , nếu $g(x_0) \neq 0$

Định lý 3

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$

Mệnh đề tương đương

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

B. BÀI TẬP

Bài 3.1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x}{x-2}$ tại $x_0 = 3$

HD & Giải

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, do đó xác định trên khoảng $(2; +\infty)$ chứa $x_0 = 3$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-2} = 3 = f(3)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài 3.2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 5 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

HD & Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \neq 1$ thì $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x-1}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Nếu $x = 1$, ta có $f(1) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)}{x - 1} = 2 \neq f(1)$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$, nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

Bài 3.3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 5 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

HD & Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$

Nếu $x = 3$, ta có $f(3) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 1)(x - 3)}{x - 3} = 4 \neq f(3)$

Vì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$, nên hàm số không liên tục tại $x = 3$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$ và gián đoạn tại $x = 3$

Bài 3.4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

HD & Giải

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-1; 1]$. Với mọi $x_0 \in (-1; 1)$, ta có

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x_0^2} = f(x_0)$, nên hàm số liên tục trên khoảng $(-1; 1)$

Ngoài ra, ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$

Do đó $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$

Bài 3.5. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{x + 1}$ liên tục trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$

HD & Giải

Hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$ nếu nó liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$ và

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1)$ Vì với mỗi $x_0 \in (-1; +\infty)$, ta có

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x + 1} = \sqrt{x_0 + 1} = f(x_0)$, nên hàm số liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Ngoài ra, ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x + 1} = 0 = f(-1)$

Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$

Bài 3.6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

HD & Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \neq 2$ thì $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

Nếu $x = 2$, ta có $f(2) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 12 \neq f(2)$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$, nên hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2), (2; +\infty)$ và gián đoạn tại $x = 2$

Bài 3.7. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x > 2 \\ 5 - x & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$ tại $x = 2$

HD & Giải

Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ 5 - x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Ta có $f(2) = 3$. (1)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = 3 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5 - x) = 3 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 = f(2)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 3.8. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1} & \text{nếu } x < 1 \\ -2x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

HD & Giải

Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1} & \text{nếu } x < 1 \\ -2x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Ta có $f(1) = -2$. (1)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(\sqrt{2 - x} + 1)}{1 - x} = -2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x) = -2 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 = f(1)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 3.9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + 1} & \text{nếu } x \neq -1 \\ 1 & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

HD & Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \neq -1$ thì $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + 1}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

Nếu $x = -1$, ta có $f(-1) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = 1$

Vì $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$, nên hàm số liên tục tại $x = -1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.10. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2x - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

HD\>Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 5$

Ta có $f(0) = -5$ và $f(2) = 7$. Do đó $f(0).f(2) < 0$

$y = f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0; 2)$

Bài 3.11. Chứng minh rằng phương trình:

- a) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm
- b) $\cos x = x$ có nghiệm

HD\>Giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn $[0; 1]$ và $[1; 2]$

Mặt khác, ta có

$$f(0) = 1; f(1) = -3 \text{ và } f(2) = 5. \text{ Do đó } f(0).f(1) < 0 \text{ và } f(1).f(2) < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm, một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$, còn nghiệm kia thuộc khoảng $(0; 2)$

b) Xét $f(x) = \cos x - x$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, ta có } f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}. \text{ Do đó } f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 3.12. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^5 - 3x - 7 = 0$ luôn có nghiệm

b) $\cos 2x = 2\sin x - 2$ có ít nhất hai nghiệm thuộc trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \pi\right)$

c) $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có nghiệm dương

d) $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$

HD\>Giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x - 7$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn $[0; 2]$

Mặt khác, ta có

$$f(0) = -7 < 0; f(2) = 19 > 0. \text{ Do đó } f(0).f(2) < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm, một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$

Vậy $f(x) = 0$ luôn có nghiệm.

b) Xét $f(x) = \cos 2x - 2\sin x + 2$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên

các đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ và $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (1). Mặt khác, ta có

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ và } f(\pi) = 3. \text{ Do đó } f\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f(\pi) < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm, một nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$, còn nghiệm kia thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

c) Ta có $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x + 1 = 4 \Leftrightarrow x^3 + 6x - 3 = 0$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 6x - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (1)

Mặt khác, ta có: $f(0) = -3; f(1) = 4$. Do đó $f(0) \cdot f(1) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$

Vậy phương trình $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.

d) Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ chứa trong $[-1; 3]$. Mặt khác, ta có

$f(-1) = 5$ và $f(1) = -1$. Do đó $f(-1) \cdot f(1) < 0$

Suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$ chứa trong khoảng $(-1; 3)$.

Vậy $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$.

Bài 3.13. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm trong khoảng $(-2; 5)$.

b) $x^5 - 5x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm

c) $x^3 + 3x^2 - 4x - 7 = 0$ có nghiệm hay không trong khoảng $(-4; 0)$?

HD & Giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, $[1; 2]$ và $[2; 3]$ chứa trong $[-2; 5]$.

Mặt khác, ta có

$f(0) = -2$ và $f(1) = 1$, $f(2) = -8$ và $f(3) = 13$. Do đó $f(0) \cdot f(1) < 0$, $f(1) \cdot f(2) < 0$ và $f(2) \cdot f(3) < 0$

Suy ra $f(x) = 0$ có ba nghiệm, một nghiệm thuộc trong khoảng $(0; 1)$, một nghiệm thuộc trong khoảng $(1; 2)$ và nghiệm còn lại thuộc trong khoảng $(2; 3)$.

Vậy $f(x) = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-2; 5)$

b) Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x - 1$ tương tự như câu a), trên các đoạn $[-2; -1]$, $[-1; 0]$ và $[0; 3]$

c) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 7$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, vì $f(0) \cdot f(-2) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$. Do đó có nghiệm trong khoảng $(-4; 0)$.

Bài 3.14. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m: $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$

HD & Giải

Xét hàm số $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$, là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên đoạn $[-1; 0]$

Mặt khác, ta có

$f(0) = -1 < 0$ và $f(1) = m^2 + 1 > 0$ nên $f(1) \cdot f(0) < 0$, với mọi m

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc trong khoảng $(-1; 0)$, nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Bài 3.15. Chứng minh rằng phương trình: $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

HD & Giải

Xét hàm số $f(x) = (1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên đoạn $[-2; -1]$. Mặt khác, ta có

$$f(-1) = -1 < 0 \text{ và } f(-2) = m^2 + 2 > 0 \text{ nên } f(-1).f(-2) < 0, \text{ với mọi } m$$

Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc trong khoảng $(-2; -1)$ với mọi m . Nghĩa là phương trình $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Bài 3.16. Chứng minh rằng các phương trình:

- a) $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$
 b) $\sin x = x - 1$ có ít nhất một nghiệm
 c) $x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$ không ?

HD & Giải

a) Hàm số $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên đoạn $[0; \pi]$. Mặt khác, ta có

$f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$ nên $f(0).f(\pi) < 0$. Do đó $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

b) Hàm số $f(x) = \sin x - x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên đoạn $[0; \pi]$. Mặt khác, ta có

$f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi - 1 > 0$ nên $f(0).f(\pi) < 0$. Do đó $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

c) Hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên đoạn $[-1; 0]$. Mặt khác, ta có
 $f(0) = -1 < 0$, $f(-1) = 2 > 0$ nên $f(-1).f(0) < 0$. Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$ chứa trong $(-1; 3)$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$.

Bài 3.17. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{nếu } x < 2 \\ mx + m + 1 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

HD & Giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ta có $f(2) = 3m + 1$. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (mx + m + 1) = 3m + 1 = f(2)$ và

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $3m + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$

Để thấy với mọi m , hàm số f liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$. Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = -\frac{1}{6}$.

Bài 3.18. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

HD & Giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ta có $f(2) = m$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$

Để hàm số f liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Leftrightarrow m = 3$

Vậy $m = 3$ thì hàm số f liên tục tại $x = 2$.

Bài 3.19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{nếu } x > 1 \\ mx+2 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

HD & Giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ta có. $f(1) = m + 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x^2 + x + 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + 2) = m + 2 = f(1)$$

$$\text{Để } f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Bài 3.20. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{nếu } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{nếu } x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{(x-2)^2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 3 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$$

HD & Giải

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}; & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}; & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}. \text{ Hàm số xác định trên } \mathbb{R}$$

Nếu $x \neq \sqrt{2}$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; \sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$

$$\text{Tại } x = \sqrt{2}. \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} = f(\sqrt{2})$$

Do đó hàm số liên tục tại $x = \sqrt{2}$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{(x-2)^2}; & \text{khi } x \neq 2 \\ 3; & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ có tập xác định là } \mathbb{R}$$

Nếu $x \neq 2$ thì $f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ, nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Tại $x = 2$, ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{(x-2)^2} = -\infty \neq f(2)$

Do đó hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = 2$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và gián đoạn tại $x = 2$.

Bài 3.21. Tìm số thực a sao cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x^2 & \text{nếu } x \leq 2 \\ (1-a)x & \text{nếu } x > 2 \end{cases} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}$$

HD & Giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a^2 x^2) = 4a^2 = f(2)$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-a)x = 2(1-a)$

Hàm số f liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $4a^2 = 2(1-a) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$

Hiển nhiên hàm số f liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$ với mọi a

Vậy hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a = -1, a = \frac{1}{2}$

Bài 3.22.

- Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 1000x^2 + 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm
- Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 1000x^2 - 0,01 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương
- CMR với mọi số thực a, b, c , phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm

HD & Giải

a) Hàm số $f(x) = x^3 + 1000x^2 + 0,1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(0) = 0,1 > 0$. Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại một số thực a sao cho $f(a) < 0$

Vì $f(0).f(a) < 0$ nên, theo hệ quả của định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $c \in (a; 0)$ sao cho $f(c) = 0$. Vậy $x = c$ là một nghiệm âm của phương trình đã cho.

b) Hàm số $f(x) = x^3 - 1000x^2 - 0,01$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(0) = -0,01 < 0$. Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại một số thực b đủ lớn sao cho $f(b) > 0$

Vì $f(0).f(b) < 0$ nên, theo hệ quả của định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $c \in (0; b)$ sao cho $f(c) = 0$. Vậy $x = c$ là một nghiệm dương của phương trình đã cho.

c) Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi số thực a, b, c .

Bài 3.23. Tìm các giá trị của a và b để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & \text{nếu } x \leq 1 \\ 3x & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ bx^2 - a & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases} \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ và gián đoạn tại } x = 2.$$

HD & Giải

Hàm số liên tục tại $x = 1$ và gián đoạn tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ 4b - a \neq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ b \neq 3 \end{cases}$$

Bài 3.24. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m^2x & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

HD & Giải

Ta có $f(1) = m^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$

Để hàm số liên tục tại $x = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 3.25. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^2 + x + 3 + \frac{1}{x-2}$ liên tục trên tập xác định của nó.

Bài 3.26. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

Bài 3.27. Chứng minh rằng các phương trình $m(2 \cos x - \sqrt{2}) = 2 \sin 5x + 1$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Bài 3.28. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^5 + x^2}{x^2 + x} & \text{nếu } x \neq 1 \text{ và } x \neq 0 \\ -3 & \text{nếu } x = -1 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Bài 3.29. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 3.30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ (m-1)x & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Bài 3.31. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6x+7}-x}{x^2-8x+7} & \text{nếu } x > 7 \\ 2ax^2 - 6ax + 1 & \text{nếu } x \leq 7 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 7$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}; & x \neq 0 \\ m; & x = 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ liên tục tại

điểm $x = 0$?

A. $m = 3$.

B. $m = 5$.

C. $m = 4$.

D. $m = 6$.

Câu 2. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} & \text{khi } x > 2 \text{ và } x \neq 3 \\ m^2 x^2 - 3mx - 5 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$

liên tục tại $x_0 = 2$.

A. $m = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{4}$.

B. $m = \frac{3}{2}$.

C. $m = \frac{4 \pm \sqrt{21}}{3}$.

D. $m = 3 \pm \sqrt{21}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

B. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a; b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Câu 4. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{với } x < 2 \\ mx + m + 1 & \text{với } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = -\frac{1}{6}$.

B. $m = -1$.

C. $m = 6$.

D. $m = 4$.

Câu 5. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} & \text{với } x \neq 1 \\ m^2 x & \text{với } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m \neq \pm \frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = -\frac{1}{2}$.

D. $m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 6. Tìm số thực a sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2 x^2 & \text{nếu } x \leq 2 \\ (1-a)x & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a = -1, a = 1$.

B. $a = -1, a = \frac{1}{2}$.

C. $a = 1, a = \frac{1}{2}$.

D. $a = -1, a = 2$.

Câu 7. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

A. Hàm số $y = \tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = x + \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

D. Phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

Câu 8. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$ (1). Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.
 B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.
 C. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.
 D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{với } x > 1 \\ mx+2 & \text{với } x \leq 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

- A. $m=1$. B. $m=-1$. C. $m=-2$. D. $m=-3$.

Câu 10. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{với } x \neq 2 \\ m & \text{với } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

- A. $m=0$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m=3$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 2 \\ -1 & \text{khi } x = -1 \\ 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số gián đoạn tại $x=2$.
 C. Hàm số liên tục trên khoảng $(-2;3)$. D. Hàm số gián đoạn tại $x=-1; x=2$.

Câu 12. Tìm các giá trị của a và b để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax-b & \text{với } x \leq 1 \\ 3x & \text{với } 1 < x < 2 \\ bx^2-a & \text{với } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$ và gián đoạn tại $x=2$.

- A. $\begin{cases} b=a+3 \\ a \neq 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} b=a+3 \\ b \neq 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a=b+3 \\ b \neq 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a=b-3 \\ b \neq 3 \end{cases}$.

Câu 13. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

- A. Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
 B. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0 , còn hàm số $y=g(x)$ không liên tục tại x_0 thì $y=f(x)+g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0 .
 C. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0 , còn hàm số $y=g(x)$ không liên tục tại x_0 thì $y=f(x)+g(x)$ là hàm số không liên tục tại x_0 .
 D. Nếu hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì hàm số $y=f(x)-g(x)$ liên tục tại x_0 .

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ x^2+x-1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tìm giá trị của a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $a=3$. B. $a=4$. C. $a=\frac{5}{4}$. D. $a=\frac{2}{3}$.

Câu 15. Cho $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+a & \text{khi } x > 2 \\ 2a+1 & \text{khi } x = 2 \\ bx-3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên tại $x=2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a+b$.

- A. $S=16$. B. $S=14$. C. $S=15$. D. $S=17$.

Câu 16. Tìm tham số thực m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ x^2 m^2 + m + x^3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m \neq \pm \frac{1}{2}$.

C. $m \in \emptyset$

D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x \cos x & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1. \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x = 0$; $x = 1$.

B. mọi điểm trừ $x = 1$.

C. mọi điểm trừ $x = 0$.

D. mọi điểm thuộc $x \in \mathbb{R}$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4; +\infty)$ với $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x \neq 0$. Tính $f(0)$.

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$, Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm trừ $x = 1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ với mọi $x \neq 1$. Tính $f(1)$.

A. 2.

B. -1.

C. 1.

D. 0.

Câu 22. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; +\infty)$.

B. $x = 0$

C. $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 23. Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x = -1$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

D. mọi điểm trừ $x = 0, x = 1$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = 2, f(4) = 7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1; 4]$:

- A. Có đúng một nghiệm.
C. Có ít nhất một nghiệm.

- B. Có đúng hai nghiệm.
D. Vô nghiệm.

Câu 25. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.
B. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.
D. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.

Câu 26. Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ là:

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 27. Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (với a là tham số). Khẳng định

nào dưới đây về giá trị a là đúng?

- A. $a < 0$. B. a là một số nguyên. C. a là một số vô tỉ. D. $a > 5$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm trừ $x = 1$ và $x = 3$.
C. mọi điểm trừ $x = 3$.
B. mọi điểm trừ $x = 1$.
D. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

Câu 29. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 30. Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- A. $k = -\frac{1}{2}$. B. $k = 2$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = 0$.

Câu 31. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại

$x = 1$.

- A. $m = 4$. B. $m = 6$. C. $m = 0$. D. $m = 2$.

Câu 32. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số

$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} & \text{khi } x \neq \pi \\ m & \text{khi } x = \pi \end{cases}$ liên tục tại $x = \pi$.

- A. $m = \frac{\pi}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 33. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$?

A. 4.

B. 18.

C. 19.

D. 3.

Câu 34. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$ (với m là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m \in [0;5)$.B. $m \in [5;+\infty)$.C. $m \leq -3$.D. $m \in (-3;0)$.

Câu 35. Hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

A. $[-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.B. $[-4;3)$.C. $[-4;3]$.D. $(-4;3]$.

Câu 36. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3} - x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 - a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A. $\frac{4}{3}$.B. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.D. $-\frac{4}{3}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên m với $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x}$ với $x \neq 0$. Tính $f(0)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. 1.

D. 0.

Câu 38. Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $a_{\max} = 2$.B. $a_{\max} = 0$.C. $a_{\max} = 3$.D. $a_{\max} = 1$.

Câu 39. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0;4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4;6] \end{cases}$ tục trên $[0;6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m < 2$.B. $2 \leq m < 3$.C. $3 < m < 5$.D. $m \geq 5$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.B. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.C. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.D. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 41. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.C. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.D. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

Câu 42. Hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x \cos x + \sin x}{2 \sin x + 3}$ liên tục trên:

A. $\mathbb{R}$.B. $[1; 5]$.C. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.D. $[-1; 1]$.

Câu 43. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $m \in [7; +\infty)$.B. $m \leq -2$.C. $m \in (-2; -1)$.D. $m \in [-1; 7)$.

Câu 44. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 45. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.B. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.C. $f(x)$ không liên tục trên $(0; 2)$.D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 47. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

liên tục tại $x = 1$.

A. $m = -\pi$.B. $m = \pi$.C. $m = -1$.D. $m = 1$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0.

B. 1.

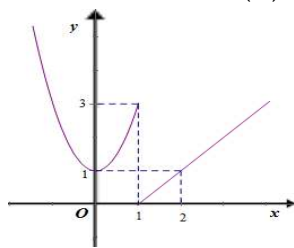
C. 2.

D. 3.

Câu 49. Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2 x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $S = 0$.B. $S = -1$.C. $S = 1$.D. $S = 2$.

Câu 50. Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên **không** liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?

A. $x = 0$.B. $x = 1$.C. $x = 2$.D. $x = 3$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
D	A	C	A	D	B	A	D	B	D	B	C	B	C	A	C	
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
B	D	B	A	B	D	C	C	C	C	B	A	D	A	C	C	A
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	D	B	A	D	A	B	C	A	D	D	B	B	A	D	A	B

GV. Lư Sĩ Pháp

ÔN TẬP CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{n} + \frac{\cos n}{4^n} \right)$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$$

HD & Giải

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \left(2 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{1}{n^3} - 4 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - 4} = -\frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{n} + \frac{\cos n}{4^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{4^n}$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$. $\left| \frac{\cos n}{4^n} \right| \leq \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4} \right)^n$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{4^n} = 0$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{n} + \frac{\cos n}{4^n} \right) = 2$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 3 \text{ (vì } \left| \frac{(-1)^n}{3^n} \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty)$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim \left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n - 1} \right)$$

$$b) \lim \frac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3}$$

$$c) \lim \sqrt[3]{n^9 + 8n^2 - 7}$$

$$d) \lim \frac{5^n - 7^n}{3^n + 2 \cdot 7^n}$$

HD & Giải

$$a) \lim \left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n - 1} \right) = \lim \frac{n^2 + 3n + 1 - (n^2 + 2n - 1)}{\sqrt{n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}}$$

$$= \lim \frac{n + 2}{\sqrt{n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}} = \lim \frac{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \right)}$$

$$= \lim \frac{1 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim \frac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3} = \lim \frac{n^2 \sqrt{1 - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}}}{n^2 \left(-2 + \frac{3}{n^2} \right)} = \lim \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}}}{-2 + \frac{3}{n^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$c) \lim \sqrt[3]{n^9 + 8n^2 - 7} = \lim n^3 \sqrt[3]{1 + \frac{8}{n^7} - \frac{7}{n^9}} = +\infty \text{ (vì } \lim n = +\infty; \lim \sqrt[3]{1 + \frac{8}{n^7} - \frac{7}{n^9}} = 1 > 0)$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 7^n}{3^n + 2 \cdot 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^n}{7^n} - 1}{\frac{3^n}{7^n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + 2} = -\frac{1}{2}$$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2} - 3}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x-2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}}$$

HD&Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1} = \frac{4 \cdot 1^5 + 9 \cdot 1 + 7}{3 \cdot 1^6 + 1^3 + 1} = 4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 5x + 1)}{(x-2)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2x + 3} = \frac{15}{11}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3-3x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2} - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+4x^2}{x(\sqrt{9+5x+4x^2}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5+4x}{\sqrt{9+5x+4x^2}+3} = \frac{5}{6}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(10-x)^2} + 2\sqrt[3]{10-x} + 4\right)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(10-x)^2} + 2\sqrt[3]{10-x} + 4} = -\frac{1}{12}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(1-x)(\sqrt{5-x} + \sqrt{7x-3})}{8(1-x)(\sqrt{x+8} + \sqrt{8x+1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(\sqrt{5-x} + \sqrt{7x-3})}{8(\sqrt{x+8} + \sqrt{8x+1})} = \frac{7}{12}$$

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2+x+1} - x\sqrt{3})$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3 - \sqrt{6x-x^2}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$$

HD&Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = -\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x + 1} - x\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{3x^2 + x + 1} + x\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(3+\sqrt{6x-x^2})}{(3-\sqrt{6x-x^2})(3+\sqrt{6x-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3+\sqrt{6x-x^2}}{x-3}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^-} (3+\sqrt{6x-x^2}) = 6 > 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0$ và $x-3 < 0$ với mọi $x < 3$

Do vậy $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}} = -\infty$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4x+12}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x-6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{(1-x)(\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x-6})} = -\frac{1}{3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{3}{2}$$

Bài 5. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2+11x+18}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3-27}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

HD & Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2+11x+18} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+9)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x+4}{x+9} = \frac{12}{7}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2+x+1)}{(x-3)(4x^2-x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1} = \frac{11}{17}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3-27}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+9x+27) = 27$$

$$d) \text{Ta có } \frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x} = \frac{|x|\sqrt{3+x^2}}{2x}$$

Với $x < 0$, $\frac{|x|\sqrt{3+x^2}}{2x} = \frac{-x\sqrt{3+x^2}}{2x}$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Với $x > 0$, $\frac{|x|\sqrt{3+x^2}}{2x} = \frac{x\sqrt{3+x^2}}{2x}$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Từ đó suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$

$$e) \text{ Khi } x \rightarrow (-2)^+ \text{ thì } |x+2| = x+2. \text{ Do đó } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x|x+2|}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{x+1} = 2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-2}{x^2+x+1} = -1$$

Bài 6. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right|$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{9 - x^2}{2x^2 + 7x + 3} \right|$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - |x-1|}{|x-2| - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3 + x^2 + 2}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-1} \right)$$

HD & Giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} = \frac{2-x}{x} \text{ với mọi } x \neq -3 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2-x}{x} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right| = \left| -\frac{5}{3} \right| = \frac{5}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{9 - x^2}{2x^2 + 7x + 3} \right| = \frac{6}{5}$$

$$c) \text{ Với } x > 2, \text{ ta có } |x-1| = x-1 \text{ và } |x-2| = x-2.$$

$$\text{Do đó } \frac{3 - |x-1|}{|x-2| - 2} = \frac{3 - x + 1}{x - 2 - 2} = \frac{4-x}{x-4} = -1 \text{ với } x > 2 \text{ và } x \neq 4$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - |x-1|}{|x-2| - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} (-1) = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3 + x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^3 + x^2}{3x^3 + x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x} - 1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1})}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x} + 1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1})} = \frac{1}{6}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x + x - \sqrt[3]{x^3-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} + \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \right) = 0$$

Bài 7. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} & \text{nếu } x < 1 \\ mx + m + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

HD&Giải

Ta có $f(1) = 2m + 1$. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx + m + 1) = 2m + 1 = f(1)$ và

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x} = -1$$

Để hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $2m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -1$

Để thấy với mọi m , hàm số f liên tục tại mọi điểm $x \neq 1$. Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = -1$.

Bài 8. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

HD&Giải

Ta có $f(1) = m$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$

Để hàm số f liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow m = 3$

Vậy $m = 3$ thì hàm số f liên tục tại $x = 1$.

Bài 9. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

HD&Giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 6$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn $[1; 2]$ (1)

Mặt khác, ta có $f(1) = -3 < 0$; $f(2) = 8 > 0$. Do đó $f(1).f(2) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 10. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim (2^n - 2n + 3)$

b) $\lim (\sqrt{n^4 + 2n^2} - n^2)$

c) $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 - n}}{2n - 1} + \frac{2^n \cos n}{3^n} \right)$

d) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - n} + \sqrt[3]{8n^3 + n^2}}{2n + 3}$

e) $\lim \frac{2^{2n+1} (3^{n+2} - 5)}{3^{n-1} (2 + 4^{n+2})}$

f) $\lim \frac{3^n \cdot 4^{n+2} + 2^{n+2}}{2^{n-1} \cdot 6^{n-2} - 3}$

Bài 11. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

b) $\lim (\sqrt[3]{1+n^3} - n)$

c) $\lim (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n)$

d) $\lim n^2 (n - \sqrt{n^2 + 1})$

e) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3 + n} - n}$

f) $\lim \left(n - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1 - 4n}{2n^2} \right)$

Bài 12. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3} - 5x)$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{(x-2)(x^2-x-2)}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{4x-9}}{(x-3)(x^2-2x-3)}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$$

Bài 13. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} - 1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x} \right)$$

Bài 14. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 4x + 1 \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - 3 + \sqrt{4x^2 + 7x - 9} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{1-x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6x - 5 - \sqrt{36x^2 - 4x - 5} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4 \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x + 1 - \sqrt{9x^2 + 2x} \right)$$

Bài 15. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x} - 1 + 3x \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{36x^2 - 24x} - 6x + 2 \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{4x^2 + x - 20}{3x + 9}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 3x + 5} + 3x - 4 \right)$$

Bài 16. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{2x^2 + x - 20}{2x + 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 5} + 2x - 4 \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x^3 + 3x - 4 \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4x - 36 + \sqrt{4x^2 - 12x} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + x + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 5} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 3x + 5} + \sqrt[3]{27x^3 + x + 1} \right)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x + 4}{x + 4 - \sqrt{x + 6}}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt[3]{x^2+4}}{x^2-4}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$$

Bài 17. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4 & \text{nếu } x = 2 \\ \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } x \neq 2 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định của nó.

Bài 18. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x^2 + 5x + 7 = 0$ luôn có nghiệm.

Bài 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{nếu } x > 1 \\ m^2x + 2mx + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số

$f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2x^2 - mx + 4 & \text{nếu } x = 2 \\ \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } x \neq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 5x + 4} & \text{nếu } x > 1 \\ -2x + 1 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại $x = 1$.

Bài 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^2 - 3x + 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5x + 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại $x = 2$.

Bài 23. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + 1} & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ tại $x = -1$

Bài 24. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x > -2 \\ \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^3 + 8} & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ tại $x = -2$

Bài 25. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^3 - 2x + 1} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

Bài 26. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + \sqrt{x+2}} & \text{khi } x > -1 \\ \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x - 2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ tại $x = -1$

Bài 27. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 7^n}{4^n + 2 \cdot 5^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 1} + n}{2n + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 2x}}{3x^2 + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - 2}{x-1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^3 - 11x^2 + 7x - 3}{5x^3 - 19x^2 + 14x - 6}$

g) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x^2 - 16} - \frac{1}{x - 4} \right)$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$

Bài 28. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(2-3n)^2}{n^3 + 8}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+3} - 2^{2n+1}}{4^{n-2} + 3^n}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11x - 10}{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+4} - 5}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 5x - 3}{\sqrt{5x+6} + x}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x - 5}{\sqrt[3]{8x^3 - x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 12x + 3} - 15)$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5x} + x - 3}{2x + 3 - \sqrt{4x^2 - 7}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4}{x^3 - x^2 - x + 1}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + \sqrt{x^2 - 2x})$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x + 4 - \sqrt{5x + 26}}$

Bài 29. Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{1 - 8x^3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(6x^2 + 4)^3 (3x^2 - 5)^4}{(9x^4 - 2)^2 (8x^3 + 2)^2} \right)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2 + \sqrt{x^2 + 3x})$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{x-2}}{x^2 - 1}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+8}}{2x^2 + x}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{27x^3 - 1}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(3x^3 - 4)^2 (5x^2 + 1)^4}{(4x^4 - 2)^2 (7x^2 + 2)^3} \right)$$

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (3^{n-1} - 5 \cdot 2^n)}{3^{n-1} (2^n + 4)}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt[3]{3x+18}}{x-3}$$

Bài 30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} m & \text{khi } x = 2 \\ \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4} & \text{khi } x \neq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số

$f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 31. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 - mx + 4 & \text{khi } x = 2 \\ \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi } x \neq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số

$f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 32. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 x + 2mx + 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{6x-3}}{4-x^2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2 x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{4} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 34. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^3-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 x^2 - 4x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 35. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 3}{x} & \text{khi } x > 0 \\ (1+x)m^2 + (1-2x)m - \frac{5}{4} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại

$x = 0$.

Bài 36. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+4} - 5}{x} & \text{khi } x > 0 \\ (1-x)m^2 + (2x-1)m - \frac{19}{12} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại

$x = 0$.

Bài 37. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^3 - x^2 - x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{3m-5}{2x+3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 38.

- a) Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.
 b) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3x^2 - 4x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm.
 c) Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.
 d) Chứng minh rằng phương trình $16x^4 - 16x^3 + 19x^2 - 16x + 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.
 e) Chứng minh rằng các phương trình: $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.
 f) Chứng minh rằng các phương trình: $\sin x = x - 1$ có ít nhất một nghiệm có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.
 g) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.
 h) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Bài 39.

- a) Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$ b) Tính $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \dots$
 c) Tính tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n-1}}, \dots$ d) Tính $S = 1 + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{9^{n-1}} + \dots \right)$
 e) Tính tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ f) Tính $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$
 g) Tính $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) + \dots$ h) Tính $S = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \frac{16}{27} - \frac{32}{81} + \dots$
 k) Tìm tổng cấp số nhân $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ l) Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \dots$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính $P = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -\frac{1}{4}$.

C. $P = \frac{1}{3}$.

D. $P = \frac{1}{6}$.

Câu 2. Tính $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{4n^2 - 2}}{n + 3}$.

A. $J = -2$.

B. $J = -\frac{1}{3}$.

C. $J = 0$.

D. $J = -1$.

Câu 3. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2 + 2} - \sqrt{2 - 2x}}{x} = \frac{a\sqrt{2}}{b}$, ($\frac{a}{b}$ tối giản). Tính $S = a + b$.

A. $S = 5$.

B. $S = -2$.

C. $S = 1$.

D. $S = 3$.

Câu 4. Tính $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n^2 - 3n^2}{n^2}$.

A. $J = 0$.

B. $J = 2$.

C. $J = -3$.

D. $J = 3$.

Câu 5. Biết $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 10}{x^3 + 6} = a$ và $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 11x + 30}{25 - x^2} = b$. Tính $S = a + b$.

A. $S = \frac{1}{5}$.

B. $S = \frac{1}{10}$.

C. $S = 2$.

D. $S = \frac{21}{10}$.

Câu 6. Tính $P = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10 - x} - 2}{x - 2}$.

A. $P = -\frac{1}{12}$.

B. $P = \frac{1}{12}$.

C. $P = 2$.

D. $P = \frac{1}{24}$.

Câu 7. Tính $H = \lim \left(n - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1-4n}{2n^2} \right)$.

A. $H = -2$.

B. $H = -\frac{1}{2}$.

C. $H = 2$.

D. $H = +\infty$.

Câu 8. Tính $E = \lim \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

A. $E = 1$.

B. $E = 0$.

C. $E = \frac{1}{2}$.

D. $E = -\frac{1}{2}$.

Câu 9. Tính $N = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$.

A. $N = \frac{1}{32}$.

B. $N = -\infty$.

C. $N = 2$.

D. $N = 0$.

Câu 10. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4+5x-1}{1-x^2+x^4} = a$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2-x+1}}{1-2x} = b$. Tính $P = a.b+1$.

A. $P = -2$.

B. $P = 2$.

C. $P = 1$.

D. $P = \frac{1}{4}$.

Câu 11. Tính $N = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

A. $N = \frac{2}{3}$.

B. $N = 1$.

C. $N = -3$.

D. $N = -\frac{1}{3}$.

Câu 12. Biết $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=5$.

B. $2a-b=1$.

C. $ab+1=6$.

D. $b-a=1$.

Câu 13. Tính $P = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

A. $P = -3$.

B. $P = 0$.

C. $P = -1$.

D. $P = 1$.

Câu 14. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào có giới hạn là $+\infty$?

A. $\lim \frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$.

B. $\lim \frac{n^2-3n+2}{n^2+n}$.

C. $\lim \frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$.

D. $\lim \frac{n^2-n+1}{2n-1}$.

Câu 15. Cho (u_n) và (v_n) là hai dãy số có giới hạn. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim u_n}$.

B. $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

C. $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{\lim u_n}$.

D. $\lim \sqrt{v_n} = \sqrt{\lim v_n}$.

Câu 16. Cho phương trình $-4x^3+4x-1=0$ (1). Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?A. Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(-2;0)$.B. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.C. Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.D. Hàm số $f(x) = 4x^3+4x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.Câu 17. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\dots$ được biểu diễn bởi một phân số nào dưới đây?

A. $\frac{47}{90}$.

B. $\frac{46}{90}$.

C. $\frac{6}{11}$.

D. $\frac{43}{90}$.

Câu 18. Tính $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n(-1)^n}{1 + 2n^2}$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = -2$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 19. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là 0 ?

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}$.

B. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+5}{x+10}$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$.

D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Câu 20. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$.

A. $L = 0$.

B. $L = 2$.

C. $L = 8$.

D. $L = -3$.

Câu 21. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n+1}{2n-1}$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n+2}{n^2+n}$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$.

Câu 22. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt[3]{x^2+4}}{x^2-4}$.

A. $I = -\frac{1}{48}$.

B. $I = -\frac{7}{48}$.

C. $I = \frac{7}{48}$.

D. $I = -7$.

Câu 23. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

A. Phương trình $x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$.

B. Hàm số $y = x + \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

D. Hàm số $y = \cot x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 24. Tính $M = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1+n^3} - n)$.

A. $M = +\infty$.

B. $M = 2$.

C. $M = 0$.

D. $M = 3$.

Câu 25. Tính $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^3+1}{n^3+n^2}$.

A. $L = -\frac{1}{3}$.

B. $L = 3$.

C. $L = 0$.

D. $L = -3$.

Câu 26. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

A. Hàm số $y = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

B. Phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

C. Hàm số $y = \tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y = x + \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 27. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}) = a, a \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a^2 + a + 1$.

A. $S = 1$.

B. $S = \frac{7}{4}$.

C. $S = \frac{1}{2}$.

D. $S = \frac{3}{2}$.

Câu 28. Cho phương trình $x^3 + 3x^2 - 4x - 7 = 0$ (1). Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai ?

A. Phương trình (1) ít nhất nghiệm trong khoảng $(1; 3)$.

- B.** Phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $(-4;0)$.
C. Hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 7$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
D. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

Câu 29. Tính $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-3n)^3 (n+1)^2}{1-4n^5}$, bằng.

- A.** $M = -\frac{27}{4}$. **B.** $M = -\frac{3}{4}$. **C.** $M = \frac{27}{4}$. **D.** $M = \frac{3}{4}$.

Câu 30. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\frac{3}{4}$ và số hạng đầu là một số dương.

- A.** $u_1 = 3; q = \frac{3}{4}$. **B.** $u_1 = 3; q = \frac{1}{4}$. **C.** $u_1 = 1; q = \frac{3}{4}$. **D.** $u_1 = 3; q = 3$.

Câu 31. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào liên tục tại $x = 1$.

- A.** $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-6x+5}$. **B.** $f(x) = \sqrt{1-2x}$.
C. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+4}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ 3x+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. **D.** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Câu 32. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.** $2a+b=12$. **B.** $2a-b=3$. **C.** $a+2b=10$. **D.** $a-2b=4$.

Câu 33. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là 0 ?

- A.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$. **B.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+1}{3 \cdot 2^n-3^n}$.
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+3}{1-2^n}$. **D.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^3}{n^2+2n}$.

Câu 34. Tính $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^{n+2}(5-3^{2n-3})}{(2^{2n+1}-1)(2-9^{n-2})}$.

- A.** $L = 24$. **B.** $L = 4$. **C.** $L = 16$. **D.** $L = 36$.

Câu 35. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$.

- A.** $L = -\infty$. **B.** $L = 2$. **C.** $L = 0$. **D.** $L = \frac{1}{32}$.

Câu 36. Tính $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{4n^2-n} + \sqrt[3]{8n^3+n^2}}{2n+3} \right)$.

- A.** $K = 1$. **B.** $K = 2$. **C.** $K = 4$. **D.** $K = 3$.

Câu 37. Tính $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2\sqrt{n}}{2n}$.

- A.** $K = 2$. **B.** $K = -\frac{1}{2}$. **C.** $K = \frac{1}{2}$. **D.** $K = -1$.

Câu 38. Tìm tham số m để hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{2x^2 - 5x + 2} & \text{khi } x > 2 \\ (m-2)x^3 - mx + 10 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$

A. $m = \frac{5}{18}$.

B. $m = \frac{103}{108}$.

C. $m = -\frac{5}{18}$.

D. $m = -\frac{103}{108}$.

Câu 39. Biết $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 + bx + 1}{cx^2 + dx + 1}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $P = abcd$.

A. $P = 6$.

B. $P = 4$.

C. $P = -2$.

D. $P = -8$.

Câu 40. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1} \right) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $u_{10} = a + 9b$.

A. $u_{10} = 162$.

B. $u_{10} = 27$.

C. $u_{10} = 20$.

D. $u_{10} = 83$.

Câu 41. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^3}{x^2 + 2x}$.

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)(n-3)^2}{n - 2n^3}$.

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$.

D. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{x-1}$.

Câu 42. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

A. $L = 4$.

B. $L = 0$.

C. $L = -1$.

D. $L = -\frac{1}{2}$.

Câu 43. Tính $G = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(10 - \frac{2 \sin n^2}{\sqrt{n}} \right)$.

A. $G = +\infty$.

B. $G = 0$.

C. $G = 10$.

D. $G = 9$.

Câu 44. Tính tổng S của cấp số nhân vô hạn $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots$

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = -1$.

C. $S = -\frac{1}{4}$.

D. $S = -\frac{1}{3}$.

Câu 45. Biết $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = a$. Tính $H = P_a + A_a^a + C_a^a$

A. $H = 55$.

B. $H = 105$.

C. $H = 3$.

D. $H = 9$.

Câu 46. Tính $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n+1} + 2(-5)^n}{6^{n-2} - 3}$.

A. $M = 108$.

B. $M = 102$.

C. $M = 1$.

D. $M = \frac{1}{6}$.

Câu 47. Tính $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right)$.

A. $P = \frac{1}{3}$.

B. $P = 2$.

C. $P = 0$.

D. $P = -3$.

Câu 48. Biết $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n (\sqrt{3})^n}{3 \cdot 2^{n+1}} \right) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a^2 - b^2$.

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = -1$.

C. $S = -3$.

D. $S = 3$.

Câu 49. Cho $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & \text{khi } x > 2 \\ 2a + 1 & \text{khi } x = 2 \\ bx - 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên tại $x = 2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 17$.

B. $S = 16$.

C. $S = 14$.

D. $S = 15$.

Câu 50. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $ab = 4$.

B. $a + b = 7$.

C. $a + 3b = 5$.

D. $b - 2a = 3$.

Câu 51. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

A. $S = \frac{35}{3}$.

B. $S = \frac{27}{2}$.

C. $S = \frac{7}{2}$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 52. Tính $N = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

A. $N = 0$.

B. $N = +\infty$.

C. $N = 6$.

D. $N = 9$.

Câu 53. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x+3)^3 - 27}{x} + m \right) = 27$. Tìm m .

A. $m = -9$.

B. $m = 1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 27$.

Câu 54. Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots$

A. $S = 2\sqrt{2}$.

B. $S = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

C. $S = \sqrt{2} + 1$.

D. $S = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

Câu 55. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$.

A. $I = 4$.

B. $I = 2$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = 8$.

Câu 56. Tính $J = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$.

A. $J = 15$.

B. $J = \frac{15}{10}$.

C. $J = \frac{15}{11}$.

D. $J = \frac{11}{15}$.

Câu 57. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $b - a = 1$.

B. $a + b = 9$.

C. $2a + b = 12$.

D. $ab + 2 = 10$.

Câu 58. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + n}{2n + 1} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $ab + 4 = 10$.

B. $2b - a = -1$.

C. $a + b = 5$.

D. $a - 2b = -1$.

Câu 59. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x_0 = 1$?

A. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$.

B. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9x + 8}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -7 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

C. $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x^2 + x - 3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

D. $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

Câu 60. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $b - a = 2$.

B. $a + b = 7$.

C. $a \cdot b = 10$.

D. $a - b = 3$.

Câu 61. Đoàn trường tổ chức trò chơi lớn, tên của một đồng chí trạm trưởng được mã hóa bởi số 1234. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, O, H, T, N, U với:

$$A = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{3n+4}{n-2} \quad O = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x-1} \quad H = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x+2}$$

$$T = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2} \quad N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{n} + \frac{\cos n}{3^n} \right) \quad U = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

Hãy cho biết tên của đồng chí trạm trưởng này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các chữ kí hiệu biểu thức tương ứng.

A. HUAN.

B. TOAN.

C. THOA.

D. TUAN.

Câu 62. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{với } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng ?

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$.B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc đoạn $[0; 1]$.C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.D. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

Câu 63. Tính $K = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) \sqrt{\frac{x+1}{2x^3+x^2}}$.

A. $K = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $K = \sqrt{2}$.

C. $K = \sqrt{3}$.

D. $K = 2$.

Câu 64. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

A. $S = \frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = \frac{3}{2}$.

D. $S = \frac{5}{2}$.

Câu 65. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

A. Hàm số đa thức liên tục trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$.B. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}, |q| < 1$.C. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = \frac{u_1}{1-q}, |q| < 1$.D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Câu 66. Tính tổng $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$

A. $S = \frac{9}{10}$.

B. $S = 9$.

C. $S = 10$.

D. $S = 11$.

Câu 67. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)^3 - 8}{x^2 + x} & \text{nếu } x \neq 0, x \neq -1 \\ x^2 - 2x + 12 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là sai ?

A. $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

B. Hàm số gián đoạn tại $x = 0$

C. Hàm số liên tục tại $x = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{x^2 + x} = 12$

Câu 68. Tính $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{4 - \sqrt{x^2 + 16}}$.

A. $H = -\frac{1}{4}$.

B. $H = 2$.

C. $H = 0$.

D. $H = -4$.

Câu 69. Tính tổng S cấp số nhân $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$

A. $S = \frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{3}{2}$.

C. $S = \frac{3}{8}$.

D. $S = \frac{3}{4}$.

Câu 70. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

A. $\begin{cases} q = \frac{2}{5} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} q = \frac{5}{2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} q = \frac{2}{5} \\ u_1 = 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} q = \frac{5}{2} \\ u_1 = 2 \end{cases}$

Câu 71. Tính $Q = \lim (5^n - \cos \sqrt{n}\pi)$.

A. $Q = +\infty$.

B. $Q = 1$.

C. $Q = 0$.

D. $Q = -1$.

Câu 72. Biết $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4} = \tan \alpha$, với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $S = \sin \alpha + \cos \alpha$.

A. $S = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $S = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

C. $S = \frac{1}{2}$.

D. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 73. Tính $K = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - |x - 1|}{|x - 2| - 2}$.

A. $K = -1$.

B. $K = 1$.

C. $K = 0$.

D. $K = 4$.

Câu 74. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + 1} - x\sqrt{5}) = a$. Tính $\cos a$.

A. $\cos a = \frac{1}{2}$.

B. $\cos a = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\cos a = 1$.

D. $\cos a = 0$.

Câu 75. Tính $L = \lim \frac{1}{n!}$.

A. $L = 0$.

B. $L = 1$.

C. $L = \frac{1}{1000}$.

D. $L = \frac{1}{10^9}$.

Câu 76. Tính $Q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \sqrt{9x^2 + 4x})$.

A. $Q = -1$.

B. $Q = 0$.

C. $Q = -\infty$.

D. $Q = +\infty$.

Câu 77. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,780780780\dots$ dưới dạng một phân số nào dưới đây ?

A. $\frac{278}{333}$.

B. $\frac{926}{333}$.

C. $\frac{999}{10000}$.

D. $\frac{278}{333}$.

Câu 78. Tính $K = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$.

A. $K = 0$.

B. $K = +\infty$.

C. $K = -\frac{1}{56}$.

D. $K = -56$.

Câu 79. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2} = a$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 40}{2x^5 + 7x^4 + 21} = b$. Tính $S = a - b$.

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = 1$.

D. $S = 0$.

Câu 80. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 10, tổng năm số hạng đầu tiên của nó là $\frac{155}{16}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

A. $\begin{cases} q = \frac{1}{5} \\ u_1 = 5 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = 5 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = 3 \end{cases}$.

Câu 81. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $2a + 3b = 5$.

B. $ab + 1 = 7$.

C. $2a + b = 8$.

D. $b - a = 5$.

Câu 82. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x}}{\sqrt[3]{8x^3 - 4x^2 - x + 5}} + 2m \right) = 10$. Tìm m .

A. $m = 10$.

B. $m = 1$.

C. $m = 5$.

D. $m = 0$.

Câu 83. Tìm mối liên hệ giữa các số thực a, b sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 - bn} \right) = 2$.

A. $a + b = 4$.

B. $a + b = 2$.

C. $a - b = 4$.

D. $a - b = 2$.

Câu 84. Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$

A. $S = -\frac{11}{10}$.

B. $S = \frac{10}{11}$.

C. $S = \frac{1}{11}$.

D. $S = -\frac{10}{11}$.

Câu 85. Tên của một học sinh được mã hóa bởi số 5301. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, H, N và O với

$$A = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{3n-1}{n+2}; \quad H = \lim_{n \rightarrow 2} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right); \quad N = \lim_{n \rightarrow 7} \frac{\sqrt{n}-2}{3n+7}; \quad O = \lim_{n \rightarrow 4} \frac{3^n - 5 \cdot 4^n}{1 - 4^n}.$$

Hãy cho biết tên của học sinh này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các chữ kí hiệu tương ứng.

A. HANO.

B. OANH.

C. NHOA.

D. HOAN.

Câu 86. $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 5n + 1}{n^2 + 4}$.

A. $K = +\infty$.

B. $K = 3$.

C. $K = 0$.

D. $K = \frac{1}{3}$.

Câu 87. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = a$. Tính $P = C_{10}^a + a$

A. $P = 47$.

B. $P = 45$.

C. $P = 100$.

D. $P = 2$.

Câu 88. Cho cấp số nhân vô hạn $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots$. Tính tổng S của cấp số đã cho.

A. $S = -\frac{1}{4}$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = -1$.

D. $S = -\frac{1}{3}$.

Câu 89. Tính $P = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}$.

A. $P = -\infty$.

B. $P = 0$.

C. $P = 2$.

D. $P = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 90. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là -1 ?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2-3n}$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2+3}$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{-2n-n^2}$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n^3}{2n^3+1}$.

Câu 91. Tính tổng $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$

A. $S = \frac{9}{10}$.

B. $S = 9$.

C. $S = 10$.

D. $S = 11$.

Câu 92. Tính $M = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2-1} - 1}{\sqrt{x-1}}$.

A. $M = 0$.

B. $M = 2$.

C. $M = +\infty$.

D. $M = \sqrt{2}$.

Câu 93. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 3 và công bội $q = \frac{2}{3}$

A. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

B. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

C. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

D. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.

Câu 94. Tính $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4x + 5}{x^4 - x + 3}$.

A. $I = 0$.

B. $I = 1$.

C. $I = 3$.

D. $I = -1$.

Câu 95. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}} = a$, với $a \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + \frac{1}{a}$.

A. $S = -\frac{1}{4}$.

B. $S = 2$.

C. $S = -4$.

D. $S = -\frac{17}{4}$.

Câu 96. Tính $J = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2+x+1} - x\sqrt{3} \right)$.

A. $J = 0$.

B. $J = \frac{1}{6}$.

C. $J = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

D. $J = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 97. Tính $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$.

A. $T = 2$.

B. $T = 1$.

C. $T = \frac{1}{2}$.

D. $T = +\infty$.

Câu 98. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-4} + 3x+1}{\sqrt{x^2+4x-3} + 2x-5} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + ab = 12$.

B. $a + b = 7$.

C. $ab - b = 10$.

D. $b - a = 1$.

Câu 99. Tính tổng S của cấp số nhân vô hạn $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots$

A. $S = -\frac{1}{4}$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = -\frac{1}{3}$.

D. $S = -1$.

Câu 100. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,131131131\dots$ dưới dạng một phân số nào dưới đây?

A. $\frac{129}{999}$.

B. $\frac{2129}{999}$.

C. $\frac{212}{999}$.

D. $\frac{219}{999}$.

Câu 101. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $2a - b = 2$. B. $a + b = 20$. C. $a - 2b = 17$. D. $a \cdot b = -84$.

Câu 102. Đoàn trường tổ chức trò chơi lớn, tên của một đồng chí trạm trưởng được mã hóa bởi số 1234. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, O, H, T, N, U với:

$$A = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{3n+4}{n-2} \quad O = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x-1} \quad H = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x+2}$$

$$T = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2} \quad N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{n} + \frac{\cos n}{3^n} \right) \quad U = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

Hãy cho biết tên của đồng chí trạm trưởng này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các chữ kí hiệu biểu thức tương ứng.

- A. HUAN. B. TUAN. C. TOAN. D. THOA.

Câu 103. Tính $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 - n}}{2n-1} + \frac{2^n \cos n}{3^n} \right)$.

- A. $Q = \frac{1}{2}$. B. $Q = -\frac{1}{2}$. C. $Q = 2$. D. $Q = 0$.

Câu 104. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là -1 ?

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 3}{5x^2 - x^3}$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x + x^2}$. C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x^2 - 5x}$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x+1}$.

Câu 105. Biết tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

- A. $u_1 = 1, q = 2$. B. $u_1 = 1, q = \frac{5}{2}$. C. $u_1 = 2, q = \frac{2}{5}$. D. $u_1 = 1, q = \frac{2}{5}$.

Câu 106. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^k = +\infty, a < 0$.
 B. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = \frac{u_1}{1-q}, |q| < 1$.
 C. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
 D. Hàm số đa thức liên tục trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$.

Câu 107. Tính $P = \lim_{n \rightarrow \infty} ((0.99)^n \cos n)$.

- A. $P = 0$. B. $P = \frac{9}{10}$. C. $P = \frac{11}{10}$. D. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 108. Tính $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} - 1}{x}$.

- A. $M = -4$. B. $M = 1$. C. $M = 2$. D. $M = +\infty$.

Câu 109. Biết $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4} + 2}{x-5} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $u_{10} = a \cdot b^{b-a}$.

- A. $u_{10} = 9$. B. $u_{10} = 27$. C. $u_{10} = 3$. D. $u_{10} = 18$.

Câu 110. Tính $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\sqrt{n}}{n^2 + 2n - 1}$.

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 0$. D. $I = 3$.

Câu 111. Tính $K = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^{n+2}(5-3^{2n-3})}{(2^{2n+1}-1)(2-9^{n-2})}$.

A. $K = -42$.

B. $K = -24$.

C. $K = 42$.

D. $K = 24$.

Câu 112. Tính $K = \lim \left(2^n + \frac{1}{n} \right)$.

A. $K = 0$.

B. $K = 2$.

C. $K = 3$.

D. $K = +\infty$.

Câu 113. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $2a+3b=30$.

B. $a-b=1$.

C. $ab+1=12$.

D. $2a+b=16$.

Câu 114. Biết số thập phân vô hạn tuần hoàn $235,235235\dots = \frac{a}{b}$, ($\frac{a}{b}$ tối giản). Tính $P = 7a - b^2 + 2b$.

A. $P = 649979$.

B. $P = 649996$.

C. $P = 649987$.

D. $P = 648997$.

Câu 115. Tính $N = \lim \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} \right)^n + \frac{3^n}{4^n} \right)$.

A. $N = +\infty$.

B. $N = \frac{3}{4}$.

C. $N = 0$.

D. $N = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

Câu 116. Cho $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$; $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$; $N = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x}-x)$; $O = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^4}$.

Tìm từ được mã hóa bởi chuỗi số 30213?

A. CONAC.

B. CANON.

C. CONAN.

D. CANOC.

Câu 117. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

A. Hàm số $y = \tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = x + \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

D. Phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

Câu 118. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,313131\dots$ dưới dạng một phân số nào dưới đây ?

A. $\frac{31}{99}$.

B. $\frac{32}{99}$.

C. $\frac{100}{99}$.

D. $\frac{13}{99}$.

Câu 119. Tính $H = \lim \frac{3^n - 4^n}{2 \cdot 4^n + 2^n}$.

A. $H = -2$.

B. $H = -\frac{1}{2}$.

C. $H = -1$.

D. $H = \frac{1}{2}$.

Câu 120. Biết $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right| = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $ab - 2 = 8$.

B. $a + b = 2$.

C. $3a + b = 10$.

D. $a - 2b = -1$.

Câu 121. Tính $L = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

A. $L = -2$.

B. $L = \frac{1}{2}$.

C. $L = 1$.

D. $L = 0$.

Câu 122. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ x^2 + x - 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tìm giá trị của a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a = 4$. B. $a = \frac{2}{3}$. C. $a = 3$. D. $a = \frac{5}{4}$.

Câu 123. Giải phương trình $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$, trong đó $|x| < 1$.

A. $x \in \left\{\frac{1}{3}\right\}$. B. $x \in \{1; 2\}$. C. $x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. D. $x \in \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Câu 124. Cho hàm số $f(x) = \frac{a-x^2}{x}$. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Câu 125. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + n + 1}}{12n + 8} = \frac{a\sqrt{3}}{b}$, ($\frac{a}{b}$ tối giản). Tính $S = b - a$.

A. $S = 11 + \sqrt{3}$. B. $S = 12$. C. $S = 12 + \sqrt{3}$. D. $S = 11$.

Câu 126. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{m(x^2 - 1)}{m - 1} & \text{khi } x = 3 \\ \frac{x^2 - 9}{3 - \sqrt{2x + 3}} & \text{khi } x \neq 3 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số

$f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

A. $m = 18$. B. $m = \frac{9}{13}$. C. $m = -18$. D. $m = -\frac{9}{13}$.

Câu 127. Tính $H = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x + 1} - x\sqrt{3})$.

A. $H = \frac{1}{6}$. B. $H = \frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $H = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $H = 0$.

Câu 128. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào không tồn tại ?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$. B. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2}$. C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}$.

Câu 129. Cho phương trình $\frac{1}{x} = 0$ (1). Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai ?

- A. Hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
 B. Phương trình (1) vô nghiệm.
 C. Phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.
 D. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

Câu 130. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P = a.b$.

A. $P = 3$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = 1$. D. $P = 2$.

Câu 131. Tính tổng S của cấp số nhân $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

A. $S = 1$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = \frac{1}{2^{n+1}}$. D. $S = 2^n$.

Câu 132. Biết $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - bx + c}{x - 7} = 7, (b, c \in \mathbb{R})$. Tính $P = b - c$.

A. $P = 3$. B. $P = 7$. C. $P = -7$. D. $P = 14$.

Câu 133. Tính $F = \lim \left(\sqrt{n^4 + 2n^2} - n^2 \right)$.

- A. $F = 1$. B. $F = -1$. C. $F = 2$. D. $F = 0$.

Câu 134. Biết $|u_n - 2| \leq \frac{1}{3^n}$. Tìm $\lim u_n$.

- A. $\lim u_n = +\infty$. B. $\lim u_n = 2$. C. $\lim u_n = 0$. D. $\lim u_n = \frac{1}{3}$.

Câu 135. Tính $Q = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$.

- A. $Q = 1$. B. $Q = -\frac{2}{12}$. C. $Q = \frac{30}{36}$. D. $Q = 6$.

Câu 136. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x+3)^3 - 27}{x} + m \right) = 29$. Tìm m .

- A. $m = -9$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 27$.

Câu 137. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x \neq 3 \\ m & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$. Tìm tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$.

- A. $m = 1$. B. $m = 4$. C. $m = -1$. D. $m = -4$.

Câu 138. Tính $J = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5|x-7| + \sqrt[3]{9x^3 - 3x^2 + 1}}{2017 - 4|x|}$.

- A. $J = \frac{1}{4}$. B. $J = \frac{\sqrt[3]{9} - 5}{4}$. C. $J = \frac{\sqrt[3]{9} + 5}{4}$. D. $J = \frac{9}{4}$.

Câu 139. Biết $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(ax^2 + bx + c)}{(x+2)(x+d)}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b + c + d$.

- A. $S = 4$. B. $S = -2$. C. $S = 12$. D. $S = 9$.

Câu 140. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,780780780\dots$ dưới dạng một phân số nào dưới đây?

- A. $\frac{96}{33}$. B. $\frac{999}{10000}$. C. $\frac{278}{333}$. D. $\frac{926}{333}$.

Câu 141. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 2 \\ -1 & \text{khi } x = -1 \\ 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số gián đoạn tại $x = 2$.
C. Hàm số liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. D. Hàm số gián đoạn tại $x = -1; x = 2$.

Câu 142. Tính $L = \lim (2^n - 2n + 3)$.

- A. $L = -\infty$. B. $L = 2$. C. $L = 3$. D. $L = +\infty$.

Câu 143. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = \frac{10(1 - b^a)}{1 - b}$.

- A. $S = 7$. B. $S = 10$. C. $S = -10$. D. $S = 5$.

Câu 144. Tính $M = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}$.

A. $M = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

B. $M = 0$.

C. $M = 2$.

D. $M = -\infty$.

Câu 145. Tính $N = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(n - \sqrt{n^2 + 1} \right)$.

A. $N = 2$.

B. $N = -\infty$.

C. $N = 1$.

D. $N = 0$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	D	C	D	A	A	B	B	B	D	A	D	D	C	C	B	C	C	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	B	D	C	D	C	B	D	C	A	D	C	B	A	A	B	C	B	D	D
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	C	C	D	C	A	A	C	B	A	B	C	C	D	A	C	A	B	B	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
D	D	B	D	B	C	B	D	A	A	A	B	A	C	A	C	B	C	C	B
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	C	A	D	B	A	A	D	A	C	C	D	B	A	D	C	D	B	C	B
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
A	B	A	A	D	A	A	C	A	C	D	D	D	D	C	A	A	A	B	D
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	D	C	B	D	B	B	A	C	D	A	B	A	B	B	C	D	B	C	D
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
B	D	B	D	B															

MỘT SỐ ĐỀ ÔN KIỂM TRA

ĐỀ 1

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-7})$ bằng

- A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. -3.

Câu 2: Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ là giới hạn của hàm số tại điểm x_0 . B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ là giới hạn của hàm số tại vô cực.
C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ là giới hạn 1 bên. D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ là giới hạn của dãy số.

Câu 3: Khẳng định nào dưới đây sai ?

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^k = +\infty, a < 0$.
C. Hàm số đa thức liên tục trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$.
D. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = \frac{u_1}{1-q}, |q| < 1$.

Câu 4: Gọi $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \dots$. Khi đó giá trị của S bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 1. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 5: Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2}$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\infty$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $+\infty$.

Câu 6: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào liên tục tại $x = 1$.

- A. $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-6x+5}$. B. $f(x) = \sqrt{1-2x}$.
C. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. D. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+4}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ 3x+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$.

Câu 7: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$.

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. Không tồn tại. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Tính tổng $a+b$, biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}) = 5$.

- A. 2. B. 3. C. 7. D. -5.

Câu 9: Tìm từ được mã hóa bởi chuỗi số 4271 biết

- $T = \lim_{x \rightarrow 1^+} (7-3x)$; $U = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3-5}{x^3+x}$; $H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$; $Y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{1-x}$
A. THUY. B. HUYT. C. TUYH. D. THUC.

Câu 10: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+\sqrt{x}}{5x-\sqrt{x}}$ bằng

A. $\frac{2}{5}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. -1 .

II. Phần tự luận

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n + 2^{n+1}}{2^{2n} - 5^n}$

b) $J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$

c) $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2 + x - 2}}{1 - 3|x|}$

d) $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{6x+1} - \sqrt{4x+1}}{x^2}$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x^2 + 2x} & \text{khi } x < -2 \\ m^2x + x - 1 & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$.

Tìm tham số m để hàm số trên liên tục tại $x_0 = -2$.

ĐỀ 2

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$.

D. Hàm số hữu tỉ liên tục trên tập xác định của nó.

Câu 2: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^3 - 3x + 2}$.

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. Không tồn tại.

D. 0.

Câu 3: Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ là giới hạn của dãy số.

B. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ là giới hạn của hàm số tại vô cực.

C. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ là giới hạn bên phải của hàm số tại điểm x_0 .

D. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ là giới hạn bên trái của hàm số tại điểm x_0 .

Câu 4: Tìm từ được mã hóa bởi chuỗi số 6243, biết

$M = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{5x+6}}{x-5}$; $N = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x}{x^3 - 5}$; $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+2x} - 2}$; $H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+5}}{x-1}$

A. NHIM

B. HINH

C. MINA

D. MINH

Câu 5: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-7}{2x-4}$ bằng

A. -1 .

B. $-\infty$.

C. $+\infty$.

D. 5

Câu 6: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x)$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 7: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3n^9}{4n^7+2n+1}$ bằng

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $\frac{5}{7}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

Câu 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Tính tích ab , biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{x^2 - 6x + 2}) = 5$

A. 2.

B. 3.

C. 7.

D. 5.

Câu 9: Hàm số nào sau đây liên tục tại $x_0 = 1$?

A. $f(x) = \sqrt{x-2}$.

B. $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x^2 + x - 3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

C. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-1}$.

D. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9x + 8}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 7 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Câu 10: Tính tổng $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$

A. $S = 11$.

B. $S = 9$.

C. $S = 10$.

D. $S = \frac{9}{10}$.

II. Phần tự luận

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^{2n}}{2 \cdot 9^n + 6^{n-1}}$

b) $N = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

c) $P = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2|x|}{\sqrt{9x^2 - 5x + 2}}$

d) $Q = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6x+9} - \sqrt[3]{27x+27}}{x^2}$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{x^2 - 3x} & \text{khi } x > 3 \\ m^2x - x + 2 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$.

Tìm tham số m để hàm số trên liên tục tại $x_0 = 3$.

ĐỀ 3

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Đoàn trường tổ chức trò chơi lớn, tên của một đồng chí trạm trưởng được mã hóa bởi số 1234. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, O, H, T, N, U với:

$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n-2}$

$O = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x-1}$

$H = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x+2}$

$T = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2}$

$N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{n} + \frac{\cos n}{3^n} \right)$

$U = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$

Hãy cho biết tên của đồng chí trạm trưởng này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các chữ kí hiệu biểu thức tương ứng.

A. TUAN.

B. TOAN.

C. THOA.

D. HUAN.

Câu 2: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{x-1}$.

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{x^2+2x}$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

Câu 3: Tính tổng $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$

A. $S = \frac{9}{10}$.

B. $S = 10$.

C. $S = 9$.

D. $S = 11$.

Câu 4: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x + 1} - x\sqrt{3})$ bằng

- A. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. 0. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{4 - \sqrt{x^2 + 16}}$ bằng

- A. 2. B. $-\frac{1}{4}$. C. 0. D. -4.

Câu 6: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$ bằng

- A. 2. B. 0. C. $-\infty$. D. $\frac{1}{32}$.

Câu 7: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

- A. Hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.
 B. Hàm số $y = \tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
 C. Phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.
 D. Hàm số $y = x + \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,780780780... dưới dạng một phân số.

- A. $\frac{926}{333}$. B. $\frac{999}{10000}$. C. $\frac{278}{3333}$. D. $\frac{278}{333}$.

Câu 9: Hàm số dưới đây liên tục tại $x = 1$?

- A. $f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 6x + 5}$. B. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$.
 C. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 3x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. D. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Câu 10: Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^k = +\infty, a < 0$.
 B. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = \frac{u_1}{1 - q}, |q| < 1$.
 C. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
 D. Hàm số đa thức liên tục trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$.

II. Tự luận .

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(4-5n)^2}{8n^3 + 8}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 7x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^3 - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 2mx^2 + mx - \frac{6}{17} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$.

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

ĐỀ 4

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Tính tổng $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$

- A. $S = 11$. B. $S = 9$. C. $S = 10$. D. $S = \frac{9}{10}$.

Câu 2: Hàm số nào dưới đây liên tục tại $x = 1$?

- A. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 3x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. B. $f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 6x + 5}$.
C. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$. D. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Câu 3: Đoàn trường tổ chức trò chơi lớn, tên của một đồng chí trạm trưởng được mã hóa bởi số 1234. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, O, H, T, N, U với:

$$A = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{3n + 4}{n - 2} \quad O = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x - 1} \quad H = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$T = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2} \quad N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n + 1}{n} + \frac{\cos n}{3^n} \right) \quad U = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

Hãy cho biết tên của đồng chí trạm trưởng này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các chữ kí hiệu biểu thức tương ứng.

- A. TOAN. B. TUAN. C. HUAN. D. THOA.

Câu 4: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{4 - \sqrt{x^2 + 16}}$ bằng

- A. 0. B. $-\frac{1}{4}$. C. -4. D. 2.

Câu 5: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là 0?

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^3}{x^2 + 2x}$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)(n - 3)^2}{n - 2n^3}$. D. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3}{x - 1}$.

Câu 6: Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.
B. Hàm số $y = \tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
C. Phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.
D. Hàm số $y = x + \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 7: Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,780780780\dots$ dưới dạng một phân số.

- A. $\frac{926}{333}$. B. $\frac{999}{10000}$. C. $\frac{278}{3333}$. D. $\frac{278}{333}$.

Câu 8: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x + 1} - x\sqrt{3})$ bằng.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. C. 0. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 9: Khẳng định nào dưới đây sai ?

- A. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = \frac{u_1}{1-q}, |q| < 1$.
 B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^k = +\infty, a < 0$.
 C. Hàm số đa thức liên tục trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$.
 D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Câu 10: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$ bằng

- A. $\frac{1}{32}$. B. 0. C. 2. D. $-\infty$.

II. Tự luận

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{n+1} - 2^{n-1}}{4 + 3^{n-2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1 + \sqrt{9x^2 + 2x})$
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1 - \sqrt{2x^2 + 9x - 1}}{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3mx^2 + mx + \frac{4}{11} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

ĐỀ 5

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x + 1} - x\sqrt{3})$ bằng.

- A. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. 0. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Nếu $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.
 B. Nếu hàm số $f(x) = 0$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.
 C. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.
 D. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$. thì hàm số $f(x) = 0$ phải liên tục trên khoảng $(a; b)$.

Câu 3: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = M, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = M$. D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Câu 4: Tính tổng của cấp số nhân vô hạn $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots$

- A. -1 . B. $-\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 5: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+2} + 7^{n+1} + 1}{5 \cdot 7^n - 7} = \frac{a}{b}$. (Với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $P = a - b$.

- A. $P = 44$. B. $P = 7$. C. $P = 12$. D. $P = 51$.

Câu 6: Cho số thập phân: $0,3211111\dots$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản là $\frac{m}{n}$. Tính $m - n$.

- A. -611 . B. 27901 . C. 611 . D. -27901 .

Câu 7: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$ bằng

- A. $-\infty$. B. 0 . C. -1 . D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây liên tục tại $x_0 = 1$?

- A. $f(x) = \frac{2x}{x-1}$. B. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ 3x+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$.
- C. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x-1 & \text{khi } x=1 \end{cases}$. D. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Câu 9: Tên của một học sinh được mã hóa bởi số 9876. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức H, O, A, N, G với:

$$H = \lim_{x \rightarrow 1} (6x+3); A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}; N = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+63x} - \sqrt{9x^2-3});$$

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 6 \cdot 17^{n+1}}{17^{n+1} + 10^n}; O = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+16x} - x).$$

Tên của học sinh này là:

- A. OANH. B. HOAN. C. HANG. D. HONG.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2017x - 2018} - m^2 \cdot x) = +\infty$.

- A. $-2 < m < 2$. B. $m < -2$. C. $m > -\sqrt{2}$. D. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

II. Phần tự luận

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2 \cdot 5^{n+1}}{5^n - 2}$

b) $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^3 - 3x - 2}$

c) $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}$

d) $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx^3 - 6mx + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Tìm tham số m để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

ĐỀ 6

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{\sqrt{2x + 3} - 3}$ bằng

- A. 24. B. 48. C. $\frac{1}{24}$. D. 4.

Câu 2: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3} - x)$ bằng

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 2 D. 0

Câu 3: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+2} - 7^{n+1} + 1}{5 \cdot 7^n - 7} = \frac{a}{b}$. (Với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $P = a - b$.

- A. $P = 51$. B. $P = 44$. C. $P = 37$. D. $P = 12$.

Câu 4: Tên của một học sinh được mã hóa bởi số 5678. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức H, O, A, N, G với

$$H = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3); O = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1}; N = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 14x} - \sqrt{x^2 - 3}); G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 8 \cdot 5^{n+1}}{5^{n+1} + 3^n}; A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 1} - x).$$

Tên của học sinh này là

- A. *HANG*. B. *HONG*. C. *HOAN*. D. *OANH*.

Câu 5: Biết $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{5x^2 - 3x - 3}}{x^2 - 4} = \frac{-a\sqrt{b}}{c}$. (Với a, b là số nguyên tố). Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 31$. B. $P = 112$. C. $P = 88$. D. $P = 43$.

Câu 6: Tìm phân số phát sinh ra số thập phân vô hạn tuần b biết $a = -3.104104104\dots$

- A. $\frac{104}{999}$. B. $\frac{2893}{999}$. C. $\frac{-3101}{999}$. D. $\frac{-2893}{999}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có

- A. Ít nhất 2 nghiệm thuộc $(a; b)$. B. Ít nhất 1 nghiệm thuộc $[a; b]$.
C. Ít nhất 1 nghiệm thuộc $(a; b)$. D. Luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào liên tục tại $x = 1$?

- A. $f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 6x + 5}$. B. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$.
C. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 3x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. D. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Câu 9: Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 2^{n-1}}, \dots$ là

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Nếu $f(a) \cdot f(b) > 0$ thì hàm số liên tục trên $(a; b)$.
B. Nếu $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì hàm số liên tục trên $(a; b)$.
C. Nếu hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì $f(a) \cdot f(b) < 0$.
D. Nếu hàm số liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

II. Phần Tự luận

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$$a) \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5 \cdot 7^n}{7^{n+1} - 3}$$

$$b) \quad B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{1 - \sqrt{2-x}}$$

$$c) \quad C = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2x + 4}{x + 4 - \sqrt{x+6}}$$

$$d) \quad D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 3x + 5} + \sqrt[3]{27x^3 + x + 1} \right)$$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2+x-2} & \text{khi } x > 1 \\ mx^2 + 2mx - 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$.

Tìm tham số m để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

GV. Lư Sĩ Pháp