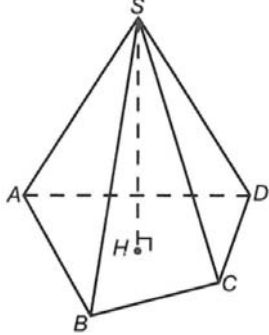
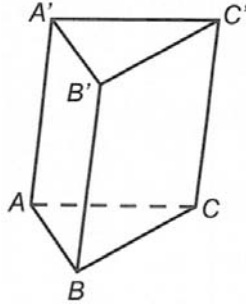
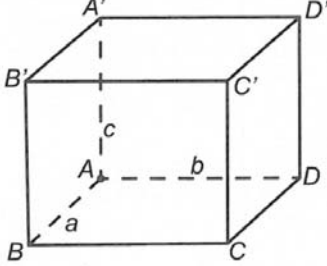


BÀI 3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A. LÝ THUYẾT

Công thức tính thể tích khối chóp, lăng trụ

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} . h$. Trong đó: $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy. h: Độ dài chiều cao khối chóp.	
Thể tích khối lăng trụ: $V = S_{\text{đáy}} . h$ Trong đó: $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy. h: Chiều cao của khối chóp.	
Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ Thể tích khối lập phương: $V = a^3$	Chú ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.
	 Chú ý: +) Đường chéo của hình vuông cạnh a là: $a\sqrt{2}$. +) Đường chéo của hình lập phương cạnh a là: $a\sqrt{3}$ +) Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. +) Đường cao của tam giác đều cạnh a là: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẪNG CẦN NHỚ

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

$$+) AB^2 + AC^2 = BC^2; \quad +) AC^2 = CH.BC;$$

$$+) AH.BC = AB.AC; \quad +) AB^2 = BH.BC;$$

$$+) AH^2 = BH.HC; \quad +) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2};$$

$$+) AB = BC.\sin C = BC.\cos B = AC.\tan C = AC.\cot B.$$

b) Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh a, b, c ; độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c ; bán kính đường tròn ngoại tiếp R ; bán kính đường tròn nội tiếp r , nửa chu vi p .

+) Định lý hàm số cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$$

$$+) \text{ Định lý hàm số sin: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

+) Độ dài trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}; \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

$$+) S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$+) S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$+) S = \frac{abc}{4R}$$

$$+) S = pr \quad (p: \text{nửa chu vi của tam giác}).$$

$$+) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$+) \triangle ABC \text{ vuông tại } A: S = \frac{AB.AC}{2} = \frac{BC.AH}{2}$$

$$+) \triangle ABC \text{ đều, cạnh } a: AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

b) Hình vuông: $S = a^2$ (a : cạnh hình vuông)

c) Hình chữ nhật: $S = ab$ (a, b : hai kích thước)

d) Hình bình hành:

$$S = \text{đáy} \times \text{chiều cao} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$$

e) Hình thoi: $S = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}(a + b)h$ (a, b : hai đáy, h : chiều cao)

g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

NHẮC LẠI CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy Để tính góc $(\widehat{SA, (P)})$, ta gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (P). Khi đó HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (P). Vậy $(\widehat{SA, (P)}) = (\widehat{SA, AH}) = \widehat{SAH}$.	
Góc giữa cạnh bên và mặt đứng Để tính góc $(\widehat{SB, (SAH)})$ biết $(SAH) \perp (P)$ ta dựng $BK \perp AH (K \in AH)$. Vì $\begin{cases} BK \perp AH \\ BK \perp SH \end{cases}$ nên $BK \perp (SAH)$ Khi đó K là hình chiếu vuông góc của B trên (SAH) $\Rightarrow SK$ là hình chiếu vuông góc của SB trên (SAH) Vậy $(\widehat{SB, (SAH)}) = (\widehat{SB, SK}) = \widehat{BSK}$	
Góc giữa hai mặt phẳng Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến.	
Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy Để tính góc $(\widehat{(SAB), (P)})$, ta gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (P). Kẻ $HI \perp AB (I \in AB)$	

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp SI$ Vậy $\widehat{((SAB), (P))} = \widehat{(SI, HI)} = \widehat{SIH}$.	
Góc giữa mặt bên và mặt đứng Để tính góc $\widehat{((SAB), (SAH))}$ biết $(SAH) \perp (P)$, ta kẻ $BK \perp HA (K \in HA) \Rightarrow \begin{cases} BK \perp HA \\ BK \perp SH \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SHA).$ Kẻ $KI \perp SA (I \in SA)$ $\Rightarrow \begin{cases} SA \perp KI \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BKI) \Rightarrow SA \perp BI$ Vậy $\widehat{((SAB), (SAH))} = \widehat{(KI, BI)} = \widehat{BIK}$.	

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

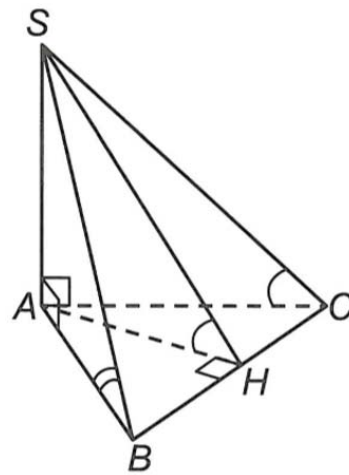
1. Phương pháp

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

MÔ HÌNH 1

Hình chóp $S.ABC$, cạnh SA vuông góc với đáy.

- + Đáy là tam giác ABC .
- + Đường cao SA .
- + Cạnh bên SB, SC, SA .
- + $\triangle SAB, \triangle SAC$ là các tam giác vuông tại A .
- + Góc giữa cạnh SB với đáy ABC là góc $\widehat{SBA}$.
- + Góc giữa cạnh SC với đáy ABC là góc $\widehat{SCA}$.
- + Góc giữa mặt bên SBC với đáy là góc $\widehat{SHA}$ với H là hình chiếu vuông góc của A trên BC .



MÔ HÌNH 2

Hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông) và SA vuông góc với đáy.

+ Đáy là hình chữ nhật (hình vuông) $ABCD$.

+ Đường cao SA .

+ Cạnh bên SA, SB, SC, SD .

+ $\triangle SAB, \triangle SAC, \triangle SAD$ là các tam giác vuông tại A.

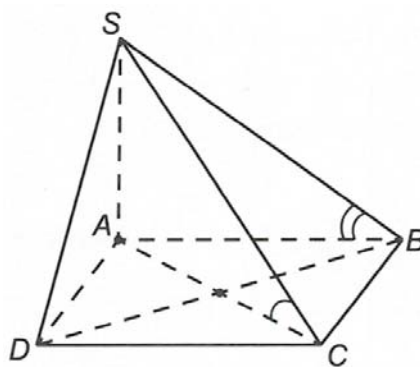
+ Góc giữa cạnh SB với đáy $ABCD$ là $\widehat{SBA}$.

+ Góc giữa cạnh SC với đáy $ABCD$ là $\widehat{SCA}$.

+ Góc giữa cạnh SD với đáy $ABCD$ là $\widehat{SDA}$.

+ Góc giữa mặt bên SBC với đáy $ABCD$ là $\widehat{SBA}$.

+ Góc giữa mặt bên SCD với đáy $ABCD$ là $\widehat{SDA}$.



2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Diện tích tam giác SBC bằng $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3 .

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn C.

Đặt cạnh hình vuông là $x > 0$.

$$\text{Suy ra } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

$$\text{Để thấy } BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \text{ nên ta có } \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}SB \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2} \cdot x \longrightarrow x = a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}.$$

Bài tập 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. a^3 .

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải.

Chọn C.

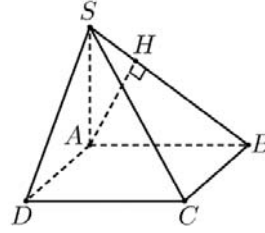
Gọi H là hình chiếu của A trên SB .

Dễ dàng chứng minh được

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A, (SBC)] = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \longrightarrow SA = a.$

Vậy thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}.$



Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại B nên

$$BC = AB \cdot \cot \widehat{ACB} = a \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

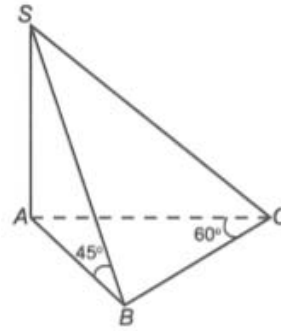
Ta có AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC)

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA} = 45^\circ$$

$\triangle SAB$ vuông tại A nên

$$SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = AB \cdot \tan 45^\circ = a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$



Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $(AD \parallel BC)$, cạnh $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

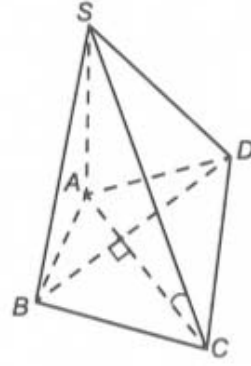
Chọn A.

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 3a^2$.

Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$ nên $\left(\widehat{SC, (ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA} = \alpha$

$$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan \alpha = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} 3a^2 \cdot \frac{2a}{3} = \frac{2a^3}{3}$.

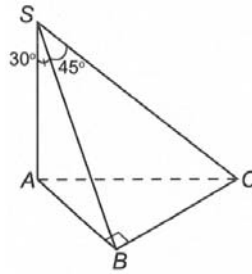


Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{ASB} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $SABC$ là V . Tỉ số $\frac{a^3}{V}$ là

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Mà $\begin{cases} (SBC) \perp (SAB), (ABC) \perp (SAB) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \triangle ABC, \triangle SBC$ là các tam giác vuông tại B .

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có: $AB = SB \cdot \sin \widehat{ASB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = SB \cdot \cos \widehat{ASB} = \frac{3a}{2}$

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B có: $BC = SB \cdot \tan \widehat{BSC} = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{4}$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8} \Rightarrow \frac{a^3}{V} = \frac{8}{3}$

Tổng quát:

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{ASB} = \beta$.

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là: } V_{S.ABC} = \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \beta}{12}$$

Chứng minh:

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có: $AB = SB \cdot \sin \alpha$; $SA = SB \cdot \cos \alpha$

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B có: $BC = SB \cdot \tan \beta$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot SB^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan \beta$$

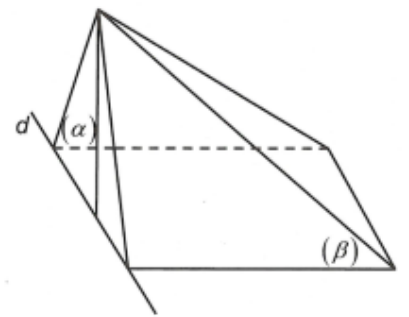
$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{SB^2 \sin \alpha \tan \beta \cdot SB \cos \alpha}{6} = \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \beta}{12}$$

Dạng 2. Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

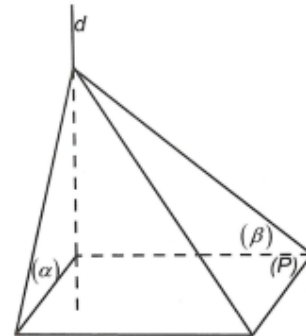
Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì chân đường cao nằm trên giao tuyến của mặt phẳng đó và đáy.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$$



Hình chóp có hai mặt vuông góc với đáy thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với đáy.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$$



2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa AB và SC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3\sqrt{3}$

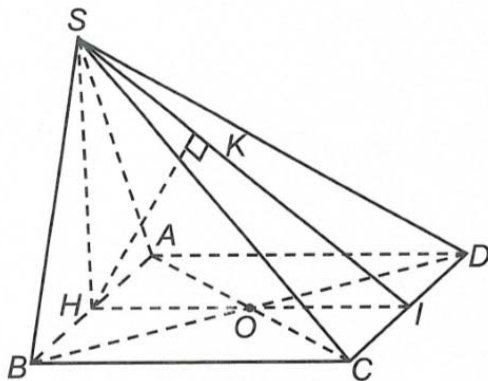
B. $V = 2a^3\sqrt{3}$

C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $V = 3a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, CD , kẻ $HK \perp SI$.

Vì tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy

Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

$$\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIH) \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SCD)$$

$$CD \parallel AB \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$$

$$\text{Suy ra } HK = \frac{3a}{2}; HI = AD = a\sqrt{3}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SHI \text{ ta có } SH = \sqrt{\frac{HI^2 \cdot HK^2}{HI^2 - HK^2}} = 3a$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}3a.a^2\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}.$$

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = A\sqrt{2}$, $AC = A\sqrt{5}$. Hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn thẳng BC . Biết rằng góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{5a^3\sqrt{6}}{12}$

B. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{12}$

C. $\frac{a^3\sqrt{210}}{24}$

D. $\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A. $40\sqrt{3} \text{ cm}^3$ **B.** 40 cm^3 **C.** 60 cm^3 **D.** $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Ta có các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một nên $SA \perp SB$, $SA \perp SC$, $SB \perp SC$.

$$S_{SAB} = 20 \text{ cm}^2 \Rightarrow SA.SB = 40 \text{ cm}^2$$

$$S_{SBC} = 27 \text{ cm}^2 \Rightarrow SB.SC = 54 \text{ cm}^2$$

$$S_{SAC} = 30 \text{ cm}^2 \Rightarrow SA.SC = 60 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow (SA.SB.SC)^2 = 40.54.60 = 129600 \Rightarrow SA.SB.SC = 360$$

Do $(SAB), (SBC), (SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một $\Rightarrow AS \perp (SBC)$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SA = \frac{1}{6} SA.SB.SC = 60 \text{ cm}^3.$$

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, biết $SC = a\sqrt{3}$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SB, SD, CD, BC . Thể tích của khối chóp $A.MNPQ$ là

A. $\frac{a^3}{3}$

B. $\frac{a^3}{8}$

C. $\frac{a^3}{12}$

D. $\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \\ NP \perp PQ (BD \perp SC) \end{cases}$$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.

$$\text{Suy ra } V_{A.MNPQ} = 2V_{A.MQP} = 2V_{M.AQP}$$

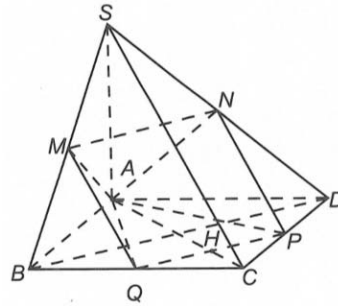
$$\text{Ta có } d(M; (AQP)) = \frac{1}{2} SA$$

$$\text{Mà } SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a \Rightarrow d(M; (AQP)) = \frac{1}{2} SA = \frac{a}{2}$$

$$S_{\Delta AQP} = \frac{1}{2} AH.QP = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} AC \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{3}{16} AC.BD = \frac{3}{16} (a\sqrt{2})^2 = \frac{3}{8} a^2$$

$$\text{Do đó: } V_{M.AQP} = \frac{1}{3} d(M; (AQP)).S_{\Delta AQP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{8} a^2 = \frac{a^3}{16}$$

$$\text{Vậy } V_{A.MNPQ} = 2V_{M.AQP} = 2 \cdot \frac{a^3}{16} = \frac{a^3}{8}$$



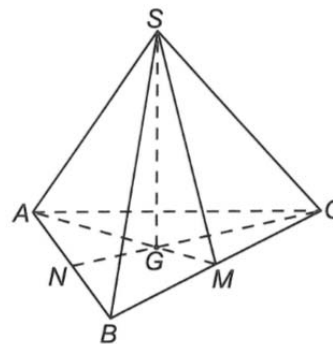
Dạng 3. Thể tích khối chóp đều

1. Phương pháp

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Trong hình chóp đều:

- +) Đáy là một đa giác đều
 - +) Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
 - +) Các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau .
- Đường cao vẽ từ đỉnh của một mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp đều.
- +) Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau
 - +) Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.



Chú ý:

+) Phân biệt hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều. Hình chóp tam giác đều là hình chóp có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Nói một cách khác, hình chóp tam giác đều là **hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại không đúng**.

+) Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$

B. $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$

C. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$

D. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

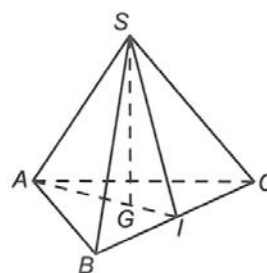
Chọn A.

$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó $SG \perp (ABC)$. Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC , khi đó AI là đường cao của tam giác đáy.

Theo định lý Pi-ta-go ta có

$$AI = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ và } AG = \frac{2}{3} AI = \frac{2a\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác SGA vuông tại G ta có $SG = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}.$



$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$$

Bài tập 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{12}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó $SG \perp (ABC)$.

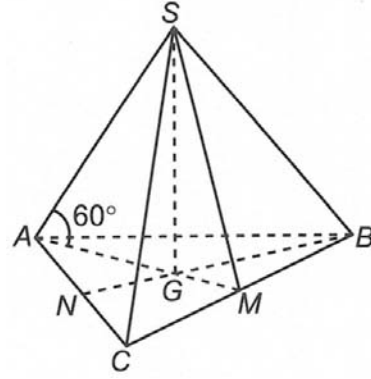
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$AG = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét tam giác SAG vuông tại G có

$$SG = AG \cdot \tan 60^\circ = a$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SG \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$



Bài tập 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

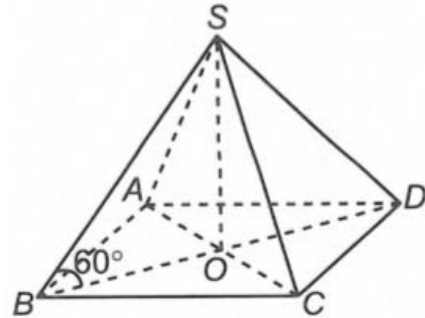
Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } (\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, OB}) = \widehat{SBO}.$$

Tam giác SOB vuông tại O , có

$$SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



Bài tập 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

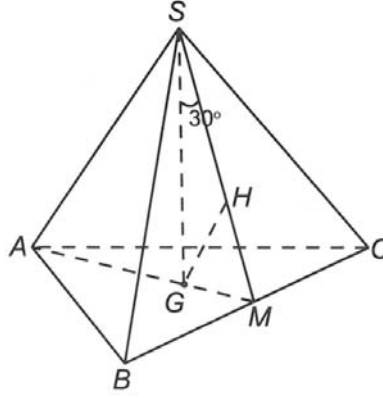
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hạ $GH \perp SM$ ($H \in SM$) $\Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow (\widehat{SG, (SBC)}) = \widehat{GSM} = 30^\circ$.

$$SG = GM \cdot \cot \widehat{GSM} = \frac{1}{3} \cdot AM \cdot \cot 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Bài tập 5. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối chóp đó là

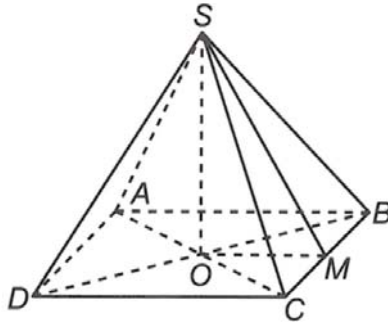
A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$

B. $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

D. $V = \frac{\sqrt{2}}{9}a^3$

Hướng dẫn giải

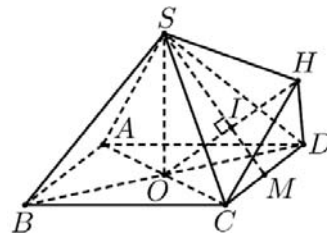


Ta có $SM = a\sqrt{3}$. Do $\triangle SBC$ đều nên $SC = BC = 2a$.

$$\Rightarrow SO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp đó là $V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}.4a^2 = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Bài tập 6. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a . Cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD , H là điểm đối xứng của O qua SM (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối đa diện $ABCDSH$ bằng



- A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{10}}{18}$. C. $\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$. D. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Lời giải.

Chọn D.

Khối đa diện $ABCDSH$ được chia thành hai khối chóp $S.ABCD$ và $H.SCD$.

• $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}S_{ABCD}.\sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a^3\sqrt{10}}{6}$.

• Vì H đối xứng với O qua SM nên $d[O, (SCD)] = d[H, (SCD)]$.

Suy ra $V_{HSCD} = V_{OSCD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{10}}{24}$.

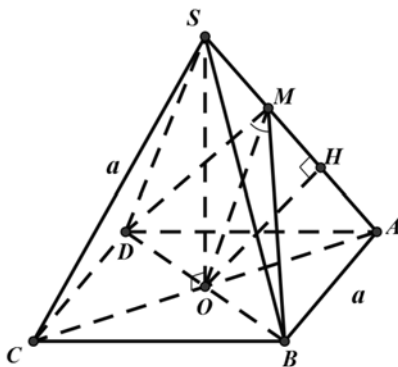
Vậy thể tích khối đa diện cần tính: $V = V_{S.ABCD} + V_{H.SCD} = \frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Cho điểm $M \in SA$ sao cho diện tích S của $\triangle MBD$ nhỏ nhất. Giá trị S bằng

- A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. D. $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi S là diện tích $\triangle MBD$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BD \cdot MO = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot MO \quad (1)$$

$\Rightarrow \min S$ xảy ra $\Leftrightarrow \min MO$ xảy ra

Nhưng $\min MO = d[O, SA] = OH$

Vì tứ diện đều nên $O = AB \cap CD$ thì SO là đường cao.

$\Rightarrow \triangle SOA$ vuông tại O (2)

Trong đó:

$$\begin{cases} OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \triangle SOA \text{ vuông cân tại } O \Rightarrow OH = OA \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \min S = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}a^2}{4} \text{ xảy ra khi } H \text{ là trung điểm } SA.$$

Dạng 4. Thể tích khối chóp biết trước một đường thẳng vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

Việc tính SH ta thường dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Đề bài thường cho mối quan hệ về góc giữa đường thẳng với mặt phẳng hoặc góc giữa hai mặt phẳng xác định độ dài đường cao.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân **Chú ý:**

tại A , cạnh $BC = 2a$, gọi M là trung điểm BC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AM , tam giác SAM vuông tại S . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là *Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.*

A. $\frac{a^3}{6}$

B. $\frac{a^3}{2}$

C. $\frac{a^3}{3}$

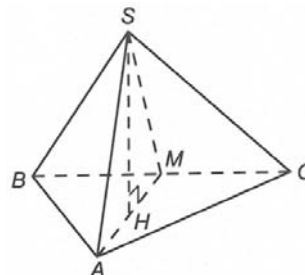
D. $\frac{a^3}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại A , $BC = 2a$

$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = a^2$$



Xét ΔSAM vuông tại S có: $SH = \frac{AM}{2} = \frac{a}{2}$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$$

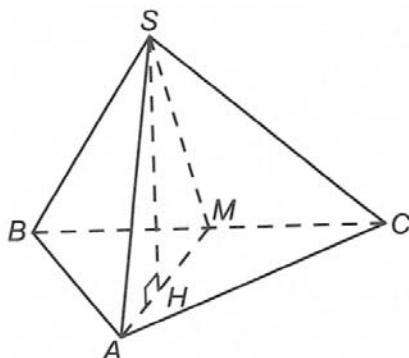
Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = 19 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$, $AC = 37 \text{ cm}$, cạnh bên $SA = \sqrt{985} \text{ cm}$. Gọi M là trung điểm của BC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overline{AH} = \frac{1}{3} \overline{AM}$

. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. 570 cm^3 B. 760 cm^3 C. 1520 cm^3 D. 1140 cm^3

Hướng dẫn giải

Chọn D.



$$\text{Ta có } p = \frac{AB + BC + AC}{2} = 38 \text{ cm}.$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)} = 114 \text{ cm}^2.$$

$$AM = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = 3\sqrt{85} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{3} AM = \sqrt{85} \text{ cm}$$

$$\Delta SAH \text{ vuông tại } H \text{ có: } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 30 \text{ cm}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 114 \cdot 30 = 1140 \text{ cm}^3$$

Chú ý:

Khi biết độ dài ba cạnh thì diện tích tam giác được tính theo công thức Hê-rông.

Tam giác ABC có:

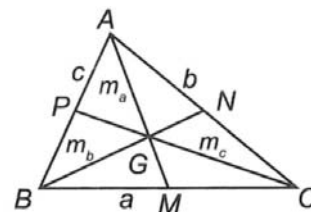
$$BC = a; AC = b; AB = c$$

$$\text{Nửa chu vi: } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Khi đó:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Công thức độ dài trung tuyến:



$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD . Cạnh SC tạo với đáy một góc bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

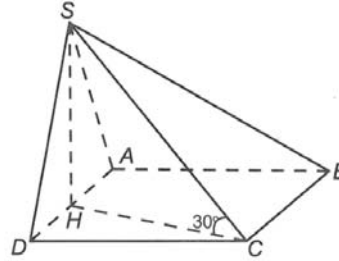
- A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2$.

Do HC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCH} = 30^\circ$



+ Xét tam giác DHC vuông tại D có:

$$HC = \sqrt{DH^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$$

+ Xét tam giác SHC vuông tại H có:

$$SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = HC \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}.$$

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AO . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3}{2}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{a^3}{6}$ D. $\frac{a^3}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

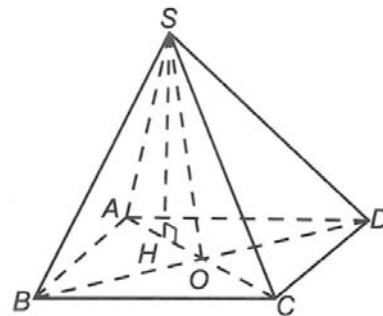
Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại S có:

$$SO = AO = \frac{AC}{2} = a \Rightarrow HO = \frac{AO}{2} = \frac{a}{2}$$

Xét $\triangle SHO$ vuông tại H có:



$$SH = \sqrt{SO^2 - HO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$$

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Gọi $O = AC \cap BD$

Ta có $AC \perp BD, AC \perp SG$

$$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO$$

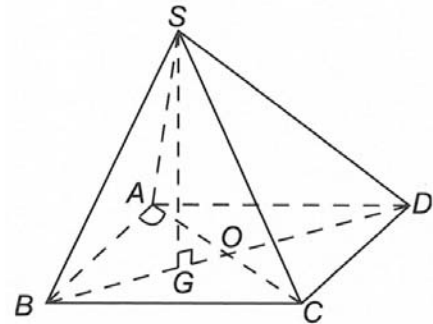
Mặt khác $OB \perp AC$

$$\Rightarrow ((SAC), (ABCD)) = \widehat{SOB} = 45^\circ$$

Xét tam giác SOG vuông tại G :

$$SG = OG \cdot \tan \widehat{SOB} = OG \cdot \tan 45^\circ = \frac{1}{3} BO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SG \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{12}.$$



Dạng 5. Thể tích khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên, mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau

1. Phương pháp

- Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cạnh Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC có bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân $AB = 10 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$, $AC = 14 \text{ cm}$, các mặt bên

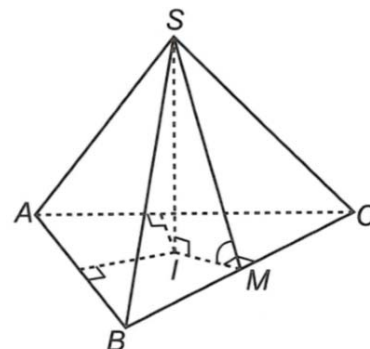
đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.

- Hình chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm đường tròn nội tiếp mặt đáy.

cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và đều bằng α thỏa mãn $\tan \alpha = 3$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. 228 cm^3 B. 576 cm^3
C. 192 cm^3 D. 384 cm^3

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } p = \frac{AB + BC + AC}{2} = 18(\text{cm})$$

$$S = \sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)} = 24\sqrt{6}(\text{cm}^2)$$

Các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC \Rightarrow SI \perp (ABC)$.

$$S = p.r \Rightarrow IM = r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{6}}{3}(\text{cm})$$

$\triangle SIM$ vuông tại I có

$$SI = IM \cdot \tan \widehat{SMI} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot 3 = 4\sqrt{6}(\text{cm}).$$

Vậy

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABBC} \cdot SI = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6} = 192(\text{cm}^3)$$

Chọn C.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , các cạnh bên bằng nhau và đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$
- Các cạnh bên bằng nhau nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Do $\triangle ABC$ đều nên

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

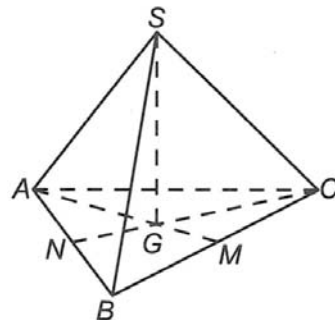
ΔSGA vuông tại G có

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trọng tâm G

$$\Rightarrow SG \perp (ABC)$$



Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc 30° nên hình chiếu O của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Rightarrow SO \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow \left((SA), (ABC) \right) = \widehat{SAO} = 30^\circ$$

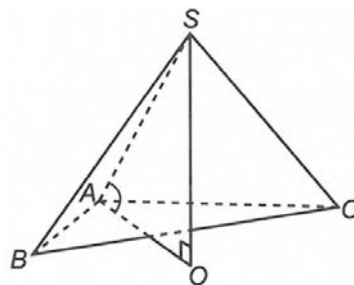
$$\Delta ABC \text{ có } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}} = a\sqrt{3}$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \frac{a \cdot a \cdot a\sqrt{3}}{4 \cdot OA} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow OA = a$$

$$\Delta SAO \text{ có } SO = AO \cdot \tan \widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{12}$$

Cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc 30° nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .



$$\left((SA), (ABC) \right) = \widehat{SAO} = 30^\circ.$$

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SDA) với mặt đáy lần lượt là 90° , 60° , 60° , 60° . Biết rằng tam giác SAB vuông cân tại S , $AB = a$ và chu vi tứ giác $ABCD$ là $9a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$

D. $V = a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm AB .

Kẻ $IH \perp BC (H \in BC)$, ta có góc giữa

$$((SBC), (ABCD)) = \widehat{SHI}$$

Do các mặt (SBC) , (SCD) , (SDA) tạo với $(ABCD)$ các góc bằng nhau và bằng 60° nên các khoảng cách từ I đến các cạnh CD , DA bằng nhau và bằng IH .

$$\text{Ta có } SI = IH \cdot \tan 60^\circ \Rightarrow IH = \frac{SI}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + CD + DA) \cdot HI = \frac{1}{2}(9a - AB) \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{2a^2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2a^2\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$$

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Đỉnh S cách đều các đỉnh A , B , C , D , của mặt đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{8}$

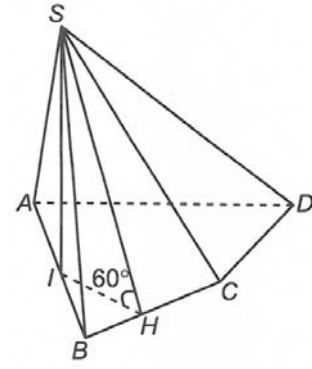
B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$

C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$

D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

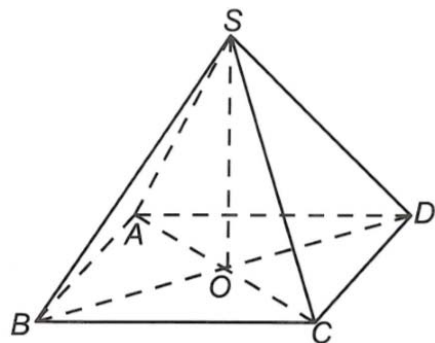


Kẻ $IH \perp BC$ ta có

$$((SBC), (ABCD)) = \widehat{SHI}.$$

Do các mặt (SBC) , (SCD) , (SDA) tạo với $(ABCD)$ các góc bằng nhau nên các khoảng cách từ I đến các cạnh CD , DA bằng nhau từ đó tính được $SI = IH \cdot \tan \widehat{SIH}$

Đỉnh S cách đều các đỉnh A , B , C , D nên tâm hình chữ nhật là chân đường cao hạ từ đỉnh xuống đáy.



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$.

$AC \cap DB = \{O\}$. Do S các đều các đỉnh

$A, B, C, D \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow SB = SD = BD = a\sqrt{5}$ nên $\triangle SBD$ là tam giác đều

$$\Rightarrow SO = \frac{BD\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}.$$

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên (SAB) , (SAC) , (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc là 30° , 45° , 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) nằm trong tam giác ABC .

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8(4+\sqrt{3})}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4(4+\sqrt{3})}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{3})}$

Hướng dẫn giải

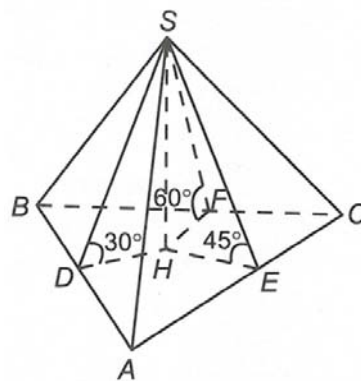
Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) .

Kẻ $HD \perp AB (D \in AB)$, $HE \perp AC (E \in AC)$,

$HF \perp BC (F \in BC)$.

Ta có $HD = SH \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{3}SH$, $HE = SH \cdot \cot 45^\circ = SH$,



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) .

Kẻ $HD \perp AB (D \in AB)$

$HE \perp AC (E \in AC)$

$HF \perp BC (F \in BC)$

$$HF = SH \cdot \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} SH$$

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ mà $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HAC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} SH \left(1 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot a = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow SH = \frac{3a}{2(4 + \sqrt{3})}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2(4 + \sqrt{3})} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8(4 + \sqrt{3})}$$

Tam giác ABC bị chia thành 3 tam giác nhỏ do đó

$$S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HAC}.$$

Diện tích các tam giác nhỏ biểu diễn theo cạnh SH và hệ thức lượng các tam giác vuông. Từ đó tìm được SH.

Dạng 6. Thể tích lăng trụ đứng

1. Phương pháp

Hình lăng trụ đứng: Là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Các mặt bên là các hình chữ nhật. Các mặt bên đều vuông góc với đáy.

Hình lăng trụ đều: Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Các mặt bên đều là các hình chữ nhật bằng nhau.

Ví dụ: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

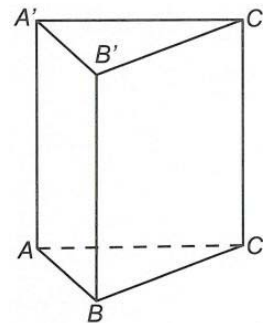
A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{3a^3 \sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\triangle ABC$ đều cạnh a $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

Chọn B.

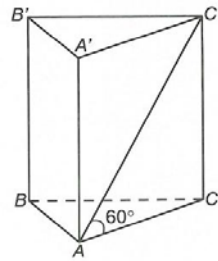
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$ cạnh $C'A$ hợp với mặt đáy góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{2}$.
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



ΔABC vuông tại A có $AC = AB \cdot \tan \widehat{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Ta có $\left(\widehat{C'A(ABC)}\right) = \widehat{C'AC} = 60^\circ$.

$\Delta ACC'$ vuông tại C có $CC' = AC \cdot \tan \widehat{C'AC} = a$.

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Bài tập 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cạnh BC' hợp với mặt bên $(ACC'A)$ góc 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $a^3\sqrt{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.
C. $2a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

ΔABC vuông tại A có:

$$AC = AB \cdot \tan \widehat{ABC}$$

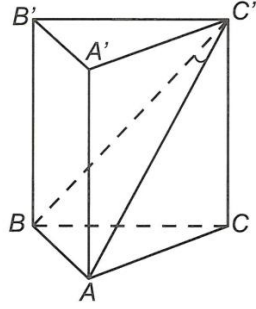
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC.$$

Ta có $\left(\widehat{C'A(ABC)}\right) = \widehat{C'AC}$

$$= 60^\circ$$

từ đó dựa vào hệ thức lượng trong $\Delta ACC'$ vuông tại C tính được

$$CC' = AC \cdot \tan \widehat{C'AC}.$$



Ta có $BA \perp (ACC'A') \Rightarrow (\widehat{BC', (ACC'A')}) = \widehat{BC'A} = 30^\circ$.

ΔABC vuông tại A có $AB = AC \cdot \cot \widehat{ABC} = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$\Delta ABC'$ vuông tại A có

$$AC' = AB \cdot \cot \widehat{AC'B} = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a.$$

$\Delta ACC'$ vuông tại C có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot CC' = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot 2a\sqrt{2} = a^3 \sqrt{6}.$$

Bài tập 3: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $V = \frac{7a^3}{8}$.

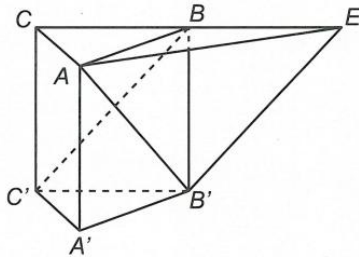
B. $V = a^3 \sqrt{6}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{8}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi E là điểm đối xứng của C qua điểm $B \Rightarrow AB = \frac{1}{2} CE = a$.

Khi đó tam giác ACE vuông tại $A \Rightarrow AE = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Tứ giác $BC'B'E$ là hình bình hành $\Rightarrow BC' \parallel B'E$.

Do $AB' \perp BC' \Rightarrow AB' \perp B'E$.

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

dựa vào hệ thức lượng trong ΔABC vuông tại A tính được

$$AC' = AB \cdot \cot \widehat{AC'B}.$$

$\Delta ACC'$ vuông tại C tính được chiều cao lăng trụ

$$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2}$$

Ta lấy điểm E là điểm đối xứng với C qua B .

Khi đó tam giác ACE vuông tại A .

Tứ giác $BC'B'E$ là hình bình hành $\Rightarrow BC' \parallel B'E$.

Do $AB' \perp BC'$

$\Rightarrow AB' \perp B'E$.

Ta có $BC' = B'E = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B' .

$$\text{Nên tính được } AB' = \frac{AE}{\sqrt{2}}.$$

Mặt khác, ta có $BC' = B'E = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B'

$$\Rightarrow AB' = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Xét tam giác $AA'B'$ vuông tại A'

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}.$$

Bài tập 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{2}$, góc giữa hai đường thẳng AC' và BA' bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3}{2}$.
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Lấy D, D' sao cho $ABDC.A'B'D'C$ là hình hộp

$$\Rightarrow BD' \parallel AC' \Rightarrow \widehat{A'BD'} = (\widehat{AC', BA'}) = 60^\circ$$

Mà $AB = AC \Rightarrow A'B = BD' \Rightarrow \triangle A'BD'$ đều.

Do $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật,

$$A'D' = B'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow A'B = a\sqrt{2} = AA' = a.$$

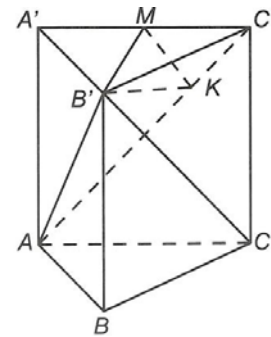
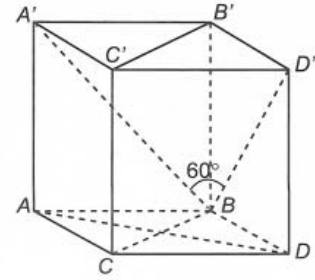
$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{2}.$$

Bài tập 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ bằng

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{6}$.

Dựa vào định lý Py-ta-go trong tam giác $AA'B'$ vuông tại A tính được

$$AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2}.$$



C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi M là trung điểm của $A'C'$. Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M \perp A'C' \Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$.

Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ là $V_{B'.ACC'A'} = \frac{1}{3} B'M \cdot AA' \cdot AC$.

Ta có $B'M = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$.

Do $MB' \perp (AA'C'C) \Rightarrow MB' \perp AC'$.

Kẻ $MK \perp AC' \Rightarrow B'K \perp AC'$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ là

$$\widehat{MKB'} \Rightarrow \widehat{MKB'} = 60^\circ.$$

Trong tam giác vuông MKB' ta có

$$\tan 60^\circ = \frac{MB'}{MK} \Rightarrow MK = \frac{MB'}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong tam giác vuông MKC' ta có

$$\tan \widehat{MC'K} = \frac{MK}{\sqrt{MC'^2 - MK^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{6a^2}{36}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mặt khác trong tam giác vuông $AA'C$ ta có

$$AA' = A'C'. \tan \widehat{MC'K} = \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} = a$$

$$\text{Vậy } V_{B'.AA'C'C} = \frac{1}{3} B'M \cdot AA' \cdot AC = \frac{1}{3} a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3}{3}.$$

Gọi M là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M \perp A'C' \Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$.

Dạng 7. Thể tích lăng trụ xiên

1. Phương pháp

Lăng trụ xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy. Chiều cao là khoảng cách từ một đỉnh bất kì của mặt đáy này đến mặt đáy đối diện. Để tính chiều cao ta dựa vào hệ thức lượng trong tam giác.

Ví dụ: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $AA' = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AC , góc tạo bởi AA' với (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$.

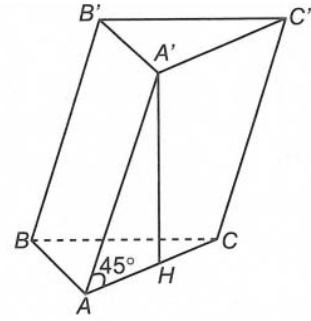
B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $a^3\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$;

$$\widehat{(AA', (ABC))} = \widehat{A'AH} = 45^\circ.$$

Xét tam giác $A'HA$ vuông cân tại H có

$$A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2},$$

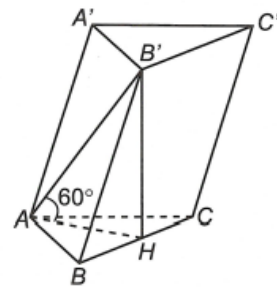
$$\Rightarrow AH = A'H = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AB = AC = 2AH = a\sqrt{6}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 3a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 3a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{2}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đây là tam giác ABC vuông tại A , $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với chân đường cao H kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC , góc tạo bởi AB' với (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là



A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

B. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. a^3 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $B'H \perp (ABC)$

$$\Rightarrow \widehat{(AB', (ABC))} = \widehat{B'AH} = 60^\circ$$

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Xét tam giác AHB' vuông tại H có

$$B'H = AH \cdot \tan \widehat{B'AH} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot B'H = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^3$$

Bài tập 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình thang cân $ABCD$ có $AC \perp BD$, $AC = 2a$, cạnh AA' tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \frac{1}{3}HC$. Thể tích của khối

lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $2a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AC = BD = 2a$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2a^2$$

$$AH = \frac{1}{3}HC \Rightarrow AH = \frac{1}{4}AC = \frac{a}{2}$$

$$\widehat{(AA', (ABCD))} = \widehat{A'AH} = 60^\circ$$

Xét tam giác $A'HA$ vuông tại H có

$$\text{Ta có } \widehat{(AB', (ABC))} = \widehat{B'AH}$$

$$= 60^\circ$$

Tam giác ABC vuông tại A có

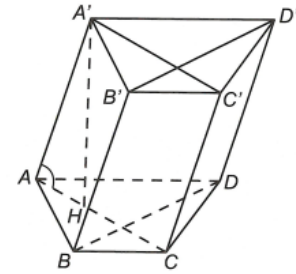
$$\text{nên: } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong

tam giác AHB' vuông tại H ta

tính được chiều cao:

$$B'H = AH \cdot \tan \widehat{B'AH}$$



Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo $AC \perp BD$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

$$\widehat{(AA', (ABCD))} = \widehat{A'AH} = 60^\circ$$

$$A'H = AH \cdot \tan \widehat{A'AH} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = 2a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a^3 \sqrt{3}.$$

Bài tập 3. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi N là trung điểm BC , $AN = A'M = 2$.

Kẻ $AE \perp BB'$ tại E , $AF \perp CC'$ tại F .

Ta có $EF \cap MN = \{H\}$ nên H là trung điểm EF .

$$\text{Lại có } \begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'.$$

Khi đó

$$d(A, BB') = AE = 1, d(A, CC') = AF = \sqrt{3}, d(C, BB') = EF = 2$$

$$\text{Ta có } AE^2 + AF^2 = EF^2 \Rightarrow \triangle AEF \text{ vuông tại } A \Rightarrow AH = \frac{EF}{2} = 1.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ MN \parallel AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AEF) \Rightarrow MN \perp AH.$$

$$\text{Xét } \triangle AMN \text{ vuông tại } A \text{ có } AM = \frac{AH \cdot AN}{\sqrt{AN^2 - AH^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

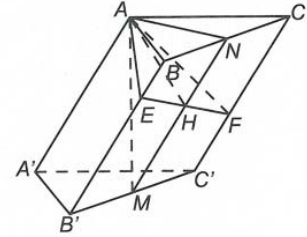
$$\text{Ta có } \begin{cases} (AA'NM) \perp (ABC) \\ (AA'NM) \perp (AEF) \\ (AA'NM) \cap (ABC) = AN \\ (AA'NM) \cap (AEF) = AH \end{cases} \Rightarrow ((ABC), (AEF)) = \widehat{HAN}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AE \cdot AF = S_{\triangle AEF} \cdot \frac{AH}{AN} \xrightarrow{\frac{AH}{AN} = \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = AE \cdot AF = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AM = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $A'HA$ vuông tại H ta tính được chiều cao:

$$A'H = AH \cdot \tan \widehat{A'AH}$$



Gọi N là trung điểm BC .

$$AN = A'M = 2.$$

Kẻ $AE \perp BB'$ tại E ,

$AF \perp CC'$ tại F .

Ta có $EF \cap MN = \{H\}$ nên H

là trung điểm EF .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases}$$

$$\Rightarrow AA' \perp (AEF)$$

$$\Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$$

Khi đó $d(A, BB') = AE = 1$,

$$d(A, CC') = AF = \sqrt{3},$$

$$d(C, BB') = EF = 2.$$

$\triangle AMN$ vuông tại A ta tính được chiều cao AM .

Diện tích tam giác AEF tính theo công thức

$$S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \widehat{HAN}$$

Tổng quát các dạng bài này:

$$V = \frac{d_{(A, BB')} \cdot d_{(A, CC')} \cdot A'M^2}{\sqrt{4A'M^2 - d_{(C, BB')}^2}}$$

Dạng 8 . Thể tích hình hộp

1. Phương pháp

Hình hộp: Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình bình hành.

Hình hộp đứng: Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình chữ nhật.

Hình hộp chữ nhật: Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Sáu mặt của hình hộp chữ nhật đều là các hình chữ nhật.

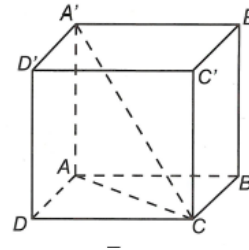
Hình lập phương: Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Sáu mặt đều là các hình vuông.

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C = 4\sqrt{3}$.

Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $2\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{3}$.
C. 64. D. 125.

Hướng dẫn giải



Đặt $AB = x \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$.

$\Delta A'AC$ vuông tại A có

$$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3};$$

$$A'C = 4\sqrt{3} \Rightarrow x\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4^3 = 64.$$

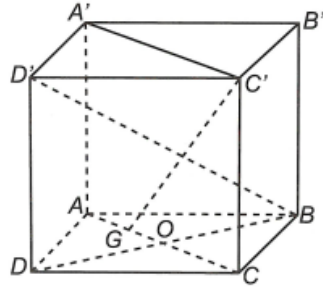
Chọn C.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , góc tạo bởi $C'G$ và mặt đáy bằng 30° . Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$.
C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Do $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \triangle ACD$ đều $\Rightarrow AC = a$ và

$$CG = CO + OG = \frac{2}{3} AC = \frac{2a}{3}.$$

Lại có $(\widehat{C'G, (ABCD)}) = \widehat{C'GC} = 30^\circ$

Xét $\triangle C'CG$ vuông tại C có $CC' = CG \cdot \tan \widehat{C'GC} = \frac{2a\sqrt{3}}{9}$

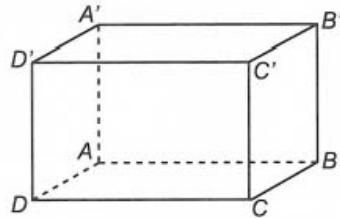
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot CC' = \frac{a^3}{3}$

Chọn B.

Bài tập 2. Một tấm bìa hình vuông có cạnh 50cm. Người ta cắt bỏ đi ở một góc tấm bìa hình vuông cạnh 16cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Thể tích khối hộp chữ nhật là

- A. 5184 cm^3 . B. 8704 cm^3 .
C. 4608 cm^3 . D. 18496 cm^3 .

Hướng dẫn giải



$AA' = BB' = CC' = DD' = 16cm$ nên $ABCD$ là hình vuông có $AB = 50 - 2 \cdot 16 = 18(cm)$.

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AC \cdot AD = 18 \cdot 18 \cdot 16 = 5184(cm^3)$.

Chọn A.

$$S_{ABCD} = AD \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$$

Góc tạo bởi $C'G$

và mặt đáy

$$(\widehat{C'G, (ABCD)}) = \widehat{C'GC}$$

Áp dụng hệ thức

lượng trong

$\triangle C'CG$ vuông tại

C tính được

$$CC' = CG \cdot \tan \widehat{C'GC}$$

.

Khi cắt bỏ một góc

tấm bìa một hình

vuông cạnh 16cm

thì cạnh đáy còn lại

là

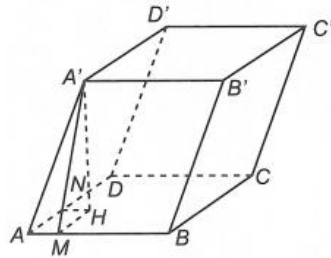
$$50 - 2 \cdot 16 = 18(cm),$$

chiều cao là 16cm.

Bài tập 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = \sqrt{15}$, $AD = 5$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với mặt phẳng đáy những góc 30° và 60° , cạnh bên có độ dài bằng 1. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. 21. B. $\frac{15\sqrt{65}}{12}$.
C. $\frac{15\sqrt{65}}{13}$. D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 5\sqrt{15}$

Kẻ $A'H \perp (ABCD)$, $MH \perp AB$, $NH \perp AD$ ($M \in AB$; $N \in AD$)

$$\Rightarrow \left(\widehat{(ABB'A'), (ABCD)} \right) = \widehat{A'MH} = 30^\circ;$$

$$\left(\widehat{(ADD'A'), (ABCD)} \right) = \widehat{A'NH} = 60^\circ$$

Đặt $A'H = x$, khi đó $A'N = \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$,

$$AM = NH = \frac{x\sqrt{3}}{3}, A'M = 2x.$$

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại M có

$$A'A^2 = AM^2 + A'M^2 \Rightarrow 1 = 4x^2 + \frac{x^2}{3} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{39}}{39}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = 5\sqrt{15} \cdot \frac{3\sqrt{39}}{39} = \frac{15\sqrt{65}}{13}.$$

Chọn B.

Ta có

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 5\sqrt{15}$$

Kẻ

$$A'H \perp (ABCD),$$

$$MH \perp AB, NH \perp AD$$

$$\Rightarrow \left(\widehat{(ABB'A'), (ABCD)} \right)$$

$$\left(\widehat{(ADD'A'), (ABCD)} \right)$$

Xét $\Delta A'AM$ vuông

tại M có

$$A'A^2 = AM^2 + A'M^2$$

$$\text{Mà } A'N = \frac{A'H}{\sin 60^\circ},$$

$$AM = NH, A'M = 2$$

Dạng 9. Tỷ số thể tích khối chóp

1. Phương pháp

So sánh thể tích khối chóp cần tính với một khối đa diện khác đã biết trước hoặc dễ dàng tính thể tích.

Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của các bài toán sau

Kết quả 1.

Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy A', B', C' tương ứng trên các cạnh SA, SB, SC

Khi đó

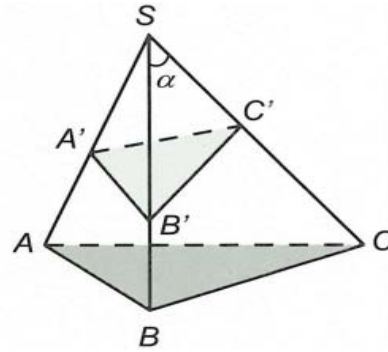
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Chú ý: Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm A', B', C' có thể có điểm $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C'$

Thông thường, đối với bài toán này, đề thường cho điểm chia đoạn theo tỉ lệ, song song, hình chiếu...

Công thức chỉ đúng khi đáy là tam giác. Nếu đáy là tứ giác, ngũ giác... ta phải phân chia đáy thành các tam giác và tính tổng thể tích các khối có đáy là tam giác.

Chứng minh



Đặt $\alpha = \widehat{B'SC'} = \widehat{BSC}$

Ta có $\frac{d(A', (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{SA'}{SA}$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{A'.SB'C'}}{V_{A.SBC}} = \frac{\frac{1}{3}d(A', (SB'C')) \cdot S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3}d(A, (SBC)) \cdot S_{\Delta SBC}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}d(A', (SBC)) \cdot \frac{1}{2}SB' \cdot SC' \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{3}d(A, (SBC)) \cdot \frac{1}{2}SB \cdot SC \cdot \sin \alpha} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

(điều phải chứng minh)

Chứng minh

1. Chứng minh $a + c = b + d$

Kết quả 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt

SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' với

$$\frac{SA}{SA'} = a; \frac{SB}{SB'} = b; \frac{SC}{SC'} = c; \frac{SD}{SD'} = d$$

$$(a; b; c; d > 0)$$

Khi đó ta có hai công thức quan trọng sau

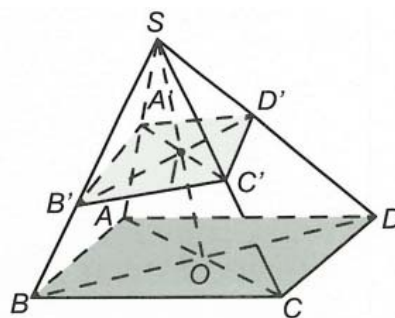
1.

$$a + c = b + d$$

2.

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a + b + c + d}{4abcd}$$

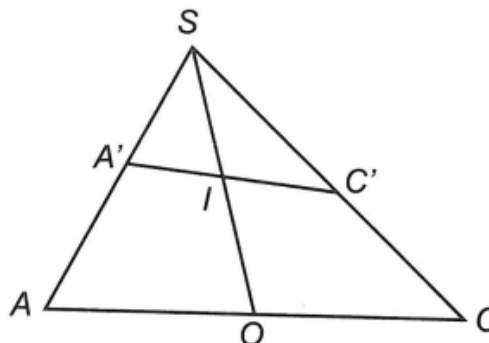
Chú ý: Các công thức 1, 2 chỉ áp dụng cho hình chóp có đáy là hình bình hành. Các công thức này được ứng dụng rất nhiều trong các bài toán tìm thiết diện cũng như thể tích khối đa diện nên tận dụng khi làm trắc nghiệm để không phải làm theo phương pháp chia nhỏ đáy thành các tam giác.



Gọi

O là

tâm hình bình hành, I là giao điểm của SO và



($A'B'C'D'$)

$$\text{Ta có } S_{SAO} = S_{SOC} \Rightarrow \frac{S_{SA'I}}{S_{SAO}} + \frac{S_{SC'I}}{S_{SCO}} = \frac{2S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA' \cdot SI \cdot \sin \widehat{A'SI}}{SA \cdot SO \cdot \sin \widehat{ASO}} + \frac{SC' \cdot SI \cdot \sin \widehat{C'SI}}{SC \cdot SO \cdot \sin \widehat{CSO}}$$

$$= 2 \cdot \frac{SA' \cdot SC' \cdot \sin \widehat{A'SC'}}{SA \cdot SC \cdot \sin \widehat{ASC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA' \cdot SI}{SA \cdot SO} + \frac{SC' \cdot SI}{SC \cdot SO} = 2 \cdot \frac{SA' \cdot SC'}{SA \cdot SC}$$

$$\text{Nhân cả hai vế của đẳng thức với } \frac{SA \cdot SC \cdot SO}{SA' \cdot SC' \cdot SI}$$

$$\text{ta được } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI} \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$$

Hay $a + c = b + d$ (điều phải chứng minh)

$$2. \text{ Chứng minh } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} &= \frac{V_{S.A'B'C'}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.A'D'C'}}{2V_{S.ADC}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{acd} \right) = \frac{d+b}{2abcd} \end{aligned}$$

$$\text{Do } a+c=b+d \text{ suy ra } b+d = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$$

(điều phải chứng minh)

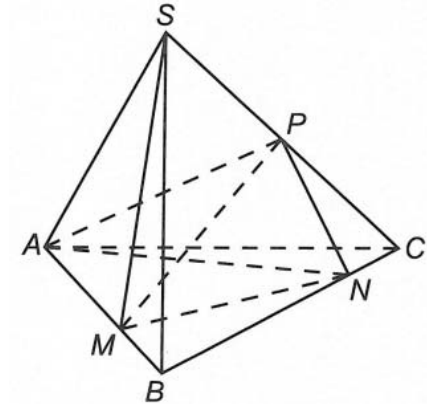
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp SABC, trên các cạnh AB, BC, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = 2MB, BN = 4NC, SP = PC$. Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.BMN và A.CPN là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{5}{6}$. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{B.MNS}}{V_{B.ACS}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BS}{BS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{V_{A.CPN}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{C.ANP}}{V_{C.ABS}} = \frac{CA}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CP}{CS} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{A.CNP}} = \frac{4}{15} : \frac{1}{10} = \frac{8}{3}$$

Bài tập 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng

(SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỷ lệ $\frac{V_1}{V_2}$

gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 0,11.

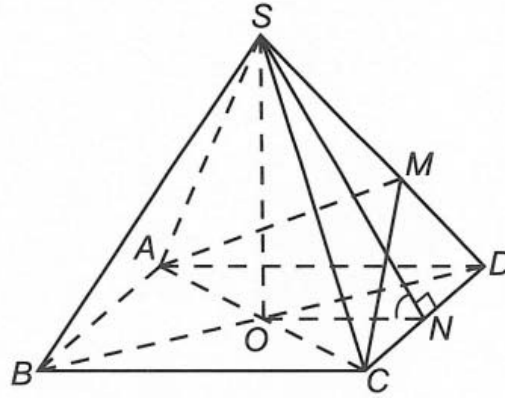
B. 0,13.

C. 0,7.

D. 0,9.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$

Gọi N là trung điểm CD

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp SN, CD \perp ON \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SCD), (ABCD)} = \widehat{SNO} = \alpha$$

Kẻ $CM \perp SD$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$$

$\Rightarrow SD \perp (ACM) \Rightarrow (ACM) \perp (SAD)$ nên mặt phẳng (P) là (ACM)

$$\text{Xét tam giác SON vuông tại O có } SN = \frac{ON}{\cos \widehat{SNO}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3a}{2}$$

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$$

Xét tam giác SOD vuông tại O có

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CM \cdot SD = \frac{1}{2} SN \cdot CD \Rightarrow CM = \frac{SN \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{3a}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$$

Xét tam giác MCD vuông tại M có

$$DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MACD}}{2 \cdot V_{SACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS} \cdot \frac{DA}{DC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow V_{MACD} = \frac{1}{10} V_{SABCD}$$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối $MACD$ và $SABCM$

$$V_{SABCD} = V_{MACD} + V_{SABCM} \Rightarrow V_{SABCM} = \frac{9}{10} V_{SABCD}$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}} = \frac{1}{9} \approx 0,11$$

Tổng quát: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α . Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số thể tích của hai khối đa diện là $\frac{V_1}{V_2} = \cos^2 \alpha$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } SD &= \sqrt{SN^2 + ND^2} = \sqrt{ON^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \widehat{SNO}} + ND^2} \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CM \cdot SD = \frac{1}{2} SN \cdot CD$$

$$\Rightarrow CM = \frac{SN \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{a}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot a}{\frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{a \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$$

$$\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MACD}}{2 \cdot V_{SACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS} \cdot \frac{DA}{DC} \cdot \frac{DC}{DA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{a \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}}{\frac{a}{2 \cos \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$$

$$V_{MACD} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} V_{SABCD} \Rightarrow V_{SABCM} = \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}\right) V_{SABCD} = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha} V_{SABCD}$$

$$\text{Do vậy } \frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}} = \cos^2 \alpha.$$

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a$; $SC = 2a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng V . Tỉ số $\frac{6V}{a^3}$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

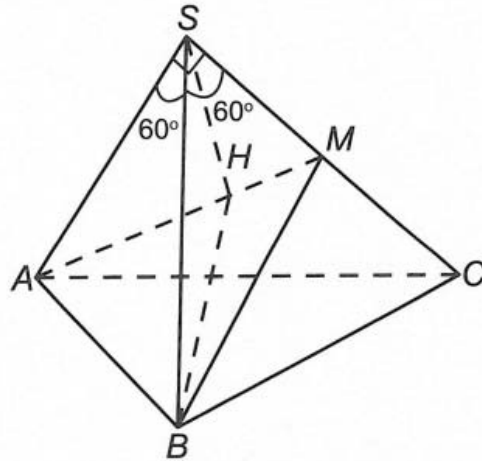
B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Gọi M là trung điểm SC.

Ta có $SM = a \Rightarrow \triangle SAM$ vuông cân tại S.

Gọi H là trung điểm của AM.

$$\text{Ta có } AM^2 = \sqrt{SA^2 + SM^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{1}{2} AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vì $SM = SB = a$ và $\widehat{BSC} = 60^\circ$ nên $\triangle BSM$ đều

$$\Rightarrow BM = a$$

ΔSAB có $SA = SB = a$; $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều $\Rightarrow AB = SA = a$

Suy ra $AB = BM = a \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B.

$$\text{Mặt khác } AB^2 + BM^2 = 2a^2 \text{ và } AM^2 = 2a^2 \Rightarrow AB^2 + BM^2 = AM^2$$

$$\Rightarrow \Delta ABM \text{ vuông cân tại B (định lý Py-ta-go đảo)} \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có } SH^2 + BH^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow SH^2 + BH^2 = SB^2 = a^2$$

$\Rightarrow \Delta SHB$ vuông cân tại H (định lý py-ta-go đảo).

Ta có $SH \perp AM, SH \perp HB \Rightarrow SH \perp (ABM)$.

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AB.BM = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{3} SH.S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABM}} = \frac{SC}{SM} = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{S.ABM} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \frac{6V}{a^3} = \sqrt{2}$$

Tổng quát: Cho chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{ASC} = \gamma$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA = 2SA'; SB = 3SB'; SC = 4SC'$, mặt phẳng $(A'B'C')$ cắt cạnh SD tại D' . Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

bằng

A. $\frac{1}{24}$.

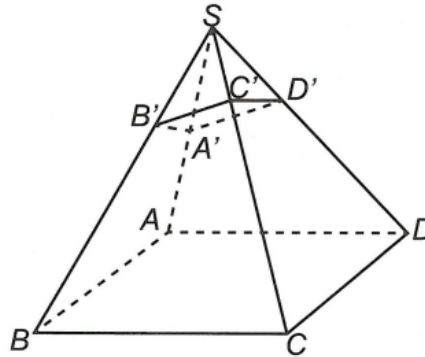
B. $\frac{1}{26}$.

C. $\frac{7}{12}$.

D. $\frac{7}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Cách 1. Phân chia đáy thành 2 tam giác

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} \Rightarrow 2 + 4 = 3 + \frac{SD}{SD'} \Rightarrow \frac{SD}{SD'} = 3 \Rightarrow SD = 3SD'$$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{24} S_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \Rightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{24} S_{S.ACD}$$

$$\Rightarrow V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{V_{S.ABC} + V_{S.ACD}}{24} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{24}$$

Cách 2. Áp dụng trực tiếp công thức

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'}}{4 \cdot \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} \cdot \frac{SD}{SD'}} = \frac{2+4+3+3}{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{24}$$

Dạng 10. Tỷ số thể tích khối lăng trụ

1. Phương pháp

Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của bài toán

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh

AA', BB', CC' sao cho

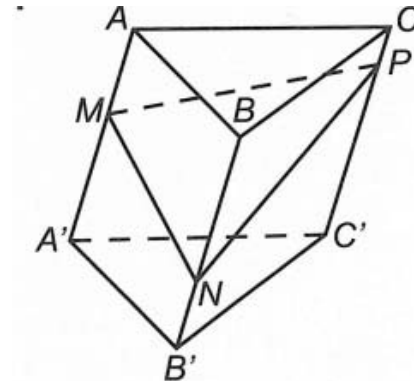
$$\frac{AM}{AA'} = a, \frac{BN}{BB'} = b, \frac{CP}{CC'} = c$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3}$$

Đặc

biệt:

$$\frac{V_{A.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a}{3}, \frac{V_{M.BCPN}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{b+c}{3}$$



Ta có

$$\begin{aligned} V_{A.BCC'B'} &= V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} \\ &= V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2V_{ABC.A'B'C'}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{3} d(M; (ABC)) \cdot S_{ABC}}{d(A'; (ABC)) \cdot S_{ABC}}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{d(M; (ABC))}{d(A'; (ABC))} = \frac{1}{3} \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3} a$$

Suy ra

$$V_{M.ABC} = \frac{a}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

Ta có

$$AM \parallel (BCC'B') \Rightarrow d(M; BCPN) = d(A; BCPN)$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = V_{A.BCPN}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{M.BCPN}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{V_{A.BCPN}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(BN + CP).d(C; BB')}{BB'.d(C; BB')} = \frac{BN + CP}{2BB'}$$

$$= \frac{BN}{2BB'} + \frac{CP}{2BB'} = \frac{BN}{2BB'} + \frac{CP}{2CC'} = \frac{b+c}{2}$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = \frac{b+c}{2} V_{A.BCC'B'}$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = \frac{b+c}{2} \cdot \frac{2V_{ABC.A'B'C'}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = \frac{b+c}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

Mặt khác

$$V_{ABCMNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} = \frac{a+b+c}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = MA', BN = 3NB', CP = 3PC'$. Đặt V_1 là thể tích của khối đa diện $ABCMNP$, V_2 là thể

tích khối đa diện còn lại. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{3}{2}$.

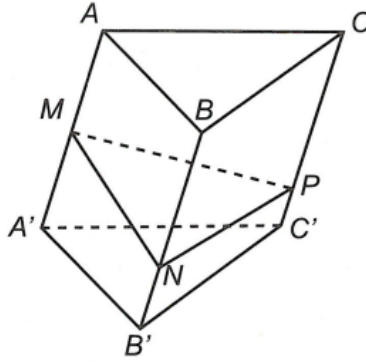
B. 2.

C. 3.

D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $MA = MA' \Rightarrow \frac{MA}{AA'} = \frac{1}{2}$; $BN = 3NB' \Rightarrow \frac{BN}{BB'} = \frac{3}{4}$; $CP = 3PC' \Rightarrow \frac{CP}{CC'} = \frac{3}{4}$

Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$

Suy ra $\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{2}{3}V \Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2$

Bài tập 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V và độ dài cạnh bên $AA' = 6$. Trên cạnh $A'A, B'B, C'C$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = 2, BN = x, CP = y$ với x, y là các số dương thỏa mãn $xy = 12$. Biết rằng thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{1}{2}V$. Giá trị của $x^2 + y^2$ bằng

A. 24.

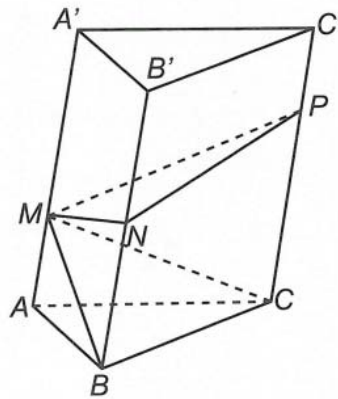
B. 25.

C. 10.

D. 17.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}$; $\frac{BN}{BB'} = \frac{x}{6}$; $\frac{CP}{CC'} = \frac{y}{6}$; $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{6} + \frac{y}{6} \right) = \frac{1}{2}$.

Suy ra $x + y = 7 \Rightarrow (x + y)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49 - 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Dạng 11: Tỷ số thể tích khối hộp

1. Phương pháp

Cho hình khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại

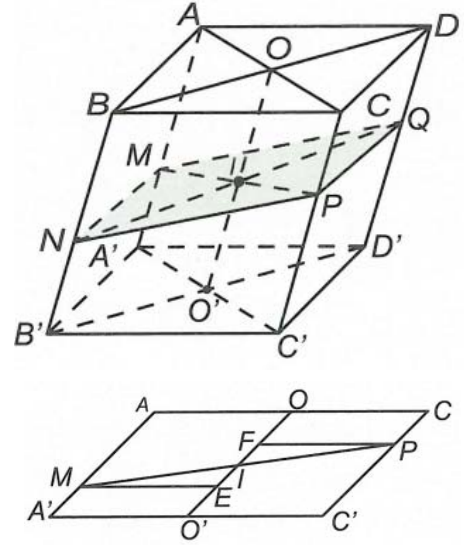
M, N, P, Q sao cho

$$\frac{AM}{AA'} = a, \frac{BN}{BB'} = b, \frac{CP}{CC'} = c, \frac{DQ}{DD'} = d$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{V_{ABDC.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} &= \frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ &= \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d) \end{aligned}$$

Chứng minh



Xét mặt phẳng $ACC'A'$

Từ M, P ta lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AC cắt OO' theo thứ tự E, F

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} &= \frac{OE}{OO'} + \frac{OF}{OO'} \\ &= \frac{OI + IE}{OO'} + \frac{OI - IF}{OO'} = \frac{2OI}{OO'} \end{aligned}$$

Tương tự xét mặt phẳng $BDD'B'$

$$\text{Ta cũng có } \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} = \frac{2OI}{OO'}$$

Do đó

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \Rightarrow a + c = b + d$$

Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành

hai khối $ABC.A'B'C'$ và $ACD.A'C'D'$

Áp dụng tỉ số thể tích của khối lăng trụ tam giác ta được

$$\begin{aligned} \frac{V_{ABDC.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} &= \frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ &= \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d) \end{aligned}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có N là trung điểm CC' . Mặt phẳng (α) đi qua AN cắt các cạnh BB', DD' lần lượt tại M, P. (α) chia khối lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng bằng V_1 và V_2 ($V_1 < V_2$). Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

- A. $\frac{7}{3}$. B. 2. C. 3. D. $\frac{5}{2}$.

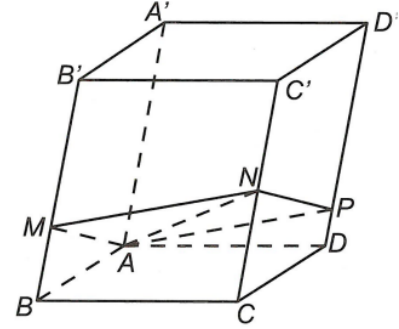
Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có

$$\frac{V_{ABCDPNM}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{AA'}{AA'} + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{ABCDPNM}}{V_{AMNP.A'B'C'D'}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 3$$

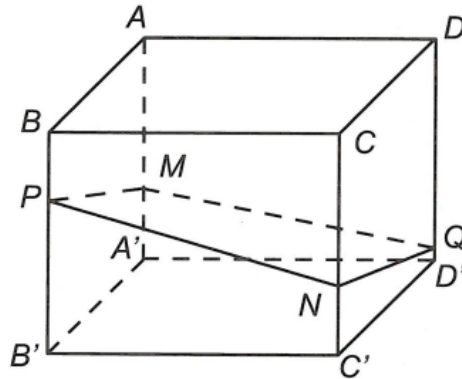


Bài tập 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $36cm^3$. Gọi hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AA', CC' sao cho $AM = 2A'M, CN = 3C'N$. Một mặt phẳng đi qua M, N lần lượt cắt cạnh BB', DD' tại P và Q. Thể tích khối $ABCDMPNQ$ bằng

- A. $18cm^3$. B. $22cm^3$. C. $10,5cm^3$. D. $25,5cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



$$\text{Ta có } \frac{V_{ABCDMPNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{17}{24}$$

$$V_{ABCDMPNQ} = \frac{17}{24} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{17}{24} \cdot 36 = 25,5cm^3$$

Bài tập 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', DD' sao cho $AM = 2A'M, 2BN = 3B'N; 3CP = 4C'P; 4DQ = 5D'Q$. Thể tích khối $ABCDMNPQ$ bằng

A. $\frac{572V}{945}$.

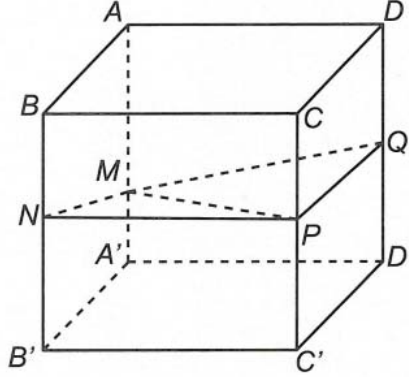
B. $\frac{13V}{21}$.

C. $\frac{26V}{45}$.

D. $\frac{559V}{945}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có $\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{26}{21}$; $\frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} = \frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{52}{45}$

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} > \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$$

Cạnh MP sẽ lệch trên. Khối đa diện lồi $ABCDMNPQ$ được chia thành hai khối đa diện theo cạnh MP là $BACNMP$ và $DACQMP$.

Ta có $\frac{V_{BACNMP}}{V_{BACB'A'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \right) = \frac{193}{315}$

$$\Rightarrow V_{BACNMP} = \frac{193}{315} V_{BACB'A'C'} = \frac{193V}{630}$$

$$\frac{V_{DACQMP}}{V_{DADC'A'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{DQ}{DD'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \right) = \frac{113}{189}$$

$$\Rightarrow V_{DACQMP} = \frac{113}{189} V_{DADC'A'C'} = \frac{113V}{378}$$

Vậy $V_{ABCDMNPQ} = V_{BACNMP} + V_{DACQMP} = \frac{193V}{630} + \frac{113V}{378} = \frac{572V}{945}$

Dạng 12. Tách hình để tính thể tích

1. Phương pháp

Để tính thể tích các khối đa diện phức tạp ta không tính trực tiếp mà tính gián tiếp thông **Ví dụ:** Cắt khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bởi các mặt phẳng $(AB'D')$, $(CB'D')$, $(B'AC)$

qua việc tính thể tích các khối đơn giản (khối chóp, khối lăng trụ).

+ Khối đa diện A được tạo bởi các khối đơn giản $A_1, A_2, \dots, A_n$. Khi đó

$$V_A = V_{A_1} + V_{A_2} + \dots + V_{A_n}.$$

+ Khối đa diện A được bổ sung thêm các khối cơ bản $A_1, A_2, \dots, A_n$ để tạo thành khối cơ bản B

$$\text{Khi đó } V_A = V_B - (V_{A_1} + V_{A_2} + \dots + V_{A_n}).$$

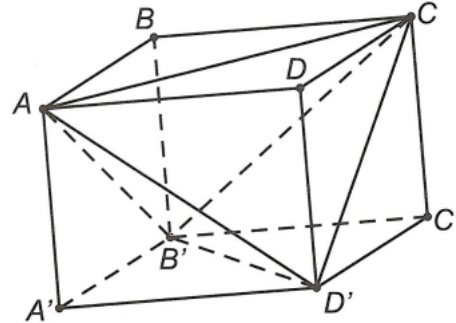
+ Ta có thể sử dụng khôi phục lại hình ảnh ban đầu để tính toán dễ dàng hơn.

+ Sử dụng phương pháp trải hình trên mặt phẳng để dễ hình dung và tính toán thuận tiện hơn.

, $(D'AC)$ ta được khối đa diện có thể tích lớn nhất là

- A. $A'AB'D'$. B. $D'ADC$.
C. $ACB'D'$. D. $CC'B'D'$.

Hướng dẫn giải



Cắt khối hộp bởi các mặt phẳng $(AB'D')$, $(CB'D')$, $(B'AC)$, $(D'AC)$ ta được 5 khối tứ diện $AA'B'D'$, $B'ABC$, $CC'B'D'$, $D'DAC$, $AB'D'C$.

Gọi V là thể tích của khối hộp.

$$V_{AA'B'D'} = V_{B'ABC} = V_{CC'B'D'} = V_{D'DAC} = \frac{1}{6}V$$

Suy ra $V_{ACB'D'} = \frac{1}{3}V$ nên tứ diện $ACB'D'$ có

thể tích lớn nhất

Chọn C.

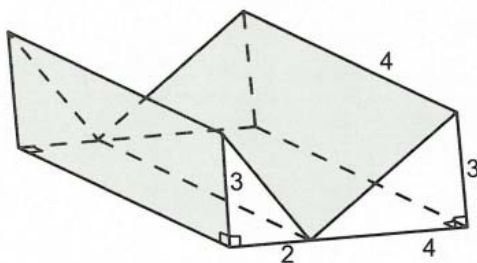
2. Bài tập

Bài tập 1. Một khúc gỗ có dạng và độ dài các cạnh được cho như hình vẽ. Thể tích khúc gỗ là

- A. $V = 12$. B. $V = 96$. C. $V = 36$. D. $V = 24$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Khúc gỗ được chia thành 2 phần, mỗi phần là một lăng trụ tam tam giác có đáy là các tam giác vuông, chiều cao khối lăng trụ bằng 4.

Thể tích khối gỗ là $V = V_1 + V_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 36$.

Bài tập 2. Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là 2 cm, 3 cm và 6 cm. Thể tích của khối tứ diện $A.CB'D'$ bằng

A. $8cm^3$.

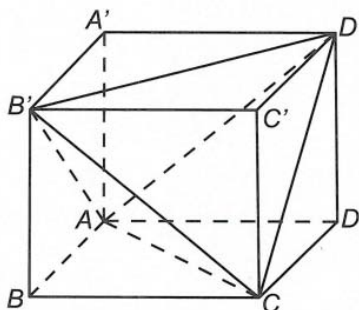
B. $12cm^3$.

C. $16cm^3$.

D. $4cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Khối hộp được tạo thành từ 5 khối $B.AB'C$; $D.ACD'$; $A'.B'AD'$; $C.B'C'D'$; $A.CB'D'$.

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{B.AB'C} + V_{D.ACD'} + V_{A'.B'AD'} + V_{C.B'C'D'} + V_{A.CB'D'}$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4V_{B.AB'C} + V_{A.CB'D'} \Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{B.AB'C}$

$\Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4 \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 12cm^3$.

Bài tập 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M , N , P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AA' , BB' , CC' sao cho $AM = \frac{1}{2} AA'$; $BN = \frac{2}{3} BB'$; $CP = \frac{3}{4} CC'$. Thể tích khối chóp $M.BCPN$ là

A. $\frac{7V}{36}$.

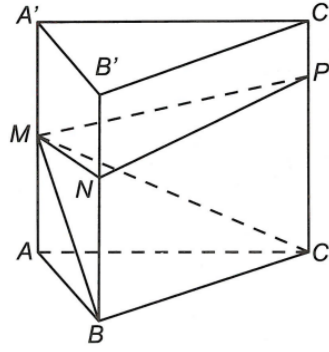
B. $\frac{17V}{36}$.

C. $\frac{7V}{18}$.

D. $\frac{11V}{18}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $V = V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC}$

$$\Rightarrow V_{M.ABC} = V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}MA.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.AA'.S_{ABC} = \frac{V}{6}.$$

Mặt khác $\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{1}{3} \left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{B'N}{BB'} + \frac{C'P}{CC'} \right)$

$$\Rightarrow V_{A'B'C'.MNP} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) V_{A'B'C'.ABC} \Rightarrow V_{A'B'C'.MNP} = \frac{13}{36} V.$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = V_{A'B'C'.ABC} - V_{M.ABC} - V_{A'B'C'.MNP} = V - \frac{V}{6} - \frac{13}{36} V = \frac{17V}{36}.$$

Bài tập 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Hai cạnh AC, BD cắt nhau tại O. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SAD) cắt khối chóp S.ABCD tạo thành hai khối có thể tích lần lượt là $V_1; V_2 (V_1 < V_2)$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{5}{11}.$

B. $\frac{3}{5}.$

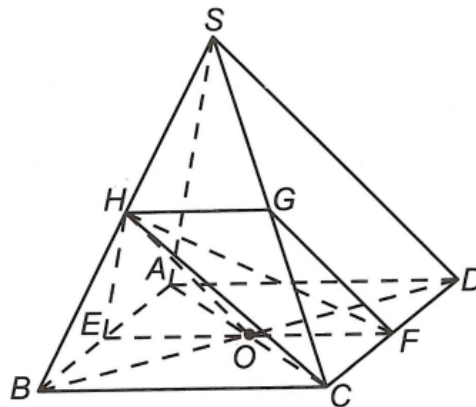
C. $\frac{7}{13}.$

D. $\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1:



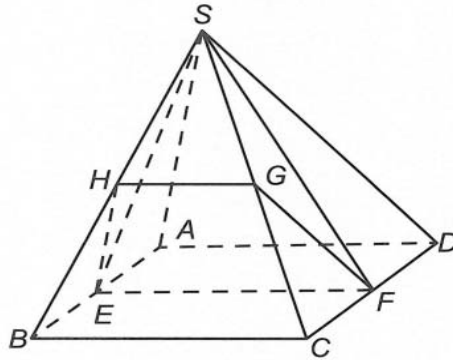
Gọi h, V, S_{ABCD} lần lượt là chiều cao, thể tích và diện tích đáy của hình chóp $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) cắt hình chóp $S.ABCD$ tạo thành thiết diện như hình vẽ. Khi đó $V_{HGFCBE} = V_1$ và thể tích phần còn lại là $V_2 (V_1 < V_2)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } V_{HGFCBE} &= V_{H.BEO} + V_{H.BOC} + V_{H.OCF} + V_{G.HCF} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} S_{\triangle BEO} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} S_{\triangle BOC} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} S_{\triangle OCF} + \frac{1}{2} V_{B.GCF} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} (S_{\triangle BEO} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle OCF}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} S_{\triangle BCF} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} S_{BEFC} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{S_{ABCD}}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} h \cdot \frac{S_{ABCD}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} h S_{ABCD} \right) = \frac{1}{4} V + \frac{1}{16} V = \frac{5}{16} V.
 \end{aligned}$$

Suy ra $V_1 = \frac{5}{16} V$. Do đó $V_2 = V - V_1 = V - \frac{5}{16} V = \frac{11}{16} V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.

Cách 2:



Ta có $V_{S.ADFE} = \frac{1}{3} h S_{ADFE} = \frac{1}{3} h \cdot \frac{S}{2} = \frac{V}{2}$.

Lại có $\frac{V_{S.EFGH}}{V_{S.EFCB}} = \frac{\frac{SE}{SB} + \frac{SF}{SC} + \frac{SH}{SD} + \frac{SG}{SC}}{4 \cdot \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SC} \cdot \frac{SH}{SD} \cdot \frac{SG}{SC}} = \frac{1+1+2+2}{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow V_{S.EFGH} = \frac{3}{8} V_{S.EFCB} = \frac{3V}{16}$.

Do đó $V_{SADFGHE} = V_{S.ADFE} + V_{S.EFGH} = \frac{V}{2} + \frac{3V}{16} = \frac{11V}{16} = V_2$ suy ra $V_1 = \frac{5}{16} V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.

Bài tập 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N . Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng

- A. $V = 2a^3$. B. $V = 3a^3$. C. $V = \frac{9a^3}{4}$. D. $V = \frac{11a^3}{3}$.

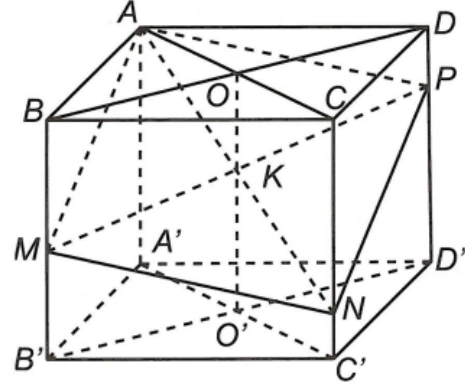
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = (2a)^3 = 8a^3$.

Cách 1: Gọi O, O' lần lượt là tâm hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$, gọi $K = OO' \cap MP$, khi đó $N = AK \cap CC'$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } OK &= \frac{1}{2}(DP + BM) \\ &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3a}{4} \Rightarrow CN = 2OK = \frac{3a}{2}. \\ S_{BMNC} &= \frac{1}{2}(BM + CN).BC = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{2}\right).2a = \frac{5a^2}{2}. \\ V_{A.BMNC} &= \frac{1}{3}.S_{BMNC}.AB = \frac{1}{3}.\frac{5a^2}{2}.2a = \frac{5a^3}{3}. \\ S_{DPNC} &= \frac{1}{2}(DP + CN).CD = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right).2a = 2a^2. \\ V_{A.DPNC} &= \frac{1}{3}.S_{DPNC}.AD = \frac{1}{3}.2a^2.2a = \frac{4a^3}{3}. \\ V &= V_{A.BMNC} + V_{A.DPNC} = \frac{5a^3}{3} + \frac{4a^3}{3} = 3a^3. \end{aligned}$$



Cách 2:

Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích khối hộp, ta có

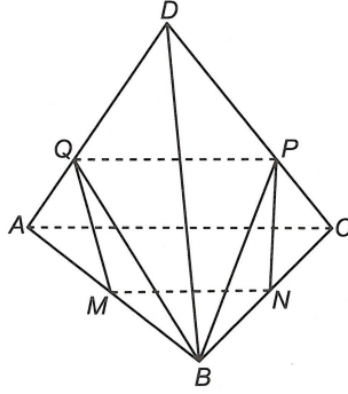
$$\begin{aligned} \frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'} \right) \Rightarrow \frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} \\ \Rightarrow V_{AMNPBCD} &= \frac{3}{8}.8a^3 = 3a^3. \end{aligned}$$

Bài tập 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC . Điểm P trên cạnh CD sao cho $PD = 2CP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Thể tích khối đa diện $BMNPQD$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$. B. $\frac{25\sqrt{2}}{432}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{48}$. D. $\frac{13\sqrt{2}}{432}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $MN \parallel AC$ và $PQ = (MNP) \cap (ACD) \Rightarrow PQ \parallel AC \Rightarrow \frac{DQ}{DA} = \frac{DP}{DC} = \frac{2}{3}$.

Thể tích khối tứ diện đều ABCD là $V = V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Chia khối đa diện cần tính thành các khối tứ diện D.PQB; B.MNQ; B.PQN.

Ta có $V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}$.

Trong đó $V_{D.PQB} = \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{DB}{DB} \cdot \frac{DP}{DC} \cdot V = \left(\frac{2}{3}\right)^2 V = \frac{4}{9} V$.

$V_{B.MNQ} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot V_{B.ACQ} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} \cdot V = \frac{1}{4} \cdot \frac{AQ}{AD} \cdot V = \frac{1}{12} V$.

$V_{B.PQN} = \frac{BP}{BP} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{PQC}}{S_{ACD}} \cdot V = \frac{1}{6} V$.

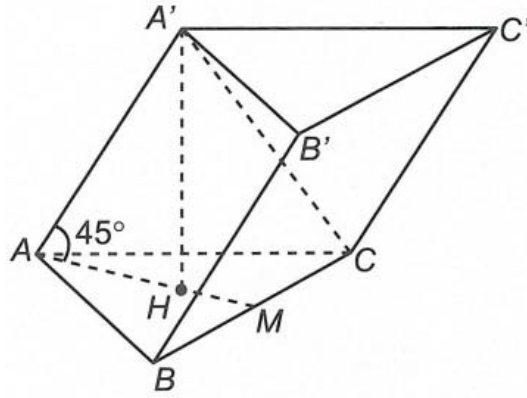
Vậy $V_{BMNPQD} = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right) V = \frac{25\sqrt{2}}{432}$.

Bài tập 7. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh AA'=2a và tạo với đáy một góc 45° . Thể tích khối tứ diện ACA'B' là

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC).

$$\Delta ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Ta có } (\widehat{AA', (ABC)}) = \widehat{A'AH} = 45^\circ.$$

$$\Delta A'AH \text{ vuông tại H có } A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = a\sqrt{2}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \frac{a^3 \sqrt{6}}{4}.$$

Khối lăng trụ được chia làm ba khối chóp C.A'B'C', B'.ABC và A.CA'B'.

$$\text{Ta có } V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \text{ và } V_{B'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{ACA'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} - V_{B'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Bài tập 8. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng 15. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh A'B', B'C', BC sao cho M là trung điểm của A'B', B'N = $\frac{4}{5} B'C'$ và BP = $\frac{3}{5} BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích khối đa diện lồi AQPCA'MNC' bằng

A. $\frac{23}{64}.$

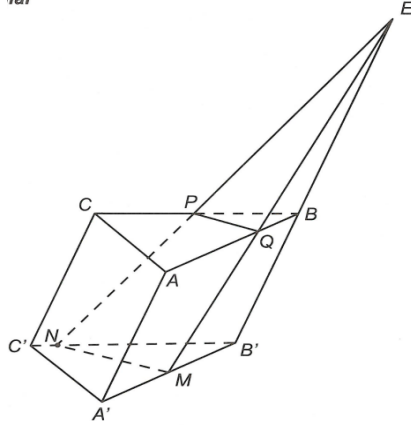
B. $\frac{49}{16}.$

C. $\frac{83}{8}.$

D. $\frac{45}{4}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $\frac{EB}{EB'} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{BP}{B'N} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{d(E, (A'B'C'))}{d(B, (A'B'C'))} = \frac{EB'}{BB'} = 4 \Rightarrow d(E, (A'B'C')) = 4d(B, (A'B'C'))$$

Lại có $\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}} = \frac{B'M}{B'A'} \cdot \frac{B'N}{B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{E.MB'N} &= \frac{1}{3} d(E, (MB'N)) \cdot S_{MB'N} = \frac{1}{3} \cdot 4d(B, (A'B'C')) \cdot \frac{2}{5} S_{A'B'C'} \\ &= \frac{8}{15} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8}{15} \cdot 15 = 8. \end{aligned}$$

$$\frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MB'N}} = \frac{EP}{EN} \cdot \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{EB}{EB'} = \left(\frac{EB}{EB'} \right)^3 = \left(\frac{3}{4} \right)^3 = \frac{27}{64} \Rightarrow V_{E.QPB} = \frac{27}{64} V_{E.MB'N}.$$

Suy ra $V_{BQP.B'MN} = V_{E.MB'N} - V_{E.BQP} = V_{E.MB'N} - \frac{27}{64} V_{E.MB'N} = \frac{37}{64} V_{E.MB'N} = \frac{37}{64} \cdot 8 = \frac{37}{8}$.

Vậy $V_{AQPCA'MNC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{BQP.B'MN} = 15 - \frac{37}{8} = \frac{83}{8}$.

Dạng 13. Phức hình và trải phẳng

Bài tập 1. Cho tứ diện ABCD có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ$; $AB=a$; $AC = a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng 30° . Thể tích của tứ diện ABCD bằng

- A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựng $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$;

$\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác AHB có $AB=a$, $\widehat{ABH} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle HAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow AH=AB=a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC=a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{CBA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$.

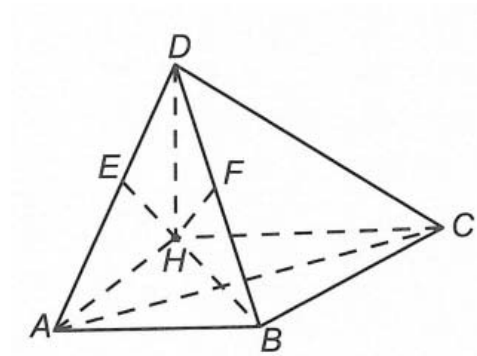
Dựng $\begin{cases} HE \perp DA (E \in AD) \\ HF \perp DB (F \in BD) \end{cases} \Rightarrow HE \perp (DAB) \text{ và } HF \perp (DBC)$.

Suy ra $(\widehat{DBA}, \widehat{DBC}) = (\widehat{HE}, \widehat{HF}) = \widehat{EHF}$

Đặt $DH=x$, khi đó $HE = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $HF = \frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}$.

Suy ra $\cos \widehat{EHF} = \frac{HE}{HF} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{x^2+2a^2}}{\sqrt{2x^2+2a^2}} \Rightarrow x=a$.

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{6}$.



Bài tập 2 Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 4$; $AC = BD = 5$; $AD = BC = 6$. Thể tích của khối tứ diện ABCD là

- A. $\frac{15\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{15\sqrt{6}}{2}$
C. $\frac{45\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{45\sqrt{6}}{2}$

Chú ý: Cho khối tứ diện gần đều có độ dài các cạnh

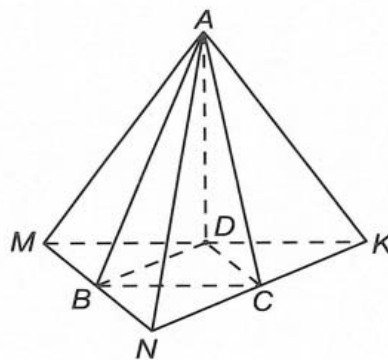
$$\begin{cases} AB = CD = a \\ AC = BD = b \\ AD = BC = c \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựng tứ diện AMNK sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, NK, KM.

Tứ diện AMNK có AM, AN, AK đôi một vuông góc.



Đặt

$$\begin{cases} x = a^2 + b^2 - c^2 \\ y = b^2 + c^2 - a^2 \\ z = a^2 + c^2 - b^2 \end{cases}$$

Khi đó

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{xyz}$$

$$\begin{cases} AM^2 + AN^2 = 64 \\ AN^2 + AK^2 = 100 \\ AK^2 + AM^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = 54 \\ AN^2 = 10 \\ AK^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = 3\sqrt{6} \\ AN = \sqrt{10} \\ AK = 3\sqrt{10} \end{cases}$$

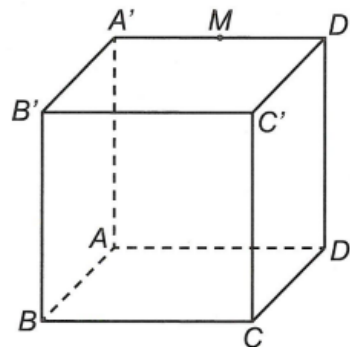
$$V_{AMNK} = \frac{1}{6} AM \cdot AN \cdot AK = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 15\sqrt{6}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{V_{AMNK}}{4} = \frac{15\sqrt{6}}{4}$$

Bài tập 3. Một con kiến đang ở vị trí M là trung điểm cạnh $A'D'$ của một chiếc hộp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 5cm.

Con kiến muốn bò qua sáu mặt của chiếc hộp rồi quay trở lại M. Quãng đường bò đi ngắn nhất của con kiến là

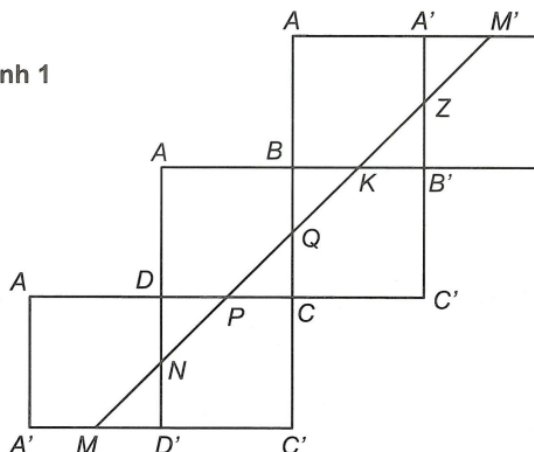
- A. $16\sqrt{2}cm$. B. $15\sqrt{2}cm$.
C. $12\sqrt{2}cm$. D. $13\sqrt{2}cm$.



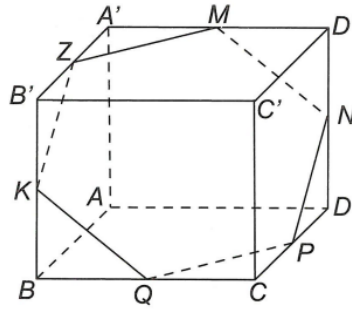
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hình 1



Hình 2



Trải sáu mặt phẳng của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ 1. Để đi đường ngắn nhất từ M đến M' ($M \equiv M'$ hay M' là trung điểm $A'D'$ trên mặt khai triển) thì con kiến cần bò theo đoạn MM' . Trên chiếc hộp, đường đi ngắn nhất của con kiến là đường $MNPQKZM$ như hình 2 với N, P, Q, K, Z lần lượt là trung điểm của $DD', CD, BC, BB', A'B'$.

Quãng đường ngắn nhất con kiến bò là đoạn $MNPQKZM$.

Ta có $MNPQKZM = MN + NP + PQ + QK + KZ + ZM$.

Các đoạn thẳng con kiến bò trên các mặt hình lập phương đều có độ dài bằng nửa độ dài đường chéo hình vuông.

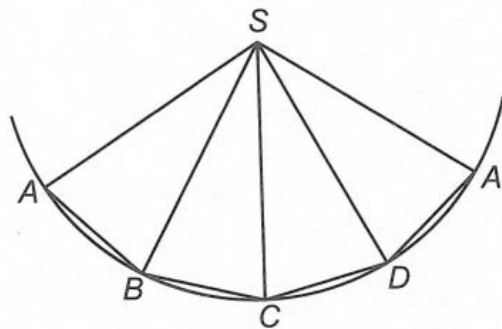
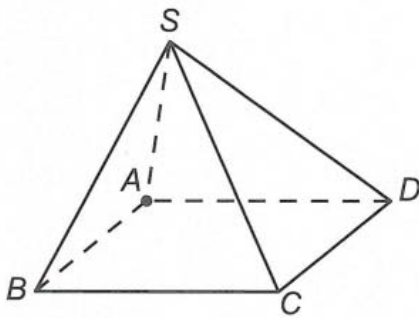
Do đó quãng đường con kiến bò ngắn nhất là $6 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$

Bài tập 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ một con kiến bò từ đỉnh A của đáy để đi tất cả các mặt xung quanh rồi trở về vị trí A . Biết cạnh bên bằng 6cm, cạnh đáy bằng 4cm. Quãng đường ngắn nhất mà con kiến đi là

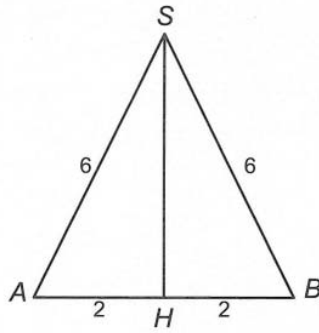
- A. 13,48cm. B. 10,25cm. C. 12,05cm. D. 11,73cm.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Trái hình chóp thành hình như hình vẽ trên. Khi đó quãng đường ngắn nhất con kiến phải bò là AA_1



$$\text{Ta có } \sin \widehat{ASH} = \frac{AH}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{ASH} = 19^{\circ}28' \Rightarrow \widehat{ASA_1} = 8.19^{\circ}28' = 155^{\circ}46'$$

$$\Rightarrow AA_1 = \sqrt{SA^2 + SA_1^2 - 2SA.SA_1 \cos \widehat{ASA_1}} = 11,73cm$$

Bài tập 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a$ và $\widehat{SAB} = \frac{11\pi}{24}$. Gọi Q là trung điểm cạnh SA. Trên các cạnh SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm M, N, P không trùng với các đỉnh của hình chóp. Giá trị nhỏ nhất của tổng $AM + MN + NP + PQ$ theo a là

A. $\frac{a\sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{24}}{3}$

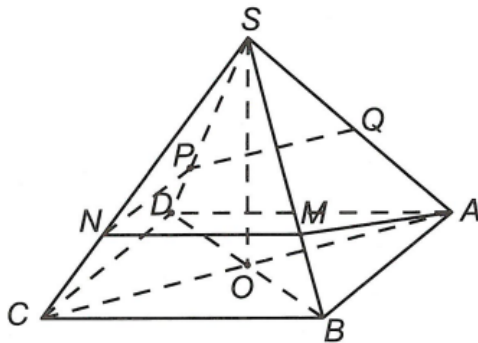
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

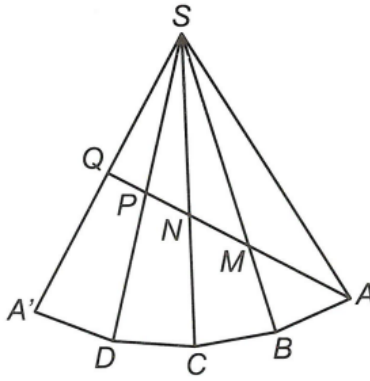
D. $\frac{a\sqrt{3} \sin \frac{11\pi}{12}}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Trái phẳng



Do hình chóp tứ giác đều nên mỗi mặt bên đều là các tam giác cân, theo giả thiết $\widehat{SAB} = \frac{11\pi}{24}$ nên

$$\widehat{ASB} = \pi - \frac{22\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải các mặt bên thành một mặt phẳng ta được hình vẽ như trên sao cho khi ghép lại thì $A \equiv A'$. Khi đó, tổng $AM + MN + NP + PQ$ là tổng các đường gấp khúc nên tổng này nhỏ nhất nếu xảy ra các điểm A, Q, M, N, P thẳng hàng và Q là hình chiếu của A trên SA' .

$$\text{Đồng thời theo (1) ta có } \widehat{ASA'} = 4 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

Suy ra $\triangle ASA'$ là tam giác đều.

$$\text{Vậy } AQ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ hay GTNN của tổng } AM + MN + NP + PQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bài tập 6 Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 30^\circ$, $SA = 1$. Lấy B', C' lần lượt thuộc cạnh SB, SC sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tỉ số $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. 0,55.

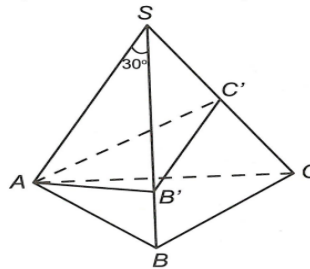
B. 0,65.

C. 0,45.

D. 0,75.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Trả ph

Đồng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

c) Cho $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$

Ta có $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Các bất đẳng thức cơ bản.

Các dạng hay sử dụng.

$$+) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}; a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$$

$$+) 4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$+) 3(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$+) (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

a. Dạng đa thức Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Cho 2 bộ số $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2): a_1, a_2, \dots, a_n$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

b. Dạng phân thức

Cho 2 bộ số $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2): a_1, a_2, \dots, a_n$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ với $\forall b_1, b_2, \dots, b_n > 0$.

$$\text{Ta có } \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Bài tập: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho $SC = a$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc α . Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{a^3}{16}$.

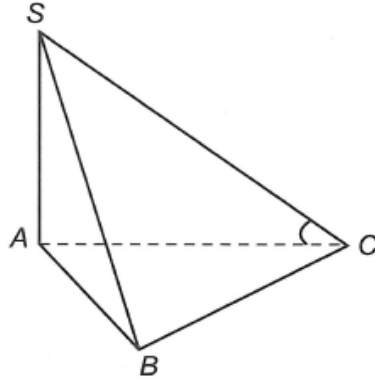
B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{27}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $\widehat{(SBC), (ABC)} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} = \alpha$

Xét ΔSAC vuông tại A có

$$\begin{cases} SA = SC \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha \\ AC = SC \cdot \cos \alpha = a \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} AC^2 \right) \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot (a \cos \alpha)^2 \cdot a \sin \alpha = \frac{a^3}{6} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha.$$

$V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi biểu thức

$$P = \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha \text{ đạt giá trị lớn nhất}$$

Cách 1:

Đặt $t = \sin \alpha$. Vì $0 < \alpha < 90^\circ$ nên $0 < \sin \alpha < 1$

$$\Rightarrow 0 < t < 1$$

Ta có $P = f(t) = (1 - t^2)t = -t^3 + t$ xác định và liên tục trên $(0; 1)$.

$$f'(t) = -3t^2 + 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (nhân)} \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$+\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\infty$
$f'(t)$		0		+	0	-
$f(t)$				$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max_{(0;1)} f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Vậy } \max V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6} \cdot P_{\max} = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{27} \text{ khi và chỉ khi } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 2:

Vì $0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0$

$$\Rightarrow P^2 = (1 - \sin^2 \alpha)^2 \sin^2 \alpha = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha)}{2}.$$

Áp dụng Cô-si cho 3 số dương $1 - \sin^2 \alpha, 1 - \sin^2 \alpha$ và $2 \sin^2 \alpha$, ta được:

$$\begin{aligned} & (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha) \\ & \leq \left[\frac{(1 - \sin^2 \alpha) + (1 - \sin^2 \alpha) + (2 \sin^2 \alpha)}{3} \right]^3 = \frac{8}{27} \\ & \Rightarrow \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha)}{2} \leq \frac{4}{27} \\ & \Rightarrow P_{\max}^2 = \frac{4}{27} \Rightarrow P_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $1 - \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$$\text{Vậy } \max V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6} \cdot P_{\max} = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{27}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho $SA = x$, $x \in (0; \sqrt{3})$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{16}$

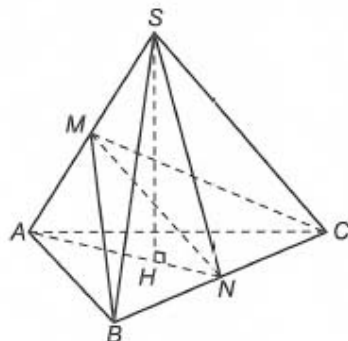
C. $\frac{1}{12}$

D.

$\frac{1}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Tổng quát:

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho $SA=x$, các cạnh còn lại đều bằng a (a là hằng số) với

Ta có tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC .

Ta có ΔSAB và ΔSAC là hai tam giác cân tại B và C nên $\begin{cases} SA \perp BM \\ SA \perp CM \end{cases}$

$\Rightarrow SA \perp (BCM) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $BM = CM = \sqrt{AB^2 - (AM)^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow \Delta BMC$ cân tại M .

Suy ra $MN \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAN)$.

Kẻ $SH \perp AN$. Do $BC \perp (SAN) \Rightarrow BC \perp SH \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có $MN = \sqrt{SN^2 - SM^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - x^2}$.

$S_{\Delta SAN} = \frac{1}{2} SA \cdot NM = \frac{1}{2} SH \cdot AN \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot NM}{AN} \Rightarrow SH = \frac{x \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{x \sqrt{3 - x^2}}{12} \leq \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{x^2 + 3 - x^2}{2} \right) = \frac{1}{8}$.

Vậy $\max V_{S.ABC} = \frac{1}{8}$ đạt được khi và chỉ khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) , với $\alpha < 45^\circ$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $4a^3$

B. $\frac{8a^3}{3}$

C. $\frac{4a^3}{3}$

D. $\frac{2a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

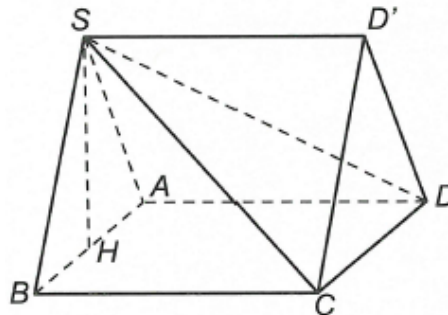
Chọn C

Gọi D' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SADD'$.

Khi đó $DD' \parallel SA$ mà $SA \perp (SBC)$

Nên $DD' \perp (SBC)$

Ta có $\widehat{(SD, (SBC))} = \alpha = \widehat{DSD'} = \widehat{SDA}$,



$x \in (0; a\sqrt{3})$

. Thể tích khối chóp

$S.ABC$ đạt

giá trị lớn

nhất là

$V_{S.ABC} = \frac{a^3}{8}$.

Do đó $SA = AD \cdot \tan \alpha = 2a \tan \alpha$.

Đặt $\tan \alpha = x, x \in (0;1)$

Gọi H là hình chiếu của S lên AB , ta có

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{4a^2}{3} \cdot SH.$$

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi SH lớn nhất.

Vì $\triangle SAB$ vuông tại S nên

$$SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{SA \sqrt{AB^2 - SA^2}}{AB} = \frac{2ax \sqrt{4a^2 - 4a^2 x^2}}{2a} = 2ax \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\Rightarrow SH \leq 2a \cdot \frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = a.$$

Từ đó $\max SH = a$ khi $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Vậy } \max V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} a \cdot 4a^2 = \frac{4a^3}{3}.$$

Bài tập 3. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$, cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2}$

B. $\frac{a^3}{8}$

C. $\frac{3a^3}{8}$

D.

$\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

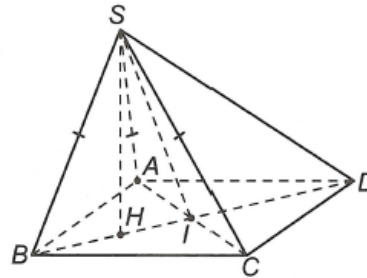
Chọn D

Gọi I là tâm hình thoi $ABCD$, H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$,

suy ra $H \in BI$.

Ta có $SI^2 = SA^2 - IA^2 = a^2 - IA^2$,

$IB^2 = AB^2 - IA^2 = a^2 - IA^2$ suy ra $SI = IB$.



Khi đó tam giác SBD vuông tại S .

Đặt $SD = x$.

$$\text{Ta có } SB \cdot SD = SH \cdot BD \Leftrightarrow a \cdot x = SH \cdot BD \Leftrightarrow SH = \frac{a \cdot x}{BD}$$

$$\text{Ta có } V_{SABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{3} \cdot \frac{ax}{BD} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{6} ax \cdot AC.$$

$$\text{Lại có } BD^2 = SB^2 + SD^2 = a^2 + x^2 \text{ suy ra } IB^2 = \frac{a^2 + x^2}{4}$$

$$\Rightarrow IA^2 = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra } AC = 2IA = 2\sqrt{\frac{3a^2 - x^2}{4}} = \sqrt{3a^2 - x^2}.$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{6} ax \cdot \sqrt{3a^2 - x^2} \leq \frac{a}{6} \cdot \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

Bài tập 4 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $T = 2$.

B. $T = \frac{5}{4}$.

C. $T = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

D. $T = \frac{13}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $AM = x, AN = y$.

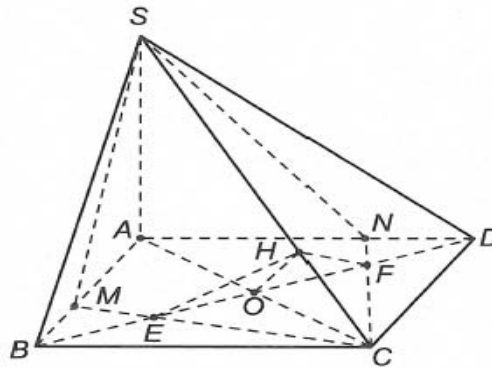
Gọi

$$\{O\} = AC \cap DB; \{E\} = BD \cap CM;$$

$$\{F\} = BD \cap CN.$$

H là hình chiếu vuông góc của

$$O \text{ trên } SC, \text{ khi đó: } HO = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$



$$\text{Ta có } \begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$$

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF . Suy ra $HE \perp HF$.

Mặt khác $V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y).$

Ta có $x > 0, y > 0$ và nếu $x \neq 2, y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM , khi đó

$$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

Tương tự $OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y}$ mà $OE.OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$

Nếu $x = 2$ hoặc $y = 2$ thì ta có $OE.OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$

Suy ra $V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3}[(x+2) + (y+2) - 4]$

$$= \frac{2}{3} \left[(x+2) + \frac{12}{x+2} - 4 \right].$$

Do đó $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = 1, AC = \sqrt{3}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là điểm H sao cho các mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với SH góc 30° và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V_{\max} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$

B. $V_{\max} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$

C. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$

D. $V_{\max} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$

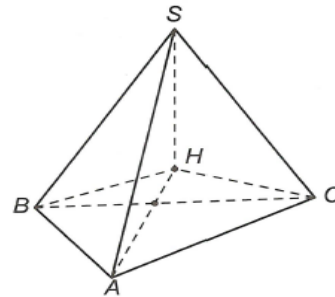
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\widehat{(SH, (SAB))} = \widehat{(SH, (SAC))} = 30^\circ$ nên hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) sẽ cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° .

Suy ra $d(H, AB) = d(H, AC) = d(H, BC)$

tức H hoặc là tâm nội tiếp hoặc là tâm bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác.



Ta có $S = \frac{\sqrt{3}}{2}; p = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ còn các cạnh $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1.$

$$\text{Khi đó } r = \frac{S}{p} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}; r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{3+\sqrt{3}}{2};$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Chiều cao chóp lớn nhất khi } SH_{\max} = r_a \sqrt{3} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{\max} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

Bài tập 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a , góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{4a^3\sqrt{7}}{49}.$

B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{27}.$

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}.$

D. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{75}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

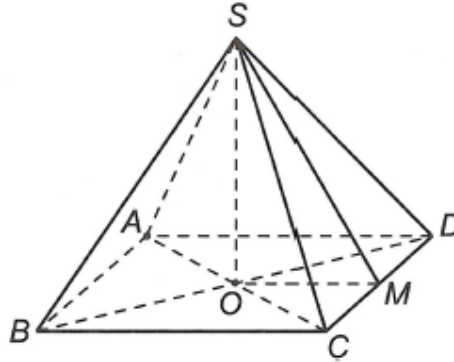
Gọi M là trung điểm của CD

$$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD), (ABCD)} \right) = \widehat{SMO} = \alpha.$$

Gọi độ dài một cạnh hình vuông là x .

Tam giác SMC vuông tại M có

$$SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$



Tam giác SOM vuông tại O có:

$$OM = SM \cdot \cos \widehat{SMO} = \cos \alpha \cdot \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \cos \alpha \cdot \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \left(a^2 - \frac{x^2}{4} \right) \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4a^2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{4a^2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{4a^2}{2 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{2 + \tan^2 \alpha}}.$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{4a^2}{2 + \tan^2 \alpha}.$$

Ta có: $SO = OM \cdot \tan \widehat{SMO} = \frac{x}{2} \cdot \tan \alpha = \frac{a \cdot \tan \alpha}{\sqrt{2 + \tan^2 \alpha}}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a^2}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{a \cdot \tan \alpha}{\sqrt{2 + \tan^2 \alpha}} = \frac{4a^3 \cdot \tan \alpha}{3\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}.$$

Do $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan \alpha > 0$. Thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất khi

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Ta xét $f(\alpha) = \frac{\tan^2 \alpha}{(2 + \tan^2 \alpha)^3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha}; \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha}; \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha}$.

Ta có $f(\alpha) = \frac{\tan^2 \alpha}{(2 + \tan^2 \alpha)^3} = \frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha}$

$$\leq \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \right) \right]^3 = \frac{1}{27}.$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $\max V_{SABCD} = \frac{4a^3}{3\sqrt{(2+1)^3}} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{27}$.

Bài tập 7. Một hình hộp chữ nhật có diện tích toàn phần là S . Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật là

A. $\frac{S\sqrt{S}}{3}$.

B. $\frac{S\sqrt{S}}{36}$.

C. $\frac{S\sqrt{6S}}{36}$.

D. $\frac{S\sqrt{3S}}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là a, b, c với $a, b, c > 0$.

Ta có $S = 2ab + 2ac + 2bc$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \geq 3\sqrt[3]{2ab \cdot 2ac \cdot 2bc} = 6\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$$

$$6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq S \Rightarrow a^2b^2c^2 \leq \frac{S^3}{216} \Rightarrow abc \leq \sqrt{\frac{S^3}{216}} = \frac{S\sqrt{6S}}{36}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hình hộp chữ nhật trở thành hình lập phương.

Bài tập 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A

. Khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$ và khoảng cách từ C đến (ABC') đều bằng

x không đổi, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Để thể

tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất thì góc α có giá trị gần nhất giá trị nào sau đây?

- A. 25° B. 35°
C. 45° D. 55°

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựng $AH \perp BC$ ($H \in BC$),

$CK \perp AC'$ ($K \in AC'$)

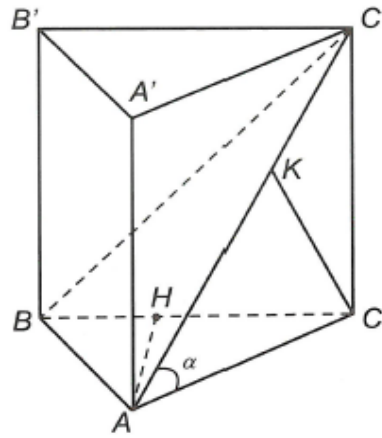
Ta có $d(AA'; (BCC'B')) = AH = x$ và

$d(C; (ABC')) = CK = x$

$\widehat{((ABC'); (ABC))} = \widehat{CAC'} = \alpha$.

Xét tam giác ACK vuông tại K có

$$AC = \frac{CK}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$



Xét tam giác ACC' vuông tại C có $CC' = AC \cdot \tan \alpha = \frac{x}{\sin \alpha} \cdot \tan \alpha = \frac{x}{\cos \alpha}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AB = \frac{AH \cdot AC}{\sqrt{AH^2 - AC^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2(1 - \sin^2 \alpha)}} = \frac{x}{\cos \alpha}.$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot CC' = \frac{x^3}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}.$$

Để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là nhỏ nhất thì $\sin \alpha \cos^2 \alpha$ lớn nhất.

Ta có $\sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{3} \right) = \frac{8}{54} \Rightarrow \sin \alpha \cos^2 \alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \geq \frac{3x^3\sqrt{3}}{4}.$$

Trong các hình hộp chữ nhật có cùng diện tích toàn phần thì hình lập phương thì có thể tích lớn nhất.

$$\text{Vậy } V_{\min} = \frac{3x^3\sqrt{3}}{4}.$$

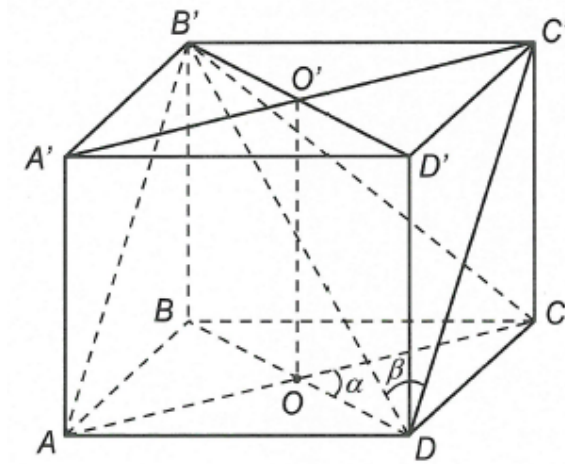
$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } 2\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha \approx 35^\circ.$$

Bài tập 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB < BC$ và $BD = 3\text{cm}$. Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ hợp với nhau một góc $\alpha \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Đường chéo $B'D$ hợp với mặt phẳng $(CDD'C')$ một góc $\beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Hai góc α, β thay đổi nhưng thỏa mãn hình hộp $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều. Giá trị lớn nhất thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

- A. $\sqrt{3} \text{ cm}^3$ B. $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$
C. $6\sqrt{3} \text{ cm}^3$ D. $12\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Hướng dẫn giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \left(\widehat{(ACC'A'); (BDD'B')} \right) = \widehat{COD} = \alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{CBD} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow BC = BD \cdot \cos \widehat{CBD} = 3 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Lại có } CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} = 3 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Ta có } \left(\widehat{B'D'; (CDD'C')} \right) = \widehat{B'DC'} = \beta$$

Do $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều nên $BC = CC'$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = BC \cdot CD \cdot CC' = 27 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Xét } \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^4 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \leq 6\sqrt{3}.$$

Dạng 15: Sử dụng thể tích để tính khoảng cách

1. Phương pháp

- Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta sử dụng phương pháp đổi đỉnh và

$$\text{áp dụng công thức } V = \frac{1}{3} h.S \Rightarrow h = \frac{3V}{S}.$$

- Trong đó V là thể tích khối đa diện, S là diện tích đáy và h là khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy.
- Để tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau ta áp dụng công thức

$$V = \frac{1}{6} AB.CD.\sin(\widehat{AB,CD}) d(AB;CD) \Rightarrow d(AB;CD) = \frac{6V}{AB.CD.\sin(\widehat{AB,CD})}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở B . Cạnh SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a, AB = b$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

B. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

C. $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$

D. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Hướng dẫn giải

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng chiều cao của hình chóp $A.SBC$.

Do đó:

$$d(A, (SBC)) =$$

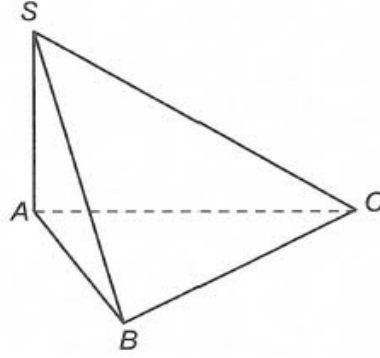
Chọn D

$$\text{Ta có } d(A, (SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{SBC}}.$$

Ta có:

$$V_{A.SBC} = V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} SA \cdot AB \cdot BC.$$

Mặt khác $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà ΔABC vuông tại B nên $BC \perp BA$.



Suy ra $BC \perp SB$ hay ΔSBC vuông tại B

$$\Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot BS.$$

$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} SA \cdot AB \cdot BC}{\frac{1}{2} SB \cdot BC} = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Bài tập 2. Cho tứ diện đều cạnh bằng 1 và điểm I nằm trong tứ diện.

Tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện là

A. $\sqrt{6}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét tứ diện đều $ABCD$ có diện tích

đáy là $\frac{\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $\sqrt{\frac{2}{3}}$ nên

thể tích tứ diện đều $ABCD$ là

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

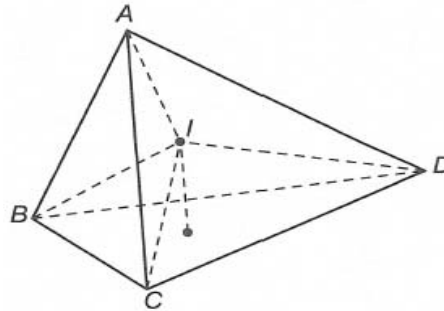
Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng

cách từ I đến các mặt

$(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$.

$$\text{Đặt } V_1 = V_{IBCD}, V_2 = V_{IACD}, V_3 = V_{IABD}, V_4 = V_{IABC}.$$

$$\text{Ta có } V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4.$$



Cách trắc nghiệm:

Chọn đặc biệt $I \equiv A$.

Khi đó tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện bằng

khoảng cách từ A đến

(BCD) và

bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$V_1 = \frac{1}{3} h_1 \cdot S_{BCD} \Rightarrow h_1 = \frac{3V_1}{S_{BCD}}.$$

$$\text{Tương tự } h_2 = \frac{3V_2}{S_{ACD}}, h_3 = \frac{3V_3}{S_{ABD}}, h_4 = \frac{3V_4}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Vậy } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V_1}{S_{BCD}} + \frac{3V_2}{S_{ACD}} + \frac{3V_3}{S_{ABD}} + \frac{3V_4}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Tứ diện } ABCD \text{ là tứ diện đều nên } S_{BCD} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3V}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Bài tập 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, AA' = 5$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $BM = 4AM$. Khoảng cách từ C' đến BD bằng 4. Khoảng cách từ điểm M đến $(BC'D)$ là

A. 2

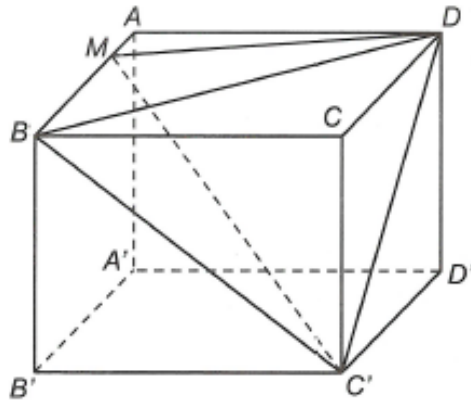
B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B



$$\text{Ta có } BM = 4AM \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow V_{M.BC'D} = \frac{4}{5} V_{A.BC'D}$$

$$\text{Mà } V_{A.BC'D} = V_{C'.ABD} = \frac{1}{3} CC' \cdot S_{ABD} = \frac{1}{6} CC' \cdot AB \cdot AD = 10 \Rightarrow V_{M.BC'D} = 8.$$

$$\text{Ta có } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5, S_{C'BD} = \frac{1}{2} d_{(C',BD)} \cdot BD = 10.$$

$$\text{Ta có } V_{M,BC'D} = \frac{1}{3} d_{(M,(BC'D))} \cdot S_{BC'D} \Rightarrow d_{(M,(BC'D))} = \frac{3V_{M,BC'D}}{S_{BC'D}} = \frac{12}{5}.$$

Bài tập 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4$, $AC = BD = 5$, $AD = BC = 6$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) là

A. $\frac{3\sqrt{6}}{7}.$

B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}.$

C. $\frac{3\sqrt{42}}{7}.$

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện gần đều, ta có

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-4^2 + 5^2 + 6^2)(4^2 - 5^2 + 6^2)(4^2 + 5^2 - 6^2)} = \frac{15\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } p = \frac{BC + CD + DB}{2} = \frac{4 + 5 + 6}{2} = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle BCD} = \sqrt{p(p-4)(p-5)(p-6)} = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Ta có } d(A, (BCD)) = \frac{3V_{A,BCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot \frac{15\sqrt{6}}{4}}{\frac{15\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{42}}{7}.$$

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Góc $\widehat{ASB} = 45^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. $\frac{6\sqrt{34}}{17}.$

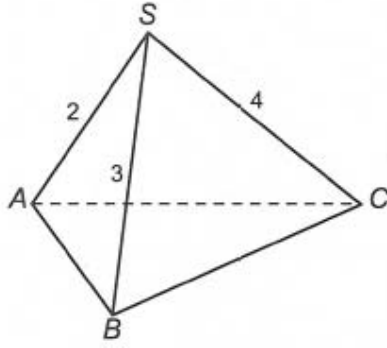
B. $\frac{4\sqrt{34}}{17}.$

C. $\frac{7\sqrt{34}}{17}.$

D. $\frac{3\sqrt{34}}{17}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C



Hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSA} = \gamma$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma} \Rightarrow V_{S.ABC} = 2.$$

Ta có: $AC = \sqrt{20}$; $BC = \sqrt{13}$.

$$\cos(SA, BC) = \left| \frac{SB^2 - SC^2 + AC^2 - AB^2}{2SA \cdot BC} \right| = \left| \frac{3^2 - 4^2 + 20 - 13 + 6\sqrt{2}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{13}} \right| = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{Suy ra } \sin(SA, BC) = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{Suy ra } d(SA, BC) = \frac{6V}{SA \cdot BC \cdot \sin(SA, BC)} = \frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Bài tập 6. Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Trên AB lấy hai điểm M, N trên

CD lấy hai điểm P, Q thỏa mãn $2 \frac{MN}{CD} + 3 \frac{PQ}{AB} = 1$. Thể tích khối MNPQ đạt giá trị

lớn nhất bằng

A. $\frac{V}{8}$.

B. $\frac{V}{16}$.

C. $\frac{V}{24}$.

D. $\frac{V}{32}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

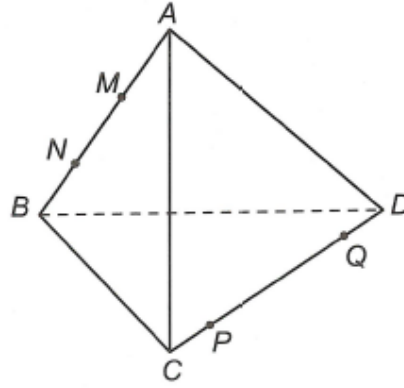
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD);$$

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6} MN \cdot PQ \cdot d(MN, PQ) \cdot \sin(MN, PQ).$$

Do $d(AB, CD) = d(MN, PQ)$ và

$\sin(AB, CD) = \sin(MN, PQ)$ nên

$$\frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{MN \cdot PQ}{AB \cdot CD}.$$



$$\text{Ta có } 2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} \geq 2\sqrt{2\frac{MN}{CD} \cdot 3\frac{PQ}{AB}} = 2\sqrt{6\frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6\frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB}} \leq \frac{1}{2} \text{ do } 2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB} \leq \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} \leq \frac{1}{24}.$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQ} \leq \frac{V}{24} \Rightarrow \text{Max} V_{MNPQ} = \frac{V}{24}.$$