SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **LẠNG SƠN**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH THAM DỰ** **KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2023-2024** **(Vòng 2)**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn thi: TOÁN** Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*) *Ngày thi thứ nhất* *(Đề thi gồm 01 trang, 04 câu)*

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a > 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{u_n^2}}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn, tìm $\lim u_n$.

Câu 2 (5,0 điểm). Xét các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn tính chất " Với bất kì hai số thực x, y luôn có: $\left|y^2 - P(x)\right| \le 2|x|$ khi và chỉ khi $\left|x^2 - P(y)\right| \le 2|y|$". Ta gọi S là tập tất cả các đa thức thỏa mãn điều kiện ở trên.

a) Hãy chứng minh rằng họ đa thức $P(x) = -\left(\dfrac{2x^2}{C} + C\right)$ với $C > 0$ và đa thức $Q(x) = x^2 + 1$ cùng thuộc vào tập S.

b) Giả sử rằng $P(x) \in S$ và $P(0) \ge 0$. Chứng minh rằng $P(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Giả sử G, L, K lần lượt là giao điểm của các đường thẳng EF, FD, DE với BC, CA, AB tương ứng.

a) Chứng minh rằng G, L, K thẳng hàng.

b) Lấy các điểm P, Q lần lượt đối xứng với D qua B, C tương ứng. Đường tròn bàng tiếp tâm J ứng với đỉnh A của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại N; gọi R là điểm đối xứng với N qua J. Chứng minh (PQR) tiếp xúc với (I).

Câu 4 (5,0 điểm). Một trường có 2007 nam và 2007 nữ. Mỗi học sinh tham gia không quá 100 câu lạc bộ; biết rằng bất kì hai bạn khác giới (1 nam và 1 nữ) tham gia ít nhất cùng một câu lạc bộ. Chứng minh rằng tồn tại một câu lạc bộ bao gồm ít nhất 11 nam và 11 nữ.

----------- **Hết** -----------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **LẠNG SƠN**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH THAM DỰ** **KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2023-2024** **(Vòng 2)**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn thi: TOÁN** Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*) *Ngày thi thứ hai* *(Đề thi gồm 01 trang, 03 câu)*

Câu 5 (7,0 điểm). Gọi S là tập hợp tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(x+f(xy)\right)+y=f(x)f(y)+1, \text{ với mọi số thực } x,y\in(0;+\infty)$$

a) Chứng minh rằng nếu $f\in S$ thì f là hàm số tăng ngặt.

b) Chứng minh rằng S chỉ có duy nhất một phần tử là hàm số đa thức bậc nhất.

Câu 6 (6,0 điểm).

a) Chứng minh rằng có vô số các số nguyên a thỏa mãn điều kiện $\left(a^{2^{2024}}-1\right)\vdots 2^{2026}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p,q sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1)$$

Câu 7 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A và D là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Gọi E,F,I lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ABD,ACD,ABC. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng MI là đường thẳng *Euler* của tam giác AEF.

b) Vẽ đường tròn tâm M đường kính BC, gọi K là trung điểm của cung BC chứa điểm A. Gọi S,T lần lượt là giao điểm của AE,AF với BC; gọi G là giao của KI với AD; J là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn tâm M đường kính BC. Chứng minh rằng JG đi qua trung điểm của ST.

---------- Hết ----------