

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và ký hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

 Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại x_0 .

Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2 QUAN HỆ GIỮA SỰ TỒN TẠI CỦA ĐẠO HÀM VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Định lý 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

 a) Định lý 1 tương đương với khẳng định: Nếu $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

b) Mệnh đề đảo của Định lý 1 không đúng. Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.

3 Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

Định lý 2. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Định lý 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

4 Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA ĐẠO HÀM

a) $v(t) = s'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t .

b) $I(t) = Q'(t)$ là cường độ tức thời của dòng điện $Q = Q(t)$ tại thời điểm t .

5 ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó. Khi đó, ta gọi hàm số

$$\begin{aligned} f' : (a; b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$, ký hiệu là y' hay $f'(x)$.

6 ĐẠO HÀM MỘT BÊN

Định nghĩa 3. a) Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) bên phải

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ta sẽ gọi giới hạn đó là đạo hàm bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ và ký hiệu là $f'(x_0^+)$.

b) Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) bên trái

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ta sẽ gọi giới hạn đó là đạo hàm bên trái của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ và ký hiệu là $f'(x_0^-)$.

Các đạo hàm bên phải và bên trái được gọi chung là đạo hàm một bên.

Định lý 4. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó, ta có

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0).$$

Định nghĩa 4. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- Có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$;
- Có đạo hàm bên phải tại $x = a$;
- Có đạo hàm bên trái tại $x = b$.

B CÁC DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 1.1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa, ta thực hiện như sau:

— Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0 , tính

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

— Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

— Bước 3. Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{x}$ tại điểm $x_0 = 3$.

 **Lời giải**

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 3$. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(3 + \Delta x) - f(3) = \frac{2}{3 + \Delta x} - \frac{2}{3} = -\frac{2\Delta x}{3(3 + \Delta x)}; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\frac{2}{3(3 + \Delta x)}; \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{3(3 + \Delta x)} = -\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Vậy $f'(3) = -\frac{2}{9}$. □

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ tại điểm $x_0 = 2$.

 **Lời giải**

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(2 + \Delta x) - f(2) = [-(2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x) - 2] - (-2^2 + 3 \cdot 2 - 2) = -\Delta^2 x - \Delta x; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\Delta x - 1; \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x - 1) = -1.\end{aligned}$$

Vậy $y'(2) = -1$. □

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$.

 **Lời giải**

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 1$. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1 + \Delta x) - f(1) = \sqrt{1 + \Delta x} - 1; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{1 + \Delta x} - 1}{\Delta x}; \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta x} + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $f'(1) = \frac{1}{2}$. □

VÍ DỤ 4. Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại điểm x bất kì.

 Lời giải

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, giả sử Δx là số gia của đối số tại x . Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta^3 x + 3x\Delta^2 x + 3x^2\Delta x; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta^3 x + 3x\Delta^2 x + 3x^2\Delta x}{\Delta x} = \Delta^2 x + 3x\Delta x + 3x^2; \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta^2 x + 3x\Delta x + 3x^2) = 3x^2.\end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = 3x^2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3}$ tại $x_0 = 4$.

Lời giải.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 4$. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(4 + \Delta x) - f(4) = \frac{1}{1 + \Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-1}{1 + \Delta x}; \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \Delta x} = -1.\end{aligned}$$

Vậy $f'(4) = -1$. □

BÀI 2. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x = \frac{\pi}{6}$. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{2} = \cos(3\Delta x) - 1; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos(3\Delta x) - 1}{\Delta x} = -\frac{2\sin^2 \frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}; \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 \frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} = 0.\end{aligned}$$

Vậy $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. □

BÀI 3. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x - 5$ tại điểm x bất kì.

Lời giải.

Đáp số: $f'(x) = 3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. □

BÀI 4. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 4x - x^2$ tại điểm $x = 2$.

Lời giải.

Đáp số: $f'(2) = 0$. □

BÀI 5. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$ tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

Đáp số: $f'(1) = \frac{3}{4}$. □

DẠNG 1.2. Ý nghĩa của đạo hàm vào một số bài toán

① Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, trong đó s là quãng đường đi được trong thời gian t . Lúc đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.

② Từ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ta có được công thức xấp xỉ

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

③ Ý nghĩa tổng quát: Đạo hàm của một hàm số chính là đặc trưng cho tốc độ thay đổi của hàm số theo biến số của nó.

VÍ DỤ 1. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5 \text{ s}$.

Lời giải

Ta có: $v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0} = gt_0$. Do đó, tại thời điểm $t_0 = 5 \text{ s}$ vận tốc tức thời của chuyển động là $v(5) = 5g \approx 49 \text{ m/s}$. $\square$

VÍ DỤ 2. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản không khí). Tính vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm $t_0 = 10 \text{ s}$. Biết gia tốc trọng trường là $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải

Phương trình chuyển động của viên đạn $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$ với thời gian t tính bằng đơn vị (s). Ta có: $v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2) + (v_0t - v_0t_0)}{t - t_0} = gt_0 + v_0$. Do đó, tại thời điểm $t_0 = 10 \text{ s}$ vận tốc tức thời của viên đạn là $v(10) = 98 + 196 = 294 \text{ m/s}$. $\square$

VÍ DỤ 3. Tính gần đúng giá trị $\sqrt{8,99}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$ xác định trên tập $[0; +\infty)$. Trên khoảng xác định, hàm số có đạo hàm với mọi x và $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Áp dụng công thức xấp xỉ với $\Delta x = -0,01$, $x_0 = 9$ ta được $f(8,99) = f(9 - 0,01) \approx f(9) + f'(9)(-0,01) = 3 + \frac{-0,01}{6} \approx 2,9983$. $\square$

⚠ Từ công thức xấp xỉ ta viết lại $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Lúc này, ta có thể hiểu được rằng: đường cong có phương trình $y = f(x)$ có thể được xấp xỉ bằng tiếp tuyến của nó có hệ số góc $f'(x_0)$ quanh lân cận của tiếp điểm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Tính giá trị gần đúng của $\sqrt{3,99}$

Lời giải.

Áp dụng công thức xấp xỉ, ta được $\sqrt{3,99} \approx 1,9975$. □

BÀI 2. Sau mùa lũ, tại địa phương A, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh đường ruột kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ n được xác định bởi công thức $D(n) = 45n^2 - n^3$. Hỏi tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tức thời tại thời điểm $n = 10$ là bao nhiêu?

Lời giải.

Tính được $D'(n) = 90n - 3n^2$, do đó tốc độ truyền bệnh tức thời tại thời điểm $n = 10$ chính là $D'(10) = 600$ người/ngày. □

BÀI 3. Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+1} - 1$. Trên khoảng $(-1; +\infty)$ hàm số có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{1}{2}$. □

📁 DẠNG 1.3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) với $y_0 = f(x_0)$. Nếu $\exists f'(x_0)$ thì:
 Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị tại điểm $M(x_0, y_0)$ là $f'(x_0)$.
 Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại $M(x_0; y_0)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \quad (5.1)$$

Các dạng viết phương trình tiếp tuyến

- ① Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 .

Tính x_0 (hoặc y_0) từ giả thiết

Tính $f'(x_0)$

Viết phương trình tiếp tuyến

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- ② Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc hay song song với một đường thẳng cho trước.

Hệ số góc của đồ thị hàm số tại điểm M_0 là $f'(x_0)$

Vì tiếp tuyến có hệ số góc k nên ta có $f'(x_0) = k$, giải ta tìm được x_0

Viết phương trình tiếp tuyến

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- ③ Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M_0 có hệ số góc $k = f'(x_0)$

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ nên ta có $a \cdot f'(x_0) = -1$, giải ta tìm được x_0

Viết phương trình tiếp tuyến

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- ④ Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x, y)$

Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0(*)$$

Vì $A(x; y)$ nằm trên tiếp tuyến nên tọa độ của A thỏa mãn $*$, thay tọa độ của A vào ta tìm được x_0 .

Viết phương trình tiếp tuyến với mỗi x_0 tìm được

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

- Tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy
- Tại điểm có tung độ bằng 2
- Tại điểm M mà tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $y = 6x + 1$
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x + 3$

 Lời giải

Ta có $y'(x) = 3x^2 - 6x$.

- (C) cắt Oy nên $x = 0 \Rightarrow y = 2$. Vậy tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(0; 2)$ là $y = y'(0)(x - 0) + 2 \Rightarrow y = 2$.
- Điểm trên (C) có tung độ bằng 2 $\Rightarrow$ hoành độ là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0; y = 2; A(0; 2) \\ x = 3; y = 2; B(3; 2) \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình tiếp tuyến} \begin{cases} y = 2 \\ y = 9x - 24 \end{cases}$$
- Tiếp tuyến song song với $y = 6x + 1 \Rightarrow f'(x_0) = 6$ với x_0 là hoành độ tiếp điểm. Giải phương trình ta có $\begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{3} \\ x_0 = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6x - 6 - 6\sqrt{3} \\ y = 6x - 6 + 6\sqrt{3} \end{cases}$
- Tiếp tuyến vuông góc với $y = -\frac{1}{9}x + 3 \Rightarrow f'(x_0) = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9x - 25 \\ y = 9x + 20 \end{cases}$

□

VÍ DỤ 2. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - m - 1$ (C_m). Viết tiếp tuyến của (C) tại các điểm cố định của đồ thị hàm số.

 Lời giải

Gọi $A(x; y)$ là điểm cố định của (C_m) nên $y = x^3 + mx^2 - m - 1$ thỏa mãn với mọi m . Điều này tương đương với phương trình bậc nhất ẩn m : $m(x^2 - 1) + x^3 - y - 1 = 0$ có vô số nghiệm, suy

$$\text{ra } \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^3 - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; & y = 0; & A(1; 0) \\ x = -1; & y = -2; & B(-1; -2) \end{cases}$$

$$y'(x) = 3x^2 + 2mx$$

Phương trình tiếp tuyến tại A là $y = (3 + 2m)(x - 1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại B là $y = (3 - 2m)(x + 1) - 2$.

□

VÍ DỤ 3. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3m - 2$ (C_m). Chứng minh rằng tiếp tuyến của C_m tại giao của (C_m) với Oy luôn đi qua một điểm cố định.

 Lời giải

Giao của (C_m) với Oy là $A(0; 3m - 2)$.

$y'(x) = 3x^2 - 3m \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A là $y = -3mx + 3m - 2(*)$

Gọi $B(x; y)$ là điểm cố định của $(*) \Rightarrow$ phương trình bậc nhất ẩn $m : 3(1 - x)m - y - 2 = 0$ có vô số nghiệm nên $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$. Vậy $B(1; -2)$ là điểm cố định của $(*)$. $\square$

VÍ DỤ 4. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5(C)$; tìm điểm M thuộc C mà hệ số góc tiếp tuyến tại M đạt giá trị nhỏ nhất, viết phương trình tiếp tuyến tại đó.

Lời giải

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $y'(x_0)$

$y'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \Rightarrow y'(x) = 3(x + 1)^2 - 12$.

Vậy min $y'(x) = -12$ tại điểm có $x = -1$

Phương trình tiếp tuyến tại đó $y = -12(x + 1) + 16$ $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1(C_m)$. Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại hai điểm cố định vuông góc.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là điểm cố định của (C_m) ta có phương trình bậc nhất ẩn $m : (2x^2 - 2)m - x^4 - y + 1 =$

0 có vô số nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ -x^4 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 0; A(1; 0) \\ x = -1; y = 0; B(-1; 0) \end{cases}$

Ta có phương trình tiếp tuyến tại $A : y = (4m - 4)(x - 1)$; Phương trình tiếp tuyến tại $B : y = (4 - 4m)(x + 1)$.

Hai tiếp tuyến vuông góc nên ta có $(4m - 4)(4 - 4m) = -1 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{4} \\ m = \frac{3}{4} \end{cases}$ $\square$

BÀI 2. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}(C)$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác ABO vuông cân.

Lời giải.

Ta có $y'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1}$

Tiếp tuyến này cắt Ox tại điểm $A(\frac{3x_0 + (x_0-1)(x_0+2)}{3}; 0)$, cắt Oy tại $B(0; \frac{3x_0 + (x_0+2)(x_0-1)}{(x_0-1)^2})$

Tam giác OAB vuông cân tại $O \Rightarrow x_A = y_B \Leftrightarrow \frac{3x_0 + (x_0-1)(x_0+2)}{3} = \frac{3x_0 + (x_0+2)(x_0-1)}{(x_0-1)^2}$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến } y = -x + 2 + 2\sqrt{3} \\ x_0 = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến } y = -x + 2 - 2\sqrt{3} \end{cases}$ $\square$

BÀI 3. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1(C_m)$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt $y = 1$ tại ba điểm $C(0; 1), D, E$ mà tiếp tuyến tại D, E vuông góc với nhau.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt $y = 1$ tại ba điểm $\Rightarrow$ phương trình $x^3 + 3x^2 + mx = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + m$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4m}}{2} \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4m}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = m \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$$

$$y'(x) = 3x^2 + 6x + m$$

Hai tiếp tuyến tại hai giao điểm vuông góc nên ta có $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$

$$\Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1 + m)(3x_2^2 + 6x_2 + m) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 3m(x_1^2 + x_2^2) + 6m(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 + m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} (tm) \\ m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} (tm) \end{cases}$$

□

BÀI 4. Cho đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2(C)$. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $y = 2$ mà có thể kẻ được ba tiếp tuyến tới (C) .

Lời giải.

Ta có $y'(x) = -3x^2 + 6x$

Ta có phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Tiếp tuyến đi qua $A(x_A; 2)$ thuộc $y = 2$ nên ta có $y_A = y'(x_0)(x_A - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)(2x_0^2 -$

$$(3x_A - 1)x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ 2x_0^2 - 3(x_A - 1)x_0 + 2 = 0 (*) \end{cases}$$

Từ A kẻ được ba tiếp tuyến nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_A \neq 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$x_A \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right) \setminus \{2\}$$

□

BÀI 5. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}(C)$ và $I(1; 2)$.

a) Tìm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với MI .

b) Điểm N thuộc (C) , tiếp tuyến của (C) tại N cắt $x = 1, y = 2$ tại hai điểm A, B . Chứng minh rằng N là trung điểm của AB và diện tích tam giác $S_{\triangle ABI}$ không đổi.

Lời giải.

Ta có $y'(x) = \frac{-1}{(x - 1)^2}$

a) Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) , tiếp tuyến tại M có vector chỉ phương $\vec{u}(1; y'(x_0))$.

Vector $\vec{MI}(1 - x_0; 2 - y_0)$, MI vuông góc với tiếp tuyến nên $\vec{MI} \cdot \vec{u} = 0$. Giải phương trình ta

được $\begin{cases} x_0 = 2; y_0 = 3; M(2; 3) \\ x_0 = 0; y_0 = 1; M(0; 1) \end{cases}$

b) Phương trình tiếp tuyến tại $N(x_0; y_0) : y = \frac{-1}{(x_0 - 1)^2}(x_0 - x) + \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}$

Tiếp tuyến này cắt $x = 1$ tại $A(1; \frac{2x_0}{x_0 - 1})$, cắt $y = 2$ tại $B(2x_0 - 1; 2)$, từ đây ta có ngay N là trung điểm của AB

Dễ thấy $IA \perp IB$ nên $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}AI \cdot IB = 2$, vậy diện tích tam giác IBA không đổi

□

Bài tập tổng hợp

BÀI 6. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}(C)$. Tìm điểm A nằm trên Oy sao cho từ A kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) mà hai tiếp điểm nằm về hai phía của Ox .

Lời giải.

$$\text{Ta có } y'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Điểm $A(0; y_A)$ thuộc Oy . Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1}$$

Điểm A nằm trên tiếp tuyến nên $y_A = \frac{x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2} \Leftrightarrow x_0^2(y_A-1) - 2x_0(y_A+2) + y_A+2 = 0(*)$

Tiếp điểm nằm về hai phía của Oy nên $(*)$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên $(y_A-1)(y_A+2) < 0$. Vậy A nằm trên Oy với $y_A \in (-2; 1)$ thì thỏa mãn đề bài. $\square$

DẠNG 1.4. Mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm của hàm số

Một hàm số đạo hàm tại một điểm, tức là tồn tại đạo hàm tại điểm đó, thì liên tục tại điểm đó.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{nếu } x \geq 0 \\ (x+1)^2, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$, nhưng liên tục tại đó.

 **Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1$$

nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. $\square$

Tiếp theo ta xét tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$, ta xét $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$ do đó không tồn tại đạo hàm của $f(x)$ tại điểm $x = 0$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng hàm số $y = g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -\sin x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$

 **Lời giải**

Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$ nên hàm số gián đoạn tại điểm $x = 0$, vì thế $g(x)$ không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$. $\square$

Bài tập tự luyện

BÀI 1. Chứng minh rằng hàm số $y = |x|$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Lời giải.

Ta xét $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1$ Do đó không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0}$ hay hàm số $y = y(x)$ không đạo hàm tại điểm $x = 0$. $\square$

BÀI 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$; C là hằng số.

$$— (u \pm v)' = u' \pm v'; (u + v - w)' = u' + v' - w'$$

$$— (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$— \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, (v \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C \cdot u'}{u^2}$$

$$— \text{Nếu } y = f(u), u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

2 CÁC CÔNG THỨC

$$— (C)' = 0; (x)' = 1.$$

$$— (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

$$— (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (x > 0) \Rightarrow (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, (u > 0).$$

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - 5x + 2$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$.

 **Lời giải**

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$y' = 3x^2 - 2x - 5 \Rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq \frac{5}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. □

VÍ DỤ 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = (x^2 + 2)(x - 3);$

③ $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x};$

④ $y = \sqrt[n]{x};$

② $y = x^5 - \frac{1}{x^3};$

⑤ $y = \sqrt[3]{2x - 1}.$

 **Lời giải**

① $y' = (x^2 + 2)'(x - 3) + (x^2 + 2)(x - 3)' = 2x(x - 3) + x^2 + 2 = 3x^2 - 6x + 2.$

$$\textcircled{2} \quad y' = (x^5)' - \left(\frac{1}{x^3}\right)' = 5x^4 + \frac{3}{x^4}.$$

$$\textcircled{3} \quad y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' + (\sqrt{x})' = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{4} \quad y' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

$$\textcircled{5} \quad y' = (2x-1)^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}(2x-1)^{\frac{1}{7}-1} \cdot (2x-1)' = \frac{2}{7\sqrt[7]{(2x-1)^6}}.$$

□

VÍ DỤ 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{2x-1}{x+5};$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{x}{x^2+1};$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{x^2 + \sqrt{2x}}{x};$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x^2+x-1}{x+1};$$

$$\textcircled{4} \quad y = \frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1};$$

$$\textcircled{6} \quad y = \sqrt[3]{x} + (x^3+x)^5.$$

 **Lời giải**

$$\textcircled{1} \quad y' = \frac{(2x-1)'(x+5) - (2x-1)(x+5)'}{(x+5)^2} = \frac{2(x+5) - (2x-1)}{(x+5)^2} = \frac{11}{(x+5)^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \left(x - \frac{1}{x+1}\right)' = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad y' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

$$\textcircled{4} \quad y' = \frac{(2x+2)(x^2-x+1) - (x^2+2x+3)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-3x-4x+5}{(x^2-x+1)^2}.$$

$$\textcircled{5} \quad y' = (x)' - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)' = 1 + \sqrt{2} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\textcircled{6} \quad y' = (\sqrt[3]{x})' + [(x^3+x)^5]' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 5(x^3+x)^4 \cdot (x^3+x)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 5(x^3+x)^4(3x^2+1).$$

□

VÍ DỤ 4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = (x-x^2)^{32};$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}};$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{1}{x\sqrt{x}};$$

$$\textcircled{4} \quad y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, (a \text{ là hằng số}).$$

 **Lời giải**

$$\textcircled{1} \quad y' = 32(x-x^2)^{31} \cdot (x-x^2)' = 32(1-2x)(x-x^2)^{31}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = -\frac{(x\sqrt{x})'}{(x\sqrt{x})^2} = -\frac{x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})'}{x^3} = -\frac{\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}}{x^3} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{3} \quad y' = \frac{(1+x)'\sqrt{1-x} - (1+x)(\sqrt{1-x})'}{(\sqrt{1-x})^2} = \frac{\sqrt{1-x} + \frac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}.$$

$$\textcircled{4} \quad y' = \frac{x'\sqrt{a^2-x^2} - x(\sqrt{a^2-x^2})'}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2} - x\frac{(a^2-x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \frac{2(a^2-x^2) - x(-2x)}{2\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$$

□

C CÁC DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 2.1. Tính đạo hàm của hàm số chứa đa thức, chứa căn thức

Áp dụng các qui tắc và công thức tính đạo hàm.

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5.$$

$$\textcircled{2} \quad y = (x^3 - 1)(1 - x^2).$$

✍️ **Lời giải**

$$\textcircled{1} \quad \text{Ta có } y' = 4x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Ta có } y' = (x^3 - 2)'(1 - x^2) + (x^3 - 2)(1 - x^2)' = 3x^2(1 - x^2) + (x^3 - 2)(-2x) = -5x^4 + x^3 + 4x.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{2x+1}{1-3x}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}.$$

✍️ **Lời giải**

$$\textcircled{1} \quad \text{Ta có } y' = \frac{(2x+1)'(1-3x) - (2x+1)(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{2(1-3x) - (2x+1)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{5}{(1-3x)^2}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } y' = \frac{(x^2 - 3x + 3)'(x - 1) - (x^2 - 3x + 3)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{(2x - 3)(x - 1) - (x^2 - 3x + 3)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}.$$

$$\textcircled{3} \text{ Ta có } y' = \frac{(1 + x - x^2)'(1 - x + x^2) - (1 + x - x^2)(1 - x + x^2)'}{(1 - x + x^2)^2} \\ = \frac{(1 - 2x)(1 - x + x^2) - (1 + x - x^2)(-1 + 2x)}{(1 - x + x^2)^2} = \frac{2 - 4x}{(1 - x + x^2)^2}.$$

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}.$$

$$\textcircled{3} y = (1 + \sqrt{1 - 2x})^3.$$

$$\textcircled{2} y = (x - 2)\sqrt{x^2 - 3}.$$

 **Lời giải**

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } y' = \frac{(2x^2 - 5x + 2)'}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 2}} = \frac{4x - 5}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } y' = (x - 2)' \sqrt{x^2 - 3} + (x - 2) (\sqrt{x^2 - 3})' = \sqrt{x^2 - 3} + (x - 2) \frac{(x^2 - 3)'}{2\sqrt{x^2 - 3}} = \sqrt{x^2 - 3} + \frac{x(x - 2)}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

$$\textcircled{3} \text{ Ta có } y' = 3(1 + \sqrt{1 - 2x})^2 (1 + \sqrt{1 - 2x})' = 3(1 + \sqrt{1 - 2x})^2 \frac{-1}{\sqrt{1 - 2x}} = -\frac{3(1 + \sqrt{1 - 2x})^2}{\sqrt{1 - 2x}}.$$

□

VÍ DỤ 4. Chứng minh các công thức tổng quát sau:

$$\textcircled{1} \left(\frac{ax + b}{a_1x + b_1} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x + b_1)^2}; (a, b, a_1, b_1 \text{ là hằng số}).$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} \right)' = \frac{a \cdot a_1x^2 + 2a \cdot b_1x + \begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x + b_1)^2}; (a, b, c, a_1, b_1 \text{ là hằng số}).$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2}; \\ (a, b, c, a_1, b_1, c_1 \text{ là hằng số}).$$

 **Lời giải**

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \text{ Ta có } \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \right)' &= \frac{(ax+b)'(a_1x+b_1) - (ax+b)(a_1x+b_1)'}{(a_1x+b_1)^2} = \frac{a(a_1x+b_1) - a_1(ax+b)}{(a_1x+b_1)^2} \\
&= \frac{ab_1 - a_1b}{(a_1x+b_1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}. \\
\textcircled{2} \text{ Ta có } \left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1} \right)' &= \frac{(2ax+b)(a_1x+b_1) - a_1(ax^2+bx+c)}{(a_1x+b_1)^2} = \frac{aa_1x^2 + 2ab_1x + bb_1 - ca_1}{(a_1x+b_1)^2} \\
&= \frac{a.a_1x^2 + 2a.b_1x + \begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}. \\
\textcircled{3} \text{ Ta có } \left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} \right)' &= \frac{(2ax+b)(a_1x^2+b_1x+c_1) - (ax^2+bx+c)(2a_1x+b_1)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} \\
&= \frac{2aa_1x^3 + 2ab_1x^2 + 2ac_1x + a_1bx^2 + bb_1x + bc_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} \\
&\quad - \frac{2aa_1x^3 + bb_1x + ab_1x^2 + 2a_1bx^2 + bb_1x + 2a_1cx + b_1c}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} \\
&= \frac{(ab_1 - a_1b)x^2 + 2(ac_1 - a_1c) + bc_1 - b_1c}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}.
\end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} y = \frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5.$$

$$\textcircled{3} y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x.$$

$$\textcircled{2} y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4.$$

$$\textcircled{4} y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Có } y' = \frac{5}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 3x^2 - 3x + 4.$$

$$\textcircled{3} \text{ Có } y' = x^3 - x^2 + x - 1.$$

$$\textcircled{2} \text{ Có } y' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3.$$

$$\textcircled{4} \text{ Có } y' = 5x^4 - 12x^2 + 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} y = (2x-3)(x^5-2x).$$

$$\textcircled{4} y = \frac{2x-1}{x-1}.$$

$$\textcircled{2} y = x(2x-1)(3x+2).$$

$$\textcircled{3} y = (\sqrt{x}+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right).$$

$$\textcircled{5} y = \frac{x^2+x-1}{x-1}.$$

$$\textcircled{6} \quad y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{2x + 1}.$$

$$\textcircled{8} \quad y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}.$$

$$\textcircled{7} \quad y = x + 1 - \frac{2}{x + 1}.$$

$$\textcircled{9} \quad y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = 12x^5 - 15x^4 - 8x + 6.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = 18x^2 + 2x - 2.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Ta có } y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}. \text{ Suy ra } y' = -\frac{(\sqrt{x})'}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{4} \quad y' = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

$$\textcircled{7} \quad y' = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}.$$

$$\textcircled{5} \quad y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

$$\textcircled{8} \quad y' = \frac{-5x^2 - 6x + 8}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

$$\textcircled{6} \quad y' = \frac{4x^2 + 4x - 14}{(2x+1)^2}.$$

$$\textcircled{9} \quad y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = (2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)^2.$$

$$\textcircled{5} \quad y = \sqrt{1 + 2x - x^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}.$$

$$\textcircled{6} \quad y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = (x^2 - x + 1)^3 (x^2 + x + 1)^2.$$

$$\textcircled{7} \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\textcircled{4} \quad y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2.$$

$$\textcircled{8} \quad y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^5.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad \text{Có } y' = 2(2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)(2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)' \\ = 12(2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)(x^2 - 6x - 6).$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Có } y' = -\frac{5(x^2 - x + 1)^4 (x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^{10}} = -\frac{10x - 5}{(x^2 - x + 1)^6}.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Có } y' = 3(x^2 - x + 1)^2 (x^2 - x + 1)' (x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 - x + 1)^3 (x^2 + x + 1)' (x^2 + x + 1) \\ = (x^2 - x + 1)^2 (x^2 + x + 1) [3(2x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x^2 - x + 1)(2x - 1)] \\ = (x^2 - x + 1)^2 (x^2 + x + 1) (10x^3 + x^2 + 5x - 1).$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Có } y = x - 2 + \frac{1}{x}, \text{ suy ra } y' = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

$$\textcircled{5} \quad \text{Có } y' = \frac{(1 + 2x - x^2)'}{2\sqrt{1 + 2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}.$$

$$\textcircled{6} \quad \text{Có } y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \text{ Có } y' &= \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})'}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{1 + \frac{(x + \sqrt{x})'}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{2\sqrt{x + \sqrt{x}} + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{4\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\sqrt{x + \sqrt{x}}} \\ &= \frac{4\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \text{ Có } y' &= 5(x + \sqrt{x^2 + 1})^4 (x + \sqrt{x^2 + 1})' = 5(x + \sqrt{x^2 + 1})^4 \left[1 + \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right] \\ &= 5(x + \sqrt{x^2 + 1})^4 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right). \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 4. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$. Chứng minh rằng: $2\sqrt{1 + x^2} \cdot y' = y$.

Lời giải.

$$\text{Có } y' = \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})'}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{2\sqrt{1 + x^2}\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{1 + x^2}}.$$

$$\text{Vậy } 2\sqrt{1 + x^2} \cdot y' = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}. \quad \blacksquare$$

□

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + 5$. Tìm m sao cho:

$$\textcircled{1} f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{2} f'(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } f'(x) = x^2 - 4x + m.$$

Do hệ số $a = 1 > 0$ nên để $f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\Delta' \leq 0$.

$$\text{Suy ra } 4 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 4.$$

$$\textcircled{2} \text{ Để } f'(x) > 0 \forall x \in (0; +\infty) \text{ thì ta xét các trường hợp sau:}$$

Trường hợp 1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 4$ thì $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 2: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$ thì $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, do đó $m = 4$ không thỏa.

Trường hợp 3: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4$, khi đó để $f'(x) > 0 \forall x \in (0; +\infty)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ phải có hai nghiệm không dương. Do tổng hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ bằng 4 nên luôn có ít nhất 1 nghiệm dương, vì vậy trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy với $m > 4$ thì $f'(x) > 0 \forall x \in (0; +\infty)$.

□

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{m}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (4 - m)x + 5m + 1$. Tìm m sao cho:

$$\textcircled{1} f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{2} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm cùng dấu.}$$

Lời giải.

① Có $f'(x) = mx^2 - mx + 4 - m$.

$$\text{Để } f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ thì } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4m(4 - m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5m^2 - 16m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 0 < m < \frac{16}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{\emptyset\}.$$

② Để $f'(x) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 16m > 0 \\ \frac{4 - m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{16}{5} \\ 0 < m < 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{5} < m < 4.$$

□

📁 DẠNG 2.2. Một số ứng dụng của đạo hàm

1. Ý nghĩa hình học và ý nghĩa vật lí của đạo hàm:

- Cho đường cong $(C) : y = f(x)$. Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$.
- Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, với $s = s(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.
- Nếu điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian: $Q = Q(t)$ ($Q = Q(t)$ là một hàm số có đạo hàm) thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$.

2. Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C) : y = f(x)$ thường gặp:

- Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (1).
- Viết phương trình tiếp tuyến với (C) , biết tiếp tuyến có hệ số góc k :
 - + Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = k$.
 - + Giải phương trình trên tìm x_0 , tiếp tục tính $y_0 = f(x_0)$.
 - + Viết phương trình tiếp tuyến theo công thức (1).
- Viết phương trình tiếp tuyến d với đường cong (C) , biết đường thẳng d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ cho trước:
 - + Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm cần tìm.
 - + Tiếp tuyến d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ nên ta có $y_A = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.
 - + Giải phương trình trên tìm được x_0 , tính y_0 và $f'(x_0)$.
 - + Từ đó viết phương trình d theo (1).
- Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến song song với $\Delta : y = ax + b$. Khi đó ta có $f'(x_0) = a$.
- Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với $\Delta : y = ax + b$ ($a \neq 0$). Khi đó ta có $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$.
- Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $\Delta : y = ax + b$ một góc ϕ . Khi đó, $|\tan \phi| = \left| \frac{f'(x_0) - a}{1 + f'(x_0).a} \right|$.

VÍ DỤ 1. Cho đường cong (C) : $y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 1$.

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

 Lời giải

- a) Ta có $f'(x) = x - 4$. Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 11$.
 Do đó, tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y = f'(-2)(x + 2) + 11 = -6x - 1$.
 b) Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 - 4 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = -\frac{13}{2}$.
 Vậy, tiếp tuyến có phương trình là $y = 1(x - 5) - \frac{13}{2} = x - \frac{23}{2}$.

□

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : 3x + y = 2$.

 Lời giải

Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.
 Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -3x + 2$ nên ta có

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0.$$

Do vậy, tiếp tuyến có phương trình: $y = -3(x - 1) + 0 = -3x + 3$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

 Lời giải

Ta có $y' = 12x^2 - 12x$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến đó.
 Khi đó, phương trình tiếp tuyến tương ứng có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$.
 Mặt khác, tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; -9)$ nên ta có phương trình

$$-9 = (12x_0^2 - 12x_0)(-1 - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2(4x_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

+ Với $x = -1$ ta tìm được phương trình tiếp tuyến: $y = 24x + 15$.

+ Với $x = \frac{5}{4}$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$.

□

VÍ DỤ 4. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động có phương trình $v = s' = -2t^2 + 8t$.

Ta có $-2t^2 + 8t = 8 - 2(t - 2)^2 \leq 8$. Đẳng thức có được khi $t = 2$.

Do đó, trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 8 m/s^2 . $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C) : y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1 .

Lời giải.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2x - 1$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, ta có

$$y_0 = -1 \Leftrightarrow x_0(x_0^2 + x_0 - 1) + 1 = -1 \Leftrightarrow (x_0 + 2)(x_0^2 - x_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2.$$

Tính được $f'(-2) = 7$, ta có phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = 7x + 13$. $\square$

BÀI 2. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P) : y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tại các giao điểm của (P) với trục hoành.

Lời giải.

Đạo hàm $y' = f'(x) = -2x + 4$. Parabol cắt trục hoành lần lượt tại $x = 1$ và $x = 3$.

+ Với $x_0 = 1, y_0 = 0 \Rightarrow f'(1) = 2$, ta có tiếp tuyến: $y = 2x - 2$.

+ Với $x_0 = 3, y_0 = 0 \Rightarrow f'(3) = -2$, ta có tiếp tuyến: $y = -2x + 6$. $\square$

BÀI 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta : 3x + y - 2 = 0$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Đạo hàm $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$. Viết lại phương trình đường thẳng $\Delta : y = -3x + 2$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ nên

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+2)^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -5. \end{cases}$$

Từ đó tìm được hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $y = \frac{x-1}{3}$ và $y = \frac{x+11}{3}$. $\square$

BÀI 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{3x-1}{x-3}$, biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d : x + 3y = 3$ một góc 45° .

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Ta có $y' = \frac{-8}{(x-3)^2}$. Giả sử k là hệ số góc của tiếp tuyến. Từ giả thiết ta có phương trình

$$\left| \frac{k + \frac{1}{3}}{1 - \frac{k}{3}} \right| = |\tan 45^\circ| \Leftrightarrow |3k + 1| = |k - 3| \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

+ Trường hợp $k = -2$, ta tìm được 2 tiếp tuyến có phương trình lần lượt là: $y = -2x + 17$ và $y = -2x + 1$.

+ Trường hợp $k = \frac{1}{2}$ không tìm được tiếp tuyến nào. $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y = \frac{2x+1}{x+1}$ biết tiếp tuyến cách đều 2 điểm $A(2;4)$ và $B(-4;2)$.

Lời giải.

Gợi ý: Với tiếp điểm $(x_0; y_0)$, hệ số góc k thì phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta : y = k(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow kx - y - k + y_0 = 0$.

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|2k - 4 - kx_0 + y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|4k + 2 - kx_0 + y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k + 1 = -kx_0 + y_0 \end{cases}$$

Từ đó tìm được các phương trình tiếp tuyến: $y = x + 1, y = x + 5$ và $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$. □

BÀI 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) : $y = \frac{2x}{x-2}$ biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B mà tam giác OAB thỏa mãn $AB = OA\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0)$ có dạng: $y = -\frac{4}{(x_0 - 2)^2(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0 - 2}}$. Dễ dàng

tính được $A\left(\frac{x_0^2}{2}; 0\right)$ và $B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0 - 2)^2}\right)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm x_0 là nghiệm của phương trình

$$\frac{x_0^2}{2} = \frac{2x_0^2}{(x_0 - 2)^2} \Leftrightarrow x_0^3(x_0 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

+ Với $x_0 = 0$ ta có $y_0 = 0$ (loại).

+ Với $x_0 = 4$ ta có phương trình tiếp tuyến $y = -x + 8$. □

BÀI 7. Cho hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + \frac{1}{3}$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến tại giao điểm của (C_m) với trục tung cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B . Biết rằng tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Gợi ý: Ta có $B\left(0; \frac{1}{3}\right)$. Đáp số $m = -1$ và $m = -3$. □

BÀI 3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN CỦA $\frac{\sin x}{x}$

Định lý 1. Hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ có giới hạn bằng 1 khi $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Mở rộng ra, nếu hàm số $u(x)$ thỏa mãn các điều kiện $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$$

 Với điều kiện như trên, ta cũng có các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{\sin u(x)} = 1$.

2 ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Đạo hàm các hàm số lượng giác cơ bản

$$— (\sin x)' = \cos x.$$

$$— (\cos x)' = -\sin x.$$

$$— (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \text{ với điều kiện } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$— (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \text{ với điều kiện } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Đạo hàm các hàm số lượng giác theo hàm số $u(x)$

$$— (\sin u)' = u' \cos u.$$

$$— (\cos u)' = -u' \sin u.$$

$$— (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u) \text{ với điều kiện } u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$— (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u) \text{ với điều kiện } u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 3.1. Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác

Áp dụng các công thức đạo hàm của hàm số lượng giác và các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, căn bậc hai, ...

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 3 \sin x + \cos x.$

② $y = 4 \sin x - 5 \cos x.$

 **Lời giải**

① $y' = (3 \sin x + \cos x)' = 3 \cdot (\sin x)' + (\cos x)'$
 $= 3 \cdot \cos x + (-\sin x) = 3 \cos x - \sin x.$

② $y' = (4 \sin x - 5 \cos x)' = 4 \cdot (\sin x)' - 5 \cdot (\cos x)'$
 $= 4 \cdot \cos x - 5 \cdot (-\sin x) = 4 \cos x + 5 \sin x.$

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin 2x - 3 \sin x.$

② $y = \cos 3x - 4 \cos x.$

 **Lời giải**

① $y' = (\sin 2x - 3 \sin x)' = (\sin 2x)' - (3 \sin x)'$
 $= (2x)' \cdot \cos 2x - 3 \cdot (\sin x)' = 2 \cdot \cos 2x - 3 \cdot \cos x = 2 \cos 2x - 3 \cos x.$

② $y' = (\cos 3x - 4 \cos x)' = (\cos 3x)' - (4 \cos x)'$
 $= (3x)' \cdot (-\sin 3x) - 4 \cdot (\cos x)' = 3 \cdot (-\sin 3x) - 4 \cdot (-\sin x) = -3 \sin 3x + 4 \sin x.$

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 3 \tan x.$

② $y = 4 \cot x.$

③ $y = 3 \tan x + \cot x.$

 **Lời giải**

① $y' = (3 \tan x)' = 3 \cdot (\tan x)' = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}.$

② $y' = (4 \cot x)' = 4 \cdot (\cot x)' = 4 \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{-4}{\sin^2 x}.$

③ $y' = (3 \tan x + \cot x)' = (3 \tan x)' + (\cot x)'$
 $= 3 \cdot (\tan x)' + (\cot x)' = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}.$

□

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \tan 3x + 2 \tan x.$

② $y = \cot 5x - 4 \cot x.$

 **Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{① } y' &= (\tan 3x + 2 \tan x)' = (\tan 3x)' + (2 \tan x)' \\ &= \frac{(3x)'}{\cos^2 3x} + 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 3x} + \frac{2}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } y' &= (\cot 5x - 4 \cot x)' = (\cot 5x)' - (4 \cot x)' \\ &= \frac{-(5x)'}{\sin^2 5x} - 4 \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{-5}{\sin^2 5x} + \frac{4}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x.$

② $y = \sin^3 x - 5 \cos^5 x.$

③ $y = \sin^3 2x.$

 **Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{① } y' &= (\sin^2 x + 2 \cos^2 x)' = (\sin^2 x)' + (2 \cos^2 x)' \\ &= 2 \sin x \cdot (\sin x)' + 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)' \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) \\ &= 2 \sin x \cos x - 4 \sin x \cos x = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } y' &= (\sin^3 x - 5 \cos^5 x)' = (\sin^3 x)' - (5 \cos^5 x)' \\ &= (\sin^3 x)' - 5(\cos^5 x)' \\ &= 3 \sin^2 x \cdot \cos x - 5 \cdot 5 \cdot \cos^4 x \cdot (-\sin x) \\ &= 3 \sin^2 x \cos x + 25 \sin x \cos^4 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③ } y' &= (\sin^3 2x)' = 3 \sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' \\ &= 3 \sin^2 2x \cdot (2x)' \cdot \cos 2x = 6 \sin^2 2x \cos 2x. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 2 \tan^2 x.$

② $y = 3 \cot^3 x.$

 **Lời giải**

$$\text{① } y' = (2 \tan^2 x)' = 2 \cdot 2 \tan x \cdot (\tan x)' = 4 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4 \tan x}{\cos^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y' &= (3 \cot^3 x)' = 3 \cdot 3 \cot^2 x \cdot (\cot x)' \\ &= 9 \cot^2 x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{-9 \cot^2 x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \tan^2 3x.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \cot^3 4x.$$

 **Lời giải**

$$\textcircled{1} \quad y' = (\tan^2 3x)' = 2 \tan 3x \cdot (\tan 3x)' = 2 \tan 3x \cdot (3x)' \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} = \frac{6 \tan 3x}{\cos^2 3x}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = (\cot^3 4x)' = 3 \cot^2 4x \cdot (\cot 4x)' = 3 \cot^2 4x \cdot (4x)' \cdot \frac{-1}{\sin^2 4x} = \frac{-12 \cot^2 4x}{\sin^2 4x}.$$

□

VÍ DỤ 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x \cos 3x.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \cot 5x \cos 4x.$$

 **Lời giải**

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y' &= (\sin x \cos 3x)' = (\sin x)' \cdot \cos 3x + \sin x \cdot (\cos 3x)' \\ &= \cos x \cdot \cos 3x + 3 \sin x \cdot (-\sin 3x) \\ &= \cos x \cos 3x - 3 \sin x \sin 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y' &= (\cot 5x \cos 4x)' = (\cot 5x)' \cdot \cos 4x + \cot 5x \cdot (\cos 4x)' \\ &= \frac{-5}{\sin^2 5x} \cdot \cos 4x + \cot 5x \cdot (-4 \sin 4x) \\ &= \frac{-5 \cos 4x}{\sin^2 5x} - 4 \cot 5x \sin 4x. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \sin \sqrt{x+1}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \cos \frac{1}{x}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = x \sin \sqrt{5-x}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = (\sin \sqrt{x+1})' = (\sqrt{x+1})' \cdot \cos \sqrt{x+1} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \cos \sqrt{x+1} = \frac{\cos \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \left(\cos \frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \left(-\sin \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \left(-\sin \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad y' &= (x \sin \sqrt{5-x})' = (x)' \sin \sqrt{5-x} + x \cdot (\sin \sqrt{5-x})' \\ &= \sin \sqrt{5-x} + x \cdot (\sqrt{5-x})' \cos \sqrt{5-x} \\ &= \sin \sqrt{5-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} \cos \sqrt{5-x} = \sin \sqrt{5-x} - \frac{x \cos \sqrt{5-x}}{2\sqrt{5-x}}. \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = 4 \cos x + 5 \sin x.$$

$$\textcircled{2} \quad y = 2 \tan 3x - 4 \cot x.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \cos^3 4x.$$

$$\textcircled{4} \quad y = 2 \sin^2 2x - 4 \cos^2 5x.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = (4 \cos x + 5 \sin x)' = 4 \cdot (\cos x)' + 5 \cdot (\sin x)' = 4 \cdot (-\sin x) + 5 \cdot (\cos x) = -4 \sin x + 5 \cos x.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y' &= (2 \tan 3x - 4 \cot x)' = (2 \tan 3x)' - (4 \cot x)' \\ &= 2 \cdot \frac{(3x)'}{\cos^2 3x} - 4 \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = 2 \cdot \frac{3}{\cos^2 3x} - 4 \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{6}{\cos^2 3x} + \frac{4}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad y' &= (\cos^3 4x)' = 3 \cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' \\ &= 3 \cos^2 4x \cdot (4x)'(-\sin 4x) = -12 \sin 4x \cos^2 4x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad y' &= (2 \sin^2 2x - 4 \cos^2 5x)' = (2 \sin^2 2x)' - (4 \cos^2 5x)' \\ &= 2 \cdot 2 \sin 2x \cdot (\sin 2x)' - 4 \cdot 2 \cdot \cos 5x \cdot (\cos 5x)' \\ &= 8 \sin 2x \cos 2x + 40 \sin 5x \cos 5x = 4 \sin 4x + 20 \sin 10x. \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = 2 \tan^3 x - \cot^2 x.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \cos 4x \tan x.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \tan 2x \sin 5x.$$

$$\textcircled{4} \quad y = \tan \frac{4}{x+1}.$$

$$\textcircled{5} \quad y = \cot \sqrt{x+5}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y' &= (2 \tan^3 x - \cot^2 x)' = (2 \tan^3 x)' - (\cot^2 x)' \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \tan^2 x \cdot (\tan x)' - 2 \cdot \cot x \cdot (\cot x)' \\ &= 6 \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \cot x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{6 \tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cot x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y' &= (\cos 4x \tan x)' = (\cos 4x)' \cdot \tan x + \cos 4x \cdot (\tan x)' \\ &= 4 \cdot (-\sin 4x) + \cos 4x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -4 \sin 4x + \frac{\cos 4x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad y' &= (\tan 2x \sin 5x)' = (\tan 2x)' \cdot \sin 5x + \tan 2x \cdot (\sin 5x)' \\ &= \frac{2}{\cos^2 2x} \cdot \sin 5x + \tan 2x \cdot 5 \cos 5x \\ &= \frac{2 \sin 5x}{\cos^2 2x} + 5 \tan 2x \cos 5x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad y' &= \left(\tan \frac{4}{x+1} \right)' = \left(\frac{4}{x+1} \right)' \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{4}{x+1}} \\ &= -\frac{4}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{4}{x+1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad y' &= (\cot \sqrt{x+5})' = (\sqrt{x+5})' \cdot \frac{-1}{\sin^2 \sqrt{x+5}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \sqrt{x+5}} = \frac{-1}{2\sqrt{x+5} \sin^2 \sqrt{x+5}}. \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \sin \sqrt{x^2 + 5}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{\sin x}{\cos^2 3x}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{\sin^2 3x}{\cos \sqrt{x+1}}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = (\sin \sqrt{x^2 + 5})' = (\sqrt{x^2 + 5})' \cdot \cos \sqrt{x^2 + 5} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} \cdot \cos \sqrt{x^2 + 5} = \frac{x \cos \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y' &= \left(\frac{\sin x}{\cos^2 3x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos^2 3x - \sin x \cdot (\cos^2 3x)'}{\cos^4 3x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos^2 3x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos 3x \cdot (\cos 3x)'}{\cos^4 3x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos^2 3x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot (-\sin 3x)}{\cos^4 3x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos^2 3x + 6 \sin x \cdot \cos 3x}{\cos^4 3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad y' &= \left(\frac{\sin^2 3x}{\cos \sqrt{x+1}} \right)' = \frac{(\sin^2 3x)' \cdot \cos \sqrt{x+1} - \sin^2 3x \cdot (\cos \sqrt{x+1})'}{\cos^2 \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2 \cdot \sin 3x \cdot (3x)' \cdot \cos \sqrt{x+1} - \sin^2 3x \cdot (\sqrt{x+1})' \cdot (-\sin \sqrt{x+1})}{\cos^2 \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{6 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot \cos \sqrt{x+1} + \frac{\sin^2 3x \cdot \sin \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}}{\cos^2 \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{6 \sin 6x \cdot \cos \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1} + \sin^2 3x \cdot \sin \sqrt{x+1}}{2 \cos^2 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

**BÀI TẬP TỔNG HỢP****BÀI 5.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = x^3 \sqrt{\sin x}.$

② $y = \frac{\sin \sqrt{x^2 + 1}}{\cos^3 3x}.$

③ $y = \sqrt{\frac{\sin(5 + x^2)}{\cos^3 2x}}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{① } y' &= (x^3 \sqrt{\sin x})' = (x^3)' \cdot \sqrt{\sin x} + x^3 \cdot (\sqrt{\sin x})' \\ &= 3x^2 \cdot \sqrt{\sin x} + x^3 \cdot \frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}} \\ &= 3x^2 \cdot \sqrt{\sin x} + \frac{x^3 \cdot \cos x}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } y' &= \left(\frac{\sin \sqrt{x^2 + 1}}{\cos^3 3x} \right)' = \frac{(\sin \sqrt{x^2 + 1})' \cdot \cos^3 3x - \sin \sqrt{x^2 + 1} \cdot (\cos^3 3x)'}{\cos^6 3x} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \cos \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos^3 3x + 9 \sin \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos^2 3x \cdot \sin 3x}{\cos^6 3x} \\ &= \frac{x \cdot \cos \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos^3 3x + 9 \cdot \sqrt{x^2 + 1} \sin \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos^2 3x \sin 3x}{\cos^6 3x \sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③ } y' &= \left(\sqrt{\frac{\sin(5 + x^2)}{\cos^3 2x}} \right)' = \frac{\left(\frac{\sin(5 + x^2)}{\cos^3 2x} \right)'}{2\sqrt{\frac{\sin(5 + x^2)}{\cos^3 2x}}} \\ &= \frac{[\sin(5 + x^2)]' \cdot \cos^3 2x - \sin(5 + x^2) \cdot (\cos^3 2x)'}{\cos^6 2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sin(5 + x^2)}{\cos^3 2x}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sin(5 + x^2)}{\cos^3 2x}}} \cdot \frac{2x \cdot \cos(5 + x^2) \cdot \cos^3 2x + 6 \sin(5 + x^2) \cdot \cos^2 2x \cdot \sin 2x}{\cos^6 2x}. \end{aligned}$$

**BÀI 6.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 4 \sin^2 \sqrt{x^3 + 1} + \frac{1}{\sin 5x}.$

② $y = 8\sqrt{\tan 3x} + \frac{4}{\sin^2 \sqrt{x}}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad y' &= \left(4 \sin^2 \sqrt{x^3 + 1} + \frac{1}{\sin 5x} \right)' \\
 &= 4 \cdot 2 \cdot \sin \sqrt{x^3 + 1} \cdot (\sin \sqrt{x^3 + 1})' - \frac{(\sin 5x)'}{\sin^2 5x} \\
 &= 4 \cdot 2 \cdot \sin \sqrt{x^3 + 1} \cdot (\sqrt{x^3 + 1})' \cdot \cos \sqrt{x^3 + 1} - \frac{5 \cdot \cos 5x}{\sin^2 5x} \\
 &= 4 \cdot 2 \cdot \sin \sqrt{x^3 + 1} \cdot \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 1}} \cdot \cos \sqrt{x^3 + 1} - \frac{5 \cdot \cos 5x}{\sin^2 5x} \\
 &= \frac{6 \cdot x^2 \cdot \sin 2\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{x^3 + 1}} - \frac{5 \cdot \cos 5x}{\sin^2 5x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad y' &= \left(8\sqrt{\tan 3x} + \frac{4}{\sin^2 \sqrt{x}} \right)' = 8 \cdot \frac{(\tan 3x)'}{2\sqrt{\tan 3x}} - \frac{4 \cdot (\sin^2 \sqrt{x})'}{\sin^4 \sqrt{x}} \\
 &= 8 \cdot \frac{3}{2 \cdot \sqrt{\tan 3x} \cdot \cos^2 3x} - \frac{4 \cdot 2 \cdot \sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos \sqrt{x}}{\sin^4 \sqrt{x}} \\
 &= \frac{12}{\cos^2 3x \sqrt{\tan 3x}} - \frac{4 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sin^3 \sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

□

DẠNG 3.2. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình

Phương pháp giải: Dùng các công thức đạo hàm để tính đạo hàm của hàm số, sau đó sử dụng các công thức lượng giác biến đổi chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng $y' - y^2 - 1 = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = (\tan x)' = \tan^2 x + 1$.

Suy ra $y' - y^2 - 1 = \tan^2 x + 1 - \tan^2 x - 1 = 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \cot 2x$. Chứng minh rằng $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = (\cot 2x)' = -2(\cot^2 2x + 1)$ và $y^2 = \cot^2 2x \Rightarrow 2y^2 + 2 = 2\cot^2 2x + 2$.

Suy ra $y' + 2y^2 + 2 = -2(\cot^2 2x + 1) + 2\cot^2 2x + 2 = 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$. Chứng minh rằng $y' = 0$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \right] + 3 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1. \end{aligned}$$

Suy ra $y' = 0$. □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = \cos^2 x - \sin x$. Giải phương trình $y' = 0$.

 **Lời giải**

Ta có $y' = (\cos^2 x - \sin x)' = -2 \sin x \cdot \cos x - \cos x$. Suy ra

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow -2 \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x (-2 \sin x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ -2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 3 \cos x + 4 \sin x + 5x$.

 **Lời giải**

Ta có $y' = (3 \cos x + 4 \sin x + 5x)' = -3 \sin x + 4 \cos x + 5$

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow -3 \sin x + 4 \cos x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \sin x - 4 \cos x = 5 \\ &\Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi, \text{ với } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = \frac{3}{5} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \tan x + \cot x$.

 **Lời giải**

Ta có $y' = (\tan x + \cot x)' = -\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$. Suy ra

$$y' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} = 0 (*).$$

Điều kiện $\sin^2 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình $y' = 0$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} - \cos x - \sqrt{3} \left(\sin x - \frac{\cos 3x}{3} \right)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

 Lời giải

Ta có: $f'(x) = \cos 3x + \sin x - \sqrt{3}(\cos x + \sin 3x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos 3x + \sin x - \sqrt{3}(\cos x + \sin 3x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 3x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - 3x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} - k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Cho hàm số $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$.

Chứng minh rằng $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x \\ &= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos 2x \\ &= 1 + 2\cos\frac{2\pi}{3} \cdot \cos 2x + \cos 2x \\ &= 1 - \cos 2x + \cos 2x = 1 \end{aligned}$$

Suy ra $y' = 0$. □

BÀI 2. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng

① $xy - 2(y' - \sin x) + x(2\cos x - y) = 0$.

$$\textcircled{2} \quad \frac{y'}{\cos x} - x = \tan x.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad \text{Ta có: } y' = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

$$\begin{aligned} xy - 2(y' - \sin x) + x(2 \cos x - y) &= x^2 \sin x - 2(\sin x + x \cos x - \sin x) + x(2 \cos x - x \sin x) \\ &= x^2 \sin x - 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x = 0. \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Ta có: } y' = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

$$\frac{y'}{\cos x} - x = \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x} - x = \tan x + x - x = \tan x.$$

□

BÀI 3. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 1 - \sin(\pi + x) + 2 \cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \left[1 - \sin(\pi + x) + 2 \cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)\right]' = \cos x + \sin \frac{x}{2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 1 \\ \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } \sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi.$$

$$\text{Với } \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k4\pi \\ x = \frac{7\pi}{3} + k4\pi \end{cases}.$$

$$\text{Vậy phương trình } y' = 0 \text{ có các nghiệm là } x = \pi + k4\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k4\pi; x = \frac{7\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

□

BÀI 4. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \sin 2x - 2 \cos x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = (\sin 2x - 2 \cos x)' = 2 \cos 2x + 2 \sin x. \text{ Suy ra}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

$$\text{Với } \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$$

$$\text{Vậy phương trình } y' = 0 \text{ có các nghiệm là } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

□

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Tìm a, b biết $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = a \cos x - b \sin x$. Khi đó

$$\begin{cases} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f'(-\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cos 0 - b \sin 0 = \frac{1}{2} \\ a \sin(-\frac{\pi}{4}) + b \cos(-\frac{\pi}{4}) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $a = \frac{1}{2}$ và $b = \frac{1}{2}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 6. Cho các hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$. Chứng minh rằng $3f'(x) - 2g'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cdot \cos x)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} \\ &= 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{3 + \cos 4x}{4} \\ &\Rightarrow f'(x) = -\sin 4x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x) \left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3(\sin x \cdot \cos x)^2 \right) \\ &= 1 - 3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3 \sin^2 2x}{4} \\ &= 1 - \frac{3 - 3 \cos 4x}{8} = \frac{5 + 3 \cos 4x}{8} \\ &\Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{2} \sin 4x. \end{aligned}$$

Suy ra $3f'(x) - 2g'(x) = -3 \sin 4x + 3 \sin 4x = 0$. □

BÀI 7. Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Phương trình $y' = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

Lời giải.

$$y' = -2 \cos x \sin x + \cos x = \cos x(1 - 2 \sin x).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}; (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\forall x \in (0; \pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. □

BÀI 8. Cho hàm số $y = (m+1) \sin x + m \cos x - (m+2)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } y' = (m+1) \cos x - m \sin x - (m+2).$$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow (m+1) \cos x - m \sin x = (m+2).$$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \geq (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}. \quad \square$$

BÀI 9. Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2(4x+2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f'(x)$.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$f'(x) = 2 \cdot 2 \cos(4x+2) \cdot (-\sin(4x+2)) \cdot 4 = -8 \sin(8x+4).$$

Mặt khác ta có:

$$-8 \leq -8 \sin(8x+4) \leq 8. \text{ Suy ra:}$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của } f'(x) \text{ bằng } 8 \text{ khi } \sin(8x+4) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{16} - \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của } f'(x) \text{ bằng } -8 \text{ khi } \sin(8x+4) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

BÀI 10. Cho hàm số $y = \cos^2 x + m \sin x$ (m là tham số) có đồ thị (C) . Tìm m trong mỗi trường hợp sau.

① Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1.

② Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ song song với nhau hoặc trùng nhau.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } y' = -\sin 2x + m \cos x.$$

① Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1 nên suy ra $y'(\pi) = 1 \Leftrightarrow -\sin 2\pi + m \cos \pi = -1 \Leftrightarrow m = -1$.

② Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ song song với nhau hoặc trùng nhau nên suy ra

$$\begin{aligned} y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + m \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} + m \cos\frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow 1 + m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2} \\ &\Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$\square$

BÀI 11. Tính tổng $S = \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$. Khi đó $S = f'(x)$.

— Trường hợp 1: Nếu $\sin \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cdot f(x) &= 2 \sin \frac{x}{2} \sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 2x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 3x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \sin nx \\ &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{7x}{2} + \dots + \cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \\ &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x. \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{\cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ \Rightarrow f'(x) &= -\frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{-(2n+1) \sin \frac{2n+1}{2}x \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \cos \frac{2n+1}{2}x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{-1 + \cos nx + 2n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

— Trường hợp 2: Nếu $x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$, ta có

$$\cos x = \cos 2x = \cos 3x = \dots = \cos nx = 1$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \begin{cases} \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} & \text{khi } x \neq k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{n(n+1)}{2} & \text{khi } x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

□

DẠNG 3.3. Tính giới hạn của hàm số có chứa biểu thức lượng giác

Ta thực hiện biến đổi hàm số về dạng có chứa các giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u}{u}$.

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}.$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 3x}{3x}.$

④ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}.$

 **Lời giải**

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sin 4x}{4x} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4.$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 3x}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{3x} + \frac{2 \sin 3x}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{2 \cdot \sin 3x}{3x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{3 \sin 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)}{2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)}{2x - \frac{\pi}{3}} = 2.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow b} \frac{\cos x - \cos b}{x - b}.$$

 **Lời giải**

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} = \cos \left(\frac{a+a}{2} \right) \cdot 1 = \cos a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow b} \frac{\cos x - \cos b}{x - b} &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{-2 \sin \left(\frac{x+b}{2} \right) \sin \left(\frac{x-b}{2} \right)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \left[-\sin \left(\frac{x+b}{2} \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{x-b}{2} \right)}{\frac{x-b}{2}} \right] \\ &= -\lim_{x \rightarrow b} \sin \left(\frac{x+b}{2} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow b} \frac{\sin \left(\frac{x-b}{2} \right)}{\frac{x-b}{2}} = -\sin \left(\frac{b+b}{2} \right) \cdot 1 = -\sin b. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{1 - \cos x}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1} + \sin x}{\sqrt{x+4} - 2}.$$

 **Lời giải**

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5 \cos 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos^2 x \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 \frac{x}{2} (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = 1.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1} + \sin x}{\sqrt{x+4} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4} - 2} + \frac{\sin x}{\sqrt{x+4} - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-x(\sqrt{x+4} + 2)}{x(1 + \sqrt{x+1})} + \frac{(\sqrt{x+4} + 2) \sin x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{x+4} - 2}{1 + \sqrt{x+1}} + \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4} + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 9x}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - 3 \sin 5x}{x}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{3}}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2 \cdot 3x} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - 3 \sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} - 15 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \right) = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} - 15 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = -11.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{72x \cdot \sin 8x}{72x \cdot \sin 9x} = \frac{8}{9} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{\sin 9x} = \frac{8}{9}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right)}{2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right)}{2x - \frac{\pi}{3}} = 2.$$

□

BÀI 2. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 x}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4 \cos x) = 4.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = \frac{25}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \right)^2 = \frac{25}{2}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}} = -1.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

Ta có: $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x = (1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cos 2x(1 - \cos 3x).$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{kx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{kx}{2}}{\frac{kx}{2}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \cdot k^2 = k^2.$$

$$\text{Cho nên } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x} = 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 9 = 14.$$

□

BÀI 3. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{\sin x - \sin a}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 \cos 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x \cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{21x \sin 7x \cos 3x}{21x \sin 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cos 3x}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{\sin x - \sin a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{\cos x \cos a \cdot 2 \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\cos x \cos a \cdot 2 \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\cos x \cos x \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^3 a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2 \cos x \left(\cos x - \cos \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{-4 \cos x \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{2 \cos x \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos 2x}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2 \cos x - 1}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^3 - 8}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos 2x}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos 2x} = \frac{-2x^2}{2 \sin^2 x (1 + \sqrt{2x^2 + 1})} = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{-1}{1 + \sqrt{2x^2 + 1}}.$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos 2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} = \left(\frac{1 - \sqrt{2x+1}}{x} + \frac{\sin x}{x}\right) : \frac{\sqrt{3x+4} - 2 - x}{x}$$

$$= \left(\frac{-2}{1 + \sqrt{2x+1}} + \frac{\sin x}{x}\right) : \frac{-1 - x}{\sqrt{3x+4} + 2 + x}.$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} = \left(\frac{-2}{2} + 1\right) : \frac{-1}{4} = 0.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2 \cos x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos x - \cos \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{-2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} \cdot \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4} \cdot \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} \right] = \frac{1}{3}.$$

□

BÀI 5. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \sin 3x \sin x}{45x^3}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + 2x) - 2 \sin(a + x) + \sin a}{x^2}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin^2 x}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \sin 3x \sin x}{45x^3} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos \sqrt{x})}{(1 - \cos^2 \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos \sqrt{x})}{\sin^2 \sqrt{x} (1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}} \right)^2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{x}}{1 + \sqrt{\cos x}} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + 2x) - 2 \sin(a + x) + \sin a}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(a + x) \cos x - 2 \sin(a + x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(a + x)(\cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin(a + x) \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\sin(a + x) \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right] = -\sin 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin^2 x} \\ \text{Ta có: } \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin^2 x} &= [\cos ax - \cos bx + \cos bx(1 - \cos cx)] \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \left[-2 \sin \left(\frac{ax + bx}{2} \right) \sin \left(\frac{ax - bx}{2} \right) + 2 \cos bx \sin^2 \frac{cx}{2} \right] \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \left[-2 \cdot \frac{\sin \left(\frac{ax + bx}{2} \right)}{\frac{ax + bx}{2}} \cdot \frac{\sin \left(\frac{ax - bx}{2} \right)}{\frac{ax - bx}{2}} \cdot \frac{ax + bx}{2} \cdot \frac{ax - bx}{2} + 2 \cos bx \left(\frac{\sin \frac{cx}{2}}{\frac{cx}{2}} \right)^2 \cdot \frac{c^2 x^2}{4} \right] \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \left[\frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{\sin \left(\frac{ax + bx}{2} \right)}{\frac{ax + bx}{2}} \cdot \frac{\sin \left(\frac{ax - bx}{2} \right)}{\frac{ax - bx}{2}} + \cos bx \left(\frac{\sin \frac{cx}{2}}{\frac{cx}{2}} \right)^2 \cdot \frac{c^2}{2} \right] \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2. \\ \text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin^2 x} &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 4. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm x thuộc khoảng $(a; b)$. Khi đó ta có hàm số y' xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số y' có đạo hàm tại x thì ta nói đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$. Hàm số đạo hàm của hàm y' được kí hiệu là y'' .

Đạo hàm cấp 3, 4, ... của hàm số cũng được định nghĩa tương tự và được kí hiệu là $y^{(3)}, y^{(4)}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 4.1. Tính đạo hàm cấp hai - Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai

VÍ DỤ 1. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = (x^2 + 1)^3$.

② $y = \frac{x}{x-2}$.

③ $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

 **Lời giải**

① $y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1; y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x; y'' = 30x^4 + 36x^2 + 6.$

② $y' = \left(\frac{x}{x-2} \right)' = \frac{-2}{(x-2)^2}; y'' = \left(\frac{-2}{(x-2)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}.$

③ $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1}.$
 $y' = 1 - \frac{1}{(x + 1)^2}.$
 $y'' = \frac{2}{(x + 1)^3}.$

□

VÍ DỤ 2. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = \sqrt{2x + 5}.$

② $y = x\sqrt{x^2 + 1}.$

 **Lời giải**

$$\textcircled{1} \quad y' = (\sqrt{2x+5})' = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$y'' = -\frac{(\sqrt{2x+5})'}{2x+5} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2x+5}}}{2x+5} = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \sqrt{x^2+1} + x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$y'' = \frac{4x\sqrt{x^2+1} - (2x^2+1) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

□

VÍ DỤ 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = \sin x.$

② $y = \tan x.$

 **Lời giải**

① $y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right); y'' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(\pi + x).$

② $y' = \frac{1}{\cos^2 x}; y'' = -\frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$

□

VÍ DỤ 4. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ s.

 **Lời giải**

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t chính là đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$s' = (t^3 - 3t^2 + 5t + 2)' = 3t^2 - 6t + 5$$

$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1.$

② $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4.$

Lời giải.

① $y' = -12x^3 + 12x^2 + 10x - 2; y'' = -36x^2 + 24x + 10.$

$$\textcircled{2} \quad y' = 4x^4 - 6x - 1; y'' = 16x^3 - 6.$$

□

BÀI 2. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = -\frac{1}{x}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{1}{x-3}$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}.$$

$$\textcircled{4} \quad y = \frac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = \frac{1}{x^2}; y'' = -\frac{2}{x^3}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = -\frac{1}{(x-3)^2}; y'' = \frac{2}{(x-3)^3}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}; y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$$\textcircled{4} \quad y' = \frac{(10x-3)(x^2-2x-3) - (5x^2-3x-20)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{-7x^2+10x-31}{(x^2-2x-3)^2}.$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-14x+10) \cdot (x^2-2x-3)^2 - (-7x^2+10x-31) \cdot 2 \cdot (x^2-2x-3) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x-3)^4} \\ &= \frac{2(7x^3-15x^2+93x-77)}{(x^2-2x-3)^3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \sqrt{2x+1}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = x^2 \cdot \sqrt{x^3-x}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}; y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \frac{x^2(7x^2-5)}{2\sqrt{x^3-x}}; y'' = \frac{x^2(35x^4-54x^2+15)}{4\sqrt{(x^3-x)^3}}.$$

□

BÀI 4. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

② $y = \sin 2x.$

③ $y = \sin^2 2x.$

④ $y = 3 \sin x + 2 \cos x.$

⑤ $y = \tan x + \cot x + \sin x + \cos x.$

Lời giải.

① $y' = -2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right); y'' = -4 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$

② $y' = 2 \cos 2x; y'' = -4 \sin 2x.$

③ $y' = 2 \sin 2x (2 \cos 2x) = 2 \sin 4x; y'' = 8 \cos 4x.$

④ $y = 3 \sin x + 2 \cos x; y' = 3 \cos x - 2 \sin x; y'' = -3 \sin x - 2 \cos x.$

⑤
$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + \cos x - \sin x = \tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x.$$
$$y'' = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x.$$

□

BÀI 5. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = x \cdot \sin x.$

② $y = x^2 \cdot \cos^2 x.$

③ $y = \frac{\cos x}{x^3 + 1}.$

Lời giải.

① $y' = \sin x + x \cos x; y'' = 2 \cos x - x \sin x.$

② $y' = 2x \cos x (\cos x - x \cdot \sin x); y'' = (1 - 2x^2) \cos 2x - 4x \sin 2x + 1.$

③ $y' = -\frac{\sin x}{x^3 + 1} - \frac{3x^2 \cos x}{(x^3 + 1)^2}; y'' = \left(-\frac{1}{x^3 + 1} - \frac{6x}{(x^3 + 1)^2} + \frac{18x^4}{(x^3 + 1)^3}\right) \cos x + \frac{6x^2 \sin x}{(x^3 + 1)^2}.$

□

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = (x + 1)^3$. Tính giá trị $f''(0)$.**Lời giải.**

$$f'(x) = 3(x + 1)^2; f''(x) = 6(x + 1) \Rightarrow f''(0) = 6.$$

□

BÀI 7. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.**Lời giải.**

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x + 2x; f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x + 2 \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

□

BÀI 8. Cho hàm số $h(x) = 5(x + 1)^3 + 4(x + 1)$. Giải phương trình $h''(x) = 0$.**Lời giải.**

$$h(x) = 5(x + 1)^3 + 4(x + 1);$$

$$h'(x) = 15(x + 1)^2 + 4;$$

$$h''(x) = 30(x + 1).$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

□

BÀI 9. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ s.

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t chính là đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$\begin{aligned} s' &= (t^3 - 3t^2 - 9t + 2)' = 3t^2 - 6t - 9 \\ s'' &= 6t - 6 \Rightarrow s''(2) = 6. \end{aligned}$$

□

BÀI 10. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ s.

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t chính là đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$s' = 3t^2 - 6t \Rightarrow s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(4) = 18.$$

□

📁 DẠNG 4.2. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2

- Tìm các đạo hàm đến cấp cao nhất có mặt trong đẳng thức cần chứng minh.
- Thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi về này cho bằng về kia. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

CÁC VÍ DỤ MẪU

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

✍️ Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

Thay vào: $y^3 \cdot y'' + 1 = \sqrt{(2x-x^2)^3} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} + 1 = -1 + 1 = 0$ (đpcm).

□

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$. Chứng minh rằng: $2y \cdot y'' - 1 = (y')^2$.

✍️ Lời giải

Ta có: $y' = x + 1, y'' = 1$

Thế vào đẳng thức: $2y \cdot y'' - 1 = x^2 + 2x + 1 = (y')^2$ (đpcm).

□

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng: $x \cdot y - 2(y' - \sin x) + x \cdot y'' = 0$.

 Lời giải

Ta có: $y' = \sin x + x \cos x$; $y'' = 2 \cos x - x \sin x$

$VT = x^2 \sin x - 2(\sin x + x \cos x - \sin x) + 2x \cos x - x^2 \sin x = -2x \cos x + 2x \cos x = 0 = VP$ (đpcm). □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x .
 $P = 2(y')^2 - y''(y-1)$ (Giả sử các biểu thức đều có nghĩa).

 Lời giải

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow 2(y')^2 = \frac{18}{(x-1)^4}$$

$$y'' = -3 \cdot \frac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3}$$

$$y-1 = \frac{3}{x-1} \Rightarrow y''(y-1) = \frac{18}{(x-1)^4}$$

$$P = 2(y')^2 - y''(y-1) = \frac{18}{(x-1)^4} - \frac{18}{(x-1)^4} = 0$$

Vậy đẳng thức được chứng minh xong. □

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng: $\frac{6y}{y''} - \frac{1}{y'} - \cos 2x = 1$.

 Lời giải

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x; y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{6y}{y''} - \frac{1}{y'} - \cos 2x &= \frac{6 \tan x}{2 \tan x (1 + \tan^2 x)} - \frac{1}{1 + \tan^2 x} - \cos 2x = \frac{2}{1 + \tan^2 x} - \cos 2x = \\ &= 2 \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$
□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{4x - 2x^2}$ thỏa hệ thức: $y^3 y'' + 4 = 0$.

Lời giải.

$$y' = \frac{2-2x}{\sqrt{4x-2x^2}}; y'' = \frac{-4}{(\sqrt{4x-2x^2})^3}$$

$$VT = (\sqrt{4x-2x^2})^3 \cdot \frac{-4}{(\sqrt{4x-2x^2})^3} + 4 = 0 = VP \text{ (đpcm).}$$
□

BÀI 2. Cho hàm số $y = -2 + \frac{5}{x}$. Chứng minh rằng: $\frac{2y'}{x} + y'' = 0$.

Lời giải.

$$y' = -\frac{5}{x^2}; y'' = \frac{10}{x^3}$$

$$\frac{2y'}{x} + y'' = -\frac{10}{x^3} + \frac{10}{x^3} = 0. \quad \square$$

BÀI 3. Cho $y = \frac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Lời giải.

$$y = \frac{x-3}{x+4} \Rightarrow y' = \frac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{14}{(x+4)^3}.$$

$$\text{Ta có vế trái: } 2(y')^2 = \frac{98}{(x+4)^4}.$$

$$\text{Và vế phải: } (y-1)y'' = \left(\frac{x-3}{x+4} - 1\right) \left[-\frac{14}{(x+4)^3}\right] = \frac{98}{(x+4)^4}.$$

$$\text{Vậy } 2(y')^2 = (y-1)y''. \quad \square$$

BÀI 4. Cho hàm số $y = x \cos x$. Chứng minh rằng: $x.y - 2(y' - \cos x) + x.y'' = 0$.

Lời giải.

$$y' = \cos x - x \sin x; y'' = -2 \sin x - x \cos x$$

$$VT = x.y - 2(y' - \cos x) + x.y'' = x.x \cos x - 2(\cos x - x \sin x - \cos x) + x(-2 \sin x - x \cos x) = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x = 0 = VP \text{ (đpcm)}. \quad \square$$

BÀI 5. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh $xy - 2y' + xy'' = -2 \sin x$.

Lời giải.

$$y' = \sin x + x \cos x; y'' = 2 \cos x - x \sin x$$

$$xy - 2y' + xy'' = x^2 \sin x - 2(\sin x + x \cos x) + x(2 \cos x - x \sin x) = -2 \sin x. \quad \square$$

BÀI 6. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y + y' \tan x + y'' - 2 = 0$.

Lời giải.

$$y' = 2 \sin x \cos x; y'' = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$$

$$2y + y' \tan x + y'' - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (đúng)}. \quad \square$$

BÀI 7. Cho hàm số $y = \cos^2 4x$. Chứng minh rằng: $32(2y-1) + y'' = 0$.

Lời giải.

$$y' = 2 \cos 4x \cdot (\cos 4x)' \Rightarrow y' = -8 \cos 4x \cdot \sin 4x \Rightarrow y' = -4 \sin 8x$$

$$y'' = -32 \cos 8x$$

$$VT = 32(2y-1) + y'' = 32(2 \cos^2 4x - 1) - 32 \cos 8x = 32 \cos 8x - 32 \cos 8x = 0 = VP. \quad \square$$

BÀI 8. Cho hàm số $y = x \tan x$. Chứng minh rằng: $x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 0$.

Lời giải.

$$y' = \tan x + x + x \tan^2 x$$

$$y'' = 1 + \tan^2 x + 1 + \tan^2 x + 2x \tan x \cdot (1 + \tan^2 x) = 2 + 2 \tan^2 x + 2x \tan x + 2x \tan^3 x$$

$$VT = x^2(2 + 2 \tan^2 x + 2x \tan x + 2x \tan^3 x) - 2(x^2 + x^2 \tan^2 x)(1 + x \tan x) = 2x^2 + 2x^2 \tan^2 x + 2x^3 \tan x + 2x^3 \tan^3 x - 2x^2 - 2x^3 \tan x - 2x^2 \tan^2 x - 2x^3 \tan^3 x = 0 = VP. \quad \square$$

BÀI 9. Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Chứng minh rằng: $y'' + y = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } y = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x; y'' = -\sin x - \cos x$$

$$\Rightarrow y'' + y = 0. \quad \square$$

DẠNG 4.3. Vận dụng đạo hàm cấp hai chứng minh đẳng thức tổ hợp

- Nhận dạng: Số hạng tổng quát của tổng có chứa thành phần dạng $(k-1) \cdot k$.
- Phương pháp: Chọn hàm $f(x)$ sao cho khai triển nhị thức Newton của $f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại một điểm chính là tổng cần tính. Lưu ý:

$$\sum_{k=2}^n (k-1)kC_n^k \Rightarrow f(x) = (1+x)^n;$$

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k (k-1)kC_n^k \Rightarrow f(x) = (1-x)^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)(n-k)C_n^k \Rightarrow f(x) = (x+1)^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k (n-k-1)(n-k)C_n^k \Rightarrow f(x) = (x-1)^n.$$

VÍ DỤ 1. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, chứng minh rằng

$$1 \cdot 2C_n^2 + 2 \cdot 3C_n^3 + \cdots + (n-1)nC_n^n = (n-1)n2^{n-2}.$$

Lời giải

Đặt $S = 1 \cdot 2C_n^2 + 2 \cdot 3C_n^3 + \cdots + (n-1)nC_n^n = \sum_{k=2}^n (k-1)kC_n^k$.

Xét

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \\ \Rightarrow f'(x) &= n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1} \\ \Rightarrow f''(x) &= (n-1)n(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n (k-1)kC_n^k x^{k-2} \\ \Rightarrow f''(1) &= (n-1)n2^{n-2} = \sum_{k=2}^n (k-1)kC_n^k = S. \end{aligned}$$

Vậy $1 \cdot 2C_n^2 + 2 \cdot 3C_n^3 + \cdots + (n-1)nC_n^n = (n-1)n2^{n-2}$. □

VÍ DỤ 2. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, tính tổng $S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + n^2C_n^n$.

Lời giải

• Cách 1: Ta có $S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + n^2C_n^n = \sum_{k=1}^n k^2C_n^k$.

Xét

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \\
\Rightarrow f'(x) &= n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} \\
\Rightarrow x f'(x) &= n.x(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^k \\
\Rightarrow (x f'(x))' &= n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k x^{k-1}.
\end{aligned}$$

Thay $x = 1$ ta có $S = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.

• Cách 2: Biến đổi

$$S = 1.(1+0)C_n^1 + 2.(1+1)C_n^2 + 3.(1+2)C_n^3 + \cdots + n(1+(n-1))C_n^n.$$

Khi đó, đặt

$$\begin{aligned}
S_1 &= C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n, S_2 = 1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + \cdots + (n-1)nC_n^n \\
\Rightarrow S &= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Xét $f(x) = (1+x)^n$. Ta có

$$S_1 = f'(1) = n2^{n-1}, S_2 = f''(1) = (n-1)n2^{n-2} \Rightarrow S = S_1 + S_2 = n(n+1)2^{n-2}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính tổng $S = 1^2 C_{2017}^1 + 2^2 C_{2017}^2 + \cdots + 2017^2 C_{2017}^{2017}$.

Lời giải.

Ta có $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$. Thay $n = 2017$ ta có $S = 2017.2018.2^{2015}$.

□

BÀI 2. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, chứng minh rằng $1.2C_n^2 - 2.3C_n^3 + \cdots + (-1)^n(n-1)nC_n^n = 0$.

Lời giải.

Xét

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k x^k \\
\Rightarrow f'(x) &= -n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k (-1)^k x^{k-1} \\
\Rightarrow f''(x) &= (n-1)n(1-x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n (k-1)k C_n^k (-1)^k x^{k-2} \\
\Rightarrow f''(1) &= 0 = \sum_{k=2}^n (-1)^k (k-1)k C_n^k.
\end{aligned}$$

Suy ra đpcm.

□

BÀI 3. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, tính tổng

$$S = (n-1)nC_n^0 + (n-2)(n-1)C_n^1 + \cdots + (n-k-1)(n-k)C_n^k + \cdots + 2.3C_n^{n-3} + 1.2C_n^{n-2}.$$

Lời giải.

Xét

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} \\
\Rightarrow f'(x) &= n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_n^k x^{n-k-1} \\
\Rightarrow f''(x) &= (n-1)n(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)(n-k) C_n^k x^{n-k-2} \\
\Rightarrow f''(1) &= (n-1)n2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)(n-k) C_n^k = S.
\end{aligned}$$

Vậy $S = (n-1)n2^{n-2}$. □

BÀI 4. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, tính tổng $S = 1^2 C_n^0 + 2^2 C_n^1 + \dots + (n+1)^2 C_n^n$.

Lời giải.

Xét

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \\
\Rightarrow xf(x) &= x(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} \\
\Rightarrow (xf(x))' &= (1+x+nx)(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n (k+1) C_n^k x^k \\
\Rightarrow x(xf(x))' &= (x+x^2+nx^2)(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n (k+1) C_n^k x^{k+1} \\
\Rightarrow [x(xf(x))']' &= (1+2x+2nx)(1+x)^{n-1} + (x+x^2+nx^2)(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^n (k+1)^2 C_n^k x^k.
\end{aligned}$$

Thay $x = 1$ ta có $S = \sum_{k=0}^n (k+1)^2 C_n^k = (n^2 + 5n + 4)2^{n-2}$. □

BÀI 5. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, chứng minh rằng

$$2.3C_n^0 + 3.4C_n^1 + \dots + (n+2)(n+3)C_n^n = (n^2 + 11n + 24)2^{n-2}.$$

Lời giải.

Xét

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \\
\Rightarrow x^3 f(x) &= x^3(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+3} \\
\Rightarrow (x^3 f(x))' &= (3x^2 + 3x^3 + nx^3)(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n (k+3) C_n^k x^{k+2} \\
\Rightarrow (x^3 f(x))'' &= (6x + 9x^2 + 3nx^2)(1+x)^{n-1} + (3x^2 + 3x^3 + nx^3)(n-1)(1+x)^{n-2} \\
&= \sum_{k=0}^n (k+2)(k+3) C_n^k x^{k+1}.
\end{aligned}$$

Thay $x = 1$ ta có $VT = \sum_{k=0}^n (k+2)(k+3) C_n^k = (n^2 + 11n + 24)2^{n-2} = VP$. □

BÀI 6. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, tính tổng

$$S = (2n-1)2nC_{2n}^0 + (2n-3)(2n-2)C_{2n}^2 + \cdots + 1.2C_{2n}^{2n-2}.$$

Lời giải.

Xét

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^{2n-k} \\ \Rightarrow f'(x) &= 2n(x+1)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} (2n-k)C_{2n}^k x^{2n-k-1} \\ \Rightarrow f''(x) &= (2n-1).2n.(x+1)^{2n-2} = \sum_{k=0}^{2n-2} (2n-k-1)(2n-k)C_{2n}^k x^{2n-k-2}. \end{aligned}$$

Đặt $S_1 = (2n-2)(2n-1)C_{2n}^1 + (2n-4)(2n-3)C_{2n}^3 + \cdots + 2.3C_{2n}^{2n-3}$. Suy ra

$$f''(1) = (2n-1).2n.2^{2n-2} = \sum_{k=0}^{2n-2} (2n-k-1)(2n-k)C_{2n}^k = S + S_1,$$

$$f''(-1) = 0 = \sum_{k=0}^{2n-2} (2n-k-1)(2n-k)C_{2n}^k (-1)^{2n-k-2} = S - S_1.$$

Suy ra $S = (2n-1)n2^{2n-2}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 7. Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ thỏa mãn $\frac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 42$. Tính tổng

$$S = 2^2 C_n^2 - 3^2 C_n^3 + 4^2 C_n^4 - \cdots + (-1)^n n^2 C_n^n.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 42 &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + \frac{n!}{(n-3)!3!} = 42(n-1)(n-2) \\ &\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 42(n-1)(n-2) \\ &\Leftrightarrow n + \frac{n}{6} = 42 \Leftrightarrow n = 36. \end{aligned}$$

$$\bullet S = 2^2 C_{36}^2 - 3^2 C_{36}^3 + 4^2 C_{36}^4 - \cdots + 36^2 C_{36}^{36} = \sum_{k=2}^{36} (-1)^k k^2 C_{36}^k.$$

• Xét

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{36} = \sum_{k=0}^{36} C_{36}^k (-1)^k x^k \\ \Rightarrow f'(x) &= -36(1-x)^{35} = \sum_{k=1}^{36} k C_{36}^k (-1)^k x^{k-1} \\ \Rightarrow x f'(x) &= -36x(1-x)^{35} = \sum_{k=1}^{36} k C_{36}^k (-1)^k x^k \\ \Rightarrow (x f'(x))' &= -36(1-36x)(1-x)^{34} = \sum_{k=1}^{36} k^2 C_{36}^k (-1)^k x^{k-1}. \end{aligned}$$

Thay $x = 1$ ta có

$$0 = \sum_{k=1}^{36} k^2 C_{36}^k (-1)^k = -C_{36}^1 + S \Rightarrow S = C_{36}^1 = 36.$$

□

BÀI 8. Giải phương trình

$$C_{2n+1}^1 - 1.2.2C_{2n+1}^2 + 2.2^2.3C_{2n+1}^3 - \cdots - (2n-1)2^{2n-1}2nC_{2n+1}^{2n} + 2n2^{2n}(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} = 4005.$$

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned} C_{2n+1}^1 - 1.2.2C_{2n+1}^2 + 2.2^2.3C_{2n+1}^3 - \cdots - (2n-1)2^{2n-1}2nC_{2n+1}^{2n} + 2n2^{2n}(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} &= 4005 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}C_{2n+1}^1 - 1.2C_{2n+1}^2 + \cdots - (2n-1)2n2^{2n-2}C_{2n+1}^{2n} + 2n(2n+1)2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n+1} &= \frac{4005}{2} \quad (*). \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{2n+1-k} x^k \\ \Rightarrow f'(x) &= (2n+1)(-1+x)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} kC_{2n+1}^k (-1)^{2n+1-k} x^{k-1} \\ \Rightarrow f''(x) &= 2n(2n+1)(-1+x)^{2n-1} = \sum_{k=2}^{2n+1} (k-1)kC_{2n+1}^k (-1)^{2n+1-k} x^{k-2} \\ \Rightarrow f''(2) &= 2n(2n+1) = \sum_{k=2}^{2n+1} (k-1)kC_{2n+1}^k (-1)^{2n+1-k} 2^{k-2}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2n+1) + \sum_{k=2}^{2n+1} (k-1)kC_{2n+1}^k (-1)^{2n+1-k} 2^{k-2} = \frac{4005}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2n+1) + 2n(2n+1) = \frac{4005}{2} \\ &\Leftrightarrow 8n^2 + 6n - 4004 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 22 \\ n = -\frac{91}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $n = 22$.

□

BÀI 5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 5

A ĐỀ SỐ 1A

Câu 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x - 1)^4$.

b) $y = x\sqrt{x+3}$.

c) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2}$.

d) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Lời giải.

a) $y' = 4(x-1)^3(x-1)' \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$
 $= 4(x-1)^3 \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

b) $y' = x'\sqrt{x+3} + x\sqrt{x+3}' \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$
 $= \sqrt{x+3} + \frac{x(x+3)'}{2\sqrt{x+3}} \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

$= \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

c) $y = x + 3 + \frac{5}{x-2} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

$y' = 1 - \frac{5}{(x-2)^2} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

d) $y' = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

$= \frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

$= -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm} \quad \square$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{khi } x < 0 \\ \frac{2}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải.

$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = -2 \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x+1} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{x(x+1)} = -2 \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

Suy ra $f'(0^+) = f'(0^-) = -2$. Vậy $f'(0) = -2$. $\dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm} \quad \square$

Câu 3. a) Cho hàm số $f(x) = \sin x - 2\cos x - x^2$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.

b) Một vật được ném lên trên trời theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0 = 4,9 \text{ m/s}$. Biết gia tốc trọng trường là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, hỏi sau bao nhiêu giây (kể từ lúc bắn), vật đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải.

a) Ta có $f''(x) = -\sin x + 2\cos x - 2 \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x + 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x - 2\cos x = -2 \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \sin x - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

Chọn số thực a thỏa mãn $\sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos b = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Khi đó phương trình trở thành $\cos(x - a) = \cos a \dots\dots\dots 0,5$ điểm

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = 2a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \dots\dots\dots 0,5$ điểm

b)

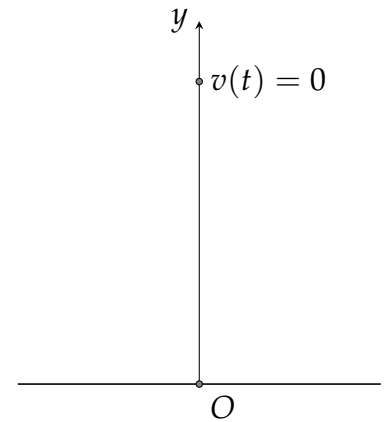
Chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, gốc O ở mặt đất. Khi đó, phương trình chuyển động của vật là $s(t) = 4,9t - 4,9t^2$. .. 0,5 điểm

Phương trình vận tốc của vật là $v(t) = s'(t) = 4,9 - 9,8t$... 0,5 điểm

Vật đạt độ cao lớn nhất khi vận tốc bằng 0.

Xét phương trình $v(t) = 0 \dots\dots\dots 0,5$ điểm.

$\Leftrightarrow 4,9 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 0,5$ điểm.



□

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 8}$. Tính $y^{(n)}$ với mọi số nguyên dương n .

Lời giải.

Ta có $y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-4}$. .. 0,25 điểm

$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x-4}\right)^{(n)} \dots\dots\dots 0,25$ điểm

Chúng minh quy nạp ta có $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} \dots\dots\dots 0,25$ điểm

Chúng minh quy nạp ta có $\left(\frac{1}{x-4}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-4)^{n+1}}$.

Vậy $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-4)^{n+1}} \dots\dots\dots 0,25$ điểm

□

B ĐỀ SỐ 1B

Câu 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x + 5)^5$.

b) $y = x \cdot \sqrt{x - 7}$.

c) $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$.

d) $y = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}}$.

Lời giải.

a) $y' = 5(x + 5)^4(x + 5)' \dots\dots\dots 0,5$ điểm
 $= 5(x + 5)^4 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

b) $y' = x' \sqrt{x - 7} + x \sqrt{x - 7}' \dots\dots\dots 0,25$ điểm

$= \sqrt{x - 7} + \frac{x(x - 7)'}{2\sqrt{x - 7}} \dots\dots\dots 0,25$ điểm

$= \frac{3x - 14}{2\sqrt{x - 7}} \dots\dots\dots 0,5$ điểm

c) $y = x + 2 - \frac{3}{x + 2} \dots\dots\dots 0,5$ điểm

$$y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

$$\text{d) } y' = \frac{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}} \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$= \frac{\frac{4}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}} \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$= \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \cdot \frac{2}{(x+2)^2} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm} \quad \square$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{khi } x < 0 \\ \frac{4}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4x}{x} = -4 \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4}{x+1} - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x}{x(x+1)} = -4 \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Suy ra $f'(0^+) = f'(0^-) = -4$. Vậy $f'(0) = -4$. $\dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm} \quad \square$

Câu 3. a) Cho hàm số $f(x) = 2 \sin x - \cos x - x^2$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.

b) Ném một quả bóng lên trên trời theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0 = 7,35 \text{ m/s}$. Biết gia tốc trọng trường là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, hỏi sau bao nhiêu giây (kể từ lúc ném), quả bóng đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải.

a) Ta có $f''(x) = -2 \sin x + \cos x - 2 \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x - \cos x = -2 \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Chọn số thực a thỏa mãn $\sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Khi đó phương trình trở thành $\cos(x - a) = -\sin a \Leftrightarrow \cos(x - a) = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = 2a + \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

b)

Chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, gốc O ở mặt đất. Khi đó,

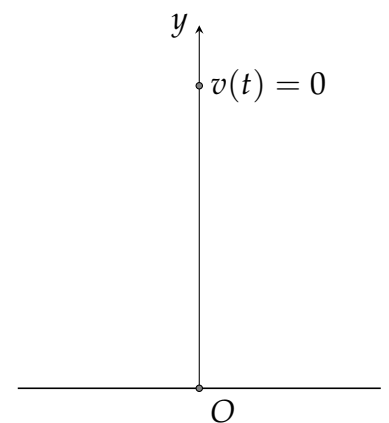
phương trình chuyển động của vật là $s(t) = 7,35t - 4,9t^2$. $\dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

Phương trình vận tốc của vật là $v(t) = s'(t) = 7,35 - 9,8t$. $\dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

Quả bóng đạt độ cao lớn nhất khi vận tốc bằng 0.

Xét phương trình $v(t) = 0 \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$.

$\Leftrightarrow 7,35 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 0,75$. $\dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$.



$\square$

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x^2+2x-15}$. Tính $y^{(n)}$ với mọi số nguyên dương n .

Lời giải.

Ta có $y = \frac{1}{x-3} + 2\frac{1}{x+5}$ 0,25 điểm

$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} + 2\left(\frac{1}{x+5}\right)^{(n)}$ 0,25 điểm

Chúng minh quy nạp ta có $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-3)^{n+1}}$ 0,25 điểm

Chúng minh quy nạp ta có $\left(\frac{1}{x+5}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+5)^{n+1}}$.

Vậy $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-3)^{n+1}} + 2\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+5)^{n+1}}$ 0,25 điểm □

C ĐỀ SỐ 2A

Câu 1. (4,0 điểm) Tính đạo hàm các hàm số sau

① $y = x^3 - 3(1-x)^2$.

② $y = \frac{1-x}{1+x}$.

③ $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Lời giải.

① $y' = 3x^2 - 6(1-x) \cdot (1-x)' = 3x^2 + 6(1-x) = 3x^2 - 6x + 6$. (2 điểm)

② $y' = \frac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$. (1 điểm)

③ $y = \sqrt{x^2 - 2x} = \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. (1 điểm)

□

Câu 2. (1,0 điểm) Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Bằng định nghĩa, tính $f'(0)$.

Lời giải.

Ta có $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. (0,5 điểm)

$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} = 1$. (0,5 điểm)

□

Câu 3. (4,0 điểm)

① Cho hàm số $y = 16 \cos x + 17 \sin x$. Chứng minh rằng $y'' + y = 0$.

② Cho hàm số $y = x^3 - x + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M biết điểm M cách trục tung một khoảng bằng 1.

Lời giải.

① Ta có $y' = -16 \sin x + 17 \cos x$. (0,5 điểm)

$\Rightarrow y'' = -16 \cos x - 17 \sin x$. (0,5 điểm)

$\Rightarrow y'' + y = -16 \cos x - 17 \sin x + 16 \cos x + 17 \sin x = 0$. (0,5 điểm)

- ② Điểm M cách trục tung một khoảng bằng 1 nên $x_M = 1$. (0,5 điểm)
 Mà $M \in (C)$ nên $y_M = 1 \Rightarrow M(1; 1)$. (0,5 điểm)
 Lại có $y' = 3x^2 - 1 \Rightarrow y'(1) = 2$. (0,5 điểm)
 Vậy phương trình tiếp tuyến tại M của (C) là $y = 2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$. (1 điểm)

□

Câu 4. (1,0 điểm) Tính tổng $S = C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3 + 5C_{2017}^5 + \dots + 2017C_{2017}^{2017}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+x)^{2017} &= C_{2017}^0 + C_{2017}^1x + C_{2017}^2x^2 + \dots + C_{2017}^{2017}x^{2017}, \\ (1-x)^{2017} &= C_{2017}^0 - C_{2017}^1x + C_{2017}^2x^2 - \dots - C_{2017}^{2017}x^{2017}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{2017} - (1-x)^{2017} = 2 \left(C_{2017}^1x + C_{2017}^3x^3 + C_{2017}^5x^5 + \dots + C_{2017}^{2017}x^{2017} \right).$$

(0,5 điểm)

Đạo hàm hai vế ta được

$$2017 \left[(1+x)^{2016} + (1-x)^{2016} \right] = 2 \left(C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3x^2 + 5C_{2017}^5x^4 + \dots + 2017C_{2017}^{2017}x^{2016} \right).$$

Thay $x = 1$ ta được

$$2017 \left[(1+1)^{2016} - (1-1)^{2016} \right] = 2 \left(C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3 + 5C_{2017}^5 + \dots + 2017C_{2017}^{2017} \right)$$

$$\Rightarrow S = C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3 + 5C_{2017}^5 + \dots + 2017C_{2017}^{2017} = 2017 \cdot 2^{2015}.$$

(0,5 điểm)

□

D ĐỀ SỐ 2B

Câu 1. (4,0 điểm) Tính đạo hàm các hàm số sau

① $y = (1-x)^3 - \frac{x^2}{2}.$

② $y = \frac{x+1}{1-x}.$

③ $y = \sqrt{x-2x^2}.$

Lời giải.

① $y' = 3(1-x)^2 \cdot (1-x)' - \frac{2x}{2} = -3(1-x)^2 - x.$ (2 điểm)

② $y' = \frac{(x+1)'(1-x) - (1-x)'(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$ (1 điểm)

③ $y' = \frac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.$ (1 điểm)

□

Câu 2. (4,0 điểm)

① Cho hàm số $y = f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.

- ② Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x + 2$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Lời giải.

- ① Ta có $y' = \cos x - \sqrt{3} \sin x$. (0,5 điểm)
 $\Rightarrow y'' = -\sin x - \sqrt{3} \cos x$. (0,5 điểm)
 Khi đó

$$\begin{aligned} y'' = 0 &\Leftrightarrow -\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. ($k \in \mathbb{Z}$). (1 điểm)

- ② Gọi M là giao của đồ thị hàm số với trục tung.
 $\Rightarrow x_M = 0 \Rightarrow y_M = 2 \Rightarrow M(0; 2)$. (0,5 điểm)
 Ta có $y' = 3x^2 + 3 \Rightarrow y'(0) = 3$. (0,5 điểm)
 Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 3(x - 0) + 2 \Leftrightarrow y = 3x + 2$. (1 điểm)

□

Câu 3. (1,0 điểm) Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + (3 - m)x - 2$. Tìm m để $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + 3 - m$. Khi đó (0,25 điểm)

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow g(x) = x^2 - 4x + 3 \geq m, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} g(x) \geq m. \end{aligned}$$

(0,5 điểm)

Mà $g(x) = (x - 2)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = -1 \Rightarrow m \leq -1$. (0,25 điểm)

□

Câu 4. (1,0 điểm) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}(t - 2)^3 + \frac{t^2}{2} + 4t - \frac{8}{3}$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, đến giây thứ 5, vận tốc lớn nhất và nhỏ nhất của vật là bao nhiêu?

Lời giải.

Vận tốc của vật là $v(t) = s' = -(t - 2)^2 + t + 4 = -t^2 + 5t$ với $t \in [1; 5]$. (0,25 điểm)

Ta có $v(t)$ là một hàm bậc 2 có đồ thị là đường parabol có đỉnh là $I\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{4}\right)$.

Ta có bảng biến thiên

x	1	$\frac{5}{2}$	5
$v(t)$	4	$\frac{25}{4}$	0

$\Rightarrow$ Vận tốc lớn nhất là $\frac{25}{4}$ (m/s) và vận tốc nhỏ nhất là 0 (m/s).
□

(0,5 điểm)

(0,25 điểm)

E ĐỀ SỐ 3A

Câu 1. (4,0 điểm) Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2017;$

② $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1};$

③ $y = \sin^2 2x;$

④ $y = \sqrt{\tan \left(2017x - \frac{\pi}{4} \right)}.$

Lời giải.

① Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 4.$

② Ta có $y' = \frac{(2x - 1)(x + 1) - (x^2 - x + 2)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}.$

③ Ta có $y' = 2 \cdot \sin 2x \cdot (\sin 2x)' = 2 \cdot \sin 2x \cdot (\cos 2x) \cdot 2 = 2 \cos 4x.$

④ Ta có $y' = \frac{\left[\tan \left(2017x - \frac{\pi}{4} \right) \right]'}{2 \sqrt{\tan \left(2017x - \frac{\pi}{4} \right)}} = \frac{2017}{2 \cdot \cos^2 \left(2017x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{\tan \left(2017x - \frac{\pi}{4} \right)}}.$

□

Câu 2. (3,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 4$ có đồ thị (C).

① Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2;

② Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết rằng tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 .

Lời giải.

① Ta có, $y' = 3x^2 - 4x.$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 2$ được cho bởi công thức $k = f'(2) = 4.$

Vậy hệ số góc cần tìm là $k = 4.$

② Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị và tiếp tuyến cần tìm.

Khi đó, ta có $k = f'(x_0) \Rightarrow 3x_0^2 - 4x_0 = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

— Với $x_0 = 1$ ta được $y_0 = 3.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_1(1; 3)$ là $y = -x + 4.$

— Với $x_0 = \frac{1}{3}$ ta được $y_0 = \frac{103}{27}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{103}{27} \right)$ là $y = -x + \frac{112}{27}$.

□

Câu 3. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$.

- ① Tính đạo hàm y' của hàm số đã cho;
- ② Chứng minh đẳng thức $2y' + (x-1) \cdot y'' = 0$.

Lời giải.

① Ta có $y' = \frac{(x-1) - (x-2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$.

② Theo câu a) ta có $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$ nên

$$y'' = -\frac{2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2}{(x-1)^3}$$

$$\text{Khi đó, } 2y' + (x-1) \cdot y'' = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2 \cdot (x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^2} = 0.$$

(điều phải chứng minh)

□

Câu 4. (1,0 điểm) Chứng minh đẳng thức

$$C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + \dots + 2017C_{2018}^{2017} = 2018(2^{2017} - 1).$$

Lời giải.

Xét hàm số $y = (1+x)^{2018} = 1 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + C_{2018}^3 x^3 + \dots + C_{2018}^{2017} x^{2017} + C_{2018}^{2018} x^{2018}$

Đạo hàm hai vế ta được:

$$2018(1+x)^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 x + 3C_{2018}^3 x^2 + \dots + 2017C_{2018}^{2017} x^{2016} + 2018x^{2017}.$$

Chọn $x = 1$ ta được: $2018 \cdot 2^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + \dots + 2017 \cdot C_{2018}^{2017} + 2018$

$$\Leftrightarrow (2^{2017} - 1) 2018 = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + \dots + 2017 \cdot C_{2018}^{2017}.$$

□

F ĐỀ SỐ 3B

Câu 1. (4,0 điểm) Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = x^{2018} - x^{2017} + 2016;$

② $y = \frac{1-2x}{x+3};$

③ $y = x^2 \sin x;$

④ $y = \sqrt{\tan(x^2 + 1)}.$

Lời giải.

① Ta có $y' = 2018x^{2017} - 2017x^{2016}$.

② Ta có $y' = \frac{(-2)(x+3) - (1-2x)}{(x+3)^2} = \frac{-7}{(x+3)^2}$.

③ Ta có $y' = (x^2 \sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$.

④ Ta có $y' = \frac{[\tan(x^2+1)]'}{2\sqrt{\tan(x^2+1)}} = \frac{2x}{2 \cdot \cos^2(x^2+1) \cdot \sqrt{\tan(x^2+1)}} = \frac{x}{\cos^2(x^2+1) \cdot \sqrt{\tan(x^2+1)}}$.

□

Câu 2. (3,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ có đồ thị (C).

① Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -2 ;

② Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) : $y = 6x + 2017$.

Lời giải.

① Ta có, $y' = x^2 - x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = -2$ được cho bởi công thức $k = f'(-2) = 6$.

Vậy hệ số góc cần tìm là $k = 6$.

② Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị và tiếp tuyến cần tìm.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) : $y = 6x + 2017$ nên tiếp tuyến có dạng $y = 6x + b$ với $b \neq 2017$, có hệ số góc $k = 6$

Khi đó, ta có $k = f'(x_0) \Rightarrow x_0^2 - x_0 = 6. \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -2 \end{cases}$

— Với $x_0 = 3$ ta được $y_0 = 3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại $M_1\left(3; \frac{11}{2}\right)$ là $y = 6x - \frac{25}{2}$.

— Với $x_0 = -2$ ta được $y_0 = \frac{-11}{3}$.

Vậy Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_2\left(-2; \frac{-11}{3}\right)$ là $y = 6x + \frac{25}{3}$.

□

Câu 3. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2017$, với m là tham số. Tìm m để $y' > 0$ với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải.

Ta có, $y' = 3x^2 - 6x + m$

Theo đề bài: $y' > 0$ với mọi m

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m > 0$ với mọi giá trị m

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta'_{y'} = 9 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$

Vậy $m > 3$ thì $y' > 0$ với mọi giá trị của tham số m .

□

Câu 4. (1,0 điểm) Một vật chuyển động với phương trình $S = t^2 - 25t - 1$ tính bằng mét (m), t là khoảng thời gian tính bằng giây (s). Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 20$ s.

Lời giải.

Ta có $S' = 2t - 25$

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 20$ s được cho bởi công thức:

$$v(20) = S'(20) = 2 \cdot 20 - 25 = 15 \text{ m/s.}$$

Vậy vận tốc tức thời tại thời điểm 20s là 15 m/s.

□