TRƯỜNG THPT YÊN ĐỊNH 1

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÃ ĐỀ 101

KỲ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2022-2023
Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: **90 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: /   /2022

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

A. $m\neq 1$. **B.** $m\neq 2$. **C.** $m\neq 3$. **D.** $m\neq 2$.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Bất kì một hình chóp nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.
B. Bất kì một hình lăng trụ nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.
C. Bất kì một hình hộp nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.
D. Bất kì một hình tứ diện nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 3. Chu kỳ của hàm số $y=3\sin\dfrac{x}{2}$ là số nào sau đây?

A. 4π. **B.** π. **C.** 0. **D.** 2π.

Câu 4. Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=27$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-11$.

Câu 5. Một hình trụ có bán kính đáy $r=4\,\text{cm}$ và độ dài đường sinh $l=3\,\text{cm}$. Diện tích toàn phần của hình trụ đó bằng

A. $24\pi\text{cm}^2$. **B.** $40\pi\text{cm}^2$ **C.** $56\pi\text{cm}^2$ **D.** $36\pi\text{cm}^2$

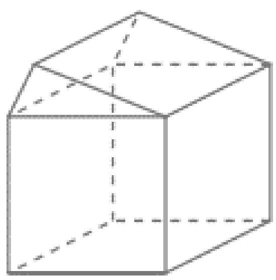
Câu 6. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.EFGH$. Tính tỉ số k giữa thể tích khối trụ ngoại tiếp và thể tích khối trụ nội tiếp hình lăng trụ trên.

A. $k=2\sqrt{2}$. **B.** **C.** $k=\sqrt{2}$. **D.** $k=2$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

Câu 8. Hình vẽ bên dưới có bao nhiêu mặt



A. 4. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. -3. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** -5. **D.** $-\dfrac{7}{2}$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n=(-1)^n\sqrt{n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn. **B.** Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số tăng. **D.** Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 11. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A. 50000. **B.** 4500. **C.** 2296. **D.** 2520.

Câu 12. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

A. $\frac{2}{7}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{37}{42}$. **D.** $\frac{10}{21}$.

Câu 13. Cho $a > 0,\ a \neq 1$. Tìm mệnh đề ***đúng*** trong các mệnh đề sau:

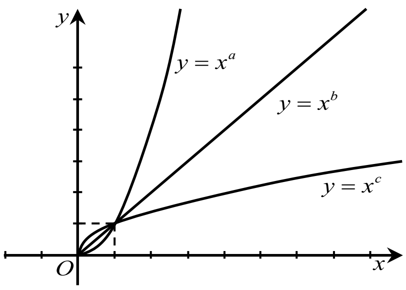
A. Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là tập $\mathbb{R}$.

B. Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là tập $\mathbb{R}$.

C. Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là tập $\mathbb{R}$.

D. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 14. Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y = x^a$, $y = x^b$, $y = x^c$ trên miền $(0;+\infty)$. Hỏi trong các số a, b, c số nào nhận giá trị trong khoảng $(0;\ 1)$?



A. Số b. **B.** Số c. **C.** Số a. **D.** Số a và số c.

Câu 15. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a\ln b + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 16. Tổng tất cả các cạnh của khối lăng trụ không thể bằng số nào sau đây?

A. 2025. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2022.

Câu 17. Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $A = \frac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản và $a,b \in \mathbb{Z}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng:

A. 10. **B.** -8. **C.** 8. **D.** -10.

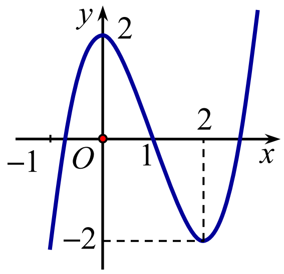
Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 19. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Câu 20. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3-3x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$.

C. $y=x^3+3x^2+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $7^x\ge 10-3x$ chứa bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 10?

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 22. Cho tứ diện $OABC$ có $OA,\ OB,\ OC$ đôi một vuông góc và đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23. Kết quả của $I=\int xe^x\mathrm{d}x$ là

A. $I=xe^x-e^x+C$. **B.** $I=e^x+xe^x+C$.

C. $I=\frac{x^2}{2}e^x+C$. **D.** $I=\frac{x^2}{2}e^x+e^x+C$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10}f(x)\mathrm{d}x=7$ và $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=-4$. **B.** $P=4$. **C.** $P=10$. **D.** $P=7$.

Câu 25. Cho tứ diện $SABC$ có $SA=a,SB=2a,SC=3a$. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện bằng

A. $6a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 26. Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối hộp đó là:

A. $4a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** a^3. **D.** $8a^3$.

Câu 27. Cho đa giác lồi n cạnh ($n\in\mathbb{N}^*,n\ge 6$) nội tiếp đường tròn (O) sao cho không có ba đường chéo nào đồng quy. Các cạnh và các đường chéo của đa giác giao nhau tạo thành các tam giác. Gọi X là tập hợp các tam giác như thế. Lấy ngẫu nhiên một tam giác trong tập X. Tìm n để xác suất lấy được tam giác không có đỉnh nào là đỉnh của đa giác bằng $\frac{4}{15}$.

A. $n=23$. **B.** $n=19$. **C.** $n=15$. **D.** $n=11$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH=\frac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $AB=BD=2$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của BO. Gọi G là trọng tâm tam giác ADC. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy góc $45°$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG.

A. $\frac{6\sqrt{2373}}{113}$. **B.** $\frac{\sqrt{2373}}{113}$. **C.** $\frac{2\sqrt{14313}}{367}$. **D.** $\frac{4\sqrt{14313}}{367}$.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[0;18]$ để phương trình $(x-2)\log_4(x+m)=x-1$ có đúng một nghiệm dương?

A. 16. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 18.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=\frac{49}{2}$ và $f'(x)=\frac{x^3}{x^2+16-4\sqrt{x^2+16}}$, $\forall x\neq 0$. Khi đó $\int_0^3 x.f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2915}{24}$. **B.** $\frac{2195}{24}$. **C.** $\frac{2195}{8}$. **D.** $\frac{2915}{3}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A và C. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng a. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

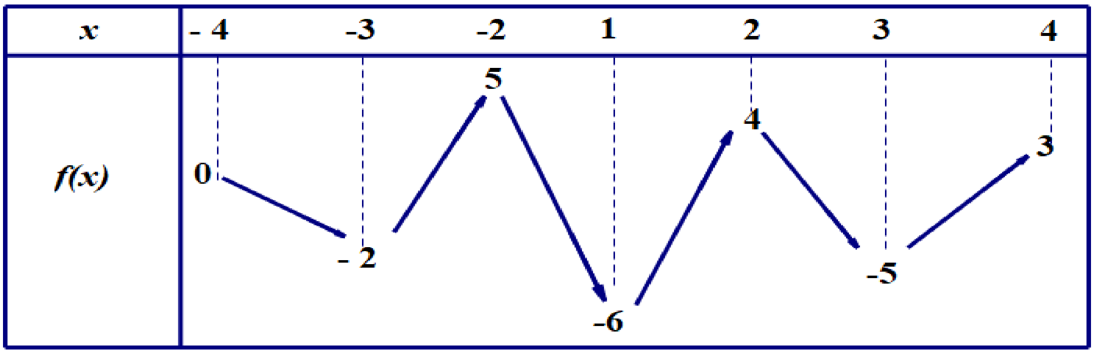
Câu 33. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $log_{2020}(x+y^2)+log_{2021}(y^2+y+64)\geq log_4(x-y)$

A. 602 **B.** 2. **C.** 301. **D.** 302.

Câu 34. Nghiệm của phương trình $\sin 3x.\cot x=\cot x$ có các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác tạo thành đa giác có diện tích bằng

A. $2\sqrt{3}$ đvdt. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ đvdt. **C.** $\sqrt{3}$ đvdt. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ đvdt.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bản biến thiên như hình vẽ bên dưới



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m\in[-4;4]$ để hàm số $g(x)=|f(x^3+2x)+3f(m)|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

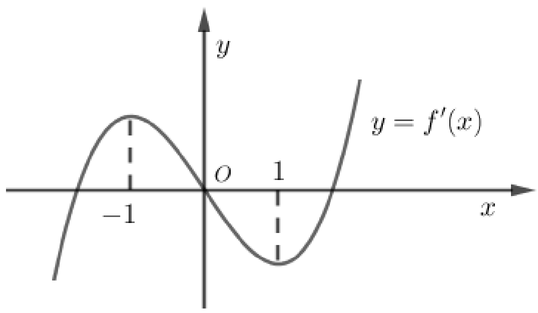
A. 11. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 36. Cho hai số thực x, y thoả mãn:

$\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{59+\sqrt{259}}{95}$ **B.** $\frac{33+\sqrt{233}}{94}$. **C.** $\frac{3+\sqrt{103}}{49}$ **D.** $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=|4f(\sin x)+\cos 2x-a|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. Vô số. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k = -\frac{1}{3}$. **B.** $k = -3$. **C.** $k = \frac{1}{3}$. **D.** $k = 3$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 2.

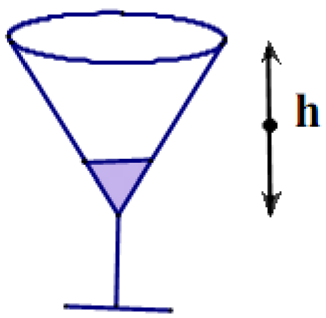
Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(1) = -1, f(4) = -8$ và $\sqrt{x^3}\left(f'(x)\right)^2 - f(x) = 9\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 3x, \forall x \in [1;4]$. Tích phân $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{89}{6}$. **B.** $-\frac{79}{6}$. **C.** -8. **D.** -7.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x} + 2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f\left(\left|x^3 - 2x^2 + 3x - m\right|\right) + f\left(2x - 2x^2 - 5\right) < 0, \forall x \in (0;1)$. Số phần tử của S là?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 42. Một chiếc ly dạng hình nón (như hình vẽ với chiều cao ly là h). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao của ly. Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi úp ngược ly lại thì tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng bao nhiêu?



A. $\frac{4 - \sqrt{63}}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4 - \sqrt[3]{63}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{63}}{4}$.

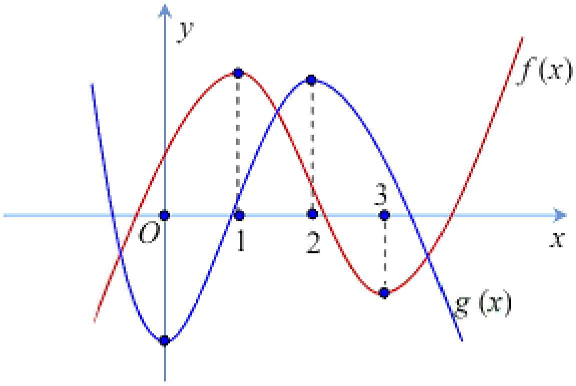
Câu 43. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO} = 30^0, \widehat{SAB} = 60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{5}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 44. Biết rằng x, y là các số thực dương sao cho 3 số $u_1 = 8^{x + \log_2 y}$, $u_2 = 2^{x - \log_2 y}$, $u_3 = 5y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và một cấp số nhân. Khi đó, tích $2^x.y^2$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 10.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y = f(2x-1)$, $y = g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:



A. -2. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 46. Cho hàmsố $f\left(t\right)=\dfrac{2t+1}{t-2}$ và x,y là các số thực thỏa mãn $5x^2+2xy+2y^2=9$.

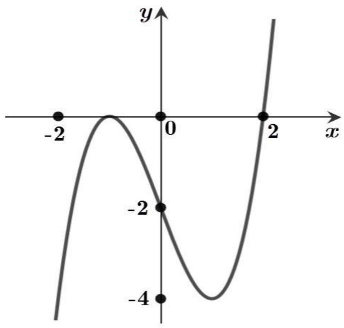
Giátrịlớnnhấtcủa $f\left(\dfrac{6x-6}{4x-y-9}\right)$ bằng

A. $\dfrac{-1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** -3.

Câu 47. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=f(x^2-2mx+m^2+1)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 15. **B.** -12. **C.** 14. **D.** -10.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $\dfrac{\log_3^2 x-3\log_3 x+2}{\sqrt{m-2^x}}<0$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương?

A. 63. **B.** 64. **C.** 127. **D.** 128.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$?

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

------------- HẾT -------------

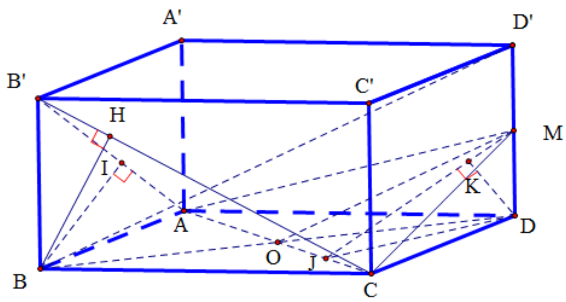
Mã đề [101]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	A	A	C	D	A	D	C	A	C	C	A	B	D	C	D	B	A	B	B	D	A	B	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	B	C	C	B	B	D	A	C	A	D	D	B	A	B	D	C	D	A	A	B	C	C	C	D

Câu 26.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = x$, $AD = y$, $AA' = z$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên $B'C$, ta có BH là đoạn vuông góc chung của AB và $B'C$ nên $d\left(AB, B'C\right) = BH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4a^2}$. (1)

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B trên AB', ta có BI là đoạn vuông góc chung của BC và AB' nên $d\left(BC, AB'\right) = BI \Rightarrow \dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{5}{4a^2}$. (2)

Gọi M là trung điểm của DD', O là giao điểm của AC và BD, ta có mặt phẳng $\left(ACM\right)$ chứa AC và song song với BD' nên $d\left(AC, BD'\right) = d\left(BD', \left(ACM\right)\right) = d\left(D', \left(ACM\right)\right)$.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của D trên MJ, ta có $d\left(D', \left(ACM\right)\right) = d\left(D, \left(ACM\right)\right) = DK \Rightarrow \dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{4}{z^2} = \dfrac{3}{a^2}$. (3)

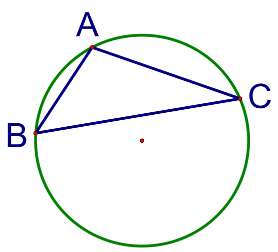
Từ (1), (2) và (3) ta có $\dfrac{2}{z^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Leftrightarrow z = 2a \Rightarrow x = y = a$. Thể tích khối hộp là $V = xyz = 2a^3$.

Câu 27.

Lời giải

Chọn B Đếm số phần tử của tập X.

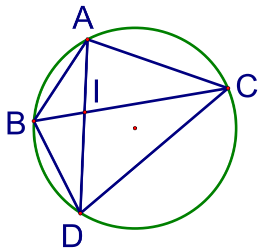
TH1: Tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác: Số tam giác loại này là C_n^3.



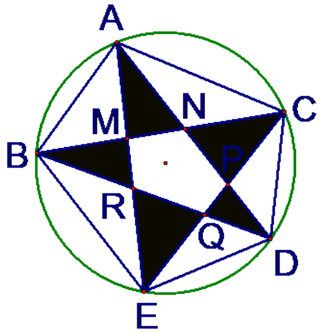
TH2: Tam giác có đúng 2 đỉnh là đỉnh của đa giác:

Chọn hai đỉnh của đa giác và một đỉnh nằm trong đa giác là giao điểm của hai đường chéo. Để có một giao điểm như vậy ta cần phải có hai đường chéo, hay cần 4 đỉnh của đa giác. Mỗi cách chọn 4 đỉnh của đa giác cho ta 4 tam giác có đúng hai đỉnh là đỉnh của đa giác.

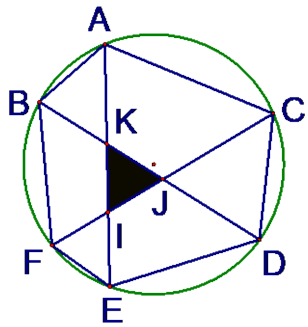
Vậy số tam giác loại này là $4C_n^4$.



TH3: Tam giác có đúng một đỉnh là đỉnh của đa giác:
Mỗi cách chọn 5 đỉnh của đa giác sinh ra 5 tam giác loại này.
Vậy có $5C_n^5$ tam giác trong TH này.



TH4: Tam giác không có đỉnh nào là đỉnh của đa giác:
Mỗi cách chọn 6 đỉnh của đa giác sinh ra một tam giác loại này.
Vậy số tam giác trong TH này là C_n^6.



Vậy có tất cả: $C_n^3+4C_n^4+5C_n^5+C_n^6$ tam giác sịnh ra do các cạnh và đường chéo của đa giác tạo ra.

Lấy ngẫu nhiên một tam giác từ tập X, suy ra $n(\Omega)=C_n^3+4C_n^4+5C_n^5+C_n^6$

Gọi A là biến cố lấy được tam giác không có đỉnh nào là đỉnh của đa giác .

Ta có $n(A)=C_n^6$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_n^6}{C_n^3+4C_n^4+5C_n^5+C_n^6}=\dfrac{n^3-12n^2+47n-60}{n^3+18n^2-43n+60}$

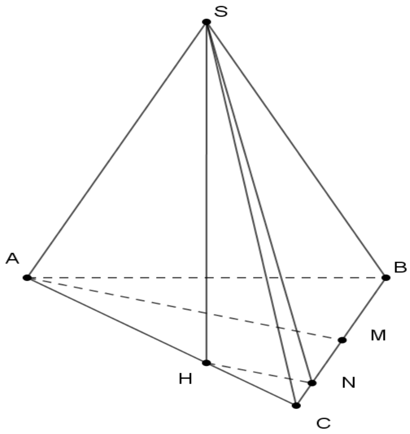
$$P(A)=\frac{4}{15}\Leftrightarrow\frac{n^3-12n^2+47n-60}{n^3+18n^2-43n+60}=\frac{4}{15}\Leftrightarrow 11n^3-252n^2+877n-1140=0$$

$$\Leftrightarrow(n-19)\left(11n^2-43n+60\right)=0\Leftrightarrow n=19$$

Câu 28.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC.

$N \in CM : \dfrac{CN}{CM} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HN//AM$. Mà

ΔABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow HN \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHN)$.

$\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{(SN;HN)} = \widehat{SNH} = 60^o$.

Do ΔABC đều nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HN = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

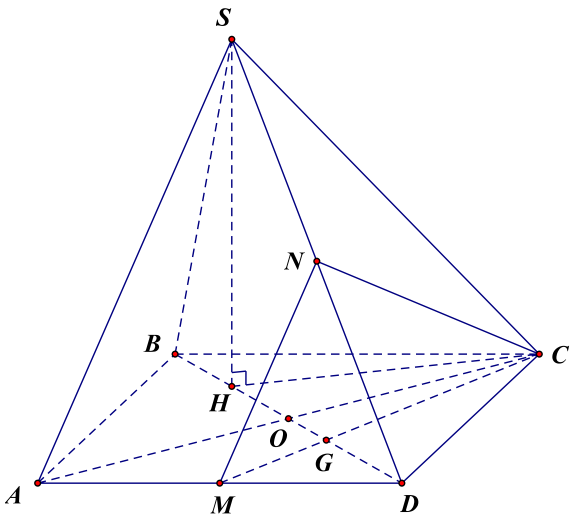
ΔSHN vuông tại H có $SH = HN.\tan\widehat{SNH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60^o = \dfrac{a}{2}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 29.

Lời giải

Chọn C



Kéo dài CG cắt AD tại trung điểm M của AD, gọi N là trung điểm SD.

Hình thoi $ABCD$ có $AB = BD = 2$ nên tam giác BCD đều và $CO = \sqrt{3} \Rightarrow CH = \sqrt{CO^2 + OH^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Tam giác SHC vuông cân vì $\widehat{SHC} = 90°, \widehat{SCH} = 45° \Rightarrow SH = CH = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Dễ thấy $SA//MN \Rightarrow SA//(CMN)$ nên $d(SA,CG) = d(SA,(CMN)) = d(A,(CMN)) = d(D,(CMN))$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.4.\dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{\sqrt{39}}{3} \Rightarrow V_{S.ADC} = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$

$$\frac{V_{NMDC}}{V_{SADC}}=\frac{DM}{DA}.\frac{DN}{DS}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{NMDC}=\frac{\sqrt{39}}{24}$$

Có $\Delta SHA=\Delta SHC\Rightarrow SA=SC=\sqrt{2}HC=\frac{\sqrt{26}}{2}\Rightarrow MN=\frac{1}{2}SA=\frac{\sqrt{26}}{4}$

Tam giác ACD có $AD=CD=2, AC=2\sqrt{3}\Rightarrow CM=\sqrt{\frac{2\left(AC^2+DC^2\right)-AD^2}{4}}=\sqrt{7}$

Tam giác SCD có $SD=\sqrt{SH^2+HD^2}=\sqrt{\frac{13}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{22}}{2}, CD=2, SC=\frac{\sqrt{26}}{2}$ suy ra trung tuyến

$$CN=\sqrt{\frac{2\left(CS^2+CD^2\right)-SD^2}{4}}=\frac{\sqrt{62}}{4}$$

Tam giác CMN có $CN=\frac{\sqrt{62}}{4}, CM=\sqrt{7}, MN=\frac{\sqrt{26}}{4}\Rightarrow \cos\widehat{MCN}=\frac{37\sqrt{434}}{868}\Rightarrow \sin\widehat{MCN}=\frac{\sqrt{637112}}{1736}$.

Suy ra $S_{\Delta CMN}=\frac{1}{2}.CM.CN.\sin\widehat{MCN}=\frac{\sqrt{367}}{16}$.

$$V_{NMDC}=\frac{1}{3}.Bh=\frac{1}{3}.S_{\Delta CMN}.d\left(D,\left(CMN\right)\right)\Rightarrow d\left(D,\left(CMN\right)\right)=\frac{3V_{NMDC}}{S_{\Delta CMN}}=\frac{2\sqrt{14313}}{367}.$$

Vậy $d\left(SA,CM\right)=\frac{2\sqrt{14313}}{367}$.

Câu 30.

Lời giải

Bài yêu cầu $m\in[0;18]$ và $x>0$, khi đó $x+m>0$. Xét $x=2$ không phải nghiệm của phương trình nên với $x\neq 2$ ta có:

$$\left(x-2\right)\log_4\left(x+m\right)=x-1\Leftrightarrow \log_4\left(x+m\right)=\frac{x-1}{x-2}\Leftrightarrow x+m=4^{\frac{x-1}{x-2}}\Leftrightarrow m=4^{\frac{x-1}{x-2}}-x\ \ (1)$$

Đặt $f\left(x\right)=4^{\frac{x-1}{x-2}}-x$, ta chỉ quan tâm nghiệm dương nên xét $f\left(x\right)$ trên $\left(0;+\infty\right)\setminus\{2\}$.

Ta có $f'\left(x\right)=4^{\frac{x-1}{x-2}}.\frac{\left(-1\right)}{\left(x-2\right)^2}.\ln 4-1<0, \forall x\in\left(0;+\infty\right)\setminus\{2\}$.

Bảng biến thiên của $f\left(x\right)$

x	0		2		$+\infty$
f'(x)		–	||	–	
f(x)	2	↘	-2 || $+\infty$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng một nghiệm dương khi $m\geq 2$ hoặc $m\leq -2$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[0;18]$ nên tập các giá trị của m là $\{2;3;4;...;18\}$, có 17 giá trị.

Câu 31.

Lời giải

Chọn B Ta có

$$f'(x)=\frac{x^3}{x^2+16-4\sqrt{x^2+16}}=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+16}\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)}=\frac{x^3\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\sqrt{x^2+16}\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\sqrt{x^2+16}}=x+\frac{4x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int\left(x+\frac{4x}{\sqrt{x^2+16}}\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+\int\frac{4}{2\sqrt{x^2+16}}\mathrm{d}\left(x^2+16\right)=\frac{x^2}{2}+4\sqrt{x^2+16}+C$$

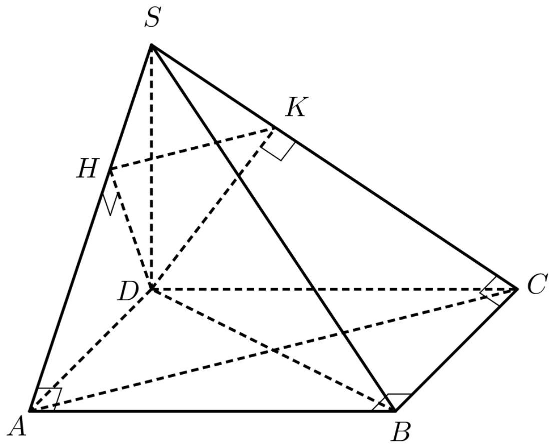
Mà $f(3)=\frac{49}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}+4\sqrt{x^2+16}$

Vậy $\int\limits_0^3 x.f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(\frac{x^3}{2}+4x\sqrt{x^2+16}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\frac{x^3}{2}\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 2\sqrt{x^2+16}\mathrm{d}\left(x^2+16\right)=\frac{81}{8}+\frac{244}{3}=\frac{2195}{24}$

Câu 32.

Lời giải

Chọn D



Dựng hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases}AB\perp SA\\AB\perp AD\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow SD\perp AB$.

Và $\begin{cases}BC\perp SC\\BC\perp CD\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SCD)\Rightarrow SD\perp BC$.

Khi đó $\begin{cases}SD\perp AB\\SD\perp BC\end{cases}\Rightarrow SD\perp(ABCD)\Rightarrow SD=d\left(S;(ABCD)\right)=a$.

Kẻ $DH\perp SA$ và $DK\perp SC$

Ta có $\begin{cases}DH\perp SA\\DH\perp AB\ \left(do\ AB\perp(SAD)\right)\end{cases}\Rightarrow DH\perp(SAB)$

Tương tự, $\begin{cases}DK\perp SC\\DK\perp BC\ \left(do\ BC\perp(SCD)\right)\end{cases}\Rightarrow DK\perp(SBC)$.

Do đó $\widehat{\left((SAB);(SBC)\right)}=\widehat{(DH,DK)}=\widehat{HDK}$.

Mà $AD=\frac{AC}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$, $SA=\sqrt{SD^2+AD^2}=a\sqrt{3}$ và $DH=DK=\sqrt{\frac{SD^2.AD^2}{SA^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow SK=SH=\sqrt{SD^2-DK^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\begin{cases}HK//AC\\\frac{HK}{AC}=\frac{SH}{SA}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow HK=\frac{2a}{3}.$$

Vậy $\cos\widehat{HDK}=\dfrac{DH^2+DK^2-HK^2}{2DH.DK}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 33.

Lời giải

Chọn A Đặt $f(x)=log_{2020}\left(x+y^2\right)+log_{2021}\left(y^2+y+64\right)-log_4(x-y)$(coi y là tham số).

Điều kiện xác định của $f(y)$ là : $\begin{cases}x+y^2>0\\ y^2+y+64>0\\ x-y>0\end{cases}$.

Do x,y nguyên nên $x>y\geq -y^2$. Cũng vì x,y nguyên nên ta chỉ cần xét $f(y)$ trên nửa khoảng $[y+1;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\left(x+y^2\right)ln2020}-\dfrac{1}{(x-y)ln4}<0,\ \forall x\geq y+1$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$y+1$		$y+64$
y'		$-$	
y		$\searrow$	$f(y+64)$

Yêu cầu bài toán trở thành:

$f(y+64)<0 \Leftrightarrow log_{2020}\left(y^2+y+64\right)+log_{2021}\left(y^2+y+64\right)<log_4 64$

$\Leftrightarrow log_{2021}\left(y^2+y+64\right).\left(log_{2020}2021+1\right)<3 \Leftrightarrow y^2+y+64-2021^{\frac{3}{log_{2020}2021+1}}<0$

$\Rightarrow -301,76<y<300,76$

Mà y nguyên nên $y\in\{-301;-300;...;299;300\}$. Vậy có 602 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu.

Câu 34.

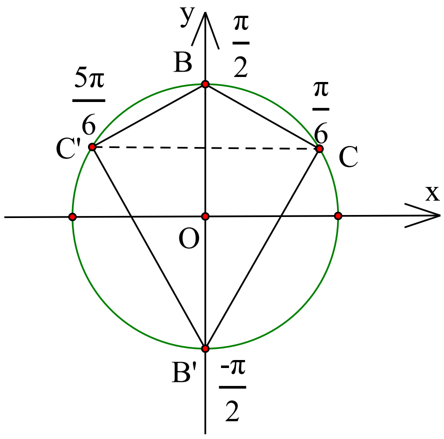
Lời giải

Chọn C $\sin 3x.\cot x=\cot x$ (1). ĐK: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 3x=1\\ \cot x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ \cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$$

Biểu diễn nghiệm lên đường tròn lượng giác và đối chiếu với điều kiện ta được các nghiệm của phương trình (1) là: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}$; $k\in\mathbb{Z}$.

Các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác của tập nghiệm này tạo thành hình tứ giác $BCB'C'$:

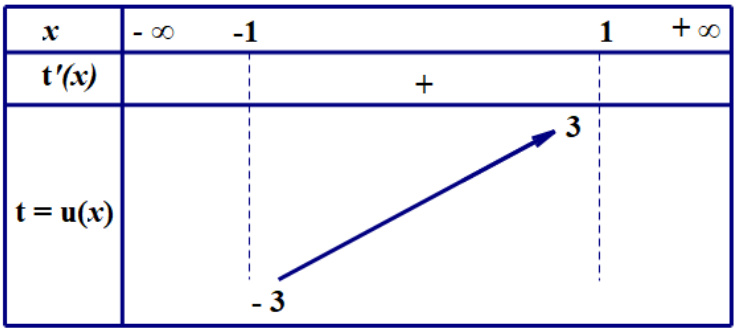


Tứ giác $BCB'C'$ có 2 đường chéo vuông góc, diện tích của nó là: $S = \frac{CC'.BB'}{2} = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{2}.2}{2} = \sqrt{3}$.

Câu 35.

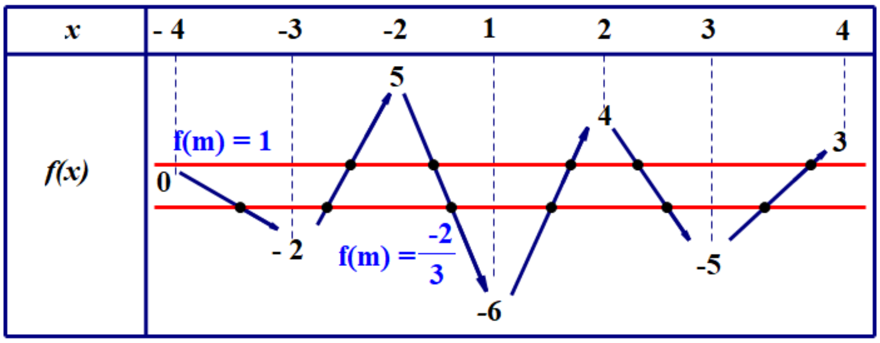
Chọn A

Đặt $t = u(x) = x^3 + 2x$ ta có $t' = u'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x$ do đó $t = x^3 + 2x$ là một hàm số tăng vì vậy $x \in [-1;1]$ thì $t \in [-3;3]$.



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ ta có $\max\limits_{[-3;3]} f(t) = 5$ và $\min\limits_{[-3;3]} f(t) = -6$.

Từ đây ta có $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right|$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right|$



Trường hợp 1: $\begin{cases} \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| = 8 \\ \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| \ge \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5 + 3f(m)| = 8 \\ |5 + 3f(m)| \ge |-6 + 3f(m)| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(m) = 1 \\ f(m) = -\frac{13}{3} \end{array}\right. \\ f(m) \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow f(m) = 1$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m)=1$ có 5 nghiệm, như vậy trường hợp này có 5 giá trị thực của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right|=8 \\ \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right|>\left|\max\limits_{[-3;3]} f(t)+3f(m)\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-6+3f(m)|=8 \\ |-6+3f(m)|>|5+3f(m)| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(m)=-\dfrac{2}{3} \\ f(m)=\dfrac{14}{3} \end{array}\right. \\ f(m)<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow f(m)=-\dfrac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m)=-\dfrac{2}{3}$ có 6 nghiệm, như vậy trường hợp này có 6 giá trị thực của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả là 11 giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36.

Lời giải

Điều kiện: $\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0 \Leftrightarrow x+y>0$.

Ta có : $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)-2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)=x^2+y^2+xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)+2+(3x+3y)=2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+(3x+3y)=2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$ (*).

Xét hàm số: $f(t)=2\log_3 t+t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2}{t.\ln 3}+1>0$ với mọi $t>0$. Suy ra hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó ta có: $(*) \Leftrightarrow f(3x+3y)=f\left(x^2+y^2+xy+2\right) \Leftrightarrow 3x+3y=x^2+y^2+xy+2$ (**).

Đặt $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$. Suy ra $P=\dfrac{3a-b+3}{2a+6}$ và $(**) \Leftrightarrow 3(a-1)^2+b^2=1$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3}(a-1)=\cos t \\ b=\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{\cos t+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ b=\sin t \end{cases}$ với $t\in[0;2\pi)$.

Khi đó $P=\dfrac{3\cos t-\sqrt{3}\sin t+6\sqrt{3}}{2\cos t+8\sqrt{3}} \Leftrightarrow (2P-3)\cos t+\sqrt{3}\sin t=6\sqrt{3}-8\sqrt{3}P$.

Phương trình trên có nghiệm khi : $(2P-3)^2+3\ge\left(6\sqrt{3}-8\sqrt{3}P\right)^2$

$\Leftrightarrow 47P^2-69P+24\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{69-\sqrt{249}}{94}\le P\le\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}$ (***).

Vì luôn tồn tại $t\in[0;2\pi)$ để dấu bằng ở (***) xảy ra. Do đó, ta luôn tìm được a, b từ đó tìm được x, y để P đạt giá trị lớn nhất. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Câu 37.

Lời giải

Chọn D

$y=\left|4f\left(\sin x\right)+\cos 2x-a\right|=\left|4f\left(\sin x\right)-2\sin^2 x+1-a\right|$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow t'=\cos x>0,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên khi x tăng trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì t tăng trên $\left(0;1\right)$.

Do đó hàm số $y=\left|4f\left(\sin x\right)-2\sin^2 x+1-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\left|4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;1\right)$.

Dễ thấy, điều kiện cần để hàm số $y=\left|4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;1\right)$ là phương trình $4f\left(t\right)-2t^2+1-a=0$ vô nghiệm trên $\left(0;1\right)$. $(*)$

Với điều kiện $(*)$, $y=\left|4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;1\right)$ khi và chỉ khi

$y'\le 0,\forall t\in\left(0;1\right)\Leftrightarrow \dfrac{\left(4f'\left(t\right)-4t\right)\left(4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right)}{\left|4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right|}\le 0,\ \forall t\in\left(0;1\right)$. $(**)$

Dựa vào đồ thị trên ta có $f'\left(t\right)<0,\ \forall t\in\left(0;1\right)$, do đó $4f'\left(t\right)-4t<0,\ \forall t\in\left(0;1\right)$.

Khi đó: $(**)\Leftrightarrow 4f\left(t\right)-2t^2+1-a>0,\ \forall t\in\left(0;1\right)\Leftrightarrow a<4f\left(t\right)-2t^2+1,\forall t\in\left(0;1\right)$.

(điều kiện này luôn đảm bảo thỏa mãn (*))

Hay $a\le 4f\left(t\right)-2t^2+1,\forall t\in\left[0;1\right]\Leftrightarrow a\le \min\limits_{[0;1]}\left\{4f\left(t\right)-2t^2+1\right\}$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=4f\left(t\right)-2t^2+1$ trên $\left[0;1\right]$ có $g'\left(t\right)=4f'\left(t\right)-4t<0,\ \forall t\in\left[0;1\right]$,

nên $g\left(t\right)$ nghịch biến trên $\left[0;1\right]$. $\Rightarrow \min\limits_{[0;1]}g\left(t\right)=g\left(1\right)=3$. Vậy $a\le \min\limits_{[0;1]}g\left(t\right)=3$.

Vì a nguyên dương nên $0<a\le 3\ \Rightarrow a\in\left\{1;2;3\right\}$.

Câu 38.

Lời giải

ChọnA

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=3(x^2-2mx+m^2-1)$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3m+2$	$\searrow$	$-3m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị $\left(C\right)$ là điểm $M\left(m-1;-3m+2\right)$.

Nhận xét: $y_M=-3m+2=-3(m-1)-1=-3x_M-1\Rightarrow M\in\left(d\right):y=-3x-1,\forall m.$

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị $\left(C\right)$ luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y=-3x-1$. Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k=-3$.

Câu 39.

Lời giải

Chọn A Xét hàm số $f\left(x\right)=x^5-5x^2+5\left(m-1\right)x-8$.

Trường hợp 1: $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$ thì hàm số $y=|f(x)|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Trường hợp 2: $f(x)=0$ không có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$.

Ta có: $f'(x)=5x^4-10x+5(m-1)$.

Khi đó $y=\left|x^5-5x^2+5(m-1)x-8\right|=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0$ với

$\forall x\in(-\infty;1)\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x).f(x)\le 0\\ f(x)\ne 0\end{cases},\forall x\in(-\infty;1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(-\infty;1)$ (vì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x)=5x^4-10x+5(m-1)\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;1)\\ f(1)=5m-17\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -x^4+2x+1,\ \forall x\in(-\infty;1)\\ m\le\dfrac{17}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\max\limits_{(-\infty;1)}\left(-x^4+2x+1\right)=\dfrac{3}{2.\sqrt[3]{2}}+1\\ m\le\dfrac{17}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2.\sqrt[3]{2}}+1\le m\le\frac{17}{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=3.$$

Câu 40.

Lời giải

Chọn B Đẳng thức đã cho tương đương với: $\left(f'(x)\right)^2-\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^3}}=9-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[1;4]$ ta được:

$$\int_1^4\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x=\int_1^4\left(9-\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=21-2\ln 2.$$

Tích phân từng phần có

$\displaystyle\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}+6\right)=\left(6-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)f(x)\Big|_1^4-\int_1^4\left(6-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)f'(x)=-36+2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right)f'(x)\mathrm{d}x$. Vậy có đẳng thức:

$$\int_1^4\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x+36-2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right)f'(x)\mathrm{d}x=21-2\ln 2.$$

$$\Leftrightarrow\int_1^4\left(f'(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}+3\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{x}}-3,\forall x\in[1;4]\Rightarrow f(x)=2\sqrt{x}-3x.$$

Vì vậy $\displaystyle\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\left(2\sqrt{x}-3x\right)\mathrm{d}x=-\frac{79}{6}$.

Câu 41.

Lời giải

Chọn D Ta có $f'(x)=2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2+2019>0\,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ giả thiết suy ra $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)<-f\left(2x-2x^2-5\right)$

$\Leftrightarrow f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)<f\left(2x^2-2x+5\right)$ (do $f(x)=2^x-2^{-x}+2019x$ là hàm số lẻ)

$$\Leftrightarrow\left|x^3-2x^2+3x-m\right|<2x^2-2x+5\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-2x^2+3x-m<2x^2-2x+5\\ x^3-2x^2+3x-m>-2x^2+2x-5\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+5x-5<m \\ x^3+x+5>m \end{cases}$

Xét $g(x)=x^3-4x^2+5x-5$ và $h(x)=x^3+x+5$ trên $(0;1)$ có bảng biến thiên là

x	0	1
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	-5 $\nearrow$	-3

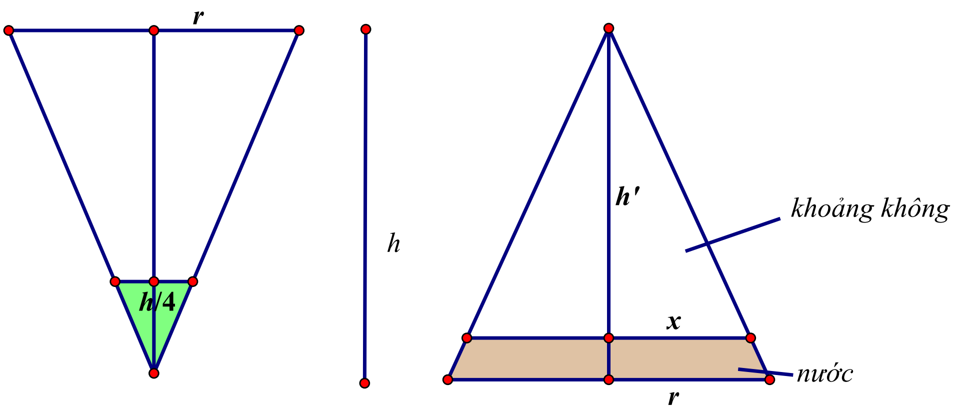
x	0	1
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	5 $\nearrow$	7

Từ bảng biến thiên suy ra $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0, \forall x\in(0;1)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m\ge -3 \\ m\le 5 \end{cases} \Rightarrow -3\le m\le 5$. Vậy tập S có 9 phần tử.

Câu 42.

Lời giải

Chọn C



Giả sử ly có chiều cao h và đáy là đường tròn có bán kính r, nên có thể tích $V=\frac{1}{3}\pi hr^2$.

Khối nước trong ly có chiều cao bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao của ly nên khối nước tạo thành khối nón có chiều cao bằng $\frac{h}{4}$ và bán kính đáy $\frac{r}{4}$ thể tích nước bằng $\frac{1}{3}.\frac{h}{4}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2=\frac{1}{64}.\left(\frac{1}{3}\pi hr^2\right)=\frac{1}{64}V$.

Do đó thể tích khoảng không bằng $V-\frac{1}{64}V=\frac{63}{64}V$.

Nên khi úp ngược ly lại thì ta có các tỉ lệ : $\frac{x}{r}=\frac{h'}{h}\Rightarrow x=\frac{r.h'}{h}$.

Suy ra: thể tích khoảng không bằng: $\frac{1}{3}h'.\pi x^2=\frac{1}{3}.h'.\pi.\left(\frac{r.h'}{h}\right)^2=\frac{1}{3}\pi hr^2.\left(\frac{h'}{h}\right)^3=\left(\frac{h'}{h}\right)^3.V$.

$\Rightarrow \frac{63}{64}V=\left(\frac{h'}{h}\right)^3 V\Rightarrow \left(\frac{h'}{h}\right)^3=\frac{63}{64}\Rightarrow \frac{h'}{h}=\sqrt[3]{\frac{63}{64}}=\frac{\sqrt[3]{63}}{4}\Rightarrow h'=\frac{\sqrt[3]{63}}{4}h$.

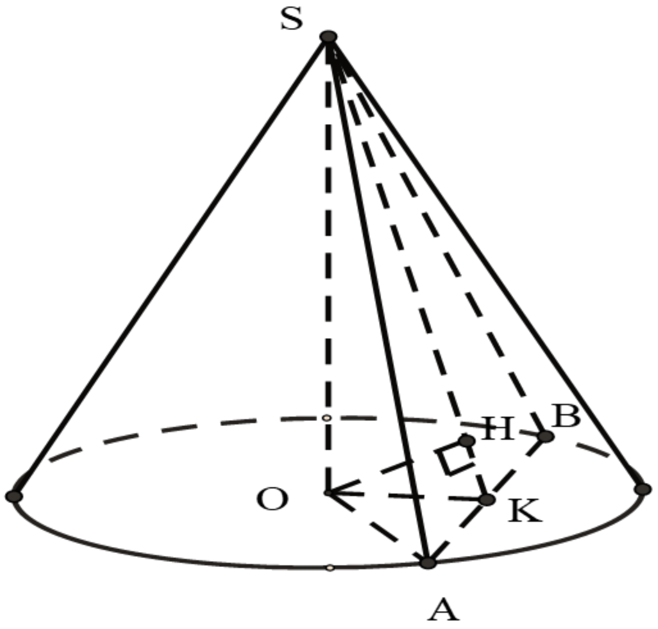
Nên chiều cao mực nước bằng: $h-h'=h-\frac{\sqrt[3]{63}}{4}h=\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}h$.

Vậy tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng $\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}$.

Câu 43.

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK \perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOK)$ $\Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$ mà $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$ nên từ O dựng $OH \perp SK$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB))$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin \widehat{SAO} = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin \widehat{SAB} = \dfrac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{SK^2 - SO^2} + \dfrac{1}{SO^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{SA^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3SA^2}{4} - \frac{SA^2}{4}} = \frac{4}{SA^2} + \frac{2}{SA^2} \Rightarrow \frac{6}{SA^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

Câu 44.

Lời giải

Chọn A Điều kiện: $y > 0$;

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} 2.2^{(x-\log_2 y)} = 8^{x+\log_2 y} + 5y \, (1) \\ 2^{2(x-\log_2 y)} = 8^{x+\log_2 y}.5y \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\left(8^{x+\log_2 y} + 5y\right)^2}{4} = 8^{x+\log_2 y}.5y \Leftrightarrow \left(8^{x+\log_2 y} - 5y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 8^{x+\log_2 y} = 5y \quad (2)$$

$$\Rightarrow \log_2\left(8^{x+\log_2 y}\right) = \log_2 5y \Leftrightarrow (x + \log_2 y).\log_2 8 = \log_2 5 + \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3\log_2 y = \log_2 5 + \log_2 y \Leftrightarrow 3x + 2\log_2 y = \log_2 5 \Leftrightarrow 3x = \log_2 \frac{5}{y^2} \; (3)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$2.2^{(x-\log_2 y)} = 5y + 5y \Leftrightarrow 2^{(x-\log_2 y)} = 5y \Leftrightarrow x - \log_2 y = \log_2 5y \Leftrightarrow x = \log_2 5y^2 \; (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \log_2 \dfrac{5}{y^2} = 3.\log_2 5y^2 \Rightarrow \dfrac{5}{y^2} = \left(5y^2\right)^3 \Leftrightarrow y^8 = \dfrac{1}{25} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$

$$\Rightarrow x = \log_2 5.\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2 = \log_2 \sqrt{5} \Rightarrow 2^x.y^2 = 2^{\log_2 \sqrt{5}}.\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2 = \sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}} = 1$$

Câu 45.

Chọn A

Xét hàm số $y=f(2x-1)\Rightarrow\left(f(2x-1)\right)'=2f'(2x-1)$ nghịch biến khi $f'\left(x\right)<0$

$\Leftrightarrow\left(f(2x-1)\right)'=2.f'(2x-1)<0\Leftrightarrow f'(2x-1)<0\Leftrightarrow 1<2x-1<3\Leftrightarrow 1<x<2$.

Xét hàm số $y=g(ax+b)\Rightarrow\left(g(ax+b)\right)'=a.g'(ax+b)$ nghịch biến khi xảy ra hai trường hợp

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\g'(ax+b)<0\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\g'(ax+b)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\\left[\begin{array}{l}ax+b<0\\ax+b>2\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\0<ax+b<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\\left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-b}{a}\\x>\dfrac{2-b}{a}\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\-\dfrac{b-2}{a}<x<-\dfrac{b}{a}\end{cases}\end{array}\right.$$

Nếu $a>0$ thì hàm số $y=g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{a}\right);\left(\dfrac{2-b}{a};+\infty\right)$ không thỏa mãn điều kiện có khoảng nghịch biến là $\left(1;2\right)$.

Nếu $a<0$ thì hàm số $y=g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b-2}{a};\dfrac{-b}{a}\right)$

Yêu cầu bài toán là hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất nên $\begin{cases}-\dfrac{b-2}{a}=1\\\dfrac{-b}{a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}\Rightarrow 4a+b=-4$.

Câu 46.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5x^2+2xy+2y^2=9\Leftrightarrow\left(2x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2=9$.

Đặt $2x+y=3\sin t$, $x-y=3\cos t$ với $t\in\left[-2\pi;2\pi\right]$.

$\Rightarrow x=\sin t+\cos t$ và $y=\sin t-2\cos t$.

$K=\dfrac{6x-6}{4x-y-9}=\dfrac{6\sin t+6\cos t-6}{4(\sin t+\cos t)-\sin t+2\cos t-9}=\dfrac{6\sin t+6\cos t-6}{3\sin t+6\cos t-9}$.

$\Rightarrow\left(3K-6\right)\sin t+\left(6K-6\right)\cos t=9K-6$.

Điều kiện để phương trình trên có nghiệm là $\left(3K-6\right)^2+\left(6K-6\right)^2\geq\left(9K-6\right)^2\Leftrightarrow -1\leq K\leq 1$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t+1}{t-2}$ trên $\left[-1;1\right]$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-5}{\left(t-2\right)^2}<0,\forall t\neq 2$. Suy ra $\underset{[-1;1]}{Max}\,f(t)=f(-1)=\dfrac{1}{3}$.

Câu 47.

Lời giải

Chọn C Tập xác định: $D=\left[-1;+\infty\right)\backslash\left\{0\right\}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1+\dfrac{2}{x}}=0\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

• $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5x+1)^2-x-1}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x^2+9x}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x+9}{(x-2)(5x+1+\sqrt{x+1})}=\dfrac{-9}{4}$

$\Rightarrow x=0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 48.

Lời giải

Chọn C . Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)\le 0\Leftrightarrow x\le 2$ và $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$.

Ta có $g'(x)=2(x-m)f'(x^2-2mx+m^2+1)$.

$$g'(x)\le 0\Leftrightarrow 2(x-m)f'(x^2-2mx+m^2+1)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-m\ge 0\\ f'(x^2-2mx+m^2+1)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-m\le 0\\ f'(x^2-2mx+m^2+1)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge m\\ x^2-2mx+m^2+1\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le m\\ x^2-2mx+m^2+1\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge m\\ m-1\le x\le m+1\end{cases}\\ \begin{cases}x\le m\\ \left[\begin{array}{l}x\ge m+1\\ x\le m-1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le x\le m+1\\ x\le m-1\end{array}\right..$$

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 0\\ m\ge -\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ m\ge \dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\le m\le 0\\ m\ge \dfrac{3}{2}\end{array}\right..$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-5;5]$ suy ra $m\in\{0;2;3;4;5\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 14.

Câu 49.

Lời giải

Chọn C Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ m-2^x>0\end{cases}\Rightarrow m>2^x\Rightarrow m>1$.

Ta có $\dfrac{\log_3^2 x-3\log_3 x+2}{\sqrt{m-2^x}}<0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ m-2^x>0\\ \log_3^2 x-3\log_3 x+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ m-2^x>0\\ (\log_3 x-1)(\log_3 x-2)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ m-2^x>0\\ 1<\log_3 x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ m>2^x\\ 3<x<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2^x\\ 3<x<9\end{cases}$ (I).

Để bất phương trình có không quá 3 nghiệm nguyên dương khi và chỉ bất phương trình $m>2^x$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương $x\in(3;9)$.

Xét hàm số $y=f(x)=2^x$ với $x\in(3;9)$ có $f'(x)=2^x.\ln 2>0,\forall x$.

Bảng biến thiên

x	3	4	5	6	7	8	9
$f'(x)$			+	|			
$f(x)$	8			64			512

Từ bảng biến thiên suy ra $m \le 2^7 = 128$.

Mà $m > 1$ và m nguyên dương nên $m \in \{2,3,...,128\}$.

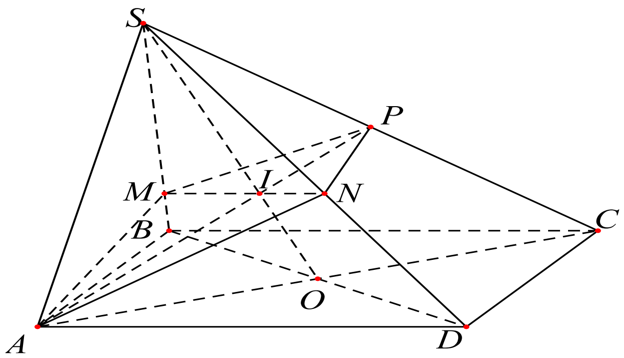
Vậy có 127 giá trị nguyên dương của tham số m thoả mãn.

Câu 50.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1



Đặt $a = \dfrac{SM}{SB}$, $b = \dfrac{SN}{SD}$, $(0 < a; b \le 1)$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{S.AMP} + V_{S.ANP}}{V} = \dfrac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}} + \dfrac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SP}{SC} + \dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SP}{SC}\right) = \dfrac{1}{4}(a+b)$ (1)

Lại có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{S.AMN} + V_{S.PMN}}{V} = \dfrac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}} + \dfrac{V_{S.PMN}}{2V_{S.CBD}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD} + \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SP}{SC}\right) = \dfrac{3}{4}ab$ (2).

Suy ra $\dfrac{1}{4}(a+b) = \dfrac{3}{4}ab \Leftrightarrow a + b = 3ab \Rightarrow b = \dfrac{a}{3a-1}$. Từ điều kiện $(0 < b \le 1)$, ta có $\dfrac{a}{3a-1} \le 1$, hay $a \ge \dfrac{1}{2}$. Thay vào (2) ta được tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{a^2}{3a-1}$.

Đặt $f(a) = \dfrac{3}{4}.\dfrac{a^2}{3a-1}; a \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$, ta có $f'(a) = \dfrac{3}{4}.\dfrac{3a^2 - 2a}{(3a-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0\,(L) \\ a = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(1) = \dfrac{3}{8}; f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$, do đó $Min\dfrac{V_1}{V} = \underset{a\in\left[\frac{1}{2};1\right]}{Min} f(a) = f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.