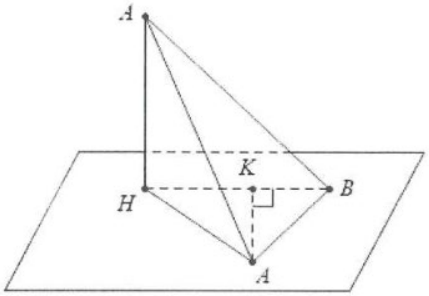
CHỦ ĐỀ 6: BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

Vấn đề 1: KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

✍ Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm trên mặt phẳng đáy tới mặt phẳng chứa đường cao

Xét bài toán: Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm A bất kì đến mặt bên (SHB).



Kẻ $AH \perp HB$ ta có:

$$\begin{cases} \text{AK} \perp \text{HB} \\ \text{AK} \perp \text{SH} \end{cases} \Rightarrow \text{AK} \perp (\text{SHB})$$

Suy ra $d\left(A;(SHB)\right) = AK$.

Cách tính: Ta có: $d\left(A;(SHB)\right) = AK = \dfrac{2S_{AHB}}{HB}$

$= AB\sin\widehat{ABK} = AH.\sin\widehat{AHK}$.

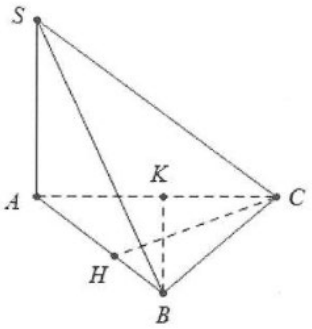
Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC có $AB = 3a, BC = 2a, \widehat{ABC} = 60°$. Biết $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Dựng $CH \perp AB$ ta có: $\begin{cases} \text{CH} \perp \text{AB} \\ \text{CH} \perp \text{SA} \end{cases} \Rightarrow \text{CH} \perp (\text{SAB})$



Do đó

$d\left(C;(SAB)\right) = CH = CB\sin\widehat{ABH} = 2a\sin 60° = a\sqrt{3}$.

b) Dựng $CK \perp AC \Rightarrow CK \perp (SAC)$.

Ta có: $d\left(B;(SAC)\right) = CH = \dfrac{2S_{ABC}}{AC} = \dfrac{AB.BC\sin\widehat{ABC}}{AC}$

Trong đó $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BA.BC\cos\hat{B}$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{7} \Rightarrow d\left(B;(SAC)\right) = \dfrac{3a.2a.\sin 60°}{a\sqrt{7}} = \dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$.

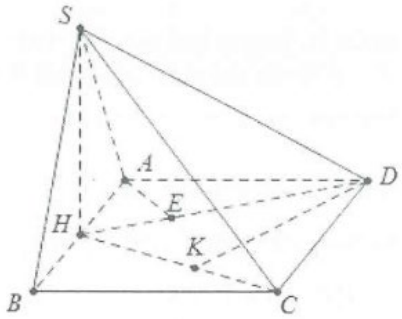
Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $B = a, AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung tâm của AB.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SHD).

b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC).

Lời giải

a) Do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$.



Ta có: $HA = HD = \dfrac{a}{2}$.

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Dựng $AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow d\left(A;(SHD)\right) = AE$.

Mặt khác $AE = \dfrac{AH.AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

b) Dựng $DK \perp CH \Rightarrow d\left(D;(SHC)\right) = DK$.

Ta có: $CH = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$, $S_{HCD} = \dfrac{1}{2}CD.d\left(H;CD\right) = \dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $d\left(\mathrm{D};(SHC)\right) = \dfrac{2S_{HCD}}{CH} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

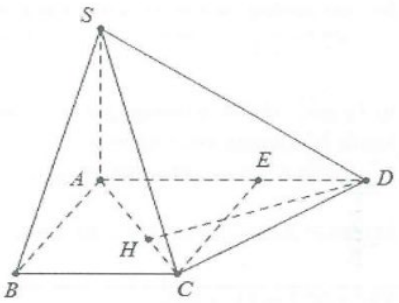
Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 3a$, $AB = BC = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Dựng $CE \perp AD \Rightarrow CE \perp (SAD)$.



Khi đó $d\left(C;(SAD)\right) = CE$, do ABCE là hình vuông cạnh $2a$ nên $CE = AE = 2a \Rightarrow d\left(C;(SAD)\right) = 2a$.

b) Dựng $DH \perp AC \Rightarrow DH \perp (SAC)$.

Khi đó $d\left(D;(SAC)\right) = DH$.

Ta có: ABCE là hình vuông nên $\widehat{CAD} = 45°$.

Do đó $\mathrm{DH} = \mathrm{AD}\sin 45° = 3a.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm H của tam giác ABD.

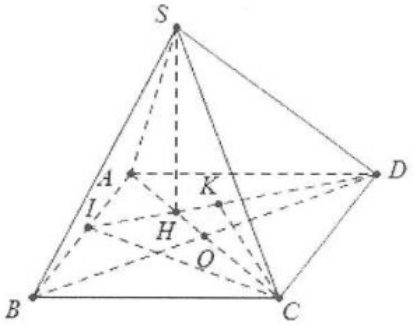
a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

b) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHD).

Lời giải

a) Do H là trọng tâm tam giác ABD $\Rightarrow H \in AC$.

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow BO \perp AC$.



Mặt khác $BO \perp SH \Rightarrow BO \perp (SAC)$

Khi đó $d\left(B;(SAC)\right) = BO = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

b) Dựng $CK \perp HD \Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow d\left(C;(SHD)\right) = CK$.

Gọi I là trung điểm của AB thì $H = DI \cap AO$.

Khi đó: $CK = \dfrac{2S_{ICD}}{DI} = \dfrac{2.\dfrac{1}{2}S_{ABCD}}{DI} = \dfrac{25a^2}{\sqrt{DA^2 + AI^2}} = \dfrac{25a^2}{\sqrt{25a^2 + \left(\dfrac{5a}{2}\right)^2}} = 2a\sqrt{5}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ nửa lục giác đều cạnh a, với $AB = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$.

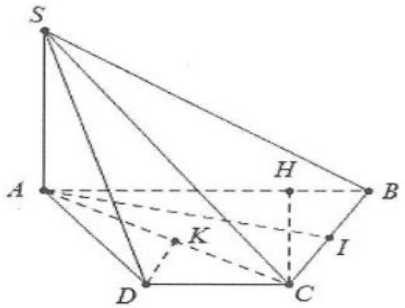
a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Tứ giác ABCD là nửa lục giác đều cạnh a nên nó nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$.

Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow d\left(C;(SAB)\right) = CH$.



Mặt khác $\widehat{ABC} = 60° \Rightarrow CH = BC\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(C;(SAB)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Dựng $DK \perp AC \Rightarrow DK \perp (SAC) \Rightarrow d\left(D;(SAC)\right) = DK$.

Do $\widehat{DCB} = 120°, \widehat{ACB} = 90° \Rightarrow \widehat{ACD} = 30° \Rightarrow DK = CD\sin\widehat{DCK} = a\sin 30° = \dfrac{a}{2}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng 2, $AB = \sqrt{2}, BC = 2$. Gọi M là trung điểm của CD, hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách

từ B đến mặt phẳng (SAM).

Lời giải

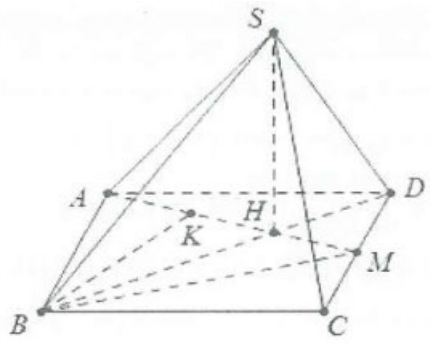
Ta có $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta MAB} = 2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta MAB} = 1$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = 1 \Rightarrow \sin\widehat{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Do đó $\widehat{ABC} = 45° \Rightarrow \widehat{ADM} = 45°$.

Áp dụng định lý Cosin trong tam giác ADM, ta có:

$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2 - 2.AD.DM.cos\widehat{ADM}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$



Gọi H là giao điểm của AM và BD $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Kẻ BK vuông góc với AM, $K \in AM \Rightarrow BK \perp AM$ (1).

Ta có $(SAM) \cap (SBD) = SH \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BK$ (2).

Từ $(1),(2) \Rightarrow BK \perp (SAM) \Rightarrow d(B;(SAM)) = BK$.

Mặt khác $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}.BK.AM \Rightarrow BK = \frac{2.S_{\Delta MAB}}{AM} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có hai đường chéo $AC = BD = 2a$. Tam giác $A'BD$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng $(A'AB)$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách $d(B';(A'BD))$.

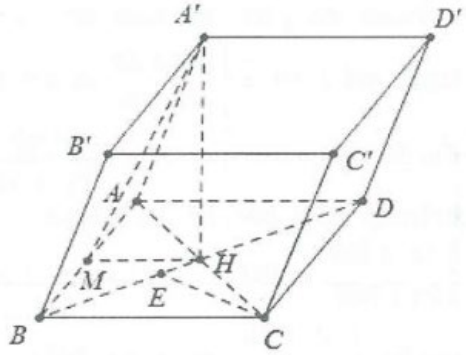
Lời giải

Gọi H là tâm hình chữ nhật $ABCD$

$\Rightarrow HA = HC \Rightarrow A'H \perp BD$ (Do $\Delta A'BD$ cân tại A').

Do $(A'BD) \perp (ABCD) \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$.

Ta có: $A'H = \frac{1}{2}BD = a$ (trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy).



Dựng $HM \perp AB \Rightarrow AB \perp (A'HM) \Rightarrow \widehat{A'MH} = 60°$

+) Khi đó: $HM \tan 60° = A'H \Rightarrow HM = \frac{a}{\sqrt{3}}$

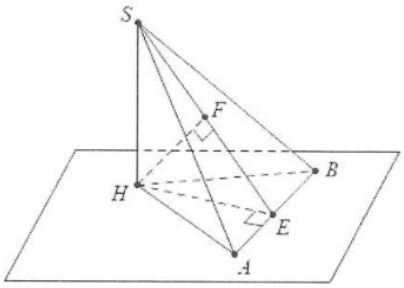
$\Rightarrow AD = 2HM = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Do: $A'D // B'C \Rightarrow B'C // (A'BD) \Rightarrow d(B';(A'BD)) = d(C;(A'BD))$.

Ta có: $CE=\dfrac{CD.CB}{BD}=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. Vậy $d\left(B';\left(A'BD\right)\right)=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

✍ **Dạng 2: Khoảng cách từ chân đường cao đến mặt phẳng bên.**

Xét bài toán: Cho hình chóp có đỉnh *S* có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là *H*. Tính khoảng cách từ điểm *H* đến mặt bên $\left(SAB\right)$.



Dựng $HE\perp AB,\left(E\in AB\right)$ ta có:

$\begin{cases}\text{AB}\perp\text{SH}\\ \text{AB}\perp\text{HE}\end{cases}\Rightarrow\text{AB}\perp\left(\text{SHE}\right)\left(1\right)$.

Dựng $HF\perp SE,\left(F\in SE\right)$. Từ $\left(1\right)$ $HF\perp AB$

Do đó $HF\perp\left(SAB\right)\Rightarrow d\left(H;\left(SAB\right)\right)=HF$.

Cách tính: Xét tam giác SHE vuông tại H có đường cao HF ta có: $\dfrac{1}{HF^2}=\dfrac{1}{HE^2}+\dfrac{1}{SH^2}$

Hay $HF=\dfrac{HE.SH}{\sqrt{HE^2+SH^2}}$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại *B* có $AB=a,BC=a\sqrt{3}$. Biết $SA=2a$ và $SA\perp\left(ABC\right)$.

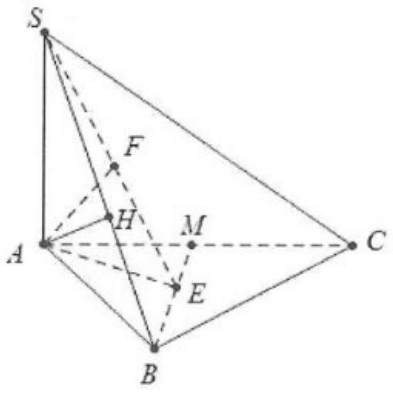
a) Tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

b) Gọi *M* là trung điểm của *AC*. Tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng $\left(SBM\right)$.

Lời giải

a) Ta có : $AB\perp BC$, mặt khác $BC\perp SA\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)$.

Dựng $AH\perp SB\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{AH}\perp\text{SB}\\ \text{AH}\perp\text{BC}\end{cases}\Rightarrow\text{AH}\perp\left(\text{SBC}\right)$.



Khi đó $d\left(A;\left(SBC\right)\right)=AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

b) Dựng $AE\perp BM,AF\perp SE$ ta có:

$\begin{cases}\text{AE}\perp\text{BM}\\ \text{AE}\perp\text{BM}\end{cases}\Rightarrow\text{BM}\perp\left(\text{SAE}\right)\Rightarrow\text{BM}\perp\text{AF}$.

Khi đó: $\begin{cases}\text{AF}\perp\text{SE}\\ \text{AF}\perp\text{BM}\end{cases}\Rightarrow \text{AF}\perp(\text{SBM})$.

Ta có: $AB=a, AC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2a$. Do BM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

$BM=\dfrac{1}{2}AC=AM=AB=a\Rightarrow \Delta ABM$ đều cạnh $a\Rightarrow AE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $d\left(A;(SBM)\right)=\dfrac{AE.SA}{\sqrt{AE^2+SA^2}}=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

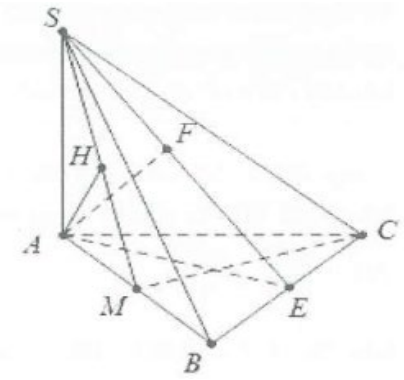
Ví dụ 2: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $SA\perp(ABC)$. Đường thẳng *SB* tạo với đáy một góc $60°$.

a) Tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SBC).

b) Tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SCM), với *M* là trung điểm của cạnh *AB*.

Lời giải

a) Do $SA\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABC))}=\widehat{SBA}=60°$.



Do đó $SA=AB\tan 60°=2a\sqrt{3}$.

Dựng $AE\perp BC, \Delta ABC$ đều nên $\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Dựng $AF\perp SE$, mặt khác $\begin{cases}\text{BC}\perp\text{SA}\\ \text{BC}\perp\text{AE}\end{cases}\Rightarrow \text{BC}\perp\text{AF}$.

$\Rightarrow AF\perp(SBC)\Rightarrow d\left(A;(SBC)\right)=AF=\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

b) Do M là trung điểm của AB nên $CM\perp AB$.

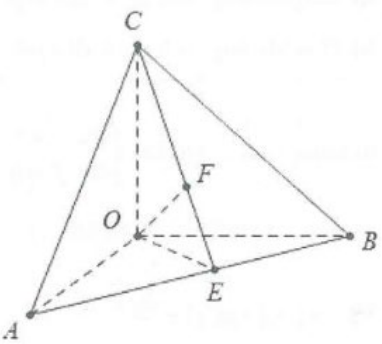
Mặt khác $\text{CM}\perp\text{SA}\Rightarrow\text{CM}\perp(\text{SAM})$. Dựng $AH\perp SM\Rightarrow AH\perp(SMC)$.

Khi đó $d\left(A;(SMC)\right)=\dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3: Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA=a, OB=b, OC=c$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải

Do $\begin{cases}\text{OC}\perp\text{OA}\\ \text{OC}\perp\text{OB}\end{cases}\Rightarrow\text{OC}\perp(\text{OAB})\Rightarrow\text{AB}\perp\text{OC}$.



Dựng $OE\perp AB, OF\perp CE$ suy ra $\text{OF}\perp BC$.

Khi đó $OF \perp (ABC) \Rightarrow d\left(O;(ABC)\right) = OF$.

Mặt khác: $\frac{1}{OF^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OE^2}$ và $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

Do đó $\frac{1}{d^2\left(O;(ABC)\right)} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Vậy $d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $SB = 3a, AB = 4a, BC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{12a\sqrt{61}}{61}$ **B.** $\frac{4a}{5}$ **C.** $\frac{12a\sqrt{29}}{29}$ **D.** $\frac{3a\sqrt{14}}{14}$

Lời giải

Ta có: BS, BA, BC đôi một vuông góc với nhau nên ta có:

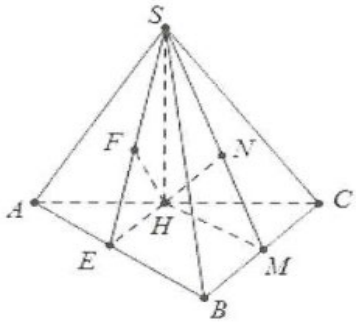
$$\frac{1}{d^2\left(B;(SAC)\right)} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{61}{144a^2}$$

Do đó $d\left(B;(SAC)\right) = \frac{12a\sqrt{61}}{61}$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của cạnh AC. Biết $SH = a$, tính khoảng cách từ H đến các mặt phẳng (SAB) và (SAC).

Lời giải

Dựng $HE \perp AB$ và $HF \perp SE$ thì ta có $d\left(H;(SAB)\right) = HF$.



Mặt khác HE là đường trung bình trong tam giác ABC nên $HE = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $d\left(H;(SAB)\right) = HF = \frac{HE.SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tương tự dựng $HM \perp BC, HN \perp SM \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HN$

Mặt khác $HM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow HN = \frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) và (SBC).

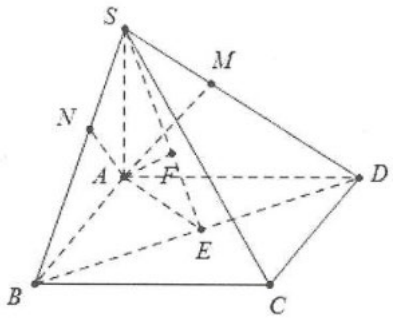
b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Lời giải

a) Dựng $AN \perp SB$. Do $\begin{cases} \text{BC} \perp \text{SA} \\ \text{BC} \perp \text{AB} \end{cases} \Rightarrow \text{BC} \perp \text{AN}$.

$$AN \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = AN = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$$

Vậy $\left(A;(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Tương tự $d\left(A;(SCD)\right) = AM = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

b) Dựng $AE \perp BD, \text{AF} \perp SE$.

Ta chứng minh được $d\left(A;(SBD)\right) = d = AF$

Vì $AS \perp AB \perp AD \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow d = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB. Biết $SD = 3a$.

a) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBD).

Lời giải

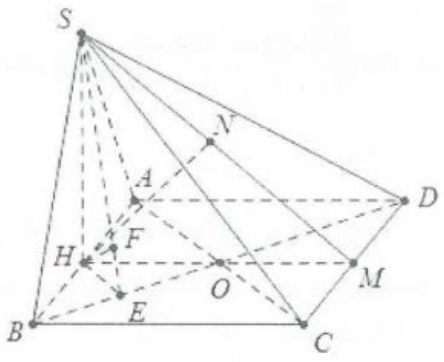
a) Ta có: $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

Mặt khác $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = 2a$.

Dựng $HM \perp CD, HN \perp SM \Rightarrow d\left(H;(SCD)\right) = HN$.

Do AHMD là hình chữ nhật nên $AD = HM = 2a$.

Khi đó $d\left(H;(SCD)\right) = \frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = a\sqrt{2}$.



b) Dựng $HE \perp BD; HF \perp SE$ khi đó $d\left(H;(SBD)\right) = HF$

Ta có: $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = a\sqrt{2} \Rightarrow HE = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $\dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow d\left(H;(SBD)\right) = HF = \dfrac{2a}{3}$.

Ví dụ 8: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi có tam giác *ABC* đều cạnh a. Gọi *H* là trung điểm của *AB*. Biết *SH* vuông góc với mặt đáy, mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc $60°$. Tính

a) Khoảng cách từ *H* đến mặt phẳng (SCD).

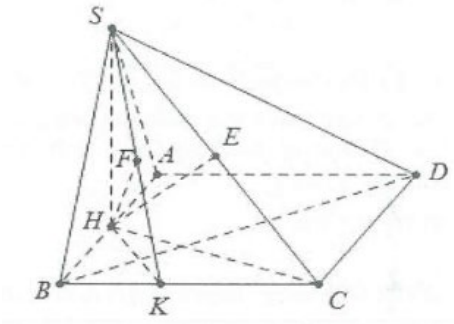
b) Khoảng cách từ *H* đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

a) Do ΔABC đều nên $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp CD$

$CH \perp (SHC) \Rightarrow \widehat{SCH} = 60°, CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $SH = CH \tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.



$HK \perp BC, HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; HF \perp SK \Rightarrow HF \perp (SBC)$

Mặt khác: $HF = \dfrac{HK.SH}{\sqrt{HK^2 + SH^2}} = \dfrac{\sqrt{42}a}{14}$.

Khi đó $d\left(H;(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{42}}{14}$

b) Dựng $HE \perp SC$ ta có: $HE \perp (SCD)$.

Ta có: $HE = \dfrac{HC.SH}{\sqrt{HC^2 + SH^2}} = \dfrac{3a}{4} \Rightarrow d\left(H;(SCD)\right) = HE = \dfrac{3a}{4}$.

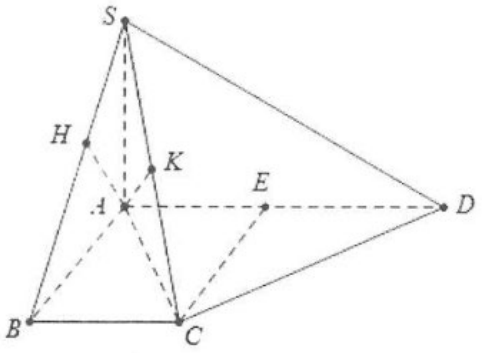
Ví dụ 9: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B* có $AB = BC = \dfrac{AD}{2}$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = 2a$ và đường thẳng *SD* tạo với mặt phẳng (SAC) một góc $30°$. tính

a) Khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SCD).

b) Khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

a) Do $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.



Đặt $AB=BC=\dfrac{AD}{2}=x$, gọi E là trung điểm của AC ta có:

$CE=AB=\dfrac{1}{2}AD\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại C (tính chất trung tuyến ứng cạnh huyền trong tam giác vuông).

+) Khi đó ta có: $SC=\sqrt{2x^2+4a^2}, CD=x\sqrt{2}$.

+) Mặt khác: $\begin{cases}CD\perp SA\\CD\perp AC\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAC)$.

Do đó $\widehat{(SD;(SAC))}=\widehat{DSC}=30^\circ\Rightarrow\tan 30^\circ=\dfrac{DC}{SC}\Rightarrow\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+4a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 4x^2=4a^2\Leftrightarrow x=a$.

Dựng $AK\perp SC\Rightarrow AK\perp(SCD)\Rightarrow d\left(A;(SCD)\right)=AK=\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

b) Dựng $AH\perp SB$, ta có: $\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp AH$.

Mặt khác: $AH\perp SB\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

Do đó $AH=\dfrac{AB.SA}{\sqrt{AB^2+SA^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow d\left(A;(SBC)\right)=AH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, tam giác *SAD* là tam giác vuông cân tại *S* và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $SA=a\sqrt{2}$ và *SB* tạo với đáy một góc 30°. Gọi *H* là trung điểm của *AD*. Tính các khoảng cách sau:

a) $d\left(H;(SBC)\right)$

b) $d\left(H;(SAC)\right)$

Lời giải

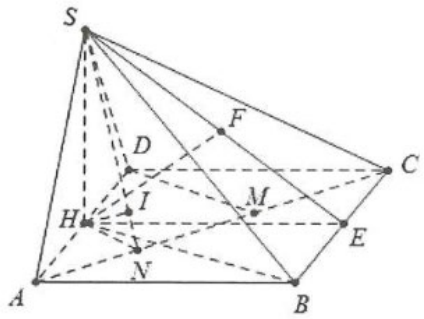
a) Gọi *H* là trung điểm của *AD* ta có: $SH\perp AD$

Lại có: $(SAD)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Mặt khác: $AD=SA\sqrt{2}=2a\Rightarrow SH=\dfrac{1}{2}AD=a$.

$\widehat{SBH}=30^\circ\Rightarrow HB\tan 30^\circ=SH=a\Rightarrow HB=a\sqrt{3}$

Khi đó: $AB=\sqrt{HB^2-AH^2}=a\sqrt{2}$



Dựng $\begin{cases} HE \perp BC \\ HE \perp SE \end{cases}$ ta có: $BC \perp HF$ từ đó suy ra $HF \perp (SBC) \Rightarrow d(H;(SBC)) = HF$.

Ta có: $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{6}}{3} = d(H;(SBC))$.

b) Dựng $HN \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHN)$, dựng $HI \perp SN \Rightarrow HI \perp (SAC)$

Dựng $DM \perp AC \Rightarrow DM = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Rightarrow HN = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HI = \frac{HN.SH}{\sqrt{HN^2 + SH^2}} = \frac{a}{2}$.

Do đó $d(H;(SAC)) = HI = \frac{a}{2}$

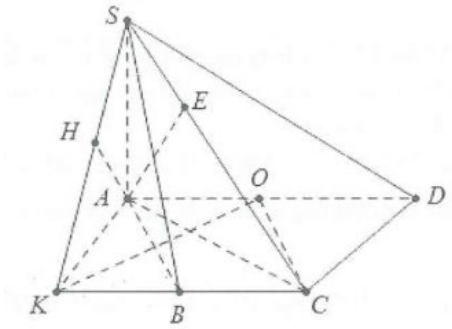
Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân $(AD//BC)$ có $AB = BC = CD = a, AD = 2a$, SA vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$. Tính cách các khoảng cách sau:

a) $d(A;(SCD))$

b) $d(A;(SBC))$

Lời giải

a) Gọi O là trung điểm của cạnh AD ta có tứ giác $ABCO$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = CO = a = \frac{1}{2}AD$ do đó $\widehat{ACD} = 90° \Rightarrow AC \perp CD$



mà $SA \perp CD$ nên $(SAC) \perp CD \Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.

+) Ta có: $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$ suy ra $SA = AC \tan 60° = 3a$

+) Dựng $AE \perp SC, AE \perp CD \Rightarrow AE \perp (SCD)$.

+) Khi đó $d(B;SCD) = d(O;SCD) = \frac{1}{2}d(A;(SCD))$.

+) Ta có: $AE = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{3a}{2} \Rightarrow d(A;(SCD)) = AE = \frac{3a}{2}$.

b) Dựng $AK \perp BC, AH \perp SK \Rightarrow AH \perp (SBC)$

+) Ta có: $d(A;(SBC)) = AH$.

+) Mặt khác: $AK = d(C;AD) = \frac{AC.CD}{\sqrt{AC^2 + CD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{AK.SA}{\sqrt{SA^2 + AK^2}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

Do đó $d(A;(SBC)) = AH = \frac{3a}{\sqrt{13}}$.

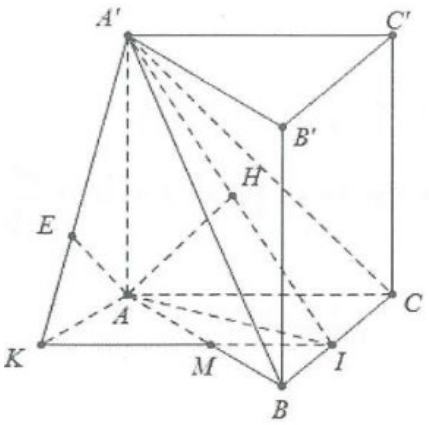
Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi I là trung điểm cạnh BC, đường thẳng $A'C$ tạo với đáy một góc $60°$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) chứa $A'I$ và song song với AC.

Lời giải

a) Do $AA' \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(A'C;(ABC))} = \widehat{A'CA}$.



Ta có: $\widehat{A'CA} = 60° \Rightarrow AA' = AC\tan 60° = a\sqrt{3}$

Dựng $AI \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AI)$ và $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Dựng $AH \perp A'I \Rightarrow d(A;(A'BC)) = AH$

Ta có: $AH = \dfrac{AI.AA'}{\sqrt{AI^2 + AA'^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $d(A;(A'BC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

b) Dựng $Ix // AC \Rightarrow (\alpha) \equiv (A'Ix)$

Khi đó: $d(A;(\alpha)) = d(A;(A'Ix))$, Ix cắt AB tại trung điểm M và AB.

Dựng $AK \perp Ix, AE \perp A'K$

Do $IM // AC \Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{MAC} = 60°$ suy ra $AK = AM\sin\widehat{AMK} = \dfrac{a}{2}\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $d(A;(A'IK)) = AE = \dfrac{AK.A'A}{\sqrt{AK^2 + A'A^2}} = \dfrac{a\sqrt{51}}{17}$

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = AC = 3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho $HC = 2HB$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a$.

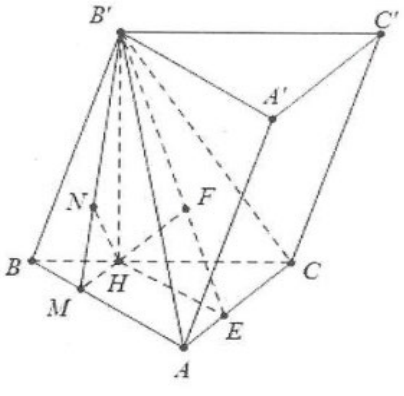
a) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng $(B'AC)$.

b) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng $(BAA'B')$.

Lời giải

a) Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 3a\sqrt{2} \Rightarrow HB = a\sqrt{2}$

Lại có $B'H = \sqrt{BB'^2 - HB^2} = a\sqrt{2}$



Dựng $HE \perp AC, HF \perp B'E \Rightarrow HF \perp (B'AC)$

Áp dụng định lý Talet trong tam giác BAC ta có:

$$\frac{HE}{AB} = \frac{CH}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = 2a \Rightarrow HF = \frac{HE.B'H}{\sqrt{HE^2 + B'H^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Do có: $d\left(H;(B'AC)\right) = HF = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

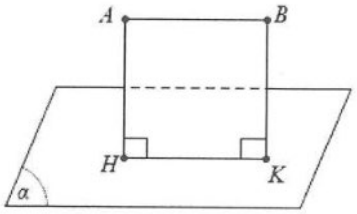
b) Dựng $HM \perp AB, HN \perp B'M$

Khi đó $d\left(H;(B'BA)\right) = HN$.

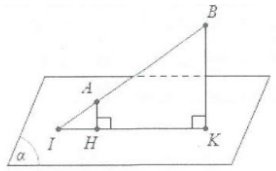
Ta có: $HM = \frac{AC}{3} = a \Rightarrow HN = \frac{HB'.HM}{\sqrt{HB'^2 + HM^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

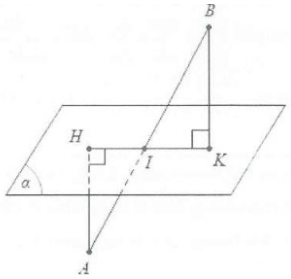
✍ **Dạng 3: Khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt bên.**

■ Nếu $AB//(\alpha)$ thì ta có $d\left(A;(\alpha)\right) = d\left(B;(\alpha)\right)$.

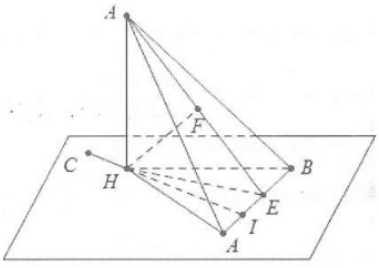


■ Nếu AB cắt (α) tại I thì ta có: $\frac{d\left(A;(\alpha)\right)}{d\left(B;(\alpha)\right)} = \frac{AI}{BI}$ (định lý Talet).





Xét bài toán: Tính khoảng cách từ điểm C bất kỳ đến mặt phẳng bên (SAB).



Nếu $CH//(SAB) \Rightarrow d\left(C;(SAB)\right) = d\left(H;(SAB)\right)$.

Nếu $CH \cap (SAB) = I \Rightarrow \frac{d\left(C;(SAB)\right)}{d\left(H;(SAB)\right)} = \frac{CI}{HI}$.

Quay trở về bài toán tính khoảng cách từ chân đường cao H đến mặt phẳng bên.

Ví dụ 1: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = 2a$. Tam giác *SAC* cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $\mathrm{SB} = \dfrac{3\mathrm{a}}{2}$, tính:

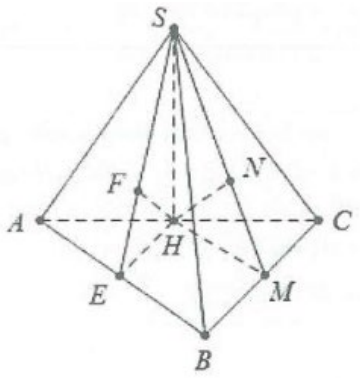
a) Khoảng cách từ điểm *C* đến mặt phẳng (SAB).

b) Khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

a) Gọi *H* là trung điểm của $\mathrm{AC} \Rightarrow SH \perp AC$

Mặt khác $(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$



Ta có: $BH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (trong tam giác vuông thì trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy).

Do đó $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = a$

Dựng $HE \perp AB, HF \perp SE$ khi đó $HF \perp (SAB)$

Do vậy $d\left(H;(SCD)\right) = HF$. Lại có $\mathrm{HE} = \dfrac{\mathrm{BC}}{2} = \mathrm{a}$

Mặt khác $\dfrac{1}{\mathrm{HF}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{HE}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{SH}^2} \Rightarrow \mathrm{HF} = \dfrac{\mathrm{SH.HE}}{\sqrt{\mathrm{SH}^2 + \mathrm{HE}^2}} = \dfrac{\mathrm{a}\sqrt{2}}{2}$

Lại có $\dfrac{\mathrm{d}\left(\mathrm{C};(\mathrm{SAB})\right)}{\mathrm{d}\left(\mathrm{H};(\mathrm{SAB})\right)} = \dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{HA}} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}\left(\mathrm{C};(\mathrm{SAB})\right) = 2\mathrm{d}\left(\mathrm{H};(\mathrm{SAB})\right) = \mathrm{a}\sqrt{2}$.

b) Dựng $\mathrm{HM} \perp \mathrm{BC}, \mathrm{HN} \perp \mathrm{SM} \Rightarrow \mathrm{d}\left(\mathrm{H};(\mathrm{SBC})\right) = \mathrm{HN}$.

Trong đó $\mathrm{HM} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} = \dfrac{\mathrm{a}}{2} \Rightarrow \mathrm{HN} = \dfrac{\mathrm{SH.HM}}{\sqrt{\mathrm{SH}^2 + \mathrm{HM}^2}} = \dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{5}}$

Lại có $\dfrac{\mathrm{d}\left(\mathrm{A};(\mathrm{SBC})\right)}{\mathrm{d}\left(\mathrm{H};(\mathrm{SBC})\right)} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{HC}} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}\left(\mathrm{A};(\mathrm{SBC})\right) = 2\mathrm{d}\left(\mathrm{H};(\mathrm{SBC})\right) = 2\mathrm{HN} = \dfrac{2\mathrm{a}}{\sqrt{5}}$.

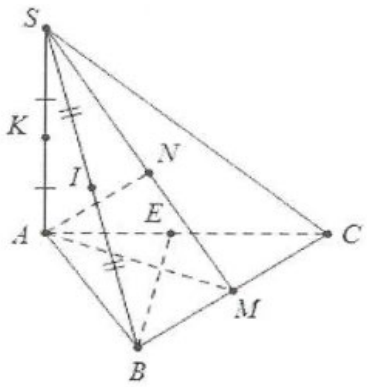
Ví dụ 2: Cho hình chóp *S.ABC* có $\mathrm{SA} \perp (\mathrm{ABC})$, đáy là tam giác đều cạnh *a*. Biết $\mathrm{SB} = \mathrm{a}\sqrt{5}$.

a) Tính khoảng cách từ trung điểm *K* của *SA* đến mặt phẳng (SBC).

b) Tính khoảng cách từ trung điểm *I* của *SB* đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Dựng $AM \perp BC \Rightarrow AM = AC\sin C = a\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Dựng $AN \perp SM$. Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp AN$

Lại có $AN \perp SM \Rightarrow AN \perp (SBC)$

Mặt khác $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a, \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2}$

$\Rightarrow d(A;(SBC)) = AN = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$

Do K là trung điểm của SA nên ta có $\dfrac{d(K;(SBC))}{d(A;(SBC))} = \dfrac{KS}{AS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(K;(SBC)) = \dfrac{1}{2}AN = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

b) Dựng $BE \perp AC \Rightarrow BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác $BE \perp SA \Rightarrow BE \perp (SAC) \Rightarrow d(B;(SAC)) = BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $\dfrac{d(B;(SAC))}{d(I;(SAC))} = \dfrac{BS}{IS} = 2 \Rightarrow d(I;(SAC)) = \dfrac{1}{2}d(B;(SAC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

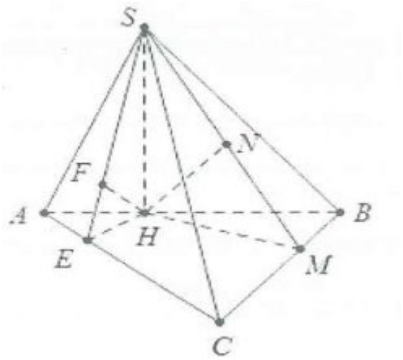
Ví dụ 3: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác đều cạnh 3a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy và điểm H thuộc cạnh AB sao cho HB=2HA. Biết SC tạo với đáy một góc $45°$. Tính các khoảng cách sau:

a) $d(B;(SAC))$

b) $d(I;(SBC))$

Lời giải

a) Tam giác ABC đều nên $\widehat{HAC} = 60°$.



Ta có: $HC = \sqrt{AH^2 + AC^2 - 2AH.AC\cos 60°} = a\sqrt{7}$

Mặt khác $\widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCH} = 45° \Rightarrow SH = HC = a\sqrt{7}$

Ta có: $\dfrac{BA}{HA} = \dfrac{d(B;(SAC))}{d(H;(SAC))}$

$\Rightarrow d(B;(SAC)) = 3d(H;(SAC))$

Dựng $HE \perp AC, HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAC)$

Ta có: $HE = HA\sin 60° = a\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow HF = \dfrac{HE.SH}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{a\sqrt{651}}{31} \Rightarrow d\left(B;(SAC)\right) = 3HF = \dfrac{3a\sqrt{651}}{31}$

b) Ta có: $\dfrac{d\left(A;(SBC)\right)}{d\left(H;(SBC)\right)} = \dfrac{AB}{HB} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = \dfrac{3}{2}d\left(H;(SBC)\right)$

Dựng $HM \perp BC, HN \perp SM \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HN$

Mặt khác $HM = HB\sin 60° = 2a\sin 60° = a\sqrt{3} \Rightarrow HN = \dfrac{SH.HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \dfrac{a\sqrt{210}}{10}$

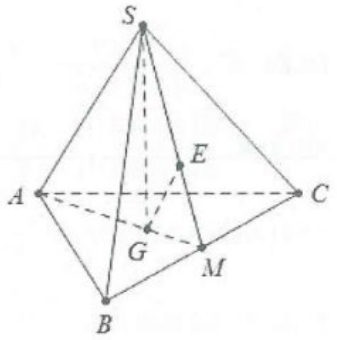
Do đó $d\left(A;(SBC)\right) = \dfrac{3}{2}HN = \dfrac{3a\sqrt{210}}{20}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có đáy là tam giác đều cạnh. Cạnh bên tạo với đáy góc $60°$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow BC \perp GM$, lại có: $BC \perp SG$ suy ra $BC \perp (SGM)$.



Dựng $GE \perp SM \Rightarrow \begin{cases} GE \perp SM \\ GE \perp BC \end{cases} \Rightarrow GE \perp (SBC)$

Do đó $d\left(G;(SBC)\right) = GE$

trong đó $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, GA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Do $SG \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{\left(SA;(ABC)\right)} = \widehat{SAG} = 60° \Rightarrow SG = GA\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\tan 60° = a$

Do đó $GE = \dfrac{SG.GM}{\sqrt{SG^2 + GM^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{13}}$, mặt khác $\dfrac{d\left(A;(SBC)\right)}{d\left(G;(SBC)\right)} = \dfrac{AM}{GM} = 3$

Vậy $d\left(A;(SBC)\right) = 3d\left(G;(SBC)\right) = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *2a*, tâm O, SO=a

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ trung điểm của SO đến mặt phẳng (SCD).

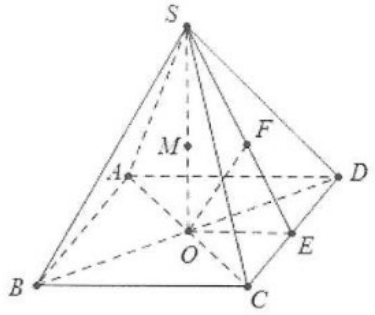
Lời giải

a) Dựng $OE \perp SE, OF \perp SE \Rightarrow d(O;(SCD))=OF$

Mặt khác

$$OE = \frac{AD}{2} = a \Rightarrow d_0 = OF = \frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Lại có: $\frac{d(A;(SCD))}{d(O;(SCD))} = 2 \Rightarrow d(A;(SCD)) = 2d_o = a\sqrt{2}$



b) Gọi M là trung điểm của SO thì

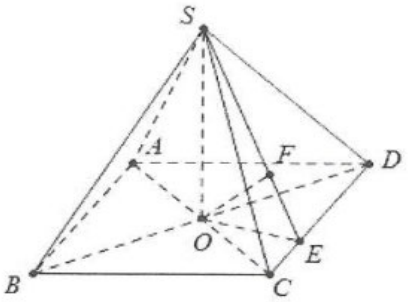
$$\frac{d(M;(SCD))}{d(O;(SCD))} = \frac{MS}{OS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M;(SCD)) = \frac{1}{2}d_o = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 6: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* cạnh a, biết $\widehat{BAD} = 120°$ và $SO \perp (ABCD)$. Biết $SO = a\sqrt{3}$, tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải

Dựng $OE \perp CD, OF \perp SE \Rightarrow d(O;(SCD))=OF$

Do $\widehat{BAD} = 120° \Rightarrow \widehat{CAD} = 60° \Rightarrow \Delta CAD$ là tam giác đều cạnh a



Khi đó $\widehat{OCE} = 60° \Rightarrow OE = OC\sin 60° = \frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $OF = \frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \frac{a\sqrt{51}}{17} = d(O;(SCD))$

Mặt khác $\frac{d(A;(SCD))}{d(O;(SCD))} = \frac{AC}{OC} = 2$

$$\Rightarrow d(A;(SCD)) = 2OF = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$$

Ví dụ 7: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = 3AD = 3$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm $H \in AB$ sao cho $HB = 2HA$. Biết $SH = \sqrt{3}$

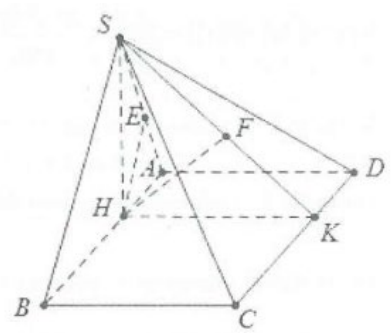
a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD).

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải

a) $AB=3\Rightarrow HA=1$

Dựng $HE\perp SA$. Ta có: $\begin{cases}AD\perp SH\\AD\perp AB\end{cases}\Rightarrow AD\perp HE$



Khi đó $HE\perp(SAD)\Rightarrow d\left(H;(SAD)\right)=HE=\dfrac{HA.SH}{\sqrt{HA^2+SH^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác $\dfrac{d_B}{d_H}=\dfrac{BA}{HA}=3\Rightarrow d\left(B;(SAD)\right)=3d_H=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

b) Do $AH//CD\Rightarrow AH//(SCD)\Rightarrow d\left(A;(SCD)\right)=d\left(H;(SCD)\right)$

Dựng $HK\perp CD, HF\perp SK\Rightarrow d\left(H;(SCD)\right)$=HF

Mặt khác $HK=AD=1, SH=\sqrt{3}\Rightarrow HF=\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d\left(A;(SCD)\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

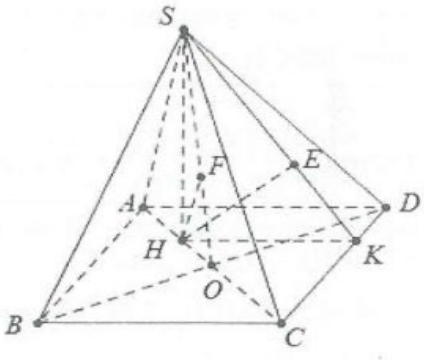
Ví dụ 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a, hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh OA. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách:

a) $d\left(B;(SCD)\right)$

b) $d\left(A;(SBD)\right)$

Lời giải

a) Dựng $HK\perp CD\Rightarrow CD\perp(SHK)$



$\left((SCD);(SHK)\right)=\widehat{SKH}=60°$. Ta có: $HK=\dfrac{3}{4}AD=\dfrac{3a}{4}$

Mặt khác $SH=HK\tan 60°=\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $AB//CD\Rightarrow AB//(SCD)$

Lại có: $\dfrac{d\left(A;(SCD)\right)}{d\left(H;(SCD)\right)}=\dfrac{AC}{HC}=\dfrac{4}{3}$

Do đó: $d\left(B;(SCD)\right)=d\left(A;(SCD)\right)=\dfrac{4}{3}d\left(H;(SCD)\right)$

Dựng $HE\perp SK\Rightarrow HE=HK\sin\widehat{HKE}=HK\sin 60°=\dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$

Vậy $d\left(B;(SCD)\right)=\frac{4}{3}HE=\frac{4}{3}.\frac{3\sqrt{3}a}{8}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$

b) Ta có: $\frac{d\left(A;(SBD)\right)}{d\left(H;(SBD)\right)}=\frac{AO}{HO}=2\Rightarrow d\left(A;(SBD)\right)=2d\left(H;(SBD)\right), HO=\frac{1}{4}AC=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Dựng $HF\perp SO\Rightarrow HF=\frac{HO.SH}{\sqrt{HO^2+SH^2}}=\frac{3a\sqrt{696}}{232}$

Vậy $d\left(A;(SBD)\right)=2HF=\frac{3a\sqrt{696}}{232}$

Ví dụ 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông ABCD tâm O, $SA=2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm của cạnh OA, biết tam giác SBD vuông tại S. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC)

Lời giải

Ta có ΔSBD vuông tại S nên $SO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$

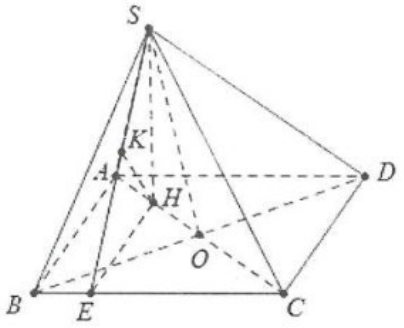
$\Rightarrow_{\Delta}SAC$ vuông tại S ta có: $SA^2=HA.AC=4HA^2$

$\Leftrightarrow 8a^2=4HA^2\Leftrightarrow HA=a\sqrt{2}\Leftrightarrow AC=4a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB=AC=4a$

Khi đó: $SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=a\sqrt{6}$

Do $AD//BC\Rightarrow d\left(D;(SBC)\right)=d\left(A;(SBC)\right)$



Mặt khác $\frac{d\left(A;(SBC)\right)}{d\left(H;(SBC)\right)}=\frac{AC}{HC}=\frac{4}{3}$

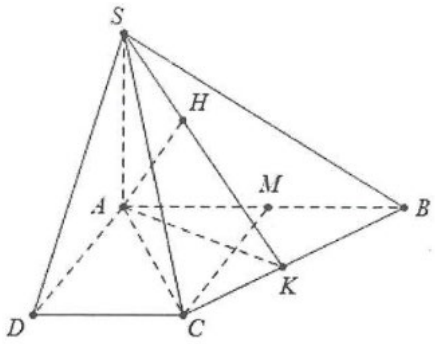
Do đó $d\left(D;(SBC)\right)=\frac{4}{3}d\left(H;(SBC)\right)$. Dựng $HE\perp BC, HK\perp SE\Rightarrow HK\perp(SBC)$.

Ta có $HE=\frac{3}{4}AB=3a\Rightarrow HK=\frac{HE.SH}{\sqrt{HE^2+SH^2}}=\frac{6a}{\sqrt{10}}\Rightarrow d\left(D;(SBC)\right)=\frac{4}{3}HK=\frac{8a}{\sqrt{10}}=\frac{4a\sqrt{10}}{5}$

Ví dụ 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB là đáy lớn và tam giác ABC là tam giác đều. Các mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy, cạnh bên $SC=2a$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng a. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)$



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $CM\perp AB\Rightarrow CM\perp(SAB)$

Do đó $d(C;(SAB))=CM=a$

$\Rightarrow SM=\sqrt{SC^2-CM^2}=a\sqrt{3}$

Gọi K là trung điểm của BC nên $AK=CM=a$

Lại có $CM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB\Rightarrow AB=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AM=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow SA=\dfrac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$. Kẻ $AH\perp SK, H\in SK$ nên $AH\perp(SBC)\Rightarrow d(A;(SBC))=AH$

Khi đó $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}\right)^2}+\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$

Ví dụ 11: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là lục giác đều cạnh *a*. Tam giác *SAD* vuông cân tại *S* và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$.

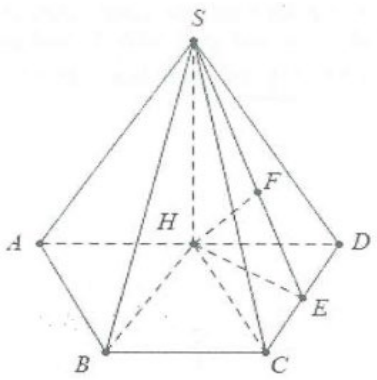
a) Tính khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng *(SCD)*.

b) Tính khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng *(SCD)*.

Lời giải

a) Gọi *H* là trung điểm của AD $\Rightarrow SH\perp AD$

Mặt khác $(SAD)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$



ΔSAD vuông cân tại S nên $SH=\dfrac{AD}{4}=a$

Dễ thấy *HC=AB=a* $\Rightarrow \Delta HCD$ đều cạnh a

Dựng $HE\perp CD, HF\perp SE\Rightarrow d(H;(SCD))=HF$

Mặt khác $HE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HF=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Do D=2HD $\Rightarrow d(A;(SCD))=2HF=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$

b) Dễ thấy HDCB là hình thoi cạnh a

Do đó $BH//CD\Rightarrow BD//(SCD)\Rightarrow d(B;(SCD))=d(H;(SCD))=HF=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

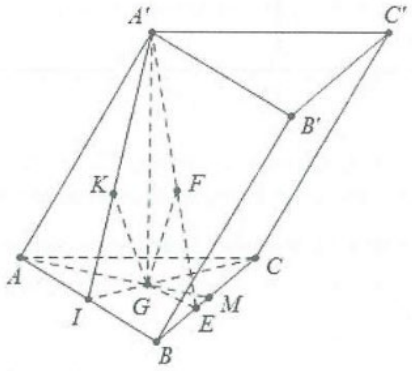
Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác cân $AC = BC = a, AB = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết mặt phẳng $(B'C'CB)$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính các khoảng cách:

a) $d(A;(A'BC))$.

b) $d(C;(ABB'A'))$.

Lời giải

a) Gọi I là trung tâm của AB ta có: $CI \perp AB$



Dựng $GE \perp BC \Rightarrow (A'EG) \perp BC$

Ta có: $\widehat{A'EG} = 60° \Rightarrow GA' = GE\tan 60°$

$CI = \sqrt{BC^2 - IB^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow CG = \frac{a}{3}$

Mặt khác: $\sin\widehat{ICB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ICB} = 60°$

Khi đó: $GE = CG\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow A'G = GE\tan 60° = \frac{a}{2}$

Dựng $GF \perp A'E$ ta có: $GF \perp (A'BC) \Rightarrow d(G;(A'BC))$=GF

Ta có: $d(A;(A'BC)) = 3d(G;(A'BC)) = 3GF = 3GE\sin 60° = 3\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$

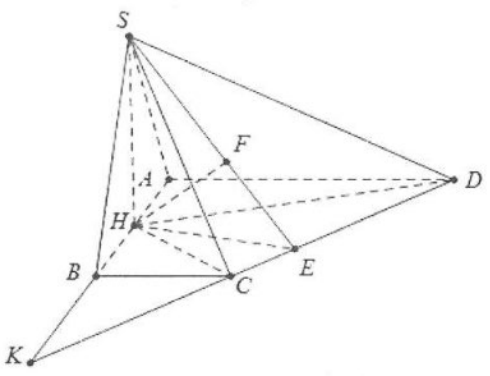
b) Do $CI = 3GI \Rightarrow d(C;(B'AB)) = 3d(G;(B'AB))$

Dựng $GK \perp A'I \Rightarrow d(G;(A'AB)) = \frac{GI.A'G}{\sqrt{GI^2 + A'G^2}}$

Trong đó $GI = \frac{1}{3}CI = \frac{a}{6}, A'G = \frac{a}{2} \Rightarrow GK = \frac{a\sqrt{10}}{20} \Rightarrow d(C;(A'AB)) = \frac{3a\sqrt{10}}{20}$

Ví dụ 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B*, $AB = AD = 2a, BC = a$, tam giác SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), biết cạnh bên $SD = 3a$, tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng SCD

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH \perp AB$ mặt khác $(ABC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có: $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$. Khi đó: $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = 2a$

Gọi $K = AB \cap CD \Rightarrow \dfrac{KB}{KA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AK = \dfrac{4}{3}HK$

Ta có: $d(A;(SCD)) = \dfrac{4}{3}d(H;(SCD)) = \dfrac{4}{3}HF$. Dựng $HE \perp CD, HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SCD)$

Ta có: $CD = \sqrt{AB^2 + (AD - BC)^2} = a\sqrt{5}$; $S_{HCD} = S_{ABCD} - S_{HBC} - S_{HAD} = 3a^2 - \dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

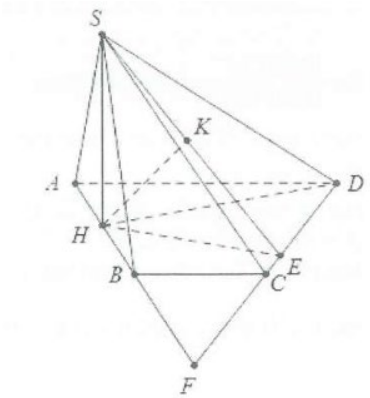
Do vậy $HE = \dfrac{2S_{HCD}}{CD} = \dfrac{3a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}} \Rightarrow HF = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{6a}{\sqrt{29}} \Rightarrow d(A;SCD) = \dfrac{8a}{\sqrt{9}}$.

Ví dụ 14: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD l*à nửa lục giác đều cạnh *a*, *AD=2a*, tam giác *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên *SD* tạo với đáy một góc φ thỏa mãn $\tan\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng *SCD*.

Lời giải

Gọi *H* là trung điểm của *AB* ta có: $SH \perp AB$

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$



Ta có:

$HD^2 = AH^2 + AD^2 - 2AD.AH.\cos\widehat{HAD} = \dfrac{a^2}{4} + 4a^2 - 2a^2.\cos 60° = \dfrac{13a^2}{4}$

$\Rightarrow HD = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$

Ta có: $\widehat{SDH} = \varphi \Rightarrow SH = HD\tan\varphi = \dfrac{a}{2}$

Gọi $F = AB \cap CD \Rightarrow AF = 2AB \Rightarrow \dfrac{AF}{HF} = \dfrac{4}{3}$

Do đó: $d(A;(SCD)) = \dfrac{4}{3}d(H;(SCD)) = \dfrac{4}{3}HK$

Mặt khác $HE = HF\sin 60° = \frac{3a}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow HK = \frac{HE.SH}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a\sqrt{93}}{62} \Rightarrow d\left(A;(SCD)\right) = \frac{4}{3}HK = \frac{2a\sqrt{93}}{61}$

✍ **Dạng 4: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song**

■ *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song*

Khoảng cách giữa đường thẳng *a* và mặt phẳng (α) song song với nhau là khoảng cách từ một điểm *M* bất kì thuộc đường a đến mặt thẳng (α).

$d\left(a;(\alpha)\right) = d\left(M;(\alpha)\right) = MH\left(M \in (\alpha)\right).$

■ *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng kia.

$d\left((\alpha);(\beta)\right) = d\left(a;(\beta)\right) = d\left(A;(\beta)\right) = AH\left(a \subset (\alpha), A \in a\right)$

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên SBC vuông góc với đáy ABC, Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, SA, AC. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

Lời giải

Do $\begin{cases} MP // BC \\ MN // SB \end{cases} \Rightarrow (MNP) \perp (SBC)$

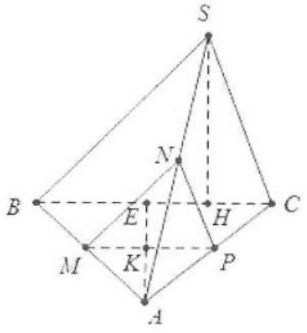
Dựng $SH \perp BC\left(H \in BC\right)$. Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$

Do đó $SH \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$

Gọi $K = AE \cap MP \Rightarrow KE \perp BC$

Mặt khác $KE \perp SH \Rightarrow KE \perp (SBC)$



Suy ra $d\left((MNP);(SBC)\right) = d\left(K;(SBC)\right) = KE = \frac{AE}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABC* có cạnh đáy băng 2*a* và cạnh bên đều bằng $a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB).

Lời giải

Gọi *O* là tâm của đáy $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

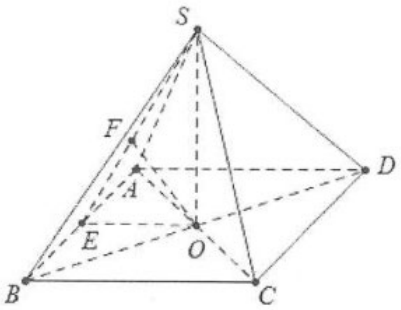
Ta có: $OA = \frac{AC}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a\sqrt{3}$

Mặt khác $d\left(CD;(SAB)\right) = d\left(D;(SAB)\right)$

Ta có: $\frac{d\left(D;(SAB)\right)}{d\left(O;(SAB)\right)} = \frac{DB}{OB} = 2$

Dựng $OE \perp AB, OF \perp SE$ ta có: $OE = \frac{AD}{2} = a$

Khi đó: $d\left(D;(SAB)\right) = 2OF = 2.\frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = a\sqrt{3}$



Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) trùng với trung điểm của BC.

a) Tính khoảng cách từ AA' đến các mặt bên $(BCC'B')$

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ.

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của BC ta có: $A'H \perp BC$

Do ΔABC đều nên $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'HA)$

Dựng $HK \perp AA'$ thì $\begin{cases} HK \perp BB' \\ KH \perp BC \end{cases} \Rightarrow KH \perp (BCC'B')$

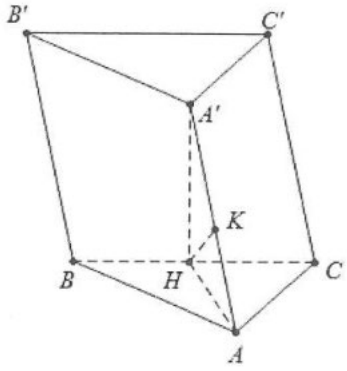
Do đó $d\left(AA';(BCC'B')\right) = d\left(K;(BCC'B')\right) = KH$

Lại có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AA' = a \Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{a}{2}$

Suy ra $HK = \frac{AA'.AH}{AA'} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $d\left(AA';(BCC'B')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Ta có: $d\left((ABC);(A'B'C')\right) = d\left(A';(ABC)\right) = A'H = \frac{a}{2}$



Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC và A'D'. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC').

Lời giải

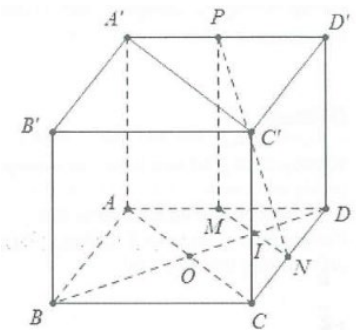
Ta có: $MN//AC, NP//AA' \Rightarrow (MNP)//(ACC'A')$

Gọi O là tâm hình vuông ABCD và $I = DO \cap MN$

Ta có: $\begin{cases} IO \perp AC \\ IO \perp AA' \end{cases} \Rightarrow IO \perp (ACC'A')$

Do đó $d((MNP);(ACC'A')) = d(I;(ACC'A')) = IO$

Lại có: $IO = \frac{OD}{2} = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

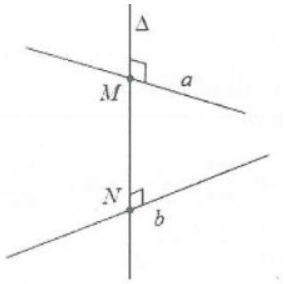


Vấn đề 2: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

■ Đường vuông góc chung và đoạn vuông góc chung hai đường chéo nhau.

- Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau *a, b* và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của *a* và *b*.

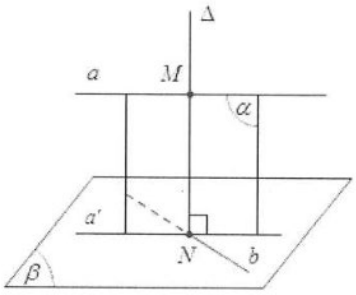
- Đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau *a* và *b* lần lượt tại *M* và *N* thì độ dài đoạn thẳng *MN* gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *a* và *b*.



■ Cách xác định đoạn vuông góc chung của 2 đường chéo nhau.

Cho 2 đường thẳng chéo nhau *a* và *b*. Gọi (β) là mặt phẳng chứa *b* và song song với *a*, *a'* là hình chiếu vuông góc của *a* trên (β).

Vì $a//(\beta)$ nên $a//a'$. Gọi $N = a' \cap b$ và (α) là mặt phẳng chứa *a* và *a'*. Dựng đường thẳng Δ qua *N* và vuông góc chung và *MN* là đoạn vuông góc chung của *a* và *b*.



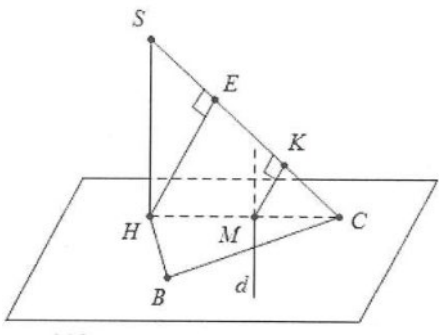
<u>Nhận xét:</u>

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

✍ **Dạng 1: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau.**

Phương pháp giải: Dựng đường vuông góc chung. Khảo sát khối chóp đỉnh *S* có đường cao *SH*, yêu cầu tính khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau *d* (thuộc mặt đáy) và đường thẳng *SC* thuộc bên khối chóp trong trường hợp $d \perp SC$.



■ **Dựng hình:** Hình chiếu vuông góc của *SC* trên mặt phẳng đáy là *HC*

Mặt khác: $\begin{cases} SC \perp d \\ SH \perp d \end{cases} \Rightarrow d \perp (SHC)$

Gọi $M = d \cap HC$, dựng $MK \perp SC$ khi đó MK là đoạn vuông góc chung của AC và SC

■ **Cách tính:** Dựng $HE \perp SC$ khi đó $\frac{MK}{HE} = \frac{MC}{HC} \Rightarrow MK = \frac{MC}{HC}.HE$

Xét tam giác vuông SHC ta có: $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow HE = MK = d(d;SC)$

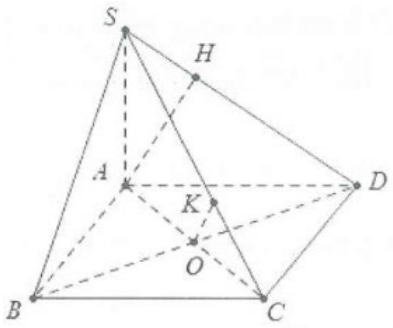
Ví dụ 1: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a* và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với mặt đáy một góc $60°$

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SD

b) Tính khoảng cách giữa BD và SC.

Lời giải

a) Ta có: $AC = a\sqrt{2}$. Do $SA \perp (ABCD)$ và SC tạo với đáy góc $60°$ nên $\widehat{SCA} = 60°$



Khi đó $SA = AC \tan 60° = a\sqrt{6}$

Do $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$

Dựng $AH \perp SD$ suy ra AH là đoạn vuông góc chung của AB và SD

Ta có: $\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}$

b) Ta có: $BD \perp SC$ tại O và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Dựng $OK \perp SC \Rightarrow OK \perp BD$ nên OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC

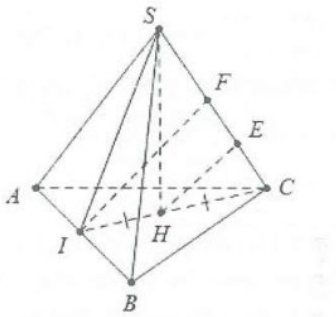
Do đó $d(BD;SC) = OK = OC \sin \widehat{OCK} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin 60° = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi *I* là trung điểm của *AB*. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt đáy là trung điểm *CI*. Biết chiều cao của khối chóp là $h = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa

đường thẳng *AB* và *SC*.

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIC)$



Dựng $IF \perp SC$ khi đó IF là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Dựng $HE \perp SC$ ta có: $HE = \dfrac{1}{2}IF$

Lại có $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Khi đó $HE = \dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{a\sqrt{51}}{17} \Rightarrow IF = \dfrac{2a\sqrt{51}}{17}$

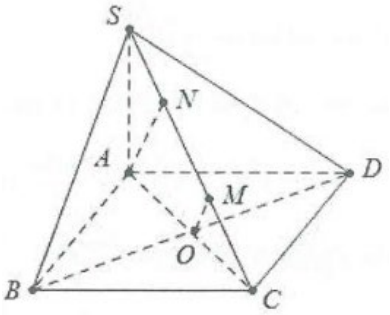
Ví dụ 3: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông *ABCD* cạnh *a* và $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng *SB* và *CD*.

b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng *BD* và *SC*.

Lời giải

a) Do: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow BC$ là đoạn vuông góc chung của SB và CD.



Ta có: $d(SB;CD) = BC = a$

c) Mặt khác $BC \perp (SAB)$

Do đó $\widehat{((SBC);(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60°$

Suy ra $SA = AB\tan 60° = a\sqrt{3}$

Gọi *O* là tâm hình vuông *ABCD* ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Dựng $OM \perp SC$ khi đó *OM* là đường vuông góc chung của BD và SC

Ta có $\Delta CAS \sim \Delta CMO(g-g) \Rightarrow \dfrac{SC}{CO} = \dfrac{SA}{MO} \Rightarrow OM = \dfrac{SA.OC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Cách 2: Dựng $AN \perp SC \Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}AN$. Mặt khác $\dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AN = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$

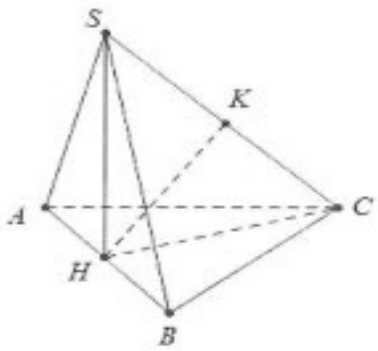
Khi đó $d = OM = \frac{1}{2}AN = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

Ví dụ 4: Cho chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *A*, tam giác *SBC* là tam giác đều cạnh *a* và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách *d* giữa 2 đường thẳng *SA* và *BC*.

Lời giải

Gọi *H* là trung điểm của *BC* khi đó $SH \perp BC$

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$ do đó $SH \perp (ABC)$



Ta có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AB = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}; AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

Do $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHA)$. Dựng $HK \perp SA$ khi đó

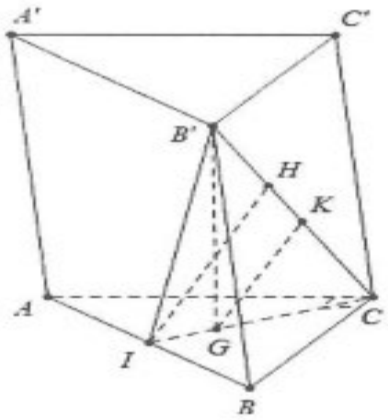
HK là đoạn vuông góc chung của *BC* và *SA*.

Lại có: $HK = \frac{SH.AH}{\sqrt{SH^2 + HA^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy là tam giác vuông cân *AB = BC = 3a*, hình chiếu vuông góc của *B'* lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm tam giác *ABC*, mặt phẳng *(ABB'A')* tạo với mặt phẳng *(ABC)* một góc 60°. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng *AB* và *B'C*.

Lời giải

Dựng $CI \perp AB \Rightarrow I$ là trung điểm của *AB*.



Ta có: $(B'GI) \perp AB \Rightarrow \widehat{B'IG} = 60^\circ$

Lại có: $CI = \frac{1}{2}AB = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow GI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow B'G = GI\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Dựng $IH \perp B'C \Rightarrow d(AB; B'C) = IH = \frac{B'G.CI}{B'C}$

Ta có: $B'C = \sqrt{B'G^2 + GC^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{42}}{14}$

Do đó $d(AB; B'C) = IH = \frac{3a\sqrt{42}}{14}$

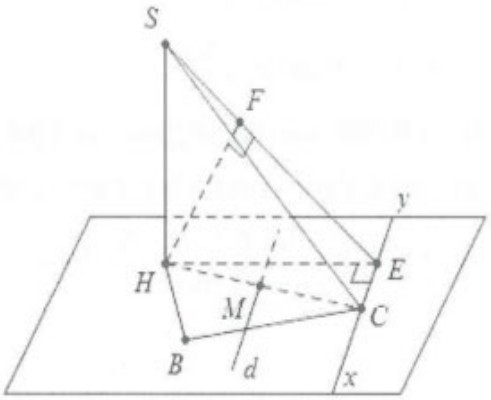
Hoặc dựng : $GK // IH \Rightarrow IH = \frac{3}{2}GK = \frac{3}{2}.\frac{B'G.GC}{\sqrt{B'G^2 + GC^2}}$

✍ **Dạng 2: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau không vuông góc.**

Phương pháp giải : Dựng đường thẳng chứa *a* và song song với *b* (hoặc đường thẳng chứa *b* và song song với *a)* để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Khảo sát khối chóp đỉnh *S* có đường cao *SH*, yêu cầu tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau *d* (thuộc mặt đáy) và đường thẳng *SC* thuộc mặt bên của khối chóp trong trường hợp *d* không vuông góc với *SC*.

■ **Dựng hình:** Tìm giao điểm *C* của cạnh bên *SC* và mặt đáy (giao điểm của cạnh thuộc mặt bên và mặt đáy). Từ *C* ta dựng đường thẳng $xCy \| d$



Khi đó *d(d;SC) = d(d;(Sxy))*

Gọi $M = d \cap HC \Rightarrow d = d(M;(Sxy))$

Ta có : $\frac{d(M;(Sxy))}{d(H;(Sxy))} = \frac{MC}{HC} \Rightarrow d(M;(Sxy)) = \frac{MC}{HC}.d(H;(Sxy))$

■ **Chú ý:** Để tính *d(d;(Sxy))* ta có thể lấy bất kỳ điểm nào thuộc *d* (không nhất thiết là điểm *M)* sao cho việc quy đổi khoảng cách cần tìm về khoảng cách từ chân đường cao *H* đến mặt phẳng *(Sxy)* dễ dàng nhất.

Ví dụ 1: Cho hình chóp *S.ABC* có *SA* vuông góc với mặt phẳng *(ABC),* đáy *ABC* tam giác vuông tại B có *AB = a,* $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \frac{a}{\sqrt{2}}$

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SB* và *AC*

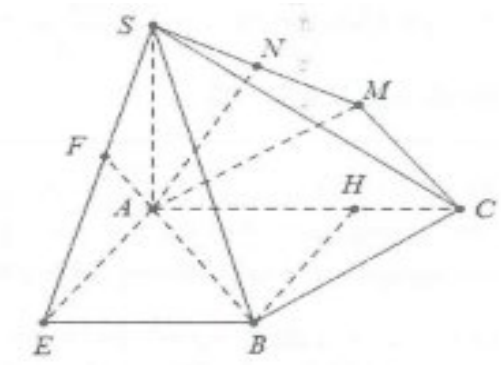
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SC* và *AB*.

Lời giải

a) Dựng $Bx // AC, AE \perp Bx \Rightarrow (SAE) \perp Bx$

Dựng $AF \perp SE \Rightarrow d(AC;SB) = AF$

Dựng $BH \perp AC$ dễ thấy $AE = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Ta có: $AF = \frac{AE.SA}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

b) Dựng $Cy // AB \Rightarrow d(AB,SC) = d(AB,(SCy))$

Dựng $AM \perp Cy, AN \perp SM \Rightarrow d(AB;(SCy)) = AN$

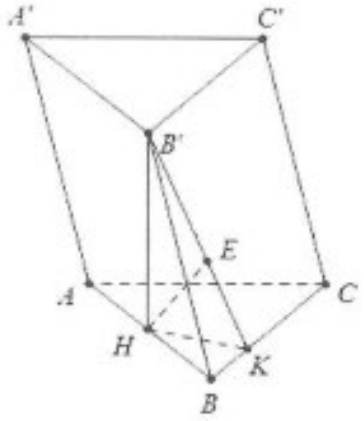
Lại có : $AM = BC = a\sqrt{3} \Rightarrow AN = \frac{AM.SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{27}$

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy là tam giác đều cạnh *a*, hình chiếu vuông góc của *B'* lên

mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB, góc giữa mặt phẳng $(BCC'B')$ và mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và BC.

Lời giải

Dựng $HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (B'HK) \Rightarrow \widehat{B'KH} = 60^\circ$



Ta có : $HK = HB\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow B'H = HK\tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$

Do $AA' // BB' \Rightarrow d(AA';BC) = d(AA';(B'C'C))$

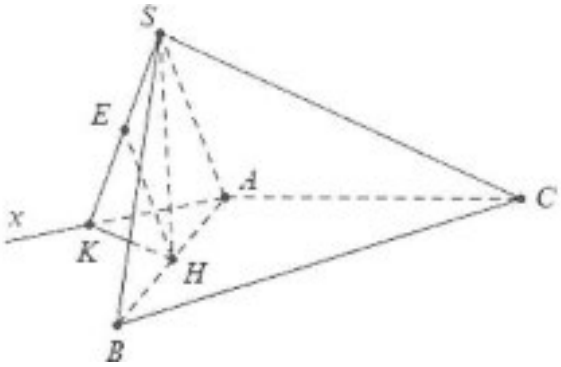
$d(A;(B'C'CB)) = 2d(H;(B'C'CB)) = 2HE$

Ta có : $HE = \dfrac{HK.B'H}{\sqrt{B'H^2 + HK^2}} = \dfrac{3a}{8}$. Do đó $d = \dfrac{3a}{4}$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB, biết $SA = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng SA và BC.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Khi đó



$SH \perp (ABC)$ và $SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a$

Dựng $Ax // BC \Rightarrow d(SA;BC) = d(B;(SAx))$

Dựng $HK \perp Ax \Rightarrow (SHK) \perp Ax$

Dựng $HE \perp SK \Rightarrow d(B;(SAx)) = 2d(H;(SAx))$

Ta có : $HK = AH\sin\widehat{HAK} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow d(H;(SAx)) = HE = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Do đó $d(SA;BC) = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$, tam giác SBC là tam giác vuông cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và AC.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của BC. Ta có $SH \perp BC$

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Ta có : $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow SH = \frac{1}{2}BC = a$

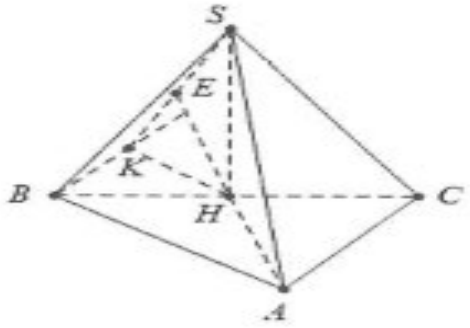
Dựng $Bx // AC \Rightarrow d(AC;SB) = d(AC;(SBx))$

$= d(C;(SBx)) = d$

Dựng : $HK \perp Bx, HE \perp SK \Rightarrow HE \perp (SBx)$

$d(C;(SBx)) = 2d(H;(SBx)) = 2HE$

Ta có :



$HK = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE = \frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Do đó : $d = 2d(H;(SBK)) = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$

Ví dụ 5: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *2a*, $SA \perp (ABCD)$. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *CD*, biết $SA = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SD* và *BM*

Lời giải

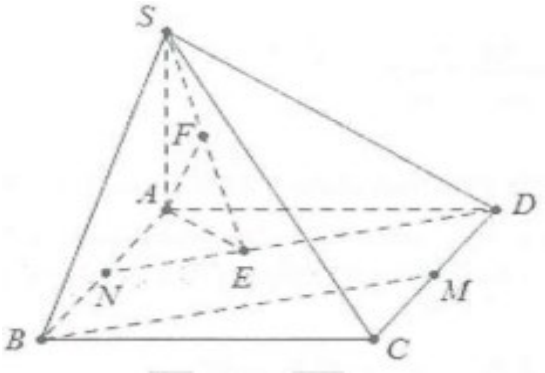
Dựng $DN \| BM \Rightarrow$ N là trung điểm của AB.

Khi đó $d(SD;BM) = d(BM;(SDN))$

$= d(B;(SDN)) = d(A;(SDN))$

Dựng $AE \perp DN \Rightarrow DN \perp (SAE)$, dựng $AF \perp SE$

Khi đó $\begin{cases} AF \perp SE \\ AF \perp DN \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SDN)$



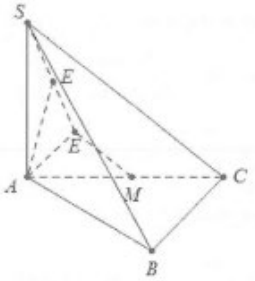
Ta có : $AE = \frac{AN.AD}{\sqrt{AN^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Do vậy $d(B;(SDN)) = d(A;(SDN)) = AF = \frac{AE.SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = 2a.\sqrt{\frac{5}{29}} = \frac{2a\sqrt{145}}{29}$

Ví dụ 6: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông cân tại *B, AB = BC = 2a* và $SA \perp (ABC)$. Gọi *M* là trung điểm của *AC*. Biết góc giữa 2 mặt phẳng *(SBC)* và *(ABC)* bằng 60°. Tính khoảng cách *d* giữa 2 đường thẳng *AB* và *SM* theo *a.*

Lời giải

Ta có : $\begin{cases} AB \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{SBA}$ là góc giữa 2 mặt phẳng *(SBC)* và *(ABC)*



Ta có : $SA = AB\tan\widehat{SBA} = 2a\sqrt{3}$. Dựng *Mx//AB*

Khi đó $d(AB;SM) = d(AB;(SMx)) = d(A;(SMx))$

Dựng $AE \perp Mx; AF \perp SE$ khi đó $d(A;(SMx)) = AF$

Do *AE//BC* nên $\widehat{EAM} = \widehat{ACB} = 45^\circ$

Suy ra $AE = AM\cos 45^\circ = a$

Do đó $AF = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13} = d$

Ví dụ 7: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, $SA \perp (ABCD)$, đường thẳng *SC* tạo với đáy góc 45°. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng *SB* và *AC*

Lời giải

Ta có : $AC = a\sqrt{2}; \widehat{SCA} = \widehat{(SC;(ABCD)} = 45^\circ$

$\Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

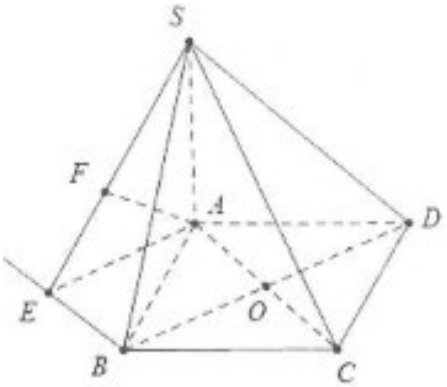
Dựng $Bx//AC \Rightarrow d(AC;SB) = d(AC;SBx)$

Dựng $AE \perp Bx, AF \perp SE \Rightarrow d = AF$

Ta có : $BE//AC \Rightarrow BE \perp BD$ dễ dàng suy ra

OEBO là hình chữ nhật suy ra $AE = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$d = \dfrac{AE.SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$



Ví dụ 8: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật có *AB = a,* $BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc *H* của đỉnh *S* lên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm *H* thỏa mãn $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HB}$. Góc giữa mặt phẳng *(SCD)* và mặt phẳng *(ABCD)* bằng 60°. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng *SA* và *BD*.

Lời giải

Dựng $HK \perp CD \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ$

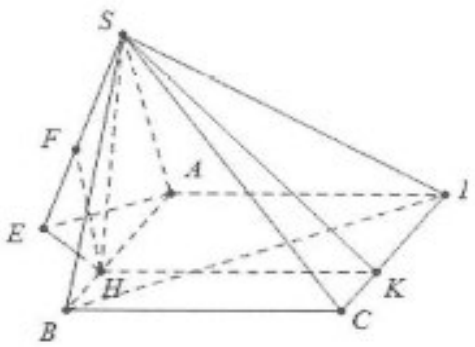
Ta có : $SH = HK.\tan 60^\circ = BC.\tan 60^\circ = 3a$

Dựng $Ax//BD \Rightarrow d(SA;BD) = d(BD;(SAx))$

$= d(B;(SAx)) = \dfrac{3}{2}d(H;(SAx))$

Dựng $HE \perp Ax, HF \perp SE \Rightarrow d(H;(SAx)) = HF$

Ta có : $\tan\widehat{ABD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{ABD} = 60^\circ$



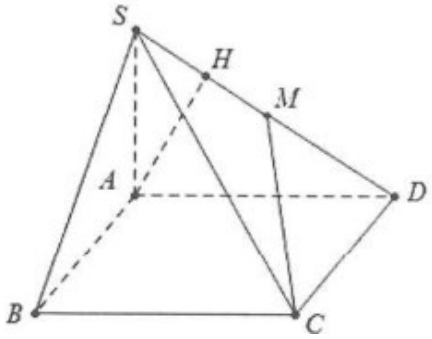
$\Rightarrow HE = HA.\sin 60^\circ = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $HF = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{7}} \Rightarrow d(SA;BD) = \frac{9a}{4\sqrt{7}}$

Ví dụ 9: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng *(SBC)* tạo với đáy một góc 60° và *M* là trung điểm của *SD*. Tính khoảng cách *d* giữa 2 đường thẳng *AB* và *CM*.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{SBA}$ là góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC)



Ta có: $SA = AB\tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$

Do AB//CM do đó d(AB;CM) = d(AB;(CMD))

Dựng $AH \perp SD$ khi đó d(A;(SCD)) = AH

Lại có: $AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = d(AB;CM)$

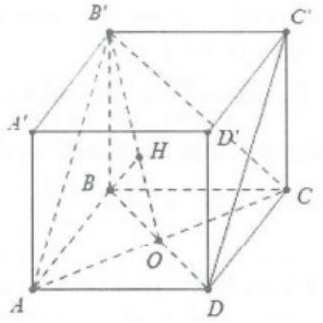
Ví dụ 10: Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* có cạnh bằng *a*. Tính *d* là khoảng cách giữa 2 đường thẳng *AC* và *C'D*.

Lời giải

Dễ thấy *AB'//C'D* do đó

d(AC;C'D) = d(C'D;(ACB'))

Khi đó *d = d(D;(B'AC))*. Mặt khác *OB = OD* (với *O* là tâm hình vuông *ABCD*)



Khi đó *d(D;(B'AC)) = d(B;(B'AC))*

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'O)$, dựng $BH \perp B'O$

Suy ra $H \perp (B'AC) \Rightarrow h = BH = \frac{BO.BB'}{\sqrt{BO^2 + BB'^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 11: Cho khối chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *2a*. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm *H* thuộc đoạn *BD* sao cho *HD = 3HB*. Biết góc giữa mặt phẳng *(SCD)* và mặt phẳng đáy bằng 45°. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng *SA* và *BD*.

Lời giải

Dựng $HK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK)$ do vậy

$\widehat{(SCD;ABCD)} = \widehat{SKH} = 45^\circ$

Ta có: ΔHKD vuông cân tại K do vậy

$HK = KD = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow SH = HK \tan 45^\circ = \dfrac{3a}{2}$

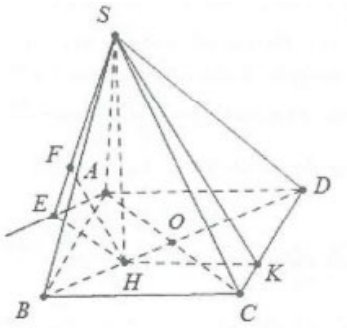
Dựng $Ax // BD$ ta có:

$d(SA;BD) = d(BD;(SAx)) = d(H;(SAx))$

Dựng $HE \perp Ax \Rightarrow HE = OA = a\sqrt{2}$

Dựng $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAx)$

Ta có: $HF = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{34}}{17} = d(SA;BD)$



Ví dụ 12: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật có *AB = 2a,* $AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên *SA* vuông góc với đáy, gọi *M* là trung điểm của cạnh *CD*. Biết *SM* tạo với mặt phẳng *(ABCD)* một góc 60°, tính khoảng cách *d* giữa 2 đường thẳng *AM* và *SB*.

Lời giải

Ta có: $M = \sqrt{AD^2 + DM^2} = 2a$

$\Rightarrow SA = AM \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

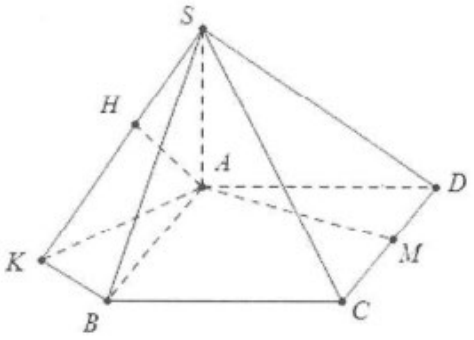
Dựng $Bx // AM \Rightarrow d(AM;SB) = d(A;SBx)$

Dựng $AK \perp Bx, AH \perp SK$

Ta có: $\tan \widehat{MAB} = \dfrac{MD}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{MAD} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAK} = 30^\circ \Rightarrow AK = ABcos30^\circ = a\sqrt{3}$

$d(A;(SBx)) = AH = a\sqrt{\dfrac{12}{5}} = \dfrac{a\sqrt{60}}{5}$



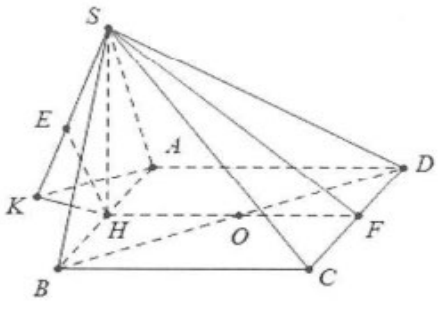
Ví dụ 13: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật có $AD = a\sqrt{2}$, hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* xuống mặt đáy là trung điểm của *AB*, biết tam giác *SCD* là tam giác vuông tại *S* và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc 45°. Tính khoảng cách *d* giữa 2 đường thẳng *SA* và *BD*.

Lời giải

Gọi *H* là trung điểm của *AB*. Dựng $HF \perp CD$ khi đó

$HF = AD = a\sqrt{2}$

Ta có: $CD \perp (SHF) \Rightarrow \widehat{SFH} = 45^\circ$



$\Rightarrow SH = HF\tan 45^\circ = a\sqrt{2}; SF = HF\sqrt{2} = 2a$

Do tam giác *SCD* vuông cân nên *CD = 2SF = 4a*

Suy ra $d(A;BD) = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{4a}{3}$

Dựng $\text{Ax}//\text{B}D, HK \perp Ax, HE \perp SK$

Ta có $HK = \dfrac{1}{2}d(A;BD) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4a}{3} = \dfrac{2a}{3}$. Do vậy $d(SA;BD) = 2HE = \dfrac{4a}{\sqrt{11}}$

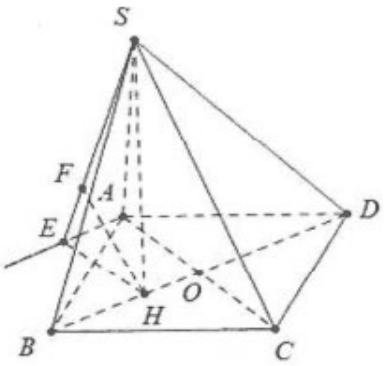
Ví dụ 14: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* cạnh *a*, hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm *H* của tam giác đều *ABC*, biết mặt phẳng *(SCD)* tạo với mặt phẳng *(ABCD)* một góc 60°. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng *SA* và *BD*.

Lời giải

Ta có ΔABC đều cạnh *a* nên *H* là trực tâm của tam giác *ABC*

$\Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \perp BC$

$\Rightarrow CD \perp (SHC) \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ$



Ta có: $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow HB = HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60^\circ = a$

Dựng $\text{Ax}//\text{BD}, \text{HE} \perp \text{Ax}, HF \perp SE \Rightarrow HE = OA = \dfrac{a}{2}$

$d(SA;BD) = HF = \dfrac{HE.SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

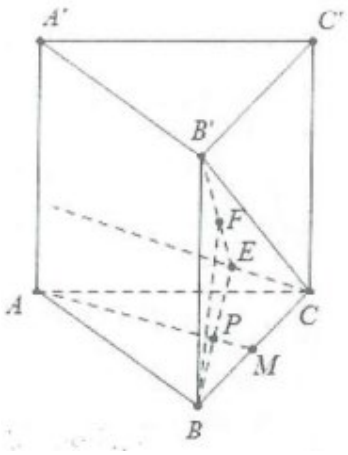
Ví dụ 15: Cho hình lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông có *AB = BC = a*, *A'B =* $a\sqrt{3}$. Gọi *M* là trung điểm cạnh *BC*. Tính theo *a* khoảng cách giữa hai đường thẳng *AM* và *B'C*.

Lời giải

Ta có: $\text{AA}' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Dựng $Cx//AM$ khi đó $d(AM;B'C) = d(AM;(B'Cx))$

$= d(M;(B'Cx)) = \dfrac{1}{2}d(B;(B'Cx))$



Dựng $\begin{cases} BE \perp Cx \\ BF \perp B'E \end{cases} \Rightarrow BF \perp (B'\text{Cx}) \Rightarrow \text{d(B;(B'Cx))} = \text{BF}$

Lại có $\text{BE} = 2\,\text{BP}$, trong đó $\text{BP} = \dfrac{\text{AB}.BM}{\sqrt{AB^2 + BM^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

Suy ra $\text{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow BF = \frac{BE.BB'}{\sqrt{BE^2 + BE^2}} = \frac{2a}{\sqrt{7}}$

Do đó $d(AM; B'C) = \frac{a}{\sqrt{7}}$

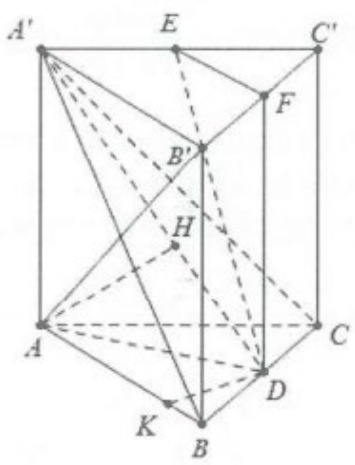
Ví dụ 16: Cho hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* có các mặt bên đều là hình vuông cạnh *a*. Gọi *D, E* lần lượt là trung điểm của *BC, A'C'*. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng.

a) *B'C'* và *A'B*

b) *DE* và *AB'*

Lời giải

a) Do lăng trụ *ABC.A'B'C'* có các mặt bên đều là hình vuông cạnh *a*. Nên *ABC.A'B'C'* là lăng trụ đứng với hai đáy là tam giác đều cạnh *a*.



Ta có: $B'C' // BC \Rightarrow B'C' // (A'BC)$

$\Rightarrow \text{d(B'C'; A'B)} = \text{d(B'C'; (A'BC))} = \text{d(B'; (A'BC))}$

Gọi $\text{I} = \text{A'B} \cap AB' \Rightarrow I$ là trung điểm của *AB'*

Khi đó $d(B'; (A'BC)) = d(A; (A'BC))$

Dựng $AH \perp A'D \Rightarrow d(A'; (\text{A'BC})) = AH = \frac{AA'.\text{AD}}{\sqrt{AA'^2 + AD^2}}$

Trong đó $AA' = a; AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

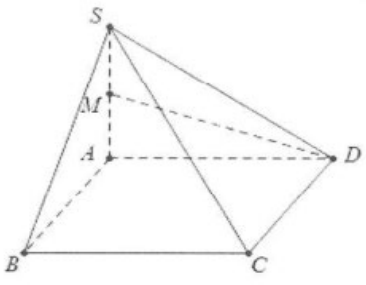
b) Gọi *F* là trung điểm của *B'C'* $\Rightarrow \begin{cases} \text{EF} // \text{A'B'} \\ FD // B'B \end{cases} \Rightarrow (\text{EFD}) // (\text{A'B'BA}) \Rightarrow \text{DE} // (\text{A'B'BA})$

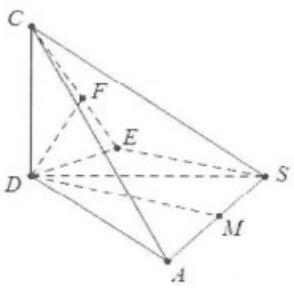
Khi đó $\text{d(DE; AB')} = \text{d(DE; (A'B'BA))} = \text{d(D; (A'B'BA))}$

Dựng $DK \perp AB (K \in AB) \Rightarrow d(\text{D; (A'B'BA)}) = DK = DB \sin \widehat{DBK} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 17: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng *(SBC)* tạo với đáy một góc 60°. Gọi *M* là trung điểm của *SA*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SC* và *DM*

Lời giải





Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow \widehat{(SBC);(ABC))} = \widehat{SDB} = 60^\circ$

Do đó $SA = AB\tan 30^\circ = a\sqrt{3}$

Để tính *d(SC;DM)* ta đổi về đỉnh của hình chóp *C.DAS* có $CD \perp (SAD)$

Dựng $Sx//\mathrm{DM} \Rightarrow d(\mathrm{DM};\mathrm{SC}) = d(\mathrm{DM};(\mathrm{CSx})) = \mathrm{d}(\mathrm{D};(\mathrm{CSx}))$

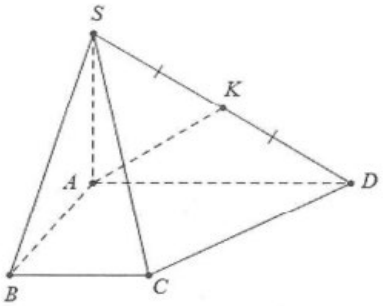
Dựng $DE \perp Sx, \mathrm{DF} \perp CE \Rightarrow d(D;(SCx)) = DF$

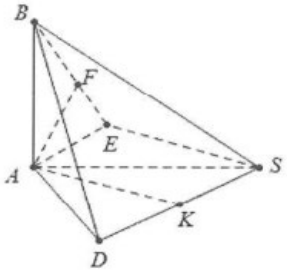
Do $SE//DM \Rightarrow DE = d(S;DM) = d(A;DM) = \dfrac{AD.AM}{\sqrt{AD^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Suy ra $DF = \dfrac{\mathrm{DE}.\mathrm{CD}}{\sqrt{CD^2 + DE^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = d(SC;DM)$

Ví dụ 18: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *B*, $SA \perp (ABCD)$. Biết *AD = 2a, AB = BC = a* và *SD* tạo với đáy một góc 30°. Gọi *K* là trung điểm của *SD*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SB* và *AK*.

Lời giải





Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SD;(ABCD))} = \widehat{SDA} = 30^\circ \Rightarrow SA = AD\tan 30^\circ = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Ta có: $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$ ta cắt khối chóp B.SAD có đường cao BA.

Dựng $Sx//AK \Rightarrow d(SB;AK) = d(AK;(SBx))$

Dựng $AE \perp Sx, \mathrm{AF} \perp BE \Rightarrow d(AK;(SBx)) = d(A;(SBx)) = \mathrm{AF}$

Do $AK = SK = \dfrac{1}{2}SD$ và $\widehat{ASK} = 90^\circ - \widehat{ADS} = 60^\circ \Rightarrow \triangle SAK$ đều cạnh $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Do đó $AE = d(S;AK) = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2} = a \Rightarrow \mathrm{AF} = \dfrac{AB.AE}{\sqrt{AB^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d(SB;AK)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho tứ diện *ABCD* có *AB, AC, AD* đôi một vuông góc với nhau và $AB = a, AC = b, AD = c$. Gọi *d* là khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (BCD). Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ **B.** $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ **C.** $d^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ **D.** $d = abc$

Câu 2: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Gọi d là khoảng cách từ *A* đến đường thẳng chứa cạnh *BC*. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $d = \frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$ **B.** $d = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2}$ **C.** $d = \sqrt{AB^2 + AC^2}$ **D.** $d = \frac{AB + AC}{AB.AC}$

Câu 3: Cho đường thẳng *MN* song song với mặt phẳng (α). Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ *M* và *N* đến (α). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d_1 = d_2$ **B.** $d_1 = \frac{1}{2} d_2$ **C.** $d_1 = 2d_2$ **D.** $d_1 = d_2 = 0$

Câu 4: Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song với nhau. Lấy hai điểm *M, N* lần lượt nằm trên (α) và (β) sao cho đường thẳng *MN* không vuông góc với (α). Khẳng định nào sau đây sai?

A. $d\left(M,(\beta)\right) = d\left(N,(\alpha)\right)$ **B.** $d\left(M,(\beta)\right) = d\left((\alpha),(\beta)\right)$

C. $d\left(N,(\alpha)\right) = d\left((\alpha),(\beta)\right)$ **D.** $d\left((\alpha),(\beta)\right) = MN$

Câu 5: Cho tứ diện *ABCD*. Gọi d là khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. *d=DG* với *G* là trọng tâm tam giác *ABC*.

B. *d=DH* với *H* là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC).

C. *d=DI* với *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*

D. *d=DN* trong đó *N* là trung điểm AM (với M là trung điểm đoạn BC)

Câu 6: Cho tứ diện *ABCD* có *AB, AC, AD* đôi một vuông góc với nhau và AB=2, AC=3, AD=4. Tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (BCD)

A. $d = \frac{12\sqrt{61}}{61}$ **B.** $d = \frac{144}{61}$ **C.** $d = \frac{\sqrt{61}}{12}$ **D.** $d = \sqrt{61}$

Câu 7: Khoảng cách lớn nhất giữa hai đỉnh của một hình lập phương cạnh a là bao nhiêu?

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $2a$ **D.** $d = a\sqrt{5}$

Câu 8: Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng *MN* cắt (α) tại điểm *I*. Biết rằng $3\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MN}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ *M* và *N* đến (α). Tính tỉ số $\frac{d_1}{d_2}$

A. $\frac{d_1}{d_2}=\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{d_1}{d_2}=\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{d_1}{d_2}=\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{d_1}{d_2}=2$

Câu 9: Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng MN cắt (α) tại điểm I. Biết rằng $4\overrightarrow{IN}=3\overrightarrow{IM}$. Gọi d_1,d_2 lần lượt là khoảng cách từ M và N đến (α). Tính tỉ số $\frac{d_1}{d_2}$

A. $\frac{d_1}{d_2}=\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{d_1}{d_2}=\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{d_1}{d_2}=\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{d_1}{d_2}=4$

Câu 10: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm CC' và d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $d=d\left(B',(A'BC)\right)$ **B.** $d=2.d\left(M,(A'BC)\right)$

C. $d=3.d\left(O,(A'BC)\right)$ **D.** $d=\frac{1}{3}d\left(O,(A'BC)\right)$

Câu 11: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB=a, AD=b, AA'$=c. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

A. $d=\frac{abc}{\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}}$ **B.** $d=\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

C. $d=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ **D.** $d=\frac{abc}{\sqrt{ab+bc+ac}}$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=h$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a và h?

A. $d=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2+3h^2}}$ **B.** $d=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}}$ **C.** $d=\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$ **D.** $d=\frac{ah\sqrt{5}}{\sqrt{a^2+h^2}}$

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến đường thẳng CC' là

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến đường thẳng $B'D'$ là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 15: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=a\sqrt{7}, AB=3a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. a **B.** $2a$ **C.** $\frac{a\sqrt{20}}{\sqrt{3}}$ **D.** $a\sqrt{10}$

Câu 16: Cho hình chóp *S.ABCD* có đường cao *SC*, đáy là hình chữ nhật. Gọi *H* là trung điểm của *SB*. Khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SBC) là đoạn thẳng

A. AS **B.** AB **C.** AC **D.** AH

Câu 17: Cho hình chóp *S.ABCD* có đường cao $SC = 2a$, đáy là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}, AD = a$. Gọi *K* là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. a **B.** $2a$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$

Câu 18: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau, đường thẳng Δ_3 bất kì cắt Δ_1 tại M và cắt Δ_2 tại *N*. Khẳng định nào dưới đây luôn đúng?

A. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) \le MN$ **B.** $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) > MN$

C. $\mathrm{d}(M, \Delta_2) = \mathrm{d}(\mathrm{N}, \Delta_1)$ **D.** $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) = MN$

Câu 19: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau, mặt phẳng (β) chứa Δ_2 và song song với Δ_1, mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với Δ_2. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) = \mathrm{d}(\Delta_1, (\beta))$ **B.** $\mathrm{d}(\Delta_1, (\beta)) = \mathrm{d}(\Delta_2, (\alpha))$

C. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) < \mathrm{d}((\alpha), (\beta))$ **D.** $\mathrm{d}((\alpha), (\beta)) \le MN, \forall M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$

Câu 20: Cho đường thẳng Δ_1 và mặt phẳng (α) song song với nhau. Mặt phẳng (β) chứa Δ_1, vuông góc với (α) và cắt (α) theo giao tuyến là Δ_2. Khi đó khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) = \mathrm{d}(\Delta_1, (\alpha))$ **B.** $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) < \mathrm{d}(\Delta_1, (\alpha))$

C. $\mathrm{d}(M, \Delta_2) > \mathrm{d}(M, (\alpha)), \forall M \in \Delta_1$ **D.** $\mathrm{d}(\Delta_1, (\alpha)) = \mathrm{MN}, \forall M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$

Câu 21: Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α). Gọi d là khoảng cách từ Δ đến (α). Mệnh đề nào sau đây sai?

A. d bằng khoảng cách từ điểm bất kì trên Δ đến (α).

B. d bằng khoảng cách từ điểm bất kì trên (α) đến Δ.

C. d bằng khoảng cách từ mặt phẳng (β) đến (α) với (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với (α).

D. d bằng khoảng cách giữa Δ và hình chiếu vuông góc của Δ lên (α).

Câu 22: Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2. Gọi d là khoảng cách giữa Δ_1, Δ_2. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. d bằng độ dài đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2.

B. d bằng khoảng cách giữa Δ_1 và (β) là mặt phẳng chứa Δ_2 và song song với Δ_1.

C. d bằng khoảng cách giữa Δ_2 và (α) là mặt phẳng chứa Δ_1 và song song với Δ_2.

D. d bằng độ dài đoạn thẳng MM' với điểm M bất kì thuộc Δ_1 và M' là hình chiếu vuông góc của M lên Δ_2.

Câu 23: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Gọi d là khoảng cách giữa (α) và (β). Mệnh đề nào sau đây sai?

A. d bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc (α) đến (β).

B. d bằng khoảng cách giữa một đường thẳng bất kì nằm trong (β) đến (α).

C. d bằng khoảng cách giữa một đường thẳng Δ bất kì nằm trong (α) đến hình chiếu vuông góc của Δ lên (β).

D. d bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng bất kì Δ_1 và Δ_2 lần lượt nằm trong (α) và (β).

Câu 24: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\mathrm{d}\left(A,\left(CDD'C'\right)\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{B},\left(CDD'C'\right)\right)$

B. $\mathrm{d}\left(\left(ABCD\right),\left(A'B'C'D'\right)\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{B},\left(A'B'C'D'\right)\right)$

C. $\mathrm{d}\left(\left(ABCD\right),\left(A'B'C'D'\right)\right)=\mathrm{d}\left(\left(ABB'A'\right),\left(CDC'D'\right)\right)$

D. $\mathrm{d}\left(\left(ABCD\right),\left(A'B'C'D'\right)\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{AC},\left(A'B'C'D'\right)\right)$

Câu 25: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\mathrm{d}\left(B,\left(SCD\right)\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{A},\left(SCD\right)\right)$ **B.** $\mathrm{d}\left(\mathrm{C},\left(SAB\right)\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{D},\left(SAB\right)\right)$

C. $\mathrm{d}\left(\mathrm{C},\left(SBD\right)\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{A},\left(SBD\right)\right)$ **D.** $\mathrm{d}\left(\mathrm{B},\left(SCD\right)\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{BC},\left(SAD\right)\right)$

Câu 26: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\mathrm{d}\left(A\mathrm{B}',\left(CDD'C'\right)\right)$

A. $\mathrm{d}\left(A\mathrm{B}',\left(CDD'C'\right)\right)=a$ **B.** $\mathrm{d}\left(A\mathrm{B}',\left(CDD'C'\right)\right)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

C. $\mathrm{d}\left(A\mathrm{B}',\left(CDD'C'\right)\right)=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ **D.** $\mathrm{d}\left(A\mathrm{B}',\left(CDD'C'\right)\right)=a\sqrt{2}$

Câu 27: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a,\mathrm{BC}=\mathrm{b},\mathrm{CC}'=\mathrm{c}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\mathrm{d}\left(\left(ABCD\right),\left(A'B'C'D'\right)\right)=c$ **B.** $\mathrm{d}\left(BB',\left(ACC'\mathrm{A}'\right)\right)=\dfrac{ab}{\sqrt{a+b^2}}$

C. $\mathrm{d}\left(A\mathrm{B}',\left(CDD'C'\right)\right)=b$ **D.** $\mathrm{d}\left(BB',\left(ACC'\mathrm{A}'\right)\right)=a\sqrt{2}$

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $\left(BA'C'\right)$ và $\left(ACD'\right)$.

A. $h=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ **B.** $h=\dfrac{a}{3}$ **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $h=a$

Câu 29: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh a, $\mathrm{SA} \perp (ABCD)$. Tính $\mathrm{d}(\mathrm{CD},(SAB))$.

A. $\mathrm{d}(\mathrm{CD},(SAB)) = a$ **B.** $\mathrm{d}(\mathrm{CD},(SAB)) = a\sqrt{2}$

C. $\mathrm{d}(\mathrm{CD},(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\mathrm{d}(\mathrm{CD},(SAB)) = 2a$

Câu 30: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh a, $\mathrm{SA} \perp (ABCD)$ và $\mathrm{SA} = \mathrm{a}$. Tính $\mathrm{d}(AB,(SCD))$.

A. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = a$ **B.** $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = a\sqrt{2}$

C. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = 2a$

Câu 31: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi, $\widehat{ABC} = 120°$ và $\mathrm{SA} \perp (ABCD)$. Gọi *M* là trung điểm của *SC*. Tính $\mathrm{d}(\mathrm{SA},(BMD))$.

A. $\mathrm{d}(\mathrm{SA},(BMD)) = a$ **B.** $\mathrm{d}(\mathrm{SA},(BMD)) = a\sqrt{3}$

C. $\mathrm{d}(\mathrm{SA},(BMD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\mathrm{d}(\mathrm{SA},(BMD)) = a\sqrt{2}$

Câu 32: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D*. Biết $SA = a\sqrt{3}, AD = a$ và *SA* vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ *B* đến (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $2a$

Câu 33: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ điểm *D* đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** a

Câu 34: Cho hình chóp *S.ABC*, gọi *M* là trung điểm của *AC* và *G* là trọng tâm tam giác *SAC*. Biết khoảng cách từ điểm *M* đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm *G* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{18}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 35: Cho hình chóp đều *S.ABCD* có *O* là tâm của đáy. Biết cạnh đáy và đường cao bằng nhau và bằng a. Tính theo a khoảng cách từ điểm *D* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Câu 36: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên *SAB* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{7}$

Câu 37: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, \mathrm{AD} = a\sqrt{3}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh *SC* và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Tính theo a khoảng cách từ điểm *G* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{39}}{39}$ **C.** $\frac{6a\sqrt{39}}{13}$ **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$

Câu 38: Cho hình chóp *S.ABC* có $SA = a\sqrt{3}$ và *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác *ABC* đều cạnh a. Vẽ *AI* vuông góc với *SB*. Tính theo a khoảng cách từ điểm *I* đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$

Câu 39: Cho hình chóp *S.ABCD* có hai mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và đáy *ABCD* là nửa lục giác đều. Biết $SA = a\sqrt{3}$ và $AB = BC = CD = a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $a\sqrt{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{8}$

Câu 40: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thoi cạnh $a\sqrt{2}$, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{BAD} = 120°$, góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng $30°$. Tính theo a khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 41: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi *E* là trung điểm của *AB*. Tính theo a khoảng cách từ điểm *E* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 42: Cho hình chóp *S.ABC* có *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Tam giác *ABC* vuông tại *A* có $AB = a, \text{AC} = a\sqrt{3}$. Góc giữa *SB* và mặt phẳng (SAC) bằng $45°$. Lấy điểm *M* trên cạnh *SA* sao cho $AM = \frac{a}{3}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm *M* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = a$ và $\text{AD} = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm *A'* lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của *AC* và *BD*. Tính khoảng cách từ *B'* đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 44: Cho hình chóp đều *S.ABCD* cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *ABD*. Tính theo a khoảng cách từ điểm *G* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a}{6}$

Câu 45: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30°$. Mặt bên *SAC* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *G* là trung điểm của *SA*. Tính theo a khoảng cách từ điểm *G* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ **C.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 46: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *B*, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của *A* trên cạnh *SB*. Tính khoảng cách từ điểm *H* đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a}{4}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** a

Câu 47: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh $4a$. Hình chiếu của *S* trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm *H* thuộc *AB* sao cho $HB = 3HA$. Góc giữa cạnh bên SC và đáy bằng $45°$. Tính theo a khoảng cách từ *O* đến mặt phẳng (SBC), với *O* là tâm của hình vuông *ABCD*.

A. $5a\sqrt{34}$ **B.** $\frac{5a\sqrt{34}}{17}$ **C.** $\frac{5a\sqrt{34}}{34}$ **D.** $\frac{5a\sqrt{17}}{2}$

Câu 48: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = 2a$. Mặt phẳng bên *SAB* vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng (SBD) và đáy bằng $60°$. Tính theo a khoảng cách từ điểm *C* đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{3a}{4}$ **D.** a

Câu 49: Cho hình chóp *S.ABC*, đáy *ABC* là tam giác vuông tại B với $AB = a, BC = \sqrt{3}, \text{SA} \perp (ABC)$ và *SC* tạo với (ABC) một góc $45°$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác *SAB* và *SAC*. Tính $d\left(G_1G_2, (SBC)\right)$.

A. $d\left(G_1G_2, (SBC)\right) = a\sqrt{5}$ **B.** $d\left(G_1G_2, (SBC)\right) = \frac{4a}{3\sqrt{5}}$

C. $d\left(G_1G_2, (SBC)\right) = \frac{2a}{3\sqrt{5}}$ **D.** $d\left(G_1G_2, (SBC)\right) = \frac{6a}{\sqrt{5}}$

Câu 50: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C$ có đáy *ABC* là tam giác vuông tại B, $BC = a\sqrt{3}$, $AB' = 2a$ và đường thẳng *AB'* tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính $\text{d}\left(\text{BC}, (AB'C')\right)$.

A. $\text{d}\left(\text{BC}, (AB'C')\right) = \frac{a}{2}$ **B.** $\text{d}\left(\text{BC}, (AB'C')\right) = a\sqrt{3}$

C. $\text{d}\left(\text{BC}, (AB'C')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\text{d}\left(\text{BC}, (AB'C')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 51: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'\text{D}'$ có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120°$, đường thẳng *A'B* tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính $\text{d}\left(\text{B'D'}, (A'BD)\right)$.

A. $\text{d}\left(\text{B'D'}, (A'BD)\right) = a\sqrt{15}$ **B.** $\text{d}\left(\text{B'D'}, (A'BD)\right) = \frac{a}{5}$

C. $\text{d}\left(\text{B'D'}, (A'BD)\right) = a\sqrt{3}$ **D.** $\text{d}\left(\text{B'D'}, (A'BD)\right) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Câu 52: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C$ có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh a và $AA' = A'B = A'\text{C} = a$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *BC* và *A'B*. Tính $\text{d}\left(A'\text{C}, (AMN)\right)$.

A. $\text{d}\left(\text{A'C}, (AMN)\right) = \frac{a\sqrt{22}}{11}$ **B.** $\text{d}\left(\text{A'C}, (AMN)\right) = \frac{a}{11}$

C. $\text{d}\left(\text{A'C}, (AMN)\right) = a\sqrt{22}$ **D.** $\text{d}\left(\text{A'C}, (AMN)\right) = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 53: Cho hình chóp *S.ABCD* có *ABCD* là hình vuông cạnh a và *SA* vuông góc với đáy. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *SA và BD*.

A. $d=\frac{a}{2}$ **B.** $d=a$ **C.** $d=a\sqrt{2}$ **D.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 54: Cho hình chóp *S.ABC* có *SA, AB, BC* đôi một vuông góc, tam giác *ABC* cân và có $AC=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *SA và BC.*

A. $d=a\sqrt{2}$ **B.** $d=a$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $d=2a$

Câu 55: Cho tứ diện đều *ABCD* có *I, J* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB, CD*. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB, CD* bằng độ dài của đoạn thẳng nào dưới đây?

A. AI **B.** IJ **C.** AB **D.** AJ

Câu 56: Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *BD* và *SC*.

A. $d=\frac{a}{4}$ **B.** $d=\frac{a}{2}$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $d=a\sqrt{2}$

Câu 57: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AA'=a, AC=2a$. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *AB'* và *CD'*.

A. $d=a\sqrt{3}$ **B.** $d=a\sqrt{5}$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 58: Cho hình chóp *S.ABCD* có $\text{SA}\perp(ABCD)$, đáy *ABCD* là hình chữ nhật với $AC=2a$ và $BC=a$. Tính $d(SD,BC)$.

A. $d(SD,BC)=\frac{2a}{3}$ **B.** $d(SD,BC)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $d(SD,BC)=\frac{3a}{4}$ **D.** $d(SD,BC)=a\sqrt{3}$

Câu 59: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi *M* là trung điểm của *AB*. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *SM* và *BC*.

A. $d=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $d=\frac{a}{2}$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 60: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=2a, AD=4a$. Gọi *M* là trung điểm của *AD*. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *A'B'* và *C'M*.

A. $d=3a$ **B.** $d=2a\sqrt{2}$ **C.** $d=a\sqrt{2}$ **D.** $d=2a$

Câu 61: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *SB* và *CD* nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $2a$

Câu 62: Cho tứ diện *OABC*, trong đó *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC=a$. Gọi *I* là trung điểm *BC*. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *AI* và *OC* nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. a **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 63: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O*. cạnh bằng a và $\widehat{BAC}=60°$. Biết $SC=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA* và *BD* nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 64: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *AB'* và *CC'*.

A. $d=\frac{2a}{3}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $d=\frac{3a}{4}$ **D.** $d=a\sqrt{3}$

Câu 65: Cho hình chóp *S.ABCD* có $SA\perp(ABCD)$, đáy *ABCD* là hình chữ nhật với $AC=a\sqrt{5}$ và $BC=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *SD* và *BC*.

A. $d=\frac{2a}{3}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $d=\frac{3a}{4}$ **D.** $d=a\sqrt{3}$

Câu 66: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *AD'* và *BD*.

A. $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $d=a\sqrt{3}$ **D.** $d=\frac{2a}{3}$

Câu 67: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh a, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *SB* và *AD*.

A. $d=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $d=a$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Kẻ $AH \perp BC, AK \perp DH$ ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp DA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (HAD) \Rightarrow BC \perp AK$

Mà $AK \perp DH \Rightarrow AK \perp (BCD)$. Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$

Do đó $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. **Chọn A.**

Câu 2: Ta có $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow d^2 = \frac{AB^2.AC^2}{AB^2 + AC^2} \Leftrightarrow d = \frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$. **Chọn A.**

Câu 3: Do *MN // (α)* nên $d_1 = d_2$. **Chọn A.**

Câu 4: Khẳng định sai là $d((\alpha),(\beta)) = MN$. **Chọn D.**

Câu 5: Khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng *(ABC)* là khoảng cách từ *D* đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC.* Mà tam giác *ABC* đều nên trọng tâm cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp. Do đó A, B, C đúng. **Chọn D.**

Câu 6: $\frac{1}{d(A,(BCD))^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{61}{144} \Rightarrow d(A,(BCD)) = \frac{12\sqrt{61}}{61}$

Chọn A.

Câu 7: Khoảng cách lớn nhất giữa 2 đỉnh chính là đường chéo là $a\sqrt{3}$. **Chọn A.**

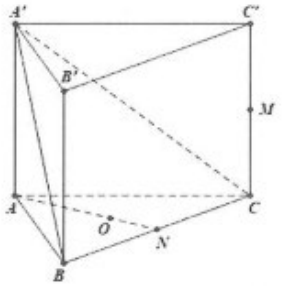
Câu 8: Ta có $\overrightarrow{3MI} = 2\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI} = 2(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IN} = 0$. Ta có $\frac{d_1}{d_2} = \frac{IM}{IN} = 2$. **Chọn D.**

Câu 9: Ta có $\frac{d_1}{d_2} = \frac{IM}{IN} = \frac{4}{3}$. **Chọn A.**

Câu 10: Gọi *N* là trung điểm của *BC*

$\frac{d(A,(A'BC))}{d(O,(A'BC))} = \frac{NA}{NO} = 3 \Rightarrow d(A,(A'BC)) = 3d(O,(A'BC))$

Do đó đáp án D sai. **Chọn D.**



Câu 11: Ta có *d(A,(DA'C') = d(D',(DA'C'))*

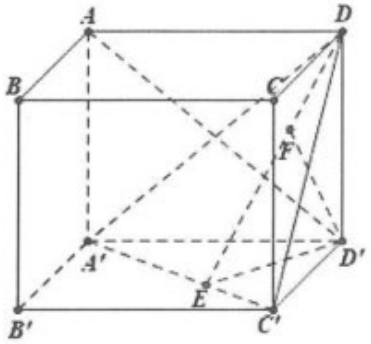
Kẻ $D'E \perp A'C', D'F' \perp DE$

Ta có $\begin{cases} A'C' \perp DD' \\ A'C' \perp D'E \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (DD'E) \Rightarrow A'C' \perp D'F$

Mà $D'F \perp DE \Rightarrow D'F \perp (DA'C')$

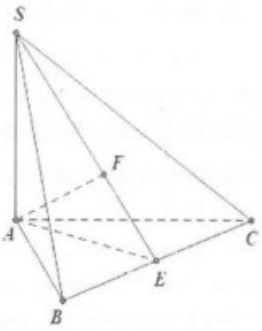
Ta có $\frac{1}{D'F^2} = \frac{1}{DD'^2} + \frac{1}{D'E^2} = \frac{1}{DD'^2} + \frac{1}{D'A'^2} + \frac{1}{D'C'^2}$

$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} \Rightarrow D'F = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$



Chọn A.

Câu 12: Kẻ $AE \perp BC, AF \perp SE$



Ta có $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp AF$

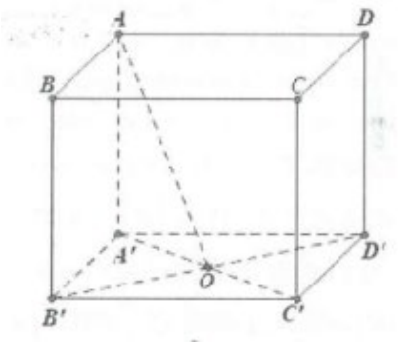
Mà $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SBC)$. Ta có $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{3a^2 + 4h^2}{3a^2h^2} \Rightarrow AF = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$$

Chọn B.

Câu 13: Ta có $d(A, CC') = AC = a\sqrt{2}$. **Chọn B**.

Câu 14: Gọi *O* là trung điểm của A*'C'* và *B'D'*



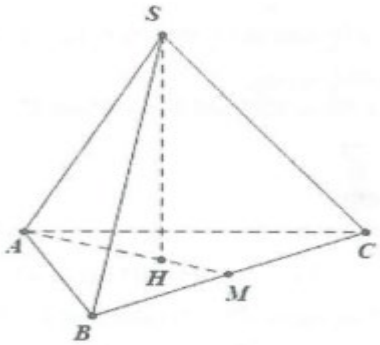
Ta có $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (AA'C') \Rightarrow B'D' \perp AO$

$$d(A, B'D') = AO = \sqrt{AA'^2 + A'O^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Chọn A.

Câu 15: Gọi *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*

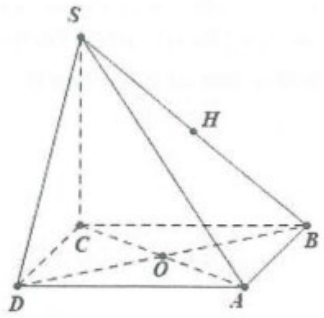


Ta có $AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$$d(S, (ABC)) = SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{7}\right)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = 2a$$

Chọn B.

Câu 16: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AB$



Chọn B.

Câu 17: Ta có $d(K, (ABCD)) = \dfrac{1}{2}d(S, (ABCD)) = \dfrac{1}{2}SC = a$. **Chọn A.**

Câu 18: Có vô số các đường thẳng cắt Δ_1 tại *M* và cắt Δ_2 tại *N*

Ta có $d(\Delta_1, \Delta_2) \le MN$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ *MN* là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2. **Chọn A.**

Câu 19: Theo giả thiết bài toán ta có: $d(\Delta_1,(\beta)) = d(\Delta_2,(\alpha)) = d(\Delta_1,\Delta_2) = d((\alpha),(\beta))$

Mặt khác : $d((\alpha),(\beta)) \le MN, \forall M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$

Do vậy khẳng định C là sai. **Chọn C.**

Câu 20: Do $\Delta_1 // (\alpha)$, mặt phẳng (β) chứa Δ_1 và cắt (α) theo giao tuyến là $\Delta_2 \Rightarrow \Delta_1 // \Delta_2$

Mặt phẳng $(\Delta_1;\Delta_2) \equiv (\beta) \perp (\alpha)$ nên $d(\Delta_1,\Delta_2) = d(\Delta_1,(\alpha))$. **Chọn A.**

Câu 21: Do Δ song song với mặt phẳng (α) nên khoảng cách từ Δ đến (α) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến (α). Bằng khoảng cách từ mặt phẳng (β) đến (α) với (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với (α) và cũng bằng khoảng cách từ mặt phẳng (β) đến (α) với (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với (α).

Các khẳng định đúng là **A, C** và **D**. Khẳng định **B** sai. **Chọn B.**

Câu 22: Các khẳng định đúng là **A, B** và **C**.

Khẳng định sai là **D**. **Chọn D.**

Câu 23: d bằng khoảng cách giữa một đường thẳng Δ bất kì nằm trong (α) đến hình chiếu vuông góc của Δ lên (β) suy ra khẳng định **C** đúng và **D** sai. **Chọn D.**

Câu 24: Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (CDD'C')$: nên

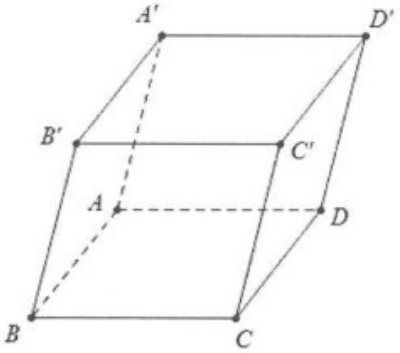
$d(A,(CDD'C')) = d(B,(CDD'C')) \rightarrow$ **A** đúng

Do $(ABCD) // (A'B'C'D')$ nên

$d((ABCD),(A'B'C'D')) = d(B,(A'B'C'D'))$ và

$d((ABCD),(A'B'C'D')) = d(AC,(A'B'C'D')) \rightarrow$ **B,D** đều đúng.

Khẳng định sai là **C**. **Chọn C.**



Câu 25: Ta có: $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$

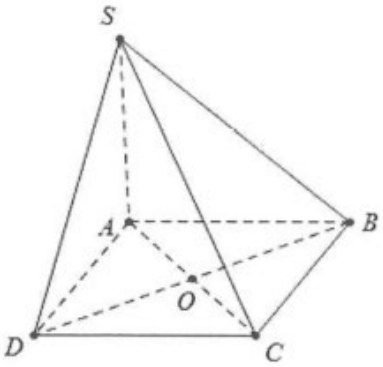
$\Rightarrow d(A,(SCD)) = d(B,(SCD)) \Rightarrow$ **A** đúng

Tương tự $CD // (SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = d(D,(SAB))$

Do $AC \cap BD$ tại O và $OA = OC$

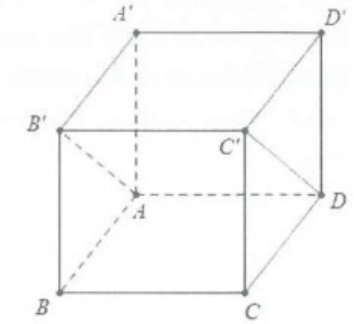
$\Rightarrow d(A;(SBD)) = d(C;(SBD))$ suy ra **B** và **C** đúng.

Khẳng định sai là **D**. **Chọn D.**



Câu 26: Dễ thấy $AB' // C'D \Rightarrow AB' // (CDD'C')$ nên

$d(AB',(CDD'C')) = d(A;(CDD'C')) = d$



Mặt khác *ABCD.A'B'C'D'* là hình lập phương nên

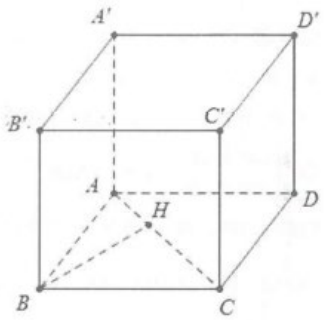
$AD \perp (CDD'C') \Rightarrow d = AD = a$.**Chọn A.**

Câu 27: Ta có $d((ABCD),(A'B'C'D')) = AA' = CC' = c$

$d(BB',(ACC'A')) = d(B;(ACC'A')$

Dựng $BH \perp AC$, mặt khác $BH \perp AA' \Rightarrow BH \perp (ACC'A')$

Khi đó $d(BB',(ACC'A')) = BH = \dfrac{AB.BC}{\sqrt{BA^2+BC^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

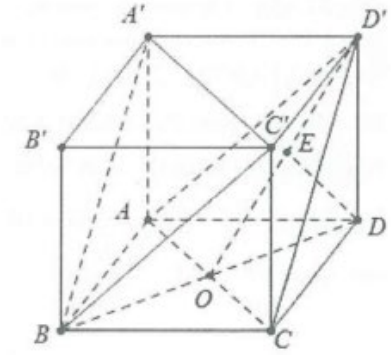


Dễ thấy $AB'//C'D \Rightarrow AB'//(CDD'C')$ nên

$d(AB',(CDD'C')) = d(A;(CDD'C')) = AD = BC = b$

Khẳng định sai là **D**. **Chọn D**.

Câu 28: Dễ thấy $\begin{cases} A'B'//CD' \\ BC'//AD' \end{cases} \Rightarrow (BA'C')//(ACD')$



Do đó $d((BA'C');(ACD')) = d(B;(ACD'))$

Mặt khác *BD* cắt *AC* tại trung điểm *O* của *BD* suy ra

$d((BA'C');(ACD')) = d(B;(ACD'))$

Dựng $DE \perp D'O$, mặt khác $\begin{cases} AC \perp DO \\ AC \perp DD' \end{cases} \Rightarrow AC \perp DE$

Do đó $DE \perp (D'AC)$

$\Rightarrow d = d(D;(D'AC) = DE = \dfrac{DO.DD'}{\sqrt{DO^2+DD'^2}}$

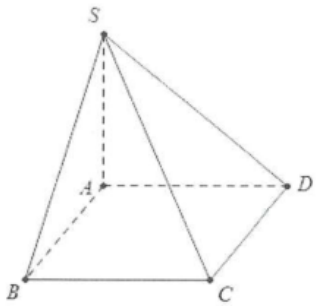
Trong đó $DO = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; DD' = a \Rightarrow d = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **Chọn A.**

Câu 29: Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$

Mặt khác $AD \perp AB \Rightarrow SA \perp (SAB)$

Do $CD//(SAB) \Rightarrow d(CD,(SAB)) = d(D;(SAB)) = DA = a$

Chọn A.



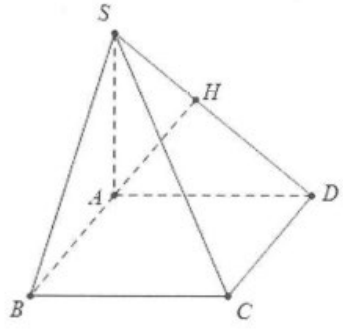
Câu 30: Do $AB//CD \Rightarrow AB//(SCD)$

Khi đó $d(AB,(SCD)) = d(A;(SCD))$

Dựng $AH \perp SD$, ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH) \Rightarrow CD \perp AH$

Lại có $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$



Suy ra $d(A:(SCD)) = AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn C.

Câu 31: Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$ thì $OA = OC$ suy ra OM là đường trung bình trong $\Delta SAC \Rightarrow OM//SA$

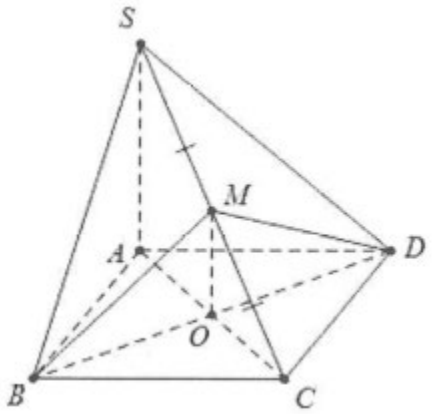
$\Rightarrow OM \perp (ABCD) \Rightarrow OM \perp OA$

Do $ABCD$ là hình thoi nên $OA \perp BD \Rightarrow OA \perp (MBD)$

Khi đó $d(SA;(MBD)) = d(A;(MBD)) = AO$

Mặt khác: $\widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABD$ đều cạnh a

Nên $AO = AB\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 32: Do $AB//CD \Rightarrow AB//(SCD)$

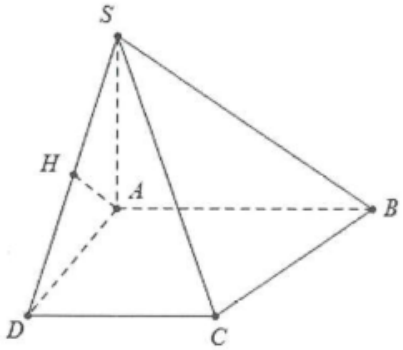
Suy ra $d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = d$

Ta có: $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Khi đó $d = d(A;(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn A.



Câu 33: Do $AD//BC \Rightarrow AD//(A'BC)$

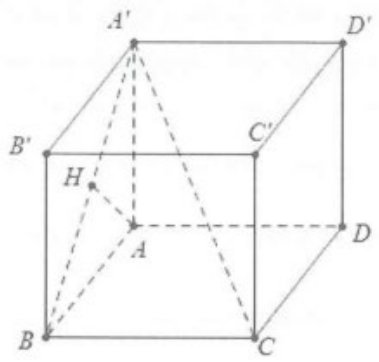
Suy ra $d(B;(A'BC)) = d(A;(A'BC))$

Dựng $AH \perp A'B$, lại có $BC \perp (A'AB) \Rightarrow BC \perp AH$

Do đó $AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A;(A'BC)) = AH$

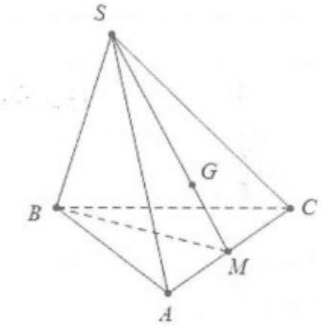
Lại có: $AH = \dfrac{AA'.AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d(D;(A'BC)) = d(A;(A'BC)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C**



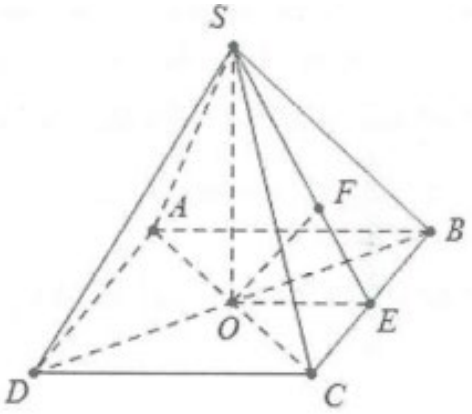
Câu 34: Ta có: G là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow SG = 3MG$

Mặt khác $MG \cap (SBC) = S \Rightarrow \dfrac{d_M}{d_G} = \dfrac{MS}{GS} = \dfrac{3}{2}$



Suy ra . $d_G = \frac{2}{3}d_M = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{9}$ **Chọn B.**

Câu 35: Do *S.ABCD* là hình chóp đều có *O* là tâm của đáy nên đáy là hình vuông tâm *O* và $SO \perp (ABCD)$



Dựng $OE \perp BC$, mặt khác $SO \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOE)$

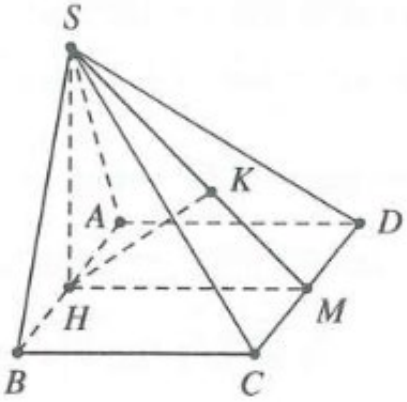
Dựng $OF \perp SE \Rightarrow OF \perp (SBC) \Rightarrow d(O;(SBC)) = OF$

Ta có: $OE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; SO = AB = a$

$\Rightarrow OF = \frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Mặt khác $DB = 2OB \Rightarrow d(D;(SBC)) = 2d(O;(SBC)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **Chọn C.**

Câu 36: Gọi *H, M* lần lượt là trung điểm của *AB, CD*



Ta có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD), HM \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHM)$

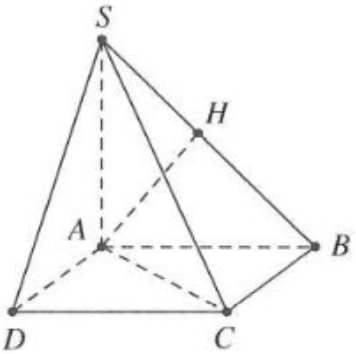
Kẻ $HK \perp SM (K \in SM)$ mà $HK \perp CD \Rightarrow HK \perp (SCD)$

Tam giác *SHM* vuông tại *H*, có $HK = \frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Mặt khác $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$

$\Rightarrow d[d;(SCD)] = d[H;(SCD)] = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **Chọn B.**

Câu 37: Ta có $\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA} = 60^\circ$

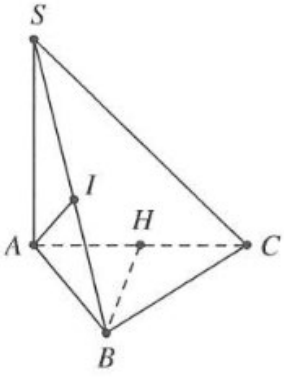


Tam giác *SAC* vuông tại *A*, có $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = 2a\sqrt{3}$

Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$ mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Tam giác *SAB* vuông tại *A*, có $AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$

Vì *G* là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow d[G;(SBC)] = \frac{1}{3}d[A;(SBC)]$



Vậy khoảng cách cần tìm là $d = \frac{2a\sqrt{39}}{39}$. **Chọn B.**

Câu 38: Gọi H là trung điểm AC $\Rightarrow BH \perp AC$

Mà $SA \perp BH \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d\left[B;(SAC)\right] = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

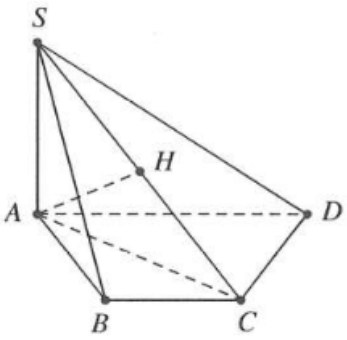
Tam giác SAB vuông tại A, có $AI = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \dfrac{3a}{2}$

Suy ra $\dfrac{IS}{SB} = \dfrac{3}{4} \to d\left[I;(SAC)\right] = \dfrac{3}{4} d\left[B;(SBC)\right] = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$

Chọn C.

Câu 39: ABCD là nửa lục giác đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ; AC \perp CD$



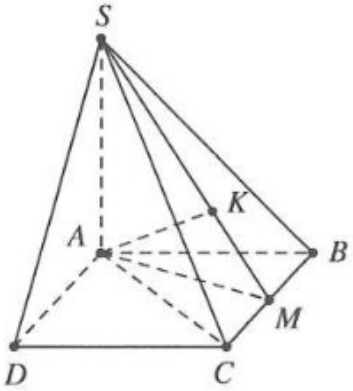
Kẻ $AH \perp SC (H \in SC)$ mà $CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Tam giác ABC có $AB = BC = a; \widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông tại A, có $AH = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy. $d\left[B;(SCD)\right] = \dfrac{1}{2} d\left[A;(SCD)\right] = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **Chọn C.**

Câu 40: Ta có $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều



Gọi *M* là trung điểm *BC* $\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Suy ra $\left((SBC);(ABCD)\right) = \left(SM;AM\right) = \widehat{SMA} = 30^\circ$

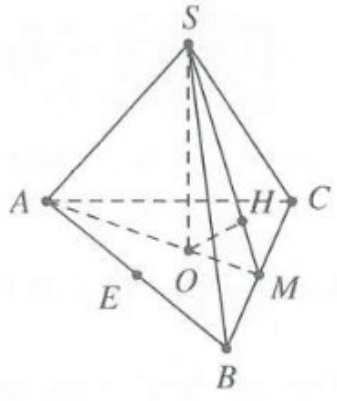
Kẻ $AK \perp SM (K \in SM)$ mà $BC \perp AK \Rightarrow AK \perp (SBC)$

Tam giác *AKM* vuông tại *K*, có $AK = AM.\sin 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Lại có $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC)$

$\Rightarrow d\left[D;(SBC)\right] = d\left[A;(SBC)\right] = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **Chọn D.**

Câu 41: Gọi *O* là trọng tâm ΔABC, *M* là trung điểm *BC*



Suy ra $SO \perp (ABC), OM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SMO)$

Kẻ $OH \perp SM (H \in SM)$ mà $BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (SBC)$

Ta có $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} AB = \dfrac{3a}{2} \to OA = \dfrac{2}{3} AM = a; OM = \dfrac{1}{3} AM = \dfrac{a}{2}$

Tam giác *SAO* vuông tại *O*, có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a$

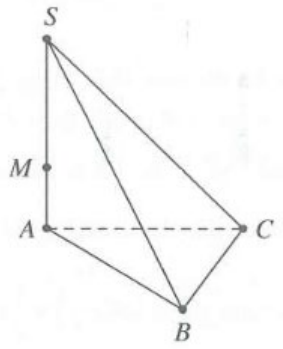
Tam giác *SMO* vuông tại *O*, có $OH = \dfrac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Lại có $\frac{AM}{OM}=3\Rightarrow d\left[A;(SBC)\right]=3d\left[O;(SBC)\right]=3OH=\frac{3a\sqrt{5}}{5}$

Mặt khác E là trung điểm $AB\rightarrow d\left[E;(SBC)\right]=\frac{1}{2}d\left[A;(SBC)\right]=\frac{3a\sqrt{5}}{10}$

Chọn C.

Câu 42: $\begin{cases}SA\perp AB\\AC\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAC)\Rightarrow\left(\widehat{SB;(SAC)}\right)=\widehat{BSA}=45^{\circ}$



Suy ra tam giác SAB vuông cân tại A $\rightarrow SA=AB=a$

Xét hình chóp S.ABC, ta được

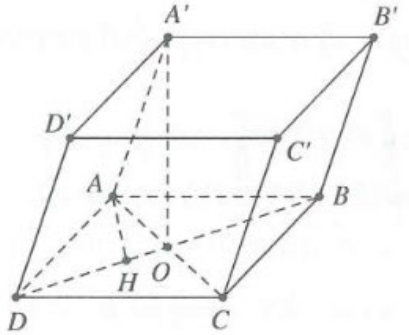
$$\frac{1}{d^2\left[A;(SBC)\right]}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}\Rightarrow d\left[A;(SBC)\right]=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Lại có $\frac{SA}{MS}=a:\frac{2a}{3}=\frac{3}{2}\Rightarrow d\left[M;(SBC)\right]=\frac{2}{3}d\left[A;(SBC)\right]=\frac{2a\sqrt{21}}{21}$

Chọn A.

Câu 43: Kẻ $AH\perp BD(H\in BD)$ mà $A'O\perp BD$

$\Rightarrow AH\perp(A'BD)\Rightarrow d\left[A;(A'BD)\right]=AH$

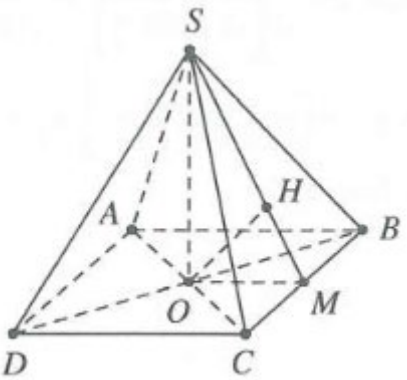


Tam giác ABD vuông tại A, có $AH=\frac{AB.AD}{BD}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d\left[A;(A'BD)\right]=d\left[B';(A'BD)\right]=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 44: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm BC

Suy ra $SO\perp(ABCD),OM\perp BC\Rightarrow BC\perp(SMO)$



Khi đó $\widehat{(SBC);(ABCD)}=\widehat{(SM;OM)}=\widehat{SMO}=60^{\circ}$

Kẻ $OH\perp SM(H\in SM)\rightarrow OH\perp(SBC)$

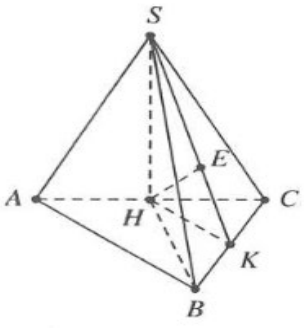
Tam giác OHM vuông tại H, có $\sin\widehat{HMO}=\frac{OH}{OM}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC $\rightarrow\frac{GC}{OC}=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow d\left[G;(SBC)\right]=\frac{4}{3}d\left[O;(SBC)\right]=\frac{4}{3}OH=\frac{4}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 45: Gọi H, K lần lượt là trung điểm AC, BC

Ta có $SH\perp AC\Rightarrow SH\perp(ABC)$ và $HK//AB\Rightarrow HK\perp BC$



Kẻ $HE \perp SK (E \in SK) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp HE \\ SK \perp HE \end{cases} \Rightarrow HE \perp (SBC)$

Tam giác *ABC* vuông tại *B*, có $AC = \dfrac{AB}{\cos\widehat{BAC}} = 2a \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$

Tam giác *SHK* vuông tại *H*, có $HE = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$

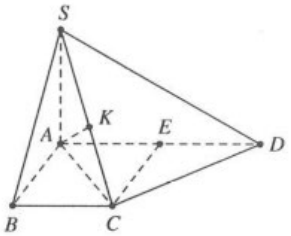
Lại có *G* là trung điểm *SA*, *H* là trung điểm *AC*

$HK = d[G;(SBC)] = \dfrac{1}{2}d[A;(SBC)] = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **Chọn C.**

Câu 46: Gọi *E* là trung điểm *AD* $\Rightarrow$ *ABCE* là hình vuông

$\Rightarrow AC \perp CD$ mà $SA \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Kẻ $AK \perp SC (K \in SC) \Rightarrow AK \perp (SCD)$



Tam giác *SAC* vuông tại *A*, có $AK = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a$

Do đó $d[B;(SCD)] = \dfrac{1}{2}d[A;(SCD)] = \dfrac{a}{2}$

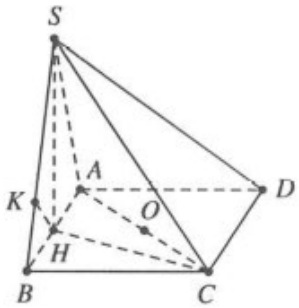
Mà *H* là hình chiếu của *A* trên $SB \Rightarrow \dfrac{HS}{SB} = \dfrac{2}{3}$

Suy ra $d[H;(SCD)] = \dfrac{2}{3}d[B;(SCD)] = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{3}$. **Chọn C.**

Câu 47: Kẻ $HK \perp SB (K \in SB) \Rightarrow HK \perp (SBC)$

Vì $HB = 3HA \Rightarrow HA = a, HB = 3a \Rightarrow HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = 5a$

Ta có $\widehat{SC;(ABCD)} = \widehat{(SC;HC)} = \widehat{SCH} = 45^\circ \Rightarrow SH = HC = 5a$



Tam giác SBH vuông tại B, có

$\widehat{SC;(ABCD)} = \widehat{(SC;HC)} = \widehat{SCH} = 45^\circ \Rightarrow SH = HC = 5a$

Khi đó $\dfrac{d[H;(SBC)]}{d[A;(SBC)]} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow d[A;(SBC)] = \dfrac{10a\sqrt{34}}{17}$

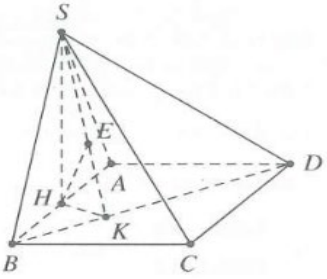
Vậy $d[O;(SBC)] = \dfrac{1}{2}d[A;(SBC)] = \dfrac{1}{2}.\dfrac{10a\sqrt{34}}{17} = \dfrac{5a\sqrt{34}}{17}$

Chọn B.

Câu 48: Kẻ $SH \perp AB (H \in AB) \rightarrow SH \perp (ABCD)$

Kẻ $HK \perp BD (K \in BD) \Rightarrow BD \perp (SBD)$

Do đó $\widehat{(SBD);(ABCD)} = \widehat{(SK;HK)} = \widehat{SKH} = 60^\circ$



Kẻ $HE \perp SK (E \in SK) \Rightarrow HE \perp (SBD)$

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S

Suy ra $SH = \dfrac{SA.SB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{3}{4}$

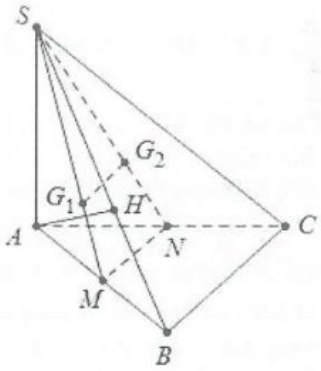
Tam giác SHE vuông tại E, có $\sin \widehat{HSK} = \dfrac{HE}{SH} \Rightarrow HE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Khi đó $\dfrac{d[H;(SBD)]}{d[A;(SBD)]} = \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow d[A;(SBD)] = \dfrac{4}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $d[C;(SBD)] = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 49: Do $SA \perp (ABC)$ và SC tạo với (ABC) một góc 45°

nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow SA = AC \tan 45^\circ = 2a$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC thì

$G_1G_2 // MN // BC \Rightarrow d(G_1G_2;(SBC)) = d(G_1;(SBC)) = d$

Mặt khác $G_1S = \dfrac{2}{3}MS \Rightarrow d_{G_1} = \dfrac{2}{3}d_M$ mà $MB = \dfrac{1}{2}AB$

$\Rightarrow d_M = \dfrac{1}{2}d(A;(SBC))$

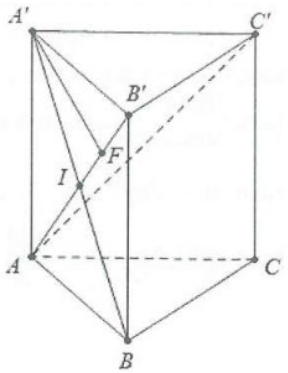
Suy ra $d_{G_1} = \dfrac{1}{3}d(A;(SBC))$

Dựng $AH \perp SB$, do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Mặt khác $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Suy ra $d = \dfrac{2a}{3\sqrt{5}}$. **Chọn C.**

Câu 50: Ta có: A'B cắt AB' tại trung điểm I của mỗi đường



Do đó $d(BC,(AB'C')) = d(B;(AB'C')) = d(A';(AB'C')) = d$

Dựng $A'F \perp AB'$ ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'B' \\ B'C' \perp AA' \end{cases}$

$\Rightarrow B'C' \perp (A'B'A)$. Lại có $\begin{cases} A'F \perp AB' \\ A'F \perp BC \end{cases} \Rightarrow A'F \perp (AB'C')$

Khi đó: $d = A'F = \dfrac{AB'.AA'}{\sqrt{AB'^2 + AA'^2}}$

Trong đó AB' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° nên $\widehat{A'BA} = 60^\circ \Rightarrow AA' = A'B\sin 60^\circ = 2a\sin 60^\circ = a\sqrt{3}$

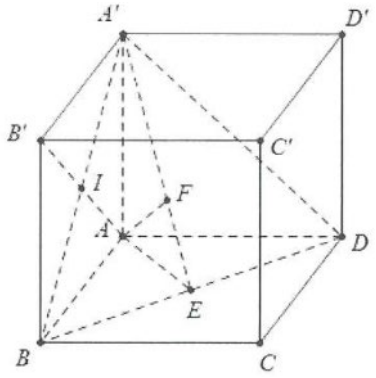
Mặt khác $AB = AB'\cos 60^\circ = a$

Suy ra $d = A'F = \dfrac{AB'.AA'}{\sqrt{AB'^2 + AA'^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 51: Dựng $AE \perp BD; AF \perp A'E$

Do $\widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $\begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AE) \Rightarrow BD \perp AF$



Mặt khác $AF \perp A'E \Rightarrow AF \perp (A'BD)$

Do *A'B* tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°

$\Rightarrow \widehat{A'BA} = 60^\circ \Rightarrow A'A = AB\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

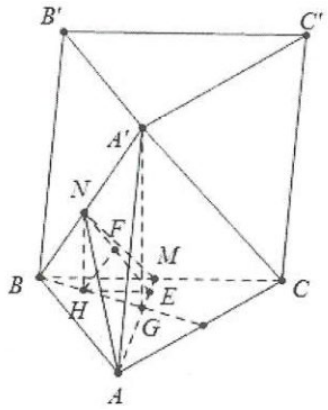
Khi đó $d(A;(A'BD) = AF = \dfrac{AA'.AE}{\sqrt{AA'^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Do $B'D // BD \Rightarrow d(B'D';(A'BD)) = d(B';(A'BD)) = d$

Mà $A'B \cap AB' = I$ là trung điểm của *AB'* $\Rightarrow d = d(A;(A'BD)) = AF = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **Chọn D.**

Câu 52: Dễ thấy *A'.ABC* là hình chóp tam giác đều nên hình chiếu của *A'* xuống mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác *ABC*. *MN* là đường trung bình trong tam giác *BA'C* nên *MN//A'C*.

Khi đó $d(A'C,(AMN)) = d(A';(AMN)) = d(B;(AMN) = d$



Gọi *H* là hình chiếu của *N* trên mặt phẳng *(ABC)*

$\Rightarrow NH // A'G \Rightarrow H$ là trung điểm của *BG*.

Dựng $HE \perp AM; HF \perp NE \Rightarrow d(H;(AMN)) = HF$

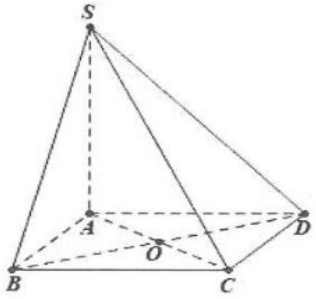
Mặt khác $HE = \dfrac{BM}{2} = \dfrac{BC}{4} = \dfrac{a}{4}, NH = \dfrac{A'G}{2}$

Trong đó $BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A'G = \sqrt{A'B^2 - BG^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Do đó $NH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow HF = \dfrac{NH.NE}{\sqrt{NH^2 + NE^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{22}}$

Suy đó $d = d(B;(AMN)) = 2d(H;(AMN)) = \dfrac{2a}{\sqrt{22}} = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **Chọn A.**

Câu 53: Gọi O là giao điểm của AC và BD

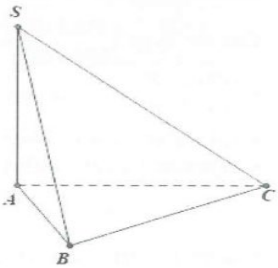


Ta có $\begin{cases} OA \perp SA \\ OA \perp BD \end{cases} \Rightarrow OA$ là đoạn vuông góc chung của SA và BD

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $d(SA, BD) = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 54: Ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của SA và BC

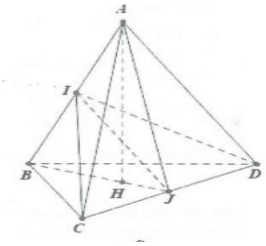


Ta có $AB \perp BC$ và ΔABC cân nên ΔABC vuông cân tại B.

Do đó $AB = BC = a$

Ta có $d(SA,BC) = AB = a$. **Chọn B.**

Câu 55: Ta có $JA = JB \Rightarrow IJ \perp AB$



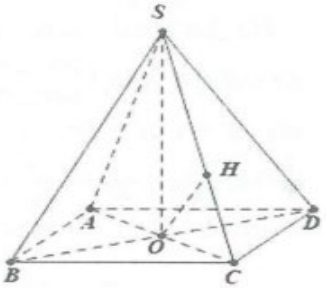
Ta có $IC = ID \Rightarrow IJ \perp CD$

Do đó IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD

Do đó $d(AB,CD)=IJ$. **Chọn B.**

Câu 56: Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

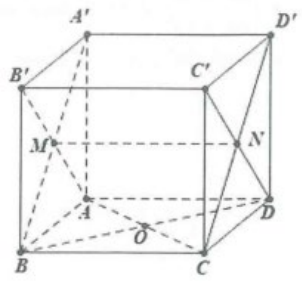
Kẻ $OH \perp SC$



- $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$
- $\begin{cases} OH \perp SC \\ OH \perp BD \end{cases} \Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của BD và SC
- $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{4}{a^3} \Rightarrow OH = \frac{a}{2} \Rightarrow d(BD, SC) = \frac{a}{2}$

Chọn B.

Câu 57: Gọi M là giao điểm của AB' và $A'B$, N là giao điểm của CD' và $C'D$

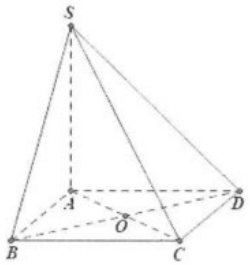


■ $\begin{cases} MN \perp AB' \\ MN \perp CD' \end{cases} \Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của *AB'* và *CD'*

■ $MN = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$

■ $d(AB', CD') = MN = a\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 58: Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

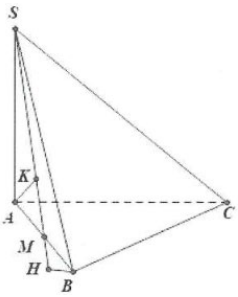


■ $\begin{cases} CD \perp SD \\ CD \perp BC \end{cases} \Rightarrow CD$ là đoạn vuông góc chung của SD và BC

■ $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = a\sqrt{3}$

■ $d(SD, BC) = CD = a\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 59: Kẻ $BH \perp SM, AK \perp SM \Rightarrow BH = AK$



■ $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BH$

■ $\begin{cases} BH \perp BC \\ BH \perp SM \end{cases} \Rightarrow BH$ là đoạn vuông góc của *BC* và *SM*

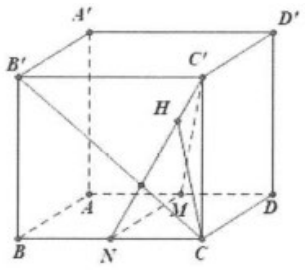
■ $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

■ $d(BC, SM) = BH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 60: Gọi *N* là trung điểm của *BC*

Ta có $A'B' // MN \Rightarrow d(A'B', C'M) = d(A'B', (C'MN))$

$= d(B', (B'MN)) = 2d(C, (B'MN))$



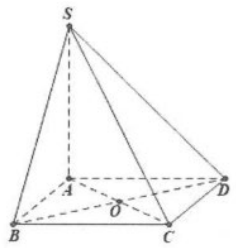
Kẻ $CH \perp C'N \Rightarrow \begin{cases} MN \perp BC \\ MN \perp CC' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (BCC') \Rightarrow MN \perp HC$

Mà $HC \perp C'N \Rightarrow HC \perp (C'MN)$

Lại có $\frac{1}{HC^2} = \frac{1}{NC^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow HC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow d(C, (B'MN)) = a\sqrt{2} \Rightarrow d(A'B', C'M) = 2a\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 61: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$



■ $\begin{cases} BC \perp SB \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow$ BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD

■ $d(SB, CD) = BC = a$. **Chọn A.**

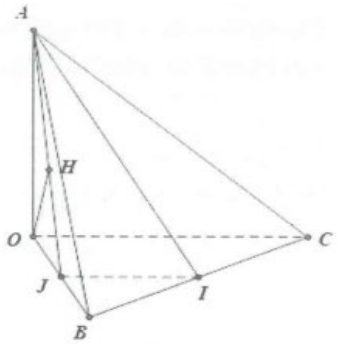
Câu 62: Gọi J là trung điểm của OB $\Rightarrow$ IJ//OC, kẻ $OH \perp AJ$

■ $IJ // OC \Rightarrow d(AI, OC) = d(OC, (AIJ)) = d(O, (AIJ))$

■ $\begin{cases} IJ \perp OB \\ IJ \perp OA \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (OAB) \Rightarrow IJ \perp OH$

Mà $OH \perp AJ \Rightarrow OH \perp (AIJ)$

■ $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{5}}$

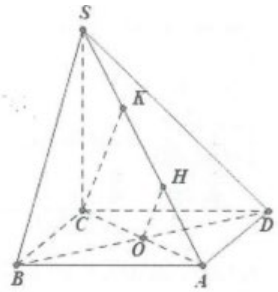


Do đó $d(AI, OC) = \frac{a}{\sqrt{5}}$. **Chọn B.**

Câu 63: Kẻ $OH \perp SA, CK \perp SA$

■ $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$

■ $\begin{cases} OH \perp SA \\ OH \perp BD \end{cases} \Rightarrow$ OH là đoạn vuông góc chung của *SA* và *BD*



Ta có $AC = a\sqrt{3}$

$\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{CA^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow CK = a \Rightarrow OH = \frac{a}{2}$

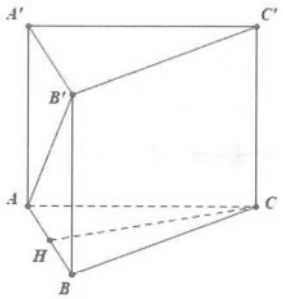
$\Rightarrow d(SA, BD) = OH = \frac{a}{2}$. **Chọn A.**

Câu 64: Ta có $AA' // CC' \Rightarrow d(AB', CC')$

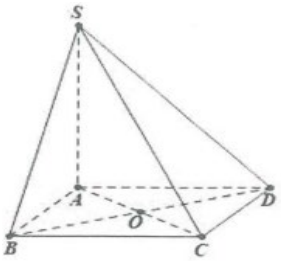
$= d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A'))$

Kẻ $CH \perp AB$ ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABB'A')$

Ta có $d(AB', CC') = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A.**



Câu 65: Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$



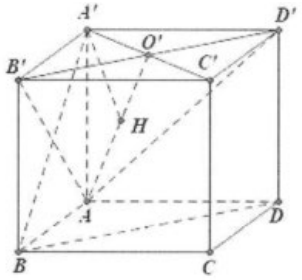
■ $\begin{cases} CD \perp SD \\ CD \perp BC \end{cases} \Rightarrow CD$ là đoạn vuông góc chung của SD và BC

■ $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = a\sqrt{3}$

■ $d(SD, BC) = CD = a\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 66: Ta có $BD // B'D' \Rightarrow d(AD', BD) = d(BD, (AB'D'))$

$= d(B, (AB'D')) = d(A', (AB'D'))$



Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$, kẻ $A'H \perp O'A$

Ta có $\begin{cases} B'D' \perp A'O' \\ B'D' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (AA'O) \Rightarrow B'D' \perp O'A$

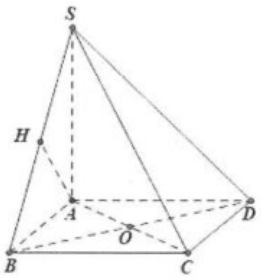
Mà $A'H \perp AO' \Rightarrow A'H \perp (AB'D')$

Ta có $A'O' = \frac{1}{2}A'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ta có $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'O'^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{3}{a^2}$

$\Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d(AD', BD) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 67: Kẻ $AH \perp SB$

$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$



$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp AD \end{cases} \Rightarrow AH$ là đoạn vuông góc chung của SB và AD

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $d(SB, AD) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**