

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN 10 (CHUYÊN)

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Khóa thi ngày: 15/3/2024

Câu 1. (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2y-x} = \sqrt{5x-y} - 1 \\ 2\sqrt{2y-x} - y^2 - 3 = 2x^2 + y - 3xy \end{cases}$$

Câu 2. (3,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 5$ và $(x-y) \cdot f(x+y) - (x+y) \cdot f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$ với mọi số thực x, y .

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Cho x, y là hai số nguyên dương phân biệt bất kỳ, chứng minh rằng tích số $(16x+y) \cdot (x+16y)$ không phải là lũy thừa nguyên dương của 2.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $x^3 - y^3 = 2xy + 8$.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ với $R < R'$, cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} = 90^\circ$. Đường thẳng OO' cắt đường tròn $(O; R)$ tại C, D và cắt đường tròn $(O'; R')$ tại E, F sao cho các điểm C, O, E, D, O', F nằm trên đường thẳng theo thứ tự đó. Tia BE cắt đường tròn $(O; R)$ tại K (khác B) và cắt đoạn thẳng AC tại M . Tia BD cắt đường tròn $(O'; R')$ tại L (khác B) và cắt đoạn thẳng AF tại N .

a) Chứng minh ba điểm A, C, L thẳng hàng.

b) Tính $\frac{KE \cdot LN}{KM \cdot LD}$ theo R, R' .

Câu 5. (3,0 điểm)

Có tất cả bao nhiêu cách lấy cùng lúc ba thẻ từ hộp đựng 20 thẻ được ghi số từ 1 đến 20 sao cho các số ghi trên ba thẻ đó là độ dài ba cạnh của một tam giác?

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{x}{y} + 1 \right) \left(\frac{y}{z} + 1 \right) \left(\frac{z}{x} + 1 \right) - \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

- Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh.....

HDC CHÍNH THỨC

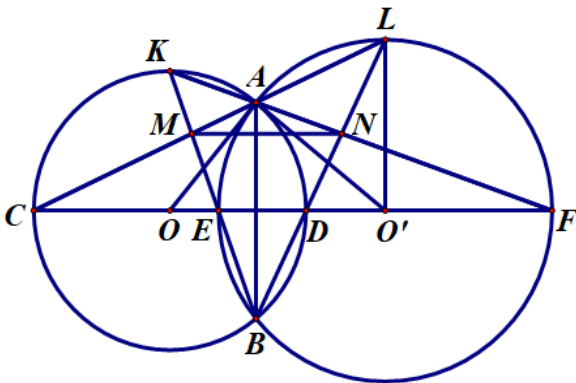
HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN: **TOÁN LỚP 10** (CHUYÊN)

(Bản hướng dẫn này gồm 06 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1. (3,0 điểm)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2y-x} = \sqrt{5x-y} - 1 & (1) \\ 2\sqrt{2y-x} - y^2 - 3 = 2x^2 + y - 3xy & (2) \end{cases}$	3.0
	Điều kiện: $\frac{x}{2} \leq y \leq 5x$.	0.25
	$(1) \Leftrightarrow \sqrt{5x-y} = \sqrt{2y-x} + 1 \Leftrightarrow 5x-y = 1 + 2\sqrt{2y-x} + 2y-x$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{2y-x} = 6x-3y-1 \quad (3)$	0.5
	Thay (3) vào (2) ta được: $6x-3y-1-y^2-3 = 2x^2+y-3xy$ $\Leftrightarrow 2x^2-3(y+2)x+y^2+4y+4=0$ $\Leftrightarrow 2x^2-3(y+2)x+(y+2)^2=0$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ x=\frac{y+2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ y=2x-2 \end{cases}$	0.5
	• Với $y=x-2$, thay vào (3): $2\sqrt{x-4} = 3x+5$ (vô nghiệm).	0.5
	• Với $y=2x-2$, thay vào (3): $2\sqrt{3x-4} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{41}{12} \Rightarrow y = \frac{29}{6}$ (thỏa mãn điều kiện).	0.5
	Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $(x; y) = \left(\frac{41}{12}; \frac{29}{6}\right)$.	0.25

Câu 2. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 5$ và $(x - y) \cdot f(x + y) - (x + y) \cdot f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2)$ với mọi số thực x, y .		3.0
Xét phương trình: $(x - y) \cdot f(x + y) - (x + y) \cdot f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1) Thay $x = y = 1$ vào (1) ta được: $f(0) = 0$.		0.5
Đặt $a = x + y$ và $b = x - y$, phương trình (1) viết lại: $b \cdot f(a) - a \cdot f(b) = (a^2 - b^2)ab, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (2)$		0.5
Với mọi $a \neq 0, b \neq 0$, (2) $\Leftrightarrow \frac{f(a)}{a} - a^2 = \frac{f(b)}{b} - b^2$ (3)		0.5
Thay $a = x, b = 1$ vào (3) ta được: $\frac{f(x)}{x} - x^2 = \frac{f(1)}{1} - 1^2 = 4$		0.5
Do đó $f(x) = x^3 + 4x, \forall x \neq 0$. Do $f(0) = 0$ nên $f(x) = x^3 + 4x, \forall x \in \mathbb{R}$.		0.5
Thử lại, hàm $f(x) = x^3 + 4x$ thỏa mãn điều kiện đề cho. Vậy hàm cần tìm là $f(x) = x^3 + 4x$.		0.5

Câu 3. (3,0 điểm)	
a) Cho x, y là hai số nguyên dương phân biệt bất kỳ, chứng minh rằng tích số $(16x + y) \cdot (x + 16y)$ không phải là lũy thừa nguyên dương của 2.	1.0
Giả sử tồn tại hai số nguyên dương phân biệt x, y để $(16x + y) \cdot (x + 16y)$ là lũy thừa nguyên dương của 2. Khi đó tồn tại $a = 16x + y = 2^m$, $b = x + 16y = 2^n$. Từ đó: $\begin{cases} 16x + y = a \\ 16x + 256y = 16b \end{cases} \Rightarrow 16b - a = 255y > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 16$ $\begin{cases} 256x + 16y = 16a \\ x + 16y = b \end{cases} \Rightarrow 16a - b = 255x > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{1}{16}$	0.25
Do đó: $\frac{1}{16} < \frac{a}{b} = 2^{m-n} < 16 \Leftrightarrow -4 < m - n < 4 \Leftrightarrow m - n < 4$ (1)	0.25
Ta có: $4^n(4^{m-n} - 1) = 4^m - 4^n = a^2 - b^2 = 15 \cdot 17(x^2 - y^2) : 17$ $\Rightarrow (4^{m-n} - 1) : 17 \Rightarrow 4^{m-n} \equiv 1 \pmod{17}$ $4^4 = 256 \equiv 1 \pmod{17}$ là lũy thừa nguyên dương bé nhất của 4 đồng dư 1(mod 17) nên $(m - n) : 4$ (2)	0.25
Vì $x \neq y \Rightarrow m \neq n \Rightarrow m - n \neq 0$ nên từ (2) suy ra $m - n > 4$, mâu thuẫn với (1). Vậy tích số $(16x + y) \cdot (x + 16y)$ không phải là lũy thừa nguyên dương của 2, với hai số nguyên dương phân biệt x, y bất kỳ.	0.25
b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $x^3 - y^3 = 2xy + 8$.	
Nếu $x = 0$ thì $y = -2$, nếu $y = 0$ thì $x = 2$.	0.5
Ta xét trường hợp cả x và y đều khác 0. Trường hợp 1: $xy < 0$ - Nếu $x > 0$ và $y < 0$ thì $x^3 = y^3 + 2xy + 8 < 8$. Với $x = 1$ (thỏa $x^3 < 8$) thì $y^3 + 2y + 7 = 0$, PT này không có nghiệm nguyên. - Nếu $x < 0$ và $y > 0$ thì $y^3 - x^3 = -2xy - 8 < -2xy$ (1) Mặt khác $y^3 - x^3 = y^3 + (-x)^3 \geq y^2 + (-x)^2 \geq -2xy$, mâu thuẫn với (1).	0.5
Trường hợp 2: $xy > 0$ Khi đó $2xy + 8 > 0$, suy ra $x^3 - y^3 > 0 \Rightarrow x - y > 0$.	0.25
+ Nếu $x - y = 1$ thì được phương trình: $(y + 1)^3 - y^3 = 2(y + 1)y + 8 \Leftrightarrow y^2 + y - 7 = 0$, PT này không có nghiệm nguyên. + Nếu $x - y \geq 2$ thì $2xy + 8 = x^3 - y^3 = (x - y)[(x - y)^2 + 3xy] \geq 2(2^2 + 3xy) \Rightarrow xy \leq 0$ (mâu thuẫn với $xy > 0$).	0.5
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên là: $(x; y) = (0; -2)$ và $(x; y) = (2; 0)$.	0.25

Câu 4. (5,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R < R'$, cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} = 90^\circ$. Đường thẳng OO' cắt đường tròn $(O;R)$ tại C, D và cắt đường tròn $(O';R')$ tại E, F sao cho các điểm C, O, E, D, O', F nằm trên đường thẳng theo thứ tự đó. Tia BE cắt đường tròn $(O;R)$ tại K (khác B) và cắt đoạn thẳng AC tại M. Tia BD cắt đường tròn $(O';R')$ tại L (khác B) và cắt đoạn thẳng AF tại N.		
a) Chứng minh ba điểm A, C, L thẳng hàng.		2.0
 Hình vẽ đúng cho 0,5 điểm		0.5
$\widehat{CAL} = \widehat{CAO} + \widehat{OAO'} + \widehat{O'AL}$		0.5
Ta có: $\widehat{CAO} = \widehat{ACD}$, $\widehat{O'AL} = \widehat{O'LA} = \frac{180^\circ - \widehat{AO'L}}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{AO'L} = 90^\circ - \widehat{ABL}$		0.5
Do đó: $\widehat{CAL} = \widehat{ACD} + 90^\circ + 90^\circ - \widehat{ABL} = \widehat{ACD} + 180^\circ - \widehat{ABD} = 180^\circ$ (do tứ giác $ACBD$ nội tiếp nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$). Suy ra A, C, L thẳng hàng.		0.5
b) Tính $\frac{KE \cdot LN}{KM \cdot LD}$ theo R, R' .		3.0
Chứng minh tương tự câu a) ta được: K, A, F thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác CME và đường thẳng KAF , ta được		0.5
$\frac{KE}{KM} \cdot \frac{AM}{AC} \cdot \frac{FC}{FE} = 1 \quad (1)$		
Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác FND và đường thẳng LAC , ta được		0.5
$\frac{LD}{LN} \cdot \frac{AN}{AF} \cdot \frac{CF}{CD} = 1 \quad (2)$		
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KE}{KM} \cdot \frac{LN}{LD} = \frac{AC}{AM} \cdot \frac{FE}{FC} \cdot \frac{AN}{AF} \cdot \frac{CF}{CD} = \frac{AC}{AM} \cdot \frac{AN}{AF} \cdot \frac{FE}{CD}$		0.5
Ta có: $\widehat{AOO'} = 2\widehat{ACF}$, $\widehat{AO'O} = 2\widehat{AFC}$, mà $\widehat{AOO'} + \widehat{AO'O} = 180^\circ - \widehat{OAO'} = 90^\circ$ nên $\widehat{ACF} + \widehat{AFC} = 45^\circ$. Ta có: $\widehat{MAN} = \widehat{CAF} = 180^\circ - (\widehat{ACF} + \widehat{AFC}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. $\widehat{MBN} = \widehat{EBA} + \widehat{ABD} = \widehat{EFA} + \widehat{ACD} = 45^\circ$ (do các tứ giác $AFBE$ và $ACBD$ nội tiếp).		0.5
Do đó $AMBN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ABN} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \widehat{ACF}$.		0.5
$\Rightarrow MN \parallel CF \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{AF}{AN}$		0.5
Thay (4) vào (3) ta được $\frac{KE}{KM} \cdot \frac{LN}{LD} = \frac{FE}{CD} = \frac{2R'}{2R} = \frac{R'}{R}$.		

Câu 5. (3,0 điểm) Có tất cả bao nhiêu cách lấy cùng lúc ba thẻ từ hộp đựng 20 thẻ được ghi số từ 1 đến 20 sao cho các số ghi trên ba thẻ đó là độ dài ba cạnh của một tam giác?		3.0
Gọi x, y, z là số ghi trên 3 thẻ được lấy ra thỏa yêu cầu bài toán. Đặt $A_z = \{(x; y; z) \mid x, y, z \in \{1; 2; \dots; 20\}, x < y < z, x + y > z\}$. Ta thấy: $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ và khi $x = 1$ thì $A_z = 0$. Số cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = A_4 + A_5 + A_6 + \dots + A_{20}$.		0.5
Trường hợp 1: z là số chẵn, $z = 2m, (2 \leq m \leq 10)$. + Xét $2 \leq x \leq m$, khi đó $z = 2m \geq 2x \Rightarrow z - x \geq x$. Từ $x + y > z \Rightarrow y > z - x \geq x$. Suy ra $z - x + 1 \leq y \leq z - 1$. Số cách chọn y là: $(z - 1) - (z - x + 1) + 1 = x - 1$. + Xét $m < x \leq 2m - 2$, khi đó $x + y > 2x > 2m = z$ (thỏa điều kiện). Suy ra $x + 1 \leq y \leq z - 1 = 2m - 1$. Số cách chọn y là: $(2m - 1) - (x + 1) + 1 = 2m - x - 1$.		0.5
Vậy với $z = 2m, (2 \leq m \leq 10)$ thì $ A_z = \sum_{x=2}^m (x-1) + \sum_{x=m+1}^{2m-2} (2m-x-1) = \frac{(m-1)m}{2} + (2m-1)(m-2) - \frac{3m-1}{2}(m-2) = (m-1)^2.$		0.5
Trường hợp 2: z là số lẻ, $z = 2m+1, (2 \leq m \leq 9)$. + Xét $2 \leq x \leq m$, khi đó $z = 2m+1 > 2x \Rightarrow z - x > x$. Từ $x + y > z \Rightarrow y > z - x > x$. Suy ra $z - x + 1 \leq y \leq z - 1$. Số cách chọn y là: $(z - 1) - (z - x + 1) + 1 = x - 1$. + Xét $m < x \leq 2m - 1$, khi đó $x + y \geq x + (x + 1) = 2x + 1 > 2m + 1 = z$ (thỏa điều kiện). Suy ra $x + 1 \leq y \leq z - 1 = 2m$. Số cách chọn y là: $2m - (x + 1) + 1 = 2m - x$.		0.5
Vậy với $z = 2m+1, (2 \leq m \leq 9)$ thì $ A_z = \sum_{x=2}^m (x-1) + \sum_{x=m+1}^{2m-1} (2m-x) = \frac{(m-1)m}{2} + 2m(m-1) - \frac{3m}{2}(m-1) = m(m-1).$		0.5
Vậy tổng tất cả các cách lấy ba thẻ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $S = (A_4 + A_6 + \dots + A_{20}) + (A_5 + A_7 + \dots + A_{19})$ $= \sum_{m=2}^{10} (m-1)^2 + \sum_{m=2}^9 m(m-1) = 285 + 240 = 525.$		0.5

Câu 6. (3,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(\frac{x}{y} + 1\right)\left(\frac{y}{z} + 1\right)\left(\frac{z}{x} + 1\right) - \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$		3.0
Đặt $\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} = a, \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} = b, \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} = c$, suy ra: $abc = 1$ và $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \frac{y}{z} = \frac{b}{c}, \frac{z}{x} = \frac{c}{a}$.		0.5
Khi đó $P = \left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{b}{c} + 1\right)\left(\frac{c}{a} + 1\right) - (a+b+c) = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - (a+b+c)$ $= (a+b)(b+c)(c+a) - (a+b+c) \quad (\text{do } abc=1).$		0.5
Ta có: $(a+b)(b+c)(c+a) = ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ca(a+b+c) - abc$ $= (a+b+c)(ab+bc+ca) - 1$ Do đó $P = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 1 - (a+b+c)$ $= (a+b+c)(ab+bc+ca-1) - 1$		0.5
Áp dụng BĐT AM-GM cho ba số ab, bc, ca ta được: $ab+bc+ca \geq 3.\sqrt[3]{ab.bc.ca} = 3 \quad (1)$		0.5
Áp dụng BĐT AM-GM cho ba số $a; b; c$ ta được: $a+b+c \geq 3.\sqrt[3]{abc} = 3 \quad (2)$ Đẳng thức ở (1) và (2) xảy ra khi $a=b=c=1$.		0.5
Do đó $P \geq 3(3-1) - 1 = 5$ và $P = 5$ khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt được khi $x=y=z$.		0.5

*** Lưu ý:**

Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.