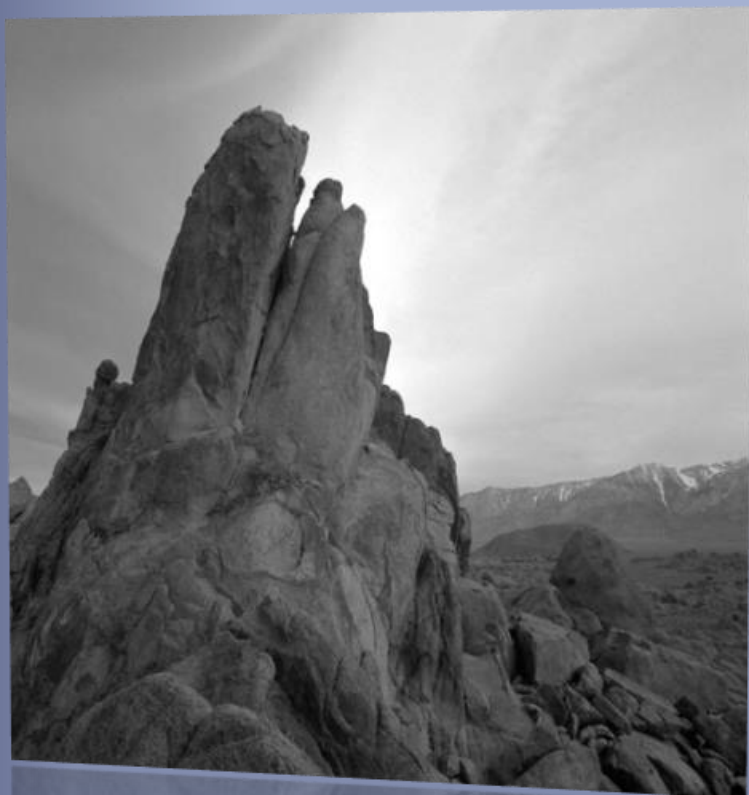




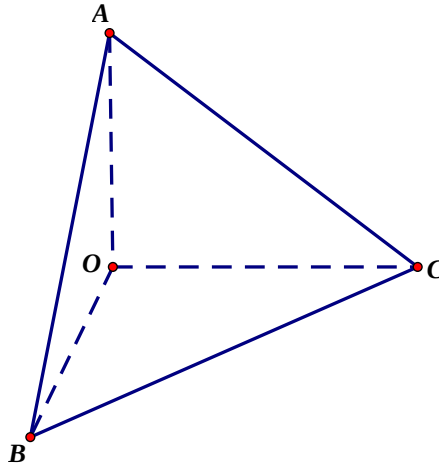
TỬ ĐIỆN VƯƠNG VÀ ỨNG DỤNG

Sưu tầm và Biên soạn: Phạm Minh Tuấn

PHẦN 1 – ĐỊNH NGHĨA TỨ DIỆN VUÔNG VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

A – ĐỊNH NGHĨA TỨ DIỆN VUÔNG:

Tứ diện OABC được gọi là tứ diện vuông khi tứ diện đó có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.



Chú ý:

Tứ diện trực tâm là tứ diện có các cạnh đối vuông góc nhau. Như thế ta thấy rằng tứ diện vuông cũng là một loại tứ diện trực tâm đặc biệt. Chính vì vậy tứ diện trực tâm có đầy đủ tính chất của tứ diện trực tâm.

B. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TỨ DIỆN VUÔNG:

Cho tứ diện vuông SABC đỉnh S. Khi đó ta có:

1. Kẻ đường cao SH. Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC.

$$2. \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}.$$

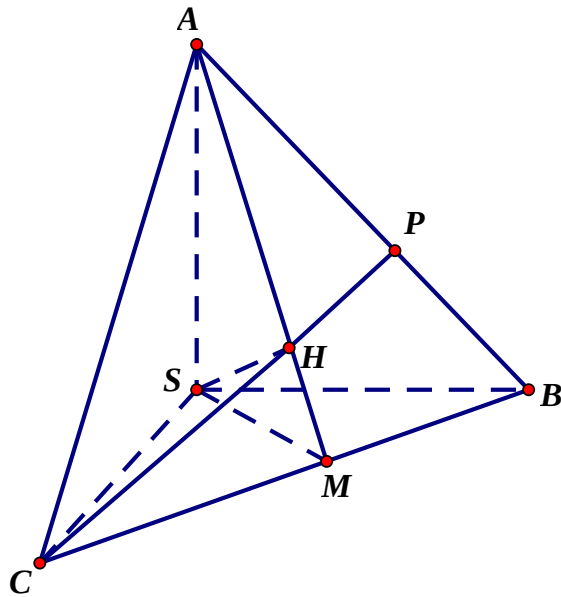
3. $S^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2$ (Định lý Pytago trong không gian).

4. Tam giác ABC là tam giác nhọn.

Và rất nhiều các tính chất khác mà các bạn sẽ được tìm hiểu trong phần bài tập về tứ diện vuông mà chúng tôi trình bày ở phần sau.

Chứng minh các tính chất nêu trên:

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Tính chất 1:

AH kéo dài cắt BC tại M, CH kéo dài cắt AB tại P.

$$\text{Do } \begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC \quad (1)$$

$$\text{Vì } SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được CP vuông góc AB.

Từ đó ta có đpcm.

Tính chất 2:

Được chứng minh trong phần III.

Tính chất 3:

Trong (SBC) ta hạ SM vuông góc với BC.

Ta thấy rằng A, H, M thẳng hàng.

Tam giác SAM vuông tại S ta có:

SM

Suy ra:

Hay ta có:

$$S_{SBC}^2 = S_{HBC} \cdot S_{ABC} \quad (1)$$

Lý luận hoàn toàn tương tự ta có:

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$S_{SAB}^2 = S_{HAB} \cdot S_{ABC} \quad (2)$$

$$S_{SAC}^2 = S_{HAC} \cdot S_{ABC} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta có đpcm.

Tính chất 4:

Thật vậy trong tam giác ABC theo định lý hàm cosin ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) - (b^2 + c^2)}{2AB \cdot AC} = \frac{a^2}{AB \cdot AC} > 0$$

Suy ra A nhọn.

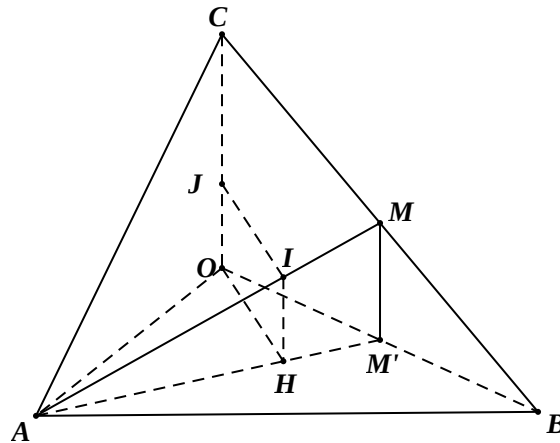
Tương tự cho B và C.

PHẦN II – CÁC BÀI TẬP VỀ TỨ DIỆN VUÔNG

Bài 1:

Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc nhau từng đôi một với

$OA = a, OB = b$. Gọi M là trung điểm BC. Vẽ và tính đoạn vuông góc chung của OC và AM.



+ Vẽ $MM' \parallel OC$ ($M' \in OB$), ta có: $OC \parallel (AM'M)$

+ Vẽ $OH \perp AM' \Rightarrow OH \perp (AMM')$

+ Vẽ $HI \parallel OC$ ($I \in AM$), vẽ $IJ \parallel OH$ ($J \in OC$) ta có IJ là đoạn vuông góc chung của OC và AM.

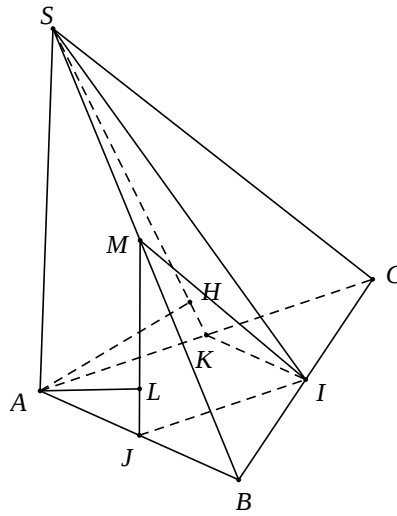
Tam giác OAM' vuông có OH là đường cao nên: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM'^2}$

$$\text{Suy ra } IJ = OH = \frac{ab}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$$

Bài 2:

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=c$, $AC=b$. Trên đường vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho $SA=h$ ($h>0$). M là điểm di động trên SB. Gọi J, I lần lượt là các trung điểm của BC và AB.

- Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SI và AB.
- Tính tỉ số thể tích các hình MBIJ và BSCA khi độ dài đoạn vuông góc chung của AC và MJ đạt giá trị lớn nhất



- Gọi K là trung điểm AC, ta có $AB \parallel (SKI)$. Do đó, khoảng cách giữa SI và AB bằng khoảng cách từ A đến (SKI)

Vẽ $AH \perp SK$. Do $AB \perp (SKA)$ nên $AB \perp AH$

Mà $KI \parallel AB$ nên $AH \perp KI$. Từ đó ta được $AH \perp (SKI)$

Vậy khoảng cách giữa SI và AB là đoạn AH

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAK, đường cao AH

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{4}{b^2} + \frac{1}{h^2}$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $AH = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}$

$$\text{b) Ta có } \frac{V_{MBIJ}}{V_{BSCA}} = \frac{BM}{BS} \cdot \frac{BI}{BC} \cdot \frac{BJ}{BA}$$

Vẽ $AL \perp MJ$. Vì $IJ \parallel AC$, mà $AC \perp (SAB)$ nên $IJ \perp (SAB)$

Ta có AL nằm trong mp(ASB) nên $IJ \perp AL$

Vậy $AL \perp (MIJ)$

Mà $AC \parallel (MIJ)$ nên AL là khoảng cách giữa AC và MJ

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Mặt khác tam giác ALJ vuông tại L nên $AL \leq AJ$

Khi đó $AB \perp MJ$

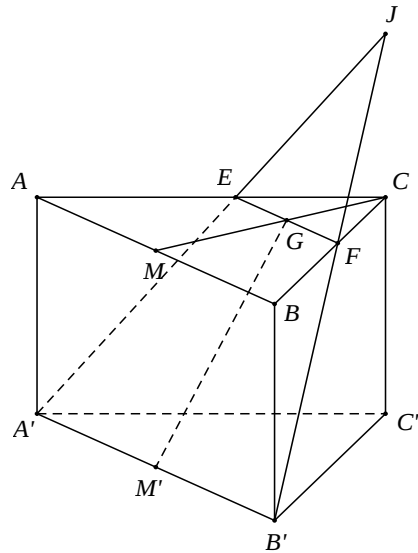
Suy ra M là trung điểm AB

$$\text{Vậy } \frac{V_{BMJ}}{V_{BSCA}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Bài 3:

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng d

- Tính thể tích tứ diện $A'BB'C'$
- Tính diện tích thiết diện do mp α đi qua $A'B'$ và trọng tâm G của $\triangle ABC$ và tính tỉ số thể tích 2 phần của khối lăng trụ do α chia cắt ra.



$$a) V_{A'BB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{AA'BC} - V_{A'B'C'C} = \frac{d^3 \sqrt{3}}{12}$$

b) Thiết diện là hình thang $A'B'FE$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm AB và $A'B'$.

$$\text{Ta có: } M'G = \sqrt{MM'^2 + MG^2} = \frac{d\sqrt{39}}{6}$$

Diện tích thiết diện là

$$S = \frac{EF + A'B'}{2} M'G = \frac{5d^2 \sqrt{39}}{36}$$

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích phần trên (chứa A) và phần dưới (chứa C') thiết diện hình lăng trụ

$$\text{Ta thấy } \frac{JI}{JC'} = \frac{EC}{A'C} = \frac{2}{3} \Rightarrow JC' = 3d$$

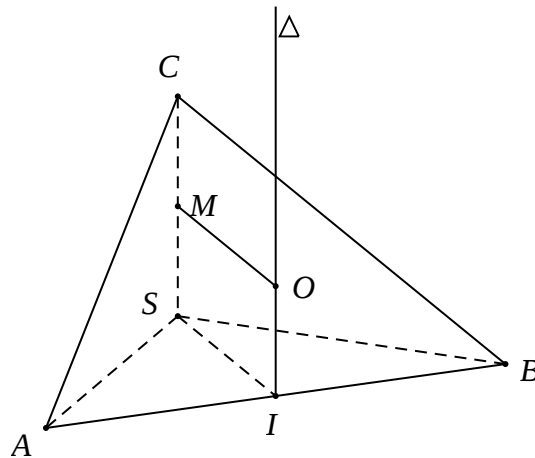
Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$\frac{V_{JEFC}}{V_{JA'B'C'}} = \frac{JE}{JA'} \cdot \frac{JF}{JB'} \cdot \frac{JC}{JC'} = \frac{8}{27}$$

Từ đó $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{8}$

Bài 4:

Cho hình chóp SABC có SA, SB, SC vuông góc nhau đôi một với SA=a, SB=b, SC=c. Hãy xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABC.



Gọi I là trung điểm của AB, suy ra I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vẽ $\Delta \perp (SAB)$ tại I, khi đó Δ là trục của tam giác SAB

Trong mặt phẳng tạo bởi Δ và SC (do $\Delta \parallel SC$), vẽ trung trực của SC cắt Δ tại O, ta có $OA=OB=OC=OD$ nên O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp SABC

Ta có bán kính mặt cầu là

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

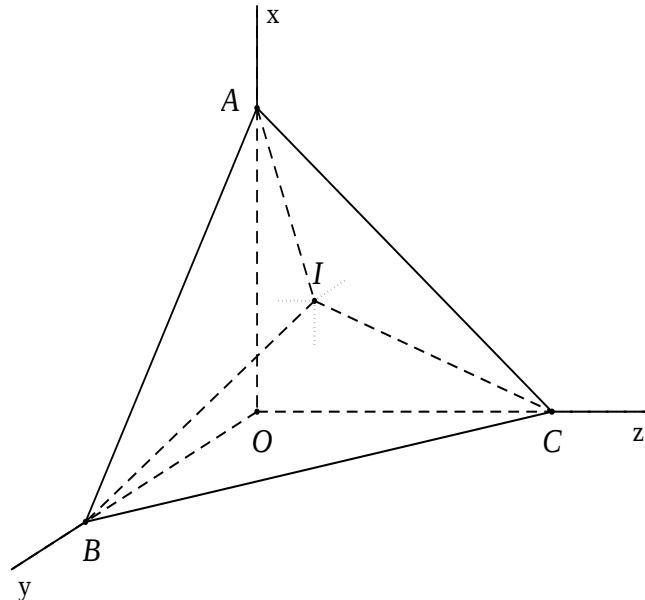
$$R = SO = \sqrt{SI^2 + IO^2} = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + \frac{SC^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bài 5:

Cho tam diện Oxyz có Ox, Oy, Oz vuông góc nhau từng đôi một. Gọi I là điểm trong tam diện và a, b, c, là khoảng cách từ I đến các mặt (Oyz), (Oxz), (Oxy),. Mặt phẳng α đi động qua I cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C.

a. chứng minh $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của V_{OABC} và cho biết vị trí I đối với tam giác ABC lúc đó



a) Ta có

$$V_{OABC} = V_{IOAB} + V_{IOCA} + V_{IOBC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} (OA \cdot OB \cdot c + OB \cdot OC \cdot a + OA \cdot OC \cdot b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$$

b) Vì I cố định nên a, b, c không đổi

$$\text{do ta có } \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$$

nên suy ra $\frac{a}{OA} \cdot \frac{b}{OB} \cdot \frac{c}{OC}$ đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{a}{OA} = \frac{b}{OB} = \frac{c}{OC} = \frac{1}{3}$ (bất đẳng thức Cô-si)

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

lúc đó $\frac{OA \cdot OB \cdot OC}{abc}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tức là $OA \cdot OB \cdot OC$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Mà } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC$$

Nên thể tích $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{2} abc$ khi $OA=3a, OB=3b, OC=3c$

Khi đó I là trọng tâm của tam giác ABC

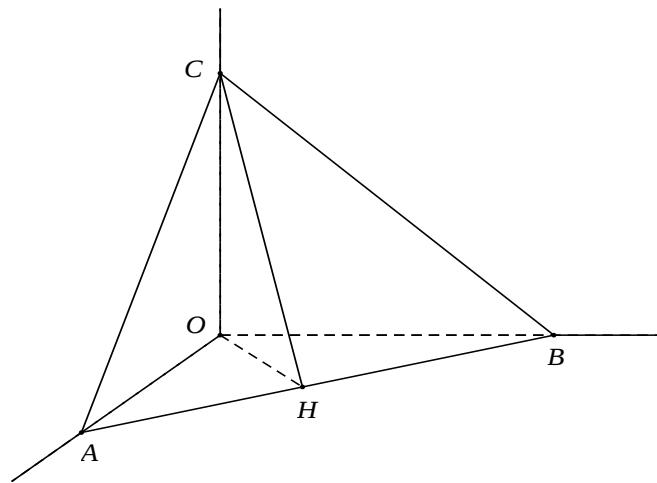
Bài 6:

Cho Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau đôi một

Lấy $A \in Ox, B \in Oy, C \in Oz$ sao cho $OA=a, OB=b, OC=c$

- Tính diện tích tam giác ABC theo a, b, c
- Giả sử A, B, C thay đổi nhưng luôn luôn có $OA + OB + OC + AB + AC + BC = k$ không đổi.

Hãy xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $OABC$



a) Vẽ $OH \perp AB$, định lý 3 đường vuông góc cho ta $CH \perp AB$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$CH^2 = OC^2 + OH^2 = c^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$CH = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2}}$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Vậy

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } k &= a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \\ &\geq 3\sqrt[3]{abc} + \sqrt{2ab} + \sqrt{2bc} + \sqrt{2ac} \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{\sqrt{2ab} \sqrt{2ac} \sqrt{2ca}} \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } k \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc} = 3(1 + \sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{k}{3(1 + \sqrt{2})}$$

$$\Leftrightarrow abc \leq \frac{k^3}{27(1 + \sqrt{2})^3}$$

Do đó

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} abc \leq \frac{k^3}{162(1 + \sqrt{2})^3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích OABC là $\frac{k^3}{162(1 + \sqrt{2})^3}$ khi $a = b = c$

$$\text{Khi đó } AB = AC = BC = a\sqrt{2} \text{ thay vào ta được } k = 3a + 3a\sqrt{2} \Rightarrow a = b = c = \frac{k}{3(1 + \sqrt{2})}$$

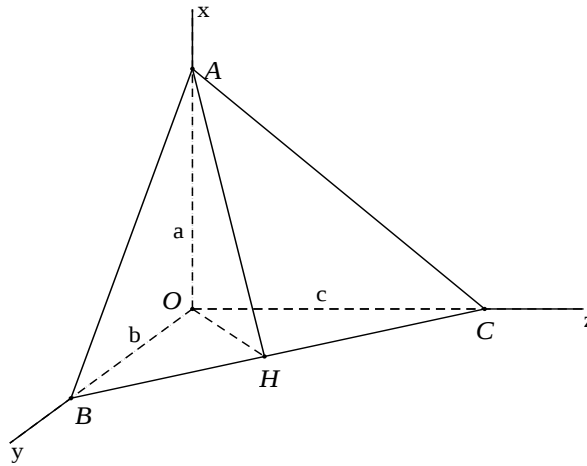
Vậy GTLN của thể tích OABC là $\frac{k^3}{162(1 + \sqrt{2})^3}$ khi $a = b = c = \frac{k}{3(1 + \sqrt{2})}$

Bài 7:

Cho góc tam diện ba góc vuông Oxyz. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C

a) Tính khoảng cách từ A đến (BC) theo OA = a, OB = b, OC = c

b) Cho A cố định, B và C di động thỏa OA + OC = OA. Hãy định vị trí của B và C sao cho thể tích tứ diện OABC đạt GTLN. Chứng minh rằng khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC lại nhỏ nhất.



a) Gọi H là hình chiếu của O trên ABC

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

$$\text{b) } V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \leq \frac{1}{6}a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{24}a^3$$

Thể tích tứ diện OABC đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{24}a^3$ khi $b = c = \frac{a}{2}$

Xét hình hộp chữ nhật có 3 kích thước bằng OA, OB, OC, đường chéo hình hộp này là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp OABC, do đó

$$R = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) \geq \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

R đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $b = c = \frac{a}{2}$

Bài 8:

Tứ diện ABCD có 3 góc phẳng vuông tại D. Kí hiệu α, β, γ là góc tạo bởi các tia DA, DB, DC với tia DG trong đó G là trọng tâm tam giác ABC. CMR $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

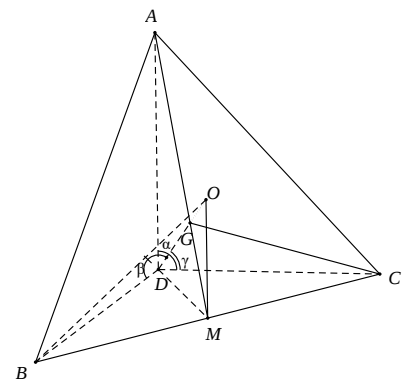
Gọi M là giao điểm của AG với BC. Trên tia DG ta lấy điểm

O sao cho OM // AD

Vì AD vuông góc (BCD) nên OM vuông góc (BCD)

Lại có MB = MC = MD nên OB = OC = OD

Trong tam giác OBD cân tại O có



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$BDO = \beta \text{ nên } BOD = \pi - 2\beta$$

Tam giác OCD cân tại O có

$$CDO = \gamma \text{ nên } COD = \pi - 2\gamma$$

Hai tam giác OMD và OMB bằng nhau

$$\Rightarrow BOM = DOM = \alpha$$

Vì OM là phân giác của tam giác OBC, ta có

$$BOC = 2\alpha$$

Trong tứ diện OBCD tổng các góc phẳng tại đỉnh O thoả mãn điều kiện

$$\pi - 2\beta + \pi - 2\gamma > 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi \text{ (đpcm).}$$

Bài 9:

Cho tứ diện OABC có các góc phẳng tại đỉnh O vuông và thoả mãn điều kiện $OC=OA+OB$. CMR tổng các góc phẳng tại đỉnh C bằng 90°

Gọi α, β, γ tương ứng với số đo các góc OCA, OCB, ACB

Đặt $OA=a, OB=b, OC=c$

Ta có

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\text{Và } \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\text{Từ đó ta có } \sin(\alpha + \beta) = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\text{Theo định lí hàm cosin với tam giác ABC ta có } \cos \gamma = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \cos \gamma$$

Mặt khác các số đo α, β, γ nằm trên khoảng $(0^\circ; 90^\circ)$ nên $\alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$ (đpcm)

Bài 10:

Trong số các tứ diện OABC có 3 góc phẳng tại O vuông và cùng diện tích mặt ABC, tứ diện nào có thể tích lớn nhất?

Đặt $x=OA, y=OB, z=OC$

$$\text{Ta có thể tích } V \text{ của OABC là } V = \frac{xyz}{6}$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2}$

Gọi k là diện tích của tam giác BAC, ta có

$$k^2 = (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

$$\Rightarrow xyz \leq \frac{k^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V \leq \frac{k^3}{18\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } \max V = \frac{k^3}{18\sqrt{3}} \text{ khi } x = y = z = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

Bài 11:

Tứ diện ABCD có các góc phẳng vuông tại đỉnh D và DA=a, DB=b, DC=c. Chứng minh rằng tứ diện nội tiếp trong hình cầu và tìm bán kính hình cầu đó.

Vì các đường tròn ngoại tiếp các $\triangle DAB$ và $\triangle ABC$ có dây cung chung AB nên tồn tại duy nhất 1 hình cầu đi qua của tứ diện DABC. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, khi đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$. Đường thẳng $d \perp (ABD)$ tại M là trục của đường tròn.

Theo giả thiết $d \parallel CD$ và nếu O là tâm hình cầu ngoại tiếp thì O nằm trong mặt phẳng (CDM).

Gọi $K = MD \cap OC$

Vì $\triangle CDM \perp D$ nên $OD=OC=OK$. Điều này chứng tỏ K nằm trên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Trong tam giác $\triangle CDK$ vuông ta có:

$$CD = c, DK = 2DM = AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Gọi R là bán kính của hình cầu O thì } R = \frac{CK}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

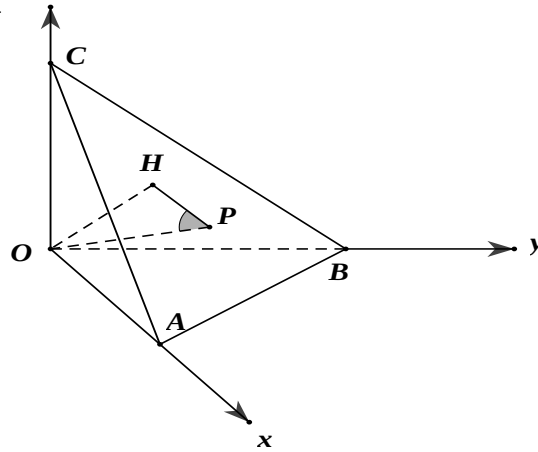
Bài 12:

Cho tứ diện vuông ABC đỉnh O. P là điểm nằm trong đáy ABC. Đặt $u = \frac{AP}{AO}$,

$v = \frac{BP}{BO}$, $w = \frac{CP}{CO}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng OP với (ABC). Chứng minh

$$\text{rằng } u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \cot^2 \alpha.$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Xét hệ trục tọa độ Đề Các vuông góc nhận O làm gốc tọa độ, các trục tọa độ chứa OA, OB, OC, $\angle HPO = \alpha$. Giả sử trong hệ tọa độ ấy, tọa độ các đỉnh A, B, C tương ứng là:

$$A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c)$$

Giả sử tọa độ điểm P là $P(x_0, y_0, z_0)$

Ta có:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= \frac{AP^2}{AO^2} + \frac{BP^2}{BO^2} + \frac{CP^2}{CO^2} \\ &= \frac{AP^2}{a^2} + \frac{BP^2}{b^2} + \frac{CP^2}{c^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} AP^2 &= (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2; \\ BP^2 &= x_0^2 + (y_0 - b)^2 + z_0^2; \\ CP^2 &= x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - c)^2; \end{aligned}$$

Nếu đặt $p^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ thì ta có thể viết

$$AP^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2 - 2x_0a = p^2 + a^2 \left(1 - \frac{2x_0}{a} \right)$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned} BP^2 &= p^2 + b^2 \left(1 - \frac{2y_0}{b} \right) \\ CP^2 &= p^2 + c^2 \left(1 - \frac{2z_0}{c} \right) \end{aligned}$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Thay vào (1), có:

$$u^2 + v^2 + w^2 = p^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + 3 - 2 \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} \quad (2)$$

Theo phương trình đoạn chắn thì mặt phẳng ABC có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ mà } P(x_0, y_0, z_0) \text{ thuộc } (ABC)$$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1 \quad (3)$$

Kẻ $OH \perp (ABC)$, ta có hiển nhiên công thức sau:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{OH^2} \quad (4)$$

$$\text{Thay (3)(4) vào (2) có: } u^2 + v^2 + w^2 = \frac{p^2}{OH^2} + 1 \quad (5)$$

$$\text{Chú ý là } p^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = OP^2$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 = \frac{OP^2}{OH^2} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + 1 = 1 + \cot^2 \alpha + 1$$

$$\text{Vậy } u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \cot^2 \alpha$$

Chú ý:

1. Xét trường hợp đặc biệt khi $P \equiv H$, H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$

Khi đó từ công thức đã chứng minh, ta có

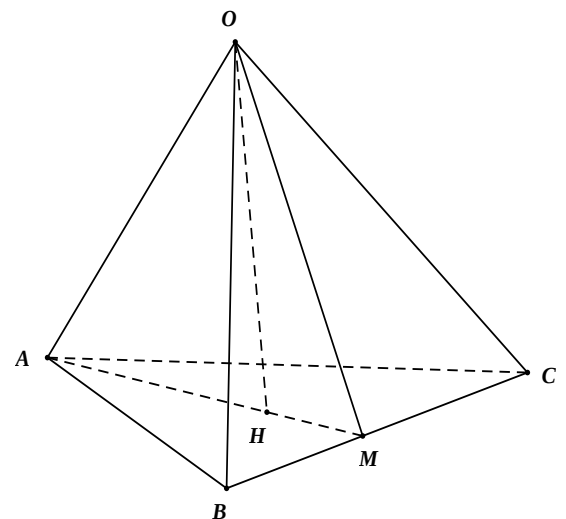
$$\left(\frac{AH}{AO} \right)^2 + \left(\frac{BH}{BO} \right)^2 + \left(\frac{CH}{CO} \right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 OAH + \cos^2 OBH + \cos^2 OCH = 2 \quad (6)$$

Chú ý nếu gọi $M = AH \cap BC$

$\Rightarrow AMO$ là góc tạo bởi (OBC) với đáy (ABC) và ta có

$$\cos^2 OAH = \sin^2 AMO$$



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Vì vậy nếu gọi α, β, λ là 3 góc tạo bởi ba mặt OBC, OAC, OAB với đáy ABC, thì từ (6) ta có:
 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \lambda = 2$

$$\text{hay } \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 1 \quad (7)$$

Vậy công thức: $u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \cot^2 \alpha$ là mở rộng của công thức quen thuộc (7)

2. Công thức (4) có thể chứng minh bằng phương pháp tọa độ như sau:

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

$$\text{Hay } acx + acy + abz - abc = 0 \quad (8)$$

Khi đó theo công thức tính khoảng cách điểm O(0,0,0) xuống mặt phẳng (8) ta có

$$OH = \frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} \Rightarrow \frac{1}{OH} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\text{hay } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Bài 13:

Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. Vẽ chiều cao OH của tứ diện. Đặt

$A = CAB, B = ABC, C = BCA, \alpha = AOH, \beta = BOH, \gamma = COH$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2C}$$

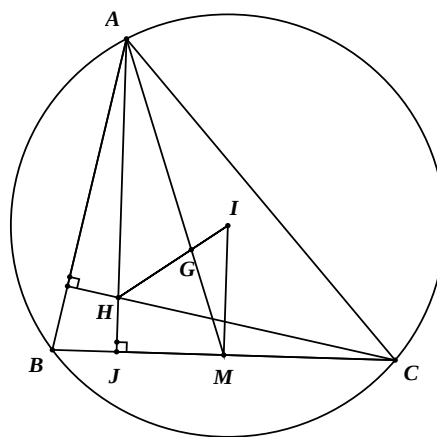
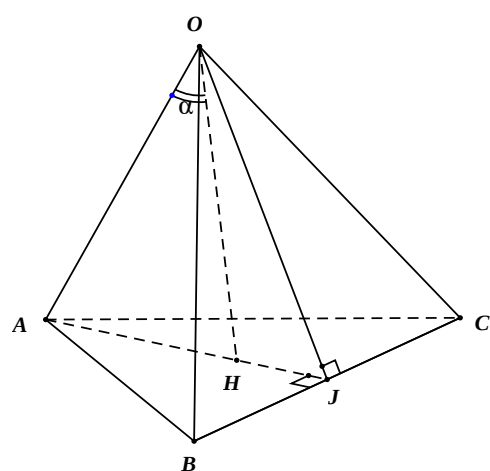
Dễ thấy H là trực tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle ABC$ là tam giác nhọn. AH kéo dài cắt BC tại J $\Rightarrow AJ \perp BC$.
Vì $OA \perp (OBC)$, nên theo định lý 3 đường vuông góc ta có $OJ \perp BC$.

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha = \frac{AH^2}{OA^2} \quad (1)$$

Xét $\triangle$ vuông OAJ đỉnh O. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OA^2 = AH \cdot AJ$, vậy từ

$$(1) \text{ có } \sin^2 \alpha = \frac{AH}{AJ}$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Vẽ đường tròn ngoại tiếp ΔABC , và gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp. G là trọng tâm ΔABC .

Theo đường thẳng Euler thì H, G, I thẳng hàng và $HG = 2IG \Rightarrow AH = 2IM$ và $A = CAB = BIM$

Ta có: $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \frac{BM}{IB} \cdot \frac{IM}{IB}$

$$= 2 \cdot \frac{BC}{2IB} \cdot \frac{AH}{2IB} = \frac{BC \cdot AH}{2R^2} \quad (2)$$

Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Từ (1)(2) suy ra $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{2R^2}{BC \cdot AJ} = \frac{R^2}{S}$; ở đây S là diện tích ΔABC

Do sự bình đẳng của các cặp $(\beta, B), (\gamma, C)$, ta cũng có

$$\frac{\sin^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2C} = \frac{R^2}{S}. \text{ Từ đó suy ra điều phải chứng minh.}$$

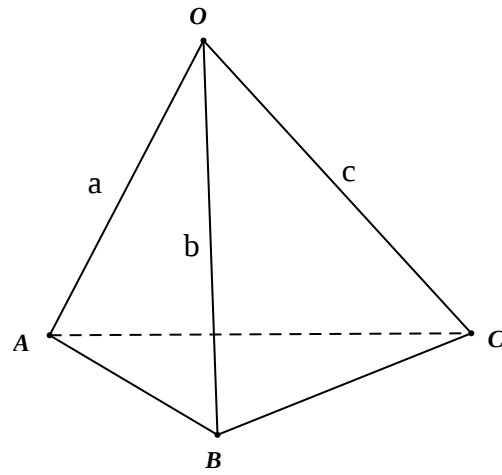
Bài 14:

Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O, và giả sử $OA = a, OB = b, OC = c$. Đặt

$S_{OAB} = S_1, S_{OBC} = S_2, S_{OAC} = S_3$ và $S_{AABC} = S$. Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp trong

tứ diện OABC. Chứng minh $r = \frac{S_1 + S_2 + S_3 - S}{a + b + c}$.

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Áp dụng công thức $r = \frac{3V}{S_{tp}}$ (1)

Với V, S_{tp} tương ứng là thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện.

Thay $V = \frac{1}{6} abc$ (do OABC là tứ diện vuông đỉnh O) vào (1)

$$\begin{aligned} \text{và có } r &= \frac{abc}{a(S_1 + S_2 + S_3 + S)} \\ &= \frac{abc(S_1 + S_2 + S_3 - S)}{2[(S_1 + S_2 + S_3)^2 - S^2]} \end{aligned} \quad (2)$$

Theo định lý Pytago trong không gian thì $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$, vì thế

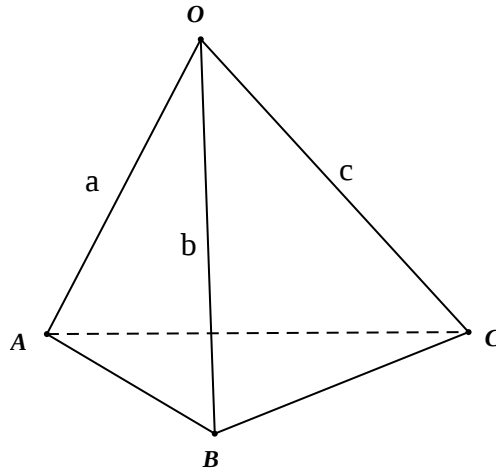
$$\begin{aligned} 2[(S_1 + S_2 + S_3)^2 - S^2] &= 4S_1S_2 + 4S_2S_3 + 4S_1S_3 \\ &= ab^2c + abc^2 + a^2bc \\ &= abc(a + b + c) \end{aligned} \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) có $r = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{a + b + c}$

Đó là điều phải chứng minh.

Bài 14:

Cho tứ diện vuông DABC đỉnh D. Giả sử $DA = a, DB = b, DC = c, (a \leq b \leq c)$. M là một điểm tùy ý trong đáy ABC. Gọi l là tổng các khoảng cách từ A, B, C xuống DM. Chứng minh rằng $l \leq a + b$



Đặt $ADM = \alpha, BCM = \beta, CDM = \gamma$ thì ta có ngay $l = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma$

Vì góc tam diện đỉnh D là vuông nên ta luôn dựng được 1 hình hộp chữ nhật có DM là đường chéo, còn DA, DB, DC là phương của các cạnh bên.

Vậy ra có: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 3 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 2$

Do $0 \leq \sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma \leq 1$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2 \text{ hay}$$

$$\Rightarrow \sin \beta + \sin \gamma - 1 \geq 1 - \sin \alpha \quad (1)$$

$$\text{Ta có } b \geq a \quad (2)$$

$$\text{Nên từ (1) và (2) có } b(\sin \beta + \sin \gamma - 1) \geq a(1 - \sin \alpha) \quad (3)$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + b \sin \gamma \geq a + b$$

$$\text{Lại do } c \geq b \Rightarrow c \sin \gamma \geq b \sin \gamma \quad (4)$$

$$\Rightarrow 1 = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma \geq a + b. \text{ Đó chính là điều phải chứng minh.}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin \alpha = \sin^2 \alpha, \sin \beta = \sin^2 \beta, \sin \gamma = \sin^2 \gamma$ và đồng thời có dấu bằng trong (3) và (4), tức là $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 0$

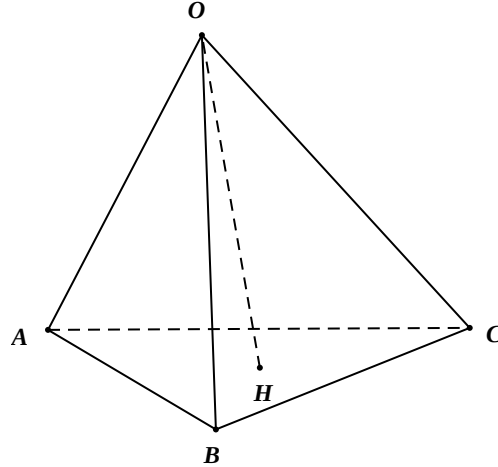
$$\Leftrightarrow M \equiv C$$

Bài 15:

Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. Gọi R, r, h, V tương ứng là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp, đường cao hạ từ O và thể tích của tứ diện. Chứng minh rằng:

$$\frac{V(h-r)}{R^2 rh} \leq \frac{2}{3}$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$, chiều cao $OH = h$

Ta thấy ngay $r = \frac{3V}{S_{tp}}; h = \frac{3V}{S_{ABC}}$

Ở đây S_{tp} và S_{ABC} tương ứng là diện tích toàn phần và diện tích đáy ABC của tứ diện đã cho. Vì thế

$$\begin{aligned} \frac{V(h-r)}{R^2 rh} &= \frac{V \cdot \frac{3V}{S_{ABC}} \cdot \frac{3V}{S_{tp}}}{R^2 \cdot \frac{3V}{S_{ABC}} \cdot \frac{3V}{S_{tp}}} = \frac{V(S_{tp} \cdot 3V - 3V \cdot S_{ABC})}{R^2 \cdot 3V \cdot 3V} \\ &= \frac{S_{tp} - S_{ABC}}{3R^2} = \frac{S_{xq}}{2R^2} \quad (1) \end{aligned}$$

Ở đây S_{xq} là diện tích xung quanh của tứ diện O.ABC đỉnh O, và dễ thấy:

$$S_{xq} = \frac{ab + bc + ca}{2} \quad (2)$$

Vì OABC là tứ diện vuông đỉnh O, nên bán kính hình cầu ngoại tiếp R được tính bằng công thức

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \frac{2(ab + bc + ca)}{3(a^2 + b^2 + c^2)} &\leq \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow ab + bc + ca &\leq a^2 + b^2 + c^2 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Do (4) hiển nhiên đúng $\Rightarrow$ dpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ OABC là tứ diện vuông cân đỉnh O.

Chú ý:

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Với mọi tứ diện ABCD, thì bán kính hình cầu nội tiếp r

của nó được tính bằng công thức sau: $r = \frac{3V}{S_{tp}}$

Ở đây V, S_{tp} tương ứng là thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện.

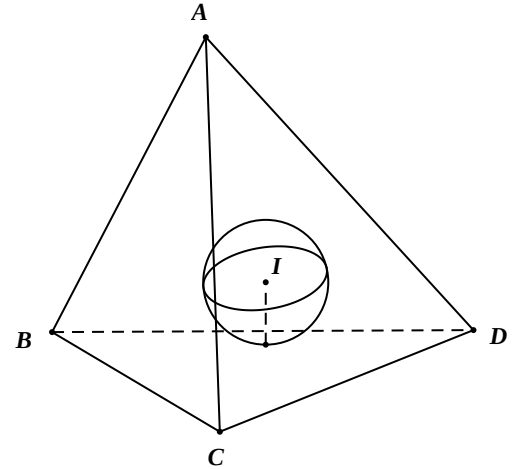
Thật vậy gọi I là tâm hình cầu nội tiếp của tứ diện, thì

$$V = V_{I.BCD} + V_{I.ACD} + V_{I.ABD} + V_{I.ABC}$$

hay

$$V = \frac{1}{3}r(S_{BCD} + S_{ACD} + S_{ABD} + S_{ABC}) = \frac{1}{3}r.S_{tp}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}}$$

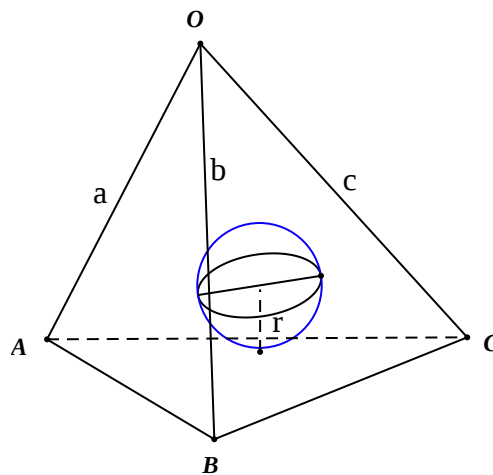


Bài 16:

Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. Kẻ đường cao OH=h. Gọi R,r tương ứng là bán kính hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện.

a. Chứng minh rằng $\frac{h}{r} \leq 1 + \sqrt{3}$

b. Chứng minh rằng $\frac{R}{r} \geq \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$



a. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$

Theo tính chất của tứ diện vuông đỉnh O, ta có:

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (1)$$

Ta có: $\frac{3V}{S_{tp}} = \frac{1}{r} = \frac{S_{tp}}{V} \quad (*)$

Do $\frac{S_{tp}}{V} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$

(Ở đây h_1, h_2, h_3, h_4 là bốn chiều cao tứ diện).

Vì thế từ $(*)$, và do $O.ABC$ là tứ diện vuông đỉnh O , với $OA = a, OB = b, OC = c$, nên ta có:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{h} \quad (2)$$

Hiển nhiên ta có $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \quad (3)$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. Từ (1) và (3) có:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq \frac{3}{h^2} \text{ hay } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{h} \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra: $\frac{1}{r} + \frac{1}{h} \leq \frac{\sqrt{3}}{h} \text{ hay } \frac{1}{r} \leq \frac{1}{h}(\sqrt{3} + 1)$

$$\Rightarrow \frac{h}{r} \leq \sqrt{3} + 1$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ trong (3) có dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow O.ABC$ là tứ diện vuông cân đỉnh O .

b. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$. từ cách dựng tâm hình cầu ngoại tiếp I (xem hình bên) suy ra:

$$R = OI = \sqrt{OM^2 + MI^2}$$

$$\sqrt{\frac{BC^2}{4} + \frac{OA^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lại áp dụng công thức:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{3 \frac{abc}{6}}{\frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ac}{2} + S_{ABC}}$$

Có thể tính được ngay: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$

Từ đó suy ra $r = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Như vậy ta có:

$$\frac{R}{2} = \frac{ab + bc + ac + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{abc} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, từ (1) suy ra:

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$\frac{R}{r} = \frac{3\sqrt{a^2b^2c^2} + \sqrt{3\sqrt{a^4b^4c^4}}}{2abc} \sqrt{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (2)$$

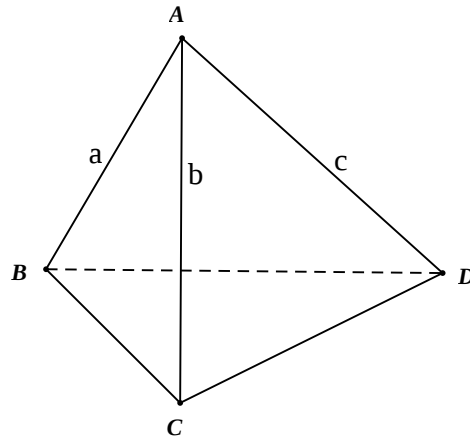
Sau khi rút gọn, dễ thấy $VF(2) = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

Vậy từ (2) có: $\frac{R}{r} \geq \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ trong (2) có dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow OABC$ là tứ diện vuông cân đỉnh O.

Bài 17:

Cho tứ diện vuông $ABCD$ đỉnh A. Gọi A là cạnh lớn nhất của tứ diện xuất phát từ A và r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện. Chứng minh rằng $a \geq (3 + \sqrt{3})r$



Đặt $AB = a$; $AC = b$; $AD = c$; như vậy $a \geq b, a \geq c$.

Áp dụng công thức:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{abc}{2\left(\frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2} + S\right)}$$

Ở đây $S = S_{BCD}$, ta thấy

$$\begin{aligned} a \geq (3 + \sqrt{3})r &\Leftrightarrow a \geq (3 + \sqrt{3}) \frac{abc}{ab + ac + bc + 2S} \\ &\Leftrightarrow ab + ac + bc + 2S \geq (3 + \sqrt{3})bc \\ &\Leftrightarrow 2S + ab + ac \geq 2bc + \sqrt{3}bc \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Do } a = \max(a, b, c) \Rightarrow ab + ac \geq 2bc \quad (3)$$

(Dấu bằng trong (3) $\Leftrightarrow a = b = c$)

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Theo định lý Pytago:

$BC = \sqrt{a^2 + b^2}$; $CD = \sqrt{b^2 + c^2}$; $BD = \sqrt{a^2 + c^2}$. Từ đó ta thấy cả ba góc của ΔABC đều nhọn vì bình phương mỗi cạnh đều bé hơn tổng bình phương 2 cạnh còn lại. Có thể cho là BC là cạnh lớn nhất của $\Delta BCD \Rightarrow BDC$ là góc lớn nhất.

Ta có $2S = BD \cdot CD \cdot \sin BDC = \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \sin BDC$

$$\geq \sqrt{2ac} \cdot \sqrt{2bc} \sin \frac{\pi}{3} \text{ (vì } \frac{\pi}{3} \leq BDC \leq \frac{\pi}{2} \text{)} \geq 3bc \quad (4)$$

(Dấu bằng trong (4) có $\Leftrightarrow a = b = c$)

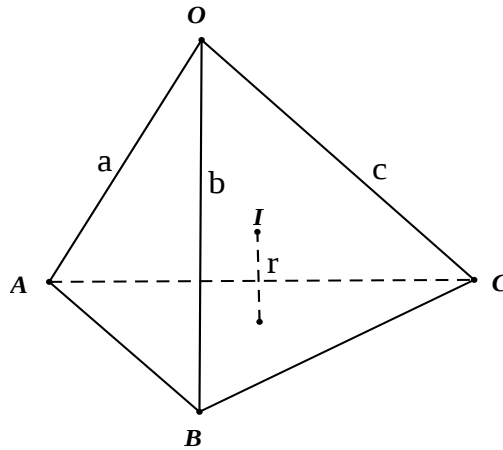
Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ (2) đúng đpcm.

Dấu bằng có $\Leftrightarrow AB = AC = AD$.

Bài 18:

Cho $OABC$ là tứ diện vuông đỉnh O , với $OA = a, OB = b, OC = c$. Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện.

Chúng minh $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}$



Gọi I là tâm hình cầu nội tiếp. Ta có:

$$V = V_{I,ABC} + V_{I,OAB} + V_{I,OBC} + V_{I,OCA}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{V_{I,ABC}}{V} + \frac{V_{I,OAB}}{V} + \frac{V_{I,OBC}}{V} + \frac{V_{I,OCA}}{V}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{r}{h} + \frac{r}{c} + \frac{r}{b} + \frac{r}{a}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{h} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (1)$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Từ (1) suy ra bất đẳng thức đã cho có dạng tương đương sau:

$$\frac{1}{h} \geq \frac{3\sqrt{3}}{a+b+c} \quad (2)$$

Do $OABC$ là tứ diện vuông đỉnh O , nên theo bài cơ bản ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (3)$$

Từ (3) và theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \quad (4)$$

$$(a+b+c)^2 \geq 9\sqrt{a^2b^2c^2} \quad (5)$$

Từ (3)(4)(5) suy ra: $\frac{1}{h} \geq \frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}$

Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

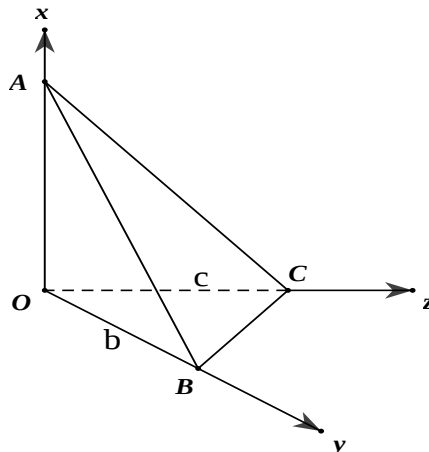
$\Leftrightarrow OABC$ là tứ diện vuông cân đỉnh O .

Bài 19:

Cho góc tam diện vuông $Oxyz$ đỉnh O . Lấy A, B, C lần lượt trên Ox, Oy, Oz sao cho $OA+OB+OC+AB+AC+BC=l$, trong đó l là một đại lượng dương cho trước. Gọi V là thể tích của tứ diện $OABC$.

Chứng minh $V \leq \frac{l^3(\sqrt{2}-1)^3}{162} \quad (1)$

Xác định vị trí của A, B, C để có dấu bằng trong (1)



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$

Ta có theo bất đẳng thức Bunhicopski

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

$$a + c \leq \sqrt{2(a^2 + c^2)}$$

$$c + b \leq \sqrt{2(c^2 + b^2)}$$

Từ đó suy ra

$$\sqrt{2}(a + b + c) \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\text{Hay } (a + b + c)(1 + \sqrt{2}) \leq a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 1 \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$$\text{Mà } V_{OABC} = V = \frac{abc}{6} \Rightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{6V} \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) có $\Leftrightarrow a = b = c$. Từ (1) và (2) suy ra

$$l \geq 3(1 + \sqrt{2})\sqrt[3]{6V} \text{ hay}$$

$$V \leq \frac{l^3}{162(\sqrt{2} + 1)^3} = \frac{l^3(\sqrt{2} - 1)}{3}$$

(Điều đó suy ra phương trình $3a + 3a\sqrt{2} = 1$).

Bài 20:

1) Cho góc tam diện vuông S_{xyz} . A, B, C là ba điểm trên S_x, A_y, H là trực tâm tam

giác ABC. SH cắt mặt phẳng qua A vuông góc với S_x , mặt phẳng qua B vuông góc với S_y , mặt phẳng qua C vuông góc với S_z lần lượt tại K, L, M. Tìm quỹ tích H khi A, B, C di động nhưng thỏa mãn điều kiện.

$$\frac{1}{SK} + \frac{1}{KL} + \frac{1}{SM} = \frac{1}{l} \quad (\text{với } l \text{ là một độ dài cho trước})$$

2) A, B, C di động nhưng $SA + SB + SC = 3k$, k là độ dài cho trước. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

1) Gọi các mặt phẳng qua A vuông góc với S_x , qua B vuông góc với S_y , qua C

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

vuông góc với Sz lần lượt là (P), (Q), (R). Ba mặt này cũng với ba mặt của tam diện vuông tạo thành hình hộp chữ nhật ADBS.A'D'B'C. Giả sử $CH \cap AB = I$ và mặt phẳng (CSI) cắt (P), (Q), (R) theo các giao tuyến EF, GN, CF.

SH kéo dài cắt các giao tuyến này lần lượt tại K, L, M (chúng chính là giao điểm của SH với (P), (Q), (R))

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{SA^2} &= \frac{1}{SH} \cdot \frac{1}{SK} \\ \frac{1}{SB^2} &= \frac{1}{SH} \cdot \frac{1}{SL} \\ \frac{1}{SC^2} &= \frac{1}{SH} \cdot \frac{1}{SM}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} \\ = \frac{1}{SH} \left(\frac{1}{SK} + \frac{1}{SL} + \frac{1}{SM} \right)\end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{SH^2}$ nên từ đó ta có

$$\frac{1}{SH} = \frac{1}{SK} + \frac{1}{SL} + \frac{1}{SM} = \frac{1}{l} \Rightarrow SH = l$$

Vậy suy ra quỹ tích H là $\frac{1}{8}$ mặt cầu tâm S, bán kính l nằm trong góc tam diện vuông (bỏ các $\frac{1}{4}$

đường tròn giao tuyến của 3 mặt tam diện vuông với mặt cầu vì điều kiện $SA, SB, SC \neq 0$)

2) Xét hình hộp chữ nhật có 3 kích thước là SA, SB, SC. Đường chéo SD' cắt mặt chéo ABC của hình hộp tại trọng tâm G của tam giác ABC và $SG = \frac{1}{3}SD'$

Để tìm quỹ tích G, ta chỉ cần tìm quỹ tích của D'.

Từ

$$SA + SB + SC = 3l$$

$$\Rightarrow D'B' + D'A' + D'D = 3l$$

Ta tìm quỹ tích D' sao cho tổng khoảng cách từ D' tới ba mặt tam diện vuông bằng 3l không đổi.

Gọi P, Q, R là ba điểm trên Sx, Sy, Sz sao cho $SP = SQ = SR = 3l$.

Ta có $V_{SPQR} = V_{D'SPQ} + V_{D'SQR} + V_{D'SRP} + V_{D'PQR}$ (1)

$$\text{Ta có } V_{SPQR} = \frac{1}{6}(3l)^3 = \frac{9l^3}{2}, \text{ và } S_{SPQ} = S_{SQR} = S_{SRP} = \frac{9l^2}{2}$$

Thay vào (1) suy ra

$$\frac{9l^3}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9l^2}{2} (D'D + D'B' + D'A') + \frac{1}{3} \cdot d \cdot S_{PQR} \quad (2)$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

ở đây d là khoảng cách từ D' tới (PQR)

Vì $D'B + D'D + D'A = 3l$ nên từ đó suy ra $d.S_{PQR} = 0 \Rightarrow d = 0$. Vậy $D' \in$ tam giác PQR

Đảo lại nếu D' thuộc tam giác PQR $\Rightarrow d=0$

$$\Rightarrow DD' + D'A + D'B = 3l$$

Vậy quỹ tích D' là tam giác PQR.

Do $D' \xrightarrow{H\left(s, \frac{1}{3}\right)} H$ nên quỹ tích G là tam giác đều $P_0Q_0R_0$ (trong đó $P_0Q_0R_0$ là ảnh của PQR trong phép vị tự tâm S tỷ số $\frac{1}{3}$, ở đây $SR_0 = SP_0 = SQ_0 = 1$)

Bài 21:

Trong mặt phẳng (P) cho góc vuông $\angle xSy = 90^\circ$, đỉnh S cố định. Đoạn SA vuông góc với (P). Trên Sx và Sy lần lượt lấy B, C sao cho $SB + SC = a$. Xét tứ diện vuông $SABC$ đỉnh S . Đặt $\angle ASB = \alpha, \angle BSC = \beta, \angle CSA = \gamma$

1. CMR khi B, C di động thì $\alpha + \beta + \gamma = \text{const}$.
2. Tìm quỹ tích tâm I hình cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.
3. CM $V_{SBC} \max \Leftrightarrow R \min$ (ở đây R là bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$).
4. CMR khi B, C di động luôn tồn tại 1 điểm J cố định cách (ABC) 1 khoảng không đổi.

1/Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác ABC, ta có

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} \\ &= \frac{(a^2 + SB^2) + (a^2 + SC^2) - BC^2}{2AB.AC}\end{aligned}$$

do $BC^2 = SB^2 + SC^2$ nên từ (1) ta có

$$\cos \beta = \frac{a^2}{AB.AC} = \frac{SA(SB + SC)}{AB.AC} = \frac{SA}{AC} \frac{SB}{AB} + \frac{SA}{AB} \frac{SC}{AC}$$

Hay ta có

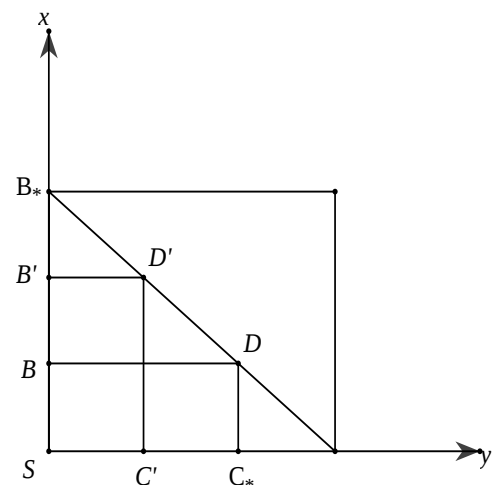
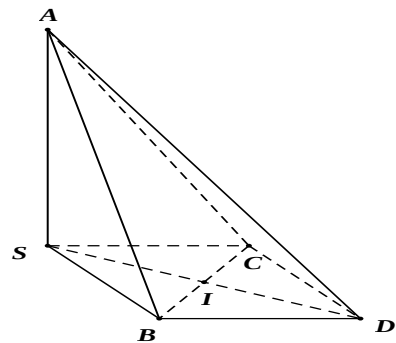
$$\cos \beta = \cos \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \sin \gamma$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \sin(\alpha + \gamma)$$

$$\Rightarrow \beta + \alpha + \gamma = 90^\circ = \text{const.}$$

2/ Trong (P) dựng hình chữ nhật SCDB. Gọi I là trung điểm của SD . Do $\triangle ASD, \triangle ABD, \triangle ACD$ đều là các tam giác vuông chung đường huyền AD , nên có ngay

$$IA = IB = IC = IS \text{ (vì cùng } = \frac{1}{2} AD \text{)}$$



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Vậy I chính là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện vuông SABCD đỉnh S

Xét phép vị tự $H(A, \frac{1}{2})$

Trong phép vị tự này $D \rightarrow I$

Vậy bài toán tìm quỹ tích I quy về bài toán quỹ tích phẳng sau đây:

Cho góc vuông $\angle xSy = 90^\circ$ cố định

Trên Sx, Sy lần lượt lấy B, C di động sao cho $SB + SC = a$.

Dựng hình chữ nhật SCDB. Tìm quỹ tích đỉnh thứ tư D của hình chữ nhật nói trên.

Lấy B^* trên Sx sao cho $SB^* = a$. Nối B^*D cắt Sy tại C^* .

Do $SB + SC = a$, mà $SB + BB^* = a$

$\Rightarrow BB^* = SC = BD \Rightarrow B^*BD$ là tam giác vuông cân

$\Rightarrow B^*SC^*$ cũng là tam giác vuông cân

$\Rightarrow SC^* = a \Rightarrow B^*$ và C^* cố định

Như vậy D nằm trên đoạn B^*C^*

Đảo lại lấy D' bất kì trên B^*C^* . Ta phải chứng minh tồn tại $B' \in Sx, C' \in Sy$, sao cho $SB' + SC' = a$ và $SC'D'B'$ là hình chữ nhật. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu của D' trên Sx và Sy . Tương tự như chứng minh trên suy ra B', C' có các tính chất như nêu ở trên.

Vậy quỹ tích D là đoạn B^*C^* .

Do $H(A, \frac{1}{2}), D \rightarrow I$

Vậy quỹ tích của tâm I hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABCD là đường trung bình B_1C_1 của tam giác AB^*C^* với B^*, C^* tương ứng nằm trên Sx, Sy sao cho $SB^* = SC^* = a$

3/Ta có

$$R = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + SD^2} = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}$$

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + (b+c)^2 - 2bc} = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 - bc)} \quad (2)$$

Do $a = \text{const}$, nên từ (2) suy ra $R_{\min} \Leftrightarrow bc_{\max}$

Do $b + c = a = \text{const}$ nên $bc_{\max} \Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2}$

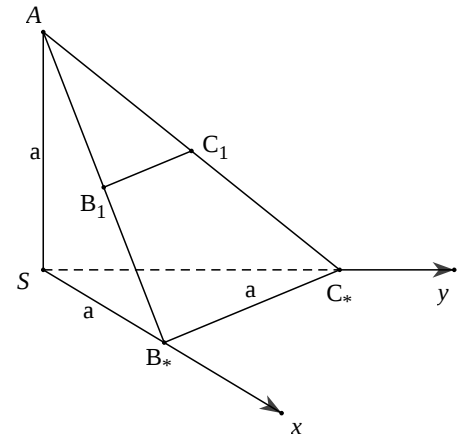
Mặt khác $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot SA = \frac{1}{6} abc$

Do vậy $V_{SABC} \max \Leftrightarrow bc \max$

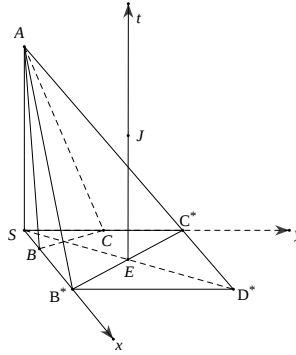
Từ đó suy ra $V_{SABC} \max \Leftrightarrow R_{\min} \Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2}$

Đpcm.

4/



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Gọi E là trung điểm của B^*C^* . Kẻ $Et \parallel SA$, trên đó lấy J sao cho $EJ = \frac{a}{2}$

Giả sử $OB + OC = a$ $OB = CC^*$

Khi đó ta có $d(D^*, (SMN)) = 2d(J, (SMN))$, ở đây D^* là đỉnh thứ 4 của hình chữ nhật $SC^*D^*B^*$, còn dùng ký hiệu $d(D^*, (SMN))$, $d(J, (SMN))$ tương ứng chỉ khoảng cách từ D^* , J tới (SMN).

Ta có

$$V_{ABCD^*} = \frac{1}{3} a S_{BCD^*}$$

$$V_{D^*.ABC} = \frac{1}{3} d(D^*, (SMN)) \cdot S_{ABC}$$

$$\Rightarrow a \cdot S_{BCD^*} = h \cdot S_{ABC} (*)$$

$$h = d(D^*, (SMN))$$

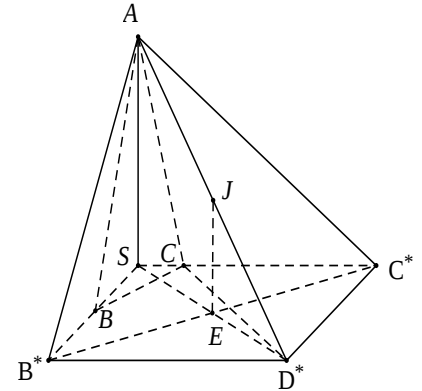
Do $SB + SC = a \Rightarrow SB = CC^*$ và $SC = BB^*$

Xét 2 tam giác vuông ASC và B^*D^*B , ta có $BB^* = SC$; $B^*D^* = SO$ (vì cùng = a)

$$\Rightarrow \triangle ASC = \triangle D^*.B^*.B \Rightarrow AC = BD^*.$$

Tương tự, ta có $AB = CD^*$. Từ đó suy ra $\triangle BCD^* = \triangle ABC$

Từ (*) suy ra $a = h \Rightarrow d(J, (SMN)) = \frac{a}{2} = \text{const} \Rightarrow \text{Đpcm.}$



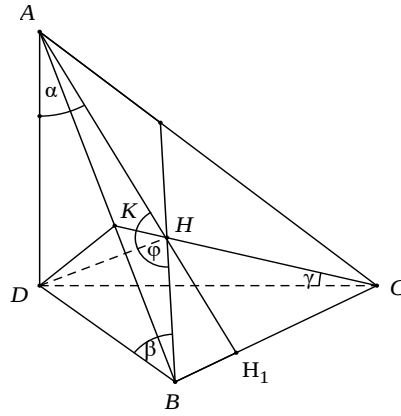
Bài 22:

Cho tứ diện vuông DABC tại D, gọi H là trực tâm tam giác ABC

Đặt $\alpha = \angle DAH$, $\beta = \angle DBH$, $\gamma = \angle DCH$, $\varphi = \angle AHB$.

$$\text{CMR : } \sin \varphi = \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}, \cos \varphi = -\tan \alpha \tan \beta$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Do H là trực tâm của tam giác ABC $\Rightarrow DH \perp (ABC)$. Kéo dài AH cắt BC tại H_1 . Từ đó $DH \perp AA_1$

Trong tam giác vuông ADH_1 , ta có $DH^2 = AH.HH_1$

Do $HH_1 = BH \cos BHH_1 = BH \cos(180^\circ - \varphi)$

$$\Rightarrow DH^2 = -AH.BH.\cos \varphi$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = -\frac{DH}{AH} \frac{DH}{BH}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

Giả sử CH kéo dài cắt AB tại K. Vì $CD \perp (ABD)$ mà $CK \perp AB \Rightarrow DK \perp AB$ (định lí 3 đường vuông góc) $\Rightarrow DKC$ là góc tạo bởi 2 mặt phẳng ADB và ABC. Dễ thấy HAB là hình chiếu của DAB trong phép chiếu vuông góc DAB xuống ABC $\Rightarrow S_{HAB} = S_{DAB}.\cos DKC$ (1)

Dễ thấy trong tam giác vuông KDC đỉnh D, thì $\cos DKC = \sin \gamma$

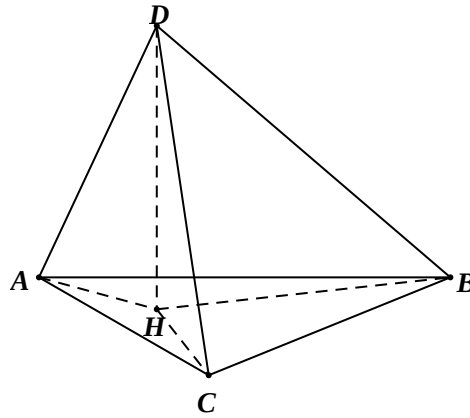
$$\text{Vậy từ (1) có } \frac{1}{2} HA.HB \sin \varphi = \frac{1}{2} DA.DB \sin \gamma \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{DA}{HA} \frac{DB}{HB} \cdot \sin \gamma \text{ hay } \sin \varphi = \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

đpcm.

Bài 23:

Cho tứ diện ABCD vuông ở D. gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa đường cao DH với các cạnh DA, DB, DC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos^2 \gamma} + \frac{\cos \alpha + \cos \gamma}{\cos^2 \beta} + \frac{\cos \gamma + \cos \alpha}{\cos^2 \beta} \geq 6\sqrt{3}$$



$$\text{Đặt } T = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos^2 \gamma} + \frac{\cos \alpha + \cos \gamma}{\cos^2 \beta} + \frac{\cos \gamma + \cos \alpha}{\cos^2 \beta}$$

$$\text{Và } x = \cos \alpha, y = \cos \beta, z = \cos \gamma, \text{ ta có: } x = \frac{DH}{DA}, y = \frac{DH}{DB}, z = \frac{DH}{DC}$$

$$\text{Ta được: } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(\text{vì trong tứ diện } ABCD \text{ vuông ở } D \text{ ta có hệ thức } \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DH^2})$$

Trong đó $0 < x, y, z < 1$ do đó các góc α, β, γ đều nhọn, ta có:

$$\begin{aligned} (x + y + z)T &= (x + y + z) \left(\frac{y + z}{x^2} + \frac{z + x}{y^2} + \frac{x + y}{z^2} \right) \\ &= \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + \frac{x + y}{z} + \left(\frac{y + z}{x} \right)^2 + \left(\frac{z + x}{y} \right)^2 + \left(\frac{x + y}{z} \right)^2 \\ &\geq \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + \frac{x + y}{z} \right)^2 \\ &\geq 2 + 2 + 2 + \frac{1}{3} \cdot 6^2 = 18 \quad (1) \quad (\text{theo BĐT Cauchy - Bunhiacôpski}) \end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo BĐT Cauchy thì :

$$0 < x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta được: } T \geq \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow DA = DB = DC \Leftrightarrow$ tứ diện ABCD vuông cân ở D.

Bài 24:

Cho tứ diện OABC trong đó OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một.

Gọi $S = S_{\triangle ABC}, S_1 = S_{\triangle OBC}, S_2 = S_{\triangle OAC}$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{S_1^2}{S^2 + S_1^2} + \frac{S_2^2}{S^2 + S_2^2} + \frac{S_3^2}{S^2 + S_3^2} \leq \frac{3}{4} \quad (*)$$

Ta chứng minh được: $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có :

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geq 9 \quad (1) \quad (\text{với } x, y, z \text{ dương})$$

Áp dụng(1) ta có:

$$\left[(S^2 + S_1^2) + (S^2 + S_2^2) + (S^2 + S_3^2)\right] \cdot \left[\frac{1}{S^2 + S_1^2} + \frac{1}{S^2 + S_2^2} + \frac{1}{S^2 + S_3^2}\right] \geq 9$$

$$\Rightarrow 4S^2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{S^2 + S_i^2} \geq 9$$

$$\text{suy ra } \sum_{i=1}^3 \frac{1}{S^2 + S_i^2} \geq \frac{9}{4S^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{S^2}{S^2 + S_i^2} \geq \frac{9}{4}$$

$$\text{mà } \frac{S^2}{S^2 + S_i^2} = 1 - \frac{S_i^2}{S^2 + S_i^2}$$

$$\text{suy ra } \sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{S_i^2}{S^2 + S_i^2}\right) \geq \frac{9}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{S_i^2}{S^2 + S_i^2} \leq \frac{3}{4}$$

Dấu “=” xảy ra cho (*)

$$\Leftrightarrow S^2 + S_1^2 = S^2 + S_2^2 = S^2 + S_3^2 \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow OABC \text{ là tứ diện vuông cân ở } O$$

Bài 25:

Các cặp cạnh chéo nhau của tứ diện ABCD là a,d;b,e;c,f. Gọi S_1 là diện tích lớn nhất của thiết diện song song với cặp cạnh a,d. Tương ứng gọi S_2, S_3 là diện tích lớn nhất của các thiết diện song song với cặp cạnh b,e và c,f. Chứng minh rằng :

$$1/ S_1 + S_2 + S_3 \leq \frac{1}{4} (ad + be + cf)$$

2/ Chứng minh rằng dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức trên khi và chỉ khi ABCD là tứ diện trực tâm.

Giả sử: $AB = a; CD = d$

$BC = b; AD = e$

$BD = c; AC = f$

Dễ dàng thấy rằng mọi thiết diện của tứ diện song song với cặp cạnh a,d là hình bình hành MNPQ

Đặt $\frac{AM}{AC} = x \quad (0 < x < 1)$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$\frac{AM}{CD} = \frac{AM}{AC} = x \Rightarrow MQ = xd$$

$$\text{Do } \frac{AM}{AC} = x \Rightarrow \frac{CM}{AC} = 1 - x$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{AC} = 1 - x \Rightarrow MN = (1 - x)a$$

$$\text{Gọi } \alpha = (\widehat{AC, CD}) \Rightarrow \widehat{MNP} = \alpha \Rightarrow S_{MNPQ} = x(1 - x)ad \sin \alpha$$

$$\text{Vậy } S_1 = \max S_{MNPQ} = \max_{(0 < x < 1)} \{x(1 - x)ad \sin \alpha\} = \frac{ad \sin \alpha}{4}$$

(max này đạt được $\Leftrightarrow$ M là trung điểm của AC)

Tương tự gọi β, γ lần lượt là góc giữa các cặp cạnh chéo nhau b,c và c,f thì ta có

$$S_2 = \frac{be \sin \beta}{4}; S_3 = \frac{cf \sin \gamma}{4}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{4} (ad \sin \alpha + be \sin \beta + cf \sin \gamma)$$

$$\text{Vậy bất đẳng thức } S_1 + S_2 + S_3 \leq \frac{1}{4} (ad + be + cf)$$

là hiển nhiên đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = 1$

$$\Leftrightarrow AB \perp CD, BC \perp AD, BD \perp AC$$

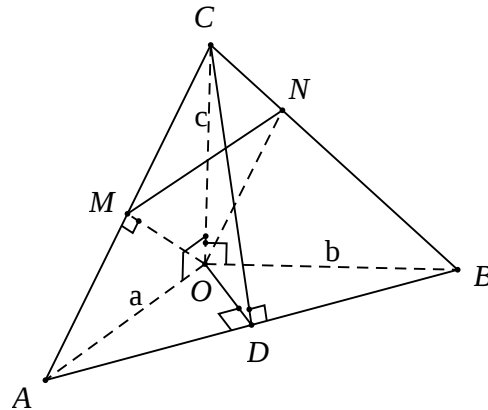
$$\Leftrightarrow ABCD \text{ là tứ diện trực tâm. Đó là đ.p.c.m}$$

Bài 26:

Cho một tam diện vuông đỉnh O. Trên 3 cạnh của tam diện, lấy 3 điểm A, B, C sao cho $AC = 2.OB, BC = 2.OA$

- 1) M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ O xuống AC và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với OC
- 2) Tính $\cos \widehat{MON}$
- 3) Gọi D là điểm giữa của đoạn AB.

$$\text{Chứng minh: } \frac{\tan^4(\widehat{OCD})}{\tan^4(\widehat{OCA})} + \frac{MN}{AB} = 1$$



1) Ta có: $OC \perp OA, OB$

$\Rightarrow OC \perp (OAB)$

$\Rightarrow OC \perp MN$

Vậy: $MN \perp OC$

2) Để cho gọn, đặt $OA = a$

$OB = b, OC = c$

$\Rightarrow AC = 2b; BC = 2a$

$\triangle OAC$ vuông ở O

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 4b^2$$

$\triangle OBC$ vuông ở O

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 4a^2$$

Do đó ta có: $a^2 - b^2 = 4b^2 - 4a^2$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 \Leftrightarrow b = a; c = a\sqrt{3} \text{ và } AB = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC \text{ (cgc)} \Rightarrow OM = ON = \frac{ac}{2b} = \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } CM = CN = \frac{OC^2}{AC} = \frac{c^2}{2a} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$$

Các tam giác cân CMN và CAB đồng dạng. Ta có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} = \frac{2}{2a} = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = \frac{3}{4} AB = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Vận dụng định lý hàm cosin vào $\triangle OMN$, ta có:

$$\cos \widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \frac{\frac{3a^2}{2} - \frac{18a^2}{16}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy: } \cos \widehat{MON} = \frac{1}{4}$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$3) \Delta OAB \text{ vuông cân} \Rightarrow OD \perp AB \text{ và } OD = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ta có

$$OC \perp (OAB), OD \perp AB \Rightarrow CD \perp AB$$

$$\Delta OCD \text{ vuông tại } O \Rightarrow \operatorname{tg} \widehat{OCD} = \frac{OD}{OC} = \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Delta OCA \text{ vuông tại } O \Rightarrow \operatorname{tg} \widehat{OCA} = \frac{OA}{OC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{MN}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Do đó: } \frac{\operatorname{tg}^4(\widehat{OCD})}{\operatorname{tg}^4(\widehat{OCA})} + \frac{MN}{AB} = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^4 + \frac{3}{4} = \frac{9}{36} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\text{Vậy: } \frac{\operatorname{tg}^4(\widehat{OCD})}{\operatorname{tg}^4(\widehat{OCA})} + \frac{MN}{AB} = 1$$

PHẦN III – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho tứ diện vuông SABC đỉnh S và các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) lần lượt hợp với đáy góc α, β, γ . chứng minh

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma + \cot g^2 \alpha + \cot g^2 \beta + \cot g^2 \gamma \geq \frac{15}{2}$$

Bài 2:

Cho điểm M cố định ở trong góc tam diện Oxyz, cố định các mặt phẳng qua M và song song với các mặt tam diện cắt Ox, Oy, Oz tại A_1, B_1, C_1 . Mặt phẳng (α) di động qua M và cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C khác O.

$$\text{a) chứng minh } \frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC} = 1$$

$$\text{b) Tìm vị trí của } (\alpha) \text{ sao cho: } \frac{1}{V_{OMAB}} + \frac{1}{V_{OMBC}} + \frac{1}{V_{OMCA}} - \frac{\sqrt{e}}{V_{OABC}} \text{ đạt GTLN.}$$

Bài 3:

Cho 3 điểm A, B, C lần lượt trên 3 cạnh Ox, Oy, Oz của tam diện vuông Oxyz sao cho $OA^2 + OB^2 + OC^2 = K^2$ ($K > 0$ cho trước). Gọi D là đỉnh thứ 4 của hình chữ nhật OADB và M di động trên CD.

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

- a) Với mỗi vị trí của A, B, C, gọi $d = MA + MB$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của (d)
 b) Xác định vị trí của A, B, C để d đạt GTLN

Bài 4:

Cho tứ diện vuông OABC với $OA = OB = OC = a$.

- a) Xác định mp(P) sao cho tổng diện tích hình chiếu của các mặt tứ diện lên (P) đạt GTLN
 b) (P) hợp với các mặt (BOC), (COA), (OAB) các góc nhọn α, β, γ . chứng minh $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

Bài 5:

Cho tứ diện OABC vuông tại O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa đường cao OH với các cạnh OA, OB, OC. Tìm GTNN của biểu thức

$$T = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos^2 \gamma} + \frac{\cos \gamma + \cos \beta}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha + \cos \gamma}{\cos^2 \beta}$$

Bài 6:

Cho tứ diện OABC có ba góc phẳng ở C đều vuông. Gọi x, y, z lần lượt là các góc nhị diện cạnh BC, CA, AB. Tìm GTNN của biểu thức

$$E = \sqrt{\sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x}} + \sqrt{\sin^4 y + \frac{1}{\sin^4 y}} + \sqrt{\sin^4 z + \frac{1}{\sin^4 z}}$$

Bài 7:

Cho tam diện Oxyz có 3 góc ở đỉnh vuông. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm nằm trên Ox, Oy, Oz.

- a) Cho A, B cố định, C di động trên Oz. Tìm quỹ tích chân các đường trung tuyến vẽ từ A, B, suy ra quỹ tích trọng tâm của tam giác ABC.
 b) Cho điểm C cố định, còn 2 điểm A, B di động sao cho $OA + OB = 1$ không đổi. Tìm quỹ tích trung điểm M của AB và suy ra quỹ tích trọng tâm tam giác ABC

PHẦN IV - ỨNG DỤNG CỦA TỨ DIỆN VUÔNG**Định nghĩa:**

Tứ diện vuông là tứ diện có một góc tam diện ba mặt vuông. Trong tứ diện vuông có một tính chất đáng chú ý sau đây.

Tính chất:

Giả sử OABC là tứ diện vuông tại O ($OA \perp OB, OB \perp OC, OC \perp OA$).

Khi đó đường cao OH của tứ diện OABC được tính theo công thức

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Chứng minh: (h.6.1) Dựng $OD \perp BC$ thì $AD \perp BC$ nên $CB \perp (AOD)$.

Kẻ $OH \perp AD$, lúc đó $OH \perp (ABC)$. Trong các tam giác vuông OBC và OAD có

$$\frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}; \quad \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OA^2}$$

$$\text{Vì vậy } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Sử dụng tính chất này để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong nhiều trường hợp tỏ ra khá bất lợi. Trong bài viết, ký hiệu $d(a; b)$ là khoảng cách giữa đường thẳng a và đường thẳng b ; $d(X; (YZT))$ là khoảng cách từ điểm X đến mặt phẳng (YZT) .

Thí dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a ,

$$\widehat{BAD} = 60^\circ, SO \perp mp(ABCD) \text{ và } SO = \frac{3a}{4}$$

a) Tính $d(O; (SBC))$, $d(A; (SBC))$.

b) Tính $d(AD; SB)$.

Lời giải.

$$\text{a) Từ giả thiết ta tính được } OB = \frac{a}{2}; \quad OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do tứ diện $OSBC$ vuông tại O nên

$$\frac{1}{d^2(O; (SBC))} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{16}{9a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{64}{9a^2}$$

$$\text{Suy ra } d(O; (SBC)) = \frac{3a}{8}$$

$$\text{Lại có } \frac{d(A; (SBC))}{d(O; (SBC))} = \frac{CA}{CO} = 2$$

Nên:

$$d(A; (SBC)) = 2d(O; (SBC)) = 2 \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3a}{4}$$

$$\text{b) vì } AD \parallel (SBC) \text{ nên } d(AD; SB) = d(AD; (SBC)) = d(A; (SBC)) = \frac{3a}{4}$$

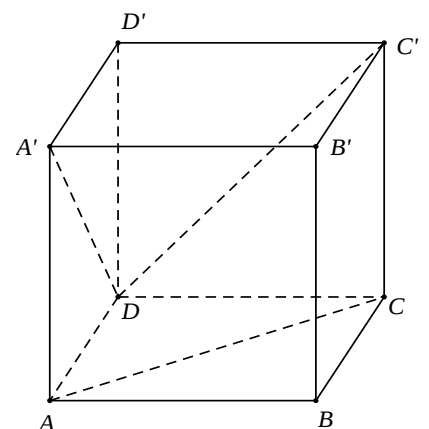
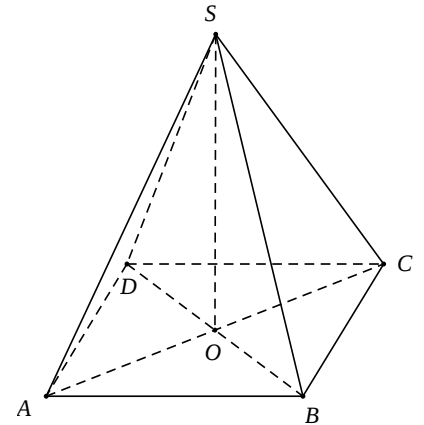
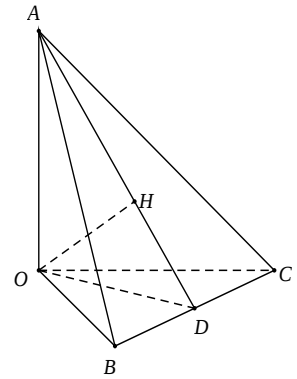
Thí dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

Tính $d(AC; D'C')$

Lời giải.

Vì $AC \parallel (DA'C')$ nên

$$d(AC; D'C') = d(AC; (DA'C')) = d(A; (DA'C')) = d(D'; (DA'C'))$$



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Tứ diện $D'DAC'$ vuông tại D' nên

$$\frac{1}{d^2(D'; (DAC'))} = \frac{1}{D'A'^2} + \frac{1}{D'C'^2} + \frac{1}{D'D^2} = \frac{3}{a^2}$$

$$\text{Do đó } d(AC; DC') = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Thí dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC

a) Tính $d(AM; B'C)$

b) Tính $d(M; (AB'C))$

Lời giải.

a) Gọi E là trung điểm của BB' thì $B'C \parallel (AME)$. Do đó

$$d(AM; B'C) = d(B'C; (AME)) = d(B'; (AME)) = d(B; (AME))$$

Vì tứ diện $BAME$ vuông tại B nên ta có:

$$\frac{1}{d^2(B; (AME))} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{7}{a^2}$$

$$\text{Suy ra } d(B; (AME)) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

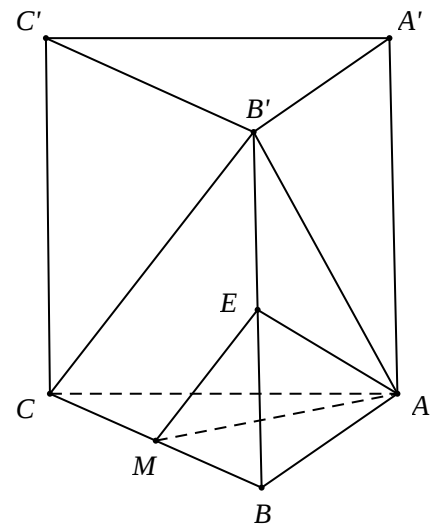
$$\text{Vậy } d(AM; B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

b) Ta thấy $d(M; (AB'C)) = \frac{1}{2}d(B; (AB'C))$. Vì tứ diện $B.AB'C$

vuông tại B , nên

$$\frac{1}{d^2(B; (AB'C))} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{2a^2}$$

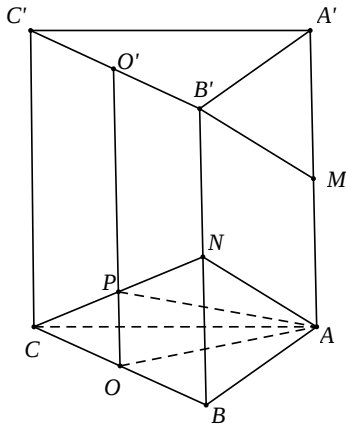
$$\text{Suy ra } d(B; (AB'C)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}. \text{ Do đó } d(M; (AB'C)) = \frac{a\sqrt{10}}{10}$$



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Thí dụ 4. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' . Tính $d(B'M, CN)$

Lời giải.



Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$; còn P là giao điểm của OO' với CN . Vì $B'M \parallel mp(CAN)$ nên $d(B'M; CN) = d(B'M; (CAN)) = d(B'; (CAN)) = d(B; (CAN)) = 2d(O; (CAN)) = 2d(O; (CAP))$

Tứ diện $OACP$ vuông tại O nên

$$\frac{1}{d^2(O; (CAP))} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{64}{3a^2}$$

$$\text{Vậy } d(O; (CAP)) = \frac{a\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{Do đó } d(B'M, CN) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Thí dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính $d(H; (SCD))$

Lời giải

Gọi M là giao điểm của AB với CD ; K là giao điểm của AH với SM . Dễ thấy B là trung điểm của AM . Ta có:

$$\frac{BH}{BS} = \frac{BH \cdot BS}{BS^2} = \frac{BA^2}{BS^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

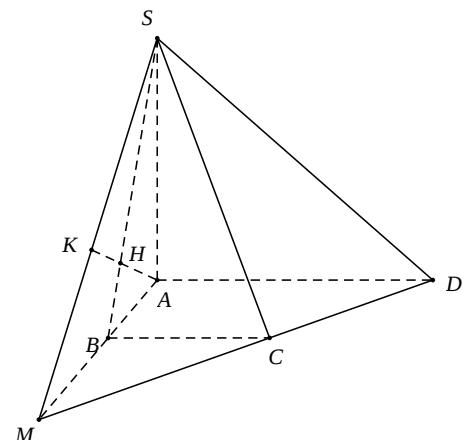
Suy ra H là trọng tâm của tam giác SAM

$$\text{Từ đó } \frac{d(H; (SCD))}{d(A; (SCD))} = \frac{KH}{KA} = \frac{1}{3}$$

Tứ diện $ASDM$ vuông tại A nên

$$\frac{1}{d^2(A; (SCD))} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2}$$

Suy ra $d(A; (SCD)) = a$



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$\text{Vậy } d(H; (SCD)) = \frac{a}{3}$$

Thí dụ 6. Cho hình lập phương ABCD. $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD' . Tính $d(K; A'D)$

Lời giải(h.6.7)

Gọi M là trung điểm của BB'

Ta có $A'M \parallel KC$ nên

$$d(K; A'D) = d(K; (A'MD)) = d(K; (A'MD))$$

Gọi N là giao điểm của AK với $A'D$

P là giao điểm của AB với $A'M$

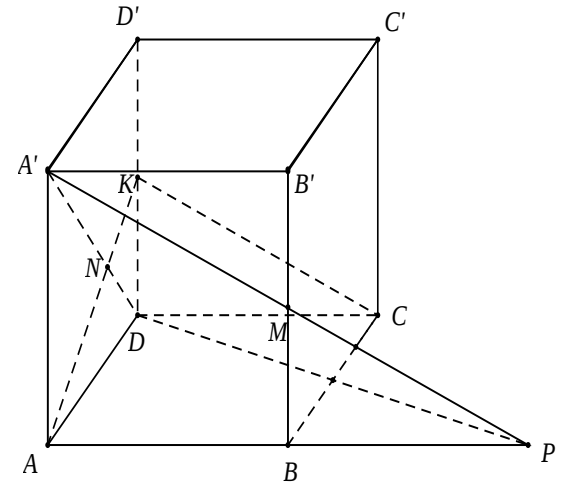
$$\text{Khi đó } \frac{d(K; (A'MD))}{d(A; (A'MD))} = \frac{NK}{NA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } d(K; A'D) = \frac{1}{2} d(A; (A'MD)) = \frac{1}{2} d(A; (A'DP))$$

$$\text{Tứ diện } AA'DP \text{ vuông tại A nên } \frac{1}{d^2(A; (A'DP))} = \frac{1}{AA'^2} +$$

$$\frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AP^2} = \frac{9}{4a^2}$$

$$\text{Suy ra } d(A; (A'DP)) = \frac{2a}{3}. \text{ Vậy } d(K; A'D) = \frac{a}{3}$$

**BÀI TẬP**

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính $d(SM; BN)$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Tính $d(G; (SBD))$

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và SA vuông góc với đáy, với $SA = a\sqrt{6}$. Tính $d(AD; (SBC))$

3. Cho tứ diện ABCD có $AD = BC = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$. Tính $d(A; (BCD))$

4. Cho hình lập phương ABCD. $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $A'A$, AD và CC' . Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính $S(B; (MNP))$, $d(O; (MNP))$

5. Cho hình hộp chữ nhật ABCD. $A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = a$. Gọi M là điểm chia trong đoạn AD theo tỉ số $\frac{MA}{MD} = 3$. Tính $d(M; (A'B'C'))$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=6\text{ cm}$, $AD=4\text{ cm}$ và $d(A; (A'BD))=2\text{ cm}$. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SO \perp mp(ABCD)$, $AC=4$, $BD=2$, $SO=\sqrt{3}$. Tính

a) $d(A; (SBC))$

b) $d(AB; SD)$

8. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết $AA'=1$, $BC=2$, $AB=\sqrt{3}$. Tính $d(A; (A'BC))$

PHẦN V - MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Trong chương trình môn Hình học không gian lớp 11, bên cạnh những bài toán xác định, tính toán các yếu tố hoặc chứng minh tính chất còn kể đến các bài toán cực trị có ứng dụng rất lớn. Những dạng bài toán như vậy trong sách giáo khoa phổ thông còn ít; hơn nữa nhiều học sinh còn gặp khó khăn khi xác định phương pháp giải.

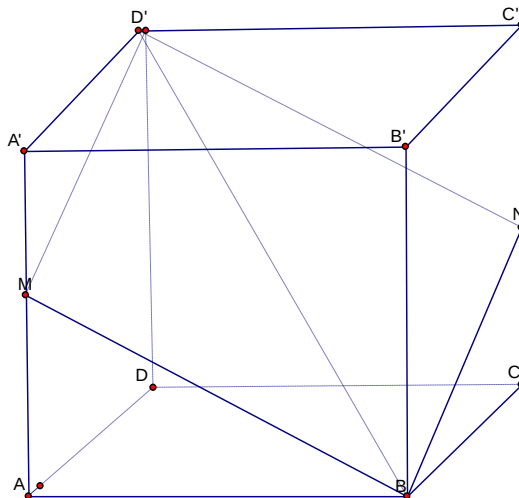
1. Giải bài toán cực trị hình học liên hệ giữa các yếu tố: độ dài đoạn vuông góc chung là khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm của hai đường thẳng chéo nhau

Bài toán: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Xét các mặt phẳng đi qua BD' cắt AA' ở M , cắt CC' ở N . Xác định vị trí của M , N sao cho diện tích thiết diện tạo thành có diện tích nhỏ nhất.

Giải:

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

Một mặt phẳng đi qua BD' cắt AA' ở M , cắt CC' ở N (như hình vẽ).



Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Do các mặt bên đối diện song song với nhau, nên các cạnh đối của thiết diện song song; mặt phẳng đi qua BD' cắt hình hộp phương theo thiết diện là hình bình hành $BMD'N$. Gọi H là hình chiếu của M trên BD' .

Diện tích S của thiết diện bằng 2 lần diện tích của tam giác MBD' .

Ta có: $S = MH \cdot BD'$.

Vì $BD' = a \cdot \sqrt{3}$ không đổi. Suy ra S nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

Do M thuộc AA' , H thuộc BD' . MH nhỏ nhất khi nó là đường vuông góc chung của AA' và BD' .

Khi đó dễ chứng minh rằng H là tâm của hình lập phương và M là trung điểm của AA' , N là trung điểm của CC' .

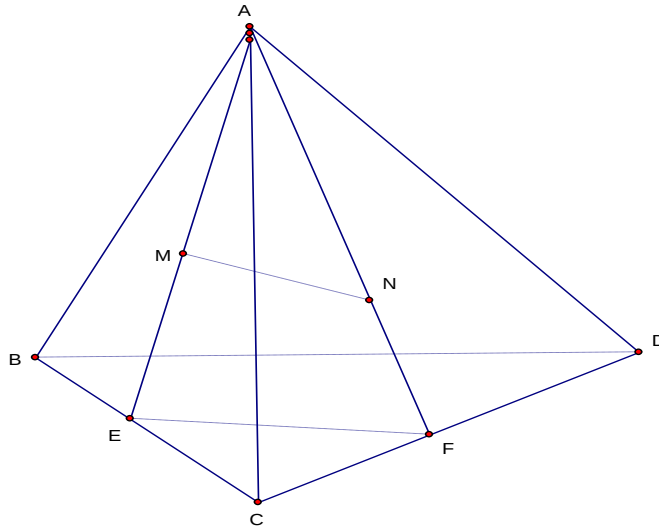
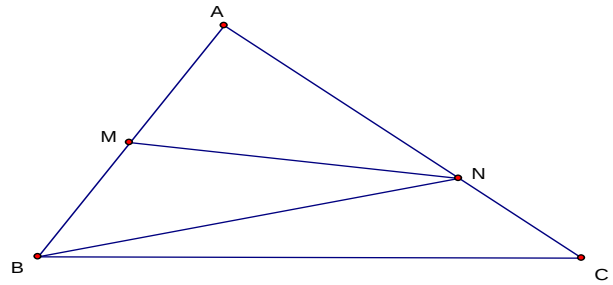
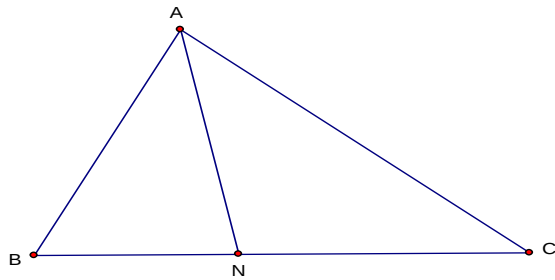
2. Giải bài toán cực trị hình không gian thông qua bài toán cực trị trong hình học phẳng

Bài toán:

Chứng minh rằng cạnh dài nhất của một hình tứ diện là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm thuộc tứ diện.

Giải:

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Trước tiên ta xét bài toán hình học phẳng: “ Chứng minh rằng trong tam giác, cạnh dài nhất chính là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm thuộc tam giác”.

Gọi 2 điểm bất kỳ thuộc tam giác là M, N. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp M, N trùng với hai đỉnh của tam giác ta có ngay:

$$MN \leq \max (AB, AC, BC).$$

Trường hợp M, hoặc N trùng với 1 đỉnh của tam giác (giả sử M trùng với A). Khi đó nếu N thuộc AB hoặc N thuộc AC thì ta có ngay lời giải. Nếu N thuộc BC thì $MN < AB$ hoặc $MN < AC$. Do đó $MN \leq \max (AB, AC, BC)$.

Trường hợp M và N không trùng với đỉnh của tam giác. Ta đưa về trường hợp trên bằng cách nối NB, ta có: $MN < \max (AB, BN, NA) \leq \max (AB, BC, CA)$.

Bài toán trên được chứng minh. Ta sử dụng kết quả để giải bài toán không gian.

Xét khoảng cách giữa M và N là 2 điểm bất kỳ thuộc tứ diện ABCD. Bao giờ cũng dựng được một tam giác có 3 cạnh thuộc các mặt của tứ diện và chứa M, N (chỉ cần dựng 1 mặt phẳng chứa MN và 1 đỉnh của tứ diện (hình vẽ). Nối AM cắt BC ở E, nối AN cắt CD ở F.

Theo kết quả bài toán phẳng:

$$MN \leq \max (AE, EF, FA).$$

$$\text{Mà } AE \leq \max (AB, BC, CA); EF \leq \max (BC, CD, DB); AF \leq \max (AC, CD, DA).$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max (AE, EF, FA) \leq \max (AB, AC, AD, BC, CD, DA).$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Tức là MN không lớn hơn cạnh của tứ diện.

3. Giải bài toán cực trị hình học bằng phương pháp chứng minh bất đẳng thức liên hệ giữa các yếu tố

Bài toán:

Trong các tứ diện vuông (tứ diện có 3 mặt vuông xuất phát từ một đỉnh) nằm trong một mặt cầu bán kính R ; tìm kích thước tứ diện ngoại tiếp mặt cầu có bán kính lớn nhất.

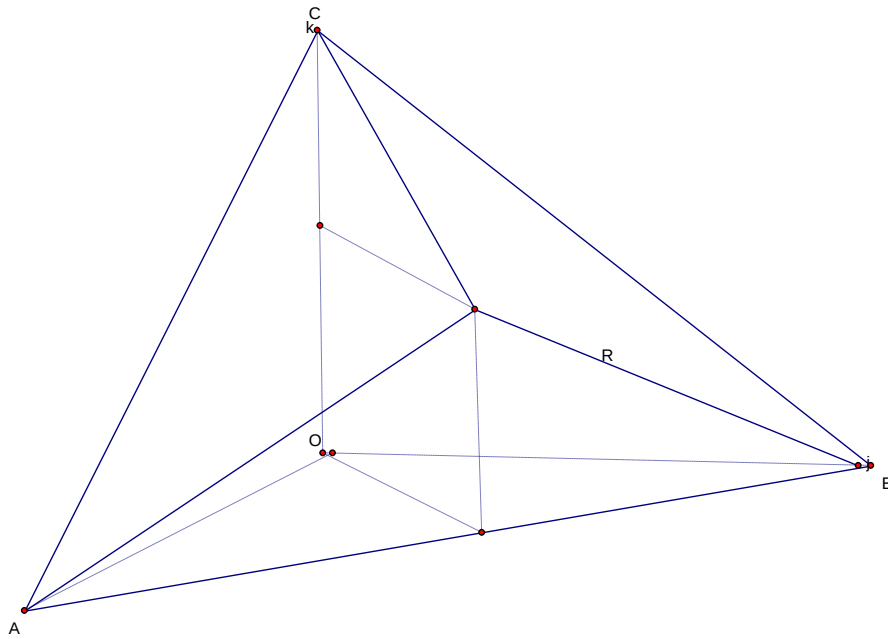
Giải:

Để thấy tứ diện vuông cần tìm nội tiếp trong mặt cầu bán kính R cho trước.

Giả sử tứ diện vuông $OABC$ có các mặt vuông OAB , OBC , OCA vuông ở O và $OA = a$,

$OB = b$, $OC = c$; ta có: $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

Thể tích tứ diện $OABC$ là: $V = \frac{1}{6} a.b.c$; (1)



Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ ta có:

$$V = \frac{r}{3} (S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} + S_{ABC}) = \frac{r}{6} (a.b + b.c + c.a + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$

Do đó : $\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \right)$.

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Ta có: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}} = \sqrt{3\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}}$, đẳng thức có khi : $a = b = c$;

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}}, \text{ đẳng thức có khi : } a = b = c.$$

$$\text{Vì } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{\left(a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c}\right)^2} = 3,$$

đẳng thức có khi : $a = b = c$;

$$\text{Suy ra: } \frac{R}{r} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}; \text{ hay } r \leq \frac{2R}{3(1+\sqrt{3})} = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{3},$$

$$\text{đẳng thức có khi } a = b = c = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Vậy tứ diện vuông cần tìm có 3 cạnh $a = b = c = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, chứa mặt cầu có bán kính lớn nhất là

$$r = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{3}.$$

4. Giải bài toán cực trị hình học bằng phương pháp diện tích, thể tích

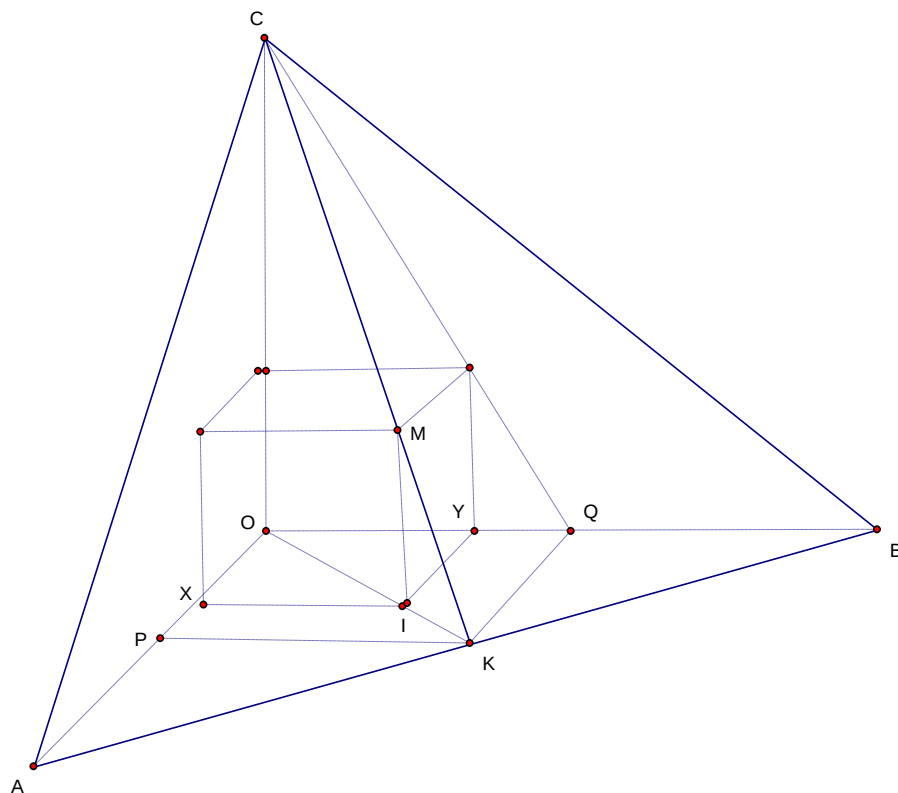
Bài toán:

Cho tứ diện 3 mặt vuông OABC đỉnh O, có OA = a, OB = b, OC = c. Gọi x, y, z là khoảng cách từ một điểm M trên mặt ABC đến các mặt OBC, OCA, OAB. Tìm giá trị lớn nhất của tích $T = x \cdot y \cdot z$.

Giải:

Cho tứ diện vuông OABC, có OA = a, OB = b, OC = c, vẽ hình hộp chữ nhật nội tiếp có 1 đỉnh M nằm trên mặt ABC, các đỉnh còn lại nằm trên các mặt vuông của tứ diện (như hình vẽ).

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn



Đặt các kích thước của hình hộp chữ nhật là $OX = x$, $OY = y$, $OZ = z$. Khi đó x, y, z tương ứng bằng khoảng cách từ M đến các mặt OBC , OCA , OAB .

Ta có thể tích của hình hộp là: $V = x \cdot y \cdot z$

Vẽ CM cắt AB tại K ; gọi I là hình chiếu của M trên mặt OAB và là đỉnh của hình hộp chữ nhật, ta có O, I, K thẳng hàng; gọi $KQ = x_1$, $KP = y_1$ tương ứng là các đoạn vuông góc từ K đến OB , OA .

Khi đó sử dụng tỷ số diện tích của hai hình chữ nhật $OXYI$ và $OPKQ$ đồng dạng với hệ số tỷ lệ là: $OI/OK = ZM/OK = CZ/CO = (c - z)/c$; ta được :

$$x \cdot y = (c - z)^2 \cdot x_1 \cdot y_1 / c^2.$$

Do đó thể tích của hình hộp chữ nhật có ba kích thước: x, y, z là

$$V = x \cdot y \cdot z = (c - z)^2 \cdot z \cdot x_1 \cdot y_1 / c^2 \quad (*).$$

Từ đó suy ra nếu có đồng thời $x_1 \cdot y_1$ lớn nhất và $(c - z)^2 \cdot z$ lớn nhất thì V đạt giá trị lớn nhất.

Ta có hai lần diện tích tam giác OAB là $a \cdot b = x_1 \cdot b + y_1 \cdot a$; áp dụng bất đẳng thức Cô si ta được $x_1 \cdot y_1$ lớn nhất là $a \cdot b / 4$, khi $x_1 = a/2$ và $y_1 = b/2$. Khi đó K là trung điểm của AB .

Hàm số $F(z) = (c - z)^2 \cdot z$ đạt giá trị lớn nhất là: $4c^3/27$, khi $z = c/3$.

Kết hợp lại V trong (*) đạt giá trị lớn nhất là :

$V = a \cdot b \cdot c / 27$; khi $x = a/3$, $y = b/3$, $z = c/3$ (tương thích). Khi đó M là trọng tâm của tam giác ABC .

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

Vậy với M là trọng tâm của tam giác ABC , thì $T = x \cdot y \cdot z$ lớn nhất là: $a \cdot b \cdot c / 27$ với $x = a/3$, $y = b/3$, $z = c/3$.

Cách giải khác (lớp 12)

Xét hệ tọa độ trục chuẩn oyz . Ta có: $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$ (với x, y, z và a, b, c là các số dương). Khi đó phương trình đoạn chắn của mặt phẳng đi qua A, B, C có dạng:

$$x/a + y/b + z/c = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được: $1^3 \geq 3^3 x \cdot y \cdot z / a \cdot b \cdot c$ Đẳng thức có khi $x/a = y/b = z/c = 1/3$.

Hay $x \cdot y \cdot z \leq a \cdot b \cdot c / 27$. Đẳng thức có khi với $x = a/3$, $y = b/3$, $z = c/3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x \cdot y \cdot z$ là: $a \cdot b \cdot c / 27$; với $x = a/3$, $y = b/3$, $z = c/3$.

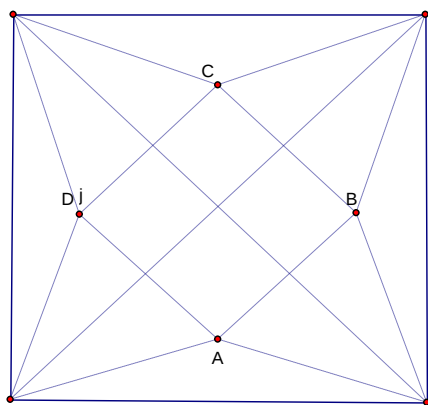
5. Giải bài toán cực trị hình học ứng dụng bằng phương pháp tối ưu hoá

Bài toán:

Cho một tấm bìa hình vuông cạnh a . Cắt theo các cạnh của hình vuông 4 tam giác cân bằng nhau; rồi gấp lên ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Tìm kích thước hình chóp có thể tích lớn nhất.

Giải:

Giả sử hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ dựng được, có cạnh đáy là x . Trải các mặt bên trên mặt phẳng của đáy, ta có hình khai triển của hình chóp như hình vẽ (các đỉnh của hình vuông trùng với đỉnh của hình chóp).



Bây giờ ta xét với giá trị nào của x ($0 < x \leq a\sqrt{2}/2$), sẽ thoả mãn yêu cầu của đề bài?

Gọi V là thể tích của hình chóp $S.ABCD$, có đường cao là SH ta có:

$$V = x^2 \cdot SH / 3.$$

Gọi M là trung điểm của AB , trong tam giác vuông SMH có:

$$SH^2 = SM^2 - HM^2. \text{ Dễ thấy } SM = a\sqrt{2}/2 - x/2 \text{ và } HM = x/2.$$

Sưu tầm: Phạm Minh Tuấn

$$\text{Vậy } V = \boxed{} x^2 \sqrt{(a/2)^2 - a \cdot x/2}.$$

Đặt $t = x / (a\sqrt{2}/2)$ ta được $V = \frac{1}{3} (a^3 \sqrt{2}/4) \cdot t^2 \cdot \sqrt{1-t}$ (với $0 < t \leq 1$).

V đạt giá trị lớn nhất khi $t^2 \cdot \sqrt{1-t}$ đạt giá trị lớn nhất. Chuyển t^2 vào trong căn thức và áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 4 số $t/4$ và số $1-t$, ta tìm được $t = 4/5$.

Suy ra $x = \frac{2}{5} a\sqrt{2}$, thỏa mãn các điều kiện đã đặt, thì V đạt giá trị lớn nhất.

Vậy hình chóp có cạnh đáy là $x = \frac{2}{5} a\sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.