SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THCS – THPT HOA SEN

SỔ TAY TOÁN HỌC-12

Họ và tên: ....
Lớp: ....

LƯU HÀNH NỘI BỘ

SỔ TAY TOÁN HỌC-LỚP 12

Đạo hàm

① $(x^n)' = n.x^{n-1}$

② $(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$

③ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

④ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

⑤ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

⑥ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

⑦ $(\sin x)' = \cos x$

⑧ $(\sin u)' = u'.\cos x$

⑨ $(\cos x)' = -\sin x$

⑩ $(\cos u)' = -u'.\sin x$

⑪ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

⑫ $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

⑬ $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

⑭ $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

⑮ $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

⑯ $(\mathrm{e}^{\mathrm{u}})' = u'.\mathrm{e}^u$

⑰ $(a^x)' = a^x \ln a$

⑱ $(a^u)' = u'.a^u \ln a$

⑲ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

⑳ $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

㉑ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

㉒ $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

Quy tắc tính đạo hàm

① $(u \pm v)' = u' \pm v'$

② $(k.u)' = k.u'$

③ $(u.v)' = u'.v + u.v'$

④ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Quy tắc xét tính đơn điệu hàm số

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x)$ chỉ tại hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K

- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x)$ chỉ tại hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K

Qui tắc xét tính đơn điệu hàm số $y = f(x)$

Bước 1: Tìm tập xác định $\mathscr{D}$

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm nghiệm $f'(x) = 0$, $(x_1.x_2... \in \mathscr{D})$

Bước 3: Lập bảng biến thiên

Bước 4: Từ bảng biến thiên và kết luận tính đơn điệu hàm số $y = f(x)$

Cực trị hàm số

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Qúy tắc 1

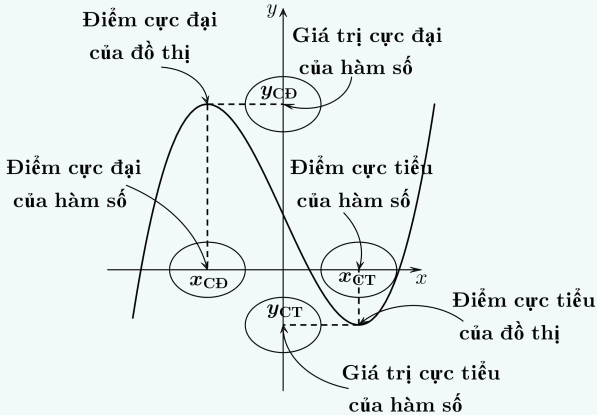
- *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$
- *Bước 2:* Tìm các điểm $x_i (i = 1; 2; ...)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- *Bước 2:* Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. *Nếu* $f'(x)$ *đổi dấu khi đi qua* x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Qúy tắc 2

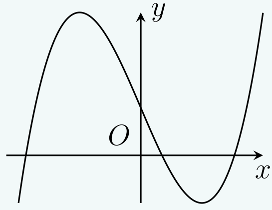
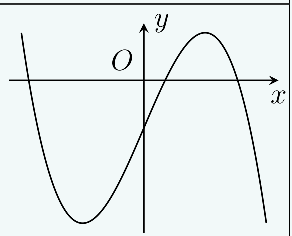
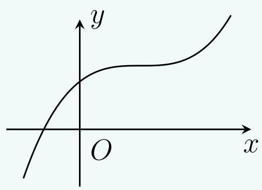
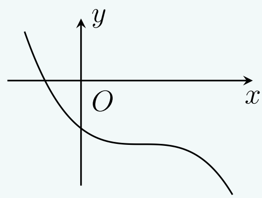
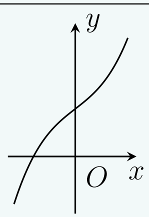
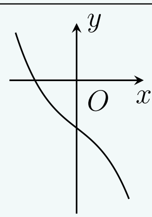
- *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$
- *Bước 2:* Tìm nghiệm $x_i (i = 1; 2; ...)$ của phương trình $f'(x) = 0$
- *Bước 3:* Tính $f''(x)$ và tình $f''(x_i)$

  + Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_i.

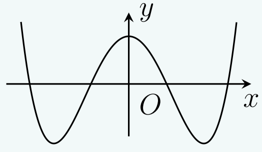
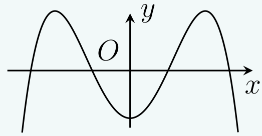
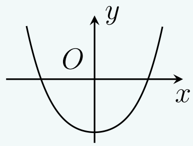
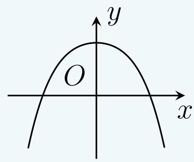
  + Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_i.



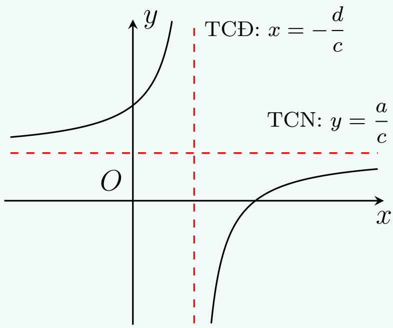
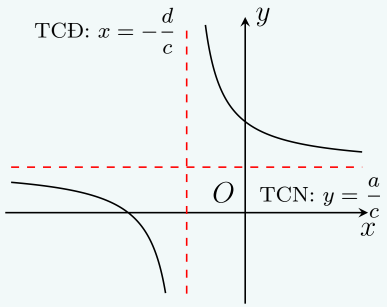
Hàm bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y'; \Delta$	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0; \Delta_{y'} > 0$ (có 2 nghiệm)		
$y' = 0, \Delta_{y'} = 0$ (có nghiệm kép)		
$y' = 0; \Delta_{y'} < 0$ (vô nghiệm)		

Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

$y'; a; b$	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0; a.b < 0$ (có 3 cực trị)		
$y' = 0; a.b \geq 0$ (có 1 cực trị)		

Hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0$	$y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} < 0$
	

Điều kiện đồng biến, nghịch biến hàm bậc 3

(1) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3a.c \leq 0 \end{cases}$$

(2) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3a.c \leq 0 \end{cases}$$

Điều kiện cực trị hàm bậc 3-trùng phương

(1) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, đạt cực đại tại x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$$

(2) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, đạt cực tiểu tại x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$$

(3) Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow a.b < 0$

(4) Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

$$\text{có 1 cực đại, 2 cực tiểu} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

(5) Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

$$\text{có 2 cực đại, 1 cực tiểu} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

(6) Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực trị.

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a \neq 0 \\ a.b \geq 0 \end{cases}$$

(7) Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực tiểu.

$$\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a > 0 \\ a.b \geq 0 \end{cases}$$

(8) Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực đại.

$$\begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a < 0 \\ a.b \le 0 \end{cases}$$

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

— Tính y', cho $y' = 0$, nhận nghiệm $x_1, x_2, \cdots \in [a;b]$

— Tính $y(a), y(b), y(x_1), y(x_2), \cdots$

— So sánh $y(a), y(b), y(x_1), y(x_2), \cdots$

Suy ra $\max\limits_{[a;b]} y$; $\min\limits_{[a;b]} y$

Đường tiệm cận

— $\lim\limits_{x \to x_0^+} y = \pm\infty \left(\lim\limits_{x \to x_0^-} y = \pm\infty \right) \Rightarrow$ TCĐ: $x = x_0$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} y = y_0 \left(\lim\limits_{x \to -\infty} y = y_0 \right) \Rightarrow$ TCN: $y = y_0$

Lũy thừa $(a > 0)$

1 $a^m.a^n = a^{m+n}$	2 $(a.b)^n = a^n.b^n$	3 $\sqrt{a^k} = a^{\frac{k}{2}}$
4 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	5 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	6 $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$
7 $(a^m)^n = a^{m.n}$	8 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	9 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^k}} = a^{\frac{k}{m.n}}$

Lôrarit $(0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1)$

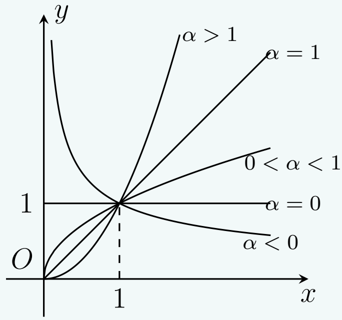
1 $\log_a 1 = 0$	2 $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y.$
3 $\log_a a = 1$	4 $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$
5 $\log_a a^\alpha = \alpha$	6 $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$
7 $\log_x a = \dfrac{1}{\log_a x}$	8 $\log_{a^m} x = \dfrac{1}{m} \log_a x.$

(9) $\log_a x = \log_a b.\log_b x$	(10) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}.$

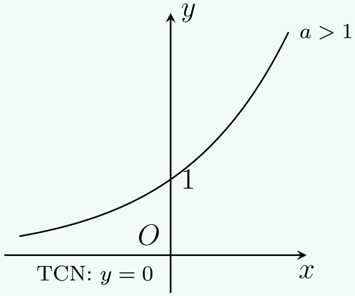
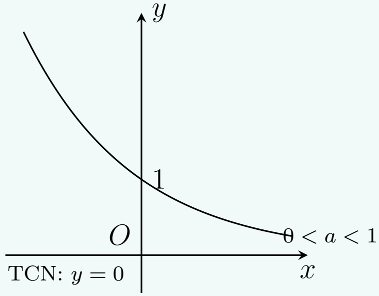
Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Tập xác định:

- $D = \mathbb{R}$ khi α nguyên dương
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ khi α nguyên âm
- $D = (0; +\infty)$ khi α không nguyên

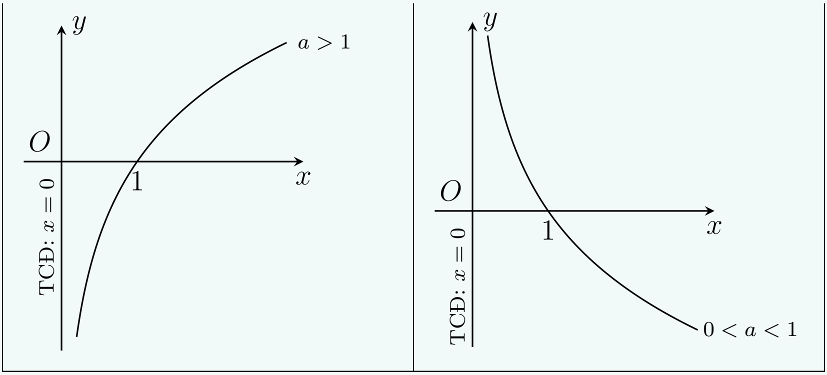


Hàm số mũ $y = a^x$

$a > 1$	$0 < a < 1$
• $D = \mathbb{R}$ 	• $D = \mathbb{R}$ 

Hàm số logarit $y = \log_a x$

$a > 0$	$0 < a < 1$
• $D = (0; +\infty)$	• $D = (0; +\infty)$



Phương trình, bất phương trình mũ

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$	$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$
$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Phương trình và bất phương trình logarit

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$	$\log_a f(x) = \log_b g(x)$ $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Lãi suất ngân hàng

1 **Lãi đơn:** Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì

hạn người gửi không đến rút tiền ra.

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$/kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn $(n \in \mathbb{N}^*)$ là

$$\boxed{S_n = A + n.A.r = A(1 + nr)}$$

(2) **Lãi kép:** Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$/kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn $(n \in \mathbb{N}^*)$ là

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n};\ \boxed{n = \log_{1+r}\left(\frac{S_n}{A}\right)};\ \boxed{r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1};\ \boxed{A = \frac{S_n}{(1+r)^n}}$$

Bảng nguyên hàm

(1) $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + C$	(2) $\displaystyle\int k\mathrm{d}x = kx + C$
(3) $\displaystyle\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	(4) $\displaystyle\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	(6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
(7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
(9) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	(10) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$
(11) $\displaystyle\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(12) $\displaystyle\int a^{\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$
(13) $\displaystyle\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$	(14) $\displaystyle\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
(15) $\displaystyle\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$	(16) $\displaystyle\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
(17) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$	(18) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
(19) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	(20) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

(21) $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

(22) $\int \tan(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln|\cos x| + C$

(23) $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(24) $\int \cot(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sin x| + C$

(25) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(26) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Tích phân

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

(1) $\int\limits_a^a \mathrm{d}x = 0$

(2) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int\limits_a^b k.f(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

(4) $\int\limits_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$

(5) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$

Tích phân từng phần

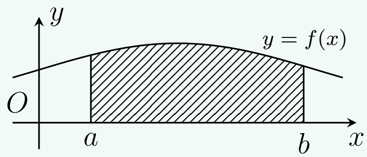
$$\int\limits_a^b u.v'\mathrm{d}x = u.v\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'.v\mathrm{d}x$$

$$\text{hay } \int\limits_a^b u\mathrm{d}v = u.v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v.\mathrm{d}u$$

Diện tích phẳng phẳng

① **Diện tích hình phẳng giới hạn bởi**

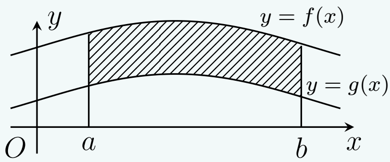
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0; x = a; x = b \end{cases}$$



$$\boxed{S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$$

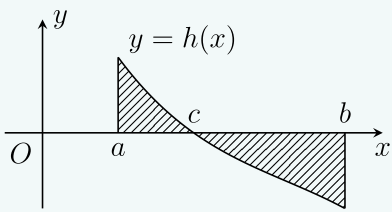
② **Diện tích hình phẳng giới hạn bởi**

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x); x = a; x = b \end{cases}$$



$$\boxed{S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x}$$

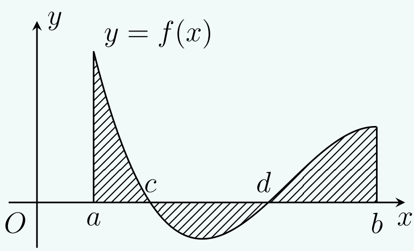
③ **Diện tích hình phẳng**



$$S = \int\limits_a^c |h(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b |h(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int\limits_a^c h(x)\mathrm{d}x - \int\limits_c^b h(x)\mathrm{d}x$$

④ **Diện tích hình phẳng**



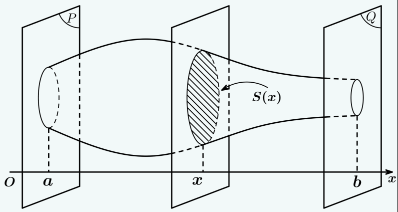
$$S = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^d f(x)\mathrm{d}x$$

Thể tích vật thể tròn xoay

① **Thể tích của vật thể giới bạn bởi**

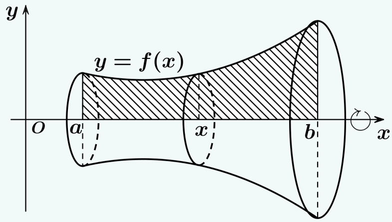
② **Thể tích của vật thể giới bạn bởi**

$$\begin{cases} (P),(Q)\perp Ox \\ x=a;x=b \end{cases}$$



$$\boxed{V=\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x}$$

$$\begin{cases} y=f(x),Ox \\ x=a;x=b \end{cases}$$



$$\boxed{V=\pi.\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$$

Số phức

1 Định nghĩa và tính chất

- $z=a+bi$, $(i^2=-1)$ là số phức
  - Phần thực: a
  - Phần ảo: b
- Cho $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$ thì
  - $z+z'=(a+a')+(b+b')i$
  - $z-z'=(a-a')+(b-b')i$
  - $z.z'=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$
  - $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{a'b-a-b'}{a'^2+b'^2}$

2 Số phức liên hợp

- Cho $z=a+bi$ thì $\overline{z}=a-bi$ là số phức liên hợp của z.
- Tính chất
  - $z.\overline{z}=a^2+b^2$; $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$

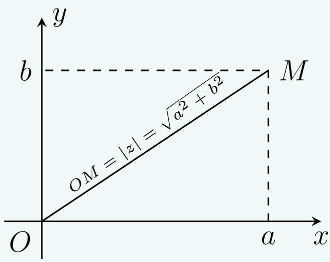
– $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $z + \overline{z} = 2a$; $z - \overline{z} = 2bi$

③ Môđun số phức

- Cho $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|\overline{z}| = |z|$; $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

④ Biểu diễn hình học số phức

$z = a + bi \Rightarrow M(a; b)$

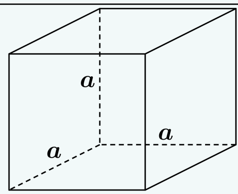
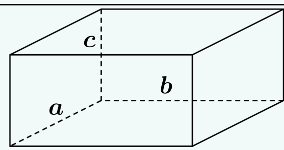


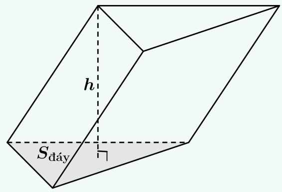
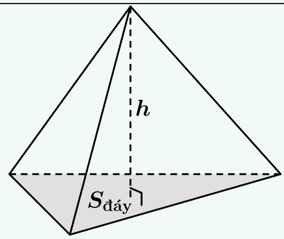
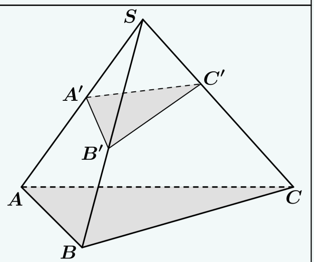
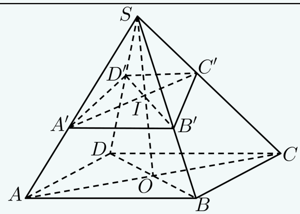
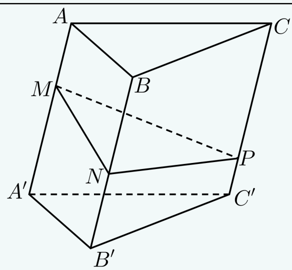
⑤ Phương trình bậc hai

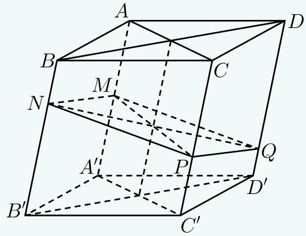
$ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$ phương trình có 2 nghiệm thực: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta < 0$ phương trình có 2 nghiệm phức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2a}$

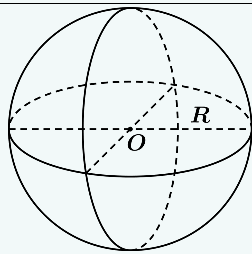
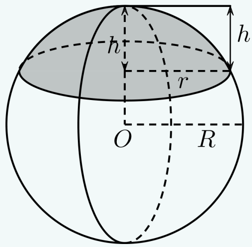
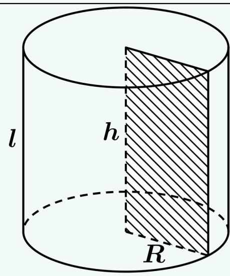
Thể Khối đa diện

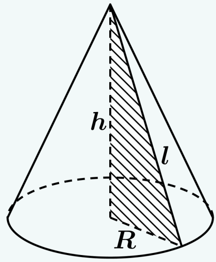
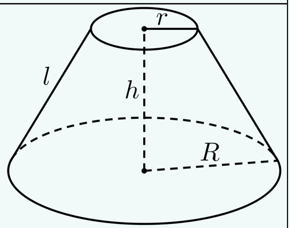
① Thể tích khối lập phương cạnh a: $\boxed{V = a^3}$	
② Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = a.b.c}$	

③ Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V = S_{\text{đáy}}.h}$ $S_{\text{đáy}}$: Diện tích đáy h: chiều cao lăng trụ	
④ Thể tích khối chóp $\boxed{V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}}.h}$ $S_{\text{đáy}}$: Diện tích đáy h: chiều cao lăng trụ	
⑤ Tỉ số thể tích khối chóp Hình chóp $S.ABC$, gọi A', B', C' lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC $\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \frac{SB'}{SB} \frac{SC'}{SC}}$	
⑥ $a = \frac{SA}{SA'}, b = \frac{SB}{SB'}, c = \frac{SC}{SC'}, d = \frac{SD}{SD'}$ $\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abc}}$	
⑦ $a = \frac{AM}{AA'}, b = \frac{BN}{BB'}, c = \frac{CP}{CC'}$ $\boxed{\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3}}$	

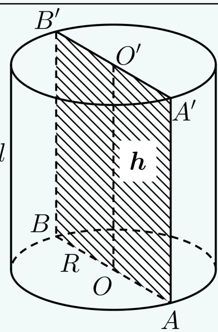
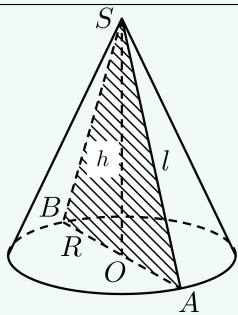
⑧ $a=\dfrac{AM}{AA'}, b=\dfrac{BN}{BB'}, c=\dfrac{CP}{CC'}, d=\dfrac{DQ}{DD'}$ và $a+c=b+d$ $\boxed{\dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{a+b+c+d}{4}}$	

Khối tròn xoay

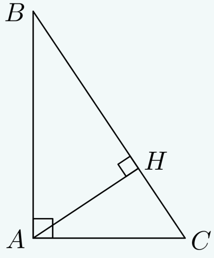
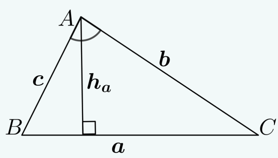
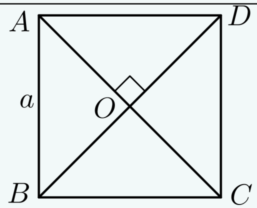
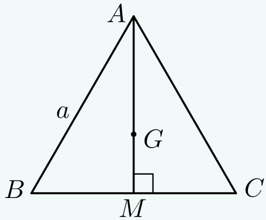
① Diện tích mặt cầu: $S=4\pi R^2$ ② Thể tích khối cầu: $V=\dfrac{4}{3}\pi R^2$	
③ Thể tích chỏm cầu: $\boxed{V=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)=\dfrac{\pi h}{6}\left(3r^2+h^2\right)}$ ④ Diện tích xung quanh chỏm cầu $\boxed{S_{\text{xq}}=2\pi Rh=\pi\left(r^2+h^2\right)}$	
⑤ Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}}=2\pi Rl$ ⑥ Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}}=2\pi R(l+R)$ ⑦ Thể tích khối trụ: $V=\pi Rh$	

(8) Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = \pi Rl$ (9) Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = \pi R(l+R)$ (10) Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.h$ $l = \sqrt{h^2+R^2}$; $h = \sqrt{l^2-R^2}$	
(11) $V = \dfrac{\pi.h}{3}\left(R^2+r^2+R.r\right)$ (12) $S_{\text{xq}} = \pi\left(R+r\right)l$ (13) $S_{\text{tp}} = \pi\left(R^2+r^2+R.l+r.l\right)$	

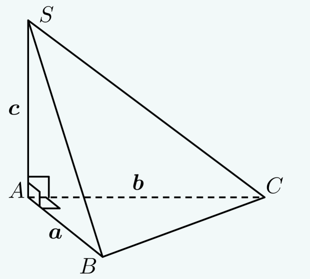
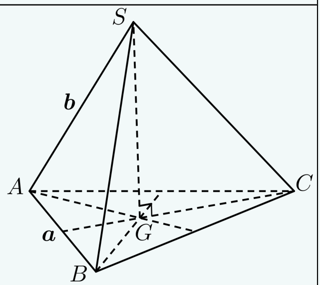
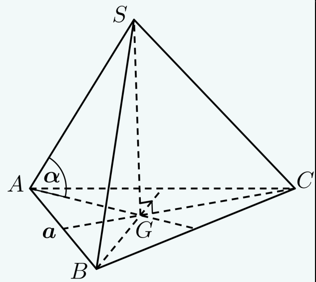
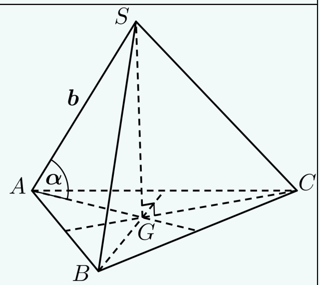
Thiết diện của mặt phẳng cắt hình tròn xoay

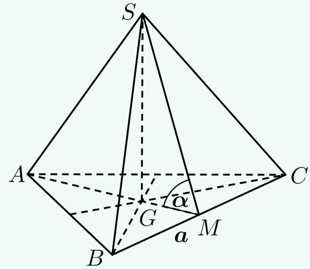
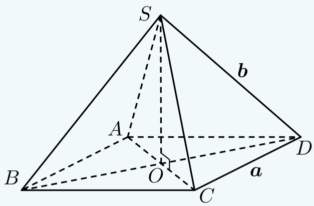
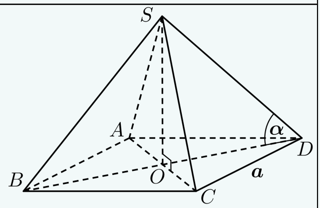
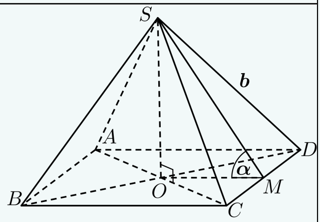
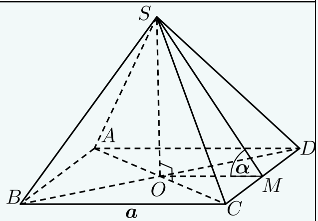
Hình trụ có thiết diện qua trục OO' là hình chữ nhật $ABB'A'$ • Chiều rộng: $AB = 2R$ • Chiều dài: $AA' = h = l$ • Diện tích: $S_{ABB'A'} = AB.AA' = 2.R.l$	
Hình nón có thiết diện qua trục SO là tam cân SAB tại S • Cạnh bên: $SA = SB = l$ • Cạnh đáy: $AB = 2R$ • Diện tích: $S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2}R.h$	

Hình học phẳng

• $\triangle ABC$ vuông tại A: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ • $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ • Diện tích: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC$ • $\triangle ABC$ vuông cân tại tại A $+ S_{\triangle ABC} = \dfrac{BC^2}{4}$ $+ \; BC = AB\sqrt{2}$	
• $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}h_a.a = \dfrac{1}{2}h_b.b = \dfrac{1}{2}h_c.c$ • $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ • $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ • $S_{\triangle ABC} = pr,\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$ • $S_{\triangle ABC} = \dfrac{abc}{4R}$ • $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c\cos A$ • $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$	
• Hình vuông $ABCD$ cạnh a $+ AC = BD = a\sqrt{2}$ $+ S_{ABCD} = a^2$	
• Tam giác ABC đều cạnh a + Đường cao: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $+ GA = GB = GC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ + Diện tích: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	

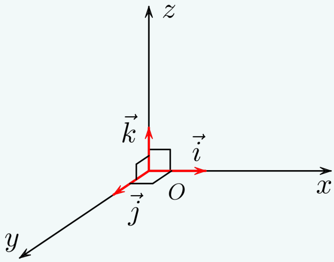
Công thức tính nhanh thể tích

① Hình chóp $S.ABC$ có $SA = c, AB = a, AC = b$ đôi một vuông góc: $\boxed{V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}}$	
② Hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a, cạnh bên bằng b: $\boxed{V_{S.ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}}$ Khi $a = b$ thì $\boxed{V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}$ ③ Hình chóp tam giác đều có cạnh đáy a, cạnh bên tạo với đáy 1 góc α: $\boxed{V_{S.ABC} = \dfrac{a^3 \tan\alpha}{12}}$	 
④ Hình chóp tam giác đều có cạnh bên b, cạnh bên tạo với đáy 1 góc α: $\boxed{V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{3}b \sin\alpha \cos^2\alpha}{4}}$	

⑤ Hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, mặt bên tạo với đáy 1 góc α: $\boxed{V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\tan\alpha}{24}}$	
⑥ Hình chóp đều $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên b: $\boxed{V_{S.ABCD}=\dfrac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}}$ Khi $a=b$ thì $\boxed{V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}}$	
⑦ Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng α: $\boxed{V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}\tan\alpha}{6}}$	
⑧ Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng b, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α: $\boxed{V_{S.ABCD}=\dfrac{4b^3.\tan\alpha}{3\sqrt{(2+\tan^2\alpha)^3}}}$	
⑨ Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α: $\boxed{V_{S.ABCD}=\dfrac{a^2\sqrt{\tan^2\alpha-1}}{6}}$	

Hệ tọa độ trong không gian

① Tọa độ vec-tơ



- Vec-tơ đơn vị:

  $\vec{i}=(1,0,0)$; $\vec{j}=(0,1,0)$; $\vec{k}=(0,0,1)$
- Vec-tơ $\vec{a}=a_1.\vec{i}+a_2.\vec{j}+a_2+a_3.\vec{k} \Rightarrow \vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$
- **Tính chất:** Cho hai vec-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$

  \+ Tổng-hiệu: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$

  \+ Tích 1 số với 1 vec-tơ: $k\vec{a}=(k.a_1;k.a_2;k.a_3)$

  \+ Độ dài vec-tơ: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

  \+ Hai vec bằng nhau: $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$

  $$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\ b_1=b_2\\ a_3=b_3\end{cases}$$

  \+ Hai vec-tơ cùng phương: $\vec{a}=k.\vec{b}$

  $$\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k$$

  \+ Tích vô hướng của hai vec-tơ

  $$\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$$

  \+ Vec-tơ $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$

  $$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$$

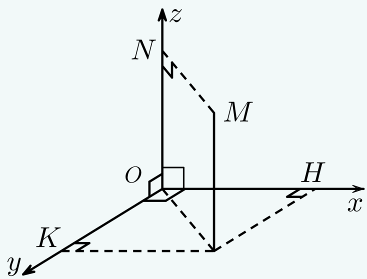
+ Tích có hướng của 2 vec-tơ

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$$

+ Góc giữa hai vec-tơ: $0^\circ\le\alpha\le 180^\circ$

$$\cos\alpha=\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

② Tọa độ điểm



- $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{j}\Rightarrow M(x;y;z)$.
- **Tính chất:**

  Cho các điểm $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$; $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$; $C\left(x_C;y_C;z_C\right)$

  + Độ dài đoạn thẳng AB

  $$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$

  + Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB

  $$I:\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{cases}$$

  + Điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k: $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}$

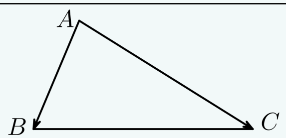
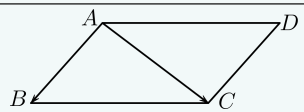
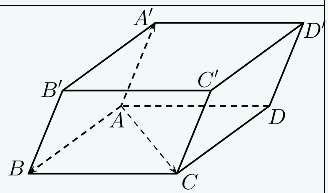
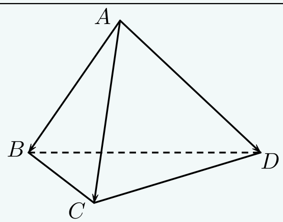
$$x_M = \frac{x_A - k.x_B}{1-k};\ y_M = \frac{y_A - k.y_B}{1-k};\ z_M = \frac{z_A - k.z_B}{1-k}$$

+ Tọa độ trong tâm G của $\triangle ABC$

$$G: \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

Ứng dụng tích có hướng của 2 vec-tơ

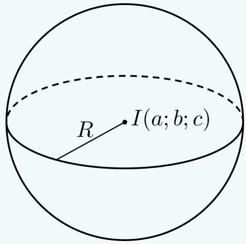
1. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$
2. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$

3. Diện tích $\triangle ABC$: $$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\lvert\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\rvert$$	
4. Diện tích hình bình hành $ABCD$: $$S_{\triangle ABCD} = \left\lvert\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\rvert$$	
5. Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $$V = \left\lvert\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'}\right\rvert$$	
6. Thể tích tứ diện $ABCD$: $$V = \frac{1}{6}\left\lvert\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right\rvert$$	

Phương trình mặt cầu

① Mặt cầu $(S):\begin{cases}\text{tâm } I(a;b;c)\\ \text{bán kính } R\end{cases}$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$



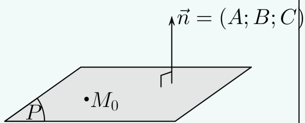
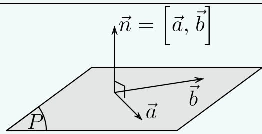
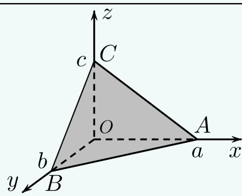
② Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d=0>0$ là phương trình mặt cầu (S)

$$\begin{cases}\text{tâm } I(a;b;c)\\ \text{bán kình } R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}\end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng

① Phương trình tổng quát mặt phẳng (P):

$Ax+By+Cz+D=0$ có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(A;B;C)$

② Mặt phẳng $(P):\begin{cases}\text{qua } M(x_0;y_0;z_0)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n}=(A;B;C)\end{cases}$ $\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$	
③ Mặt phẳng (P) có cặp vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ thì vtpt của (P) là $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]$	
④ Mặt phẳng (ABC) với $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$	

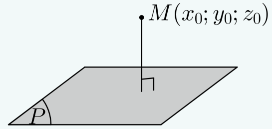
⑤ Các mặt phẳng đặc biệt

$(Oyz): x = 0$	$(Oxz): y = 0$	$(Oxy): z = 0$
$(Oyz) \,/\!/\, x = a$	$(Oxz) \,/\!/\, y = b$	$(Oxy) \,/\!/\, z = c$

⑥ Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M_0; (P)) = \frac{|A.x_0 + B.y_0 + C.z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



⑦ Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng

$(P_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$

$(P_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$

- $(P_1) \,/\!/\, (P_2)$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P_1) \equiv (P_2)$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P_1) \perp (P_2)$: $A_1.A_2 + B_1.B_2 + C_1.C_2 = 0$
- Góc giữa 2 mặt phẳng: $0° \leq (P_1, P_2) \leq 90°$

  $$\cos(P_1, P_2) = \frac{|A_1.A_2 + B_1.B_2 + C_1.C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Phương trình đường thẳng

① **Phương trình tham số**

Đường thẳng (Δ) : $\begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp: } \vec{u} = (a; b; c) \end{cases}$

Phương trình tham số (Δ) : $\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

② Phương trình chính tắc:

$$(\Delta):\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

③ Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

$$(\Delta):\begin{cases}x=x_0+a.t\\y=y_0+b.t\\z=z_0+c.t\end{cases},\ (\Delta'):\begin{cases}x=x'_0+a'.t'\\y=y'_0+b'.t'\\z=z'_0+c'.t'\end{cases}$$

- (Δ) cắt (Δ'): $\begin{cases}x_0+at=x'_0+a't\\y_0+bt=y'_0+b't\\z_0+ct=z'_0+c't\end{cases}$ có đúng 1 nghiệm t,t'
- (Δ) chéo (Δ'): $\begin{cases}x_0+at=x'_0+a't\\y_0+bt=y'_0+b't\\z_0+ct=z'_0+c't\end{cases}$ vô nghiệm

  và $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$
- $(\Delta)\parallel(\Delta')$: $\begin{cases}x_0+at=x'_0+a't\\y_0+bt=y'_0+b't\\z_0+ct=z'_0+c't\end{cases}$ vô nghiệm

  và $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$
- $(\Delta)\equiv(\Delta')$: $\begin{cases}x_0+at=x'_0+a't\\y_0+bt=y'_0+b't\\z_0+ct=z'_0+c't\end{cases}$ vô số nghiệm

④ Góc giữa 2 đường thẳng: $(0^\circ\leq(\Delta;\Delta')\leq 90^\circ)$

$$\cos(\Delta;\Delta')=\frac{|a.a'+b.b'+c.c'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

⑤ Vị trị tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

$$(\Delta):\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases} \text{ và } (P): Ax + By + Cz + D = 0$$

Thế (Δ) vào (P)

$$A(x_0 + a.t) + B(y_0 + b.t) + C(z_0 + c.t) + D = 0 \quad (1)$$

+ Nếu (1) có đúng nghiệm $t = t_0$ suy ra (Δ) cắt (P) tại điểm $M_0(x_0 + at_0; y_0 + bt_0; z_0 + zt_0)$

+ Nếu (1) vô nghiệm thì $(\Delta)\, /\!/\, (P)$

+ Nếu (1) vô số nghiệm thì (Δ) thuộc (P)

6 **Góc của đường thẳng và mặt phẳng:** $(0^\circ \le (\Delta; P) \le 180^\circ)$

$$\sin(\Delta, P) = \frac{|A.a + B.b + C.c|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

7 **Đường thẳng song (vuông góc) với mặt phẳng**

(Δ) có vtcp: $\vec{u} = (a; b; c)$; (P) có vtpt: $\vec{n} = (A; B; C)$

- $(\Delta)\, /\!/\, (P)$ khi $A.a + B.b + C.c = 0$
- $(\Delta) \perp (P)$ khi $\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b} = \dfrac{C}{c}$.