TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc
_______***_______

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN MÔN TOÁN NĂM HỌC 2018-2019

Ngày thi thứ nhất: 10-09-2018

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng tồn tại duy nhất số thực x_0 sao cho $f(f(x_0)) = 0$. Chứng minh rằng a, b là các số không âm.

Câu 2. Cho ba số dương a_1, b_1, c_1 thoả mãn $a_1 + b_1 + c_1 = 1$ và các dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ thoả mãn

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_nc_n,\ b_{n+1} = b_n^2 + 2a_nc_n,\ c_{n+1} = c_n^2 + 2a_nb_n \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Xét dãy (x_n) xác định bởi $x_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2$ với mọi n nguyên dương. Chứng minh

(a) $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 + (x_n - 1)^2}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Câu 3. Ghi lên bảng 2018 số nguyên dương đầu tiên: $1, 2, 3, \ldots, 2018$. Thực hiện thuật toán sau: mỗi lần cho phép xoá đi hai số a, b mà không có số nào là bội của số kia và thay thế chúng bởi hai số là ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của a, b. Hỏi rằng ta có thể thực hiện thuật toán trên vô hạn lần không? Tại sao?

Câu 4. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi E là giao điểm của BI và AC, F là giao điểm của CI và AB. M, N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BI, CI và đường tròn (O). Đường thẳng BI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BNF tại điểm thứ hai P. Đường thẳng CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CME tại điểm thứ hai Q.

(a) Chứng minh rằng tứ giác $EFPQ$ nội tiếp một đường tròn.

(b) Qua I kẻ đường thẳng Δ vuông góc với BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFPQ$ nằm trên Δ.

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc
________***________

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN MÔN TOÁN NĂM HỌC 2018-2019

Ngày thi thứ hai: 11-09-2018

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho n là số nguyên lớn hơn 1 và $(x_1, \ldots, x_n)$ là một hoán vị của tập hợp $\{1; 2; \ldots; n\}$ (tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên). Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} kx_k\left(k + x_k\right) \leq \frac{n^2(n+1)^2}{2}.$$

Câu 2. Cho các số nguyên m, n lớn hơn 1 thoả mãn trong n số $x^2 - x$ với $x = 1, \ldots, n$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho m. Chứng minh rằng

(a) $m \geq 2n - 1$.

(b) $m = 2n - 1$ khi m là số nguyên tố lẻ.

Câu 3. Với mỗi số nguyên $n > 1$, ta gọi một hoán vị $(a_1, \ldots, a_n)$ của tập hợp $\{1; 2; \ldots; n\}$ (tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên) là tốt nếu

$$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = \cdots = |a_n - n| \neq 0.$$

Chứng minh rằng

(a) Không tồn tại hoán vị tốt nếu n lẻ.

(b) Nếu n chẵn thì số hoán vị tốt bằng số các ước dương của $\frac{n}{2}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). P, Q theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OAC. R là điểm đối xứng của O qua BC. Gọi X là giao điểm của RB và CP, Y là giao điểm của RC và BQ. Chứng minh rằng $\widehat{BAX} = \widehat{YAC}$.