

LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung Tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HẪN

CS 2: Trung Tâm BDKT 168 Mai Thúc Loan

CS 3: Trung Tâm BDKT Thuận Hóa – 32 Lê Lợi



LÀM CHỦ KIẾN THỨC TOÁN 11-CHÂN TRỜI SÁNG TẠO (TẬP 2)

NỘI DUNG

- ✓ TÓM TẮT KIẾN THỨC CẦN NẮM
- ✓ BÀI TẬP MẪU
- ✓ GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA
- ✓ GIẢI BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

BÀI 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

- Lũy thừa với số mũ nguyên dương: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ thừa số}} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0, a \in \mathbb{R})$
- Lũy thừa với số mũ nguyên âm, số mũ 0: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^0 = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

2. Căn bậc n

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

- Số a là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.
- Sự tồn tại căn bậc n :
- Nếu n lẻ thì có duy nhất một căn bậc n của b , kí hiệu $\sqrt[n]{b}$.
- Nếu n chẵn thì:
 - o $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b .
 - o $b = 0$: có một căn bậc n của b là 0.
 - o $b > 0$: có hai căn bậc n của b đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$ và giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.
- Các tính chất sau đây

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Ta có: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Giả sử a là một số dương, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$.

Khi đó $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$.

5. Tính chất của phép tính lũy thừa

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$; б) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}}$;

d) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}$ e) $(\sqrt[5]{3})^6 + \sqrt[4]{5\sqrt{81}}$

Lời giải

$$\text{a) } \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3} = \sqrt[5]{3^5} = 3;$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4;$$

c) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^5}} = \sqrt[5]{3^{\frac{5}{3}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}}} = \sqrt[3]{3^1} = \sqrt[3]{3};$

d) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} - \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$;

$$\text{e) } (\sqrt[5]{3})^6 + \sqrt[4]{5\sqrt{81}} = \sqrt[5]{3^6} + \sqrt[4]{5\sqrt{3^4}} = 3\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{3} = 4\sqrt[5]{3}.$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}}$; b) $\left(4^{\sqrt{27}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$;

c) $3^{2+2\sqrt{3}} \cdot 3^{2-2\sqrt{3}}$; d) $\left(a^{\sqrt{3}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (a > 0, b > 0).$

Lời giải

a) $\frac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}} = 3^{\pi+1-(\pi-1)} = 3^2 = 9;$

$$\text{b) } \left(4^{\sqrt{27}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \left(4^{3\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64};$$

c) $3^{2+2\sqrt{3}} \cdot 3^{2-2\sqrt{3}} = 3^{2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}} = 3^4 = 81;$

$$\text{d) } \left(a^{\sqrt{3}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} b^{\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = ab^{-2} = \frac{a}{b^2}.$$

Bài 3. Biết rằng $4^x = 5$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{8^x - 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\frac{8^x - 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}} &= \frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{(2^x - 2^{-x})(2^{2x} + 2^x 2^{-x} + 2^{-2x})}{2^x - 2^{-x}} = 2^{2x} + 2^x 2^{-x} + 2^{-2x} \\ &= 4^x + 1 + 4^{-x} = 4^x + 1 + \frac{1}{4^x} = 5 + 1 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}\end{aligned}$$

Bài 4. Biết rằng $5^x = 10^y = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

Lời giải

Ta có: $5^x = 2 \Rightarrow 5 = 2^{\frac{1}{x}}$; $10^y = 2 \Rightarrow 10 = 2^{\frac{1}{y}}$.

Từ đó, $2^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = 2^{\frac{1}{x}} : 2^{\frac{1}{y}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -1.$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0;$

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2};$

c) $(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}).$

Lời giải

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0 = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot 9 \cdot 1 = \frac{1}{\frac{9}{16}} \cdot 9 = \frac{16}{9} \cdot 9 = 16$

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 12 \cdot \frac{1}{\frac{4}{9}} = 12 \cdot \frac{9}{4} = 27$

c) $(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}) = \left(\frac{1}{2^2} \cdot 5^2\right)^{-2} : \left(5 \cdot \frac{1}{5^5}\right) = \left(\frac{5^2}{4}\right)^{-2} : \frac{1}{5^4} = \frac{1}{\left(\frac{5^2}{4}\right)^2} \cdot 5^4 = \frac{1}{\frac{5^4}{16}} \cdot 5^4 = \frac{16}{5^4} \cdot 5^4 = 16$

Bài 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$):

a) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3};$

b) $\sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a};$

c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}}.$

Lời giải

a) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 3^{\frac{15}{8}}$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot a \cdot a} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a \cdot a^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{4}}} = a^{\frac{7}{8}}$

c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a} = a^{\frac{13}{12}-1} = a^{\frac{1}{12}}$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau ($a > 0, b > 0$):

a) $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}};$

b) $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}};$

$$c) \left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}} \right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} \right).$$

Lời giải

$$a) a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}} = a^2$$

$$b) a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{4}}$$

$$c) \left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot a^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} a^{-1} b$$

Bài 4. Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1m^2 và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7}\text{m}$. Đồng xu 5000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3}\text{m}$. Cần chong bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

Lời giải

Để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng ta cần chong bao nhiêu lá vàng như trên là:

$$(2,2 \cdot 10^{-3}) : (1,94 \cdot 10^{-7}) \approx 11300 \text{ (lá vàng)}$$

Bài 5. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu ?

Lời giải

$$a) \text{ Với } t = 2 : P(2) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 314,98 \text{ (triệu đồng)}$$

2 năm 3 tháng = 2,25 năm.

$$\text{Với } t = 2,25 : P(2,25) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2,25}{3}} \approx 297,3 \text{ (triệu đồng)}$$

$$b) \text{ Với } t = 1 : P(1) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 396,85 \text{ (triệu đồng)}$$

Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng: $396,85 : 500 \cdot 100 = 79,37\%$ so với ban đầu.

Bài 6. Biết rằng $10^\alpha = 2; 10^\beta = 5$. Tính $10^{\alpha+\beta}; 10^{\alpha-\beta}; 10^{2\alpha}; 10^{-2\alpha}; 1000^\beta; 0,01^{2\alpha}$

$$a) 16^\alpha + 16^{-\alpha};$$

$$b) (2^\alpha + 2^{-\alpha})^2.$$

Lời giải

$$10^{\alpha+\beta} = 10^\alpha \cdot 10^\beta = 2 \cdot 5 = 10$$

$$10^{\alpha-\beta} = \frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{2}{5}$$

$$10^{2\alpha} = (10^\alpha)^2 = 2^2 = 4$$

$$10^{-2\alpha} = \frac{1}{10^{2\alpha}} = \frac{1}{4}$$

$$1000^\beta = (10^3)^\beta = (10^\beta)^3 = 5^3 = 125$$

$$0,01^{2\alpha} = \left(\frac{1}{100}\right)^{2\alpha} = \frac{1}{100^{2\alpha}} = \frac{1}{(10^2)^{2\alpha}} = \frac{1}{10^{4\alpha}} = \frac{1}{(10^\alpha)^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Bài 7. Biết rằng $4^\alpha = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $16^\alpha + 16^{-\alpha}$;

b) $(2^\alpha + 2^{-\alpha})^2$.

Lời giải

$$\text{a) } 16^\alpha + 16^{-\alpha} = 16^\alpha + \frac{1}{16^\alpha} = (4^2)^\alpha + \frac{1}{(4^2)^\alpha} = (4^\alpha)^2 + \frac{1}{(4^\alpha)^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{626}{25}$$

b)

$$\begin{aligned} (2^\alpha + 2^{-\alpha})^2 &= (2^\alpha)^2 + 2 \cdot 2^\alpha \cdot 2^{-\alpha} + (2^{-\alpha})^2 = 2^{2\alpha} + 2 + 2^{-2\alpha} = (2^2)^\alpha + 2 + (2^2)^{-\alpha} \\ &= 4^\alpha + 2 + 4^{-\alpha} = 4^\alpha + 2 + \frac{1}{4^\alpha} = \frac{1}{5} + 2 + \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{36}{5} \end{aligned}$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^0$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$;

d) $(-55)^0$; e) $2^{-8} \cdot 2^5$; g) $\frac{3^4}{(3^{-2})^{-3}}$.

Lời giải

a) 1; b) $\frac{25}{4}$; c) 81;

d) 1; e) $\frac{1}{8}$; g) $\frac{1}{9}$.

2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{0,001}$; b) $\sqrt[5]{-32}$; c) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$

d) $-\sqrt[6]{100^3}$; e) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}$; g) $\sqrt[5]{(2-\sqrt{5})^5}$.

Lời giải

a) 0,1; b) -2; c) $\frac{3}{2}$;

d) -10; e) $2-\sqrt{3}$; g) $2-\sqrt{5}$.

3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$ b) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$; c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$;

d) $\sqrt[3]{64}$; e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$ g) $(-\sqrt[6]{4})^3$

Lời giải

a) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^3 \cdot 5} = \sqrt[4]{5^4} = 5$; b) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{243}{3}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;

c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}} = \sqrt[3]{\frac{3}{24}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$ d) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$;

e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$ g) $(-\sqrt[6]{4})^3 = -\sqrt[6]{4^3} = -\sqrt[6]{2^{2 \cdot 3}} = -\sqrt[6]{2^6} = -2$.

4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5}$; b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}} + 3\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}} + \sqrt[5]{64} + 2\sqrt[5]{2}$ d) $(\sqrt[4]{5})^5 - \sqrt[4]{25}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} - 5\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{5} = -2\sqrt[3]{5}$;

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{3^4} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$;

c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}} + \sqrt[5]{64} + 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{2^4}} + \sqrt[5]{2^6} + 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} = 5\sqrt[5]{2}$;

d) $(\sqrt[4]{5})^5 - \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^5} - \sqrt[4]{5^2} = 5\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = 4\sqrt[4]{5}$.

5. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $8^{\frac{2}{3}}$; b) $32^{\frac{2}{5}}$; c) $81^{1,25}$;

d) $1000^{-\frac{5}{3}}$ e) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$; g) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

Lời giải

a) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$; b) $32^{\frac{2}{5}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$;

c) $81^{1,25} = (3^4)^{\frac{5}{4}} = 3^5 = 243$; d) $1000^{-\frac{2}{3}} = (10^3)^{-\frac{2}{3}} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$;

e) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$;

$$g) \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

6. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$):

a) $\sqrt[4]{2^{-3}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$; c) $(\sqrt[5]{3})^4$;

d) $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$; e) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} : (\sqrt[6]{a})^5$ g) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$

Lời giải

a) $2^{-\frac{3}{4}}$; b) $2^{-\frac{3}{5}}$; c) $3^{\frac{4}{5}}$;

d) $\sqrt{a^3\sqrt{a}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{1+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}$;

e) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} : (\sqrt[6]{a})^5 = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^5 = a^{\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{12} + \frac{9}{12} - \frac{10}{12}} = a^{\frac{2}{12}} = a^{\frac{1}{6}}$;

g) $a^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3}} = a^{-\frac{7}{6}}$.

7. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $15^{\frac{2}{5}}$; b) $20^{-\frac{1}{2}}$;

c) $5,7^{2,4}$; d) $0,45^{-2,38}$.

Lời giải

a) 2,9542; b) 0,2236;

c) 65,1778; d) 6,6889

8. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2^{\sqrt{3}+1} : 2^{\sqrt{3}-1}$; b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$; c) $\left[(\sqrt{7})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{8}}$;

d) $a^{2\sqrt{5}+1} : a^{2\sqrt{5}-2}$; e) $3^{3+\sqrt{2}} \cdot 3^{-1+\sqrt{2}} \cdot 9^{1-\sqrt{2}}$; g) $\left(a^{-\sqrt{3}} b^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Lời giải

a) $2^{\sqrt{3}+1} : 2^{\sqrt{3}-1} = 2^{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)} = 2^2 = 4$; b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = 3^{\sqrt{16}} = 3^4 = 81$;

c) $\left[(\sqrt{7})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{8}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\sqrt{16}} = 7^{\frac{1}{2} \cdot 4} = 7^2 = 49$; d) $a^{2\sqrt{5}+1} : a^{2\sqrt{5}-2} = a^{2\sqrt{5}+1-(2\sqrt{5}-2)} = a^3$;

e) $3^{3+\sqrt{2}} \cdot 3^{-1+\sqrt{2}} \cdot 9^{1-\sqrt{2}} = 3^{3+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}} \cdot (3^2)^{1-\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}} \cdot 3^{2-2\sqrt{2}} = 3^4 = 81$;

g) $\left(a^{-\sqrt{3}} b^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{-\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot b^{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{-1} b^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{a}$.

9. Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right); b) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right).$$

Lời giải

$$a) a - \frac{1}{b}; b) a + b.$$

10. Biết rằng $5^{2x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}}$.

Lời giải

$$\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}} = \frac{(5^x + 5^{-x})(5^{2x} - 5^x 5^{-x} + 5^{-2x})}{5^x + 5^{-x}} = 5^{2x} - 1 + 5^{-2x} = 3 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

11. Biết rằng $3^\alpha + 3^{-\alpha} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) 3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{-\frac{\alpha}{2}}; b) 3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}.$$

Lời giải

$$a) \left(3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{-\frac{\alpha}{2}} \right)^2 = 3^\alpha + 2 \cdot 3^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 3^{-\frac{\alpha}{2}} + 3^{-\alpha} = 3^\alpha + 3^{-\alpha} + 2 = 3 + 2 = 5.$$

$$\text{Suy ra } 3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{-\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{5} \text{ do } \left(3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{-\frac{\alpha}{2}} > 0 \right).$$

$$b) 3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} = (3^\alpha + 3^{-\alpha})^2 - 2 \cdot 3^\alpha \cdot 3^{-\alpha} = 3^2 - 2 = 7.$$

12. Biết rằng $4^x = 25^y = 10$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Lời giải

$$4^x = 10 \Rightarrow 10^{\frac{1}{x}} = 4; 25^y = 10 \Rightarrow 10^{\frac{1}{y}} = 25. \text{ Suy ra } 10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4 \cdot 25 = 100 = 10^2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

13. Cường độ ánh sáng tại độ sâu h (m) dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{h}{4}}$, trong

đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

Lời giải

$$a) \frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,84 = 84\%.$$

$$b) \frac{I_3}{I_6} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4} - \frac{6}{4}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \approx 1,68 \text{ (lần)}.$$

BÀI 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm lôgarit

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Chú ý:

- Từ định nghĩa, ta có:

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^b = b; \quad a^{\log_a b} = b.$$

- $\log_{10} b$ được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$; $\log_e b$ được viết là $\ln b$.

2. Tính chất

Với $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$, ta có:

- $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$ (lôgarit của một tích)
- $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ (lôgarit của một thương)
- $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (lôgarit của một lũy thừa)

Chú ý: Đặc biệt, ta có:

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N; \quad \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Công thức đổi cơ số

Cho các số dương $a, b, N, a \neq 1, b \neq 1$, ta có $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$.

Đặc biệt, ta có:

$$\log_a N = \frac{1}{\log_N a} (N \neq 1); \quad \log_{a^\alpha} N = \frac{1}{\alpha} \log_a N (\alpha \neq 0).$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } \log_3 9^{\frac{1}{5}}; \text{ b) } \log \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \text{ c) } \left(\frac{1}{25} \right)^{\log_5 \frac{1}{3}}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \log_3 9^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5};$$

$$\text{b) } \log \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3};$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{25} \right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = (5^{-2})^{\log_5 \frac{1}{3}} = 5^{-2 \log_5 \frac{1}{3}} = \left(5^{\log_5 \frac{1}{3}} \right)^{-2} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} = 3^2 = 9.$$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_3 45 + \log_3 \frac{1}{5}$; b) $\log_4 48 - \log_4 3$;
c) $\log_2 \frac{16}{3} + 2\log_2 \sqrt{6}$; d) $\frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7}$.

Lời giải

- a) $\log_3 45 + \log_3 \frac{1}{5} = \log_3 \left(45 \cdot \frac{1}{5} \right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$;
b) $\log_4 48 - \log_4 3 = \log_4 \frac{48}{3} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$;
c) $\log_2 \frac{16}{3} + 2\log_2 \sqrt{6} = \log_2 \frac{16}{3} + \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{16}{3} \cdot 6 \right) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$;
d) $\frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}(\log_3 9 - \log_3 7) + \log_3 7^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_3 3^2 - \frac{1}{3}\log_3 7 + \frac{1}{3}\log_3 7 = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}$.

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_9 \frac{1}{27}$; b) $\log_8 9 \cdot \log_{27} \frac{1}{16}$; c) $\log_4 27 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8$.

Lời giải

- a) $\log_9 \frac{1}{27} = \frac{\log_3 \frac{1}{27}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{-3}}{\log_3 3^2} = -\frac{3}{2}$;
b) $\log_8 9 \cdot \log_{27} \frac{1}{16} = \frac{\log_2 9}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 \frac{1}{16}}{\log_2 27} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^3} \cdot \frac{\log_2 2^{-4}}{\log_2 3^3} = \frac{2\log_2 3}{3\log_2 2} \cdot \frac{-4\log_2 2}{3\log_2 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-4}{3} = -\frac{8}{9}$
c) $\log_4 27 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8 = \frac{\log_2 27}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 25} = \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5^2} = \frac{3\log_2 3}{2\log_2 2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{3\log_2 2}{2\log_2 5} = \frac{9}{4}$

Bài 4. Biết rằng $2\log 2 = a$, $\log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

- a) $\log 18$; b) $\log_2 12$; c) $\log 75$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\log 2 = \frac{a}{2}$.

- a) $\log 18 = \log (2 \cdot 3^2) = \log 2 + 2\log 3 = \frac{a}{2} + 2b$.
b) $\log_2 12 = \frac{\log 12}{\log 2} = \frac{\log (2^2 \cdot 3)}{\log 2} = \frac{2\log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{a + b}{\frac{a}{2}} = \frac{2(a + b)}{a}$.
c) Ta có $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \frac{a}{2}$

Suy ra $\log 75 = \log(3 \cdot 5^2) = \log 3 + 2\log 5 = b + 2\left(1 - \frac{a}{2}\right) = 2 - a + b$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\log_2 16$ b) $\log_3 \frac{1}{27}$ c) $\log 1000$ d) $9^{\log_3 12}$.

Lời giải

- a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$
 b) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$
 c) $\log 1000 = \log 10^3 = 3$
 d) $\left(3^{\log_3 12}\right)^2 = 12^2 = 144$

Bài 2. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\log_3(1-2x)$; b) $\log_{x+1} 5$.

Lời giải

- a) Để $\log_3(1-2x)$ có nghĩa thì $1-2x > 0$ Hay $x < \frac{1}{2}$
 b) Để $\log_{x+1} 5$ có nghĩa thì $x+1 > 0$ Hay $x > -1$

Bài 3. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư):

- a) $\log_3 15$ b) $\log 8 - \log 3$; c) $3 \ln 2$

Lời giải

- a) $\log_3 15 = 2,4650$
 b) $\log 8 - \log 3 = 0,4260$
 c) $3 \ln 2 = 2,0794$

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\log_6 9 + \log_6 4$ b) $\log_5 2 - \log_5 50$ c) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_3 15$.

Lời giải

- a) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \cdot 4) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$.
 b) $\log_5 2 - \log_5 50 = \log_5 \frac{2}{50} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$
 c) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_3 15 = \log_3 \sqrt{5} - \log_3 \sqrt{15} = \log_3 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = \log_3 \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \log_3 3^{-1} = -\frac{1}{2}$.

Bài 5. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\log_2 9 \cdot \log_3 4$ b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4$

Lời giải

a) $\log_2 9 \cdot \log_3 4 = \log_2 3^2 \cdot \log_3 4 = 2\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2\log_2 4 = 2\log_2 2^2 = 2 \cdot 2 = 4.$

b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_{5^2} 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log_5 5 = -\frac{1}{4}.$

c)

$$\begin{aligned} \log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4 &= \log_2 3 \cdot \log_{3^2} 5^{\frac{1}{2}} \cdot \log_5 2^2 = \log_2 3 \cdot \frac{1}{2} \log_3 5 \cdot 2\log_5 2 \\ &= \frac{1}{2} \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 4 = \frac{1}{2} \log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 6. Đặt $\log 2 = a, \log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

a) $\log_4 9$; b) $\log_6 12$ c) $\log_5 6$.

Lời giải

a) $\log_4 9 = \frac{\log 9}{\log 4} = \frac{\log 3^2}{\log 2^2} = \frac{2\log 3}{2\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{b}{a}.$

b) $\log_6 12 = \frac{\log 12}{\log 6} = \frac{\log(2^2 \cdot 3)}{\log(2 \cdot 3)} = \frac{\log 2^2 + \log 3}{\log 2 + \log 3} = \frac{2\log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 3} = \frac{2a + b}{a + b}.$

c) $\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log(2 \cdot 3)}{\log \frac{10}{2}} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{a + b}{1 - a}.$

Bài 7. a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L . Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Lời giải

a) Độ pH của nước cất là: $pH = -\log[H^+] = -\log[10^{-7}] = 7.$

b) Nồng độ H^+ của dung dịch đó là: $20 \cdot 10^{-7} \text{ mol/L}$

Độ pH của dung dịch đó là: $pH = -\log[H^+] = -\log[20 \cdot 10^{-7}] \approx 5,7.$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_9 \frac{1}{81}$; b) $\log 10000$; c) $\log 0,001$;

d) $\log_{0,7} 1$; e) $\log_5 \sqrt[4]{5}$ g) $\log_{0,5} 0,125$.

Lời giải

a) $\log_9 \frac{1}{81} = \log_9 9^{-2} = -2$; b) $\log 10000 = \log 10^4 = 4$;

c) $\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$; d) $\log_{0,7} 1 = 0$;

e) $\log_5 \sqrt[4]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ g) $\log_{0,5} 0,125 = \log_{0,5} 0,5^3 = 3.$

2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $3^{\log_3 5}$; b) $e^{\ln 3}$; c) $7^{2\log_7 8}$;
d) $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$; e) $4^{\log_2 \frac{1}{5}}$ g) $0,001^{\log 2}$.

Lời giải

- a) 5; b) 3;
c) $7^{2\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = 8^2 = 64$; d) $2^{\log_2 3 + \log_2 5} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15$;
e) $4^{\log_2 \frac{1}{5}} = 2^{2\log_2 \frac{1}{5}} = \left(2^{\log_2 \frac{1}{5}}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$; g) $0,001^{\log 2} = (10^{-3})^{\log 2} = (10^{\log 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30$; b) $\log_5 75 - \log_5 3$;
c) $\log_3 \frac{5}{9} - 2\log_3 \sqrt{5}$; d) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3$;
e) $2\log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$; g) $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2\log_3 \sqrt[4]{27}$.

Lời giải

- a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30 = \log_3 \left(\frac{9}{10} \cdot 30\right) = \log_3 3^3 = 3$;
b) $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$;
c) $\log_3 \frac{5}{9} - 2\log_3 \sqrt{5} = \log_3 \frac{5}{9} - \log_3 (\sqrt{5})^2 = \log_3 \frac{5}{9} - \log_3 5 = \log_3 \left(\frac{5}{9} : 5\right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$;
d) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3 = \log_{12} 2^4 + \log_{12} 3^2 = \log_{12} (2^4 \cdot 3^2) = \log_{12} (4 \cdot 3)^2 = \log_{12} 12^2 = 2$;
e) $2\log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2} = \log_5 2^2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$
 $= \log_5 4 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2} = \log_5 \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{10}} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$;
g) $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2\log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} - \log_3 3^{\frac{2}{3}} + 2\log_3 3^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$.

4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_8 \frac{1}{32}$; b) $\log_5 3 \cdot \log_3 5$;
c) $2^{\frac{1}{\log_5 2}}$; d) $\log_{27} 25 \cdot \log_5 81$.

Lời giải

- a) $\log_8 \frac{1}{32} = \frac{\log_2 \frac{1}{32}}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^{-5}}{\log_2 2^3} = -\frac{5}{3}$;
b) $\log_5 3 \cdot \log_3 5 = \log_5 3 \cdot \frac{1}{\log_5 3} = 1$;

c) $2^{\frac{1}{\log_5 2}} = 2^{\log_2 5} = 5;$

d) $\log_{27} 25 \cdot \log_5 81 = \frac{\log_3 25}{\log_3 27} \cdot \frac{\log_3 81}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^2}{\log_3 3^3} \cdot \frac{\log_3 3^4}{\log_3 5} = \frac{2\log_3 5}{3} \cdot \frac{4}{\log_3 5} = \frac{8}{3}.$

5. Tính:

a) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$; b) $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{32} \cdot \log_5 \frac{1}{27}.$

Lời giải

a) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 7} = \log_3 3^2 = 2;$

b) $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{32} \cdot \log_5 \frac{1}{27} = \log_2 5^{-2} \cdot \log_3 2^{-5} \cdot \log_5 3^{-3}$
 $= (-2)\log_2 5 \cdot (-5)\log_3 2 \cdot (-3)\log_5 3 = -30\log_2 5 \cdot \log_3 2 \cdot \log_5 3$
 $= -30\log_2 5 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = -30;$

6. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $\log_7 21$; b) $\log 2,25$;

c) $\ln \sqrt{14}$; d) $\log_{0,5} 3 + \log_5 0,3.$

Lời giải

a) 1,5646; b) 0,3522; c) 1,3195; d) -2,333.

7. Đặt $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Hãy biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

a) $\log_2 45$; b) $\log_2 \frac{\sqrt{15}}{6}$; c) $\log_3 20.$

Lời giải

a) $\log_2 45 = \log_2 3^2 \cdot 5 = 2\log_2 3 + \log_2 5 = 2a + b;$

b) $\log_2 \frac{\sqrt{15}}{6} = \log_2 \sqrt{15} - \log_2 6 = \frac{1}{2} \log_2 15 - \log_2 (2 \cdot 3) = \frac{1}{2} \log_2 (3 \cdot 5) - (\log_2 2 + \log_2 3)$
 $= \frac{1}{2} (\log_2 3 + \log_2 5) - (1 + \log_2 3) = \frac{1}{2} (a + b) - (1 + a) = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - 1$

c) $\log_3 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 3} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 5)}{\log_2 3} = \frac{2\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 3} = \frac{2 + b}{a}.$

8. Đặt $\log x = a, \log y = b, \log z = c (x, y, z > 0)$. Biểu thị các biểu thức sau theo a, b, c .

a) $\log (xyz)$; b) $\log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}}$ c) $\log_z (xy^2) (z \neq 1).$

Lời giải

a) $\log (xyz) = \log x + \log y + \log z = a + b + c;$

b) $\log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}} = \log (x^3 \sqrt[3]{y}) - \log (100\sqrt{z}) = \log \left(x^3 y^{\frac{1}{3}} \right) - \log \left(10^2 z^{\frac{1}{2}} \right)$

$$= 3 \log x + \frac{1}{3} \log y - 2 - \frac{1}{2} \log z = 3a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c - 2$$

$$c) \log_z(xy^2) = \frac{\log(xy^2)}{\log z} = \frac{\log x + 2 \log y}{\log z} = \frac{a + 2b}{c}.$$

9. Đặt $\log_2 3 = a, \log_3 15 = b$. Biểu thị $\log_{30} 18$ theo a và b .

Lời giải

$$a = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1}{a}$$

$$b = \log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 5 = b - 1.$$

$$\log_{30} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 30} = \frac{\log_3 (2 \cdot 3^2)}{\log_3 (2 \cdot 3 \cdot 5)} = \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5} = \frac{\log_3 2 + 2}{\log_3 2 + 1 + \log_3 5} = \frac{\frac{1}{a} + 2}{\frac{1}{a} + 1 + b - 1} = \frac{2a + 1}{ab + 1}.$$

BÀI 3. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số mũ

- Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số mũ cơ số a .

- Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) có:

□ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

□ Tập giá trị: $(0; +\infty)$.

□ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

□ Sự biến thiên:

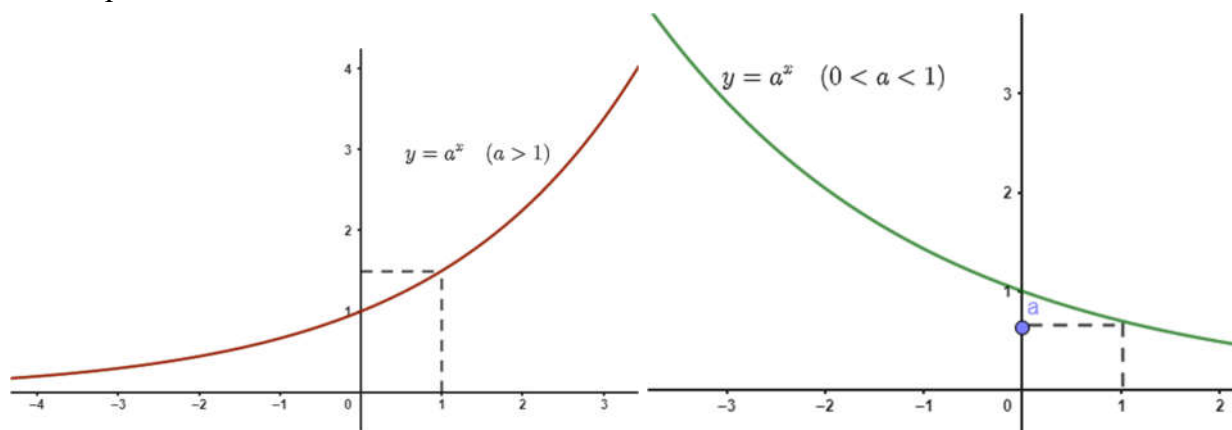
o Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$.

o Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

□ Đồ thị:

o Cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$, đi qua điểm $(1; a)$.

o Nằm phía trên trục hoành.



2. Hàm số lôgarit

- Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .

- Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) có:

□ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

□ Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

□ Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

□ Sự biến thiên:

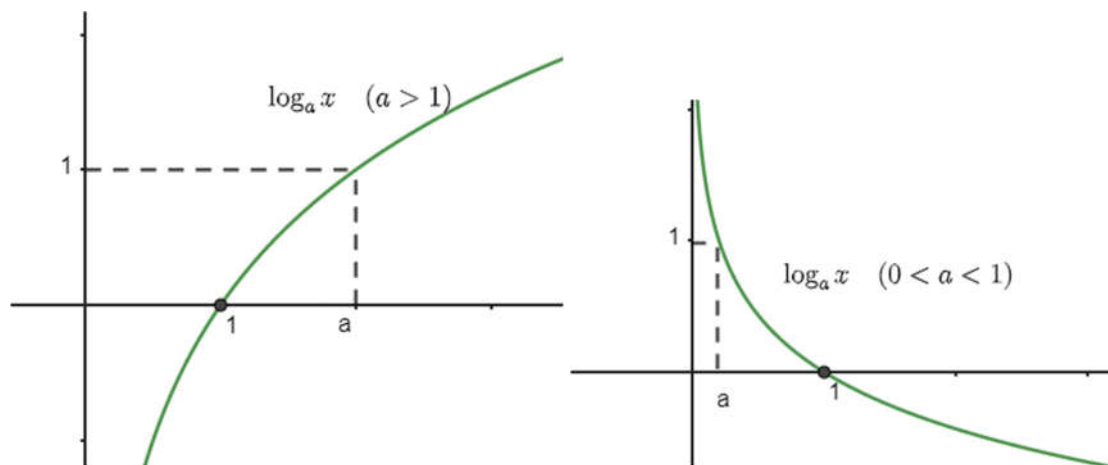
o Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty$.

o Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$.

□ Đồ thị:

o Cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, đi qua điểm $(a; 1)$.

o Nằm bên phải trục tung.



B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

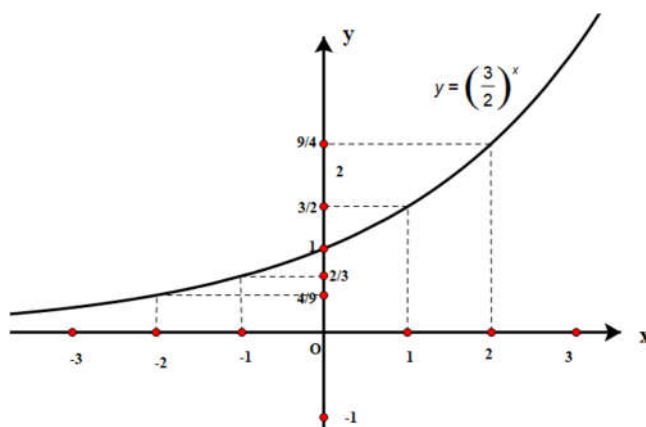
Lời giải

Tập xác định: $\mathbb{R}$. Do $\frac{3}{2} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có tọa độ theo bảng giá trị và nằm phía trên trục hoành. Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.



Bài 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{0,5} x$.

Lời giải

Tập xác định: $(0; +\infty)$.

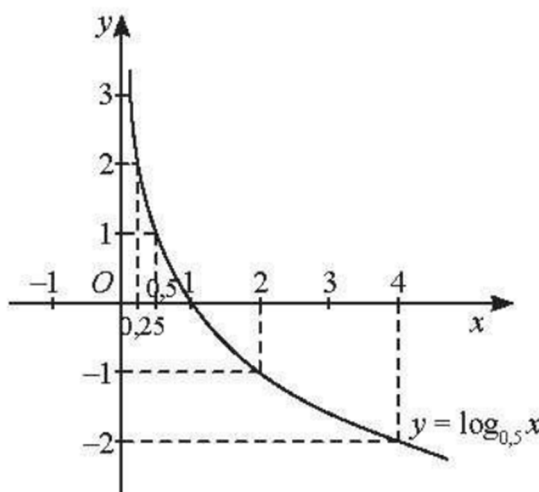
Do $0 < 0,5 < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Bảng giá trị:

x	0,25	0,5	1	2	4
-----	------	-----	---	---	---

y	2	1	0	-1	-2
-----	---	---	---	----	----

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có tọa độ theo bảng giá trị và nằm bên phải trục tung.
Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.



Bài 3. So sánh các cặp số sau:

a) $0,75^{-0,1}$ và $0,75^{-0,2}$; b) $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[5]{8}$ c) $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

Lời giải

a) Do $0,75 < 1$ nên hàm số $y = 0,75^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $-0,1 > -0,2$ nên $0,75^{-0,1} < 0,75^{-0,2}$.

b) Ta có: $\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$.

Do $2 > 1$ nên hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ nên $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}}$ hay $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}$

c) Ta có: $\sqrt[4]{\frac{1}{27}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Do $\frac{1}{3} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ nên $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ hay $\sqrt[4]{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

Bài 4. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{0,2} \pi$ và $\log_{0,2} 3$; b) $4\log_3 2$ và $3\log_3 \sqrt[3]{15}$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \log_{0,2} x$ có cơ số $0,2 < 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $\pi > 3$ nên $\log_{0,2} \pi < \log_{0,2} 3$.

b) Ta có $4\log_3 2 = \log_3 2^4 = \log_3 16$; $3\log_3 \sqrt[3]{15} = \log_3 (\sqrt[3]{15})^3 = \log_3 15$.

Hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số $3 > 1$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $16 > 15$ nên $\log_3 16 > \log_3 15$ hay $4\log_3 2 > 3\log_3 \sqrt[3]{15}$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = 2^x$ trên đoạn $[-2;3]$; b) $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải

a) Hàm số $y = f(x) = 2^x$ có cơ số $2 > 1$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$\max_{x \in [-2;3]} y = f(3) = 2^3 = 8 \text{ và } \min_{x \in [-2;3]} y = f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

b) Với $-1 \leq x \leq 2$, ta có $-3 \leq 2x-1 \leq 3$.

Hàm số $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ có cơ số $\frac{1}{3} < 1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \text{ hay } 27 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{27}.$$

Từ đó, ta có: $\max_{x \in [-1;2]} y = 27$ và $\min_{x \in [-1;2]} y = \frac{1}{27}$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4^x$

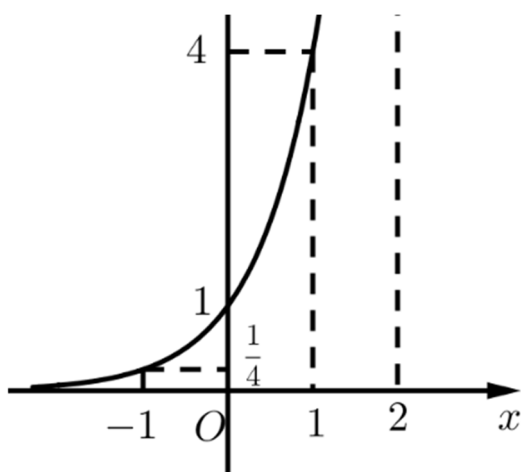
b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Lời giải

a) Bảng giá trị:

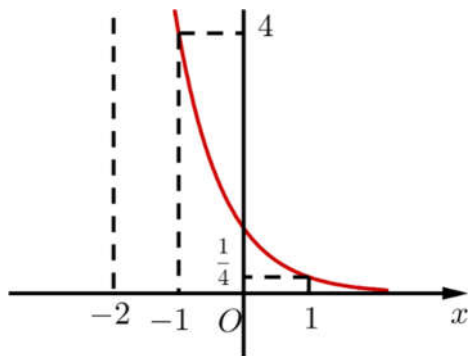
x	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	4	16

Đồ thị:



b) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1
y	16	4	1	$\frac{1}{4}$



Bài 2. So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$

b) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$.

Lời giải

a) Do $1,3 > 1$ nên hàm số $y = 1,3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $0,7 > 0,6$ nên $1,3^{0,7} > 1,3^{0,6}$.

b) Do $0,75 < 1$ nên hàm số $y = 0,75^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $-2,3 > -2,4$ nên $0,75^{-2,3} < 0,75^{-2,4}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $\log_2(3-2x)$

b) $\log_3(x^2+4x)$.

Lời giải

a) $\log_2(3-2x)$ xác định khi $3-2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

Vậy hàm số có tập xác định $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

b) $\log_3(x^2+4x)$ xác định khi $x^2+4x > 0 \Leftrightarrow x(x+4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -4 \end{cases}$

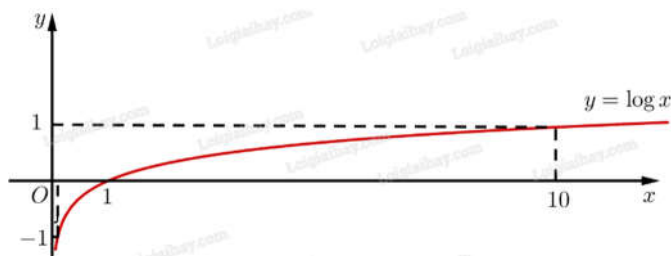
Vậy hàm số có tập xác định $D = (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Bài 4. Vẽ đồ thị các hàm số:

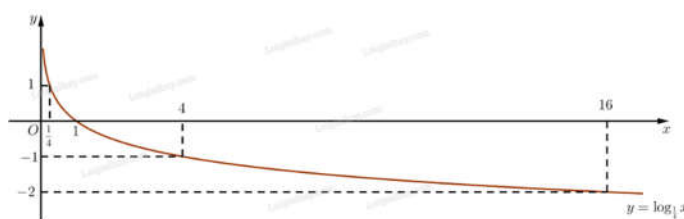
a) $y = \log x$

b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

Lời giải



b)



Bài 5. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\pi} 0,8$ và $\log_{\pi} 1,2$;

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$.

Lời giải

a) Vì $\pi > 1$ nên hàm số $\log_{\pi} x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Mà $0,8 < 1,2$ nên $\log_{\pi} 0,8 < \log_{\pi} 1,2$

b) Vì $0,3 > 1$ nên hàm số $\log_{0,3} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Mà $2 < 2,1$ nên $\log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 2,1$

Bài 6. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số ($a > 0$) và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <https://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

a) Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.

b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .

c) Tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải

a) Vì cường độ ánh sáng giảm dần theo độ sâu nên hàm số $I = I_0 \cdot a^d$ nghịch biến.

Vậy $0 < a < 1$.

b) Ta có: $I = I_0 \cdot a^d \Leftrightarrow 0,95I_0 = I_0 \cdot a^1 \Leftrightarrow a = 0,95$.

c) Ta có: $I = I_0 \cdot a^d = I_0 \cdot 0,95^{20} \approx 0,36I_0$.

Vậy tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng 36% phần trăm so với I_0

Bài 7. Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng kilômét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa – đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <https://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6>)

a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?

b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

a) Độ cao của máy bay khi áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ là:

$$h = -19,4 \cdot \log \frac{\frac{1}{2}P_0}{P_0} = -19,4 \cdot \log \frac{1}{2} \approx 5,84 \text{ (km)}$$

b) Độ cao của ngọn núi A là: $h_A = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0}$

Độ cao của ngọn núi B là: $h_B = -19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0}$

Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B nên ta có:

$$P_A = \frac{4}{5} P_B \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_0} = \frac{4}{5}$$

Ta có:

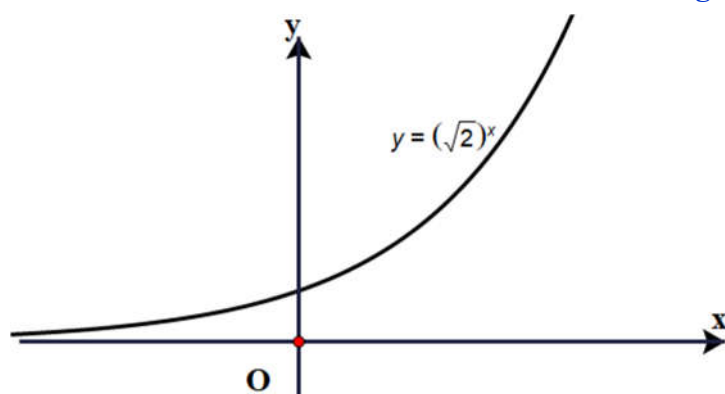
$$\begin{aligned} h_A - h_B &= \left(-19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} \right) - \left(-19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} + 19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0} \\ &= -19,4 \log \left(\frac{P_A}{P_0} : \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \log \frac{P_A}{P_B} = -19,4 \log \frac{4}{5} \approx 1,88 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Vậy ngọn núi A cao hơn ngọn núi B 1,88km.

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

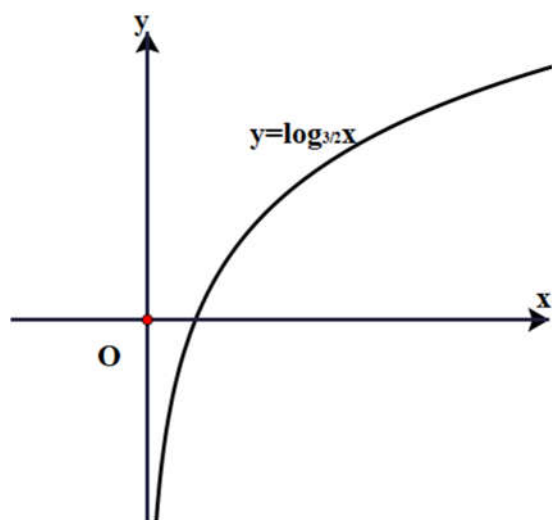
1. Vẽ đồ thị hàm số $y = (\sqrt{2})^x$.

Lời giải



2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{3}{2}} x$.

Lời giải



3. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(x-4)$; b) $y = \log_{0,2}(x^2 + 2x + 1)$; c) $y = \log_5 \frac{x}{x-1}$.

Lời giải

a) $(4; +\infty)$; b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; c) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

4. So sánh các cặp số sau:

a) $1,04^{1,7}$ và $1,04^2$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ và $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

c) $1,2^{0,3}$ và $0,9^{1,8}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4}$ và $3^{-0,2}$.

Lời giải

a) $1,04^{1,7} < 1,04^2$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}} < \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

c) $1,2^{0,3} > 1 > 0,9^{1,8}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4} > 1 > 3^{-0,2}$.

5. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt[5]{27}$; b) $\left(\frac{1}{9}\right)^4$ và $\left(\frac{1}{27}\right)^3$;

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ và $\sqrt[5]{25}$; d) $\sqrt[9]{0,7^{10}}$ và $\sqrt[10]{0,7^9}$.

Lời giải

a) $3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{3}{5}}$ hay $\sqrt{3} < \sqrt[5]{27}$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^8 > \left(\frac{1}{3}\right)^9$ hay $\left(\frac{1}{9}\right)^4 > \left(\frac{1}{27}\right)^3$;

c) $5^{-\frac{1}{3}} < 5^{\frac{2}{5}}$ hay $\sqrt[3]{\frac{1}{5}} < \sqrt[5]{25}$; d) $0,7^{\frac{10}{9}} < 0,7^{\frac{9}{10}}$ hay $\sqrt[9]{0,7^{10}} < \sqrt[10]{0,7^9}$.

6. So sánh các cặp số sau:

a) $\log 4,9$ và $\log 5,2$; b) $\log_{0,3} 0,7$ và $\log_{0,3} 0,8$; c) $\log_{\pi} 3$ và $\log_3 \pi$.

Lời giải

a) $\log 4,9 < \log 5,2$; b) $\log_{0,3} 0,7 > \log_{0,3} 0,8$;

c) $\log_{\pi} 3 < 1 < \log_3 \pi$.

7. So sánh các cặp số sau:

a) $2\log_{0,6} 5$ và $3\log_{0,6} (2\sqrt[3]{3})$; b) $6\log_5 2$ và $2\log_5 6$;

c) $\frac{1}{2}\log_2 121$ và $2\log_2 2\sqrt{3}$; d) $2\log_3 7$ và $6\log_9 4$.

Lời giải

a) $\log_{0,6} 25 < \log_{0,6} 24$ hay $2\log_{0,6} 5 < 3\log_{0,6} (2\sqrt[3]{3})$;

b) $\log_5 64 > \log_5 36$ hay $6\log_5 2 > 2\log_5 6$;

c) $\log_2 11 < \log_2 12$ hay $\frac{1}{2} \log_2 121 < 2 \log_2 2\sqrt{3}$;

d) $\log_3 49 < \log_3 64$ hay $2 \log_3 7 < 6 \log_3 4$.

8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$ trên đoạn $[-1; 4]$; b) $y = f(x) = \frac{1}{3^x}$ trên đoạn $[-2; 2]$.

Lời giải

a) $\max_{x \in [-1; 4]} y = f(4) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \frac{25}{16}$; $\min_{x \in [-1; 4]} y = f(-1) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ có cơ số $\frac{1}{3} < 1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$\max_{x \in [-2; 2]} y = f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$ và $\min_{x \in [-2; 2]} y = f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$;

b) $y = f(x) = \log_2(x+1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

Lời giải

a) $\max_{x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]} y = f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{3} = 2$ và $\min_{x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]} y = f(3) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 = -2$.

b) $\max_{x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]} y = f(3) = \log_2 4 = 2$ và $\min_{x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]} y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$.

10. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t$ (mg), trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$?

b) Biết rằng bệnh nhân đã uống 100mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80mg. Hãy xác định giá trị của D_0 và a .

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

Lời giải

a) Do lượng thuốc trong cơ thể giảm dần, nên hàm số $D(t)$ nghịch biến, do đó $0 < a < 1$.

b) $D_0 = 100, a = \frac{80}{100} = 0,8$.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc còn $D(5) = 100 \cdot 0,8^5$. Tỷ lệ lượng thuốc đã giảm so với lượng thuốc ban đầu là

$$\frac{D_0 - D(5)}{D_0} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8^5}{100} \approx 0,6723 \approx 67,23\%.$$

BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH MŨ, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mũ cơ bản

$$a^x = b (a > 0, a \neq 1)$$

□ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

□ Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Chú ý: Với $a > 0, a \neq 1$

a) $a^x = a^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$.

b) Tổng quát hơn, $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

2. Phương trình lôgarit cơ bản

$$\log_a x = b (a > 0, a \neq 1)$$

Phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Chú ý: Với $a > 0, a \neq 1$.

a) $\log_a u(x) = b \Leftrightarrow u(x) = a^b$.

b) $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$.

Có thể thay $u(x) > 0$ bằng $v(x) > 0$ (chọn bất phương trình đơn giản hơn).

3. Bất phương trình mũ cơ bản

$$a^x > b \text{ hoặc } a^x \geq b \text{ hoặc } a^x < b \text{ hoặc } a^x \leq b (a > 0, a \neq 1).$$

Bảng tổng kết về nghiệm của các bất phương trình trên:

Phương trình	$b \leq 0$	$b > 0$	
		$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x > b$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$x > \log_a b$	$x < \log_a b$
$a^x \geq b$		$x \geq \log_a b$	$x \leq \log_a b$
$a^x < b$	Vô nghiệm	$x < \log_a b$	$x > \log_a b$
$a^x \leq b$		$x \leq \log_a b$	$x \geq \log_a b$

Chú ý:

□ Nếu $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.

□ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

4. Bất phương trình lôgarit cơ bản

$$\begin{cases} \log_a x > b \\ \log_a x \geq b \\ \log_a x < b \\ \log_a x \leq b \end{cases} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Bảng tổng kết về nghiệm của các bất phương trình trên:

Bất phương trình	$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > b$	$x > a^b$	$0 < x < a^b$
$\log_a x \geq b$	$x \geq a^b$	$0 < x \leq a^b$
$\log_a x < b$	$0 < x < a^b$	$x > a^b$
$\log_a x \leq b$	$0 < x \leq a^b$	$x \geq a^b$

Chú ý:

□ Nếu $a > 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} v(x) > 0 \\ u(x) > v(x). \end{cases}$

□ Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) < v(x). \end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $5^{x+2} = \sqrt[3]{25}$ b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = 32^{x+3}$.

Lời giải

a) Ta có: $5^{x+2} = \sqrt[3]{25} \Leftrightarrow 5^{x+2} = 5^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x+2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{4}{3}$.

b) Ta có: $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = 32^{x+3} \Leftrightarrow (2^{-3})^{2x-1} = (2^5)^{x+3} \Leftrightarrow 2^{-6x+3} = 2^{5x+15}$

$\Leftrightarrow -6x+3 = 5x+15 \Leftrightarrow 11x = -12 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{11}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{12}{11}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{16}(3x-5) = \frac{1}{2}$; b) $\log_3 x + \log_3(x+1) = \log_3(5x+12)$.

Lời giải

a) Ta có: $\log_{16}(3x-5) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-5 = 16^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3x-5 = 4 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3[x(x+1)] = \log_3(5x+12) \Leftrightarrow x^2+x = 5x+12 \Leftrightarrow x^2-4x-12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ (loại) hoặc } x = 6 \text{ (nhận)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$.

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \frac{1}{81}$ b) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{3x} < 25^{1-x}$.

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow 2x+1 \leq 4 \text{ (do } 0 < \frac{1}{3} < 1) \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x \leq \frac{3}{2}$.

b) Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{3x} < 25^{1-x} \Leftrightarrow \left(5^{-\frac{1}{2}}\right)^{3x} < (5^2)^{1-x} \Leftrightarrow 5^{\frac{3x}{2}} < 5^{2-2x} \Leftrightarrow -\frac{3x}{2} < 2-2x \text{ (do } 5 > 1) \Leftrightarrow \frac{x}{2} < 2 \Leftrightarrow x < 4$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x < 4$.

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\sqrt{5}}(x^2-4) < 2$; b) $\log_{0,5}(2x+1) \geq \log_{0,5}(3x-4)$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x^2-4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 2$.

Do $\sqrt{5} > 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-4 < (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2-9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là $-3 < x < -2$ hoặc $2 < x < 3$.

b) Do $0 < 0,5 < 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \leq 3x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 5$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Giải các phương trình sau:

a) $5^{2x-1} = 25$;

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1}$

c) $10^{1-2x} = 100000$

Lời giải

$$a) 5^{2x-1} = 25 \Leftrightarrow 5^{2x-1} = 5^2 \Leftrightarrow 2x-1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$b) 3^{x+1} = 9^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} = (3^2)^{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^{4x+2} \Leftrightarrow x+1 = 4x+2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$$

$$c) 10^{1-2x} = 100000 \Leftrightarrow 10^{1-2x} = 10^5 \Leftrightarrow 1-2x = 5 \Leftrightarrow x = -2$$

2. Giải các phương trình sau. Làm tròn kết quả đến hàng nghìn.

$$a) 3^{x+2} = 7;$$

$$b) 3 \cdot 10^{2x+1} = 5;$$

Lời giải

$$a) 3^{x+2} = 7 \Leftrightarrow x+2 = \log_3 7 \Leftrightarrow x = \log_3 7 - 2 \Leftrightarrow x = -0,229$$

$$b) 3 \cdot 10^{2x+1} = 5 \Leftrightarrow 10^{2x+1} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 2x+1 = \log \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\log \frac{5}{3} - 1 \right) : 2 \Leftrightarrow x = -0,389$$

3. Giải các phương trình sau:

$$a) \log_6 (4x+4) = 2;$$

$$b) \log_3 x - \log_3 (x-2) = 1$$

Lời giải

$$a) \log_6 (4x+4) = 2 \Leftrightarrow 4x+4 = 6^2 \Leftrightarrow x = 8$$

$$b) \log_3 x - \log_3 (x-2) = 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{x-2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = 3 \Leftrightarrow x = 3(x-2) \Leftrightarrow x = 3$$

4. Giải các bất phương trình sau:

$$a) \left(\frac{1}{3} \right)^{2x+1} \leq 9;$$

$$b) 4^x > 2^{x-2}$$

Lời giải

$$a) \left(\frac{1}{3} \right)^{2x+1} \leq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} \Leftrightarrow 2x+1 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{2} \text{ (do } \frac{1}{3} < 1 \text{)}$$

$$b) 4^x > 2^{x-2} \Leftrightarrow (2^2)^x > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x-2 \Leftrightarrow x > -2 \text{ (do } 2 > 1 \text{)}$$

5. Giải các bất phương trình sau:

$$a) \log_2 (x-2) < 2;$$

$$b) \log (x+1) \geq \log (2x-1)$$

Lời giải

- a) $\log_2(x-2) < 2 \Leftrightarrow x-2 < 2^2 \Leftrightarrow x < 6$
 b) $\log(x+1) \geq \log(2x-1) \Leftrightarrow x+1 \geq 2x-1 \Leftrightarrow x \leq 2$

6. Chất phóng xạ polonium-210 có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100g có khối lượng

polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} (g)$

(nguồn://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium#section=Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay)

- a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?
 b) Sau bao lâu thì còn lại 40g polonium-210.

Lời giải

- a) Khối lượng polonium-210 còn lại sau 2 năm (730 ngày) là:

$$M(2) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{730}{138}} = 2,56(g)$$

- b) $M(t) = 40$ khi $100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} = 40 \Leftrightarrow t = 182,4$

Vậy sau 182,4 ngày còn lại lại 40 g polonium-210

7. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = \log \left(\frac{I}{I_0} \right) (dB)$, trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$

(Nguồn: Vật lý 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

- a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học, có mức cường độ âm là $50dB$. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?
 b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ $75dB$ đến $90dB$. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

Lời giải

- a) Khi $L = 50$ thì $10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 50 \Leftrightarrow I = 10^{-7}$

Vậy cường độ âm của giọng nói giáo viên là $10^{-7} W/m^2$

- b) Khi $L = 75$ thì $10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 75 \Leftrightarrow I = 3,2 \cdot 10^{-5}$

Khi $L = 90$ thì $10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 90 \Leftrightarrow I = 10^{-3}$

Vậy cường độ âm trong nhà xưởng thay đổi từ $3,2 \cdot 10^{-5}$ đến 10^{-3}

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

- a) $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$; b) $5^{2x} = 10$; c) $3^x = 18$;

d) $0,2^{x-1} = \frac{1}{\sqrt{125}}$; e) $5^{3x} = 25^{x-2}$; g) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-1}$.

Lời giải

a) Đưa về phương trình $3^{2x+1} = 3^{-3}$. Đáp số: $x = -2$.

b) $x = \frac{1}{2} \log_5 10$.

c) $x = \log_3 18$.

d) Đưa về phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$. Đáp số: $x = \frac{5}{2}$.

e) Đưa về phương trình $5^{3x} = 5^{2x-4}$. Đáp số: $x = -4$.

g) Đưa về phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-5}$. Đáp số: $x = 4$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3 (2x-1) = 3$; b) $\log_{49} x = 0,25$;

c) $\log_2 (3x+1) = \log_2 (2x-4)$; d) $\log_5 (x-1) + \log_5 (x-3) = \log_5 (2x+10)$;

e) $\log x + \log (x-3) = 1$; g) $\log_2 (\log_{81} x) = -2$.

Lời giải

a) $x = 14$; b) $x = \sqrt{7}$; c) Vô nghiệm;

d) $x = 7$; e) $x = 5$; g) $x = 3$.

3. Giải các bất phương trình sau:

a) $4^x < 2\sqrt{2}$; b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{9}$; c) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x < 40$;

d) $4^{2x} < 8^{x-1}$ e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x$; g) $0,25^{x-2} > 0,5^{x+1}$.

Lời giải

a) Đưa về bất phương trình $2^{2x} < 2^{\frac{3}{2}}$. Đáp số: $x < \frac{3}{4}$.

b) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{2}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Đáp số: $x \leq 5$.

c) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. Đáp số: $x > -3$.

d) Đưa về bất phương trình $2^{4x} < 2^{3x-3}$. Đáp số: $x < -3$.

e) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$. Đáp số: $x \leq \frac{2}{3}$.

g) Đưa về bất phương trình $0,5^{2x-4} > 0,5^{x+1}$. Đáp số: $x < 5$.

4. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\log_3(x+4) < 2$; b) $\log_{\frac{1}{2}}x \geq 4$; c) $\log_{0,25}(x-1) \leq -1$;
 d) $\log_5(x^2 - 24x) \geq 2$; e) $2\log_{\frac{1}{4}}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$; g) $2\log_3(x+1) \leq 1 + \log_3(x+7)$

Lời giải

- a) $-4 < x < 5$; b) $0 < x \leq \frac{1}{16}$;
 c) $x \geq 5$; d) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 25$.
 e) Điều kiện: $x > -1$.

Đưa về bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2 \geq \log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$, rồi đưa về bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Đáp số: $-1 < x \leq 3$.

g) Điều kiện: $x > -1$.

Đưa về bất phương trình $\log_3(x+1)^2 \leq \log_3[3(x+7)]$, rồi đưa về bất phương trình $x^2 - x - 20 \leq 0$.

Đáp số: $-1 < x \leq 5$.

5. Giải các phương trình sau:

- a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$; b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 27 = 0$.

Lời giải

a) Đặt $t = 2^x (t > 0)$, nhận được phương trình $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Đáp số: $x = 0$ hoặc $x = 2$.

b) Đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x (t > 0)$, nhận được phương trình $t^2 - 6t - 27 = 0$

$\Leftrightarrow t = 9$ (nhận) hay $t = -3$ (loại)

Đáp số: $x = -2$.

6. Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn $\log_3(x-2) \cdot \log_3(x-1) < 0$.

Lời giải

Từ giả thiết, nhận được $1 < \log_3 x < 2$ hay $3 < x < 9$. Từ đó, các số nguyên x cần tìm là 4; 5; 6; 7; 8.

7. Tìm tập xác định của các hàm số

- a) $y = f(x) = \sqrt{4-2^x} + \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}$; b) $y = f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$.

Lời giải

a) $(1; 2]$; b) $(2; 3]$.

8. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 x$. Biết rằng $f(b) - f(a) = 5 (a, b > 0)$, tìm giá trị của $\frac{b}{a}$.

Lời giải

$$\frac{b}{a} = 32$$

9. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $125^a \cdot 25^b = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3a + 2b$.

Lời giải

$$P = 3a + 2b = \log_5 3$$

10. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kỳ bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng

Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng

Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

Lời giải

Khi $M = 90$ g, ta có phương trình:

$$90 = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 0,9 \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} 0,9$$

$$\Leftrightarrow t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0,9 \approx 106979777 \text{ (năm)}$$

11. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 9000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

Lời giải

$$6000 = 9000 \cdot 10^{-2\alpha} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \log \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$$

$$9000 \cdot 10^{-\alpha t} \leq 1000 \Leftrightarrow 10^{-\alpha t} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\alpha t \leq \log \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow t \geq -\frac{2}{\alpha} \log \frac{1}{3} = -\frac{2}{\frac{1}{2} \log \frac{3}{2}} \cdot \log \frac{1}{3} = \frac{4 \log 3}{\log \frac{3}{2}} \approx 10,8 \text{ (giờ)}$$

12. Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung

dịch đó tính bằng mol / L. Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7.

Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A?

Lời giải

$$\text{Ta có: } \text{pH}_A = -\log x_A; \text{pH}_B = -\log x_B$$

$$\Rightarrow \text{pH}_A - \text{pH}_B = -\log x_A + \log x_B = \log \frac{x_B}{x_A}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \log \frac{x_B}{x_A} = 0,7 \Rightarrow \frac{x_B}{x_A} = 10^{0,7} \approx 5 \text{ (lần)}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

PHẦN 1: BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Rút gọn biểu thức $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} \cdot (\sqrt{3})^5$, ta được

- A. $\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. 9.

Lời giải

Chọn D

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} (\sqrt{3})^5 = \left[(3)^{-1}\right]^{2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{2}} = 3^2 = 9$$

Câu 2: Nếu $2^a = 9$ thì $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{a}{8}}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. 3. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{a}{8}} = (2^{-4})^{\frac{a}{8}} = 2^{\frac{-a}{2}} = (2^a)^{-\frac{1}{2}} = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Câu 3: Nếu $a^{\frac{1}{2}} = b$ ($a > 0, a \neq 1$) thì

- A. $\log_{\frac{1}{2}} a = b$. B. $2 \log_a b = 1$. C. $\log_a \frac{1}{2} = b$. D. $\log_{\frac{1}{2}} b = a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 4: Nếu $x = \log_3 a + \log_9 4$ thì 3^x có giá trị bằng

- A. 6. B. 8. C. 16. D. 64.

Lời giải

Chọn A

$$3^x = 3^{\log_3 4 + \log_9 4} = 3^{\log_3 4} \cdot 3^{\log_9 4} = 4 + \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 4} = 4 + \left(9^{\log_9 4}\right)^{\frac{1}{2}} = 4 + 4^{\frac{1}{2}} = 4 + 2 = 6$$

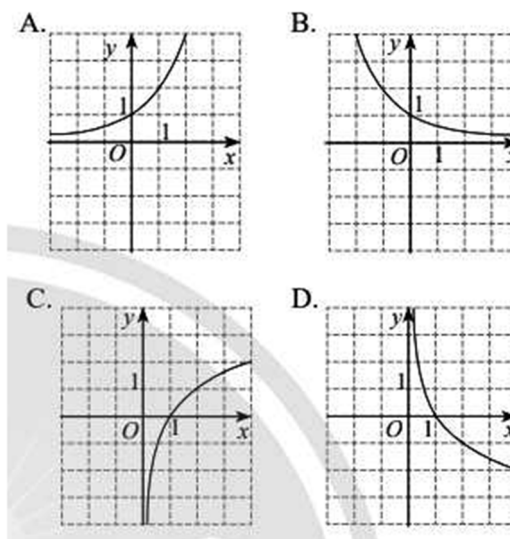
Câu 5: Cho α, β là hai số thực với $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $(0, 3)^\alpha < (0, 3)^\beta$. B. $\pi^\alpha \geq \pi^\beta$. C. $(\sqrt{2})^\alpha < (\sqrt{2})^\beta$. D. $\left(\frac{1}{2}\right)^\beta > \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Hình nào vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?



Lời giải

Chọn D

Câu 7: Phương trình $0,1^{2x-1} = 100$ có nghiệm là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $1\frac{1}{2}$.

D. $2\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$0,1^{2x-1} = 100 \Leftrightarrow 2x-1 = \log_{0,1} 100 \Leftrightarrow 2x-1 = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $0,5^{3x-1} > 0,25$

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(0; 1)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$0,5^{3x-1} > 0,25 \Leftrightarrow 0,5^{3x-1} > 0,5^2 \Leftrightarrow 3x-1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$$

Câu 9: Nếu $\log x = 2\log 5 - \log 2$ thì

A. $x = 8$.

B. $x = 23$.

C. $x = 12,5$.

D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn C

$$\log x = 2\log 5 - \log 2 = \log 5^2 - \log 2 = \log 25 - \log 2 = \log \frac{25}{2} = \log 12,5$$

Suy ra $x = 12,5$

Câu 10: Số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $\log_{0,1}(1-2x) > -1$ là

A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = -5$.

D. $x = -4$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_{0,1}(1-2x) > -1 \Leftrightarrow 1-2x < 0,1^{-1} \Leftrightarrow 1-2x < 10 \Leftrightarrow x < 4,5$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 11: Biết $4^\alpha + 4^{-\alpha} = 5$. Tính giá trị biểu thức :

1. $2^\alpha + 2^{-\alpha}$
2. $4^{2\alpha} + 4^{-2\alpha}$

Lời giải

$$a) 4^\alpha + 4^{-\alpha} = 5$$

$$\Leftrightarrow (2^\alpha)^2 + 2 \cdot 2^\alpha \cdot 2^{-\alpha} + (2^{-\alpha})^2 = 5 + 2$$

$$\Leftrightarrow (2^\alpha + 2^{-\alpha})^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2^\alpha + 2^{-\alpha} = \sqrt{7}$$

$$b) 4^{2\alpha} + 4^{-2\alpha} = (4^\alpha)^2 + 2 \cdot 4^\alpha \cdot 4^{-\alpha} + (4^{-\alpha})^2 - 2 = (4^\alpha + 4^{-\alpha})^2 - 2 = 5^2 - 2 = 23$$

Câu 12: Tính giá trị của biểu thức :

1. $\log_2 72 - \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 27)$;
2. $5^{\log_2 40 - \log_2 5}$;
3. $3^{2 + \log_9 2}$.

Lời giải

$$a) \log_2 72 - \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 27)$$

$$= \log_2 72 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 (3 \cdot 27) = \log_2 72 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 81 = \log_2 72 - \log_2 81^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_2 72 - \log_2 9 = \log_2 \frac{72}{9} = \log_2 8 = 3$$

$$b) 5^{\log_2 40 - \log_2 5} = 5^{\log_2 \frac{40}{5}} = 5^{\log_2 8} = 5^3 = 125$$

$$c) 3^{2 + \log_9 2} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 81 + \log_9 2} = 9^{\frac{1}{2} \cdot \log_9 (81 \cdot 2)} = 9^{\frac{1}{2} \cdot \log_9 162} = 9^{\log_9 162^{\frac{1}{2}}} = 162^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{2}$$

Câu 13: Biết rằng $5^x = 3$ và $3^y = 5$. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của xy .

Lời giải

$$5^x = 3. \text{ Suy ra } x = \log_5 3$$

$$3^y = 5. \text{ Suy ra } y = \log_3 5$$

$$\text{Ta có } x \cdot y = \log_5 3 \cdot \log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 5} = 1$$

Câu 14: Viết công thức biểu thị y theo x , biết $2\log_2 y = 2 + \frac{1}{2}\log_2 x$.

Lời giải

$$2\log_2 y = 2 + \frac{1}{2}\log_2 x \Leftrightarrow \log_2 y^2 = \log_2 4 + \log_2 x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y^2 = \log_2 \left(4 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right) \Leftrightarrow y^2 = 4 \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{4\sqrt{x}}$$

Câu 15: Giải các phương trình sau :

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = \sqrt{8}$;
2. $9^{2x-1} = 81.27^x$;
3. $2\log_5 (x-2) = \log_5 9$;
4. $\log_2 (3x+1) = 2 - \log_2 (x-1)$.

Lời giải

$$a) \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \left(2^{-2}\right)^{x-2} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{-2x+4} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -2x+4 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$b) 9^{2x-1} = 81.27^x \Leftrightarrow \left(3^2\right)^{2x-1} = 3^4 \cdot \left(3^3\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x-2} = 3^{4+3x} \Leftrightarrow 4x-2 = 4+3x \Leftrightarrow x = 6$$

$$c) 2\log_5 (x-2) = \log_5 9 \Leftrightarrow \log_5 (x-2)^2 = \log_5 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 3 (\text{và } x-2 > 0) \Leftrightarrow x = 5$$

d) Điều kiện xác định: $3x+1 > 0; x-1 > 0$. Hay $x > 1$

$$\log_2 (3x+1) = 2 - \log_2 (x-1) \Leftrightarrow \log_2 (3x+1) + \log_2 (x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [(3x+1)(x-1)] = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

Câu 16: Giải các bất phương trình :

1. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \frac{1}{81}$;
2. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^x \leq 27.3^x$;
3. $\log_2 (x+1) \leq \log (2-4x)$.

Lời giải

$$a) \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \left(\text{Do } \frac{1}{9} < 1 \right) \Leftrightarrow x < 1$$

$$b) \left(\sqrt[4]{3}\right)^x \leq 27.3^x \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^x \leq 3^3.3^x$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{4}x} \leq 3^{3+x} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x \leq 3+x (\text{do } 3 > 1) \Leftrightarrow x \geq -4$$

$$c) x+1 > 0; 2-4x > 0 \text{ Hay } -1 < x < \frac{1}{2}$$

$$\log_2(x+1) \leq \log_2(2-4x)$$

$$\Leftrightarrow x+1 \leq 2-4x$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5}$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là: $-1 < x \leq \frac{1}{5}$

Câu 17: Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1000 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày

1. Công thức $P(t) = P_0 \cdot a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Xác định các tham số P_0 và a ($a > 0$). Làm tròn a đến hàng phần trăm.
2. Sau 5 ngày thì số lượng vi khuẩn bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng trăm.
3. Sau bao nhiêu ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Ban đầu có 1000 vi khuẩn nên $P_0 = 1000$.

Sau 2 ngày, số lượng vi khuẩn là: $P = 125\%P_0 = 125\% \cdot 1000 = 1250$

Ta có: $P(2) = P_0 \cdot a^2 \Leftrightarrow 1250 = 1000 \cdot a^2 \Leftrightarrow a^2 = 1,25 \Leftrightarrow a \approx 1,12$

b) Số lượng vi khuẩn sau 5 ngày là: $P(5) = P_0 \cdot a^5 = 1000 \cdot 1,12^5 \approx 1800$ (vi khuẩn).

c) Với $P(t) = 2P_0$ ta có:

$$P(t) = P_0 \cdot a^t \Leftrightarrow 2P_0 = P_0 \cdot 1,12^t \Leftrightarrow 1,12^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{1,12} 2 \approx 6,1 \text{ (ngày)}$$

Vậy sau 6,1 ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu.

Câu 18: Nhắc lại rằng, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Nồng độ H^+ trong dung dịch cho biết độ acid của dung dịch đó.

1. Dung dịch acid A có độ pH bằng 1,9; dung dịch B có độ pH bằng 2,5. Dung dịch nào có độ acid cao hơn và cao hơn bao nhiêu lần
2. Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L . Nước chảy từ một vòi nước có độ pH từ 6,5 đến 6,7 thì có độ acid cao hay thấp hơn nước cất.

Lời giải

$$a) pH_A = 1,9 \Leftrightarrow -\log[H^+] = 1,9 \Leftrightarrow \log[H^+] = -1,9 \Leftrightarrow H^+ = 10^{-1,9}$$

Vậy độ acid của dung dịch A là $10^{-1,9} \text{ mol/L}$.

$$pH_B = 2,5 \Leftrightarrow -\log[H^+] = 2,5 \Leftrightarrow \log[H^+] = -2,5 \Leftrightarrow H^+ = 10^{-2,5}$$

Vậy độ acid của dung dịch B là $10^{-2,5} \text{ mol/L}$.

Ta có: $\frac{10^{-1,9}}{10^{-2,5}} \approx 3,98$

Vậy độ acid của dung dịch A cao hơn độ acid của dung dịch B 3,98 lần.

b) Ta có:

$$6,5 < pH < 6,7 \Leftrightarrow 6,5 < -\log[H^+] < 6,7 \Leftrightarrow -6,5 > \log[H^+] > -6,7 \Leftrightarrow 10^{-6,5} > H^+ > 10^{-6,7}$$

Vậy nước chảy từ vòi nước có độ acid từ $10^{-6,7}$ mol/L đến $10^{-6,5}$ mol/L.

Vậy nước đó có độ acid cao hơn nước cất.

PHẦN 2: BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

A. TRẮC NGHIỆM

1. Biết rằng $2^a = 9$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{a}{6}}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{9}$. D. 3.

Lời giải

Chọn B

2. Giá trị của biểu thức $2\log_5 10 + \log_5 0,25$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C

3. Cho x và y là số dương. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2^{\log x + \log y} = 2^{\log x} + 2^{\log y}$. B. $2^{\log(x+y)} = 2^{\log x} \cdot 2^{\log y}$.
C. $2^{\log(xy)} = 2^{\log x} \cdot 2^{\log y}$. D. $2^{\log x \cdot \log y} = 2^{\log x} + 2^{\log y}$.

Lời giải

Chọn C

4. Biết rằng $x = \log_3 6 + \log_9 4$. Giá trị của biểu thức 3^x bằng

- A. 6. B. 12. C. 24. D. 48.

Lời giải

Chọn B

5. Giá trị của biểu thức $(\log_2 25)(\log_5 8)$ bằng

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. 6. D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C

6. Đặt $\log 3 = a, \log 5 = b$. Khi đó $\log_{15} 50$ bằng

- A. $\frac{1+2b}{a+b}$. B. $\frac{a-b}{a+b}$. C. $\frac{1-b}{a+b}$. D. $\frac{1+b}{a+b}$.

Lời giải

Chọn D

7. Cho ba số $a = 4^{0,9}, b = 8^{0,5}, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1,6}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $c > a > b$.
B. $c > b > a$.
C. $a > b > c$.
D. $a > c > b$.

Lời giải

Chọn D

8. Cho ba số $a = -\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ và $c = \frac{1}{2} \log_3 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < b < c$.
B. $b < a < c$.
C. $c < a < b$.
D. $a < c < b$.

Lời giải

Chọn A

9. Cho $0 < a < 1, x = \log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt{3}, y = \frac{1}{2} \log_a 5, z = \log_a \sqrt{14} - \log_a \sqrt{2}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x < y < z$.
B. $y < x < z$.
C. $z < x < y$.
D. $z < y < x$.

Lời giải

Chọn C

10. Cho ba số $a = \log_{\frac{1}{2}} 3, b = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}, c = 2^{\frac{1}{3}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < b < c$.
B. $a < c < b$.
C. $c < a < b$.
D. $b < a < c$.

Lời giải

Chọn A

11. Giải phương trình $3^{4x} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

- A. $-\frac{1}{4}$.
B. $-\frac{3}{8}$.
C. $\frac{3}{8}$.
D. $\frac{1}{12\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

12. Tập nghiệm của bất phương trình $0,3^{3x-1} > 0,09$ là

- A. $(1; +\infty)$.
B. $(-\infty; 1)$.
C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.
D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

13. Biết rằng $\log_3 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 x = \log_8 64$. Giá trị của x là

- A. $\frac{9}{2}$.
B. 9.
C. 27.
D. 81.

Lời giải

Chọn B

14. Giải phương trình $\log_5(4x+5) = 2 + \log_5(x-4)$.

A. 9.

B. 15.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

15. Giả sử α và β là hai nghiệm của phương trình $\log_2 x \cdot \log_2 3x = -\frac{1}{3}$. Khi đó tích $\alpha\beta$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. 3.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\log_2 3$.

Lời giải

Chọn A

B. TỰ LUẬN

1. Tính giá trị của các biểu thức

a) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3^3}\right)^{\frac{1}{2}}$; b) $\log\sqrt{5} + \log\sqrt{2}$;

c) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} + \log_5 \frac{9}{4} + \log_5 \frac{4}{9}$; d) $\log_2 7 \cdot \log_3 16 \cdot \log_9 3 \cdot \log_7 9$.

Lời giải

a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{27}{8}$; d) 4.

2. Biết rằng $x \log_5 4 = 1$. Tìm giá trị của biểu thức $4^x + 4^{-x}$.

Lời giải

Ta có: $x \log_5 4 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log_5 4} = \log_4 5$.

$4^x + 4^{-x} = 4^{\log_4 5} + 4^{-\log_4 5} = 5 + 5^{-1} = 5\frac{1}{5}$.

3. Biết rằng $a = 10^x, b = 10^y$. Hãy biểu thị biểu thức $A = \log_{a^2} \sqrt[3]{b}$ theo x và y .

Lời giải

$A = \log_{a^2} \sqrt[3]{b} = \log_{10^{2x}} 10^{\frac{y}{3}} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{y}{3} \log_{10} 10 = \frac{y}{6x}$

4. Giải các phương trình sau:

a) $4^x = \sqrt{2\sqrt{2}}$; b) $9^{5x} = 27^{x-2}$;

c) $\log_{81} x = \frac{1}{2}$; d) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(4x-1)$;

e) $\log_5(x-2) + \log_5(x+2) = 1$; g) $\log_x 8 = \frac{3}{4}$.

Lời giải

a) $x = \frac{3}{8}$; b) $x = -\frac{6}{7}$; c) $x = 9$;

d) $x = 2$; e) $x = 3$; g) $x = 16$.

5. Giải các bất phương trình sau:

a) $32^{2x} \geq 64^{x-2}$; b) $25 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+2x+2} > 4$;

c) $\log(11x+1) < 2$; d) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2x+1)$.

Lời giải

a) $x \geq -3$; b) $-2 < x < 0$;

c) $-\frac{1}{11} < x < 9$; d) $\frac{1}{3} < x \leq 2$.

6. Tính giá trị của biểu thức $A = \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{99}\right)$.

Lời giải

$$A = \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{99}\right)$$

$$= \log\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99}\right) = \log 100 = 2.$$

7. Cho α là số thỏa mãn $3^\alpha - 3^{-\alpha} = 2$. Tìm giá trị của các biểu thức:

a) $3^\alpha + 3^{-\alpha}$; b) $9^\alpha - 9^{-\alpha}$.

Lời giải

a) $(3^\alpha + 3^{-\alpha})^2 = 3^{2\alpha} + 2 + 3^{-2\alpha} = (3^\alpha - 3^{-\alpha})^2 + 4 = 2^2 + 4 = 8$.

$\Rightarrow 3^\alpha + 3^{-\alpha} = 2\sqrt{2}$ (do $3^\alpha + 3^{-\alpha} > 0$).

b) $9^\alpha - 9^{-\alpha} = (3^\alpha + 3^{-\alpha})(3^\alpha - 3^{-\alpha}) = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$.

8. Công thức $M = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ cho biết khối lượng của một chất phóng xạ sau thời gian t kể từ thời điểm nào đó (gọi là thời điểm ban đầu), M_0 là khối lượng ban đầu, T là chu kỳ bán rã của chất phóng xạ đó (cứ sau mỗi chu kỳ, khối lượng của chất phóng xạ giảm đi một nửa). Trong một phòng thí nghiệm, với khối lượng 200 g radon ban đầu, sau 16 ngày, chỉ còn lại 11 g. Chu kỳ bán rã của radon bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$11 = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}} \Leftrightarrow \frac{16}{T} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{11}{200} = \log_2 \frac{200}{11} \Leftrightarrow T = \frac{16}{\log_2 \frac{200}{11}} \approx 3,8 \text{ (ngày)}$$

9. Công thức $\log x = 11,8 + 1,5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất.

- a) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp bao nhiêu lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter?
- b) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng nào?

Lời giải

a) Gọi x_1, x_2 (erg) lần lượt là năng lượng tạo ra của hai trận động đất có độ lớn lần lượt là $M_1 = 5, M_2 = 3$ (độ Richter).

Ta có: $\log x_1 = 11,8 + 1,5M_1; \log x_2 = 11,8 + 1,5M_2$

$$\Rightarrow \log x_1 - \log x_2 = 1,5(M_1 - M_2) \Rightarrow \log \frac{x_1}{x_2} = 3 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 10^3 = 1000.$$

$$b) 11,8 + 1,5 \cdot 4 \leq \log x \leq 11,8 + 1,5 \cdot 6 \Rightarrow 17,8 \leq \log x \leq 20,8 \Rightarrow 10^{17,8} \leq x \leq 10^{20,8}.$$

CHƯƠNG VII. ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn này được gọi là **đạo hàm** của hàm số $f(x)$

tại x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

$$\text{Vậy } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Chú ý:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số này có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì ta nói nó có **đạo hàm trên khoảng $(a; b)$** , kí hiệu y' hoặc $f'(x)$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$.

a) Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến tại x_0 . Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó, $x = x_0 + \Delta x$ và $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

b) Tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ biểu thị tốc độ thay đổi trung bình của đại lượng y theo đại lượng x trong khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$; còn $f'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi (tức thời) của đại lượng y theo đại lượng x tại điểm x_0 .

Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

□ Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .

□ Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Tiếp tuyến M_0T có phương trình là $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ với $x > 0$; b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ với $x \neq 1$.

Lời giải

a) Với bất kì $x_0 > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - \sqrt{x} - (x_0^2 + \sqrt{x_0})}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(x + x_0 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) = 2x_0 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

b) Với $x_0 \neq 1$, ta có;

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x_0}{x_0-1}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x + x_0}{(x - x_0)(x - 1)(x_0 - 1)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{(x - 1)(x_0 - 1)} = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}.$$

Vậy $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị là (H) .

a) Viết tiếp tuyến của (H) tại điểm $M \in (H)$ có $x_M = 2$.

b) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -x$.

c) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(1; -1)$.

Lời giải

Ta có $y' = f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

a) Phương trình tiếp điểm của (H) tại M có hệ số góc $f'(2) = -1$ là:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 4$$

b) Gọi d_1 là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $M_0(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm của (H) và d_1 .

Vì $d_1 // d$ nên $f'(x_0) = -1$.

$$\text{Suy ra } -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=1 \\ x_0-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ x_0=1 \end{cases}$$

Với $x_0 = 2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;2)$ có hệ số góc $f'(2) = -1$ là:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 2 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 4.$$

Với $x_0 = 0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(0;0)$ có hệ số góc $f'(0) = -1$ là:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x-0) \Leftrightarrow y = -x \text{ (loại vì trùng với đường thẳng } d \text{)}$$

Vậy tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng d là $d_1: y = -x + 4$.

c) Gọi a là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $A(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm của H và a .

Phương trình tiếp tuyến a là: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

$$\text{Vì } a \text{ qua điểm } N(1;-1) \text{ nên } -1 - \frac{x_0}{x_0-1} = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(1-x_0) \Leftrightarrow 2x_0(x_0-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ (nhận) hoặc } x_0 = 1 \text{ (loại)}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến $a: y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow a: y = -x$

Bài 3. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 16t + 15$, trong đó s tsinh bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có } s'(t) = (-2t^2 + 16t + 15)' = (-2.3t + 16) = -4t + 16.$$

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$ là $s'(3) = -1.3 = 16 = 4(m/s)$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\text{a) } f(x) = -x^2; \quad \text{b) } f(x) = x^3 - 2x; \quad \text{c) } f(x) = \frac{4}{x}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x^2 - (-x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [-(x + x_0)] \\ &= -(x_0 + x_0) = -2x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - 2x - x_0^3 + 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^3 - x_0^3) - (2x - 2x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2) - 2(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [(x^2 + x.x_0 + x_0^2) - 2] \\ &= (x_0^2 + x_0.x_0 + x_0^2) - 2 = 3x_0^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) b) } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - 2x - x_0^3 + 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4x_0 - 4x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-4}{x \cdot x_0} = \frac{-4}{x \cdot x_0} = \frac{-4}{x_0^2} \end{aligned}$$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A .

Lời giải

Ta có $f'(x_0) = -4x$

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A là $(-4) \cdot 1 = -4$

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$

a) Tại điểm $(-1; 1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải

Ta có: $y'(x_0) = 3x^2$

a) Ta có điểm $(-1; 1)$ không thuộc hàm số $y = x^3$ nên không có phương trình tiếp tuyến tại điểm $(-1; 1)$.

b) Khi $x = 2$ thì $y = 2^3 = 8$

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là $3 \cdot 2^2 = 12$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(2; 8)$ là: $y - 8 = 12 \cdot (x - 2)$ hay $y = 12x - 16$

Bài 4. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = 12t^2 + 6$

Khi $t = 2$, $v(2) = 12 \cdot 2^2 + 6 = 54$

Bài 5. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5% / năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức

a) lãi kép với kì hạn 6 tháng;

b) lãi kép liên tục.

Lời giải

a) Tổng số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm là:

$$T = 10000000 \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 = 10506250 \quad (\text{đồng})$$

b) Tổng số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm là:

$$T = 10000000 e^{0,05} = 10512711 \quad (\text{đồng})$$

Bài 6. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.



Hình 4

(Nguồn: <https://www.britannica.com/place/Moon>)

Lời giải

Vận tốc tức thời của vật là: $v(t) = h'(t) = 1,62t$

Tại thời điểm $t = 2$ thì $v(2) = 1,62 \cdot 2 = 3,24$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \sqrt[3]{x}$. Chứng minh rằng $y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0)$.

Lời giải

Với $x_0 \neq 0$, ta có:

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$$

$$\text{Vậy } y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0).$$

2. Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol (P)

a) Tại điểm $(-1; 1)$.

b) Tại giao điểm của (P) với đường thẳng $y = -3x + 2$.

Lời giải

a) Ta có $y'(-1) = -2$

b) Giao điểm của (P) với đường thẳng $y = -3x + 2$ là $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ và $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$, hệ số góc là $k = -3 + \sqrt{17}$ và $k = -3 - \sqrt{17}$.

3. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm (nếu có) của các hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1}{x+1} & \text{khi } x > 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{3} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ nên f gián đoạn tại 2, do đó f không có đạo hàm tại 2.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ nên f liên tục tại 1.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Vậy f không có đạo hàm tại 1.

4. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó

a) Song song với đường thẳng $y = -x + 2$;

b) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x - 4$;

c) Đi qua điểm $A(0;1)$.

Lời giải

a) Hai tiếp tuyến $y = -x + 1; y = -x + \frac{31}{27}$

b) Hai tiếp tuyến: $y = 4x - 7; y = 4x + \frac{67}{3}$

c) Hai tiếp tuyến: $y = 1; y = -x + 1$

5. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 4t + 5, s'(4) = 21 \text{ m/s}$

BÀI 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n, n \in \mathbb{N}^*$

Hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Nhận xét:

a) Cho số thực α . Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là hàm số lũy thừa (với tập xác định $(0; +\infty)$).

Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ còn đúng khi n là số thực, tức là với số thực α bất kì $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (x > 0)$.

Với $\alpha = \frac{1}{2}$, ta nhận được công thức đã biết: $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$

b) Ở bài học trước, dùng định nghĩa ta tìm được các công thức đạo hàm:

$$\square (C)' = 0, C \text{ là hằng số};$$

$$\square \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0;$$

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

$$(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right);$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số logarit sau:

$$(e^x)' = e^x; (\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0);$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a (a > 0, a \neq 1); (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (x > 0, a > 0, a \neq 1).$$

5. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$$(u+v)' = u' + v'; (u-v)' = u' - v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u; (1) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ (với } u = v(x) \neq 0 \text{)}. (2)$$

Chú ý:

□ Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C.v)' = C.v'$.

□ Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

6. Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u u'_x$.

7. Đạo hàm cấp hai

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$ thì ta có hàm số $y' = f'(x)$ xác định trên $(a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ với $x > 0$; b) $y = (1 + x - 2x^2) \left(2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right)$.

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 - \sqrt[3]{x})' (1 + \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x})'}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = \frac{-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1 + \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{x})\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} \\ &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \frac{2}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x})^2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y' &= (1 + x - 2x^2)' \left(2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) - (1 + x - 2x^2) \left(2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right)' \\ &= (1 - 2 \cdot 2x) \left(2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) + (1 + x - 2x^2) \left(-2x + 3 \cdot \frac{x^2}{3} \right) \\ &= (1 - 4x) \left(2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) + (1 + x - 2x^2) (-2x + x^2) = 2 - 10x - 2x^2 + \frac{28}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^4 \end{aligned}$$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (\sin x + 2 \cos x)(\sin x - 2 \cos x + 1)$; b) $y = \frac{\tan x - 1}{\cot x + 2}$.

Lời giải

a) $y' = (\sin x + 2 \cos x)' (\sin x - 2 \cos x + 1) - (\sin x + 2 \cos x) (\sin x - 2 \cos x + 1)'$

$$= (\cos x - 2 \sin x)(\sin x - 2 \cos x + 1) + (\sin x + 2 \cos x)(\cos x + 2 \sin x)$$

$$= 10 \sin x \cos x + \cos x - 2 \sin x.$$

$$b) y' = \frac{(\tan x - 1)'(\cot x + 2) - (\tan x - 1)(\cot x + 2)'}{(\cot x + 2)^2} = \frac{(1 + \tan^2 x)(\cot x + 2) + (\tan x - 1)(1 + \cot^2 x)}{(\cot x + 2)^2}$$

$$= \frac{2 \cot x + 2 \tan x + 2 \tan^2 x - \cot^2 x + 1}{(\cot x + 2)^2}$$

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$; b) $y = (3 \ln x + 2)(2 \log_3 x - 5)$.

Lời giải

a)

$$y' = \frac{(2^x + 1)'(2^x - 1) - (2^x + 1)(2^x - 1)'}{(2^x - 1)^2} = \frac{2^x \ln 2 (2^x - 1) - 2^x \ln 2 (2^x + 1)}{(2^x - 1)^2} = \frac{2^x \ln 2 [(2^x - 1) - (2^x + 1)]}{(2^x - 1)^2} = \frac{-2^{x+1} \ln 2}{(2^x - 1)^2}$$

b)

$$y' = (3 \ln x + 2)'(2 \log_3 x - 5) - (3 \ln x + 2)(2 \log_3 x - 5)' = \frac{3}{x}(2 \log_3 x - 5) + \frac{2}{x \ln 3}(3 \ln x + 2)$$

$$= \frac{1}{x} \left(6 \log_3 x + \frac{6}{\ln 3} \ln x - 15 + \frac{4}{\ln 3} \right)$$

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2 + \sin 3x}$; b) $y = \ln^2(3x + 2)$;

c) $y = \frac{1}{e^{3x} - 1}$; d) $y = \tan(\cot x)$.

Lời giải

a)

$$y' = \frac{(2 + \sin 3x)'}{2\sqrt{2 + \sin 3x}} = \frac{\cos 3x \cdot (3x)'}{2\sqrt{2 + \sin 3x}} = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{2 + \sin 3x}}.$$

b)

$$y' = 2 \ln(3x + 2) [\ln(3x + 2)]' = 2 \ln(3x + 2) \frac{(3x + 2)'}{3x + 2} = \frac{6}{3x + 2} \ln(3x + 2)$$

c)

$$y' = -\frac{(e^{3x} - 1)'}{(e^{3x} - 1)^2} = -\frac{e^{3x} (3x)'}{(e^{3x} - 1)^2} = -\frac{3e^{3x}}{(e^{3x} - 1)^2}.$$

d)

$$y' = \frac{(\cot x)'}{\cos^2(\cot x)} = \frac{-1}{\sin^2 x \cos^2 x (\cot x)}.$$

Bài 5. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$; b) $y = \cos^2 x$.

Lời giải

a) $y' = 3 \cdot 3x^2 - 2x + 3 = 9x^2 - 2x + 3$, $y'' = 9 \cdot 2x - 2 = 18x - 2$

b) Đặt $u = \cos x$ thì $y = u^2$.

Ta có $u'_x = -\sin x$ và $y'_u = 2u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2u \cdot (-\sin x) = -2 \cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$

$$y'' = -(2x)' \cdot \cos 2x = -2 \cos 2x$$

Bài 6. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = -2 \cdot 2t + 15 = -4t + 15$, suy ra $s''(t) = -4$.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ lần lượt là $s'(2) = 7m/s$ và $s''(2) = -4m/s^2$.

Bài 7. Nếu số lượng sản phẩm được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

Lời giải

Ta có $P'(x) = -2 \cdot 200x + 12800 = -400x + 12800$

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm là

$$P'(12) = -400 \cdot 12 + 12800 = 8000$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3}$;

b) $y = \frac{-2x+3}{x-4}$;

c) $y = \frac{x^2-2x+3}{x-1}$;

d) $y = \sqrt{5x}$.

Lời giải

a) $y' = 6x^2 - x + 4$

b) $y' = \left(\frac{-2x+3}{x-4} \right)' = \left(-2 - \frac{5}{x-4} \right)' = \frac{5}{(x-4)^2}$

c) $y = \frac{x^2-2x+3}{x-1} = \frac{x^2-x-x+1+2}{x-1} = x-1 + \frac{2}{x-1}$

$$y' = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

d) $y' = (5x)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x}} = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin 3x$;

b) $y = \cos^3 2x$;

c) $y = \tan^2 x$;

d) $y = \cot(4-x^2)$.

Lời giải

a) $y' = (3x)' \cdot \cos 3x = 3 \cos 3x$

b) $y' = (\cos 2x)' \cdot 3 \cos^2 2x = (2x)' \cdot (-\sin 2x) \cdot 3 \cos^2 2x = -6 \sin 2x \cos^2 2x$

$$c) y' = (\tan x)' \cdot 2 \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2 \tan x = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$$

$$d) y' = (4 - x^2)' \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = -2x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{2x}{\sin^2 x}$$

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 - x) \cdot 2^x$;

b) $y = x^2 \log_3 x$;

c) $y = e^{3x+1}$.

Lời giải

$$a) y' = (x^2 - x)' \cdot 2^x + (x^2 - x) \cdot (2^x)' = (2x - 1) \cdot 2^x + (x^2 - x) \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

$$b) y' = (x^2)' \cdot \log_3 x + x^2 \cdot (\log_3 x)' = 2x \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 3}$$

$$c) y' = (3x + 1)' \cdot e^{3x+1} = 3 \cdot e^{3x+1}$$

Bài 4. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3$;

b) $y = xe^x$.

Lời giải

$$a) y' = 8x^3 - 10x; y'' = 24x^2 - 10$$

$$b) y' = e^x + x \cdot e^x; y'' = e^x + e^x + x \cdot e^x = 2e^x + x \cdot e^x$$

Bài 5. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (nguồn: https://www.cde.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.

Lời giải

Tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái là: $w'(t) = 0,002274t^2 - 0,1192t + 1,82$

Khi $t = 10$, ta có: $w'(10) = 0,002274 \cdot 10^2 - 0,1192 \cdot 10 + 1,82 = 0,8554$

Bài 6. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

Lời giải

Tốc độ tăng của chi phí theo thời gian là

$$\begin{aligned} C'(t) &= C'(x) \cdot x'(t) = \left(\sqrt{5x^2 + 60} \right)' (20t + 40)' = (5x^2 + 60)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}} \cdot 20 = 10x \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}} \cdot 20 \\ &= 100x \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}} = 100(20t + 40) \cdot \frac{1}{\sqrt{5(20t + 40)^2 + 60}} \end{aligned}$$

$$C'(4) = 100(20.4 + 40) \cdot \frac{1}{\sqrt{5(20.4 + 40)^2 + 60}} = 44,7$$

Khi $t = 4$ thì

Bài 7. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật được thả rơi từ độ cao 200m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính:

- Quãng đường vật đã rơi;
- Gia tốc của vật.

Lời giải

a) Khi $t = 2$ thì $s(t) = 0,81.2^2 = 3,24(m)$

b) Ta có: $v(t) = s'(t) = 1,62t$

Gia tốc của vật là: $v'(t) = 1,62$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{-3x^2}{2} + \frac{2}{x} + \frac{x^3}{3}$; b) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9)$;

c) $y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x + 1}$; d) $y = \frac{1 - 2x}{x + 1}$;

e) $y = xe^{2x+1}$; g) $y = (2x + 3)3^{2x+1}$;

h) $y = x \ln^2 x$; i) $y = \log_2(x^2 + 1)$.

Lời giải

a) $y' = -3x - \frac{2}{x^2} + x^2$; b) $y' = 2x(3x^4 + 8x^2 - 41)$;

c) $y' = \frac{3x^2 + 2x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$; d) $y' = -\frac{3}{(x + 1)^2}$;

e) $y' = (2x + 1)e^{2x+1}$; g) $y' = 2.3^{2x+1}[(2x + 3)\ln 3 + 1]$;

h) $y' = \ln^2 x + 2 \ln x$; i) $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)\ln 2}$

2. Cho hàm số $f(x) = 3x^3 - 4\sqrt{x}$. Tính $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$ (a là hằng số khác 0).

Lời giải

Ta có $f'(x) = 9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

$f(4) = 184$; $f'(4) = 143$; $f(a^2) = 3a^6 - 4|a|$; $f'(a^2) = 9a^4 - \frac{2}{|a|}$

3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (1 + x^2)^{20}$; b) $y = \frac{2 + x}{\sqrt{1 - x}}$.

Lời giải

a) $y' = 40x(1+x^2)^{19}$; b) $y' = \frac{-x+4}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$

4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{\sin x - \cos x}$; b) $y = \frac{\sin x}{x}$;

c) $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$; d) $y = \cos(2\sin x)$.

Lời giải

a) $y' = \frac{\sin x - \cos x - x(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$ b) $y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

c) $y' = \cos^3 x$ d) $y' = -2 \cos x \cdot \sin(2\sin x)$

5. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x \sin 2x$; b) $y = \cos^2 x$; c) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$.

Lời giải

a) $y'' = 4 \cos 2x - 4 \sin 2x$

b) $y'' = -2 \cos 2x$

c) $y'' = 12x^2 - 18x + 2$.

6. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s = 100 + 2t - t^2$ trong đó thời gian được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0?

b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3s$.

Lời giải

a) $s'(t) = 2 - 2t$

$s'(t) = 0 \Rightarrow 2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1$

Vận tốc chất điểm bằng 0 khi $t = 1s$.

b) Khi $t = 3s$

$s'(3) = 2 - 2 \cdot 3 = -4(m/s)$

$s''(3) = -2 \Rightarrow a(3) = -2m/s^2$

Vậy khi $t = 3s$ thì vận tốc của vật là $-4m/s$. Gia tốc của vật là $-2m/s^2$.

7. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^3 + 75t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = -6t^2 + 75 \Rightarrow s''(t) = -12t$

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $-2m/s$.

8. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = 200(x-2)(17-x)$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

Lời giải

Ta có: $P'(x) = -400x + 3800$.

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm là $P'(30) = -8200$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

PHẦN 1: BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -4)$ có hệ số góc bằng

- A. -3. B. 9. C. -9. D. 72.

Lời giải

Chọn B

Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -4)$ có hệ số góc là:

$$y'(-1) = 3x^2 - 6x = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 9$$

Câu 2: Hàm số $y = -x^2 + x + 7$ có đạo hàm tại $x = 1$ bằng

- A. -1. B. 7. C. 1. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'(1) = -2x + 1 = -2 \cdot 1 + 1 = -1$

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ và $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 5$. Bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. B. $(0; 1)$. C. $[0; 1]$. D. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x \Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Câu 4: Hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$. C. $y' = \frac{-1}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{-5}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = \frac{(x+3)'(x+2) - (x+3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - (x+3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

Câu 5: Hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ có đạo hàm cấp hai tại $x = 1$ là

- A. $y''(1) = \frac{1}{2}$. B. $y''(1) = -\frac{1}{4}$. C. $y''(1) = 4$. D. $y''(1) = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = (x+1)' \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \left[(x+1)^2 \right]' \cdot \frac{1}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$y''(1) = \frac{2}{(1+1)^3} = \frac{1}{4}$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 6) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M .

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 2x - 2$ nên tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1; 6)$ có hệ số góc là:

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -4$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là:

$$y - 6 = -4(x + 1) \Leftrightarrow y = -4x - 4 + 6 \Leftrightarrow y = -4x + 2.$$

Câu 7: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 1$;

b) $y = (x^2 - x)^3$;

c) $y = \frac{4x-1}{2x+1}$.

Lời giải

a) $y' = 3 \cdot 4x^3 - 7 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 0 = 12x^3 - 21x^2 + 6x$;

b) Đặt $u = x^2 - x$ thì $y = u^3$. Ta có: $(u_x)' = (x^2 - x)' = 2x - 1$ và $(y_u)' = (u^3)' = 3u^2$.

Suy ra $(y_x)' = (y_u)' \cdot (u_x)' = 3u^2 \cdot (2x - 1) = 3(2x - 1)(x^2 - x)^2$.

Vậy $y' = 3(2x - 1)(x^2 - x)^2$.

c)

$$y' = \frac{(4x-1)'(2x+1) - (4x-1)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4(2x+1) - (4x-1) \cdot 2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{8x+4-8x+2}{(2x+1)^2} = \frac{6}{(2x+1)^2}$$

Câu 8: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 3x - 1)e^x$;

b) $y = x^2 \log_2 x$.

Lời giải

a) $y' = (x^2 + 3x - 1)' \cdot e^x + (x^2 + 3x - 1) \cdot (e^x)' = (2x + 3) \cdot e^x + (x^2 + 3x - 1) \cdot e^x = (x^2 + 5x - 1) \cdot e^x$

$$b) y' = (x^3)' \cdot \log_2 x + x^3 \cdot (\log_2 x)' = 3x^2 \log_2 x + x^3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

Câu 9: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan(e^x + 1);$

b) $y = \sqrt{\sin 3x};$

c) $y = \cot(1 - 2^x).$

Lời giải

a) $y' = (e^x + 1)' \cdot \frac{1}{\cos(e^x + 1)^2} = e^x \cdot \frac{1}{\cos(e^x + 1)^2}$

b) $y' = (\sin 3x)' \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin 3x}} = (3x)' \cdot \cos 3x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin 3x}} = 3 \cos 3x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin 3x}}$

c) $y' = (1 - 2^x)' \cdot \frac{-1}{\sin^2(1 - 2^x)} = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\sin^2(1 - 2^x)}$

Câu 10: Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 2x - 3;$

b) $y = x^2 e^x.$

Lời giải

a) $y' = 3x^2 - 8x + 2$

$y'' = 6x - 8$

b) $y' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$

$y'' = (2x + x^2)' e^x + (2x + x^2) \cdot (e^x)' = (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) e^x$

Câu 11: Một viên sỏi rơi từ độ cao 44,1m thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$;

b) Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

Lời giải

Vận tốc rơi của viên sỏi là: $v(t) = s'(t) = 9,8t$

a) Khi $t = 2$ thì $v(2) = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ (m/s)

b) Khi viên sỏi chạm đất thì $s(t) = 44,1$ Hay $4,9t^2 = 44,1 \Leftrightarrow t = 3$

Ta có: $v(3) = 9,8 \cdot 3 = 29,4$ (m/s)

Câu 12: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t = 1$.

Lời giải

Vận tốc của vật là: $v(t) = s'(t) = 6t^2 + 4$

Gia tốc của vật là $v'(t) = 12t$

Khi $t = 1$ thì $v(1) = 6.1^2 + 4 = 10; v'(1) = 12.1 = 12$

Câu 13: Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$, trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$.

Lời giải

Tốc độ tăng trưởng dân số là:

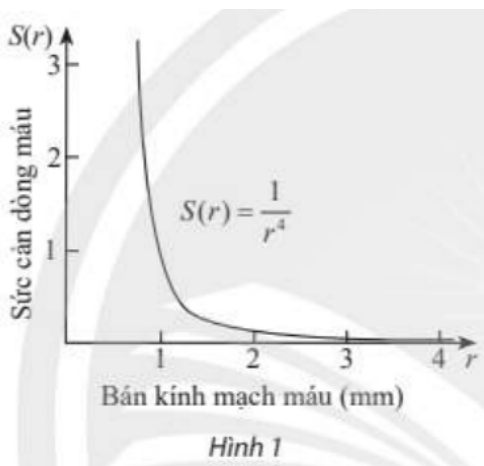
$$P'(t) = \frac{(500t)'(t^2 + 9) - 500t(t^2 + 9)'}{(t^2 + 9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{500.(t^2 + 9) - 500t.2t}{(t^2 + 9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{4500 - 500t^2}{(t^2 + 9)^2}$$

$$\text{Khi } t = 12 \text{ thì } P'(12) = \frac{4500 - 500.12^2}{(12^2 + 9)^2} = -2,88$$

Câu 14: Hàm số $S(r) = \frac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu trong mạch máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0,8$.



Lời giải

Tốc độ thay đổi của S là

$$S'(r) = (r^{-4})' = -4r^{-5} = -\frac{4}{r^5}$$

$$\text{Khi } r = 0,8 \text{ thì } S'(0,8) = -\frac{4}{0,8^5} = -12,2$$

Câu 15: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$

trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

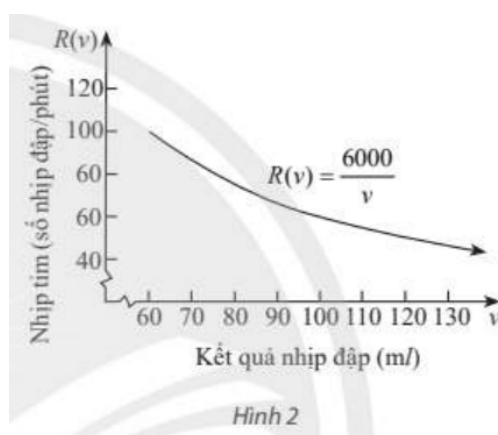
(Nguồn: <https://www.algebra.com/algebra/homework/Trigonometry-basics/Trigonometry-basics.faq.question.1111985.html>)

Lời giải

Tốc độ thay đổi của nhiệt độ là: $T'(t) = -0,2t + 1,2$ Khi $t = 1,5$ thì

$$T'(1,5) = -0,2 \cdot 1,5 + 1,2 = 0,9$$

Câu 16: Hàm số $R(v) = \frac{6000}{v}$ có thể được sử dụng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể đẩy đi được 6000ml máu trên mỗi phút và v ml máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.



Lời giải

$$\text{Ta có: } R'(v) = 6000 \cdot \left(-\frac{1}{v^2} \right) = -\frac{6000}{v^2}.$$

Tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$ là:

$$R'(80) = -\frac{6000}{80^2} = -0,9375.$$

PHẦN 2: BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

A. TRẮC NGHIỆM

1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -6)$ có hệ số góc bằng:

- A. 18. B. -3. C. 7. D. 9.

Lời giải

Chọn B.

2. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đạo hàm tại $x = -1$ bằng

- A. 0. B. 6. C. -6. D. -1.

Lời giải

Chọn A.

3. Cho hai hàm số $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ và $g(x) = x^3 + x^2 - 2$. Bất phương trình

$f''(x) - f'(x) + g'(x) - 8 \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $\left(1; \frac{10}{3}\right)$.
 B. $(-\infty; 1] \cup \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$.
 C. $\left[1; \frac{10}{3}\right]$.
 D. $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C.

4. Hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ có đạo hàm là

- A. $y' = -\frac{1}{(3x+2)^2}$.
 B. $y' = -\frac{7}{(3x+2)^2}$.
 C. $y' = \frac{1}{(3x+2)^2}$.
 D. $y' = \frac{7}{(3x+2)^2}$.

Lời giải

Chọn D.

5. Hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đạo hàm cấp 2 tại $x=1$ là

- A. $y''(1) = \frac{1}{4}$.
 B. $y''(1) = -\frac{1}{4}$.
 C. $y''(1) = \frac{1}{2}$.
 D. $y''(1) = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

6. Hàm số $y = 3^{x^2+1}$ có đạo hàm là

- A. $(x^2+1)3^{x^2}$.
 B. $(x^2+1)3^{x^2} \ln 3$.
 C. $2x3^{x^2+1} \ln 3$.
 D. 3^{x^2+1} .

Lời giải

Chọn C.

7. Hàm số $y = \ln(\cos x)$ có đạo hàm là

- A. $\frac{1}{\cos x}$.
 B. $-\tan x$.
 C. $\tan x$.
 D. $\cot x$.

Lời giải

Chọn B.

8. Hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+4}}$ có đạo hàm tại $x=1$ bằng

- A. $f'(1) = e^{\sqrt{5}}$.
 B. $f'(1) = 2e^{\sqrt{5}}$.
 C. $f'(1) = \frac{e^{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.
 D. $f'(1) = \frac{e^{\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn C.

B. TỰ LUẬN

1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ tại $x=2$; b) $f(x) = x^4$ tại $x=-1$;

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

Lời giải

a) $f'(2) = \frac{2}{3}$; b) $f'(-1) = -4$;

c) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$; d) $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

2. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ có đồ thị (C) . Tìm tiếp tuyến với (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi tiếp tuyến là Δ và tiếp điểm là $M(x_0; f(x_0))$.

Hệ số góc của Δ là $f'(x_0) = 6x_0^2 - 2x_0 + 2 = 6\left(x_0 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{6} \geq \frac{11}{6}$

Vậy hệ số góc của Δ nhỏ nhất bằng $\frac{11}{6}$ khi $x_0 = \frac{1}{6}$.

Vậy tiếp tuyến Δ là $y - f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{6}\left(x - \frac{1}{6}\right) \Rightarrow y = \frac{11}{6}x + \frac{109}{108}$.

3. Vị trí chuyển động của một vật trên đường thẳng được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 3t^3 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật đó khi $t = 1$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 9t^2 + 5$, vận tốc $s'(1) = 14$.

Gia tốc $s''(t) = 18t$, gia tốc $s''(1) = 18$.

4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x} + 1)$; b) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 1}$; c) $y = \frac{2x+3}{3x+2}$;

Lời giải

a) $y' = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$;

b) $y' = -\frac{2x-3}{(x^2-3x+1)^2}$;

c) $y' = -\frac{5}{(3x+2)^2}$.

5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x \sin x}{1 - \tan x}$; b) $y = \cos \sqrt{x^2 - x + 1}$;

c) $y = \sin^2 3x$; d) $y = \cos^2(\cos 3x)$.

Lời giải

$$a) y' = \frac{\sin x + x \cos x - \sin x \tan x + x \sin x \tan^2 x}{(1 - \tan x)^2}$$

$$b) y' = \frac{-(2x-1)\sin\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$c) y' = 3 \sin 6x$$

$$d) y' = 3 \sin(2 \cos 3x) \sin 3x$$

6. Tính đạo hàm của các hàm số sau biết rằng f và g là các hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$:

$$a) y = f(x^3); b) y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}.$$

Lời giải

$$a) y' = 3x^2 f'(x^3); b) y' = \frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$$

7. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - mx - 5$. Tìm m để

$$a) f'(x) = 0 \text{ có nghiệm kép}; b) f'(x) \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

Lời giải

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - m$$

$$a) \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$$

$$b) f'(x) \geq 0 \forall x \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{4}{3}$$

8. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$. Giải phương trình $f'(x) = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+8}}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+8} = -3(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{5+2\sqrt{35}}{5}(L); x = \frac{5-2\sqrt{35}}{5}(N);$$

9. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$a) y = \frac{x-1}{x+2}; b) y = \sqrt{3x+2}; c) y = xe^{2x}.$$

Lời giải

$$a) y' = \frac{3}{(x+2)^2}; y'' = -\frac{6}{(x+2)^3}$$

$$b) y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}, y'' = -\frac{9}{4\sqrt{(3x+2)^3}}.$$

$$c) y' = (2x+1)e^{2x}; y'' = 4(x+1)e^{2x}.$$

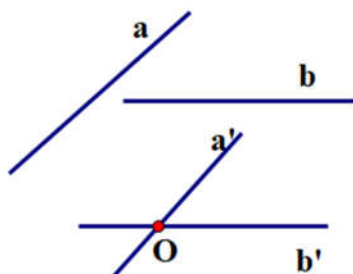
CHƯƠNG VIII: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian, kí hiệu (a, b) , là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b .



Hình 1

Chú ý:

Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ 0° đến 90° .

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

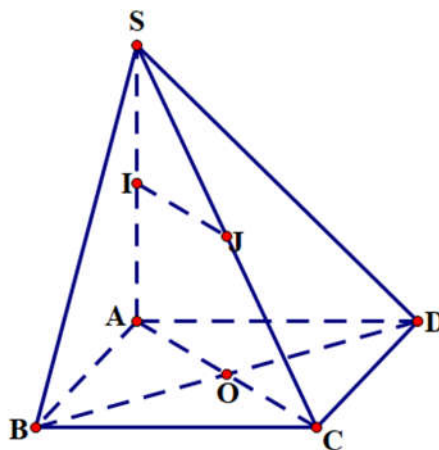
Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp BC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC . Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) IJ và BD ; b) SD và BC .

Lời giải



a) ΔSAC có I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC , suy ra IJ là đường trung bình của ΔSAC , suy ra $IJ \parallel AC$

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Vậy $(IJ, BD) = (AC, BD) = \widehat{AOB} = 90^\circ$.

b) Ta có $AD \parallel BC$, suy ra $(SD, BC) = (SD, AD)$.

Mặt khác: $\begin{cases} SA \perp BC \\ BC \parallel AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp AD$.

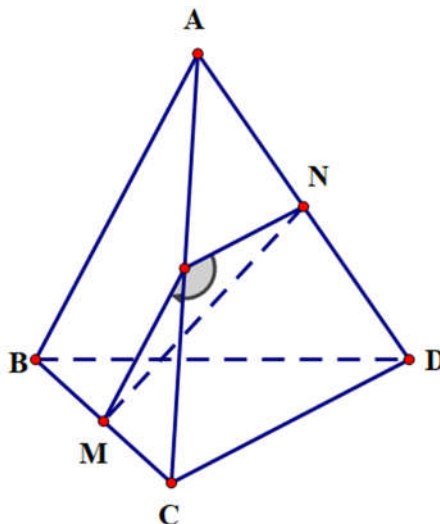
Vậy ΔSAD vuông tại A .

Suy ra $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{SDA} = 60^\circ$.

Vậy $(SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Cho biết $MN = a\sqrt{3}$, tính góc giữa AB và CD .

Lời giải



Gọi I là trung điểm AC .

ΔABC có I, M lần lượt là trung điểm của AC, BC , suy ra IM là đường trung bình của ΔABC , suy ra $IM \parallel AB$ và $IM = \frac{1}{2}AB = a$.

Tương tự, ta có $IN \parallel CD$ và $IN = a$.

Ta có $IM \parallel AB$ và $IN \parallel CD$, suy ra $(AB, CD) = (IM, IN)$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác MIN :

$$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2 \cdot IM \cdot IN \cdot \cos \widehat{MIN}$$

$$\Rightarrow 3a^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \widehat{MIN}$$

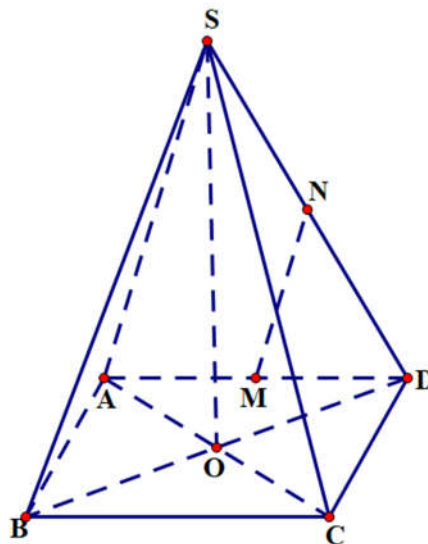
$$\Rightarrow \cos \widehat{MIN} = \frac{3a^2 - 2a^2}{-2a^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ$$

Vậy $(AB, CD) = (IM, IN) = 180^\circ - \widehat{MIN} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Bài 3. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD . Chứng minh rằng $MN \perp SC$.

Lời giải



$\triangle SAD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD , suy ra MN là đường trung bình của $\triangle SAD$, suy ra $MN \parallel SA$.

Vậy $(MN, SC) = (SA, SC)$.

$\triangle ABC$ vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$. Xét $\triangle SAC$, nhận thấy: $AC^2 = SA^2 + SC^2$.

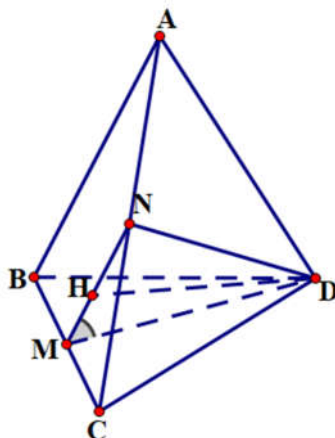
Theo định lý Pythagore đảo, $\triangle SAC$ vuông tại S . Suy ra $\widehat{ASC} = 90^\circ$ hay $(MN, SC) = \widehat{ASC} = 90^\circ$.

Vậy $MN \perp SC$.

C. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Tính góc giữa AB và DM .

Lời giải



Đặt $2a$ là độ dài cạnh của tứ diện đều.

Gọi N là trung điểm của AC , H là trung điểm của MN , ta có:

$MN \parallel AB$, suy ra $(AB, DM) = (MN, DM)$

$DM = DN = a\sqrt{3}, MN = a$ nên $\triangle DMN$ cân tại D

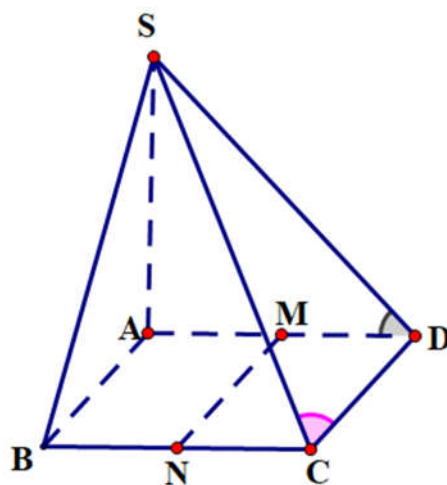
Suy ra $MH = \frac{a}{2}$ và $DH \perp MN$. $\cos \widehat{DMN} = \frac{MH}{MD} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \widehat{DMN} \approx 73,2^\circ$

Vậy $(AB, DM) = (MN, DM) = \widehat{DMN} \approx 73,2^\circ$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AC$, $SA \perp BC$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) SD và BC . b) MN và SC .

Lời giải



a) Vì $AD \parallel BC$ nên $(SD, BC) = (SD, AD)$.

Vì $SA \perp BC$ và $AD \parallel BC$ nên $SA \perp AD$ hay tam giác SAD vuông tại A .

Do đó $(SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$.

b) Vì $MN \parallel CD$ nên $(SC, MN) = (SC, CD)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{A} = 120^\circ$ nên ACD là tam giác đều cạnh a .

Xét các tam giác vuông SAC, SAD có:

$$SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \text{ và } SD = \sqrt{AD^2 + SA^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a.$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác SCD :

$$\cos \widehat{SCD} = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2 \cdot SC \cdot CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \widehat{SCD} \approx 75,5^\circ.$$

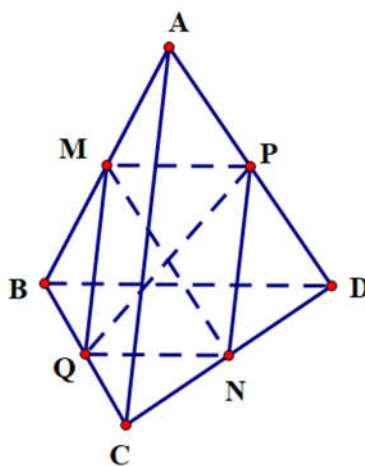
Vậy $(SC, MN) = (SD, AD) = \widehat{SCD} = 75,5^\circ$.

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD, AC = BD, AD = BC$.

a) Chứng minh đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Chứng minh hai đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với nhau.

Lời giải



a) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC .

Ta có $\triangle ACD = \triangle BDC$ (c.c.c), suy ra $AN = BN$, suy ra $\triangle NAB$ cân tại N .

Mà M là trung điểm của AB , suy ra $NM \perp AB$.

Tương tự ta có $NM \perp CD$.

b) Ta có $MQ = PN = \frac{AC}{2}, MP = QN = \frac{BD}{2}, AC = BD$. Suy ra $MQ = PN = MP = QN$.

Vậy tứ giác $MPNQ$ là hình thoi, suy ra $MN \perp PQ$.

4. Cho hình chóp tứ giác $SABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N, I, J lần lượt là trung điểm của SA, SD, SC và BC . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) IJ và DC ; b) MN và LJ .

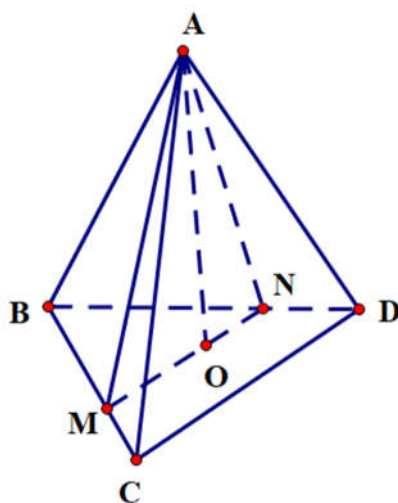
Lời giải

a) Ta có $IJ \parallel SB, DC \parallel AB$, suy ra $(IJ, DC) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

b) Ta có $MN \parallel AD \parallel BC, L \parallel SB$, suy ra $(MN, L) = (BC, SB) = \widehat{SBC} = 60^\circ$.

5. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Chứng minh hai đường thẳng OA và CD vuông góc với nhau.

Lời giải



Qua O vẽ đường $MN \parallel CD$ ($M \in BC, N \in BD$). Ta có $OM = ON, AM = AN$, suy ra $\triangle AMN$ cân tại A , suy ra $AO \perp MN$. Mà $MN \parallel CD$ nên $AO \perp CD$.

BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẶNG

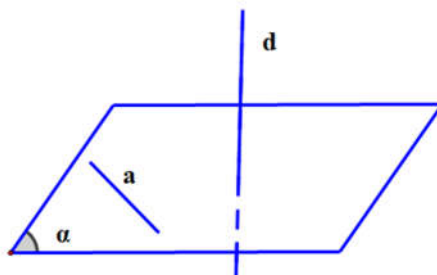
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong

(α) , kí hiệu $d \perp (\alpha)$



Định lý 1

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì $d \perp (\alpha)$.

Định lý 2.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

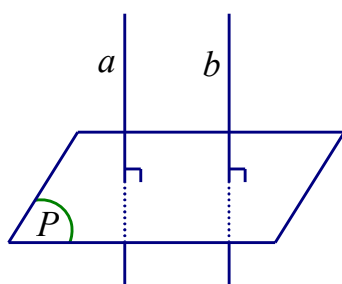
Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Định lý 3.

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

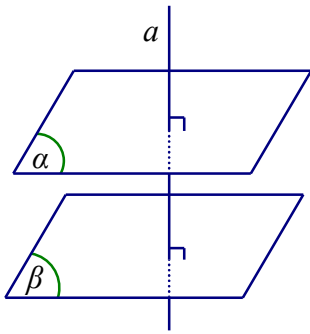
b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau



Định lý 4.

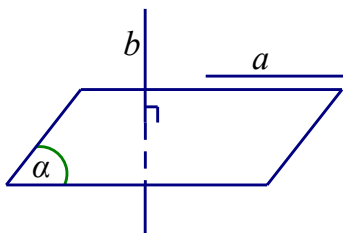
a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Định lý 5.

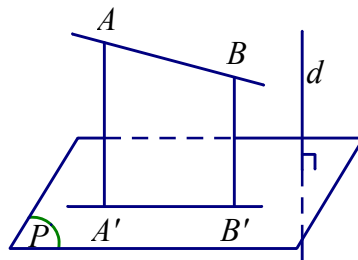
- a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .
- b) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.



3. Phép chiếu vuông góc

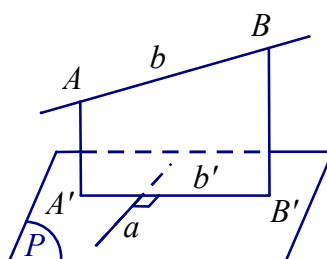
Định nghĩa

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P) . Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là **phép chiếu vuông góc lên (P)** .



Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .

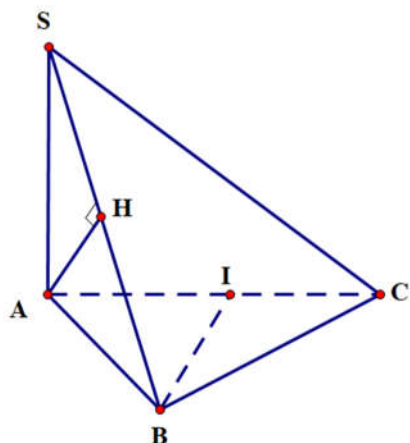


B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi I là trung điểm của AC . Kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$). Chứng minh rằng:

- a) SA vuông góc với các cạnh đáy; b) $BC \perp (SAB)$;
c) $BI \perp (SAC)$, từ đó suy ra $BI \perp SC$; d) $AH \perp (SBC)$, từ đó suy ra $AH \perp SC$.

Lời giải



- a) Vì $SA \perp (ABC)$ và AB, BC, CA cùng nằm trong (ABC) nên $SA \perp AB, SA \perp BC, SA \perp CA$.
b) Ta có $BC \perp AB$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại B) và $BC \perp SA$ (chứng minh trên), suy ra $BC \perp (SAB)$.
c) Do $\triangle ABC$ vuông cân tại B và I là trung điểm của AC nên $BI \perp AC$. (1)

Ta có $SA \perp (ABC)$ và $BI \subset (ABC)$, suy ra $SA \perp BI$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BI \perp (SAC)$, suy ra $BI \perp SC$.

d) Theo giả thiết ta có $AH \perp SB$. (3)

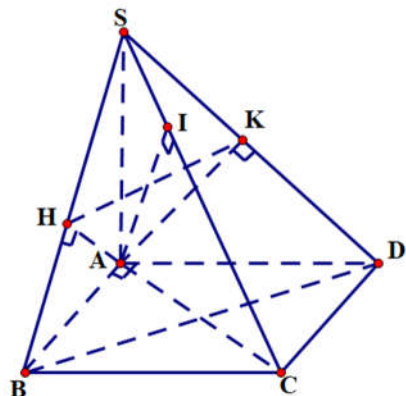
Theo câu b) ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$.

Bài 2. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD . Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD), BD \perp (SAC)$.
b) $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK) .
c) $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.

Lời giải



a) Ta có $BC \perp AB$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp BC$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BC \perp (SAB)$.

Ta có $CD \perp AD$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp CD$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $CD \perp (SAD)$.

Ta có $BD \perp AC$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp BD$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BD \perp (SAC)$.

b) Ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$.

Mặt khác $AH \perp SB$, suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$. (1)

Tương tự ta có $AK \perp CD$ và $AK \perp SD$, suy ra $AK \perp (SCD)$, suy ra $AK \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHK)$.

Ta có $SC \perp (AHK)$ và $AI \perp SC$, suy ra $I \in (AHK)$.

c) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{SAB} = 90^\circ \\ \widehat{SAD} = 90^\circ \end{cases}$.

Xét $\triangle SAB$ và $\triangle SAD$, ta có:

SA là cạnh chung; $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ$; $AB = AD$

Suy ra $\triangle SAB = \triangle SAD$ (c.g.c), suy ra $SB = SD, SH = SK$.

Suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Vậy $HK \parallel BD$.

Theo câu a) ta có $BD \perp (SAC)$, suy ra $HK \perp (SAC)$.

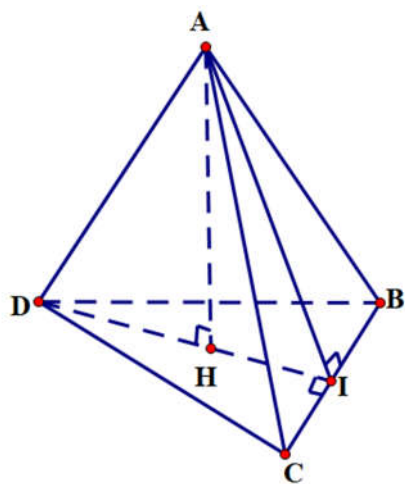
Ta lại có $AI \subset (SAC)$, suy ra $HK \perp AI$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và BCD là các tam giác cân tại A và D . Gọi I là trung điểm của BC .

a) Chứng minh rằng $BC \perp AD$.

b) Kẻ AH là đường cao của tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải



a) Tam giác ABC cân tại A và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.(1)

Tam giác DCB cân tại D và I là trung điểm của BC nên $DI \perp BC$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AID)$, suy ra $BC \perp AD$.

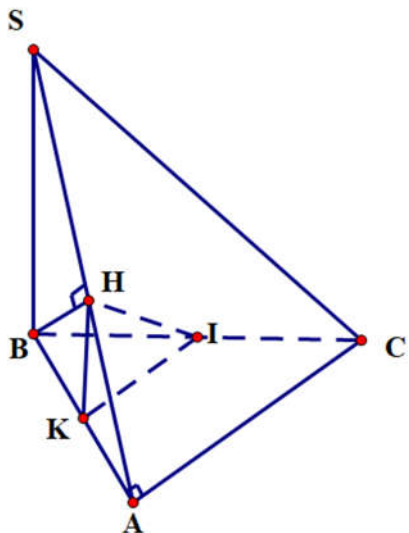
b) Ta có $AH \perp DI$ và $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (ADI)$, $AH \subset (ADI)$), suy ra $AH \perp (BCD)$.

Bài 4. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $SB = AB$ và $SB \perp (ABC)$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC, AB . Chứng minh rằng:

a) $AC \perp (SAB)$; b) $BH \perp (SAC)$;

c) $KI \perp SA$; d) $AB \perp IH$.

Lời giải



a) Ta có $AC \perp AB$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại A) và $AC \perp SB$ (vì $SB \perp (ABC)$), suy ra $AC \perp (SAB)$.

b) Vì $SB = AB$ nên $\triangle SAB$ cân tại B . Mà H là trung điểm của SA , suy ra $BH \perp SA$.(1)

Ta cũng có $AC \perp (SAB)$ và $BH \subset (SAB)$, suy ra $AC \perp BH$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$.

c) $\triangle ABC$ có K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC nên KI là đường trung bình của $\triangle ABC$, suy ra $KI \parallel AC$. Ta lại có $AC \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp SA$.

d) ΔSAB có H, K lần lượt là trung điểm của SA, AB nên HK là đường trung bình của ΔSAB , suy ra $HK \parallel SB$. Mặt khác $SB \perp AB$, suy ra $HK \perp AB$. (3)

Ta có $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp AB$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AB \perp (HIK)$, suy ra $AB \perp IH$.

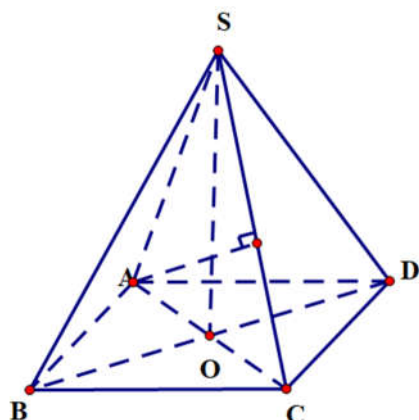
C. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng $SA = SB = SC = SD, SO = 2a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác SAC .

Lời giải



a) Ta có $SA = SC$, suy ra ΔSAC cân tại S , suy ra $SO \perp AC$. (1)

Ta có $SB = SD$, suy ra ΔSBD cân tại S , suy ra $SO \perp BD$. (2)

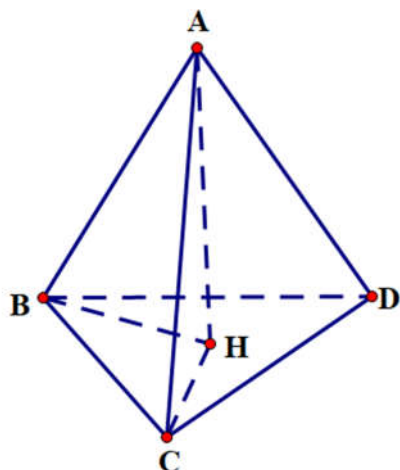
Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC = 2a, OC = a, SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = 3a$.

Về đường cao AH của tam giác SAC . Ta có: $AH = \frac{SO \cdot AC}{SC} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot 2a}{3a} = \frac{4a\sqrt{2}}{3}$.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD) . Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔBCD và $AD \perp BC$.

Lời giải



Ta có $CD \perp AB$ và $CD \perp AH$, suy ra $CD \perp (ABH)$, suy ra $CD \perp BH$.

Tương tự ta cũng có $BD \perp CH$.

Vậy H là trực tâm của $\triangle BCD$.

Ta có H là trực tâm của $\triangle BCD$, suy ra $BC \perp DH$.

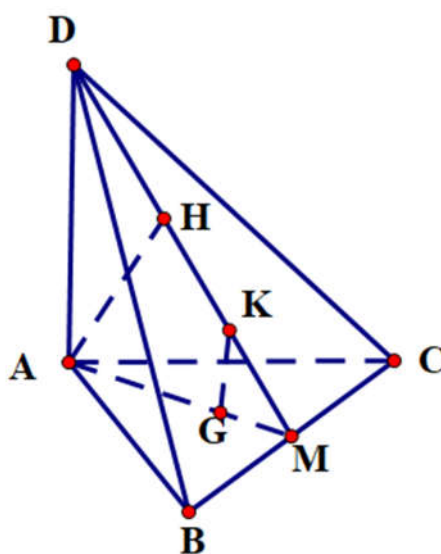
Ta lại có $BC \perp AH$, suy ra $BC \perp (AHD)$, suy ra $BC \perp AD$.

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Vẽ $AH \perp MD$ tại H .

a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

b) Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC . Chứng minh rằng $GK \perp (ABC)$.

Lời giải



a) Ta có $BC \perp DA, BC \perp AM$, suy ra $BC \perp (ADM)$, suy ra $BC \perp AH$.

Ta lại có $AH \perp DM$, suy ra $AH \perp (BCD)$.

b) Ta có $\frac{MK}{MD} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$, suy ra $GK \parallel AD$.

Ta lại có $AD \perp (ABC)$, suy ra $GK \perp (ABC)$.

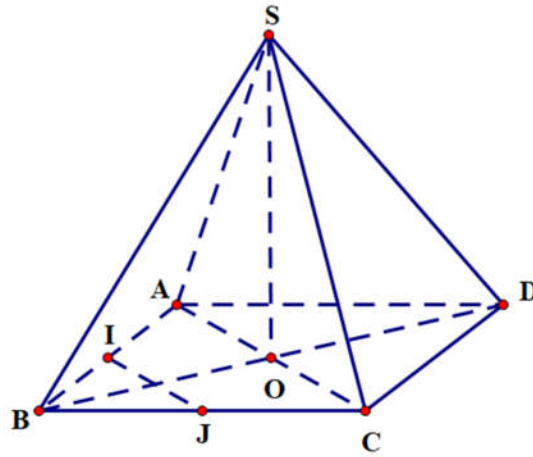
4. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thoi, O là giao điểm của hai đường chéo, $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BA, BC . Chứng minh rằng $IJ \perp (SBD)$.

c) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

Lời giải



a) Ta có $SA = SC$, suy ra $\triangle SAC$ cân tại S, suy ra $SO \perp AC$. (1)

Tương tự ta có $SO \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC \perp BD$ và $AC \perp SO$, suy ra $AC \perp (SBD)$.

Ta có IJ là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên suy ra $IJ \parallel AC$, suy ra $IJ \perp (SBD)$.

c) Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$, suy ra $BD \perp (SAC)$.

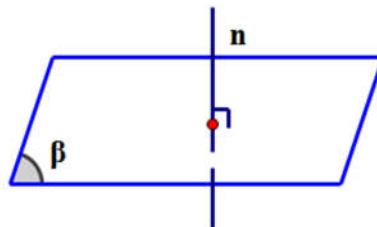
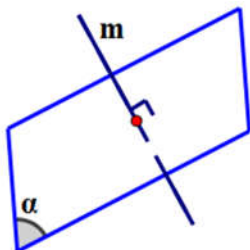
BÀI 3. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (α) và (β) , kí hiệu $((\alpha), (\beta))$.

Ta có: $((\alpha), (\beta)) = (m, n)$ với $m \perp (\alpha), n \perp (\beta)$

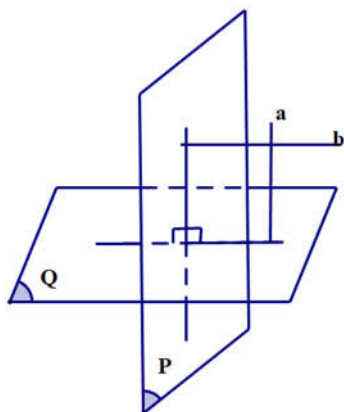


2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc được kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.



3. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

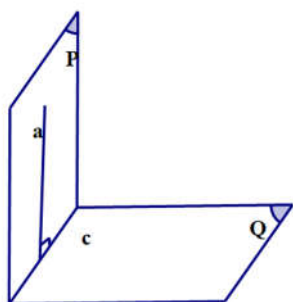
Định lý 1

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

4. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

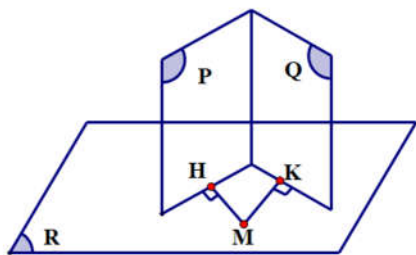
Định lý 2

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



Định lý 3

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



5. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

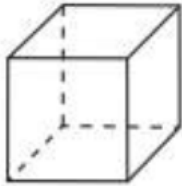
Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác đều.

Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có mặt đáy là hình chữ nhật.

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

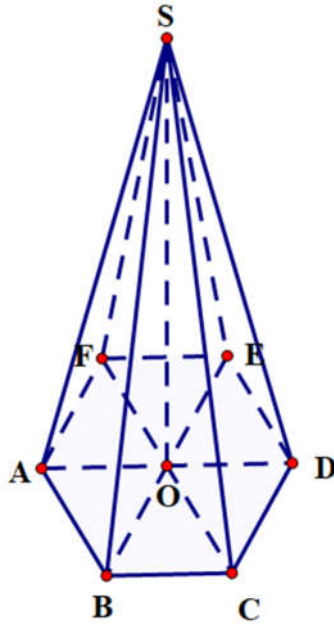
Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		- Cạnh bên vuông góc với hai đáy. - Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		- Hai đáy là hai đa giác đều. - Mặt bên là các hình chữ nhật. - Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy
Hình hộp đứng		- Bốn mặt bên là hình chữ nhật. - Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		- Sáu mặt là hình chữ nhật. - Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. - Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Hình lập phương		- Sáu mặt là hình vuông. - Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a : $d = a\sqrt{3}$.
-----------------	---	--

6. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

a) Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

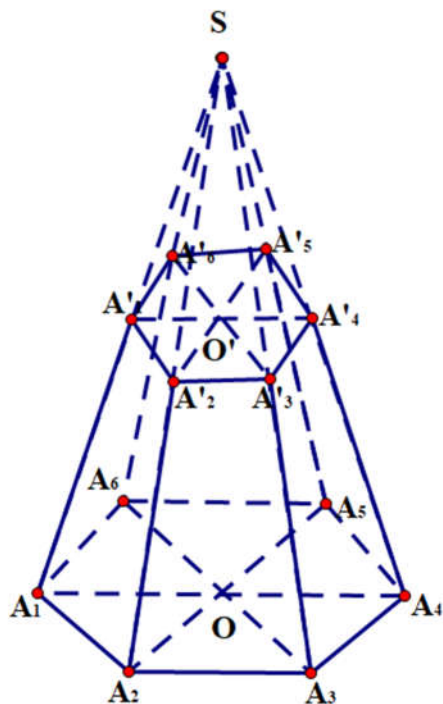


Chú ý: Hình chóp đều có:

- Các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối từ đỉnh hình chóp đến tâm của đáy thì vuông góc với mặt đáy và gọi là đường cao của hình chóp.
- Độ dài đường cao gọi là chiều cao của hình chóp đều.

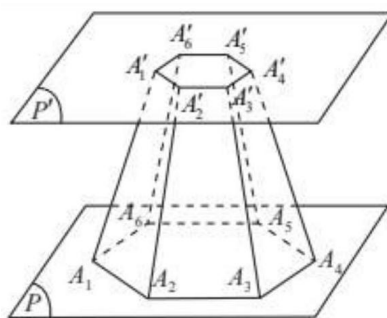
b) Hình chóp cụt đều

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.



Trong hình chóp cắt đều $A_1A_2A_3 \dots A_6 \cdot A'_1A'_2A'_3 \dots A'_6$, ta gọi:

- Các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_6, A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_6$ là các **đỉnh**.
- Đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_6$ là **đáy lớn**, đa giác $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_6$ là **đáy nhỏ**. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.

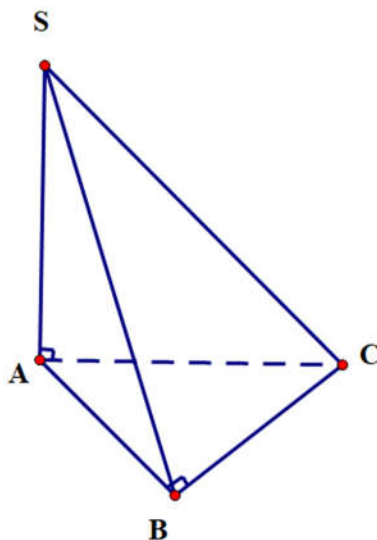


- Cạnh của hai đa giác đáy là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một.
- Các hình thang cân $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_6A_1A'_1A'_6$ là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cắt đều. Hình chóp cắt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

Lời giải



Ta có: $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) và $BC \perp AB$ (giả thiết) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Ta lại có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$ (1)

$AB \subset (ABC), AB \perp BC$ (2)

$SB \subset (SBC), SB \perp BC$ (chứng minh trên) (3)

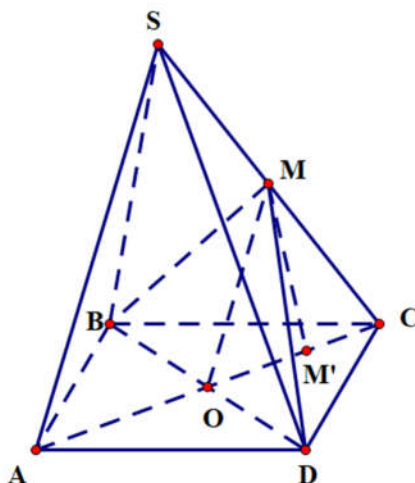
Từ (1), (2), (3) suy ra $((SBC), (ABC)) = (AB, SB)$. Trong tam giác SAB vuông tại A ta có:

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Bài 2. Cho hình chóp đều $SABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' \parallel SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.

Ta có $MB = MD$ nên $MO \perp BD$ và $M'O \perp BD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ là $(MO, M'O)$

$$\text{Ta có: } OC = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Trong tam giác vuông MOM' ,

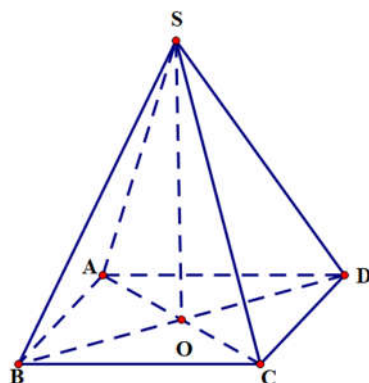
$$\text{ta có } \tan \widehat{MOM'} = \frac{MM'}{OM'} = \frac{SO}{OC} = 1 \Rightarrow \widehat{MOM'} = 45^\circ.$$

$$\text{Vậy } ((MBD), (ABCD)) = (MO, M'O) = \widehat{MOM'} = 45^\circ.$$

Bài 3. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Các tam giác SAC và SBD cân tại S . Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$; b) $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



a) Ta có các tam giác SAC và SBD cân tại S nên $SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$) và $AC \perp BD$ (vì $ABCD$ là hình thoi)

$$\Rightarrow AC \perp (SBD).$$

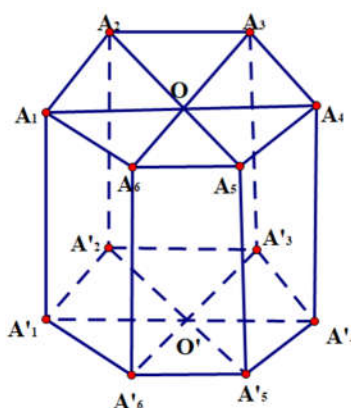
$$\text{Vậy } (SAC) \perp (SBD).$$

Bài 4. Cho hình lăng trụ đứng lục giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên $2a$.

a) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần của lăng trụ.

Lời giải



a) Lăng trụ đứng lục giác đều có sáu mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau với kích thước lần lượt là $a, 2a$.

$$\text{Vậy diện tích xung quanh của lăng trụ là: } S_{xq} = 6 \cdot a \cdot 2a = 12a^2.$$

b) Vì tam giác A_1A_2O đều nên $S_{\Delta A_1A_2O} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Diện tích đáy $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ của lăng trụ là:

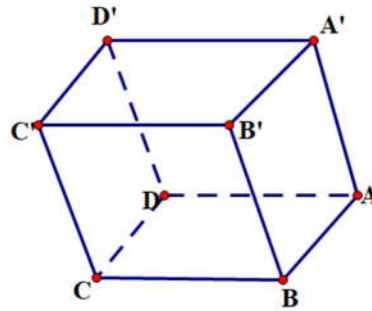
$$S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 6 \cdot S_{\triangle A_1A_2O} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Diện tích toàn phần của lăng trụ là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 12a^2 + 2 \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = (12 + 3\sqrt{3})a^2.$$

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD A' B' C' D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Lời giải



Tam giác ABD có $AD = AB = a$ và $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

Suy ra tam giác ABD là tam giác đều, nên $S_{ABCD} = S_{A' B' C' D'} = 2S_{\triangle ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

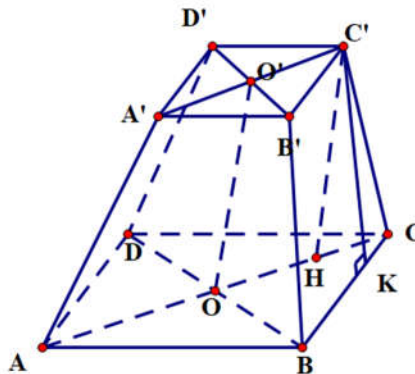
Tương tự, ta có tam giác $A'AB$ và tam giác $A'AD$ là tam giác đều, nên

$$S_{A' B' B A} = S_{D' C' C D} = S_{D' A' A D} = S_{C' B' B C} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy tổng diện tích các mặt của hình hộp là $S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\sqrt{3}$.

Bài 6. Cho hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD A' B' C' D'$ có đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A' B' C' D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên $2a$. Tính đường cao của hình chóp cắt và đường cao của mặt bên.

Lời giải



Trong hình thang vuông $OO' C' C$, vẽ đường cao $C'H$ ($H \in OC$)

Ta có: $OC = a\sqrt{2}$, $O' C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $CH = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có:

$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Nên } OO' = C'H = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Trong hình thang $BB'C'C$, vẽ đường cao $C'K$ ($K \in BC$).

$$\text{Ta có } CK = \frac{BC - B'C'}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Trong tam giác vuông $C'CK$, ta có:

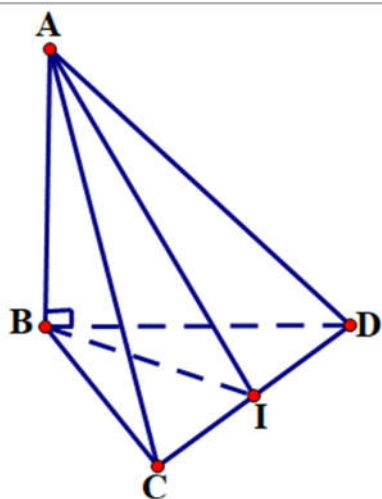
$$C'K = \sqrt{CC'^2 - CK^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

C. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại B và $AB \perp (BCD)$. Cho biết $BC = a\sqrt{2}$, $AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) .

Lời giải



Gọi I là trung điểm của CD .

Ta có: $CD \perp BI$ và $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp AI$.

Khi đó: $(ACD) \cap (BCD) = CD$; $AI \perp CD, AI \subset (ACD)$; $BI \perp CD, BI \subset (BCD)$

suy ra $((ACD), (BCD)) = (AI, BI)$.

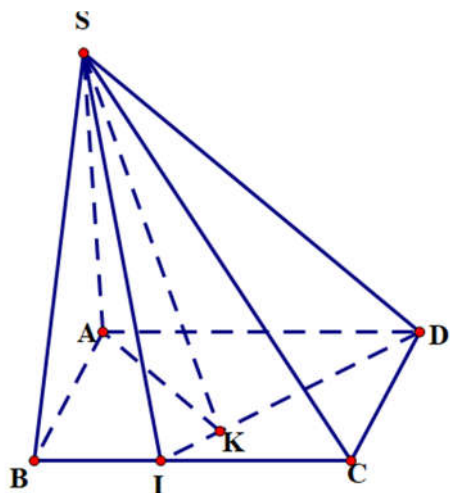
Do tam giác BCD vuông cân tại B nên $BI = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot BC\sqrt{2} = a$.

Xét tam giác ABI vuông tại B , ta có: $\tan \widehat{AIB} = \frac{AB}{BI} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIB} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là $\widehat{AIB} = 30^\circ$.

2. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Cho biết $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Trên BC lấy điểm I sao cho tam giác SDI vuông tại S . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SDI) và $(ABCD)$ là 60° . Tính độ dài SI .

Lời giải



Vẽ $AK \perp ID (K \in D)$.

Ta có $ID \perp SA$ và $ID \perp AK \Rightarrow ID \perp (SAK) \Rightarrow ID \perp SK$.

Suy ra $((SDI), (ABCD)) = \widehat{AKS} = 60^\circ$.

Xét tam giác SAK vuông tại A , ta có:

$$\sin \widehat{AKS} = \frac{SA}{SK} \Rightarrow SK = \frac{SA}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác SAD vuông tại A , ta có: $SD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Xét tam giác SID vuông tại S , ta có:

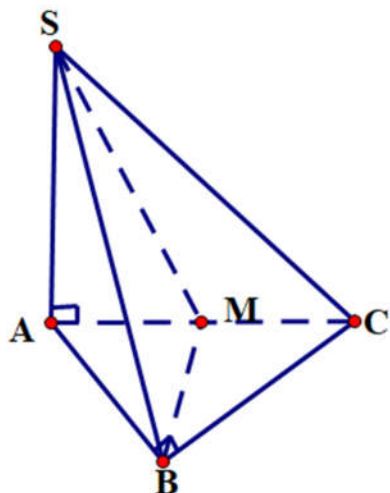
$$\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SI^2} = \frac{1}{SK^2} - \frac{1}{SD^2} \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{55}}{11}.$$

3. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi M là trung điểm của AC . Chứng minh rằng $(SBM) \perp (SAC)$.

Lời giải



a) Ta có: $BC \perp AB$ (giả thiết),

$$BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC))$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$$

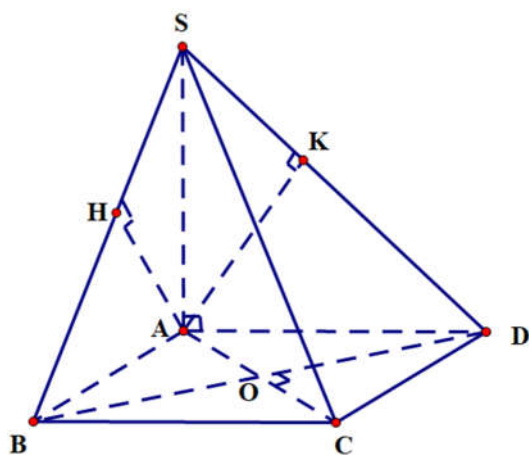
b) Vì tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B nên $BM \perp AC$.

Mà $BM \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) suy ra $BM \perp (SAC)$. Vậy $(SBM) \perp (SAC)$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD . Chứng minh rằng:

- a) $(SBC) \perp (SAB)$; b) $(SCD) \perp (SAD)$;
c) $(SBD) \perp (SAC)$; d) $(SAC) \perp (AHK)$.

Lời giải



a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$; $(SAD) \perp (ABCD)$; $(SAB) \cap (SAD) = SA$

$$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$$

Khi đó: $BC \perp AB$ (giả thiết);

$$BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD))$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta được: $(SCD) \perp (SAD)$.

c) Ta có: $BD \perp AC$ (giả thiết);

$$BD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD))$$

$$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$$

d) Ta có: $(SAB) \perp (SBC)$ (chứng minh trên);

$$(SAB) \cap (SBC) = SB; AH \perp SB \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC. (1)$$

Ta có: $(SCD) \perp (SAD)$ (chứng minh trên);

$$(SCD) \cap (SAD) = SD; AK \perp SD \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC. (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (AHK)$.

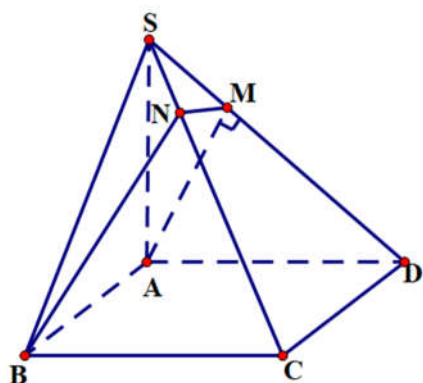
Vậy $(SAC) \perp (AHK)$.

5. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

a) Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

b) Các giao tuyến ở câu a tạo thành hình gì? Tính diện tích của hình đó.

Lời giải



a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD); (SAD) \perp (ABCD); (SAB) \cap (SAD) = SA$
 $\Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Dễ dàng chứng minh được $(SAD) \perp (SCD)$.

Vẽ $AM \perp SD (M \in SD) \Rightarrow AM \perp (SCD)$
 $\Rightarrow (ABM) \perp (SCD)$ hay (ABM) là mặt phẳng
 (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $MN \parallel CD (N \in SC)$.

Suy ra: $MN \parallel AB \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.

Vậy các giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp là AB, BN, NM, MA .

b) Ta có: $MN \parallel AB$ và $AB \perp AM$ (vì $AB \perp (SAD)$) nên $ABNM$ là hình thang vuông tại A và M .

Tam giác SAD vuông tại A có AM là đường cao nên

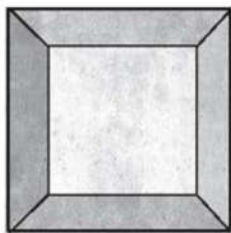
$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$MN \parallel CD \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{SM}{SD} \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{\frac{SA^2}{SD}}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3a^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}a..$$

$$\text{Vậy } S_{ABNM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot (MN + AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}a + a \right) = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}.$$

6. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 2 m, đáy nhỏ có cạnh bằng 1 m và cạnh bên bằng 2 m (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.



Hình 14

Lời giải

$$S_{tp} = 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{(2+1)}{2} + 4 + 1 = 5 + 3\sqrt{5} \approx 16,62 \text{ (m}^2\text{)}$$

7. Một hộp đèn treo trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (Hình 15), cạnh đáy bằng 10 cm và cạnh bên bằng 50 cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

Lời giải

$$\frac{S_{xq}}{S_{\text{day}}} = \frac{6 \cdot 50 \cdot 10}{6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,55$$

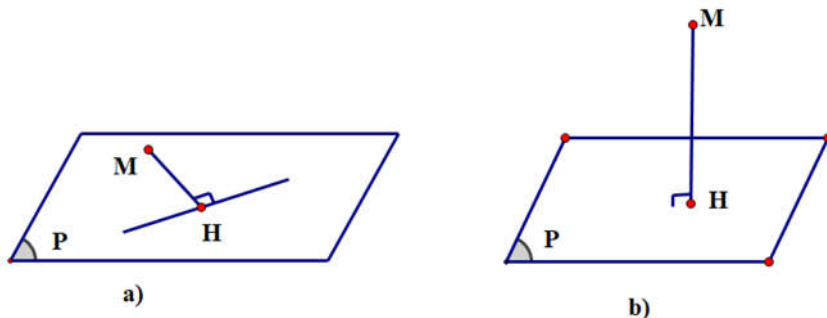
BÀI 4: KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$.

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến (P) , kí hiệu $d(M, (P))$.

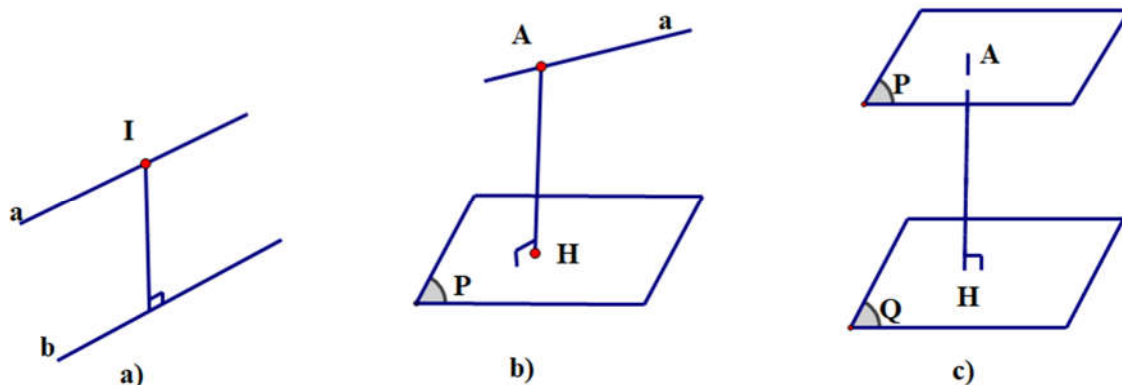


2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b , kí hiệu $d(a, b)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) , kí hiệu $d(a, (P))$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách một điểm bất kì trên (P) đến (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$.

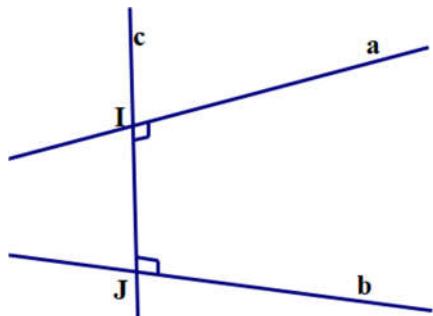


3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Đường thẳng c vừa vuông góc vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b .

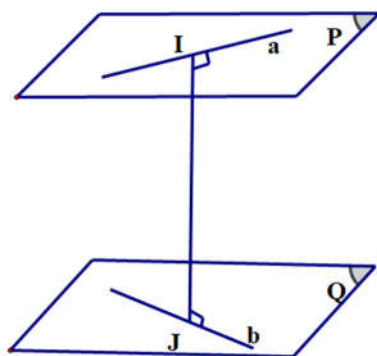
Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là **đoạn vuông góc chung** của a và b .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.



Chú ý:

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



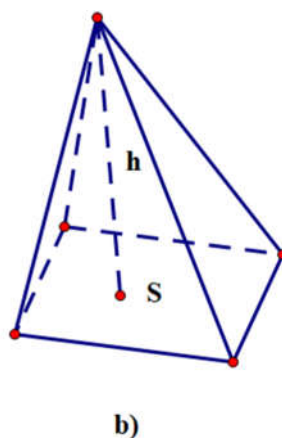
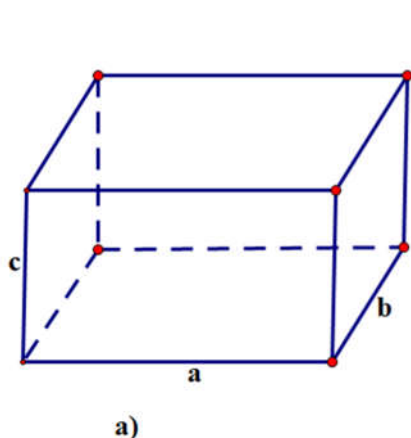
4. Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp

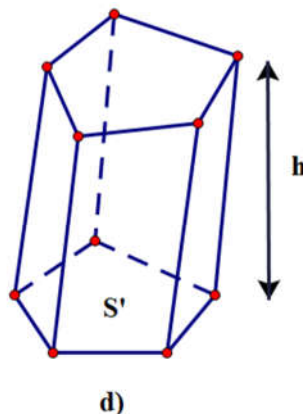
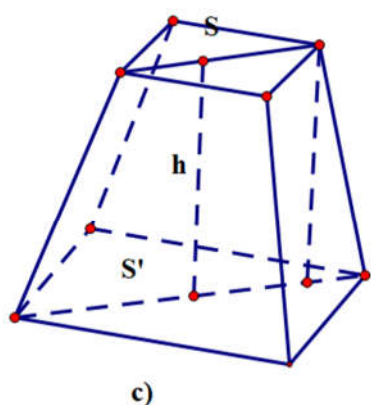
Thể tích khối hộp chữ nhật (Hình 5a) bằng tích ba kích thước: $V = abc$.

Thể tích khối chóp (Hình 5 b) bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Thể tích khối chóp cụt đều (Hình 5c) có chiều cao h và diện tích hai đáy S, S' : $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$

Thể tích khối lăng trụ (Hình 5 d) bằng tích diện tích đáy và chiều cao: $V = Sh$





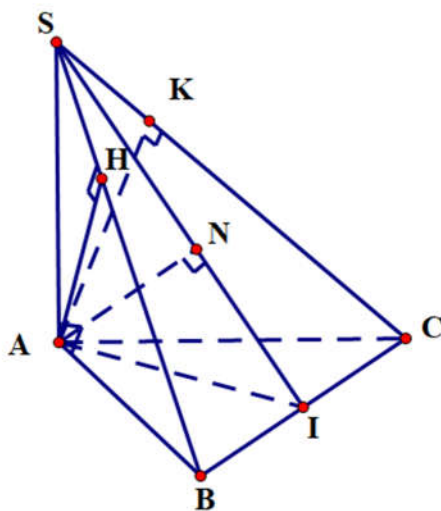
Hình 5

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng 30° . Gọi I là trung điểm của BC . Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng:

a) SB ; b) SC ; c) SI .

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABC)$ nên $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có: $SA = AC \tan 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

a) Vẽ $AH \perp SB$ ($H \in SB$), ta có $d(A, SB) = AH$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a.$$

b) Vẽ $AK \perp SC$ ($K \in SC$), ta có $d(A, SC) = AK$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AK = a.$$

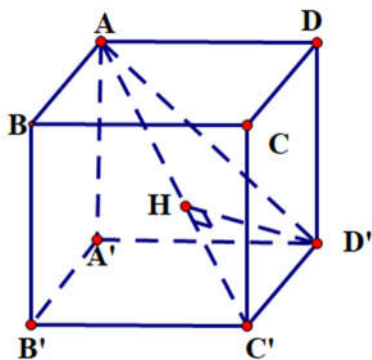
c) Vẽ $AN \perp SI$ ($N \in SI$), ta có $d(A, SI) = AN$.

Vì ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AI = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A , ta có: $\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AN = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ đỉnh D' đến đường chéo AC .

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của D' trên AC' . Ta có: $C'D' \perp A'D'$, $C'D' \perp DD'$
 $\Rightarrow C'D' \perp (ADD'A') \Rightarrow C'D' \perp AD'$.

Do tam giác ADD' vuông cân tại D nên $AD' = a\sqrt{2}$. Xét tam giác $D'AC'$ vuông tại D' , ta có:

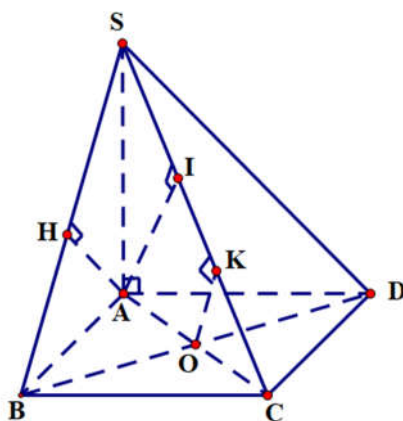
$$\frac{1}{D'H^2} = \frac{1}{D'A^2} + \frac{1}{D'C'^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow D'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(D', AC') = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Bài 3. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SB và AD ; b) BD và SC .

Lời giải



a) Vẽ đường cao AH của tam giác SAB .

Ta có: $AD \perp AB$ và $AD \perp SA \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$.

Do đó AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD nên $d(SB, AD) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $SB = a\sqrt{2}$.

AH là đường cao của tam giác SAB nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD, SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có: $BD \perp AC$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi O là tâm của hình vuông cân $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $OK \perp SC, K \in SC$.

Ta có: $OK \perp SC$ và $OK \perp BD$ (do $BD \perp (SAC)$) nên OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

Suy ra $d(BD, SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (với I là hình chiếu của A trên SC).

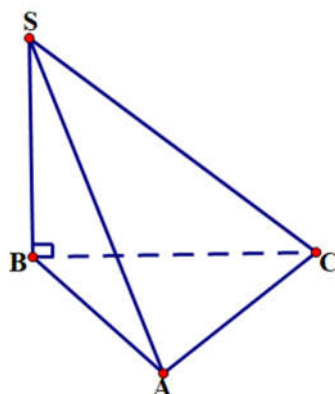
Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $d(BD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Bài 4. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SB = 2a$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải

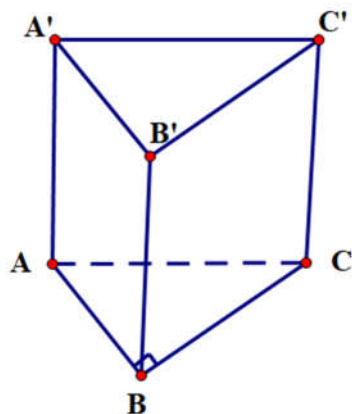


Diện tích tam giác đều $ABC: S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $SABC$ là: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SB = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Bài 5. Cho khối lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



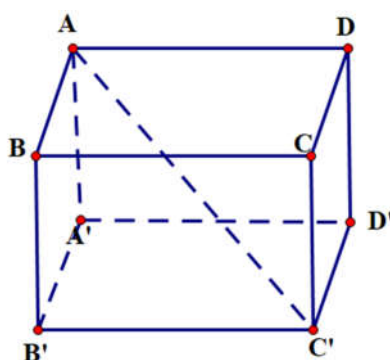
Chiều cao khối lăng trụ đứng là cạnh bên nên $h = BB' = a$. Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2}.$$

Bài 6. Cho hình lập phương $ABCD A' B' C' D'$ có $AC' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD A' B' C' D'$.

Lời giải



Đường chéo của một hình lập phương là $d = a\sqrt{3}$ với a là độ dài cạnh hình lập phương.

Để thấy rằng hình lập phương $ABCD A' B' C' D'$ có AC' là đường chéo và cạnh là AB .

$$\text{Do đó: } AC' = AB\sqrt{3} \Rightarrow AB = \frac{AC'}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a.$$

Vậy thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Bài 7. Tính thể tích của khối chóp cắt tam giác đều $ABCA' B' C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A' B' = a$.

Lời giải

$$\text{Diện tích tam giác đều } ABC : S = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(4a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4a^2 \sqrt{3}.$$

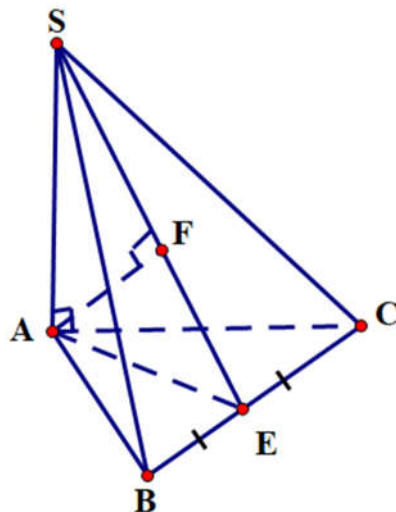
$$\text{Diện tích tam giác đều } A' B' C' : S' = \frac{A' B'^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp cắt: } V = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \left(4a^2 \sqrt{3} + \sqrt{4a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} \right) = \frac{21a^3 \sqrt{3}}{4}.$$

C. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a , biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC thì $BC \perp AE$ (vì $\triangle ABC$ đều). Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AE \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow (SBC) \perp (SAE)$.

Trong mặt phẳng (SAE) , vẽ $AF \perp SE$ ($F \in SE$).

Suy ra $AF \perp (SBC)$ hay $d(A, (SBC)) = AF$.

Xét $\triangle SAE$ vuông tại A :

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

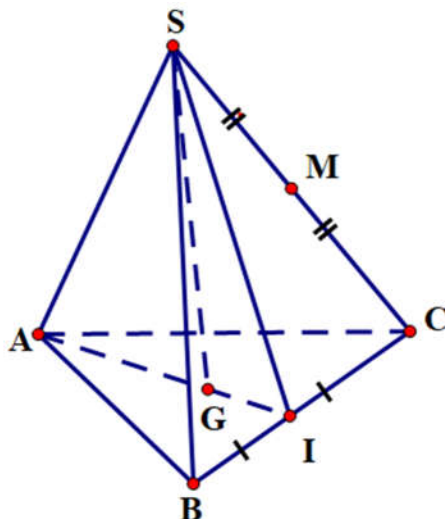
$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

2. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , M là trung điểm của SC .

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG) .

Lời giải



a) Do $SABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SG \perp (ABC)$ hay $d(S, (ABC)) = SG$.

b) Tam giác ABC là tam giác đều cạnh $3a$ nên $AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAG vuông tại G nên $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.

Vậy $d(S, (ABC)) = a$.

b) Vì $SC \cap (SAG) = S$ nên $\frac{d(M, (SAG))}{d(C, (SAG))} = \frac{MS}{CS} = \frac{1}{2}$

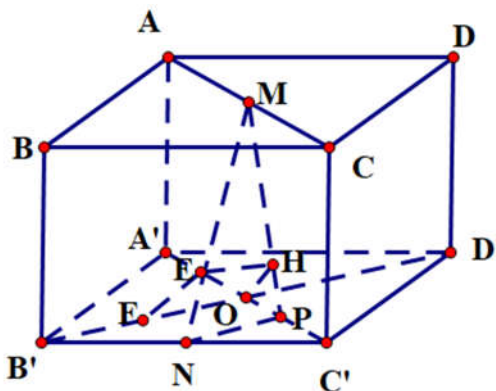
$\Rightarrow d(M, (SAG)) = \frac{1}{2} d(C, (SAG))$.

Gọi I là trung điểm của BC . Ta có: $CB \perp AI$ và $CB \perp SG \Rightarrow CB \perp (SAG)$ và $CB \cap (SAG) = I$.

Do đó $d(C, (SAG)) = CI = \frac{1}{2} BC = \frac{3a}{2}$. Vậy $d(M, (SAG)) = \frac{3a}{4}$.

3. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.

Lời giải



$B'D'$ cắt $A'C'$ tại O . Gọi P là trung điểm của OC' .

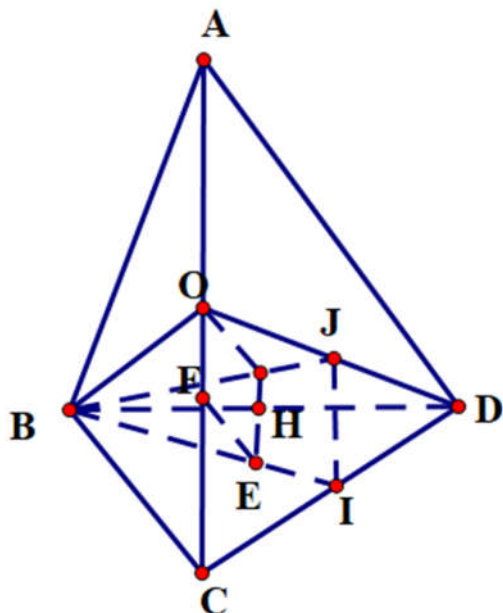
Về $OH \perp MP, HE \parallel NP, EF \parallel OH$.

Ta có: $d(MN, B'D') = EF = OH$.

Xét tam giác vuông MOP , ta có $OM = a, OP = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, suy ra $OH = \frac{a}{3}$.

4. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI .

Lời giải



Gọi O là trung điểm AC , J là trung điểm OD .

Vẽ $OH \perp BJ, HE \parallel AC, EF \parallel OH$.

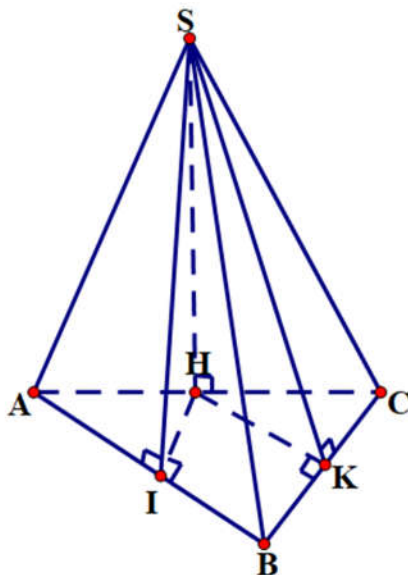
Ta có $d(AC, BJ) = EF = OH$.

Xét tam giác OBD cân tại O , ta có

$$BD = \sqrt{11}, OB = OD = \frac{\sqrt{33}}{2}, BJ = \frac{\sqrt{11}}{4}, S_{\triangle OBD} = \frac{11\sqrt{2}}{4}, OH = \sqrt{2}$$

5. Cho hình chóp $SABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC) . Các mặt bên $(SAB), (SBC)$ tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $SABC$.

Lời giải



Ta có: $(SAC) \perp (ABC)$ và $(SAC) \cap (ABC) = AC$.

Trong mặt phẳng (SAC) , vẽ $SH \perp AC$ ($H \in AC$) thì $SH \perp (ABC)$.

Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB và BC thì $((SAB), (ABC)) = \widehat{SIH}$,
 $((SBC), (ABC)) = \widehat{SKH}$.

Mà $\widehat{SIH} = \widehat{SKH} = 60^\circ$ nên $HI = HK$.

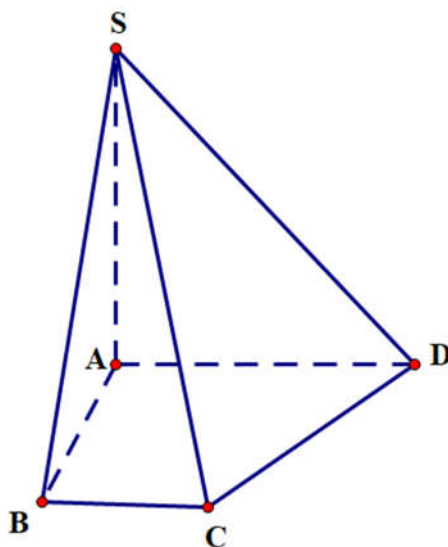
Suy ra tứ giác $BIHK$ là hình vuông nên H là trung điểm cạnh AC .

Khi đó tứ giác $BIHK$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và $SH = HI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

6. Cho hình chóp $SABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a, AD = 3a, BC = a$. Tính thể tích khối chóp $SBCD$ theo a .

Lời giải



$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (3a + a) = 2a^2.$$

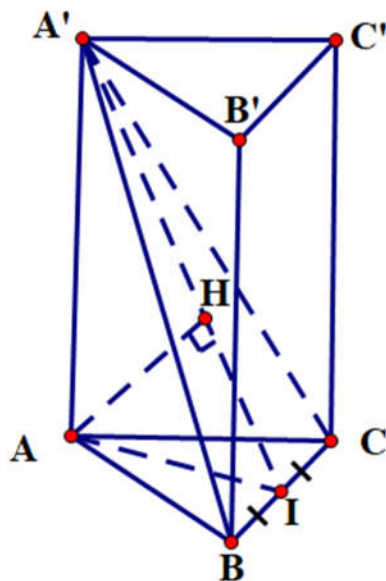
Lại có $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3a = \frac{3a^2}{2}$.

Suy ra $S_{\triangle BCD} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABD} = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

7. Cho hình lăng trụ đều $ABCA'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Biết $d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{57}}{12}$. Tính $V_{ABCA'B'C'}$

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'I$.

Ta có: $BC \perp AI$ và $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow (A'BC) \perp (A'AI)$.

Mặt khác: $(A'AI) \cap (A'BC) = A'I$ và $AH \perp A'I$.

Nên $d(A, (A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{57}}{12}$.

$\triangle ABC$ đều cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

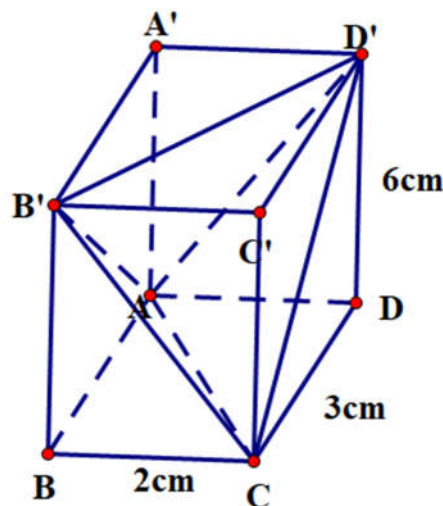
Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{144}{57a^2} - \frac{4}{3a^2} = \frac{68}{57a^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{57}}{2\sqrt{17}}.$$

Vậy $V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{57}}{2\sqrt{17}} = \frac{a^3\sqrt{171}}{8\sqrt{17}}$.

8. Một hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có ba kích thước là 2 cm, 3 cm và 6 cm. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

Lời giải



Ta có:

$$V_{ABCD A'B'C'D'} = V_{BAB'C} + V_{DACD'} + V_{A'B'AD'} + V_{C'B'CD'} + V_{ACB'D'} = 4V_{BAB'C} + V_{ACB'D'}$$

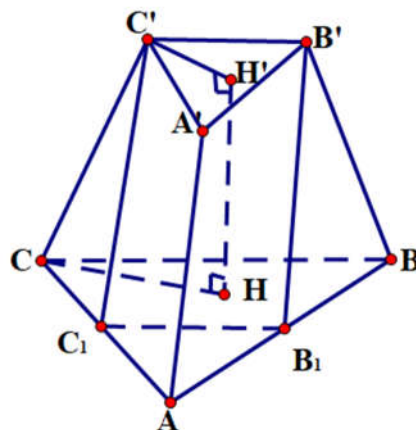
$$\Rightarrow V_{ACB'D'} = V_{ABCD A'B'C'D'} - 4V_{BAB'C} = V_{ABCD A'B'C'D'} - 4 \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD A'B'C'D'} = \frac{1}{3} V_{ABCD A'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 12 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

9. Cho hình chóp cắt tam giác đều $ABCA'B'C'$ có đường cao $HH' = 2a$. Cho biết $AB = 2a, A'B' = a$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tính thể tích của:

a) Khối chóp cắt đều $ABCA'B'C'$; b) Khối lăng trụ $AB_1C_1A'B'C'$.

Lời giải



a) Áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$, với $S = a^2\sqrt{3}, S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h = 2a$,

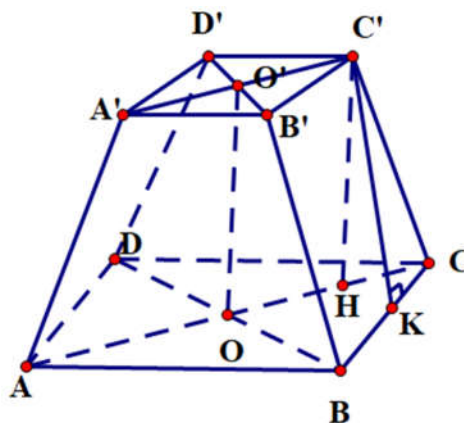
$$\text{ta có: } V = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \left(a^2\sqrt{3} + \sqrt{a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{7a^3\sqrt{3}}{6}.$$

b) Áp dụng công thức $V' = S' \cdot h'$ với $S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h' = 2a$, Ta có $V' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

10. Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cắt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm, đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm.



Lời giải



Ta có: $OC = 40\sqrt{2}$, $O'C' = 20\sqrt{2}$, suy ra $CH = 20\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có: $C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = 20\sqrt{14}$.

Nên $OO' = C'H = 20\sqrt{14}$.

Thể tích của cái sọt đựng đồ là:

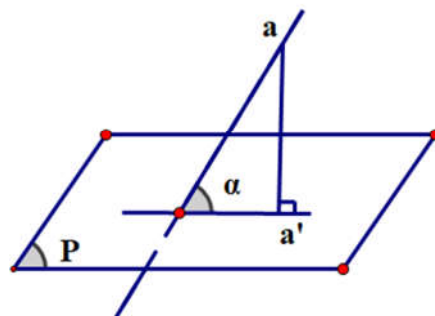
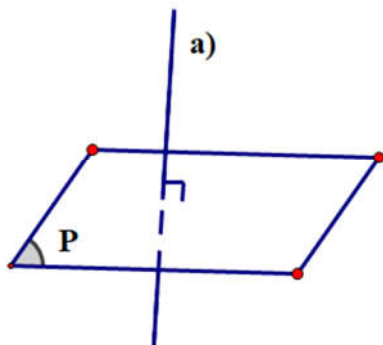
$$V = \frac{1}{3} \cdot 20\sqrt{14} \cdot (6400 + \sqrt{6400 \cdot 1600} + 1600) \approx 279377,08 \text{ cm}^3$$

BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với (P) bằng 90° .
Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P) .



Chú ý: a) Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thỏa mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

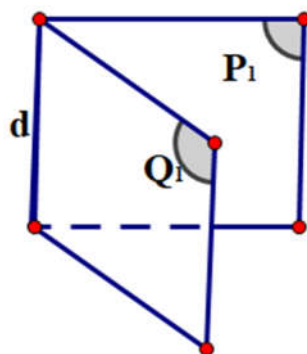
b) Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc a song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^\circ$.

2. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

Góc nhị diện

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d . Hình tạo bởi $(P_1), (Q_1)$ và d được gọi là **góc nhị diện** tạo bởi (P_1) và (Q_1) , kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$ gọi là **hai mặt của nhị diện** và d gọi là **cạnh của nhị diện**



Góc phẳng nhị diện

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

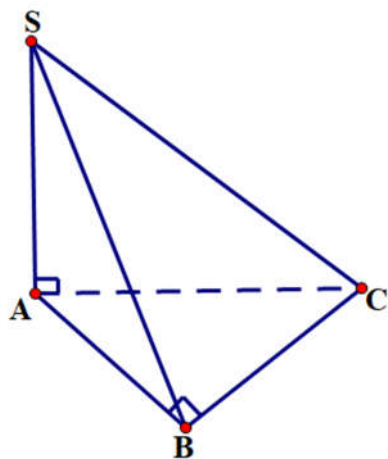
- Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.
- Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt $(P_1), (Q_1)$ của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi $(P_1), (Q_1)$.
- Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.
- Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.
- Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180° .

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại B . Biết $AC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa:

a) SB và (ABC) . b) SC và (ABC) . c) SC và (SAB) .

Lời giải



Trong tam giác ABC vuông tại B , ta có:

$$AB = \cos \widehat{BAC} \cdot AC = \cos 60^\circ \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$BC = \sin \widehat{BAC} \cdot AC = \sin 60^\circ \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

a) Ta có:
$$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SB \cap (ABC) = B. \end{cases}$$

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC) .

Do đó $(SB, (ABC)) = (SB, AB)$.

Trong tam giác SAB vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Vậy $(SB, (ABC)) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SC \cap (ABC) = C \end{cases}$$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên (ABC) .

Do đó $(SC, (ABC)) = (SC, AC)$.

Trong tam giác SAC vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SCA} \approx 26,6^\circ$$

Vậy $(SC, (ABC)) = \widehat{SCA} \approx 26,6^\circ$

c) Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB). (1)$

$SC \cap (SAB) = S. (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên (SAB) .

Do đó $(SC, (SAB)) = (SC, SB)$.

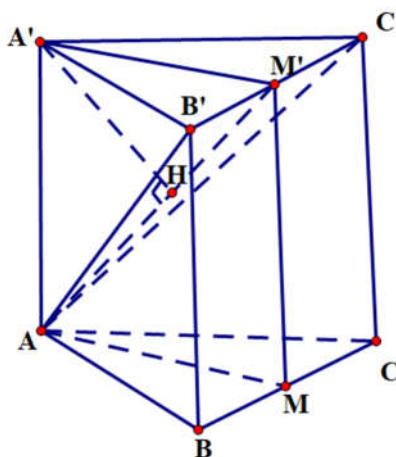
$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a.$$

Trong tam giác SBC vuông tại B , ta có: $\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{a\sqrt{6}}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \widehat{BSC} \approx 50,8^\circ$.

Vậy $(SC, (SAB)) = \widehat{BSC} \approx 50,8^\circ$.

Bài 2. Cho hình lăng trụ đều $ABC \cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC) , tính $\cos \alpha$.

Lời giải



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Vẽ đường cao $A'H$ của tam giác vuông $AA'M$.

Ta có:

$$\begin{cases} B'C' \perp A'M' \\ B'C' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M')$$

Mà $A'H \subset (AA'M')$ nên $B'C' \perp A'H. (1)$

Ta lại có: $A'H \perp AM. (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A'H \perp (AB'C'). (*)$

Hơn nữa, $AA' \perp (ABC). (**)$

Từ (*) và (**) suy ra: $((ABC), (AB'C')) = (A'A, A'H) = \alpha$.

Trong tam giác đều $A'B'C'$, ta có $A'M' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

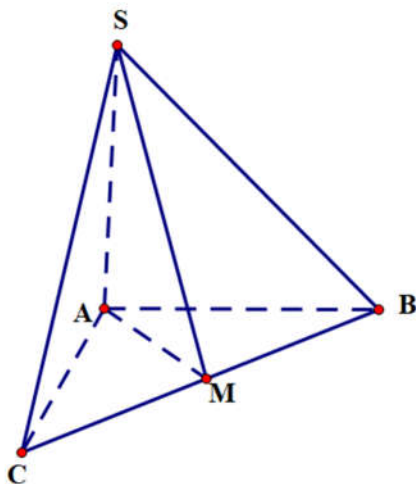
Trong tam giác vuông $AA'M'$, ta có $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M'^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Trong tam giác vuông $AA'H$, ta có $\cos \widehat{AA'H} = \frac{A'H}{AA'} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\cos \alpha = \cos \widehat{AA'H} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $AB = AC \Rightarrow AM \perp BC$.

Mặt khác $SC = SB$ (do $\triangle SAC = \triangle SAB$) nên $\triangle SCB$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp BC$.

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SMA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Ta có $\widehat{MAB} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 60^\circ$, $AM = \cos \widehat{MAB} \cdot AB = \frac{a}{2}$,

Trong tam giác SMA vuông tại A , ta có:

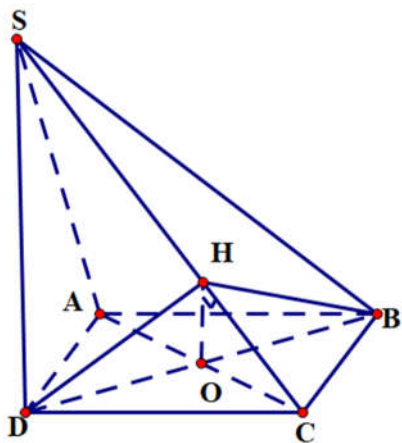
$$\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{MA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ.$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Gọi

O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC . Tính số đo các góc phẳng nhị diện:

- a) $[B, SA, D]$; b) $[S, BD, A]$;
c) $[S, BD, C]$; d) $[D, SC, B]$.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} SA \perp AD \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAB}$ là góc phẳng nhị diện $[D, SA, B]$.

Tam giác DAC là tam giác đều ($AD = DC = AC = a$), nên $\widehat{DAC} = 60^\circ$.

Ta có $\widehat{DAB} = 2\widehat{DAC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

b) Ta có $\triangle SAD = \triangle SAB \Rightarrow SD = SB$.

Nên $\triangle SBD$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$ (do $OB = OD$). (1)

Ta lại có $OA \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{SOA}$ là góc phẳng phẳng nhị diện $[S, BD, A]$.

Trong tam giác SOA vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2 \Rightarrow \widehat{SOA} = 45^\circ$

c) Ta có $\begin{cases} OS \perp BD \\ OC \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{SOC}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$.

Ta có $\widehat{SOC} = 180^\circ - \widehat{SOA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

d) Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ hay $OD \perp SC$

Ta có $\begin{cases} SC \perp OD \\ SC \perp OH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (ODH)$ hay $SC \perp (DHB)$.

Nên $\begin{cases} SC \perp DH \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow \widehat{DHB}$ là góc phẳng nhị diện $[D, SC, B]$.

Trong tam giác SAC vuông tại A , ta có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$.

ADC là tam giác đều nên $DO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác ODH vuông tại O , ta có

$\tan \widehat{OHD} = \frac{OD}{OH} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a}{2\sqrt{5}}} = \sqrt{15} \Rightarrow \widehat{OHD} \approx 75,5^\circ$.

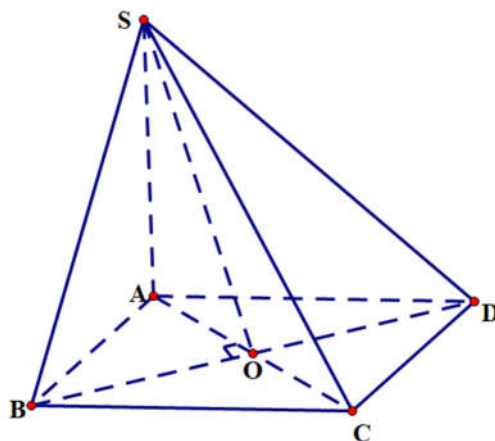
Vậy $\widehat{DHB} = 2 \cdot \widehat{OHB} \approx 2 \cdot 75,5^\circ = 151^\circ$.

C. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa:

- a) SB và $(ABCD)$; b) SC và $(ABCD)$;
c) SD và $(ABCD)$; d) SB và (SAC) .

Lời giải



a) Ta có:
$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SB \cap (ABCD) = B \end{cases}$$

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Do đó $(SB, (ABCD)) = (SB, AB)$.

Trong tam giác SAB vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy $(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

b) Tương tự câu a) ta xác định được $(SC, (ABCD)) = (SC, AC)$.

Trong tam giác SAC vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SCA} \approx 50,8^\circ$.

Vậy $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} \approx 50,8^\circ$.

c) Tương tự câu a) ta xác định được $(SD, (ABCD)) = (SD, AD)$.

Trong tam giác SAD vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$.

Vậy $(SD, (ABCD)) = \widehat{SDA} = 60^\circ$.

d) Ta có:
$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ hay } BO \perp (SAC). (1)$$

Mà $SB \cap (SAC) = S. (2)$

Từ (1) và (2) suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC) .

Do đó: $(SB, (SAC)) = (SB, SO)$.

Trong tam giác SBO vuông tại O , ta có $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SB = 2a$.

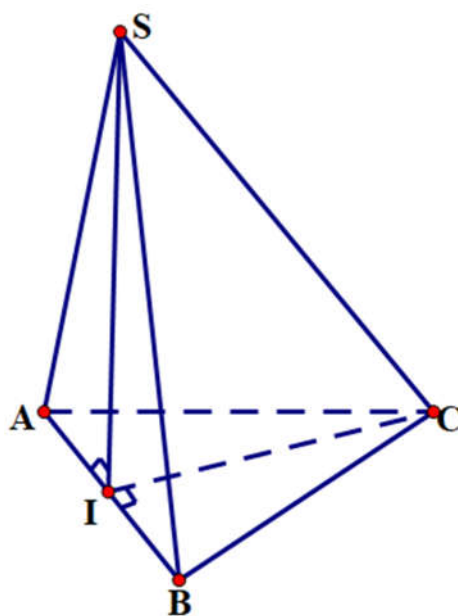
$$\Rightarrow \sin \widehat{BSO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{BSO} \approx 20,7^\circ.$$

Vậy $(SB, (SAC)) = \widehat{BSO} \approx 20,7^\circ$.

2. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm I của cạnh AB . Biết rằng mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S . Xác định và tính góc giữa:

a) SA và (ABC) ; b) SC và (SAB) .

Lời giải



Vì AI là hình chiếu của SA trên (ABC) .

Do đó $(SA, (ABC)) = (SA, AI)$.

Vì tam giác SAI vuông cân tại $I \Rightarrow \widehat{SAI} = 45^\circ$.

Vậy $(SA, (ABC)) = (SA, AI) = \widehat{SAI} = 45^\circ$.

b) Ta có tam giác ABC đều nên $CI \perp AB, CI = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SI \text{ (do } SI \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB). (1)$

Mà $SC \cap (SAB) = S. (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên (SAB) .

Do đó $(SC, (SAB)) = (SC, SI)$.

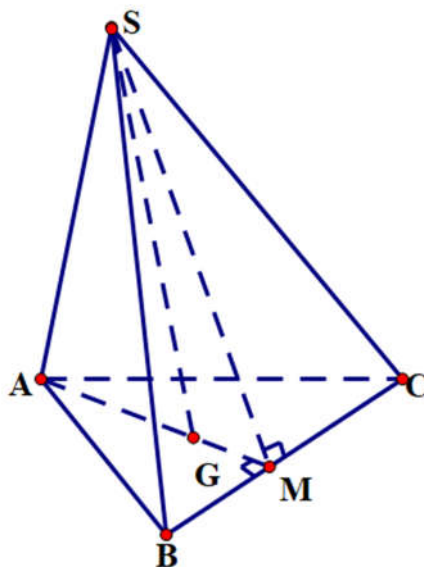
Trong tam giác SAB vuông tại S , $SI = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}$.

Trong tam giác SCI vuông tại I , ta có $\tan \widehat{CSI} = \frac{IC}{SI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CSI} = 60^\circ$

Vậy $(SC, (SAB)) = \widehat{CSI} = 60^\circ$.

3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



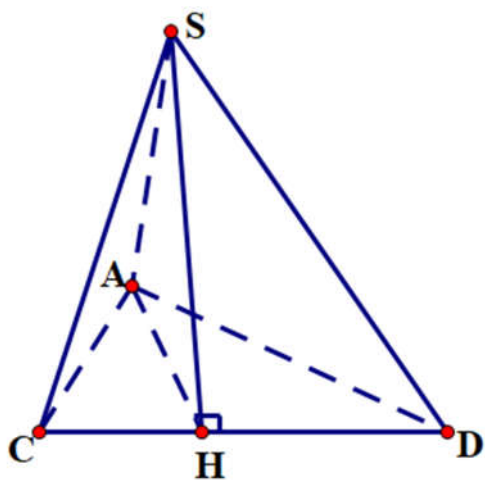
Gọi M là trung điểm BC , G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có $SG \perp (ABC)$, $SM \perp BC$, $AM \perp BC$, suy ra $\widehat{SMG}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ Ta tính được

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, GM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}, SG = \sqrt{SM^2 - GM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Ta có tam giác SMG vuông cân tại G , suy ra số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A] = \widehat{SMG} = 45^\circ$.

4. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



Vẽ $AH \perp BC (H \in BC)$, ta có $SH \perp BC$, suy ra $\widehat{SHA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Ta có

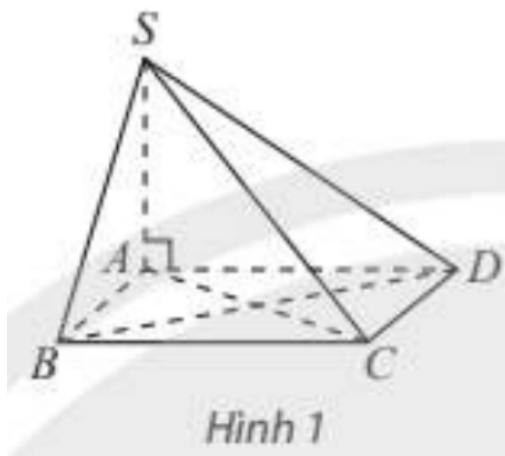
$$AH = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA, \text{ suy ra } \widehat{SHA} = 45^\circ.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

Phần 1: Bài tập sách giáo khoa

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy. Đường thẳng CD vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?



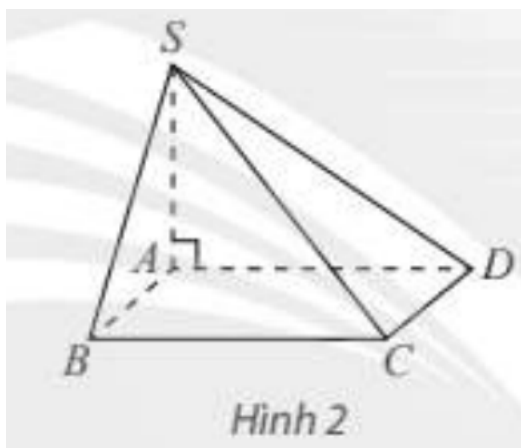
- A. (SAD) . B. (SAC) . C. (SAB) . D. (SBD) .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$. $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh b , SA vuông góc với mặt đáy, $SC = 2b\sqrt{2}$. Số đo góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy là



- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 50° .

Lời giải

Chọn A

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$$

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = b\sqrt{2} \quad \cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$$

Vậy $(SC, (ABCD)) = 60^\circ$

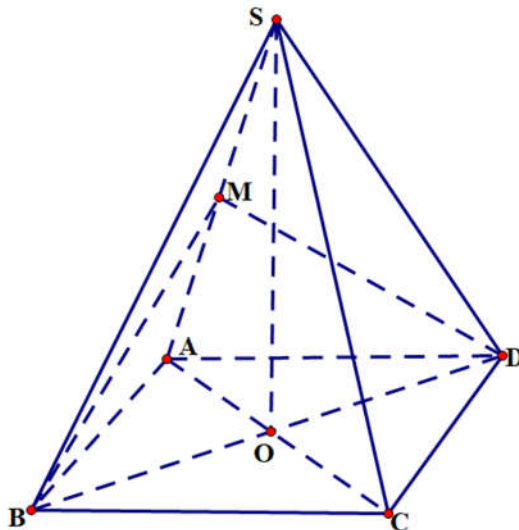
Chọn A.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Gọi M là trung điểm của SA . Mặt phẳng (MBD) vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. (SBC) . B. (SAC) . C. (SBD) . D. $(ABCD)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có: $SO \perp (ABCD)$. Suy ra: $SO \perp BD$ Mà $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$

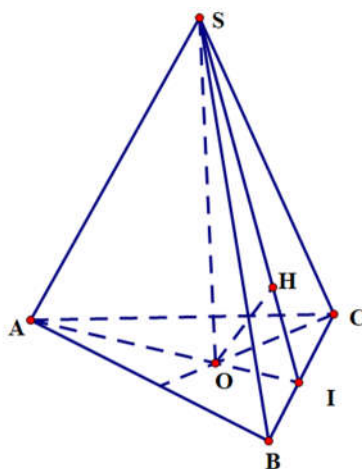
Suy ra $(MBD) \perp (SAC)$

Câu 4: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên là

- A. $\frac{a\sqrt{14}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. D. $\frac{2a\sqrt{14}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của BC , kẻ $OH \perp SI$ ($H \in SI$).

ABC là tam giác đều $\Rightarrow AI \perp BC$

$SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp BC$

$$\Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp OH$$

$$\text{Mà } OH \perp SI$$

$$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$$

$$ABC \text{ là tam giác đều} \Rightarrow AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow OI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$SO = a\sqrt{2} \Rightarrow OH = \frac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \frac{a\sqrt{14}}{7}$$

Câu 5: Thể tích của khối chóp cắt tam giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ là

A. $\frac{7\sqrt{2}}{8}a^3$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

C. $\frac{7\sqrt{2}}{12}a^3$.

D. $\frac{7\sqrt{3}}{4}a^3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Diện tích đáy nhỏ là: } \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2a)^2 = \sqrt{3}a^2$$

Thể tích khối chóp là:

$$\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}a^2} + \sqrt{3}a^2 \right) = \frac{7\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$$

Câu 6: Cho chóp tứ giác $S \cdot ABCD$. có đáy là hình chữ nhật với $AB = 4a, AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Góc nhị diện $[S, BC, A]$ có số đo là

A. $75^\circ 46'$.

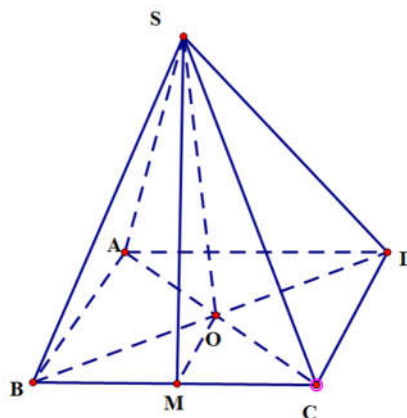
B. $71^\circ 21'$.

C. $68^\circ 31'$.

D. $65^\circ 12'$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BC.

$$\text{Ta có: } OM = \frac{1}{2} \cdot AB = 2a; AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a; OC = \frac{1}{2} AC = \frac{5}{2}a$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}a$$

$$[S, BC, A] = \widehat{SMO}$$

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ Suy ra: } \widehat{SMO} = 65,2^\circ$$

Câu 7: Nếu hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 3; 4; 5 thì độ dài đường chéo của nó là

- A.** $5\sqrt{2}$. **B.** 50. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật là: $\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

Câu 8: Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

- A.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

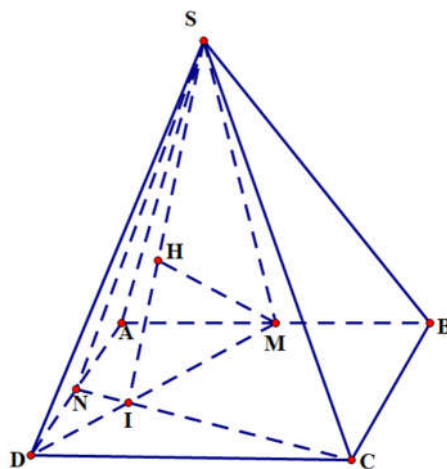
Diện tích mặt đáy là: $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ Thể tích khối lăng trụ là: $a \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD .

- a) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SNC)$.
b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SNC) .

Lời giải



Gọi $I = CN \cap DM$

ΔSAB đều $\Rightarrow SM \perp AB$

$$\text{Mà } (SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB$$

$$\Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp CN$$

$$\Delta ADM = \Delta DCN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{CND}$$

$$\text{Mà } \widehat{AMD} + \widehat{ADM} = 90^\circ$$

$$\widehat{CND} + \widehat{ADM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NID} = 180^\circ - (\widehat{CND} + \widehat{ADM}) = 90^\circ \Rightarrow CN \perp DM$$

$$\left. \begin{array}{l} SM \perp CN \\ CN \perp DM \\ CN \subset (SNC) \end{array} \right\} \Rightarrow CN \perp (SMD) \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow (SNC) \perp (SMD) \end{array} \right.$$

b) Kẻ $MH \perp SI (H \in SI)$

$$CN \perp (SMD) \Rightarrow CN \perp MH$$

$$\Rightarrow MH \perp (SNC) \Rightarrow d(M, (SNC)) = MH$$

ΔCDN vuông tại D có đường cao DI

$$DN = \frac{1}{2} AD = \frac{a}{2}, CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, DI = \frac{CD \cdot DN}{CN} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$DM = CN = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow MI = DM - DI = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

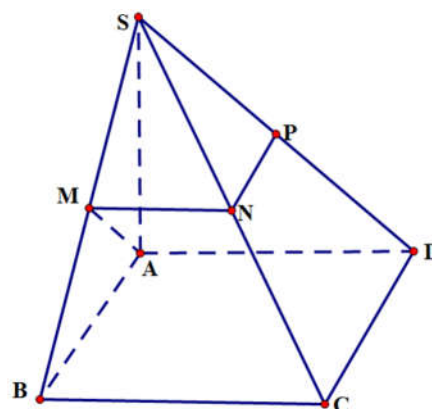
$$\Delta SAB \text{ đều} \Rightarrow SM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ΔSMI vuông tại M có đường cao MH

$$\Rightarrow MH = \frac{SM \cdot MI}{\sqrt{SM^2 + MI^2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC và SD . Tính khoảng cách giữa AM và NP .

Lời giải



$$SA \perp (SBCD) \text{ nên } SA \perp BC$$

$$\text{Mà } BC \perp AB \text{ nên } BC \perp (SAB)$$

$$\text{Tam giác SBC có MN là đường trung bình nên } MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$$

Suy ra: $MN \perp (SAB)$ và $MN \perp AM$

Tam giác SCD có NP là đường trung bình nên $NP \parallel CD$

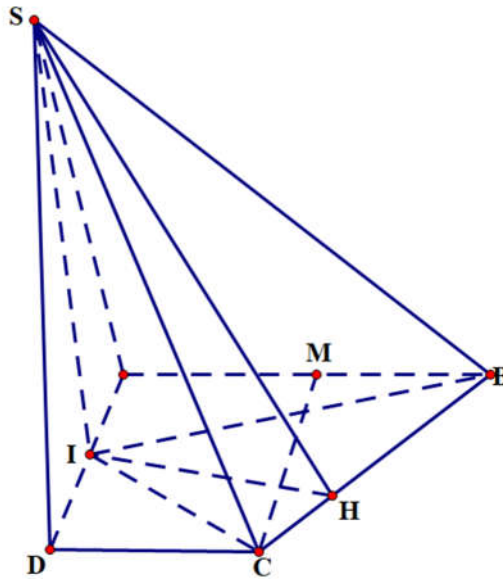
Mà $MN \parallel BC, BC \perp CD$

Suy ra $MN \perp NP$

Vậy $d(AM, NP) = MN = \frac{a}{2}$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = AD = 2a$; $CD = a$; số đo góc nhị diện $[S, BC, A]$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD . Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Lời giải



$$\left. \begin{array}{l} (SBI) \perp (ABCD) \\ (SCI) \perp (ABCD) \\ (SBI) \cap (SCI) = SI \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Kẻ $IH \perp BC (H \in BC)$

$$SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp BC$$

$$\Rightarrow BC \perp (SIH) \Rightarrow BC \perp SH$$

Vậy $\widehat{AHI}$ là góc nhị diện $[S, BC, A] \Rightarrow \widehat{AHI} = 60^\circ$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD = 3a^2$$

$$AI = ID = \frac{1}{2}AD = a$$

$$S_{AIB} = \frac{1}{2}AB \cdot AI = a^2, S_{CID} = \frac{1}{2}CD \cdot ID = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow S_{BIC} = S_{ABCD} - S_{AIB} - S_{CID} = \frac{3a^2}{2}$$

Gọi M là trung điểm của AB

$$\Rightarrow BM = \frac{1}{2} AB = a, CM = AD = 2a \Rightarrow BC = \sqrt{BM^2 + CM^2} = a\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2 S_{BIC}}{BC} = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SI = IH \cdot \tan \widehat{SHI} = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

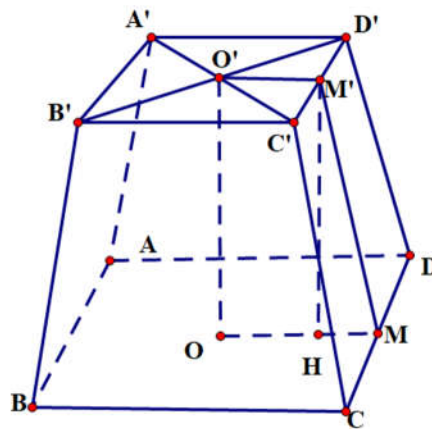
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$$

Câu 12: Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a , chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng $\frac{a}{2}$.

a) Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

b) Tính thể tích chân cột nói trên theo a .

Lời giải



Mô hình hoá chân cột bằng gang bằng cụt chóp tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ với O, O' là tâm của hai đáy. Vậy $AB = 2a, A'B' = a, OO' = 2a$.

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $CD, C'D'$.

$A'B'C'D'$ là hình vuông $\Rightarrow O'M' \perp C'D'$

$CDD'C'$ là hình thang cân $\Rightarrow MM' \perp C'D'$

Vậy $\widehat{MM'O'}$ là góc phẳng nhị diện giữa mặt bên và đáy nhỏ, $\widehat{M'MO}$ là góc phẳng nhị diện giữa mặt bên và đáy lớn.

Kẻ $M'H \perp OM (H \in OM)$

$OMM'O'$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow OH = O'M' = \frac{a}{2}, OM = a, MH = OM - OH = \frac{a}{2}$$

$$\tan \widehat{M'MO} = \frac{M'H}{MH} = 4$$

$$\Rightarrow \widehat{M'MO} = 75,96^\circ \Rightarrow \widehat{MM'O'} = 180^\circ - \widehat{M'MO} = 104,04^\circ$$

b) Diện tích đáy lớn là: $S = AB^2 = 4a^2$

Diện tích đáy bé là: $S' = A'B'^2 = a^2$

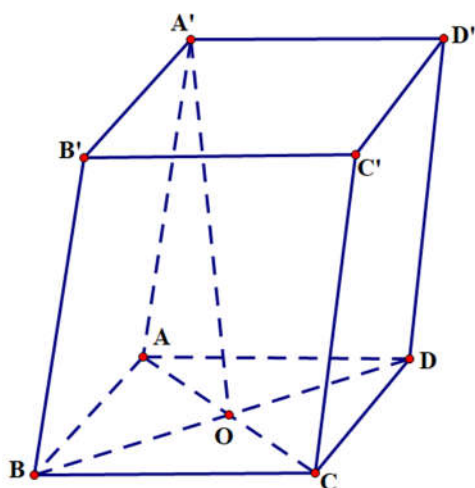
$$\text{Thể tích hình chóp cụt là: } V_1 = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 2a(4a^2 + \sqrt{4a^2 \cdot a^2} + a^2) = \frac{14a^3}{3}$$

$$\text{Thể tích hình trụ rỗng là: } V_2 = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 2a = \frac{\pi a^3}{2}$$

$$\text{Thể tích chân cột là: } V = V_1 - V_2 = \left(\frac{14}{3} - \frac{\pi}{2}\right)a^3.$$

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = a$, đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = BD = a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với điểm O là giao điểm hai đường chéo của đáy. Tính thể tích của khối hộp.

Lời giải



$$AB = BD = AD = a \Rightarrow \triangle ABD \text{ đều} \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$$

$$O \text{ là trung điểm của } BD \Rightarrow AO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp AO$$

$$\Rightarrow A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \frac{a}{2}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$$

Phần 2: Bài tập sách bài tập

A. TRẮC NGHIỆM

1. Trong không gian, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cùng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn A

2. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α) .
- B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.
- C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) .
- D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Chọn B

3. Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AB = CD$.
- B. $AC = BD$.
- C. $AB \perp CD$.
- D. $CD \perp BD$.

Lời giải

Chọn C

4. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $SC \perp EF$.
- B. $SC \perp AE$.
- C. $SC \perp AF$.
- D. $SC \perp BC$.

Lời giải

Chọn D

5. Cho hình chóp $SABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\alpha = 60^\circ$.
- B. $\alpha = 75^\circ$.
- C. $\tan \alpha = 1$.
- D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

6. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.
- B. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.
- C. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{ACB}$.
- D. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

Lời giải

Chọn A

7. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn B

8. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì

- A. Song song với nhau.
B. Trùng nhau.
C. Không song song với nhau.
D. Hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Lời giải

Chọn D

9. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

10. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của CD . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BE và SC .

- A. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. a .

Lời giải

Chọn A

11. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$. Tam giác SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° .

Khi đó thể tích khối chóp $S \cdot ABCD$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. B. $\frac{1}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. $\frac{2}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D

12. Cho khối chóp $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = 2\sqrt{6}a^3$. D. $V = \frac{4a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A

13. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại B , $AB = 2a$, $BC = a$, $AA' = 2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ là

- A. $4a^3\sqrt{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

14. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCA'B'C'D'$. V_1 là thể tích của tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $V = 6V_1$. B. $V = 4V_1$. C. $V = 3V_1$. D. $V = 2V_1$.

Lời giải

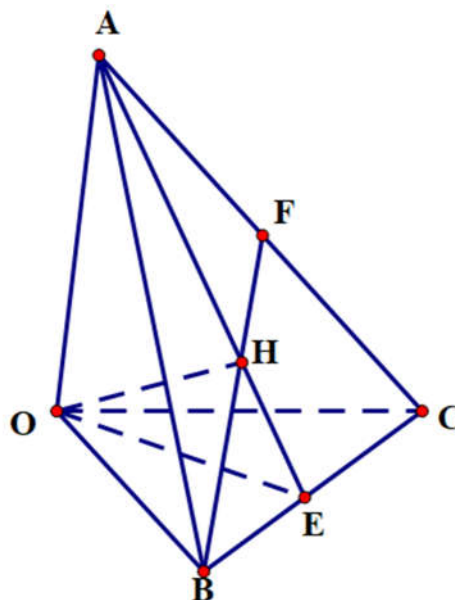
Chọn A

B. TỰ LUẬN

1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của điểm O trên mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (OAH)$.
b) H là trực tâm của $\triangle ABC$.
c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Lời giải



a) Ta có $BC \perp OH, BC \perp OA$, suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Gọi $E = AH \cap BC, F = BH \cap AC$.

Theo câu a ta có: $BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow BC \perp AE$. (1)

Chứng minh tương tự ta có: $AC \perp (BOH) \Rightarrow AC \perp BF$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow H$ là trực tâm tam giác ABC .

c) Tam giác vuông AOE có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OE^2}$. (3)

Tam giác vuông BOC có: $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. (4)

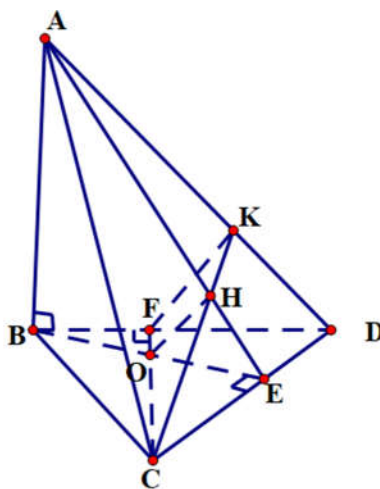
Thay (4) vào (3) ta được $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC) . Vẽ các đường cao BE, DF của tam giác BCD , đường cao DK của tam giác ACD .

a) Chứng minh hai mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với (ADC) .

b) Gọi O và H là trực tâm $\triangle BCD$ và $\triangle ACD$. Chứng minh OH vuông góc với (ADC) .

Lời giải



a) Ta có $(ABC) \cap (ABD) = AB$, $(ABC) \perp (DBC)$, $(ABD) \perp (DBC)$,

Suy ra $AB \perp (DBC)$.

Ta có: $CD \perp BE$, $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp (ABE)$.

Mà $CD \subset (ACD)$ nên $(ADC) \perp (ABE)$. (1)

Ta lại có: $DF \perp BC$, $DF \perp AB \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC$.

Mặt khác $DK \perp AC$ nên $AC \perp (DFK)$.

Mà $AC \subset (ACD)$ nên $(ADC) \perp (DFK)$. (2)

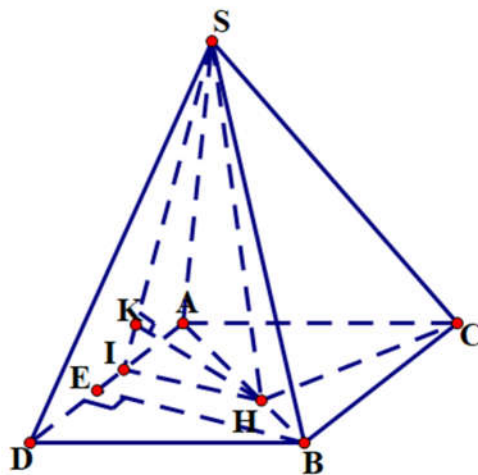
Từ (1) và (2) suy ra (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với (ADC) .

b) Ta có O là giao điểm của hai đường cao BE và DF , H là giao điểm của hai đường cao AE và DK .

Ta có: $(ABE) \perp (ADC)$, $(DFK) \perp (ADC)$ và $(ABE) \cap (DFK) = OH \Rightarrow OH \perp (ADC)$.

3. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Lời giải



Áp dụng định lí côsin trong $\triangle AHC$:

$$\begin{aligned} CH^2 &= AC^2 + AH^2 - 2AC \cdot AH \cdot \widehat{CAH} \\ &= a^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot 1 \end{aligned}$$

Ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) .

Suy ra $(SC, (ABC)) = (SC, HC) = \widehat{SCH} = 60^\circ$ (do $\widehat{SCH} < 90^\circ$).

Trong $\triangle SCH$ vuông tại H có: $SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$. Ta có:

$$\begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (SAD).$$

$$\text{Nên } d(BC, SA) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = \frac{3}{2} d(H, (SAD))$$

Gọi E là trung điểm của $AD \Rightarrow BE \perp AD$.

Từ H kẻ $HI \parallel BE$ ($I \in AD$) $\Rightarrow HI \perp AD$.

Vẽ $HK \perp SI$ ($K \in SI$).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD \perp HI \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SHI) \Rightarrow AD \perp HK.$$

Suy ra $HK \perp (SAD)$ hay $d(H, (SAD)) = HK$.

Trong $\triangle AHH$ vuông tại I , ta có: $HI = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\triangle SIH$ vuông tại H , ta có:

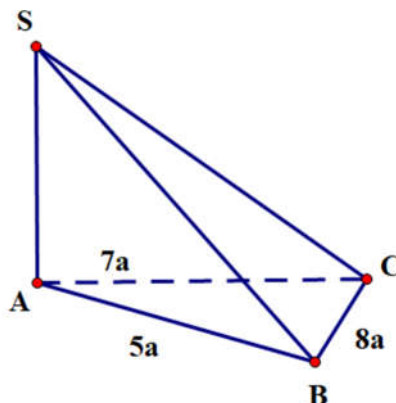
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{21a^2} + \frac{9}{3a^2} = \frac{24}{7a^2}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{42}}{12}.$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $d(BC, SA) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

4. Cho khối chóp tam giác $SABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là $AB=5a, BC=8a, AC=7a$, góc giữa SB và (ABC) là 45° . Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải



Ta có nửa chu vi $\triangle ABC$ là $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = 10a$.

Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{\triangle ABC} = \sqrt{10a \cdot 5a \cdot 3a \cdot 2a} = 10\sqrt{3}a^2$.

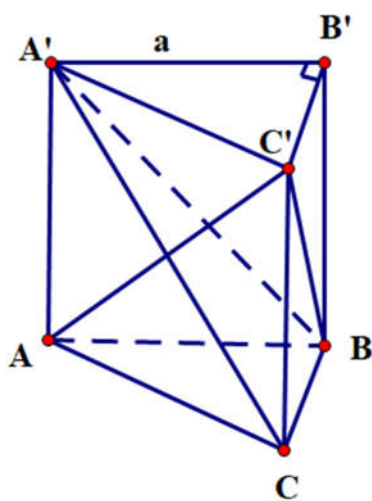
Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $\widehat{SBA} = (SB, (ABC)) = 45^\circ$

Suy ra $\triangle SAB$ vuông tại A nên $SA = AB = 5a$.

Thể tích khối chóp $SABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} 5a \cdot 10\sqrt{3}a^2 = \frac{50\sqrt{3}}{3}a^3$.

5. Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(C'AB)$ và (ABC) bằng 60° . Tính $V_{ABCA'B'C'}$

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC') \Rightarrow AB \perp C'B$.

Khi đó:

$$CB \perp AB, C'B \perp AB, (ABC) \cap (C'AB) = AB,$$

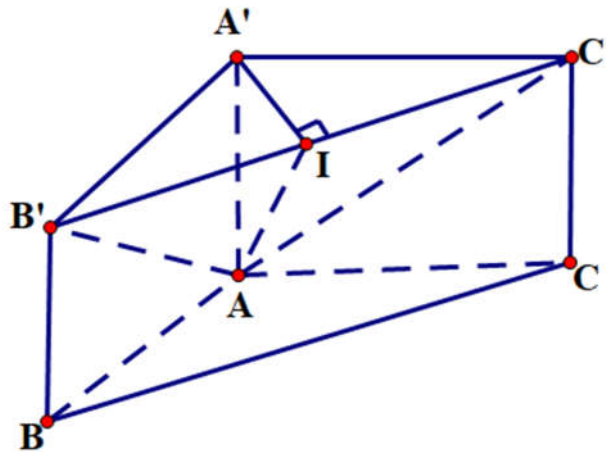
$$\Rightarrow ((ABC), (C'AB)) = \widehat{CBC'} = 60^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \text{ và } CC' = BC \cdot \tan 60^\circ = 3a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

6. Cho khối lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



Do $AA' \perp (A'B'C')$ nên kẻ $A'I \perp B'C' (I \in B'C')$.

Suy ra: $((AB'C'), (A'B'C')) = \widehat{A'IA} = 60^\circ$.

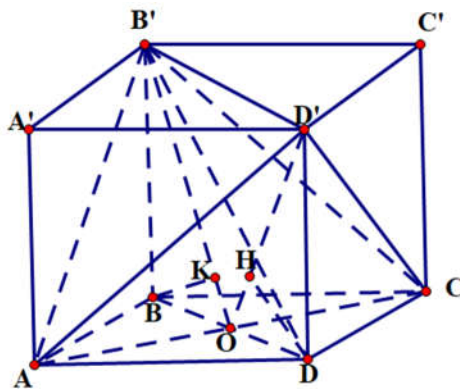
Xét $\triangle A'IB'$: $A'I = A'B' \cos \widehat{B'A'I} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

Suy ra: $AA' = A'I \cdot \tan \widehat{A'IA} = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = AA' \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$.

7. Cho hình hộp đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$. Mặt phẳng $(B'AC)$ tạo với đáy một góc 30° , khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có:

$$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'D) \Rightarrow AC \perp B'O.$$

Khi đó: $BO \perp AC, B'O \perp AC, (ABCD) \cap (B'AC) = AC$,

$$\Rightarrow ((B'AC), (ABCD)) = (BO, OB') = \widehat{B'OB} = 30^\circ.$$

$$\text{Dễ thấy } d(B, (D'AC)) = d(D, (D'AC)) = \frac{a}{2}.$$

$$AC \perp (BB'D'D) \Rightarrow (D'AC) \perp (BB'D'D) \text{ và } (D'AC) \cap (BB'D'D) = D'O.$$

$$\text{Từ } D \text{ kẻ } DH \perp D'O (H \in DO), \text{ suy ra } d(D, (D'AC)) = DH = \frac{a}{2}.$$

$$AC \perp (BB'D'D) \Rightarrow (D'AC) \perp (BB'D'D) \text{ và } (D'AC) \cap (BB'D'D) = D'O.$$

Từ D kẻ $DH \perp D'O (H \in DO)$,

$$\text{suy ra } d(D, (D'AC)) = DH = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle B'BO: \tan 30^\circ = \frac{BB'}{BO} \Rightarrow OD = BO = \sqrt{3}BB'.$$

$$\text{Xét } \triangle D'DO: \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{D'D^2} \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{1}{3B'B^2} + \frac{1}{D'D^2} \Rightarrow DD' = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow OB = a.$$

$$\text{Gọi: } I = BD \cap B'O, \text{ suy ra } \frac{BI}{D'I} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow d(D', (B'AC)) = 2d(B, (B'AC)) \Rightarrow V_{ACB'D'} = 2V_{B'ABC}.$$

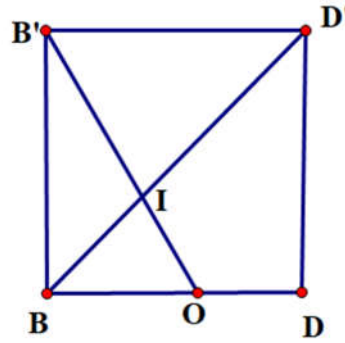
$$\text{Mà } OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABO} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA = a^2\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra: } V_{BABC} = \frac{1}{3} \cdot BB' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot a^2\sqrt{3} = \frac{a^3}{3}. \text{ Vậy } V_{ACB'D'} = \frac{2a^3}{3}.$$

8. Một thùng đựng rác có dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Đáy và miệng thùng có độ dài lần lượt là 60 cm và 120 cm, cạnh bên của thùng dài 100 cm. Tính thể tích của thùng.

Lời giải



Kẻ $C'H \perp AC (H \in AC)$.

$$\text{Có } O'C' = \frac{\sqrt{120^2 + 120^2}}{2} = 60\sqrt{2}, OC = \frac{\sqrt{60^2 + 60^2}}{2} = 30\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow CH = O'C' - OC = 30\sqrt{2}$$

$$\text{Áp dụng công thức } V = \frac{h}{3} (S + \sqrt{SS'} + S'),$$

$$\text{với } h = C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{100^2 - (30\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{82}, S = 120^2, S' = 60^2$$

$$\text{Ta có: } V = \frac{10\sqrt{82}}{3} (120^2 + 120 \cdot 60 + 60^2) = 84000\sqrt{82} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

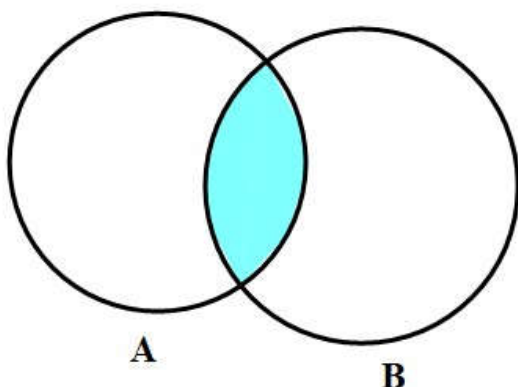
CHƯƠNG IX. XÁC SUẤT

BÀI 1. BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biến cố giao

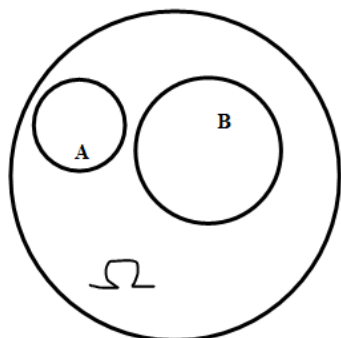
Cho hai biến cố A và B . Biến cố “Cả A và B cùng xảy ra”, kí hiệu AB hoặc $A \cap B$ được gọi là **biến cố giao** của A và B .



Chú ý: Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B . Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

2. Hai biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nếu A và B không đồng thời xảy ra.



Chú ý: Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

3. Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất của biến cố kia.

Nhận xét: Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $\bar{A}$ và B ; A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng độc lập.

4. Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.

Chú ý: Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Hộp thứ hai chứa 6 viên bi cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 6. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 viên bi. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 viên bi bằng 8”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 viên bi là số chẵn”.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Hãy tính xác suất của biến cố AB .

- c) Tính xác suất của biến cố A và biến cố B .
- d) A và B có là hai biến cố độc lập không?
- e) Hãy tìm một biến cố khác rỗng, xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B .

Lời giải

a) Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{(i; j) | i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 6\}$, trong đó kí hiệu $(i; j)$ là kết quả viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất được đánh số i , viên bi lấy ra từ hộp thứ hai được đánh số j .

b) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4 \cdot 6 = 24$.

Khi đó biến cố $AB = \{(2; 6); (4; 4)\}$ nên số kết quả thuận lợi cho AB là $n(AB) = 2$.

Xác suất của biến cố AB là: $P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

c) Ta có $A = \{(2; 6); (3; 5); (4; 4)\}$ nên số kết quả thuận lợi cho A là $n(A) = 3$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Biến cố đối của biến cố B là $\bar{B}$: “Tích các số ghi trên hai viên bi là số lẻ”. Biến cố $\bar{B}$ xảy ra khi cả hai viên bi lấy ra đều ghi số lẻ. Do đó, số kết quả thuận lợi cho biến cố $\bar{B}$ là $n(\bar{B}) = 2 \cdot 3 = 6$.

Xác suất của biến cố $\bar{B}$ là $P(\bar{B}) = \frac{n(\bar{B})}{n(\Omega)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Xác suất của biến cố B là $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{3}{4}$.

d) Ta có $P(A)P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$. Suy ra $P(AB) \neq P(A)P(B)$ nên A và B không là hai biến cố độc lập.

e) Gọi C là biến cố “Cả hai viên bi lấy ra đều ghi số 2”. Biến cố C xung khắc với A nhưng không xung khắc với B .

Bài 2. Một hộp chứa 99 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 99. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 5”.

a) Bình nói AB là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 10”. Bình nói như vậy đúng hay sai? Tại sao?

b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Lời giải

a) Bình nói đúng. Vì nếu số ghi trên thẻ vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 5 khi và chỉ khi nó chia hết cho 10.

b) Từ 1 đến 99 có 49 số chia hết cho 2 nên xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{49}{99}$.

Từ 1 đến 99 có 19 số chia hết cho 5 nên xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{19}{99}$.

Từ 1 đến 99 có 9 số chia hết cho 10 nên xác suất của biến cố AB là $P(AB) = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$.

Vậy $P(A)P(B) \neq P(AB)$. Do đó, hai biến cố A và B là không độc lập.

Bài 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(A) = 0,3$ và $P(B) = 0,7$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

b) Biết $P(A) = 0,8$ và $P(AB) = 0,4$. Hãy tính xác suất của các biến cố $B, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

Lời giải

a) Do A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố AB là: $P(AB) = P(A)P(B) = 0,3.0,7 = 0,21$.

Vì $\bar{A}$ là biến cố đối của A nên $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,7$. Do $\bar{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố $\bar{A}B$ là $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0,7.0,7 = 0,49$.

Vì $\bar{B}$ là biến cố đối của B nên $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,3$. Do $\bar{A}$ và $\bar{B}$ là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố $\bar{A}\bar{B}$ là $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,7.0,3 = 0,21$.

b) Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5$.

Vì $\bar{A}$ là biến cố đối của A nên $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,2$. Do $\bar{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố $\bar{A}B$ là $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0,2.0,5 = 0,1$.

Vì $\bar{B}$ là biến cố đối của B nên $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,5$. Do $\bar{A}$ và $\bar{B}$ là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố $\bar{A}\bar{B}$ là $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,2.0,5 = 0,1$.

Bài 4. Minh gieo 1 hạt đậu và 1 hạt ngô. Xác suất nảy mầm của hạt đậu và hạt ngô lần lượt là 0,7 và 0,6. Biết rằng sự nảy mầm của hai hạt này là độc lập. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

a) “Cả 2 hạt đều nảy mầm”;

b) “Cả hai hạt đều không nảy mầm”;

c) “Hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm”.

Lời giải

Ta có sơ đồ hình cây như sau:

				Kết quả	Xác suất
0,7 ↗	Hạt đậu nảy mầm	0,6 ↗ 0,4 ↘	Hạt ngô nảy mầm	Hạt đậu nảy mầm, hạt ngô nảy mầm	0,42
			Hạt không mầm	Hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm	0,28
0,3 ↘	Hạt không mầm	0,6 ↗ 0,4 ↘	Hạt ngô nảy mầm	Hạt đậu không nảy mầm, hạt ngô nảy mầm	0,18
			Hạt không mầm	Hạt đậu không nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm	0,12

- a) Xác suất cả 2 hạt đều nảy mầm là 0,42.
 b) Xác suất cả 2 hạt đều không nảy mầm là 0,12.
 c) Xác suất hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm là 0,28.

C. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Một hộp chứa 4 bút xanh, 1 bút đen và 1 bút đỏ. Các cây bút có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 3 cây bút từ hộp. Gọi A là biến cố “Có 1 cây bút đỏ trong 3 cây bút được lấy ra”. Gọi B là biến cố “Có 1 cây bút đen trong 3 cây bút được lấy ra”.

- a) Hãy tìm một biến cố xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B .
 b) Tính xác suất của các biến cố A, B và AB .

Lời giải

a) Biến cố “Lấy ra được 1 bút đen và 2 bút xanh” xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B .

$$b) P(A) = P(B) = \frac{C_1^1 C_5^2}{C_6^3} = 0,5$$

AB là biến cố “Lấy ra được 1 bút xanh, 1 bút đen và 1 bút đỏ.

$$\text{Do đó } P(AB) = \frac{C_4^1 C_1^1 C_1^1}{C_6^3} = 0,2.$$

2. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ 2 chứa 1 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 2 viên bi.

Gọi A là biến cố “Cả 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có cùng màu”; B là biến cố “Cả 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có cùng màu”.

- a) Minh nói AB là biến cố “Trong 4 viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ”. Minh nói đúng hay sai? Tại sao?
 b) So sánh $P(AB)$ với $P(A)P(B)$.
 c) Hãy tìm một biến cố khác rỗng, xung khắc với cả biến cố A và biến cố B .

Lời giải

a) Minh nói sai vì nếu lấy ra từ hộp thứ nhất 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ; lấy ra từ hộp thứ hai 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ thì trong 4 viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ nhưng cả hai biến cố A và B đều không xảy ra.

$$b) P(A) = \frac{C_4^2 C_1^0}{C_5^2} = 0,6; P(B) = \frac{C_1^2 C_3^0}{C_4^2} = 0,5; P(AB) = \frac{C_4^2 C_3^0}{C_5^2 C_4^2} = 0,3.$$

$$\text{Vậy } P(A)P(B) \neq P(AB).$$

c) Gọi C là biến cố “Lấy ra từ mỗi hộp 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ”. Biến cố C xung khắc với cả hai biến cố A và B .

3. Một hộp chứa 50 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 4”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 6”.

- a) Giang nói AB là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 24”. Giang nói như vậy đúng hay sai? Tại sao?
 b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Lời giải

a) Giang nói sai vì nếu lấy được thẻ ghi số 12 thì cả hai biến cố A và B xảy ra nhưng 12 không chia hết cho 24.

$$b) P(A) = \frac{12}{50}; P(B) = \frac{8}{50}.$$

AB là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 12” nên $P(AB) = \frac{4}{50}$.

Vì $P(A)P(B) \neq P(AB)$ nên A và B không là hai biến cố độc lập.

4. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(\bar{A}) = 0,4$ và $P(B) = 0,1$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

b) Biết $P(A) + P(B) = 0,8$ và $P(AB) = 0,16$. Hãy tính xác suất của các biến cố $B, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

Lời giải

$$a) P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,6; P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,9.$$

Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(AB) = P(A)P(B) = 0,06$.

Do $\bar{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0,04$.

Do $\bar{A}$ và $\bar{B}$ là hai biến cố độc lập nên $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,36$.

b) $P(A) + P(B) = 0,8$ và $P(AB) = P(A)P(B) = 0,16$. Suy ra $P(A) = P(B) = 0,4$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,6; P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,6.$$

Do $\bar{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0,24$.

Do $\bar{A}$ và $\bar{B}$ là hai biến cố độc lập nên $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,36$.

5. Minh mua 2 bóng đèn. Theo một kết quả thống kê, tỉ lệ bị hỏng trong năm đầu sử dụng của loại bóng đèn Minh mua là 23%. Tính xác suất của các biến cố:

A : “Cả hai bóng đèn đều bị hỏng trong năm đầu sử dụng”;

B : “Cả hai bóng đèn đều không bị hỏng trong năm đầu sử dụng”.

Lời giải

Do tỉ lệ bóng bị hỏng trong năm đầu sử dụng là 23% nên xác suất 1 bóng bị hỏng trong năm đầu sử dụng là 0,23.

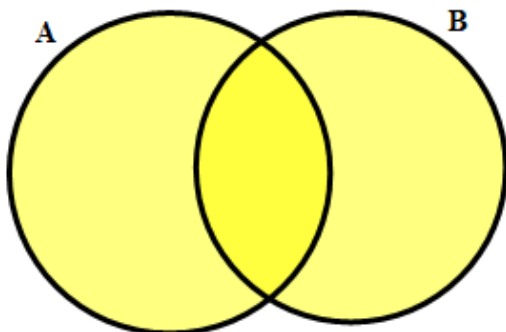
$$P(A) = 0,23 \cdot 0,23 = 0,0529; P(B) = (1 - 0,23)(1 - 0,23) = 0,5929$$

BÀI 2. BIẾN CỐ HỢP VÀ QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B . Biến cố “ A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là **biến cố hợp** của A và B .



Chú ý: Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B .

2. Quy tắc cộng xác suất

Quy tắc cộng cho hai biến cố xung khắc:

Cho hai biến cố xung khắc A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Quy tắc cộng cho hai biến cố bất kì:

Cho hai biến cố A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- "Cả 4 viên bi lấy ra đều có cùng màu";
- "Có ít nhất 3 viên bi xanh trong 4 viên bi lấy ra".

Lời giải

a) Gọi A là biến cố "Cả 4 viên bi lấy ra đều có cùng màu xanh", B là biến cố "Cả 4 viên bi lấy ra có cùng màu đỏ". Vì chỉ có 3 viên bi màu vàng nên $A \cup B$ là biến cố "Cả 4 viên bi lấy ra có cùng màu". Do

$$A \text{ và } B \text{ là hai biến cố xung khắc nên } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{C_4^4}{C_{12}^4} + \frac{C_5^4}{C_{12}^4} = \frac{2}{165}.$$

b) Gọi C là biến cố "Có 3 viên bi xanh trong 4 viên lấy ra". Khi đó $A \cup C$ là biến cố "Có ít nhất 3 viên bi xanh trong 4 viên bi lấy ra". Do A và C là hai biến cố xung khắc nên

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{C_4^4}{C_{12}^4} + \frac{C_4^3 C_8^1}{C_{12}^4} = \frac{1}{15}.$$

Bài 2. Mai, Lan và 5 bạn cùng lớp xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng".

Lời giải

Số cách xếp 7 người thành một hàng ngang là $7!$.

Gọi A là biến cố "Mai đứng ở đầu hàng", B là biến cố "Lan đứng ở đầu hàng".

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

Xác suất của biến cố "Hai bạn Lan và Mai đứng ở hai đầu hàng" là: $P(AB) = \frac{2 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{21}$.

Xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng" là:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{21} = \frac{11}{21}.$$

Bài 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(A) = 0,8$ và $P(AB) = 0,2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

b) Biết $P(B) = 0,3$ và $P(A \cup B) = 0,6$. Tính xác suất của biến cố A .

Lời giải

a) Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25$.

Xác suất của biến cố $A \cup B$ là $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,85$.

b) Do $P(A \cup B) = 0,6$ nên $P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6$.

Theo giả thiết ta có $P(B) = 0,3$ nên $P(A) - P(AB) = 0,3$.

Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(AB) = P(A)P(B) = 0,3P(A)$.

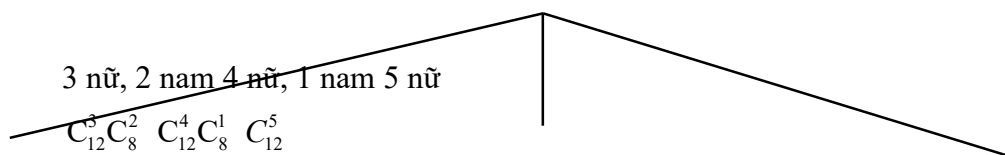
Suy ra $0,7P(A) = 0,3$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$.

Bài 4. Một nhóm gồm 8 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 5 học sinh từ nhóm. Sử dụng sơ đồ hình cây, hãy tính xác suất của biến cố "Có ít nhất 3 học sinh nữ trong 5 học sinh vừa chọn".

Lời giải

Ta có sơ đồ hình cây:



Xác suất của biến cố "Có ít nhất 3 học sinh nữ trong 5 học sinh vừa chọn" là

$$\frac{C_{12}^3 C_8^2 + C_{12}^4 C_8^1 + C_{12}^5}{C_{20}^5} = \frac{682}{969}.$$

Bài 5. Một hộp chứa 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 20. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 37";

b) "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6".

Lời giải

a) Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ nhỏ hơn 4". Biến cố A xảy ra khi 2 thẻ được chọn ghi số 1 và 2. Do đó $P(A) = \frac{1}{C_{20}^2} = \frac{1}{190}$.

Gọi B là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lớn hơn 37". Biến cố B xảy ra khi 2 thẻ được chọn ghi số 20 và 18 hoặc 20 và 19. Do đó $P(B) = \frac{2}{C_{20}^2} = \frac{2}{190}$.

Do A và B là hai biến cố xung khắc nên xác suất của biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 37 là $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{190}$.

b) Gọi D là biến cố "Trong 2 thẻ lấy ra có ít nhất 1 thẻ ghi số chia hết cho 6".

Do có 3 thẻ chia hết cho 6 nên xác suất của biến cố "Trong 2 thẻ lấy ra không có thẻ nào ghi số chia hết cho 6" là

$$P(\overline{D}) = \frac{C_{17}^2}{C_{20}^2} = \frac{68}{95}.$$

Vậy xác suất của biến cố D là $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = \frac{27}{95}$.

Gọi E là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6 nhưng không có thẻ nào ghi số chia hết cho 6". Biến cố E xảy ra khi trong hai thẻ lấy ra có một thẻ ghi số chẵn nhưng không chia hết cho 3 (có 7 thẻ như vậy) và thẻ còn lại ghi số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 6 (có 3 thẻ như vậy).

Vậy xác suất của biến cố E là $P(E) = \frac{7 \cdot 3}{C_{20}^2} = \frac{21}{190}$

Do D và E là hai biến cố xung khắc nên xác suất của biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6" là

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) = \frac{15}{38}.$$

C. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Trong một cuộc gặp mặt có 63 đoàn viên tham dự, trong đó có 25 người đến từ miền Bắc, 19 người đến từ miền Nam và 19 người đến từ miền Trung.

a) Gặp ngẫu nhiên 1 đoàn viên trong cuộc gặp mặt, tính xác suất của biến cố "Đoàn viên được gặp đến từ miền Nam hoặc miền Trung".

b) Gặp ngẫu nhiên 2 đoàn viên trong cuộc gặp mặt, tính xác suất của biến cố "Hai đoàn viên được gặp cùng đến từ miền Bắc hoặc cùng đến từ miền Nam".

Lời giải

$$a) \frac{19+19}{63} = \frac{38}{63}; b) \frac{C_{25}^2}{C_{63}^2} + \frac{C_{19}^2}{C_{63}^2} = \frac{157}{651}.$$

2. Một túi chứa 2 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 3 viên bi từ túi. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Cả 3 viên bi lấy ra đều có cùng màu";

b) "Có không quá 1 viên bi xanh trong 3 viên bi lấy ra";

c) "Có đúng hai màu trong 3 viên bi lấy ra".

Lời giải

$$a) \frac{C_5^3}{C_{10}^3} + \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}; b) \frac{C_8^3}{C_{10}^3} + \frac{2C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{14}{15}.$$

c) Gọi A là biến cố "Có đúng hai màu trong 3 viên bi lấy ra". Biến cố đối của biến cố A là biến cố $B \cup C$ với B là biến cố "Cả 3 bi lấy ra đều có cùng màu" và C là biến cố "3 viên bi lấy ra có đủ cả 3 màu". Ta có $P(B) = \frac{11}{120}; P(C) = \frac{1}{4}$.

Do B và C là hai biến cố xung khắc nên $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{41}{120}$.

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - \frac{41}{120} = \frac{79}{120}.$$

3. Thanh có 4 tấm thẻ được đánh số 1, 3, 4, 7. Thanh lấy ra 3 trong 4 thẻ và xếp chúng thành một hàng ngang một cách ngẫu nhiên để tạo thành một số có 3 chữ số. Tính xác suất của biến cố A : "Số tạo thành chia hết cho 2 hoặc 3".

Lời giải

Số các số có 3 chữ số có thể tạo thành là 24 số.

Gọi B là biến cố "Số tạo thành chia hết cho 2".

Biến cố B xảy ra khi chữ số hàng đơn vị của số tạo thành là 4.

Có thể xếp được $3 \cdot 2 = 6$ số chia hết cho 2. Do đó $P(B) = \frac{6}{24}$.

Gọi C là biến cố "Số tạo thành chia hết cho 3". Biến cố C xảy ra khi 3 chữ số của số tạo thành là 1; 4; 7.

Có thể xếp được $3 \cdot 2 = 6$ số chia hết cho 3. Do đó $P(C) = \frac{6}{24}$.

4. Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

a) Biết $P(A) = 0,4$ và $P(\overline{AB}) = 0,3$. Tính xác suất của các biến cố B và $A \cup B$.

b) Biết $P(\overline{AB}) = 0,4$ và $P(A \cup B) = 0,9$. Tính xác suất của các biến cố A, B và AB .

Lời giải

a) Ta có: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,6$.

Do $\overline{A}$ và B là độc lập nên $P(B) = \frac{P(\overline{AB})}{P(\overline{A})} = 0,5$.

Do A và B là độc lập nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,7$.

b) $P(A) = 0,5; P(B) = 0,8; P(AB) = 0,4$.

5. Một hộp chứa 10 quả bóng xanh và 10 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 5 quả bóng từ hộp. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố "Có ít nhất 3 quả bóng xanh trong 5 quả bóng lấy ra".

Lời giải

Sơ đồ hình cây:

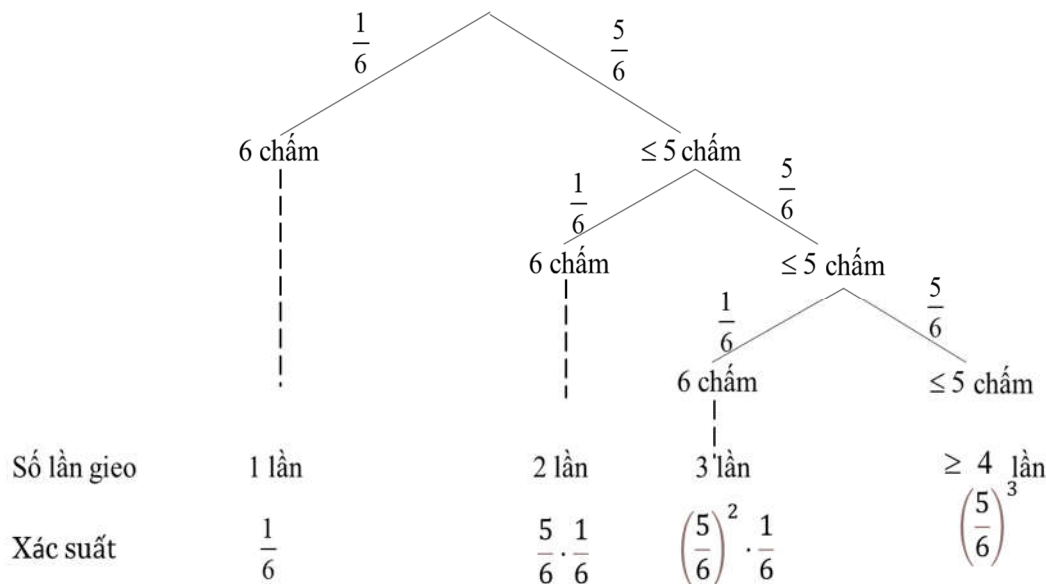
3 bóng xanh 4 bóng xanh 5 bóng xanh

2 bóng đỏ 1 bóng đỏ

$$C_{10}^3 C_{10}^2 C_{10}^4 C_{10}^1 C_{10}^5$$

6. Châu gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất liên tiếp cho đến khi xuất hiện mặt 6 chấm thì dừng lại. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố "Châu phải gieo không quá 3 lần để xuất hiện mặt 6 chấm".

Lời giải



Xác suất của biến cố "Châu phải gieo không quá 3 lần để xuất hiện mặt 6 chấm" là

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216}.$$

7. Trong một trò chơi, Dương chọn ra 5 số từ 100 số tự nhiên đầu tiên. Sau đó, người ta chọn ra ngẫu nhiên 3 số may mắn từ 100 số tự nhiên đầu tiên đó. Tính xác suất của các biến cố:

A : "Không có số may mắn nào trong 5 số Dương đã chọn";

B : "Có đúng 1 số may mắn trong 5 số Dương đã chọn".

Lời giải

Biến cố A xảy ra khi 3 số may mắn nằm trong 95 số mà Dương không chọn.

Do đó, xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{C_{95}^3}{C_{100}^3} \approx 0,856$.

Biến cố B xảy ra khi trong 3 số may mắn, có 1 số Dương đã chọn, 2 số còn lại nằm trong 95 số mà Dương không chọn.

Do đó, xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{C_5^1 C_{95}^2}{C_{100}^3} \approx 0,138$.

8. Một hộp chứa 3 quả bóng xanh và một số quả bóng đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ hộp. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng đỏ" gấp 5 lần xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng xanh". Tính xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng có cùng màu".

Lời giải

Gọi n là số bóng đỏ có trong hộp. Khi đó, tổng số bóng có trong hộp là $n + 3$.

Xác suất lấy được 2 quả bóng xanh là: $\frac{C_3^2}{C_{n+3}^2}$.

Xác suất lấy được 2 quả bóng đỏ là: $\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}$.

Theo đề bài, ta có Theo đề bài, ta có: $\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2} = 5 \cdot \frac{C_3^2}{C_{n+3}^2} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 15$.

Do n là số tự nhiên nên $n = 6$.

Do đó, xác suất của biến cố "Cả 2 quả bóng lấy ra đều có cùng màu" là $\frac{C_3^2}{C_{n+3}^2} + \frac{C_n^2}{C_{n+3}^2} = \frac{C_3^2}{C_9^2} + \frac{C_6^2}{C_9^2} = \frac{1}{2}$.

9. Gieo ngẫu nhiên 3 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố A : "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc chia hết cho 15".

Lời giải

Gọi B là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc không chia hết cho 5", C là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc không chia hết cho 3".

Khi đó, A là biến cố đối của biến cố $B \cup C$.

Ta có $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{3}{4}$.

Do đó, xác suất của biến cố A : "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc chia hết cho 15" là:

$$P(A) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

10. Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 40. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 76";

b) "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10".

Lời giải

a) Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 76". Gọi A_1 là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4", A_2 là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra lớn hơn 76".

Khi đó, ta có $A = A_1 \cup A_2$.

Biến cố A_1 xảy ra khi 2 tấm thẻ được chọn ghi số 1 và 2. Do đó $P(A_1) = \frac{1}{C_{40}^2}$.

Biến cố A_2 xảy ra khi 2 tấm thẻ được chọn ghi số (37;40), (38;40), (39;40) hoặc (38;39). Do đó,

$$P(A_2) = \frac{4}{C_{40}^2}$$

Do A_1 và A_2 là hai biến cố xung khắc nên: $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{156}$.

b) Từ 1 đến 40 có 8 số chia hết cho 5; 20 số chia hết cho 2 và 4 số chia hết cho 10. Gọi B là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10".

Gọi B_1 là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 5", B_2 là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 2".

Khi đó, B là biến cố đối của biến cố $B_1 \cup B_2$.

$$\text{Ta có } P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = \frac{C_{32}^2}{C_{40}^2} + \frac{C_{20}^2}{C_{40}^2} - \frac{C_{16}^2}{C_{40}^2} = \frac{283}{390}.$$

Do đó, xác suất biến cố B "Tích các số ghi trên hai thẻ chia hết cho 10" là $P(B) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = \frac{107}{390}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

PHẦN 1: BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tích số chấm xuất hiện là số lẻ". Biến cố nào sau đây xung khắc với biến cố A ?

- A. "Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm".
- B. "Tổng số chấm xuất hiện là số lẻ".
- C. "Xuất hiện ít nhất một mặt có số chấm là số lẻ".
- D. "Xuất hiện hai mặt có số chấm khác nhau".

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A)=0,4$ và $P(B)=0,5$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- A. 0,9.
- B. 0,7.
- C. 0,5.
- D. 0,2.

Lời giải

Chọn B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7$$

Câu 3: Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5" là

- A. $\frac{5}{36}$.
- B. $\frac{1}{6}$.
- C. $\frac{7}{36}$.
- D. $\frac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Kết quả thuận lợi cho biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là 5" là: 4

Kết quả thuận lợi cho biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là 10" là: 3

Kết quả thuận lợi cho biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5" là:
 $3 + 4 = 7$

Xác suất của biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5" là: $\frac{7}{36}$

Câu 4: Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ một hộp chứa 5 quả bóng xanh và 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Xác suất của biến cố "Hai bóng lấy ra có cùng màu" là

- A. $\frac{1}{9}$.
- B. $\frac{2}{9}$.
- C. $\frac{4}{9}$.
- D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Chọn C

A là biến cố "Hai quả bóng lấy ra đều có màu xanh", $P(A) = \frac{C_5^2}{C_9^2}$

B là biến cố "Hai quả bóng lấy ra đều có màu đỏ", $P(B) = \frac{C_4^2}{C_9^2}$

$A \cup B$ là biến cố "Hai bóng lấy ra có cùng màu". A và B xung khắc nên:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{9}$$

Câu 5: Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh của một hình bát giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Xác suất để khoảng cách giữa hai đỉnh đó bằng $R\sqrt{2}$ là

A. $\frac{2}{7}$.

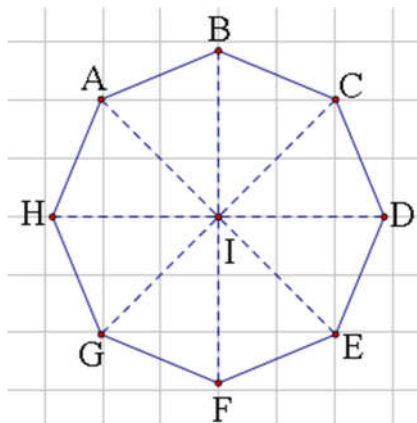
B. $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{4}{7}$.

D. $\frac{5}{56}$.

Lời giải

Chọn A



Để khoảng cách giữa hai điểm đó là $R\sqrt{2}$ thì giữa hai đỉnh đó có 1 đỉnh. Xác suất của biến cố đó là: $\frac{8}{C_8^2} = \frac{2}{7}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 6: Cho A và B là hai biến cố thỏa mãn $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,7$ và $P(A \cup B) = 0,8$.

a) Tính xác suất của các biến cố AB , $\overline{AB}$ và $\overline{A\overline{B}}$.

b) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

Lời giải

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Suy ra $P(AB) = 0,4$

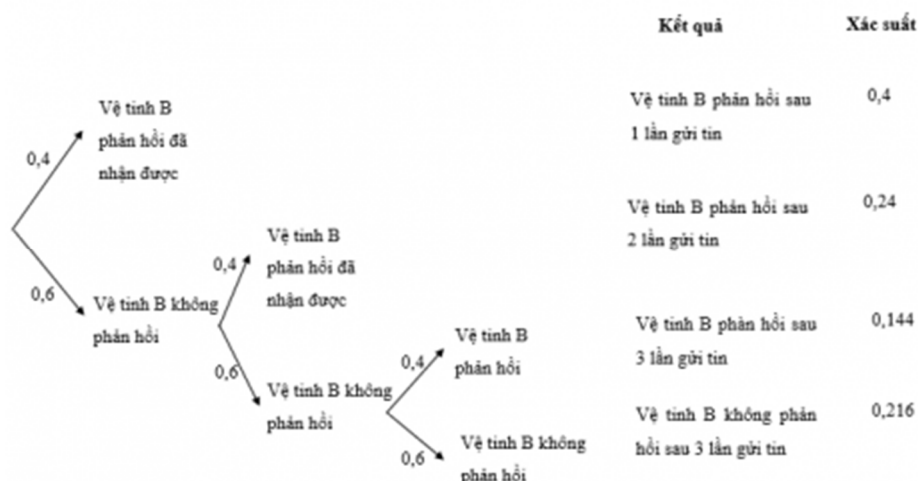
$$P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB) = 0,7 - 0,4 = 0,3$$

$$P(\overline{A\overline{B}}) = 1 - P(A \cup B) = 0,2$$

b) Vì $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$ nên A và B không độc lập

Câu 7: Vệ tinh A lần lượt truyền một tin đến vệ tinh B cho đến khi vệ tinh B phản hồi là đã nhận được. Biết khả năng vệ tinh B phản hồi đã nhận được tin ở mỗi lần A gửi là độc lập với nhau và xác suất phản hồi mỗi lần đều là $0,4$. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất vệ tinh A phải gửi tin không quá 3 lần.

Lời giải



Nhìn vào sơ đồ ta thấy xác suất vệ tinh A phải gửi tin không quá 3 lần là:
 $0,4 + 0,24 + 0,144 = 0,784$

Câu 8: Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 6".

Lời giải

Gọi A là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 6".

$$A = \{(1;6);(2;6);(3;6);(4;6);(5;6);(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Câu 9: Một hộp có 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 4 quả bóng vàng có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố:

A : "Cả 4 quả bóng lấy ra có cùng màu";

B : "Trong 4 bóng lấy ra có đủ cả 3 màu".

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng trong tổng số 15 quả bóng có $C_{15}^4 = 1365$ cách.

$$\Rightarrow n(\Omega) = 1365$$

Gọi A_1 là biến cố "Cả 4 quả bóng lấy ra đều có cùng màu xanh", A_2 là biến cố "Cả 4 quả bóng lấy ra đều có cùng màu đỏ", A_3 là biến cố "Cả 4 quả bóng lấy ra đều có cùng màu vàng".

Vậy $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ là biến cố "Cả 4 quả bóng lấy ra có cùng màu".

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng trong tổng số 5 quả bóng xanh có $C_5^4 = 5$ cách.

$$\Rightarrow n(A_1) = 5 \Rightarrow P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(\Omega)} = \frac{5}{1365} = \frac{1}{273}$$

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng trong tổng số 6 quả bóng đỏ có $C_6^4 = 15$ cách.

$$\Rightarrow n(A_2) = 15 \Rightarrow P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(\Omega)} = \frac{15}{1365} = \frac{1}{91}$$

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng trong tổng số 4 quả bóng vàng có $C_4^4 = 1$ cách.

$$\Rightarrow n(A_3) = 1 \Rightarrow P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(\Omega)} = \frac{1}{1365}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{65}$$

Gọi B_1 là biến cố "Lấy ra 2 bóng xanh, 1 bóng đỏ, 1 bóng vàng", B_2 là biến cố "Lấy ra 1 bóng xanh, 2 bóng đỏ, 1 bóng vàng", B_3 là biến cố "Lấy ra 1 bóng xanh, 1 bóng đỏ, 2 bóng vàng".

Vậy $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ là biến cố "Trong 4 bóng lấy ra có đủ cả 3 màu".

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 2 quả bóng trong tổng số 5 quả bóng xanh có $C_5^2 = 10$ cách.

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 1 quả bóng trong tổng số 6 quả bóng đỏ có 6 cách.

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 1 quả bóng trong tổng số 4 quả bóng vàng có 4 cách.

$$\Rightarrow n(B_1) = 10 \cdot 6 \cdot 4 = 240 \Rightarrow P(B_1) = \frac{n(B_1)}{n(\Omega)} = \frac{240}{1365} = \frac{16}{91}$$

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 1 quả bóng trong tổng số 5 quả bóng xanh có 5 cách.

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 2 quả bóng trong tổng số 6 quả bóng đỏ có $C_6^2 = 15$ cách.

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 1 quả bóng trong tổng số 4 quả bóng vàng có 4 cách.

$$\Rightarrow n(B_2) = 5 \cdot 15 \cdot 4 = 300 \Rightarrow P(B_2) = \frac{n(B_2)}{n(\Omega)} = \frac{300}{1365} = \frac{20}{91}$$

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 1 quả bóng trong tổng số 5 quả bóng xanh có 5 cách.

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 1 quả bóng trong tổng số 6 quả bóng đỏ có 6 cách.

Chọn ngẫu nhiên từ hộp 2 quả bóng trong tổng số 4 quả bóng vàng có $C_4^2 = 6$ cách.

$$\Rightarrow n(B_3) = 5 \cdot 6 \cdot 6 = 180 \Rightarrow P(B_3) = \frac{n(B_3)}{n(\Omega)} = \frac{180}{1365} = \frac{12}{91}$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{48}{91}$$

Câu 10: Cường, Trọng và 6 bạn nữ xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Cường và Trọng đứng ở đầu hàng".

Lời giải

$$A \text{ là biến cố "Cường đứng đầu hàng", } P(A) = \frac{6! \cdot C_2^1}{7!} = \frac{2}{7}$$

$$B \text{ là biến cố "Trọng đứng đầu hàng", } P(B) = \frac{6! \cdot C_2^1}{7!} = \frac{2}{7}$$

$$AB \text{ là biến cố "Trọng và Cường cùng đứng đầu hàng" } P(AB) = \frac{2! \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{21}$$

$A \cup B$ là biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Cường và Trọng đứng ở đầu hàng"

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{11}{21}$$

Câu 11: Chọn ngẫu nhiên 3 trong số 24 đỉnh của một đa giác đều 24 cạnh. Tính xác suất của biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông".

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 trong số 24 đỉnh của một đa giác đều 24 cạnh có $C_{24}^3 = 2024$

$$\Rightarrow n(\Omega) = 2024$$

Gọi A là biến cố: "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân", B là biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác vuông".

Vậy AB là biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân", $A \cup B$ là biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông".

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.

Mỗi tam giác vuông có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác thì cạnh huyền của tam giác vuông phải là đường kính của (O) , do đó ta có 12 cách chọn đường kính.

Với mỗi cách chọn đường kính, ta có 22 cách chọn đỉnh góc vuông (22 đỉnh còn lại của đa giác)

Vậy số tam giác vuông thỏa mãn điều kiện là: $12 \cdot 22 = 264$ (tam giác).

$$\Rightarrow n(A) = 264 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{264}{2024} = \frac{3}{23}$$

Mỗi tam giác cân có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác thì đường cao của tam giác cân phải là đường kính của (O) .

Với mỗi một đỉnh trên (O) , ta có 10 cách tạo ra tam giác cân (không là tam giác đều).

Vậy số tam giác cân (không là tam giác đều) thỏa mãn điều kiện là: $10 \cdot 24 = 240$ (tam giác).

Số tam giác đều có 3 đỉnh nằm trên (O) là: $24 : 3 = 8$ (tam giác).

$$\Rightarrow n(B) = 240 + 8 = 248 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{248}{2024} = \frac{31}{253}$$

Có 12 cách chọn đường kính.

Với mỗi cách chọn đường kính, ta có 2 cách chọn đỉnh góc vuông để tạo thành tam giác vuông cân. Vậy số tam giác vuông cân thỏa mãn điều kiện là: $12 \cdot 2 = 24$ (tam giác).

$$\Rightarrow n(AB) = 24 \Rightarrow P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)} = \frac{24}{2024} = \frac{3}{253}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{23} + \frac{31}{253} - \frac{3}{253} = \frac{61}{253}$$

Câu 12: Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Tính xác suất của các biến cố:

A : "Số được chọn chia hết cho 2 hoặc 7";

B : "Số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn".

Lời giải

Số các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 2 là: 450

Số các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 7 là: 128

$$P(A) = \frac{450}{900} + \frac{128}{900} - \frac{450 \cdot 128}{900 \cdot 900} = \frac{257}{450}$$

Số các số tự nhiên có 3 chữ số đều là số chẵn là: 100

Số các số tự nhiên có 1 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ là: 100

$$P(B) = \frac{100}{900} + \frac{100}{900} = \frac{2}{9}$$

Câu 13: Cho hai giống cá kiếm mắt đen thuần chủng và mắt đỏ thuần chủng giao phối với nhau được F1 toàn cá kiếm mắt đen. Lại cho cá F1 giao phối với nhau được một đàn cá con mới. Chọn ra ngẫu nhiên 2 con trong đàn cá con mới. Ước lượng xác suất của biến cố "Có ít nhất 1 con cá mắt đen trong 2 con cá đó".

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Có 1 con cá mắt đen", B là biến cố "Có 2 con cá mắt đen".

Vậy $A \cup B$ là biến cố "Có ít nhất 1 con cá mắt đen trong 2 con cá đó".

Xác suất con cá là cá mắt đen là $\frac{3}{4}$, xác suất con cá là cá mắt đỏ là $\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}; P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$\text{Vì hai biến cố } A \text{ và } B \text{ xung khắc nên } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}.$$

PHẦN 2: BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 1,2.

Một lớp học gồm 50 bạn, trong đó có 20 bạn thích chơi bóng đá, 28 bạn thích chơi bóng rổ và 8 bạn thích chơi cả hai môn. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp.

1. Xác suất của biến cố "Bạn được gặp thích chơi bóng đá hoặc bóng rổ" là

- A. 0,16. B. 0,96. C. 0,48. D. 0,8.

Lời giải

Chọn D

2. Xác suất của biến cố "Bạn được gặp thích chơi bóng đá nhưng không thích chơi bóng rổ" là

- A. 0,24. B. 0,12. C. 0,4. D. 0,16.

Lời giải

Chọn A

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 3, 4.

Một hộp đựng 10 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 15 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 15. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ trong hộp. Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra có màu đỏ", B là biến cố "Viên bi lấy ra ghi số chẵn".

3. Xác suất của biến cố AB là

- A. 0,28. B. 0,2. C. 0,4. D. 0,48.

Lời giải

Chọn B

4. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- A. 0,4. B. 0,88. C. 0,48. D. 0,68.

Lời giải

Chọn D

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 5, 6.

5. Xác suất của biến cố "Cả 2 lần thí nghiệm đều thành công" là

- ### Lời giải

6. Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất thí nghiệm thất bại, lần thứ hai thí nghiệm thành công" là:

- ### Lời giải

Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A)=0,4$ và $P(AB)=0,2$.

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Lời giải

B. TỰ LUẬN

Lời giải

B : "Trong và Thủy không chọn được số nào giống nhau".

Lời giải

a) $P(A) = \frac{1}{16}$; b) $\frac{1001}{5168}$.

3. Bốn bạn An, Bình, Châu, Dương đứng ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Gọi A là biến cố "An đứng cạnh Bình", B là biến cố "Châu đứng ở đầu hàng". Tính xác suất của các biến cố AB và $A \cup B$.

Lời giải

$$P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{2}; P(AB) = \frac{1}{3}; P(A \cup B) = \frac{2}{3}.$$

4. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(A) = 0,8$ và $P(AB) = 0,2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

b) Biết $P(B) = 0,3$ và $P(A \cup B) = 0,6$. Tính xác suất của biến cố A .

Lời giải

a) Xác suất của biến cố $A \cup B$ là: 0,85; b) Xác suất của biến cố A là: $\frac{3}{7}$.

5. Một hộp đựng 10 tấm thẻ màu trắng được đánh số từ 1 đến 10 và 5 tấm thẻ màu xanh được đánh số từ 1 đến 5.

5. Các tấm thẻ có cùng kích thước và khối lượng. Rút ra ngẫu nhiên 2 tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Hai thẻ lấy ra có cùng màu".

b) "Có ít nhất 1 thẻ màu trắng và ghi số chẵn trong hai thẻ lấy ra".

Lời giải

a) $\frac{11}{21}$; b) $\frac{4}{7}$.

6. Tỷ lệ chuyển bay từ Hà Nội vào Cần Thơ bị chậm giờ là 5%. Tỷ lệ chuyển bay từ Cần Thơ về Hà Nội bị chậm giờ là 3%. Thảo bay từ Hà Nội vào Cần Thơ và bay trở lại Hà Nội sau một tháng. Biết rằng khả năng bị chậm giờ của hai chuyến bay đó là độc lập với nhau. Tính xác suất của biến cố "Hai chuyến bay đều không bị chậm giờ".

Lời giải

Xác suất của biến cố "Hai chuyến bay đều không bị chậm giờ" là: 0,9215

7. Một hộp chứa 1 viên bi xanh và một số viên bi trắng có cùng kích thước và khối lượng. Biết rằng nếu chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thì xác suất lấy được 2 bi cùng màu là 0,6. Hỏi trong hộp có bao nhiêu viên bi trắng?

Lời giải

Trong hộp có bao nhiêu viên bi trắng là: 4

8. Một nhóm học sinh gồm 4 bạn nữ và một số bạn nam. Chọn ra ngẫu nhiên 2 bạn từ nhóm. Biết rằng xác suất để 2 bạn được chọn đều là nam là $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố "Cả 2 bạn được chọn có cùng giới tính".

Lời giải

Xác suất của biến cố "Cả 2 bạn được chọn có cùng giới tính" là: $\frac{7}{15}$

9. Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh của một hình lục giác đều có cạnh bằng 1. Tính xác suất của biến cố "Khoảng cách giữa hai đỉnh được chọn lớn hơn $\sqrt{3}$ ".

Lời giải

Xác suất của biến cố "Khoảng cách giữa hai đỉnh được chọn lớn hơn $\sqrt{3}$ " là: $\frac{1}{5}$

10. Chọn ngẫu nhiên 2 hình vuông trong bảng ô vuông kích thước 3×3 . Gọi A là biến cố "Hai hình vuông được chọn có đúng 1 đỉnh chung", B là biến cố "Hai hình vuông được chọn có 1 cạnh chung". Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

Lời giải

Xác suất của biến cố $A \cup B$ là: $\frac{5}{9}$