SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO BẮC NINH
TRƯỜNG THPT NGUYỄN ĐĂNG ĐẠO

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
Năm học: 2019 – 2020
MÔN THI: TOÁN, LỚP 11
Thời gian làm bài: ***150 phút*** *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1. (2,0 điểm) Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x$ và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (*O* là gốc tọa độ).

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \sqrt{3}\cos x - 1}{2\cos x + \sqrt{3}} = 0$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x-1) + \sqrt{x} = \sqrt{y+1}\left(1 + y\sqrt{y+1}\right) & (1) \\ 3(x-1) = 2\sqrt{4+y} - 4\sqrt{2-y} + \sqrt{9-x^2} & (2) \end{cases}$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Chứng minh rằng phương trình $m^2x^4 - x^3 - 2m^2 + 2m = 0$ luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

2) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính giới hạn $\lim(u_n)$.

Câu 4. (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;3)$. Các điểm $I(6;6)$, $J(4;5)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh *B* và *C* biết hoành độ điểm *B* lớn hơn hoành độ điểm *C*.

Câu 5. (5,0 điểm)

1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = b$, cạnh bên SA vuông góc với đáy.

a) Gọi *I*, *J* lần lượt là trung điểm của *SB* và *CD*. Biết đường thẳng *IJ* tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0. Tính độ dài đoạn thẳng SA.

b) (α) là mặt phẳng thay đổi qua *AB* và cắt các cạnh *SC*, *SD* lần lượt tại *M* và *N*. Gọi *K* là giao điểm của hai đường thẳng *AN* và *BM*. Chứng minh rằng biểu thức $T = \dfrac{AB}{MN} - \dfrac{BC}{SK}$ có giá trị không đổi.

2) Cho tứ diện *ABCD* có $AD = BC = 2a, AC = BD = 2b$, $AB.CD = 4c^2$. Gọi *M* là điểm di động trong không gian. Chứng minh rằng biểu thức $H = (MA + MB + MC + MD)^2 \geq 8(a^2 + b^2 + c^2)$.

Câu 6. (3,0 điểm)

1) Có hai cái hộp đựng tất cả 15 viên bi, các viên bi chỉ có 2 màu đen và trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 viên bi. Biết số bi ở hộp 1 nhiều hơn hộp 2, số bi đen ở hộp 1 nhiều hơn số bi đen ở hộp 2 và xác suất để lấy được 2 viên đen là $\dfrac{5}{28}$. Tính xác suất để lấy được 2 viên trắng.

2) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x, y, z \geq 1$ và $3(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x^2}{(x+y)^2 + x} + \dfrac{x}{z^2 + x}$.

………….. **Hết**…………..

(Chú ý: Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

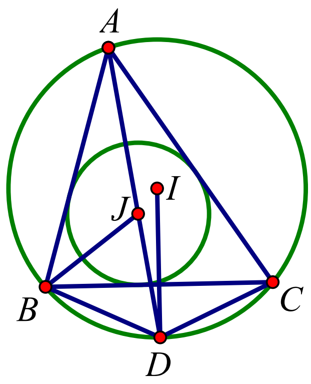
SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO BẮC NINH
TRƯỜNG THPT NGUYỄN ĐĂNG ĐẠO

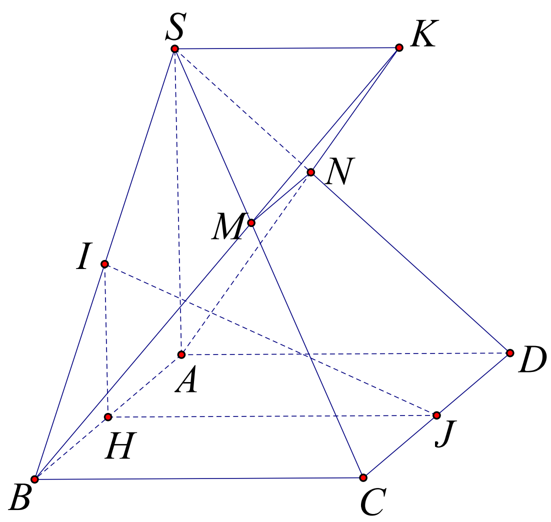
ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG CẤP TRƯỜNG
Năm học: 2019 – 2020
MÔN THI: TOÁN, LỚP 11

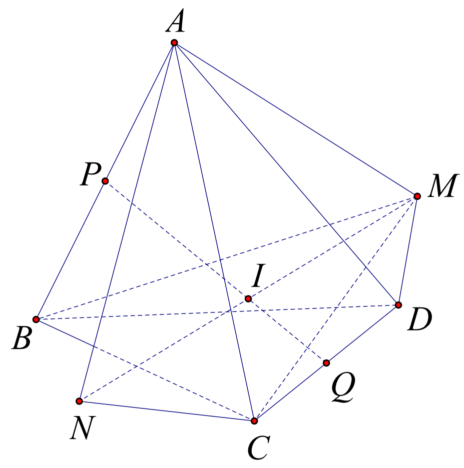
Câu	**Nội dung**	**Điểm**
Câu 1		**2,0**
	Phương trình hoành độ giáo điểm: $x^2-2x=2x+m \Leftrightarrow x^2-4x-m=0\left(1\right)$ Đường thẳng d cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi pt(1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m+4>0 \Leftrightarrow m>-4$	**0,25**
	Gọi $A\left(x_1;2x_1+m\right),B\left(x_2;2x_2+m\right)$ (x_1,x_2 là các nghiệm của pt(1)) Theo Định lý Vi-et: $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=-m \end{cases}$	**0,5**
	Vì ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Rightarrow x_1x_2+\left(2x_1+m\right)\left(2x_2+m\right)=0$ $\Rightarrow 5x_1x_2+2m\left(x_1+x_2\right)+m^2=0 \Rightarrow m^2+3m=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-3 \end{array}\right.$	**0,5**
	+) Với $m=0$, phương trình (1) trở thành: $x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(0;0\right)\equiv O$ (Loại) +) Với $m=-3$, phương trình (1) trở thành: $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow A\left(1;-1\right) \\ x=3 \Rightarrow B\left(3;3\right) \end{array}\right.$ (t/m)	**0,5**
	Kết luận: Vậy $m=-3$	**0,25**
Câu 2.1		**2,0**
	Điều kiện: $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x\neq \pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi$	**0,25**
	Phương trình tương đương: $\sqrt{3}\cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(2\sin^2 x+3\sin x-2\right)=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x+2\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x+2\right)=0$	**0,75**
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2} \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$	**0,5**

	Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$	**0,5**
Câu 2.2		**2.0**
	Điều kiện: $\begin{cases}0\le x\le 3\\-1\le y\le 2\end{cases}$ Ta thấy $x=0, y=-1$ không phải là nghiệm của hệ. Từ đó suy ra $x+y>-1$. Do đó phương trình (1) của hệ tương đương $\left(x^2-y^2\right)-\left(x+y\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y+1}\right)=0$ $\Leftrightarrow\left(x-y-1\right)\left(x+y+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}\right)=0\left(*\right)$	**0,5**
	Ta có: $x+y=x+\left(y+1\right)-1\ge\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)^2}{2}-1$ $\Rightarrow x+y+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}\ge\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}-1$ Lại có: $\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}-1$ $=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)^2}{2}+\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)}+\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)}-1$ $\ge 3\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)^2}{8\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)^2}}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$. Do đó, phương trình $\left(*\right)$ tương đương $x-y-1=0\Leftrightarrow y=x-1$	**0,5**

	Thế vào pt(2), ta được: $3(x-3)=2\sqrt{3+x}-4\sqrt{3-x}+\sqrt{9-x^2}$ Đặt: $\begin{cases}\sqrt{3+x}=u, u\geq 0\\ \sqrt{3-x}=v, v\geq 0\end{cases}\Rightarrow 3(x-1)=u^2-2v^2$ Suy ra: $u^2-2v^2=2u-4v+uv \Leftrightarrow u^2-(2+v)u-2v^2+4v=0$ $\Delta=9v^2-12v+4=(3v-2)^2$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}u=2-v\\ u=2v\end{array}\right.$	**0,5**
	+) $u=2-v\Rightarrow\sqrt{3+x}=2-\sqrt{3-x}$ (Vô nghiệm) +) $u=2v\Leftrightarrow\sqrt{3+x}=2\sqrt{3-x}\Leftrightarrow x=\frac{9}{5}\Rightarrow y=\frac{4}{5}$ Vậy hệ cho có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{9}{5};\frac{4}{5}\right)$.	**0,5**
Câu 3.1		**2,0**
	Xét hàm số $f(x)=m^2x^4-x^3-2m^2+2m$ Ta thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$	**0,5**
	$f(1)=-m^2+2m-1=-(m-1)^2\leq 0,\forall m\in\mathbb{R}$ $f(-2)=14m^2+2m+8=13m^2+(m+1)^2+7>0,\forall m\in\mathbb{R}$	**0,5**
	+) Nếu $m=1\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x=1$ +) Nếu $m\neq 1\Rightarrow f(-2).f(1)<0\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $x\in(-2;1)$	**0,5**
	Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi *m*.	**0,5**
Câu 3.2		**2,0**
	Ta có: $u_{n+1}-2=\frac{4}{4-u_n}-2\Leftrightarrow u_{n+1}-2=\frac{2u_n-4}{4-u_n}$	**0,5**
	$\Rightarrow\frac{1}{u_{n+1}-2}=\frac{4-u_n}{2(u_n-2)}\Leftrightarrow\frac{1}{u_{n+1}-2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{u_n-2}$	**0,5**

	Đặt: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\dfrac{4}{7} \\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + v_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ $\Rightarrow v_n = -\dfrac{4}{7} - \dfrac{1}{2}(n-1) = \dfrac{-7n-1}{14}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{-7n-1}{14} \Rightarrow u_n = 2 - \dfrac{14}{7n+1}$	**0,5**
	$\Rightarrow \lim(u_n) = \lim\left(2 - \dfrac{14}{7n+1}\right) = 2$	**0,5**
Câu 4		**2,0**
	Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(6;6)$, bán kính $R = IA = 5$ có phương trình: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$. Phương trình đường thẳng AJ: $x - y + 1 = 0$. Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng AJ với đường tròn (C). $\Rightarrow$ Tọa độ D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow D(9;10)$ (Do $A \neq D$)  	**0,5**
	Vì $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow D$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow DB = DC$ (1) $\widehat{BJD}$ là góc ngoài tam giác $JAB \Rightarrow \widehat{BJD} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ (2) $\left.\begin{matrix} \widehat{JBD} = \widehat{JBC} + \widehat{CBD} \\ \widehat{CBD} = \widehat{CAD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{JBD} = \widehat{JBC} + \widehat{CAD} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{A}}{2}$ (3) Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{BJD} = \widehat{JBD} \Rightarrow \Delta DBJ$ cân tại D (4) Từ (1) và (4) suy ra $DB = DC = DJ = 5\sqrt{2}$	**0,75**

	$\Rightarrow B,C$ thuộc đường tròn (C') tâm D, bán kính $R' = 5\sqrt{2}$ Phương trình $(C'):(x-9)^2+(y-10)^2=50$ B, C là các giao điểm của (C) và (C') nên tọa độ của B và C là các nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=25\\(x-9)^2+(y-10)^2=50\end{cases} \Rightarrow B(10;3), C(2;9)$ (Do $x_B > x_C$)	**0,5**
	Vậy $B(10;3), C(2;9)$	**0,25**
Câu 5.1a		**1,5**
	 Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow IH // SA \Rightarrow IH \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa IJ với $(ABCD)$ là góc $\widehat{IJH} \Rightarrow \widehat{IJH} = 60^0$	**0,75**
	Trong tam giác IHJ vuông tại H ta có: $IH = HJ.\tan\widehat{IJH} = b\sqrt{3}$	**0,5**
	$\Rightarrow SA = 2IH = 2b\sqrt{3}$	**0,25**
Câu 5.1b		**1,5**
	Ta có : $\left.\begin{matrix}MN = (\alpha)\cap(SCD)\\AB//CD\end{matrix}\right\} \Rightarrow MN//AB//CD$ $\left.\begin{matrix}SK = (SAD)\cap(SBC)\\AD//BC\end{matrix}\right\} \Rightarrow SK//AD//BC$	**0,5**
	Từ đó suy ra $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{CD}{MN} = \dfrac{CS}{MS}$ $\dfrac{BC}{SK} = \dfrac{CM}{SM}$	**0,5**
	$\Rightarrow \dfrac{AB}{MN} - \dfrac{BC}{SK} = \dfrac{CS}{MS} - \dfrac{CM}{SM} = \dfrac{MS}{MS} = 1$ (đpcm)	**0,5**

Câu 5.2		**2,0**
	 Đặt $AB = m, CD = n \Rightarrow mn = 4c^2$ Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Ta có $\Delta BCD = \Delta ADC \Rightarrow BQ = AQ \;\Rightarrow \Delta QAB$ cân tại $Q \Rightarrow QP \perp AB$ Tương tự ta có $QP \perp CD$ $\Rightarrow$ B đối xứng A qua PQ và D đối xứng C qua PQ Gọi N là điểm đối xứng của M qua PQ và I là giao điểm của MN với $PQ \Rightarrow MB = NA;\ MD = NC$	**0,5**
	Ta có: $H = \left(MA + MB + MC + MD\right)^2 = \left(MA + NA + MC + NC\right)^2$ Trong tam giác AMN có $\left\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AI}\right\| \Rightarrow AM + AN \geq 2AI$ Tương tự ta có: $CM + CN \geq 2CI$ $\Rightarrow H \geq \left(2AI + 2CI\right)^2 = 4\left(AI + CI\right)^2$	**0,5**
	Đặt: $IP = x, IQ = y$ $\Rightarrow \left(AI + CI\right)^2 = \left(\sqrt{IP^2 + PA^2} + \sqrt{IQ^2 + QC^2}\right) = \left(\sqrt{\frac{m^2}{4} + x^2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + y^2}\right)^2$ Ta có $\sqrt{\frac{m^2}{4} + x^2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + y^2} \geq \sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \left(x + y\right)^2}$	**0,5**

	$=\sqrt{\frac{m^2+n^2+2mn}{4}+PQ^2}=\sqrt{\frac{m^2+n^2+8c^2}{4}+BQ^2-PB^2}$ $\sqrt{2c^2+\frac{n^2}{4}+BQ^2}=\sqrt{2c^2+\frac{n^2}{4}+\frac{2BC^2+2BD^2-CD^2}{4}}=\sqrt{2a^2+2b^2+2c^2}$ $\Rightarrow H\ge 4\left(2a^2+2b^2+2c^2\right)=8\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (đpcm).	0,5
Câu 6.1		**1,5**
	Gọi số bi trong hộp 1 là n ($7<n<15$, $n\in\mathbb{Z}$). Gọi x, y lần lượt là số bi đen ở hộp 1 và hộp 2 $\left(n\ge x>y>0, x, y\in\mathbb{Z}\right)$. Suy ra xác suất lấy được 2 viên bi đen là: $\frac{xy}{n(15-n)}=\frac{5}{28}$ (1) $\Rightarrow 28xy=5n(15-n) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n\vdots 7 \\ (15-n)\vdots 7\end{array}\right.$	0,5
	+) Nếu $n\vdots 7$, do $7<n<15\Rightarrow n=14$ $\Rightarrow$ số bi ở hộp 2 là 1 viên $\Rightarrow y=1$. Thay vào (1) ta có: $\frac{x}{14}=\frac{5}{28}\Rightarrow x=\frac{5}{2}$ (Loại).	0,25
	+) Nếu $(15-n)\vdots 7$, do $7<n<15\Rightarrow n=8$ Thay vào (1) ta được: $\frac{xy}{56}=\frac{5}{28}\Rightarrow xy=10\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow$ Xác suất lấy được 2 bi trắng là: $\frac{3}{8}.\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$.	0,25
Câu 6.2		**1,5**
	Ta có $x\ge 1\Rightarrow x\ge x^2\Rightarrow P\ge x\left[\frac{1}{(x+y)^2+x}+\frac{1}{z^2+x}\right]\ge\frac{4x}{(x+y)^2+z^2+2x}$.	0,5
	Theo giả thiết ta có: $(x+y)^2+z^2=3(x+y+z)\le 3\sqrt{2\left[(x+y)^2+z^2\right]}$ $\Rightarrow (x+y)^2+z^2\le 18 \Rightarrow P\ge\frac{4x}{2x+18}=2-\frac{18}{x+9}\ge 2-\frac{18}{10}=\frac{1}{5}$	0,5
	Dấu "=" xảy ra khi $x=1, y=2, z=3$. Vậy $\min P=\frac{1}{5}$	0,5

.... **Hết**…………….