BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình đường thẳng

Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

Chú ý:

+ Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ thì $k.\vec{u}\,(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ.

+ Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ *là một vectơ chỉ phương.*

Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng Δ có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt\,,\ t \in \mathbb{R} \quad (1) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Cho đường thẳng Δ có phương trình (1) thì

+ $\vec{u} = (a; b; c)$ *là một vectơ chỉ phương của Δ.*

+ Với điểm $M \in \Delta$ *thì* $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$ *trong đó t là một giá trị cụ thể tương ứng với từng điểm M.*

Phương trình chính tắc

Nếu $a, b, c \neq 0$ thì phương trình chính tắc của đường thẳng Δ có dạng

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (2)$$

2. Khoảng cách

Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua M_0, có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và điểm $M \notin \Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ M đến Δ ta có các cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức: $d[M, d] = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

Cách 2:

+ Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M vuông góc với Δ.

+ Tìm giao điểm H của (P) với Δ.

+ Khi đó độ dài MH là khoảng cách cần tìm.

Cách 3:

+ Gọi $N \in d$, suy ra tọa độ N theo tham số t.

+ Tính MN^2 theo t.

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc hai.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua M_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và Δ' đi qua M_0' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' được tính theo các cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức: $d\left(\Delta,\Delta'\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]}$.

Cách 2: Tìm đoạn vuông góc chung MN. Khi đó độ dài MN là khoảng cách cần tìm.

Cách 3: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa qua Δ và song song với Δ'. Khi đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ' đến (P).

3. Vị trí tương đối

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian *Oxyz*, hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ đi qua $M_1\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\left(a;b;c\right)$, và

$d_2:\dfrac{x-x_0'}{a'}=\dfrac{y-y_0'}{b'}=\dfrac{z-z_0'}{c'}$ đi qua $M_2\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=\left(a';b';c'\right)$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2, ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

+ d_1 trùng d_2 $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{u_1}//\overrightarrow{u_2}\\ M_1\in d_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}\\ M_1\in d_2\end{cases}$

+ $d_1//d_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0}\\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0}\end{cases}$ hoặc

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_1}\parallel\overrightarrow{u_2}\\ M_1\notin d_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}\\ M_1\notin d_2\end{cases}$$

*Ta có thể dùng **phương pháp đại số** để xét vị trí tương đối: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.*

Chú ý trường hợp vô nghiệm

+ Nếu $\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ cùng phương thì $d_1//d_2$.

+ Nếu $\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương thì $d_1;d_2$ chéo nhau.

+ d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] \neq \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$

+ d_1 chéo d_2 $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(A;B;C)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

• Nếu $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ M(x_0;y_0;z_0) \in (\alpha) \end{cases}$ thì $d \subset (\alpha)$.

• Nếu $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ M(x_0;y_0;z_0) \notin (\alpha) \end{cases}$ thì $d // (\alpha)$.

• Nếu $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}=k.\overrightarrow{n_\alpha}$ với $k \neq 0$ thì $d \perp (\alpha)$.

• Nếu $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha} \neq 0$; $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_\alpha}$ không cùng phương thì d cắt (α).

Phương pháp đại số

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x=x_0+at & (1) \\ y=y_0+bt & (2) \\ z=z_0+ct & (3) \\ Ax+By+Cz+D=0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được

$$A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0 \quad (*)$$

+) Nếu phương trình (*) vô nghiệm t thì $d // (\alpha)$.

+) Nếu phương trình (*) có nghiệm t duy nhất thì d cắt (α).

+) Nếu phương trình (*) có vô số nghiệm t thì $d \subset (\alpha)$.

Chú ý: Để tìm điểm chung của đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta giải phương trình (*), sau đó thay giá trị t vào phương trình tham số của d để tìm $(x;y;z)$

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng và mặt cầu có phương trình lần lượt là: $d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt, \ t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct \end{cases}$ và $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học	**Phương pháp đại số**
Bước 1: Tìm khoảng cách từ tâm I của (S) đến d. ***Bước 2:*** + Nếu $d(I,d)>R$ thì d không cắt (S). + Nếu $d(I,d)=R$ thì d tiếp xúc (S). + Nếu $d(I,d)<R$ thì d cắt (S).	*thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình (S), khi đó ta được phương trình bậc hai theo t.* Biện luận số giao điểm của (d) *và* (S) *theo số nghiệm của phương trình bậc hai theo t.* ***Chú ý:*** *Để tìm điểm chung của đường thẳng và mặt cầu ta giải phương trình bậc hai theo t, sau đó thay giá trị của t vào phương trình tham số của d để tìm $(x;y;z)$.*

4. Góc

Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng hoặc bù với góc giữa $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$.

Ta có: $\cos(d_1,d_2)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Chú ý: *Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.*

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α).

Ta có: $\sin\left(d,(\alpha)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\alpha}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}$.

Chú ý: *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn.*

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG

ĐƯỜNG THẲNG

Phương trình đường

Đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(a;b;c)$

$\xrightarrow{\vec{u}}$ Δ

Tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt,\ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Chính tắc:

Nếu $a,b,c \neq 0$ thì

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Khoảng cách

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ

$$d[M,\Delta] = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Khoảng cách 2 đường thẳng chéo nhau Δ,Δ'

$$d(\Delta,\Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right].\overrightarrow{M_0M}\right.}{\ldots}$$

Góc

Giữa hai đường thẳng d và d'

$$\cos(d_1,d_2) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right.$$

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α)

$$\sin(d,(\alpha)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\alpha}\right.\right.$$

Vị trí tương đối

Hai đường thẳng d_1,d_2

$d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$; $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$;

d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] \neq 0; \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$

d_1 chéo d_2 $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$

Đường thẳng d và mặt phẳng (α)

$d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_\alpha}; M(x_0;y_0;z_0) \in (\alpha)$

$d // (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_\alpha}; M(x_0;y_0;z_0) \notin (\alpha)$

d cắt (α) $\Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha} \neq 0$, $\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\alpha}$ không cùng phương

Đường thẳng d và mặt cầu $S(I,R)$

d không cắt $(S) \Leftrightarrow d(I,d) > R$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng

1. Phương pháp

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

- Đường thẳng d đi qua hai điểm *A, B*: Một vectơ chỉ phương của *d* là $\overrightarrow{AB}$.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: Vì $d//\Delta$ nên vectơ chỉ phương của Δ cũng là vectơ chỉ phương của d.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$ cho trước: Vì $d\perp\left(P\right)$ nên vectơ pháp tuyến của $\left(P\right)$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(P\right)$, $\left(Q\right)$.

Cách 1: Tìm một điểm và một vectơ chỉ phương

– Tìm toạ độ một điểm $A\in d$ bằng cách giải hệ phương trình mặt phẳng của $\left(P\right)$, $\left(Q\right)$ với việc chọn giá trị cho một ẩn.

– Tìm một vectơ chỉ phương của d: $\vec{a}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]$.

Cách 2: Tìm hai điểm *A, B* thuộc d rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2: Vì $d\perp d_1,d\perp d_2$ nên một vectơ chỉ phương của d là: $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian *Oxyz*, cho tam giác ABC có $A\left(2;1;-1\right)$, $B\left(-2;3;1\right)$ và $C\left(0;-1;3\right)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

C. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$.

D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-4;2;2\right)\Rightarrow AB=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$.

$\overrightarrow{AC}=(-2;-2;4)\Rightarrow AC=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$.

$\overrightarrow{BC}=(2;-4;2)\Rightarrow BC=\sqrt{4+16+4}=2\sqrt{6}$.

Vậy tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm $G(0;1;1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(12;12;12)=12(1;1;1)$.

Đường thẳng d đi qua $G(0;1;1)$ và có vectơ chỉ phương cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$, do đó chọn $\vec{u}=(1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$.

Với $t=-1$, ta có điểm $A(-1;0;0)\in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $A(-1;0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$.

Bài tập 2. Trong không gian *Oxyz*, cho hai $M(1;2;3), N(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-14=0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P), các điểm H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M,N trên Δ. Biết rằng khi $MH=NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=13+2t\\z=-4+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của HK.

Do $MH=NK$ nên $\Delta HMI=\Delta KNI\Rightarrow IM=IN$. Khi đó I thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

Ta có (Q) đi qua trung điểm của MN là điểm $J(2;3;4)$ và nhận $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=(1;1;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $(Q): x+y+z-9=0$.

Mà $I\in A\subset(P)$. Suy ra $I\in d=(P)\cap(Q):\begin{cases}x+y+z-9=0\\x+2y+3z-14=0\end{cases}$

Tìm được $(0;13;-4)\in d$ và vectơ chỉ phương của d là $(1;-2;1)$.

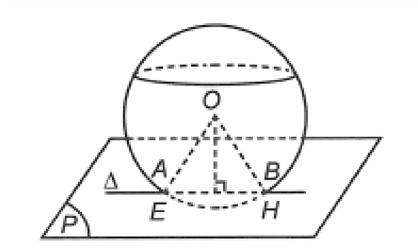
Vậy $d:\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$.

Bài tập 3. Trong không gian *Oxyz*. Cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB là tam giác đều. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ với $a^2+b^2+c^2>0$.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;5)$.

Vì $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_P} \Rightarrow \vec{u}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow a-3b+5c=0 \Leftrightarrow a=3b-5c$. (1)

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB

Ta có ΔOAB là tam giác đều cạnh R nên $OH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Suy ra khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ bằng $OH=\sqrt{3}$.

Khi đó $\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{OE}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được:

$$3b-5c+b+c=0 \Leftrightarrow b=c \Rightarrow a=-2c.$$

Thay $c=-1$ thì $b=-1$ và $a=2$.

Ta được một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;-1;-1)$

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp tham số hóa

1. Phương pháp

• Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ. Khi đó $H \in \Delta$, $\overrightarrow{M_0H} \perp \overrightarrow{u_\Delta}$. Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với d. (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$

• Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1 \cap d$, $M_2 \in d_2 \cap d$. Suy ra M_0, M_1, M_2 thẳng hàng. Từ đó tìm được M_1, M_2 và suy ra phương trình đường thẳng d.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_1; (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_2. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$. Do đó một vectơ chỉ phương của d có thể chọn là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right]$.

• Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2: Tìm các giao điểm $A=d_1\cap(P)$, $B=d_2\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.

• Đường thẳng d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2: Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với Δ và chứa d_1, mặt phẳng (Q) song song với Δ và chứa d_2. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$.

• Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

Cách làm: Gọi $M \in d_1$, $N \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N. Viết phương trình đường thẳng MN chính là đường vuông góc chung của d_1, d_2.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+1}{2}$.

B. $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+1}{2}$.

D. $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-1}{2}$.

Hướng dẫn giảii

Chọn B.

Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

Lấy điểm $M = d \cap (P) \Rightarrow M\left(4 - 2t; -2 + 2t; -1 + t\right) \in d$. Thay đổi tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được: $4 - 2t - 2 + 2t + 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $M\left(0;2;1\right)$.

Do đó $d \cap (P) = M\left(0;2;1\right)$.

Lấy $A(4;-2;-1) \in d$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng AH đi qua $A(4;-2;-1)$ và nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương nên AH có phương trình là $\begin{cases} x = 4 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \\ z = -1 - t_1 \end{cases} \left(t_1 \in \mathbb{R}\right)$.

Suy ra $H\left(4 + t_1; -2 + t_1; -1 - t_1\right)$.

Thay tọa độ H vào phương trình mặt phẳng (P) được

$$4 + t_1 - 2 + t_1 + 1 + t_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{10}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

MH là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P), MH đi qua $M\left(0;2;1\right)$ và nhận $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; -\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}(-5;7;2)$ là vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

Bài tập 2. Cho các đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và đường thẳng $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$.
Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2 là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $I = d_1 \cap \Delta$, $I\left(1 + t, -1 + 2t, -t\right) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \left(t; 2t - 1; -t - 2\right)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Do $\vec{u}_{d_2} = (1;2;2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_2 và $\Delta \perp d_2$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}.\vec{u}_{d_2}=0 \Leftrightarrow t+2(2t-1)+2(-t-2)=0 \Leftrightarrow 3t-6=0 \Leftrightarrow t=2$.

Vậy $\overrightarrow{AI}=(2;3;-4)$. Phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-4}$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 3x+y-2z=0$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2: \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{4}$.Đường thẳng vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$.

B. $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{2}$.

C. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

D. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$d_1: \frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-t \\ y=6+2t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

$M\in d_1 \Leftrightarrow M(-1-t;6+2t;t)$.

$$d_2: \frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3t' \\ y=2-t' \quad ,\ t'\in\mathbb{R} \\ z=-4+4t' \end{cases}$$

$N\in d_1 \Leftrightarrow N(1-3t';2-t';-4+4t')$.

$\overrightarrow{MN}=(2+t-3t';-4-2t-t';-4-t+4t')$.

$(P): 3x+y-2z=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(3;1;-2)$.

Đường thẳng (d) vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 tại M và cắt d_2 tại N suy ra

$$\overrightarrow{MN}=k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t-3t'=3k \\ -4-2t-t'=k \\ -4-t+4t'=-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t'=1 \\ k=-1 \end{cases}$$

$t=-2 \Rightarrow M(1;2;-2)$

Do $(d)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_{(P)}}$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=1+3s \\ y=2+s \quad ; s\in\mathbb{R} \\ z=-2-2s \end{cases}$.

Chọn $s=-1 \Rightarrow A(-2;1;0)\in d \Rightarrow d: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$.

Bài tập 4. Viết phương trình đường thẳng d qua $A\left(1;2;3\right)$ cắt đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và song song với mặt phẳng $\left(P\right):x+y-z-2=0$.

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do $d\cap d_1=B\Rightarrow B\left(2m;m;m+2\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\left(2m-1;m-2;m-1\right)$.

d song song với mặt phẳng $\left(P\right)$ nên

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)}=0\Leftrightarrow 1\left(2m-1\right)+1.\left(m-2\right)-\left(m-1\right)=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\left(1;-1;0\right)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3\end{cases}$.

Bài tập 5. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $\left(P\right):2x-y+z-10=0$, điểm $A\left(1;3;2\right)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt $\left(P\right)$ và d lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của MN.

A. $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $N=\Delta\cap d\Rightarrow N\left(-2+2t;1+t;1-t\right)$.

A là trung điểm của $MN\Rightarrow M\left(4-2t;5-t;3+t\right)$.

Mà $M\in\left(P\right)$ nên tọa độ M thỏa phương trình $\left(P\right)$, ta được:

$2\left(4-2t\right)-\left(5-t\right)+\left(3+t\right)-10=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow N\left(-6;-1;3\right),M\left(8;7;1\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(14;8;-2\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M và N nên có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NM}=\left(7;4;-1\right)$ nên có phương trình là $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Bài tập 6. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại M,N. Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

B. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$.

D. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ và bán kính $R=10$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;1)$.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên Δ và mặt phẳng (α).

$\Rightarrow IK \perp (\alpha)$ nên phương trình đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{cases}$.

Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;7;3)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $IH \ge IK$. Do đó IH nhỏ nhất khi H trùng với K.

Để MN lớn nhất thì IH phải nhỏ nhất.

Khi đó đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và K. Ta có $\overrightarrow{AK}=(1;4;6)$.

Đường thẳng Δ có phương trình là: $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Bài tập 7. Trong không gian *Oxyz*, cho ΔABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $d:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}(2;1;-1)$.

B. $\vec{u}(1;-1;0)$.

C. $\vec{u}(0;1;-1)$.

D. $\vec{u}(1;2;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4-t \\ z = 2-t \end{cases} \Rightarrow C(2+2t;4-t;2-t)$.

Gọi M là trung điểm của AC nên $M = \left(2+t;\frac{7-t}{2};\frac{5-t}{2}\right)$.

Vì $M \in d$ nên $\frac{(2+t)-3}{-1} = \frac{\left(\frac{7-t}{2}\right)-3}{2} = \frac{\left(\frac{5-t}{2}\right)-2}{-1} \Leftrightarrow \frac{t-1}{-1} = \frac{1-t}{4} = \frac{1-t}{-2} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $C(4;3;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ là: $2x - y - z + 2 = 0$.

Gọi H là giao điểm của (P) và $\Delta \Rightarrow H(2;4;2)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác Δ, suy ra H là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(2;5;1)$.

Do $A' \in BC$ nên đường thẳng BC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'} = (-2;2;0) = 2(-1;1;0)$.

Suy ra phương trình của đường thẳng BC là $\begin{cases} x = 4-t \\ y = 3+t \\ z = 1 \end{cases}$.

Vì $B = BM \cap BC \Rightarrow B(2;5;1) = A'$.

Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0;2;-2) = 2(0;1;-1)$.

Bài tập 8. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(4;-2;4)$, $B(0;0;-2)$. Gọi d là đường thẳng song song và cách Δ một khoảng bằng $\sqrt{5}$, gần đường thẳng AB nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm nào dưới đây?

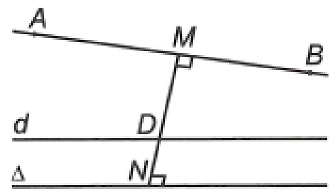
A. $(2;1;0)$. **B.** $\left(-\frac{2}{3};-\frac{14}{3};0\right)$. **C.** $(3;2;0)$. **D.** $(0;0;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình tham số của đường thẳng AB có dạng: $\begin{cases} x = 4t \\ y = -2t \\ z = -2+6t \end{cases}$.

Để đường thẳng d thỏa mãn bài toán thì ta có hình vẽ tương ứng



Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và Δ là MN với $M\left(0;-5;1\right), N\left(3;1;1\right)$.

Để d gần đường thẳng AB nhất thì d phải đi qua điểm D nằm trên đoạn MN mà $DN = d\left(d,\Delta\right) = \sqrt{5}, MN = 3\sqrt{5}$. Do đó $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{DN} \Rightarrow D = \left(2;-1;1\right)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_{(d)}} = \left(2;-1;1\right)$.

Suy ra phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-t \\ z = 1+t \end{cases}$

Đường thẳng d cắt $\left(Oxy\right)$ tại điểm có $z = 1+t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy giao điểm của d và $\left(Oxy\right)$ là $\left(0;0;0\right)$.

Bài tập 9. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho bốn đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-1};\ \Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$$

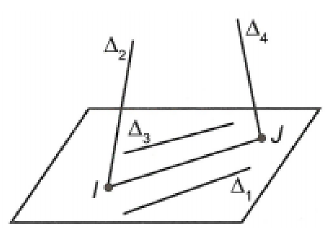
$$\Delta_3: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1};\ \Delta_4: \frac{x-5}{1} = \frac{y-a}{3} = \frac{z-b}{1}$$

Biết không tồn tại đường thẳng nào trong không gian mà cắt được đồng thời cả bốn đường thẳng trên. Giá trị của biểu thức $T = a-2b$ bằng

A. –2. **B.** –3. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có: $\Delta_1 // \Delta_3$.

Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa Δ_1 và $\Delta_3 \Rightarrow \left(P\right): x+2y-z+3=0$.

Gọi $I = \Delta_2 \cap \left(P\right) \Rightarrow I\left(0;-1;1\right)$.

Gọi $J = \Delta_4 \cap \left(P\right) \Rightarrow J\left(\dfrac{-2a+b+22}{6}; \dfrac{3b-24}{6}; \dfrac{-2a+7b-8}{6}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \left(\dfrac{-2a+b+22}{6}; \dfrac{3b-18}{6}; \dfrac{-2a+7b-14}{6} \right)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $\overrightarrow{IJ}$ phải cùng phương với $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (1;-1;-1)$.

Suy ra $\dfrac{-2a+b+22}{6} = \dfrac{3b-18}{-6} = \dfrac{-2a+7b-14}{-6} \Leftrightarrow a-2b=2$.

Dạng 3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho đường thẳng

$(\Delta): \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ và mặt phẳng

$(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ) và (α) ta có công thức:

$$\sin\varphi = \dfrac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Chú ý: A,B,C và a,b,c không đồng thời bằng 0.

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4y+5z+8=0$.

Tính góc tạo bởi Δ và (α).

Hướng dẫn giải

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;1)$.

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;4;5)$.

Ta có: $\sin\left(\widehat{\Delta,(\alpha)}\right) = \left|\cos\left(\vec{n},\vec{u}\right)\right|$

$$= \dfrac{|3.2+4.1+5.1|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\left(\widehat{\Delta,(\alpha)}\right) = 60^\circ$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{4}$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z+6=0$. Biết Δ cắt mặt phẳng (P) tại A, M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P).

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{4}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;4)$.

Mặt phẳng $(P): x+y-2z+6=0$ có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (1;1;-2)$.

$$\sin\left(\Delta,(P)\right)=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\sin\varphi$$

Suy ra $d\left(M,\Delta\right)=MH=MA.\sin\varphi=2\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{3}}=2$.

Dạng 4: Góc giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Cho hai đường thẳng:

$$\left(\Delta_1\right):\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$\left(\Delta_2\right):\frac{x-x_0}{a'}=\frac{y-y_0}{b'}=\frac{z-z_0}{c'}$$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $\left(\Delta_1\right)$ và $\left(\Delta_2\right)$.

Ta có: $\cos\varphi=\dfrac{\left|aa'+bb'+cc'\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$.

Ví dụ: Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng

$\Delta_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$;

$\Delta_2:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$.

Tính góc giữa hai đường thẳng trên.

Hướng dẫn giải

Vectơ chỉ phương của Δ_1 là $\overrightarrow{u_1}=\left(-2;1;2\right)$.

Vectơ chỉ phương của Δ_2 là $\overrightarrow{u_2}=\left(1;1;-4\right)$.

$$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$$

$$=\frac{\left|(-2).1+1.1+2.(-4)\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{9}{3.3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng đã cho là 45°.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x-z.\sin\alpha+\cos\alpha=0$; $(Q): y-z.\cos\alpha-\sin\alpha=0$; $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa (d) và trục *Oz* là:

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left(1;0;-\sin\alpha\right)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left(0;1;-\cos\alpha\right)$.

(d) là giao tuyến của (P) và (Q) nên vectơ chỉ phương của (d) là:

$\overrightarrow{u_{(d)}}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(\sin\alpha;\cos\alpha;1)$.

Vectơ chỉ phương của (Oz) là $\overrightarrow{u_{(Oz)}}=(0;0;1)$.

Suy ra $\cos(d,Oz)=\dfrac{|0.\sin\alpha+0.\cos\alpha+1.1|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1^2}.\sqrt{0+0+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(d,Oz)=45°$.

Vậy góc giữa (d) và trục (Oz) là $45°$.

Bài tập 2. Trong không gian *Oxyz*, d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$.

B. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{3}$.

C. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{-3}$.

D. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;-1)$.

Đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta}=(1;-2;2)$.

Giả sử đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d$.

Do $0°\le(d,\Delta)\le 90°$ mà theo giả thiết d tạo Δ góc lớn nhất nên $(d,\Delta)=90°\Rightarrow\vec{u}_d\perp\vec{u}_{\Delta}$.

Lại có $d//(P)$ nên $\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}$. Do đó chọn $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_{\Delta},\vec{n}_{(P)}\right]=(4;5;3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$.

Bài tập 3. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2;1;-2)$, song song với (P) có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(m;n;1)$, đồng thời tạo với d góc bé nhất. Tính $T=m^2-n^2$.

A. $T=-5$.

B. $T=4$.

C. $T=3$.

D. $T=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;2)$; đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(4;-4;3)$.

$\Delta//(P)\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{n}\Leftrightarrow 2m-n+2=0\Leftrightarrow n=2m+2$.

Mặt khác ta có: $\cos\left(\widehat{\Delta;d}\right)=\frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|4m-4n+3\right|}{\sqrt{m^2+n^2+1}.\sqrt{4^2+\left(-4\right)^2+3^2}}$

$$=\frac{\left|4m+5\right|}{\sqrt{41\left(5m^2+8m+5\right)}}=\frac{1}{\sqrt{41}}.\sqrt{\frac{\left(4m+5\right)^2}{5m^2+8m+5}}=\frac{1}{\sqrt{41}}.\sqrt{\frac{16m^2+40m+25}{5m^2+8m+5}}.$$

Vì $0°\leq\left(\widehat{\Delta,d}\right)\leq 90°$ nên $\left(\widehat{\Delta,d}\right)$ bé nhất khi và chỉ khi $\cos\left(\widehat{\Delta,d}\right)$ lớn nhất.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{16t^2+40t+25}{5t^2+8t+5}\Rightarrow f'\left(t\right)=\frac{-72t^2-90t}{\left(5t^2+8t+5\right)^2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{16}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{16}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max f(t) = f(0) = 5$.

Suy ra $\left(\widehat{\Delta, d}\right)$ bé nhất khi $m = 0 \Rightarrow n = 2$.

Do đó $T = m^2 - n^2 = -4$.

Dạng 5: Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

1. Phương pháp

Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_1 đến (Δ) được tính bởi công thức:

$$d(M_1, \Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}; \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}.$$

Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

Tính khoảng cách từ $M(-2; 1; -1)$ tới d.

Hướng dẫn giải

Ta có $A(1; 2; -2) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-3; -1; 1)$, $\vec{u}(1; 2; -2)$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là:

$$d(M; d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}; \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 1; -1)$ cho trước, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 2 = 0$ và cách điểm $M(0; 2; 1)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1}$.

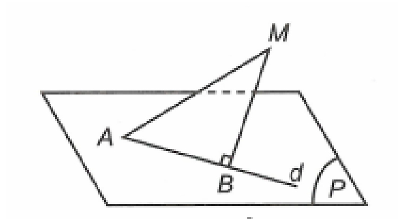
B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta gọi B là hình chiếu của M lên đường thẳng d khi đó $MB \le MA$.

Suy ra $MB_{\max} = MA$ nên đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với MA.

Đồng thời đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) nên ta có

$\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (1;3;-1)$.

Bài tập 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(2;1;-2), B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

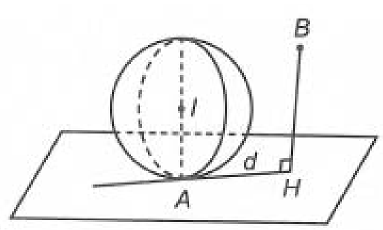
A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 - t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$ có tâm $I(0;-3;-6)$ bán kính $R = 6$.

$IA = 6 = R \Rightarrow A \in (S)$, $IB = 3\sqrt{10} > R$ nên B nằm ngoài (S).



Đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) nên d nằm trong mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

Mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là $x + 2y + 2z = 0$.

Gọi H là hình chiếu của B lên (P) thì tọa độ của $H(4;-1;-1)$.

Ta có: $d(B;d) \ge d(B;(P)) = BH$.

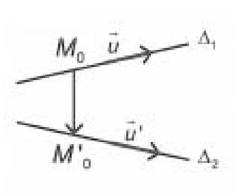
Vậy khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi d đi qua H. Ta có $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AH} = (2;-2;1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

Dạng 6: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau: Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$ và đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$; Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (a';b';c')$ và đi qua $M'_0(x'_0;y'_0;z'_0)$.



Khi đó khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 được tính bởi công thức $d(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right]\right|}$.

Nếu $\Delta_1 // \Delta_2$ ($\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và $M_0 \notin \Delta_2$) thì $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_0, \Delta_2)$

Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2;-1;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1;-1;2)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (4;-2;2)$.

Do $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và $M \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$.

Suy ra $d(d_1;d_2) = d(N;d_1) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{MN}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (0;1;2)$, $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right] = (-3;-4;2)$.

Suy ra $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{MN}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|} = \dfrac{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

Vậy $d(d_1;d_2) = \dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 3 = 0$, đường thẳng $d' : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$ và điểm $A(0;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, nằm trong (P) sao cho khoảng cách d và d' đạt giá trị lớn nhất.

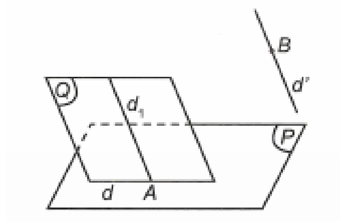
A. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{-9}$.

B. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z-1}{9}$.

C. $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-1}{9}$.   **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-1}{-9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi d_1 là đường thẳng đi qua A và song song với d'.

Phương trình của d_1 là: $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=1+t \end{cases}$.

Trên đường thẳng d_1 lấy điểm $B(1;0;0)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và d_1.

Ta có $d(d,d')=d(d',(Q))=d(B,(Q))$.

Do d_1 cố định cho nên $d(d,d')=d(B,(Q))\le d(B,d_1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\overrightarrow{BH}$ trong đó H là hình chiếu của B lên d_1.

Ta tìm được $H\left(\frac{-2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ nên $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{-5}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(Q)}}=(-5;2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(1;7;-9)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d là $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{-9}$.

Lưu ý : *Vì đường thẳng d đi qua A nên ta có thể loại đáp án bằng cách thay tọa độ điểm A vào các đáp án trong bài*

Dạng 7: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Trong không gian *Oxyz*, xét đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$.

(Δ) cắt $(\alpha)\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}\ne 0\Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3\ne 0$.

$(\Delta)//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n}=0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0 \end{cases}$.

$(\Delta) \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n}=0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$

$(\Delta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1:a_2:a_3=A:B:C$.

Ta có thể biện luận vị trí tương đối dựa vào số nghiệm của phương trình đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α).

2. **Bài tập**

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z-6=0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P).
B. d song song với (P).
C. d vuông góc với (P).
D. d nằm trong (P).

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;-3;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(3;-3;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Do $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$ và hai vectơ này không cùng phương nên đường thẳng d cắt và không vuông góc với (P).

Bài tập 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng có phương trình $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+my+(m^2-1)z-7=0$ với m là tham số thực. Tìm m sao cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

A. $m=1$.
B. $m=-1$.
C. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.
D. $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;m;m^2-1)$.

$d//(P) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 1+m-m^2+1=0 \Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy với $m=-2$ thì $d\subset(P)$ (loại). Vậy $m=-1$.

Bài tập 3. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-5=0$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $d//(\alpha)$. **B.** $d\subset(\alpha)$.

C. d cắt (α) và không vuông góc với (α). **D.** $d\perp(\alpha)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x=1+2t & (1) \\ y=2+4t & (2) \\ z=3+t & (3) \\ x-y+2z-5=0 & (*) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được $1+2t-(2+4t)+2(3+t)-5=0$.

Phương trình này có vô số nghiệm.

Do đó, đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α).

Bài tập 4. Trong không gian *Oxyz*, cho hai mặt phẳng

$$(P): x+2y-z-1=0,\ (Q): 2x+y-z+2=0$$

và hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, $\Delta_2:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ và cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K. Độ dài đoạn HK bằng

A. $\frac{8\sqrt{11}}{7}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 6. **D.** $\frac{\sqrt{11}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-1;-1;-3)$.

Gọi $H(2t;1+t;-1+2t)$; $K(m;2-m;1+2m)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HK}=(m-2t;1-m-t;2+2m-2t)$.

Vì Δ song song với 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ nên $\overrightarrow{HK}=k\vec{u}$ nên

$$\frac{m-2t}{1}=\frac{1-m-t}{1}=\frac{2+2m-2t}{3}.$$

Tính ra được $m=\frac{2}{7};\ t=\frac{-3}{7}$. Suy ra $HK=\frac{8\sqrt{11}}{7}$.

Bài tập 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 2(m^2+m+2)x+(m^2-1)y+(m+2)z+m^2+m+1=0$ luôn chứa đường thẳng Δ cố định khi m thay đổi. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ là?

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $2(m^2+m+2)x+(m^2-1)y+(m+2)z+m^2+m+1=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^2(2x+y+1)+m(2x+z+1)+4x-y+2z+1=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+1=0\\2x+z+1=0\\4x-y+2z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+1=0\\2x+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z\\2x+y+1=0\end{cases}$$

Vậy (P) luôn chứa đường thẳng (Δ) cố định: $\begin{cases}x=-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\\y=t\\z=t\end{cases}$

Đường thẳng Δ đi qua $A\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(-\frac{1}{2};1;1\right)$.

Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ là: $d(O;\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Dạng 8: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ đi qua $M_1(x_0;y_0;z_0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(a;b;c)$ và $d_2:\frac{x-x'_0}{a'}=\frac{y-y'_0}{b'}=\frac{z-z'_0}{c'}$ đi qua $M_2(x'_0;y'_0;z'_0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(a';b';c')$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2, ta sử dụng phương pháp sau:

+) d_1 trùng $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$.

+) $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$.

+) d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$.

+) d_1 chéo $d_2 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ và } d_2 : \frac{x+3}{4} = \frac{y+9}{8} = \frac{z+2}{m^2} \quad (m \neq 0)$$

Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d_1 // d_2$ có số phần tử là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng d_1 đi qua $A(1;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;2;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $B(-3;-9;-2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (4;8;m^2)$.

Đường thẳng $d_1 // d_2$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và hai đường thẳng d_1 và d_2 không trùng nhau.

Vì $\dfrac{-3-1}{1} = \dfrac{-9+1}{2} = \dfrac{-2-2}{1}$ nên B nằm trên đường thẳng d_1.

Do đó hai đường thẳng này luôn có điểm chung là B nên hai đường thẳng không thể song song.

Bài tập 2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3},\ \Delta_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

A. Δ_1 song song với Δ_2. **B.** Δ_1 chéo với Δ_2.

C. Δ_1 cắt Δ_2. **D.** Δ_1 trùng với Δ_2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{2}{-2}$ nên vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2;2;3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-1;-2;1)$ của Δ_2.

Suy ra Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2.

Lấy $M(1;-1;0) \in \Delta_1$, $N(3;3;-2) \in \Delta_2$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (2;4;-2)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN} = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2.

Dạng 9: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

1. **Phương pháp**

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \end{cases}$ và mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b^2) + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.

Bước 1: Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến đường thẳng d là

$$h = d(I,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_0}.\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

Bước 2: So sánh $d(I,d)$ với bán kính R của mặt cầu:

- Nếu $d(I,d) > R$ thì d không cắt (S).
- Nếu $d(I,d) = R$ thì d tiếp xúc (S).
- Nếu $d(I,d) < R$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu (S).

Phương pháp đại số

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

Chứng minh d luôn cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$ và bán kính $R = 5$.

Đường thẳng d đi qua $M(-2;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;3;2)$.

Ta có $h = d(I,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 3$.

Vì $h < R$ nên d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu

Thế (1), (2), (3) vào phương trình (S) và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo t $(*)$.

- Nếu phương trình (*) vô nghiệm thì d không cắt (S).
- Nếu phương trình (*) có một nghiệm thì d tiếp xúc (S).
- Nếu phương trình (*) có hai nghiệm thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N.

Chú ý: Để tìm tọa độ M, N ta thay giá trị t vào phương trình đường thẳng d.

$(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 17$ cắt trục Oz tại hai điểm A, B. Tìm độ dài đoạn AB.

Hướng dẫn giải

Gọi M là giao điểm của (S) với trục Oz.

Ta có $M \in Oz$ nên $M(0;0;t)$.

Mà $M \in (S)$ nên $0^2 + 0^2 + (t+2)^2 = 17$

$\Leftrightarrow (t+2)^2 = 17 \Leftrightarrow |t+2| = \sqrt{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 - \sqrt{17} \\ t = -2 + \sqrt{17} \end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ các giao điểm là $A\left(0;0;-2-\sqrt{17}\right)$, $B\left(0;0;-2+\sqrt{17}\right) \Rightarrow AB = 2\sqrt{17}$.

2. **Bài tập**

Bài tập 1. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình là $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$ là

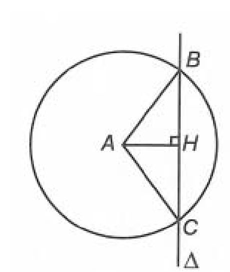
A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$.
B. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

C. $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 25$.
D. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi (S) là mặt cầu tâm $A(0;0;-2)$ và có bán kính R.



Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;-3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;3;2)$.

Gọi H là trung điểm BC nên $AH \perp BC$.

Ta có $AH = d(A, \Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

Với $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (2;-2;1) \\ \vec{u} = (2;3;2) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right] = (-7;-2;10) \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 10^2}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = 3$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

Bài tập 2. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$.

Giá trị $2a+b+c$ bằng

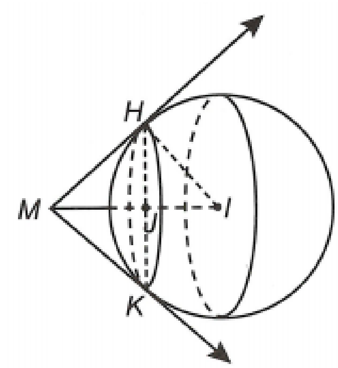
A. $\frac{134}{25}$. **B.** $\frac{116}{25}$. **C.** $\frac{84}{25}$. **D.** $\frac{62}{25}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R=3$.

Khi đó $IM=5>R \Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.



Phương trình đường thẳng MI là $\begin{cases} x=1 \\ x=-1+4t \\ z=2-3t \end{cases}$.

Tâm $J(a;b;c)$ nằm trên MI nên $J(1;-1+4t;2-3t)$.

Xét ΔMHI vuông tại H có

$MI=5;\ IH=3 \Rightarrow MH=\sqrt{MI^2-HI^2}=4$.

Mặt khác $\begin{cases} M(1;3;-1) \\ J(1;-1+4t;2-3t) \end{cases} \Rightarrow MJ=\sqrt{(-4+4t)^2+(3-3t)^2}$.

$MJ.MI=MH^2 \Rightarrow MJ=\frac{16}{5}$

$\Leftrightarrow (-4+4t)^2+(3-2t)^2=\frac{256}{25}$

$\Leftrightarrow 25t^2-50t+\frac{369}{25}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{25} \\ t=\frac{41}{25} \end{array}\right.$.

Suy ra $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ hoặc $J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right)$.

+) Với $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ thì $IJ=\frac{9}{5}<IM$ (nhận).

+) Với $J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right)$ thì $IJ=\frac{41}{5}>IM$ (loại).

Vậy $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ nên $2a+b+c=\frac{84}{25}$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{14}{3}$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{2}$. Gọi $A(x_0;y_0;z_0)$, $x_0>0$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có các tiếp điểm B,C,D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều.

Giá trị của biểu thức $P=x_0+y_0+z_0$ là

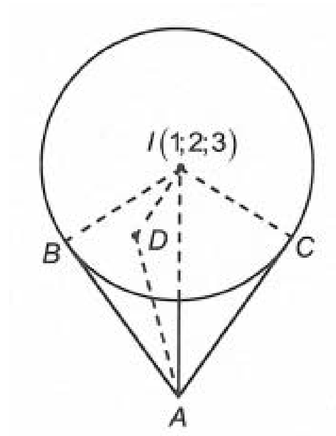
A. 6. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

I là tâm mặt cầu thì $I(1;2;3)$.

Gọi O là giao điểm của mặt phẳng (BCD) và đoạn AI.



Vì theo giả thiết $AB=AC=AD$ và $IB=IC=ID=\sqrt{\frac{14}{3}}$ nên AI vuông góc với mặt phẳng (BCD) tại O. Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Đặt $AI=x\left(x>\sqrt{\frac{14}{3}}\right)$.

Ta có $AB=\sqrt{AI^2-IB^2}=\sqrt{x^2-\frac{14}{3}}$

$IB^2=IO.IA\Rightarrow OI=\frac{14}{3x}\Rightarrow OB=\sqrt{IB^2-IO^2}=\sqrt{\frac{14}{3}-\left(\frac{14}{3x}\right)^2}$

$\Rightarrow BD^2=OB^2+OD^2-2OB.OD.\cos120^\circ=3OB^2$

$\Rightarrow BD=\sqrt{3}OB\Rightarrow BD=\sqrt{3}OB=\sqrt{3.\left(\frac{14}{3}-\frac{196}{9x^2}\right)}$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên

$AB=BD\Rightarrow\sqrt{x^2-\frac{14}{3}}=\sqrt{3\left(\frac{14}{3}-\frac{196}{9x^2}\right)}\Leftrightarrow x^2-\frac{14}{3}=14-\frac{196}{3x^2}$

$3x^4-56x^2+196=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{14}{3}\\x^2=14\end{array}\right.\Rightarrow x=\sqrt{14}$.

$A\in d$ nên $A(4+3t;4+2t;4+t)$.

Suy ra $AI=\sqrt{14}\Leftrightarrow\sqrt{(4+3t-1)^2+(4+2t-2)^2+(4+t-3)^2}=\sqrt{14}$

$\Leftrightarrow |t+1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(4;4;4) \\ A(-2;0;2) \end{array}\right.$.

Do $x_0 > 0$ nên điểm A có tọa độ $A(4;4;4)$.

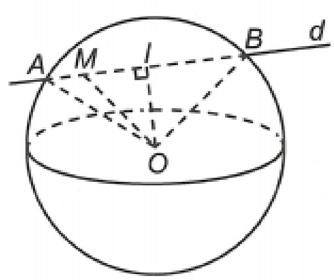
Suy ra $P = 12$.

Bài tập 4. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm P, Q, R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} = \frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng (d) thay đổi nhưng luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và cắt (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Diện tích lớn nhất của ΔAOB là

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (PQR).

Dễ thấy $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow OH = 2\sqrt{2}$.

Khi đó (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $OM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0} = 1 < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Gọi I là trung điểm của AB, do ΔOAB cân tại O nên $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OI.AB$.

Đặt $OI = x$. Vì $OI \le OM$ nên $0 < x \le 1$ và $AB = 2\sqrt{8 - x^2}$.

Ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} x.2\sqrt{8 - x^2} = x\sqrt{8 - x^2} = \sqrt{8x^2 - x^4}$.

Xét hàm số $f(x) = 8x^2 - x^4,\ 0 < x \le 1$.

Vì $f'(x) = 4x(4 - x^2) > 0$ với mọi $x \in (0;1]$ nên $f(x) \le f(1) = 7$.

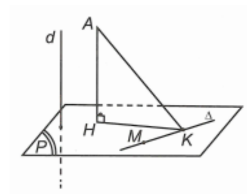
Suy ra diện tích của ΔOAB lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ đạt được khi M là trung điểm của AB.

Dạng 10: Một số bài toán cực trị

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $M(-2;-2;1), A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;7;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;-4)$.

Hướng dẫn giải



Chọn C.

Xét (P) là mặt phẳng qua M và $(P)\perp(d)$.

Mặt phẳng (P) qua $M(-2;-2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$ nên có phương trình: $2x+2y-z+9=0$.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ.

Khi đó $AK\ge AH=const$ nên AK đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $K\equiv H$.

Đường thẳng AH đi qua $A(1;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$ nên AH có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\end{cases}$.

Vì $H\in AH$ nên $H(1+2t;2+2t;-3-t)$.

Lại $H\in(P)$ nên $2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;-2;-1)$.

Vậy $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{HM}=(1;0;2)$.

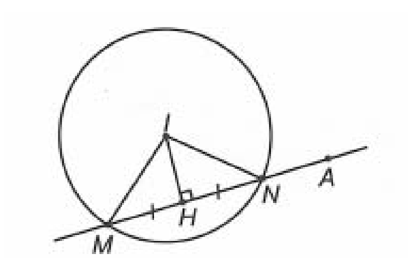
Bài tập 2: Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N.

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$. **D.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2-(-3)}=3$.

Ta có: $AI=\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{34}>R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S).

Ta lại có: $S=AM+4AN$.

Đặt $AM=x,\ x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$.

Mà $AM.AN=AI^2-R^2=34-9=25\Rightarrow AN=\dfrac{25}{AM}$.

Do đó: $S=f(x)=x+\dfrac{100}{x}$ với $x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$.

Ta có: $f'(x)=1-\dfrac{100}{x^2}=\dfrac{x^2-100}{x}<0$ với $x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$.

Do đó: $\min\limits_{\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]} f(x)=f\left(\sqrt{34}+3\right)=5\sqrt{34}-9$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A,M,N,I$ thẳng hàng và $AM=\sqrt{34}+3;\ AN=\sqrt{34}-3$.

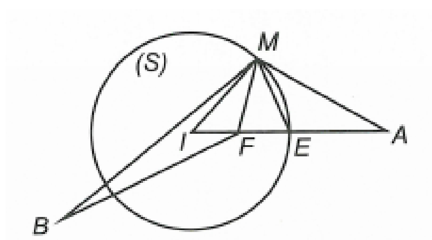
Bài tập 3: Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(9;6;11), B(5;7;2)$ và điểm M di động trên mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$.

Giá trị nhỏ nhất của $AM+2MB$ bằng

A. $\sqrt{105}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{102}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=6$.

Ta có $IA=12=2R$.

Gọi E là giao điểm của IA và mặt cầu (S) suy ra E là trung điểm của IA nên $E(5;4;7)$.

Gọi F là trung điểm của IE suy ra $F(3;3;5)$.

Xét ΔMIF và ΔAIM có $\widehat{AIM}$ chung và $\dfrac{IF}{IM}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\Delta MIF \# \Delta AIM$ (c.g.c) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MF}=\dfrac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF$.

Do đó $AM+2MB=2(MF+MB)\ge 2BF=2\sqrt{29}$ (theo bất đẳng thức tam giác).

Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm FB và mặt cầu (S).